|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 Введение в дифференциальные уравнения  *Дифференциальное уравнение - уравнение, связывающее значение производных неизвестной функции (или ее дифференциал) со значением самой функции, независимой переменной и другими параметрами.*  *Если искомая функция зависит от одной переменной, то это однородное дифференциальное уравнение. Если от нескольких, то это уравнение частных производных.*  *Решение ДУ - функция (или семейство функций), заданная на интервале I, которая обращает ДУ в тождество.*  *Каждое ДУ имеет бесконечное множество решений.*  *Общее решение ДУ - выражение для решения, содержащее произвольные постоянные.*  *Частное решение ДУ - общее решение с конкретными параметрами.*  *Полное решение -решение, содержащее все решения*  *Конкретное решение – решение с заданным дополнительным условием*  Процесс построения решения ДУ, как правило, называется интегрированием.  *Порядок ДУ - порядок старшей производной в ДУ.*  В конкретных случаях значения параметров определяется из дополнительных (краевых) условий. Если эти условия относятся к одному значению аргумента, то они называются начальными (*x*(*t*0) = 1*, x*0(*t*) = 0). Если же они относятся к различным значениям, то тогда граничными (*x*(*t*1) = *α, x*(*t*2) = *β*).  *Начальное условие (задача) Коши - условие, задающее значение функции и (n* − 1*) ее первых производных.*  *Последнее является формулой для нахождения решения задачи Коши.* | 2 Линейное однородное уравнение 1-го порядка с  постоянными коэффицентами  Определение 1. *Однородное ДУ*  Определение 2. *Линейное неоднородное уравнение*  Теорема 1. *Поставленная задача однозначно разрешима* ∀*s* ∈ *I,*∀*ξ* ∈ *R, и ее решение представляется в следующем виде:*  Доказательство.  Введем замену переменной *u* = *xe*−*λt*  Замечание 1. *Заменяя C на произвольную константу, получаем общее решение* | 3Квазиполиномы  Определение 1. *Квазиполином - выражение вида:*  Доказательство.  Продифференцируем полученное выражение *m*1 + 1 раз:  *P*2(*t*) = *Q*2(*t*) имеют одну и ту же степень  *Q*2(*t*) ≡ 0 ⇒ *P*2(*t*) ≡ 0  Лемма 2 (Критерий совпадения двух квазиполиномов). *Два квазиполинома освпадают тогда и только тогда, когда их коэффиценты равны.*  Доказательство.  ⇒  Из предыдущей теоремы вытекает, что  ⇐ |
| 4 Линейное однородное уравнение 1-го порядка с  квазиполиномами  Определение 1. *Линейное ДУ 1-го порядка с квазиполиномами - это уравнение вида:*  Теорема 1. *Общее решение такого уравнения задаётся квазиполиномом вида:*  Доказательство. | 5 Линейное однородное уравнение n-го порядка с  постоянными коэффицентами  Определение 1. *Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффицентами - это ДУ вида*  *.*  Если обобщить оператор *D* определенным образом  то можно переписать данное уравнение в виде  Определение 2. *Оператор Ln - это выражение*  Таким образом, уравнение можно привести к виду *Ln* = 0.  Оператор *Ln* является линейным, т.е. выполняются следующие равенства:  Свойства линейного уравнения, порождённые линейностью оператора *Ln*:  1)Линейность множества решений  Доказательство.  *x*1(*t*)*,...,xm*(*t*) − множество решений  *C*1*x*1 + *...* + *Cmxm* − линейная комбинация решений, тогда  *Ln*(*C*1*x*1 + *...* + *Cmxm*) = *C*1*Lnx*1 + *...* + *CmLnxm* ≡ 0 ⇒ *C*1*x*1 + *...* + *Cmxm* − решение*.*  2)Принцип суперпозиции для неоднородного уравнения  *Lnx*1(*t*) = *f*1(*t*)*,...,Lnxk*(*t*) = *fk*(*t*) − некоторые равенства, тогда  *x*1(*t*) + *...* + *xk*(*t*) − решение уравнения *Lnx* = *f*1(*t*) + *...* + *fk*(*t*)  Доказательство.  *x*1(*t*) + *...* + *xk*(*t*) − решения  *Ln*(*x*1(*t*) + *...* + *xk*(*t*)) = *Lnx*1(*t*) + *...* + *Lnxk*(*t*) = *f*1(*t*) + *...* + *fk*(*t*)*.* | 6-7 Начальная задача для линейного однородного  стационарного уравнения  Случай нулевых начальных коэффициентов времени (s=0).  Теорема 1. *Для любых начальных значений начальная задача однозначно разрешима. Решение представимо в виде квазиполинома: z*(*t*) = *Q*1(*t*)*eγ*1*t* + *...* + *Qmeγmt, причем его коэффициенты являются линейными формами начальных значений, а степень degQj* ≤ *n* − 1*. Если корень простой, то degQj* = 0*.* Доказательство. Для случая n=2.  Запишем факторизацию *L*2*z* : (*D* − *ϑ*1)(*D* − *ϑ*2)*z* = 0.  Начальные данные: *Dz*|*t*=0 = *ξi, z*|*t*=0 = *ξ*0.  Введём замену переменных: (*D* − *ϑ*1)*ω* = 0 - линейное однородное 1-го порядка. |
