

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «КубГУ»)

Факультет компьютерных технологий и прикладной математики  
Кафедра прикладной математики

КУРСОВАЯ РАБОТА

Построение частотного спектра волн, возбуждаемых поверхностным источником в  
упругом полупространстве

Работу выполнил \_\_\_\_\_ К.В. Дьяченко

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность Программирование и информационные технологии

Научный руководитель

д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_ Н.В. Глушкова

Нормоконтроль

преподаватель \_\_\_\_\_ Е.С. Троценко

Краснодар  
2022

# Содержание

Введение . . . . .	2
1. Постановка задачи . . . . .	3
2. Полуаналитический метод . . . . .	5
3. Применение программного комплекса COMSOL для нахождения волнового поля . . . . .	6
4. Сравнение результатов, полученных при помощи полуаналитическо- го метода и программного комплекса COMSOL . . . . .	17
Список использованных источников . . . . .	19

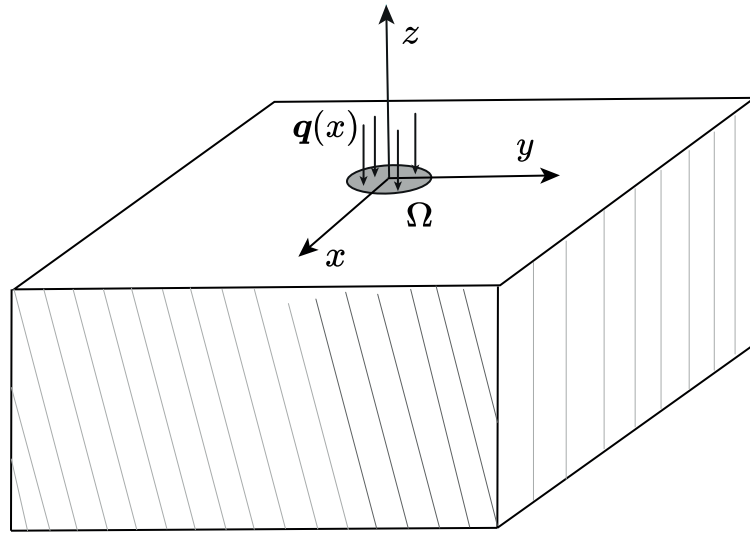


Рис. 1. Геометрия задачи

## Введение

Вибрационная нагрузка, приложенная к поверхности упругого волновода, возбуждает в нем бегущие волны. Оценка характеристик этих волн используется в таких областях науки и техники, как сейсмология и сейсмостойкое строительство, виброзащита, а также в микроэлектронных устройствах на поверхностных акустических волнах и в системах прецизионного позиционирования. Волны, возбуждаемые в стальных, алюминиевых или композитных пластинах с помощью активных пьезосенсоров, выполненных в виде гибких и тонких накладок, распространяются на большие расстояния, взаимодействуя с любыми неоднородностями, что позволяет выявлять скрытые дефекты. В последнее время такая технология волнового контроля выделяется в самостоятельное научно-техническое направление — мониторинг дефектов конструкций (Structural Health Monitoring (SHM)) [2].

Для получения количественных характеристик возбуждаемых волн используются различные подходы, от классического модального анализа до конечно-элементной аппроксимации (МКЭ). Промежуточное положение в этом ряду занимает полуаналитический интегральный подход, базирующийся на явном интегральном представлении вектора смещений волнового поля  $u$ , возбуждаемого поверхностной нагрузкой  $q$ , приложенной в некоторой области  $\Omega$  (рисунок 1), через Фурье-символ  $K$  матрицы Грина рассматриваемой упругой слоистой структуры.

Цель данной работы: изучить моделирование процессов возбуждения и распространения волн в упругом волноводе на примере установившихся гармонических колебаний.

Задачи:

1. Построить волновое поле, используя полуаналитический интегральный подход, базирующийся на явном интегральном представлении вектора смещений волнового поля через Фурье символ  $K$  матрицы Грина упругого полупространства с применением численного интегрирования средствами языка программирования Fortran и программного комплекса DINN5;
2. Построить волновое поле, возбуждаемое точечным источником колебаний в упругом полупространстве методом конечных элементов при помощи программы COMSOL Multiphysics[2];
3. Сопоставить полученные данные.

## 1. Постановка задачи

Однородное изотропное упругое полупространство в декартовой системе координат  $x, y, z$  занимает объем  $-\infty < x, y < +\infty, -\infty < z \leq 0$ . К его поверхности в области  $\Omega$  приложена нагрузка  $\tau = q(x, y)e^{-i\omega t}$ , а вне  $\Omega$  напряжения  $\tau$  отсутствуют. Колебания среды предполагаются гармоническими установившимися с круговой частотой  $\omega$ . На бесконечности перемещения и напряжения стремятся к нулю и выполняются условия излучения Зоммерфельда. Требуется определить волновое поле, возбуждаемое источником колебаний в упругой среде.

Установившийся режим колебаний означает, что зависимость всех характеристик задачи (перемещения, напряжения и др.) от времени  $t$  описывается множителем  $e^{-i\omega t}$ . В силу линейности задачи данный множитель можно сократить и работать только с комплексными амплитудами соответствующих величин, не оговаривая этого особо. Например,  $Re[\mathbf{u}(x, y, z)e^{-i\omega t}]$  - вектор перемещений точек среды. Работать будем только с вектором  $\mathbf{u}(x, y, z) = (u, v, w)$ , называя его также вектором перемещений.

Вектор перемещений характеризует отклонение каждой точки тела от начального положения, компоненты его  $u, v, w$  являются непрерывными функциями координат. Векторные величины здесь обозначаются чертой сверху; предполагается, что векторы являются векторами-столбцами.