| 8 Общее решение линейного однородного  стационарного уравнения  *L*n*z* = 0;  Теорема 1. *Общее решение уравнения является квазиполиномом*    Доказательство. | 9 Фундаментальная система решений линейных  однородных уравнений  раз дифференцируема.  Определение 1. *Вронскианом системы функций zj называется*  Теорема 1 (формула Остроградсткого-Лиувилля). *Если z*1*...zn - решение линейного уравнения, то вронскиан*  Доказательство. *для n=2:*  *Составим W(t):*  *2)Продифференцируем: Dw*(*t*) = *Dz*1*Dz*2 + *z*1*D*2*z*2 − *Dz*2*Dz*1 − *z*2*D*2*z*1 = *z*1*D*2*z*2 − *z*2*D*2*z*1*.*  *3)Подставим значения вторых производных: z*1(−*a*1*Dz*2 − *a*0*z*2) − *z*2(−*a*1*Dz*1 − *a*0*z*1)*.*  *4)Соберём слагаемые:* −*a*1(*z*1*Dz*2 − *z*2*Dz*1) = −*a*1*w,w* = *w*(*s*)exp−*a*1(*t*−*s*)*.*  Следствие 1. *Вронскиан системы решений z*1*...zn либо* ≡ *0, либо* ≠ *0 для всех n.* | 10Базис ФСР  Определение 2. *z*1*...zn* −*линейно зависимы, если, в противном случае - линейно независимы.*  Следствие 2. *Система функций линейно зависима, если одна из функций является линейной комбинацией остальных.*  Теорема 2. *Пусть Lnz* = 0*, тогда z*1*...zn - линейно зависима* ⇔ ∃*t*0 ∈ *I* : *W*(*t*0) = 0*.*  Доказательство. ⇒  *Пусть z*1*...zn - линейно зависима, тогда, согласно следствию, одно решение выражается через остальные z*1 = *c*2*z*2 + *...* + *cnzn.*  *Составим вронскиан:*  ⇐ *Пусть* ∃*t*0 : *W*(*t*0) = 0  *Рассмотрим систему уравнений:*  *.* |
| 3  Лемма 3. *Первообразная квазиполинома - квазиполином.*  *У Pjи Qj степени совпадают, а коэффиценты взаимно-однозначно выражаются.* | 2  Замечание 2. *Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.*  *Общее решение однородного уравнения:*  *c* = *Ceλt*  *Нахождение частного решения неоднородного уравнения:*  Замечание 3. *Общее решение неоднородных ДУ представимо в виде x*(*t*) = *xоо* + *xчн*(*t*) | 1 |
| 6-7  Аналогично для больших n.  Определение 1. *Сдвиг z*(*t*) *на величину s - это функция z*(*t*) = *z*(*t* − *s*)  Лемма 1. *Сдвиг квазиполинома также является квазиполиномом.*  *Идея доказательства:*  Лемма 2. ∀*s сдвиг решения также является решением.*  *Идея доказательства:*  Теорема 2. *начальная задача разрешима. Её решение представимо в виде квазиполинома, где степени полиномов на 1 меньше кратности корня.*  Доказательство.  Замечание 1. *При b >* 2 *доказательство аналогично.*  Следствие 1.  Следствие 2. *Если коэффиценты уравнения действительные, то начальная задача разрешима в виде действительного квазиполинома.* | 5  3)Структура решений *Lnx*(*t*) = *f*(*t*) имеет вид *x*(*t*) = *x*оо(*t*) + *x*чн(*t*) Доказательство.  *Lnx*(*t*) = *f*(*t*) ⇔ *Ln*(*x*оо(*t*) + *x*чн(*t*)) = *f*(*t*) ⇒ *Lnx*оо(*t*) + *Lnx*чн(*t*) = 0 + *f*(*t*)*.*  Определение 3. *Стационар - это оператор Ln с коэффицентом*  5Факторизация оператора Ln  Пусть *Ln* - стационар.  Определение 1. *Характеристический многочлен оператора Ln - это многочлен*  Определение 2. *Характирестические числа оператора - корни характеристического многочлена*  *L* = (*ν* − *ν*1)*n*1*...*(*ν* − *νm*)*nm,n*1 + *...* + *nm* = *n.*  Теорема 1. *Ln* = (*D* − *ν*1)*n*1*...*(*D* − *νm*)*nm*  Доказательство. *n* = 2 | 4  Следствие 1. Если – отсутствует, то решением будет подобный многочлен.  Следствие 2. Общее решение можно находить методом неопределённых коэффициентов.  Замечание 1. *В случае, если γj* = *α* + *iβ, соответсвующий квазиполином имеет вид:*  (*Hj*(*t*)*cos*(*βt*) + *Hjsin*(*βt*))*eαt* |
| 10  Теорема 1. *Любое решение уравнения Lnz* = 0 *может быть предствалено в следующем*  *виде:*  *Доказательство.* Рассмотрим *Lnz* = 0*, Dkz*|*t*=0 = *ck k* = 0*,n* − 1 ⇒ разрешима и записывается в таком виде.  Множество решений такого уравнения является линейным пространством.  Определение 1. *Система функций называется нормированной ФСР при t=0. Сдвиг*  (*ϕ*0(*t* − *s*)*,...,ϕn*−1(*t* − *s*)) *- также является решением.*  Рассмотрим *Lnz* = 0*,Dkz*|*t*=*s* = *ξk* → *z*(*t*) = *ξ*0*ϕ*0(*t* − *s*) + *...* + *ξn*−1*ϕn*−1(*t* − *s*). | 9 | 8 |
| 11 Фазовая плоскость линейного однородного стационарного уравнения 2-го порядка  Определение 1. *График x(t), который можно представить в виде*  *называется фазовым графиком. x* ◦ *y* − *фазовая плоскость.*  Свойства:  1.Если решение постоянно, то фазовым графиком будет точка покоя, иначе параметрически заданные линии (x(t), y(t)).  2.Если есть решение, то сдвиг тоже будет решением  Теорема 1. *Два фазовых графика либо не имеют общих точек, либо совпадают.*  Доказательство. *От противного. Пусть существует точка:*    *Рассмотрим сдвиг решения x*1 *на (*решение) | 1. Общая схема расположения фазовых графиков   1.Точки покоя: *y* = 0*, x* = *ξ* − *const, Dy* = *D*2*x* = 0 ⇒ *a*0*x* = 0 ⇒ (0*,*0) - т.покоя.  2.Выясним поведение фазовых графиков в верхней и нижней полуплоскостях:  *y* = *Dx*    3.Найдём угловой коэффициент касательной к фазовому графику:    *y*(*t*) = 0 → *k* = ∞ - во всех точка графика касательная перпендикулярна оси х.  −*a*1*Dx* − *a*0*x* = 0 → *k* = 0  −*a*1*y* − *a*0*x* = 0 → *k* = 0    Прямая горизонтальных наклонов разделяет на 2 плоскости:  4.При замене t на -t перед коэффициентом *a*1 появляется минус, и все фазовые графики отражаются симметрично относительно оси х и изменяют направление на противоположное. | 13.15Седло  Перейдём к более детальному исследованию расположения фазовых графиков (с учётом коэффициентов или корней характеристического уравнения).    Точка покоя с указанным расположением в её окрестности фазового графика называется седлом. |
| 14Узел  • Случай *a*1 *<* 0    Такое расположение фазового графика называется бикритическим узлом.  Случай *ϑ*1 = *ϑ*2 *<* 0    Точка покоя с таким фазовым графиком называется монокритическим узлом. | 16Фокус и центр  Случай *ϑ*1*,*2 = *λ* ± *iµ,λ* = 0      Точка покоя с таким фазовым графиком называется центром.  Замечание 1. *В данном случае линия горизонтальных наклонов совпадает с осью Оy.*   * Случай     При таком расположении фазовых графиков точка покоя называется фокусом (устойчивым). | 17 Прямя покоя   * Случай *a*0 = 0     *x* = *ξ* − *const,y* = 0. Такое расположение - прямые покоя.  • Случай *a*0 = *a*1 = 0    Такое расположение также называется прямыми покоя. |
| 18 Функция Коши (интегральное представление), решение нулевой начальной задачи с помощью функции Коши  Функция Коши линейного оператора: *L*2 = (*D* − *ν*1)(*D* − *ν*2) Построим функцию Коши этого оператора:  Поставим нулевую задачу для  уравнения *L*2*x* = 0  *x*|*t*=*s* = 0 *Dx*|*t*=*s* = 0  Рассмотрим неоднородное уравнение: *L*2*x* = *f*(*t*)*,t* ∈ *I*  Теорема 1.  *Поставленная задача однозначно разрешима, причем решение задается формулой*  Доказательство.    Данный алгоритм является конструктивным Данный алгоритм затруднителен в построении функции Коши | 19 Функция Коши (интегральное представление), представление функции Коши через базисное решение  Функция Коши линейного оператора: *L*2 = (*D* − *ν*1)(*D* − *ν*2) Построим функцию Коши этого оператора:  Теорема 2 (для произвольного n).  *F*(*t*) ≡ *φn*−1(*t*)*, функция Коши совпадает с последним базисным решением*  Доказательство.  *Для n=2: φ*1(*t*)*, φ*1|*t*=0*, Dφ*1|*t*=0 = 1  *1.Возьмем функцию Коши и покажем, что она является решением*  *2.Покажем, что она удовлетворяет таким же начальным условиямИсходя из этого, решения совпадают*  *производная от интеграла - подынтегральное выражение от верхнего предела.* | 20 Решение произвольной начальной задачи с помощью функции Коши, правило Коши.  Рассмотрим произвольную задачу Коши:  Теорема 3.  *Поставленная задача однозначно разрешима, общее решение находится по формуле:*  Доказательство.    Замечание 1. *Если в формуле заменить ξk на ck(произвольная const), то формула будет представлять общее решение.*  Мы можем сформулировать алгоритм решения с помощью функции Коши метод Коши:  *1)Lnx* = 0 - берем соответствующее однородное уравнение  2)Строим для него нормированный базис (*φ*0*,...,φn*−1). Для частных решенеий достаточно *φn*−1  3)Подставляем функцию в формулу  Замечание 2. *Можно применять модификацию метода Коши*  *x* = *xoo*(*t*) + *x*чн(*t*) |
| 13.15 | 12 | 11 |
| 17 | 16 | 14 |
| 20 | 19 | 18 |