Механическое состояние упругого тела характеризуется компонентами тензоров деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и напряжений  $\sigma_{ij}$ , которые в линейной теории упругости связаны уравнениями движения:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

соотношениями обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{mn} \varepsilon_{mn}, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots \quad (2)$$

и геометрическими соотношениями Коши:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \quad (3)$$

Предполагаем  $f_x = f_y = f_z = 0$  (отсутствие объемных сил). В случае однородного, изотропного полупространства, равенство (2) упрощается:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}; \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

а при помощи равенств (3), (4) уравнения движения (1) преобразуются в систему уравнений Ляме [3]:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \Delta u + \rho \omega^2 u = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \Delta v + \rho \omega^2 v = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \Delta w + \rho \omega^2 w = 0 \end{cases} \quad (5)$$

где

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Условие приложения нагрузки  $\tau = \mathbf{q}(x, y)e^{(-i\omega x)}$  в области  $\Omega$  преобразуется:

$$\bar{\tau}|_{z=0} = \begin{cases} \mathbf{q}(x, y), (x, y) \in \Omega \\ 0, (x, y) \notin \Omega \end{cases}, \quad (6)$$

$$\tau_i = \sigma_{ij} n_j, i = 1, 2, 3$$

и вместе с условиями на бесконечности:

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty \quad (7)$$

и условиями излучения составляет граничные условия.

Таким образом получается краевая задача (5)-(7), к решению которой сводится вопрос нахождения поля  $u[1]$ .

## 2. Полуаналитический метод

Геометрия задачи позволяет применить преобразование Фурье по переменным  $x, y$  :

$$F(\alpha_1, \alpha_2, z) = \mathcal{F}_{x,y}[f(x, y, z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} dx dy$$

к системе уравнений и граничным условиям (5)-(7).

Опустив промежуточные выкладки, получим решение задачи в виде:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2, z) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

где

$$K = \begin{pmatrix} -i(\alpha_1^2 M + \alpha_2^2 N) & -i\alpha_1 \alpha_2 (M + N) & -i\alpha_1 P \\ -i\alpha_1 \alpha_2 (M - N) & -i(\alpha_2^2 M + \alpha_1^2 N) & -i\alpha_2 P \\ \alpha_1 S & \alpha_2 S & R \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} P(\alpha, z) &= \frac{2i\mu\alpha^2 [-(\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)e^{\sigma_1 z} + \sigma_1 \sigma_2 e^{\sigma_2 z}]}{\Delta}, \\ R(\alpha, z) &= \frac{2i\mu\alpha^2 \sigma_1 [-(\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)e^{\sigma_1 z} + \alpha^2 e^{\sigma_2 z}]}{\Delta}, \\ M(\alpha, z) &= \frac{2\mu\sigma_2 [-\alpha^2 e^{\sigma_1 z} + (\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)e^{\sigma_2 z}]}{\Delta}, \\ S(\alpha, z) &= \frac{2\mu\alpha^2 [-\sigma_1 \sigma_2 e^{\sigma_1 z} + (\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)e^{\sigma_2 z}]}{\Delta}, \end{aligned}$$

$$N(\alpha, z) = \frac{i}{\mu\alpha^2 \sigma_2} e^{\sigma_2 z},$$

$$\Delta = 4i\mu^2 \alpha^2 [-(\alpha^2 - 0.5\kappa_2^2)^2 + \alpha^2 \sigma_1 \sigma_2].$$

Поле  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , возбуждаемое точечной нагрузкой  $q(x, y) = (0, 0, \delta(x, y))$ , является осесимметричным для изотропной среды, поэтому достаточно рассмотреть плоский случай. Плоское поле  $\mathbf{u} = (u, v)$  может быть представлено в виде:

$$\mathbf{u}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

где

$$K = \begin{pmatrix} -i\alpha^2 M & -i\alpha P \\ \alpha S & R \end{pmatrix}$$

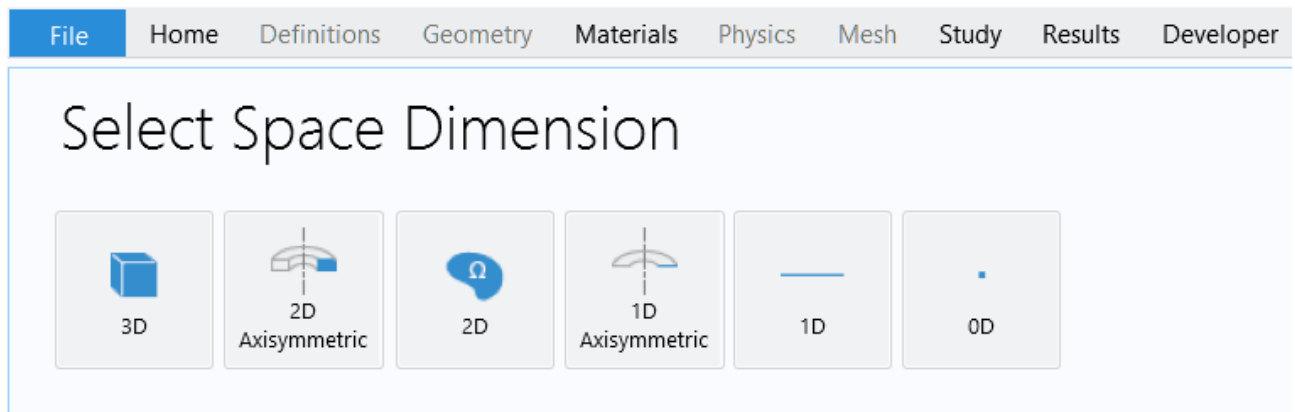


Рис. 2. Окно выбора размерности пространства

( в (8) положили  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2 = 0$ ). Преобразование Фурье нагрузки будет иметь вид  $\mathbf{Q}(\alpha) = (0, 1)$ .

### 3. Применение программного комплекса COMSOL для нахождения волнового поля

В данном разделе поэтапно построим плоское волновое поле  $\mathbf{u}(x, y) = (u, v)$  с помощью программы COMSOL Multiphysics. Эта программа имеет широкий функционал, множество модулей и предназначена для моделирования большого количества физических процессов, при этом есть возможность учета их взаимного влияния.

Первым шагом является выбор пространства, в котором будут проходить все последующие вычисления. В нашем случае это будет двумерная плоскость.

Далее COMSOL предоставляет нам выбор процесса, который мы хотим реализовать. Из имеющихся вариантов используем “механики твердых тел” (Solid Mechanics), так как построенный в итоге волновод должен быть упругим.