| 21 Метод вариации произвольных постоянных  *Lnx* = *f*(*t*)*.*  Для решения уравнения применим метод, не требующий использования нормированного базиса.  Приведём конструктивное доказательство для *n* = 2.  *D*2*x* + *a*1*Dx* + *a*0*x* = *f*(*t*)*.*  Возьмём какой-либо базис соответствующего однородного решения.  *L*2*x* = 0 ⇒ *ψ*0(*t*)*,ψ*1(*t*) ⇒ *x*оо(*t*) = *c*0*ψ*0(*t*) + *c*1*ψ*1(*t*)*.*  *x*чн−?  Для нахождения частного решения применим метод вариации произвольной постоянной, т.е. частные решения ищем в следующем виде:  Выберем функции *c*0 и *c*1 таким образом, что  (1)  Решаем систему любым способом, находим . Далее находим *c*0(*t*) и *c*1(*t*), по крайней мере в квадратурах.  Теорема 1. *Если функция f непрерывная и ψ*0*, ψ*1 *образуют базис соответсвующего решения, то функция x*чн(*t*) = *c*0(*t*)*ψ*0(*t*) + *c*1(*t*)*ψ*1(*t*) *является частным решением неоднородного уравнения, где функции c*0 *и c*1 *находятся из соотношения* (1)*.*  Замечание 1. *Общее решение неоднородного уравнения есть сумма x* = *x*оо + *x*чн*.*  Замечание 2. *В случае большей размерности n >* 2 *система для определения функций c*0 *и т.д. строится аналогичным образом.* | 22 Построение частного решения методом Эйлера в резонансном случае совпадения одного характеристического числа с контрольным числом квазиполинома.  .  Ставим задачу найти частное решение такого уравнения. В силу принципа суперпозиции построение частного решения можно производить отдельно для каждого слагаемого квазиполинома. Поэтому построение сводится к задаче *Lnz* = *P*(*t*)*eγt*.  Теорема 1. *Уравнение с простейшим квазиполиномом имеет частное решение такого вида: z*(*t*) = *trQ*(*t*)*eγt, где r - кратность корня γ* = *νi, где γ - контрольное число. Если*  Доказательство.  Рассмотрим резонансные случаи, т.е. когда корни характеристического многочлена совпадают с контрольным числом *γ*.  *n* = 2 : *L*2*n* = (*D* − *ν*1)(*D* − *ν*2)*z* = *P*(*t*)*eγt*.  Доказательство разобьём на 4 этапа, в зависимости от совпадения корней с контрольным числом.  *Случай 1:* Резонансный случай совпадения одного корня.  Согласно свойству интеграла от независимого полинома получим:  Что и требовалось доказать в случае 1. | 23 Построение частного решения методом Эйлера в резонансном случае совпадения двух характеристических числа с контрольным числом квазиполинома.  *Случай 3: γ* = *ν*1 = *ν*2  Воспользуемся формулой из замечания и получим:  По аналогии с 1 случаем |
| 24 Построение частного решения методом Эйлера в нерезонансном случае (ни одно характеристическое число не совпадает с контрольным числом квазиполинома).  *Случай 4:*  (не резонансный)  (*D* − *ν*1)(*D* − *ν*2)*z* = *P*(*t*)*eγt*  *1способ)* Аналогично случаю 3.  *2способ)* Формула из замечания:  Упражнение 2. Доказать для произвольного *n* не резонансный случай.  Вывод для *n* =    Замечание 2. *Если коофициент оператора Ln дествительный и правая часть действительный квазиполином, т.е Lnx* = (*P*(*t*)*cos*(*β*)*t*) + *Q*(*t*)*sin*(*βt*))*eγt, то частное решение*  *имеет вид , а s вычисляется так как r из предыдущей теоремы, при этом γ* = *α* ± *iβ.*  *Сформулируем правило Эйлера нахождения частного решения уравнения с квазиполиномом:*  1)Находим корни *Lnx*, т.е *ν*1*,...,nun*.  2)Строим контрольное число  3)a) (совпадений нет) Решение представимо в виде такого же квазиполинома \**eγt*, только полного.  b) (есть *s* совпадений) Решение записывается в виде *tsQ*(*t*)*eγt*, где *Q*(*t*) - полный  квазиполином с неопределёнными коэфициентами.  4)Подставляем в уравнение и методом неопределённых коэффициентов находим неизвестные коэффициенты. | 25 Свойства решений линейных стационарных  уравнений  *Lnx* = *f*(*t*)*, t* ∈ *I*  Пусть соответсвующее однородное уравнение имеет нормированный базис при t=0.  *Lnx* = 0 =*> ϕ*0(*t*)*,...,ϕn*−1(*t*)  Свойства: 1) Дифференциорование решений по своим аргументам  Пусть *Cm*(*E*) множество функций *x* : *E* → *R*, имеющие на множестве E производные до m-го порядка.  Теорема 1. *Если функция m раз дифференцируема* (*f* ∈ *C*(*m*)(*I*))*, тогда решение начальной задачи будет непрерывно дифференцируемо по всем своим аргументам m* + *n раз.*    Доказательство.  1-й этап(дифференцирование по начальным данным) | 26 Непрерывная зависимость решений от начальных данных.  2)Непрерывная зависимость от начальных условий. Наряду с исходной задачей рассмотрим:  Определение 1. *Отклонением решения исходной и возмущенной задачи назовем ρ*(*t,*∆*ξ*) =  Заметим, что отклонение функции f не зависит от f(начальные данные), возникает вопрос, насколько величина возмущения влияет на величину отклонения  Определение 2. *Решение x(t) будем назвать непрерывно зависимым от начальных данных, от x*(*t,ξ*) *- начальные данные*  Теорема 2. *f(t)- непрерывна, t* ∈ *I,I*1 ⊂ *I -компакт* ⇒ *x*(*t,ξ*) *-непрерывно зависит от начальных данных.*  Доказательство. |
| 27 Устойчивость по Ляпунову, критерий устойчивости.  Определение 3. *Решение x*(*t,ξ*) *будем называть устойчивым по Ляпунову, если оно непрерывно зависит от начальных данных на прямой, т.е.*    Если в какой-то момент отклонение небольшое, то дальше решения не разбегутся  Если устойчиво какое-то решение *x*(*t,ξ*), то устойчивы все решения. Поэтому можно говорить об устойчивости уравнения  Устойчивость однородного уравнения равносильна устойчивости неоднородного уравнения(т.к. *ρ* не зависит от f)  Справедливы только для линейных уравнений  Теорема 3. *Критерий устойчивости стационарного уравнения*  *Стационарное уравнения устойчиво* ⇔ *Reνj* ≤ 0*, j* = 1*,n(когда действительные части корней характеристического многочлена неположительны), причем все числа с нулевой действительной частью простые.*  Доказательство. ⇒  ⇐ | 28 Асимптотическая устойчивость  Определение 1. *Если решение устойчиво и* ∆*ξk - мало и ρ*(*t,*∆*ξ*) → 0*, то решешние называется асимптотически устойчивым.*  Теорема 1. *Решение линейного уравнения асимтотически устойчиво* ⇔ *Reνj <* 0  Доказательство.  Пусть *Reνj <* 0. От противного: ∃*νk* = *α* ± *iβ, α* ≥ 0 ⇒ при *α >* 0 |*δkeαtcosβt*| −→  *t*→+∞  +∞  при *α* = 0 |*δkcosβt*| −→ |*δk*| → 0  *t*→+∞  Теорема 2. *Критерий Гурвица* | 29 Системы линейных дифференциальных уравнений  с постоянными коэффициентами  1. Системы нормальной формы  Несколько дифференциальных уравнений образуют систему,  Пример 1.  -не нормальная форма  если при этом выполняются следующие условия:  1)Старшая производная каждой искомой функции входит только в одно уравнени  2)Каждое кравнение рарешимо относительно старших производных то такая система имеет нормальную форму.  Решением будет набор функций *x*1(*t*)*,...,xn*(*t*)*.*  Система в нормальной форме с помощью соответстветственных замен переменнох сводится к системе уравнений 1 порядка.  Пример 2.  Поэтому ограничемся изучением нормальных систем 1 порядка  2.Линейные системы нормальной формы |
| 23 | 22  Замечание 1. *Можно использовать несколько другой подход доказательства:*  *Предварительно выпишем Отсюда следует, что справедлива следующая формула:*  *Воспользуемся этой формулой в (\*\*), тогда:*  *Далее применяя эту формулу получим доказательство* | 21 |
| 26  Промeжуточный вывод: как видим,*ρ* не зависит от *ξk*(начальных данных) и правой части уравнения. Данная сумма содержит *n*2 слагаемых  *Замечание:*  Выбор *I*1- существенное требование при доказательстве m(ограничение) | 25  Дифференцирование по независимой переменной  *x*чн-решение, это тождество можно последовательно дифференцировать n раз  *Dn*+*mx*чн(*t*) = *...* ⇒ *x* ∈ *Cn*+*m* ⇒ все решение можно дифференцировать n+m раз. | 24 |
| 29  Определение 1. *Решением линейной системы будем называть семейство непрерывно дифференцируемых фунций, обращающих в тождество систему на I. Таким же образом можно рассматривать комплексно-значимые системы*  Линейные системы можно записать в матричной форме:  *Dx* = *A*(*t*)*x* + *f*(*t*)    Производные и интегралы от векторов и матриц будем вычислять покомпонентно, например, если P(t)- матрица *,*  Если все *aij* - const, то система называется стационарной. | 28 | 27 |
| ? Линейные системы в нормальной форме  Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:  Определение 1. *Решением системы называется семейство функций x*1(*t*)*, x*2(*t*)*,...,xn*(*t*) *непрерывно дифференцируемых на I, которые на этом интервале обращают каждое уравненение в тождество.*  Можно так же рассматривать системы в комплекснозначной форме:  Достаточно часто линейные системы записывают в векторной(матричной) форме:  Производные и интегралы от векторов и матриц будем вычислять покомпонентно.  Например, если *P*(*t*) -матрица размера *n* × *n*, то:  В случае, когда берём функцию от матрицы ( ) - наши правила уже не будут работать.  