Следующее окно, с которым мы сталкиваемся, предлагает нам выбрать дополнительные условия, которые мы наложим на наше пространство. Выберем “частотное поле”(Frequency Domain), потому что этот модуль будет работать с поступающим напряжением, как с установившимися гармоническими колебаниями.

После проделанных ранее действий перед нами открывается рабочее

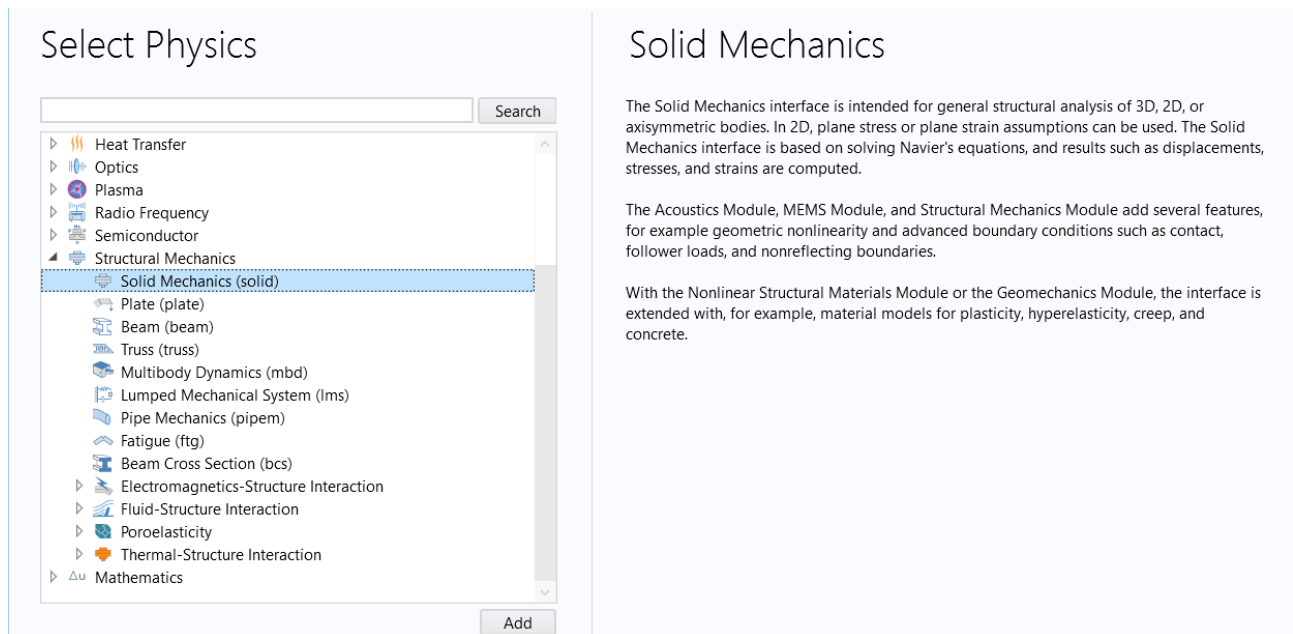


Рис. 3. Окно выбора физических процессов

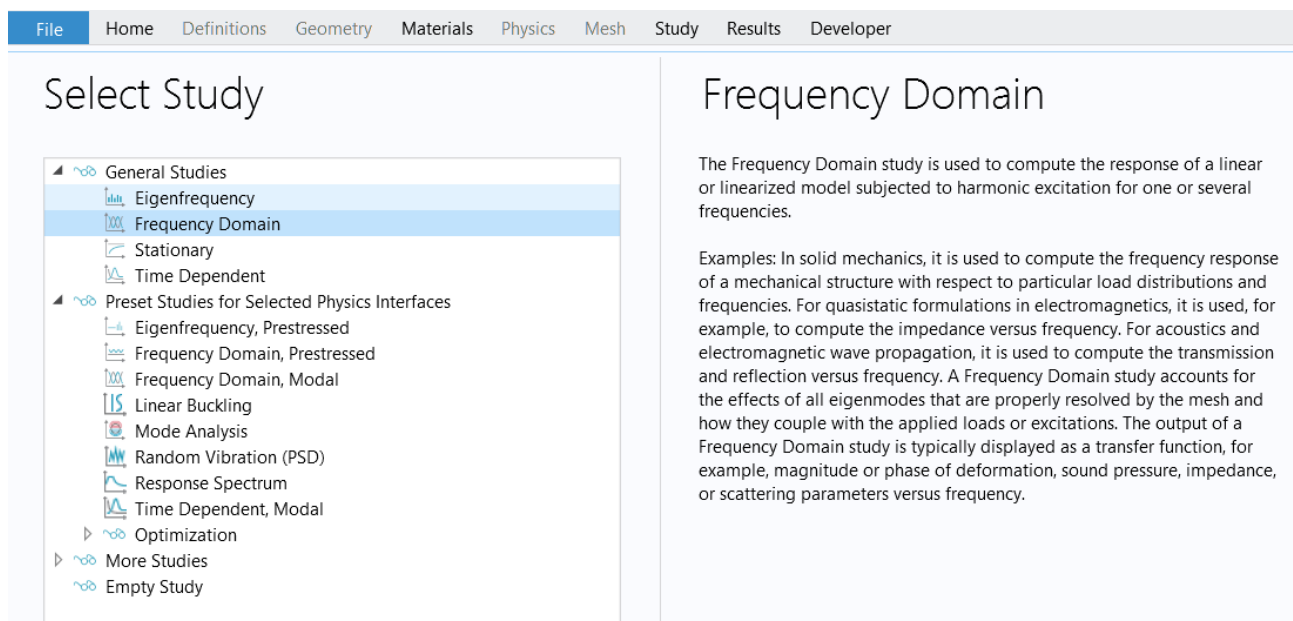


Рис. 4. Окно выбора дополнительных условий



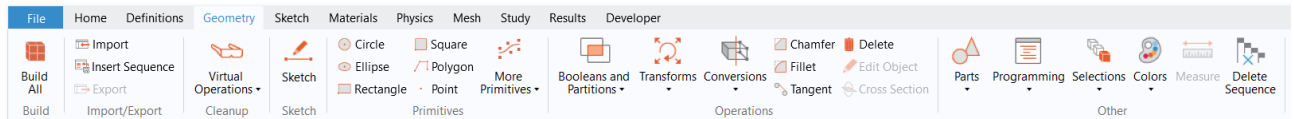


Рис. 5. Окно добавления физических процессов

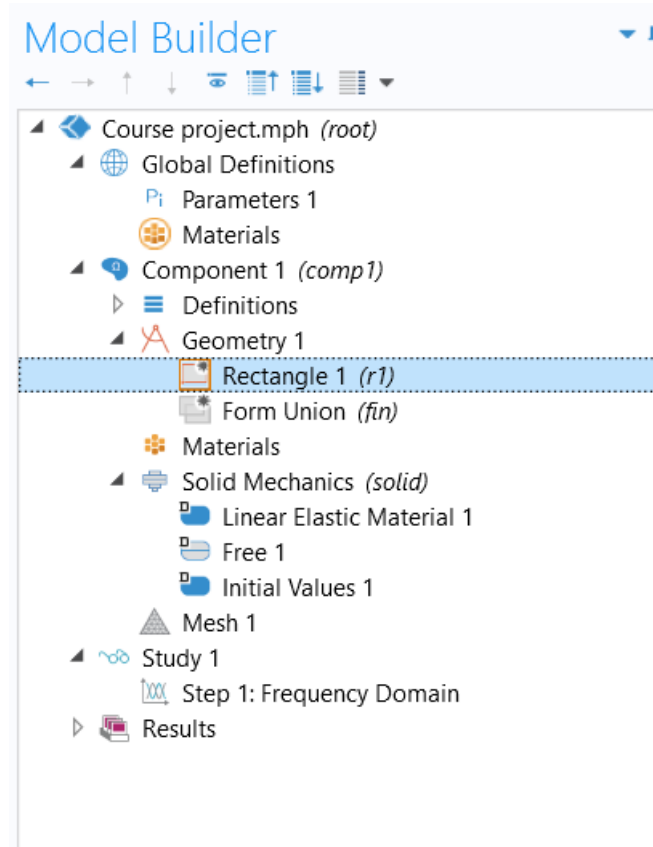


Рис. 6. Окно редактирования проекта

пространство COMSOL, в котором можно задавать нужные нам формы, материалы, свойства, значения и т.д.

Для добавления желаемого объекта на отображаемую область выберем на верхней панели секцию “геометрия” (Geometry) и нажмем на интересующую нас фигуру. Например, прямоугольник.

У созданной области не будет заданных заранее характеристик, поэтому зададим их самостоятельно. В будущем может возникнуть потребность в изменении конкретных параметров, поэтому для удобства заранее создадим константы, на которые будем ссылаться в других частях программы. Данный функционал предусмотрен в секции “параметры” (Parameters). В появившихся полях “имя” (Name) и “выражение” (Expression) зададим, соответственно, имена переменных и их значения.

Передадим созданные переменные соответствующим полям и нажмем на кнопку “создать все объекты” (Build All Objects).

Далее нам понадобится область, на которую будет поступать нагрузка.