Если все *aij* постоянны, то линейная однородная система называется постоянной (стационарной) | 29 Решение начальной задачи в случае нижнетреугольной матрицы коэффициентов и диагональной  Рассмотрим следующую систему:  Рассмотрим 4 случая для данной системы:  *Случай 1 (диагональный)*  *Случай 2 (нижнетреугольный)*  Теорема 1. *В нижнетреугольном случае начальная задача однозначно разрешима на интервале I* ∀*s* ∈ *I,* ∀*ξk* ∈ *C*  Доказательство. Выпишем первые два уравнения системы:  Будем решать по принципу ” сверху-вниз ” , тогда:  При *n >* 2 продолжается этот процесс до того как не найдём решение системы. | 30 Решение начальной задачи в случае верхнетреугольной матрицы коэффициентов  *Случай 3 (верхнетреугольный)*  Теорема 2. *В верхнетреугольном случае начальная задача однозначно разрешима на интервале I* ∀*s* ∈ *I,* ∀*ξk* ∈ *C*  Доказательство. Выпишем последние два уравнения системы:  Будем решать по принципу ” снизу-вверх ” тогда:  При *n >* 2 идём далее, поднимаясь снизу-вверх, до того как не найдём решение системы. |
| 31-32 Решение начальной задачи в случае произвольной матрицы коэффициентов    *Случай 4 (общий случай)*  Теорема 3. *В общем случае начальная задача однозначно разрешима на интервале I* ∀*s* ∈ *I,* ∀*ξk* ∈ *C*  Доказательство.  *Dz* = *Cz*(*t*) + *h*(*t*)*,* где С = {С*ij*}*, h* = (*h*1*,h*2*,...,hn*)*T* Пусть *JC* - Жорданова нормальная форма матрицы *C*:  Отсюда следует, что для *JC* - справедлив верхнетреугольный случай.  Рассмотрим *SC* - трансформирующая матрица, т.е *SC*−1*CSC* = *JC* (Матрица *S* составлена из собственных и присоединенных векторов)  Введём замену переменных *W* = *SC*−1*z*, тогда *z* = *SCW*, отсюда получим: | 33 Сведение линейной системы к совокупности стационарных уравнений n-го порядка  Рассмотрим систему из двух уравнений:  , так как если *b* = 0 то действует теорема из приедыдущей главы о нижнетре-  угольной матрице.  Кроме этого продифференцируем первое уравнение:  Таким образом мы доказали следующее утверждение: *при b* 6= 0 *обе системы экви-*  *валентны.*  Подобным образом можно решать и неоднородные системы. | 34 Экспоненциальное представление решений  линейных стационарных систем  Возьмём пространство *Rn* и зададим норму вектора и некоторые свойства:  Рассмотрим матричный ряд . Этот ряд сходится тогдa и только тогда. когда  сходится ряд . А тогда из сходимости главной мажоранты будет следовать сходи-  мость матричного ряда.  Рассмотрим, видим, что ряд совпадает с рядом тейлора для экспоненты,  *Свойство 1 D*(*eAt*) = *AD*(*eAt*) Доказательство.  *Свойство 2* Если *A* и *B* коммутирут между собой, т.е перестановочны (*AB* = *BA*)  (*A* + *B*)2 = *A*2 + 2*AB* + *B*2  *В общем же случае* (*A* + *B*)2 = *A*2 + *AB* + *BA* + *B*2.  *Свойство 3 eA*+*B* = *eA* + *eB* тогда и только тогда, когда матрицы *A* и *B* престановочны. |
| 35 Вычисление экспоненты матрицы с помощью нормальной жордановой формы, применение к решению линейных стационарных систем.  *Формула 2* Жорданова нормальная форма  Рассуждения проведём для одной клетки Жордана размерности *d* :    Заметим, что матрицы *E* и *F* перестановочны. Рассмотрим *F*3:  Ясно, что матрицы будут нулевые начиная с *n* = *d*. Отсюда:  Аналогично    Отсюда  Теорема 2. | 36 Базис решений линейной однородной стационарной  системы  Рассмотрим систему *Dx* = *Ax,* где *x*(1)(*t*)*,...,x*(*n*)(*t*) − *n* решения системы. Составим из этих решений матрицу *X*(*t*):  Имеет место следующая теорема:  Теорема 1.  Доказательство. Докажем при *n* = 2:  Таким образом доказан матричный аналог формулы Остроградского-Лювилля:  *Если решения x*1*,...,xn - линейно зависимы, то detX*(*t*) ≡ 0 ∀*t* ∈ *R, если решение x*1 *- ЛНЗ и при некотором , то при всех S отличен от нуля.* | 37 Метод Эйлера построения решения линейной  однородной стационарной системы  Рассмотрим систему:  *Dx* = *Ax*, где *νk* - собственное значение матрицы *A* кратности *dk*.  Базисное решение будем искать в следующем виде:  Рассмотрим . Подставляя в исходную систему, получим:  - собственный вектор.  Теперь рассмотрим . Подставляя в исходную систему, получим:  Тогда (*A* − *νkE*)*β*0 = *β*1 = *α*0 ⇒ *β*0 - первый присоединённый вектор  Далее подобным образом находим остальные компоненты *x*(*i*)(*t*). Аналогично поступаем для нахождения базисного решения остальных собственных значений. Собирая все найденные решения, получаем базис. |
| 30 | 29MAIN | ? |