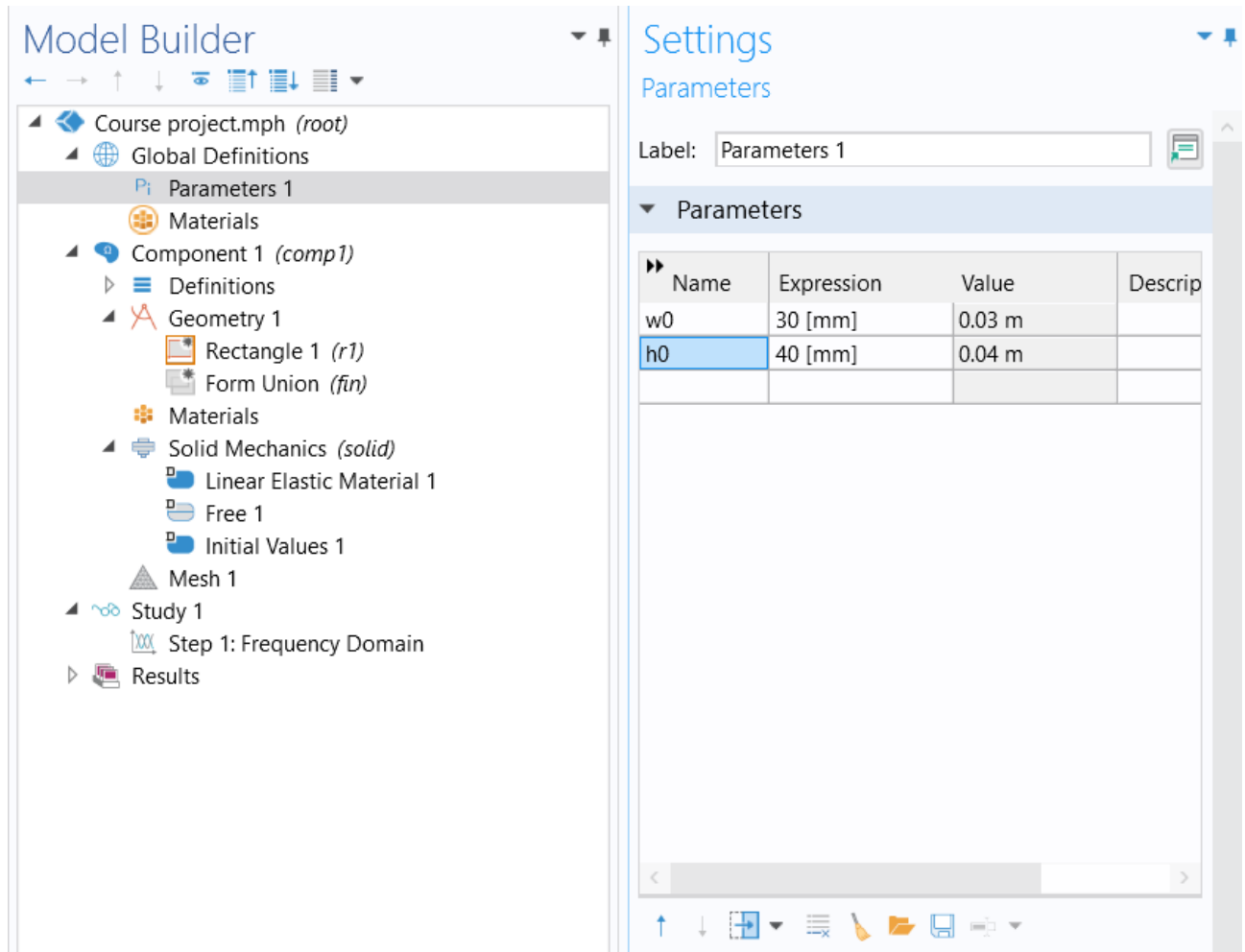


Рис. 7. Окно управления константами

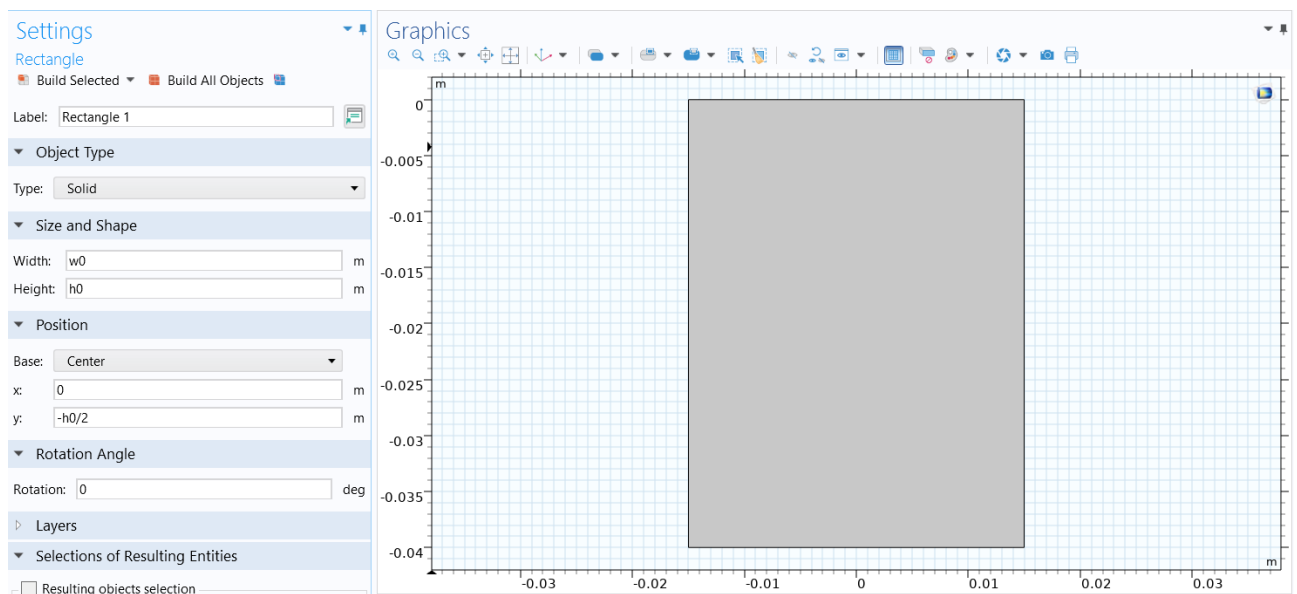


Рис. 8. Окно графического отображения

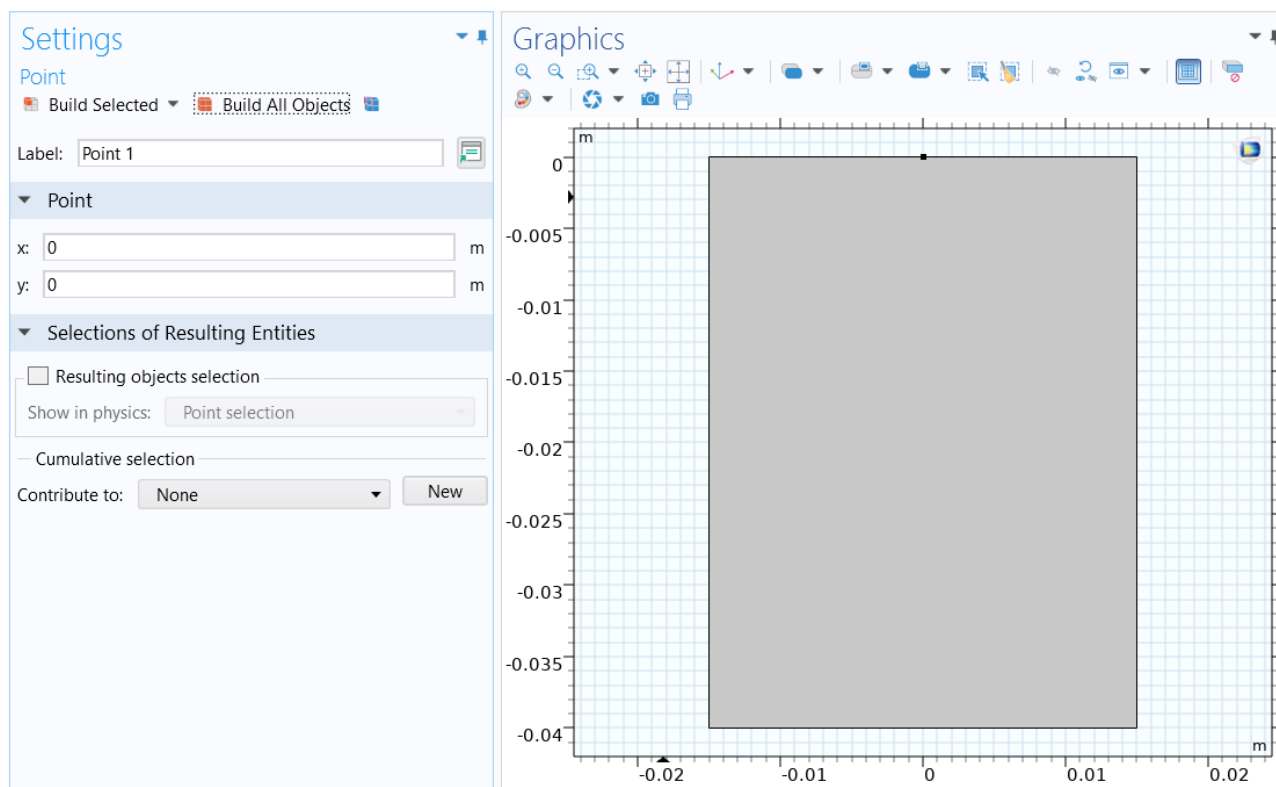


Рис. 9. Добавление на график точки

Для этого, используя предыдущие шаги, создадим “точку” (Point), которая будет находиться, например, в центре верхней поверхности имеющегося прямоугольника.