| 34  Доказательство.  *Свойство 4*  Рассмотрим ситему  Теорема 1. *Начальная задача однозначно разрешима на I, причём её решение находится по следующей формуле:*  Доказательство. Предварительно заметим, что *eA*(*t*−*s*) = *eAte*−*As*, так как *A*(*t* − *s*) =(*t* − *s*)*A*  Продифференцируем равенство  Замечание 1. *Если , то получим общее решение.*  Полученная формула предсавляет собой формулу Коши решеения ЛС, при этом множитель *eA*(*t*−*s*) - матрица Коши.  Вычисление матричной экспоненты в общем случае представляет значительные трудности. Тем не менее в некоторых частных случаях можно получить удобные формулы. Рассмотрим их:  *Формула 1 diagA* = *diag*(*a*11*,a*22*,...,ann*)  (см. предыдущий параграф) | 33 | 31-32 |
| 37 | 36  Ecли решения линейно независимы, то *X*(*t*) - фундаментальная матрица, а решения - фундаментальная система решений.    то фундаментальная матрица называется нормированной при *t* = 0*, detX*(*t*) = 1. | 35  Доказательство. |
| 38 Метод вариации произвольных постоянных (правило Лагранжа). Решения неоднородной  линейной системы  Этот метод применим, когда известно общее решение соответсвующей однородной системы:  Пусть - произвольный вектор, *x*(*t*) - решение однородной системы. Тогда Отсюда получим:  Так как *x*(*t*) - фундаментальная матрица, то ∀ *t* ∃ *x*−1.  Замечание 1. *Если x*(*t*) *выбрать в виде матрицы Коши, т.е x*(*t*) = *eA*(*t*−*s*)*, то получим известную формулу.* | 39-40 Устойчивость линейных однородных стационарных систем.  Наряду с этим решением рассмотрим задачу с отклонением начальных данных:  *x*(*t,ξ* + ∆*ξ*)*,x*|*t*=*s* = *ξ* + ∆*ξ*  Определение 1. *Отклонение решений x*(*t,ξ*) *и x*(*t,ξ* +∆*ξ*) *назовем число ρ*(*t,*∆*ξ*) =  = ||*x*(*t,ξ* + ∆*ξ*) − *x*(*t,ξ*)||  Ранее нами установлена следующая формула для решения задачи Коши:  Аналогично:  Значит отклонение не зависит от *f* и *ξ*  Определение 2. *Решение x*(*t,ξ*)*-непрерывно зависящие от начальных значений на компакте I*1 ⊂ *I, если* ∀*ε* ≥ 0*,*∃*δ* ≥ 0*,*∀∆*ξ,t* ∈ *I,*||∆*ξ*|| ≤ *δ* ⇒ ||∆*ρ*(*t,*∆*ξ*)|| ≤ *ε*  Покажем,что *x*(*t,ξ*) непрерывно зависит от начальных значений на *I*1:  *ρ*(*t,*∆*ξ*) = ||*eA*(*t*−*s*)∆*ξ*||*,*∃*M* = *M*(*I*1) ⇒ ||*eA*(*t*−*s*)|| ≤ *M* ∀*s* ∈ *I*1 | 41-42 Асимптотическая устойчивость линейных однородных стационарных систем.  Следствие 1 (критерий асимптотической устойчивоси).  *Dx* = *Ax* + *f*(*t*)*- асимптотически устойчива* ⇔ *Reλj <* 0  Следствие 2.  *-характеристический ногочлен и соответствующий ему гурвициан*  *Действителььные части корней характеристического многочлена < 0* ⇔ *главные миноры > 0*  Доказательство.  *Без доказательства* |
| 43-44 Фазовая плоскость линейной однородной стационарной системы. Седло, фокус, центр  Плоскость *x*1*Ox*2 назовем фазовой плоскостью уравнения, а *x*1(*t*)*,x*2(*t*) решения фазовыми радикалами *x*1 = 0*, x*2 = 0  Заметим, что решение системы - точка покоя системы.  1) Составим характеристический многочлен матрицы коэффициентов.  2)Построим вспомогательную матрицу B  Вывод: характеристический многочлен A и B совпадают ⇒подобие а)  (в частности матрица *A* ∼ *Ja*)  *x* = *Ty*  *TPy* = *ATy* ⇒ *Dy* = *T* −1*ATy* ⇒ *Dy* = *By*  Исходная и полученная сиситемы эквивалентны.(фазовые графики совпадают с точностью до линейного преобразования)  Запишем систему в координатной форме:  *ν*2 − *σν* + ∆ = 0  Таким образом изучение траектории исходной системы сводится у изучению поведения фазового графика стационарного уравнения. | 1 Основные понятия теории дифференциальных уравнений.  2 ЛДУ 1 порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение. Построение общего решения.  3 Квазиполиномы, свойства квазиполиномов.  4 ЛДУ 1 порядка с постоянными коэффициентами и к.п в правой части  5 ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами: свойства, факторизация стационарного оператора Ln.  6 ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами: нулевая начальная задача.  7 ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами: произвольная начальная задача.  8 ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами: общее решение.  9 ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами: вронскиан, формула Остроградского-Лиувилля.  10 ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами: линейная зависимость (независимость) системы решений, фундаментальная система решений.  11 ЛОСУ второго порядка: фазовая плоскость, теорема о фазовых графиках.  