Для создания нагрузки на пространство в разделе Solid Mechanics добавим “точечную нагрузку” (Point Load) и нажмем на нагружаемую область, чтобы выбрать ее. Силу, с которой будут поступать колебания, зададим в разделе “сила” (Force).

Упругие свойства полуплоскости характеризуются параметрами Ляме  $\lambda$ ,  $\mu$  и плотностью  $\rho$  (параметры Ляме можно выразить через коэффициент Пуассона и модуль Юнга или через скорости продольной и поперечной волн). В качестве материала выберем алюминиевый сплав. Его параметры постоянны, поэтому нам известны их значения:

$\mu$	$\lambda$	$\rho$
55.5 ГПа	26,1 ГПа	2698 кг/м <sup>3</sup>

Следующий шаг изменит поведение нашего пространства на поведение полуплоскости. Для этого выберем в секции “определения” (Definitions) инструмент “идеально подобранные слои” (Perfectly Matched Layers (PML)).

Для размещения PML необходимо создать слои на краях объекта. Для этого выберем наш прямоугольник в области “геометрия” и в блоке “слои” (Layers) зададим нужную позицию и толщину слоев.

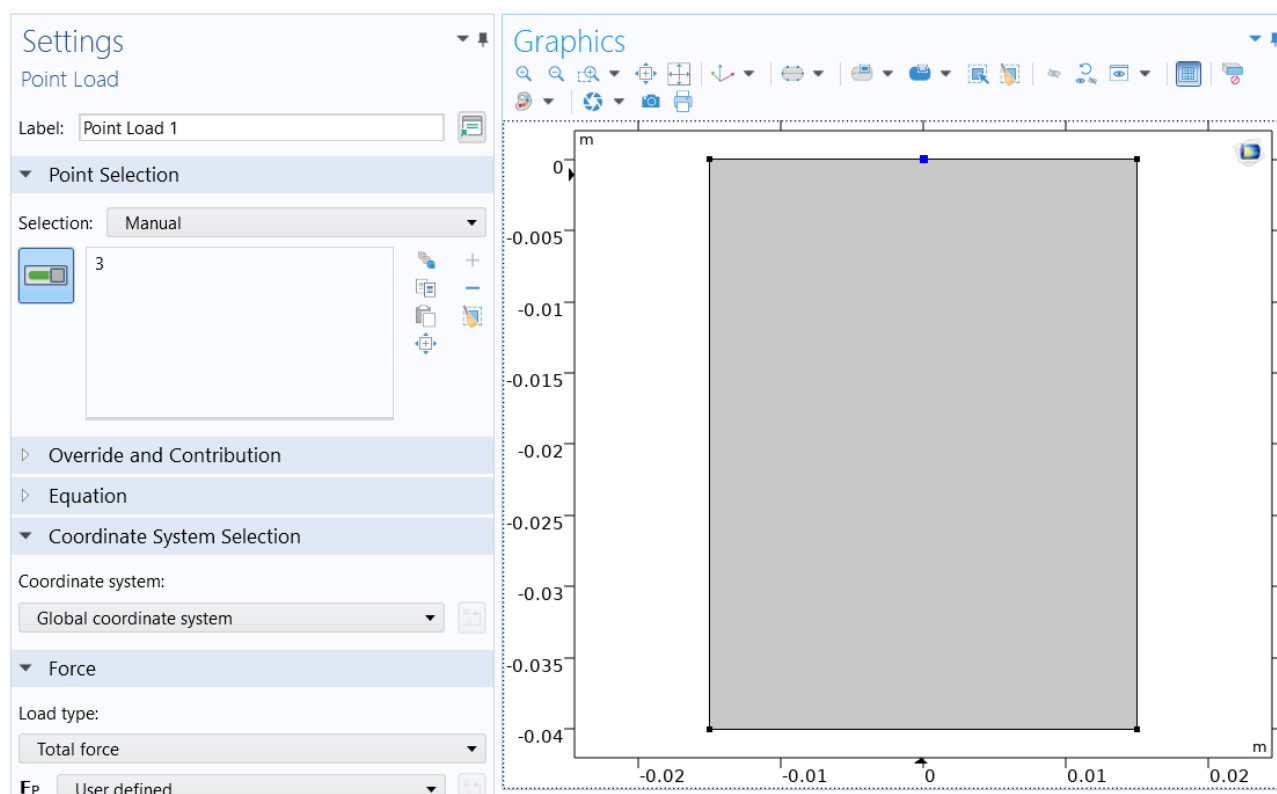
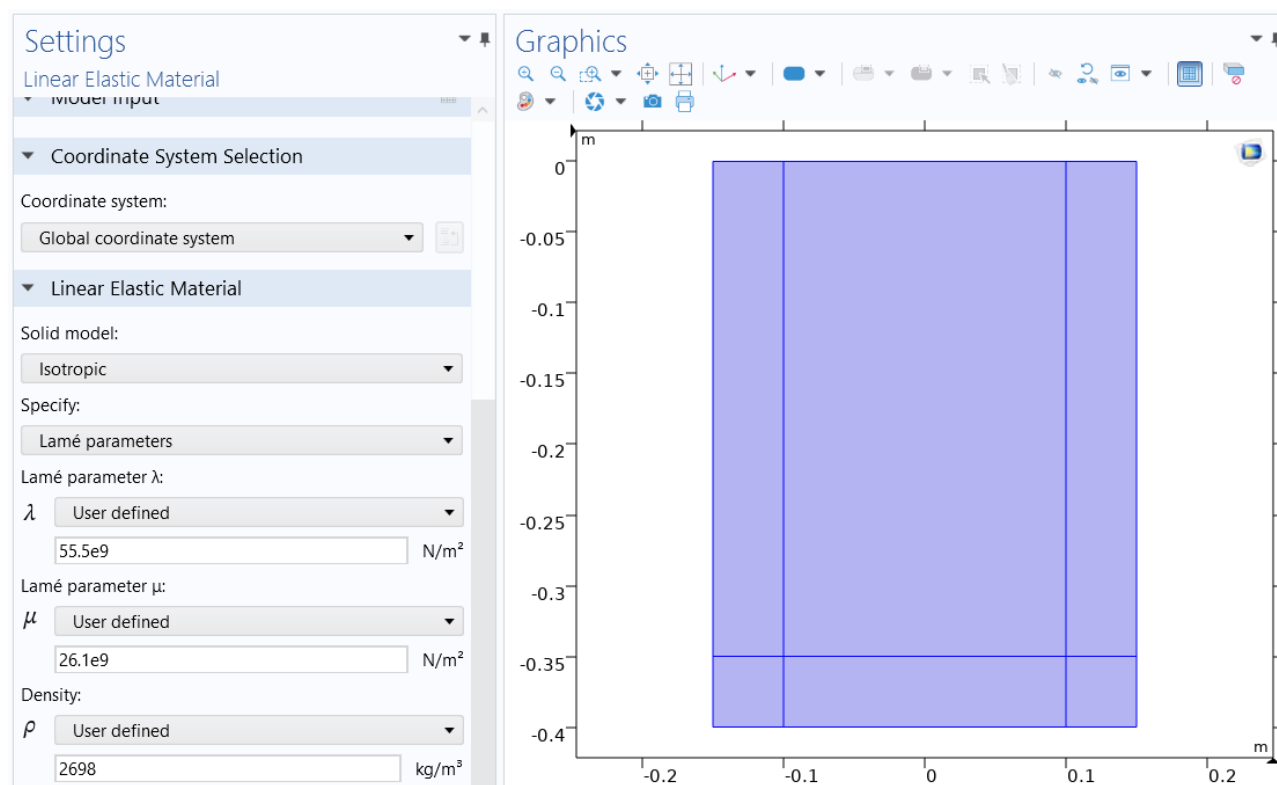