12 ЛОСУ второго порядка: общая схема расположения фазовых графиков однородного стационарного линейного уравнения второго порядка  13 ЛОСУ второго порядка: фазовая плоскость, расположение фазовых графиков в окрестности точки покоя типа «седло».  14 ЛОСУ второго порядка: фазовая плоскость, расположение фазовых графиков в окрестности точки покоя типа «узел».  15 ЛОСУ второго порядка: фазовая плоскость, расположение фазовых графиков в окрестности точки покоя типа «седло».  16 ЛОСУ второго порядка: фазовая плоскость, расположение фазовых графиков в окрестности точки покоя типа «фокус» и «центр».  17 ЛОСУ второго порядка: фазовая плоскость, расположение фазовых графиков в окрестности «прямой покоя». | 29 Л системы ДУ в нормальной форме с ПК: решение начальной задачи в случае диагональной матрицы коэффициентов, решение начальной задачи в случае нижнетреугольной матрицы коэффициентов.  30 Л системы ДУ в нормальной форме с ПК: решение начальной задачи в случае верхнетреугольной матрицы коэффициентов.  31 Л системы ДУ в нормальной форме с ПК: решение начальной задачи в случае произвольной матрицы коэффициентов.  32 Л системы ДУ в нормальной форме с ПК: решение начальной задачи в случае произвольной матрицы коэффициентов.  33 Л системы ДУ в нормальной форме с ПК: решение способом сведения к совокупности линейных стационарных уравнений.  34 Матричная экспонента. Экспоненциальное представление решений линейных стационарных систем (правило Коши).  35 Вычисление экспоненты матрицы с помощью нормальной жордановой формы, применение к решению линейных стационарных систем.  36 Матричный аналог формулы Остроградского-Лиувилля. Базис решений линейной однородной стационарной системы.  37 Метод Эйлера построения базиса решений линейной однородной стационарной системы.  38 Метод вариации произвольной постоянной построения решения линейной неоднородной стационарной системы (правило Лагранжа).  39 Устойчивость линейных однородных стационарных систем.  40 Устойчивость линейных неоднородных систем с постоянной матрицей коэффициентов.  41 Асимптотическая устойчивость линейных однородных стационарных систем.  42 Асимптотическая устойчивость линейных неоднородных систем с постоянной матрицей коэффициентов.  43 Фазовая плоскость линейной однородной стационарной системы. Седло, фокус, центр.  44 Фазовая плоскость линейной однородной стационарной системы. Узел, дикритический узел. |
|  |  |  |
| 41-42 | 39-40  Определение 3. *Решение x*(*t*) *называется устойчивам по Ляпунову, если оно непрерывно зависит от начальных значений на t* ∈ *I*  Определение 4. *Если решение устойчиво и при достаточно малых* ∆*ξ ρ*(*t,*∆*ξ*) → 0*, то оно асимптотически устойчиво.*  Поскольку устойчивость одного решения равносильно устойчивости всех решений, то устойчивость решения отождествляют с устойчивостью системы  Следствие 1. *Линейная система устойчива* ⇔ *Rexj* ≤ 0*, причем, если = 0, то корни должны быть кратными* Доказательство.  *Доказательство основано на представлении базисных решений по методу Эйлера x*(*t*) = | 38 |
|  | 18 ЛНСУ *n*-го порядка: функция Коши (интегральное представление), решение нулевой начальной задачи с помощью функции Коши.  19 ЛНСУ *n*-го порядка: функция Коши, представление функции Коши через базисное решение.  20 ЛНСУ *n*-го порядка: решение произвольной начальной задачи с помощью функции Коши, правило Коши.  21 ЛНСУ *n*-го порядка: построение частного решения методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).  22 ЛНСУ *n*-го порядка с квазиполиномом: построение частного решения методом Эйлера в резонансном случае совпадения одного характеристического числа с контрольным числом квазиполинома.  23 ЛНСУ *n*-го порядка с квазиполиномом: построение частного решения методом Эйлера в резонансном случае совпадения двух характеристических числа с контрольным числом квазиполинома.  24 ЛНСУ *n*-го порядка с квазиполиномом: построение частного решения методом Эйлера в нерезонансном случае (ни одно характеристическое число не совпадает с контрольным числом квазиполинома).  25 Свойства ЛНСУ *n*-го порядка: дифференцируемость решений по своим аргументам.  26 Свойства ЛНСУ *n*-го порядка: непрерывная зависимость решений от начальных данных.  27 Свойства СЛУ *n*-го порядка: устойчивость по Ляпунову, критерий устойчивости.  28 Свойства СЛУ *n*-го порядка: асимптотическая устойчивость, критерий асимптотической устойчивости. |  |
|  |  |  |