Рис. 10. Добавление нагрузки на точку

Рис. 11. Параметры поля  $\mathbf{u}$

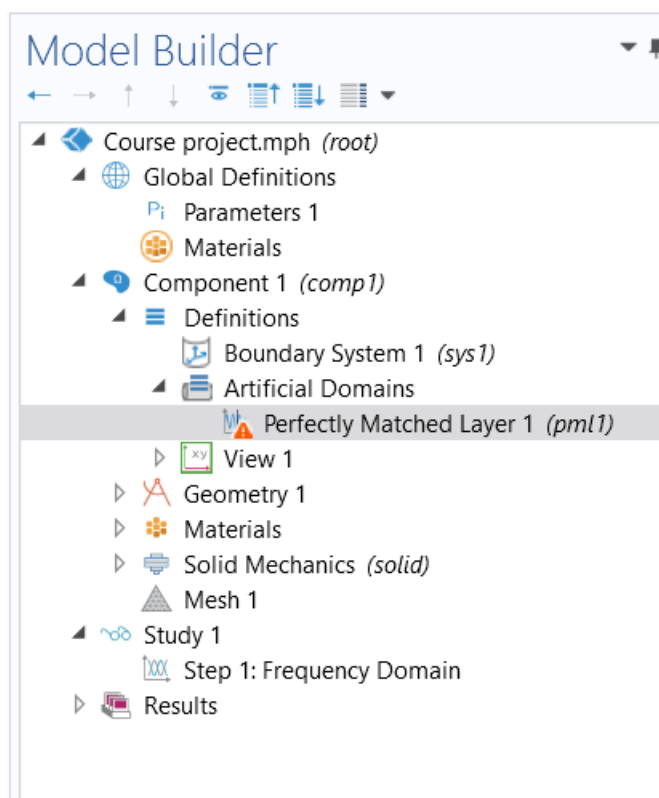


Рис. 12. Добавление PML

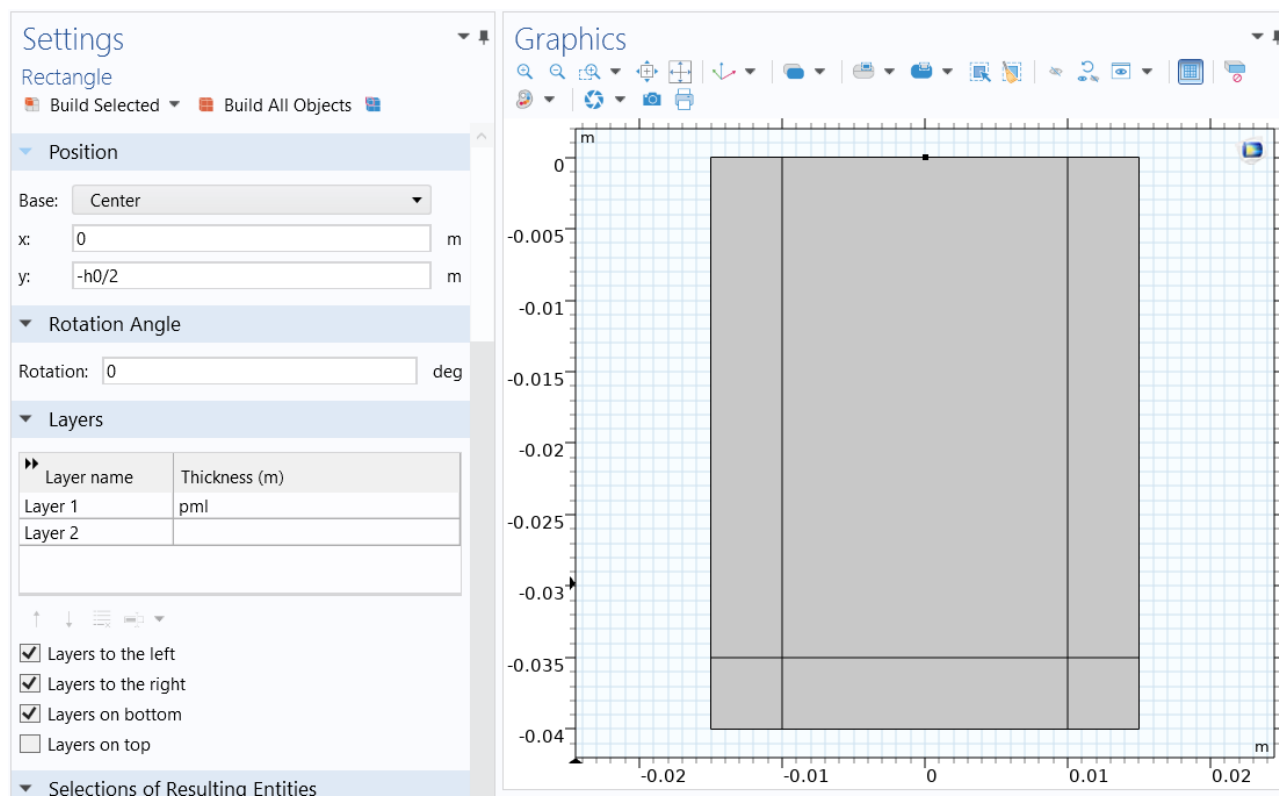


Рис. 13. Добавление слоев на график

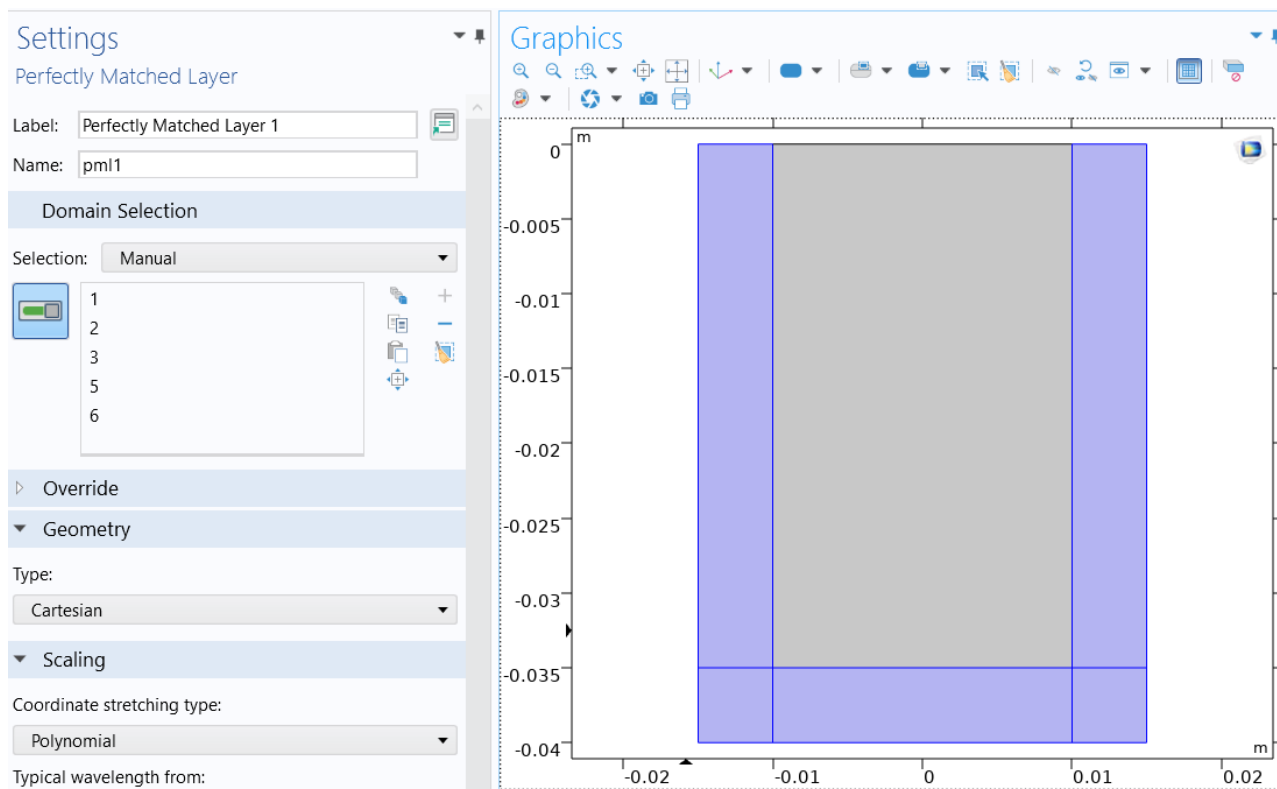


Рис. 14. Передача PML выделенным слоям

После этого возвращаемся к блоку PML и выбираем те слои, которые хотим сделать поглощающими.

Одним из заключительных действий станет добавление на объект сетки. Для этого в разделе “сетка” (Mesh) выбираем, насколько маленькими будут фрагменты, на которые COMSOL разобьет нашу область. Чем меньше один фрагмент, тем плотнее будет расположена сетка, и тем точнее будут полученные вычисления. Однако увеличение точности повлечет за собой увеличение вычислительной сложности, а значит остается выбрать наиболее подходящий вариант. Выбираем “очень гладко” (Extra fine) и нажимаем Build All.

Теперь, когда у нас заданы практически все условия, осталось зайти в раздел “изучение” (Study), (Step 1: Frequency Domain), задать частоту колебаний и нажать “вычислить” (Compute).

Полученный результат показывает, что нагрузка, приложенная к алюминиевому полупространству, была слишком велика, отчего материал сильно деформировался. В нашем случае этот итог не несет никакой информативности, так что в разделе “результат” (Result), в блоке “стресс” (Stress) удаляем пункт “деформация” (Deformation).

Чтобы на графике было видно распространение волн, а не распределение нагрузки, поменяем в настройках поверхности “выражение” (Expression) на пакет “solid.disp”. Нажимаем “построить график” (Plot).

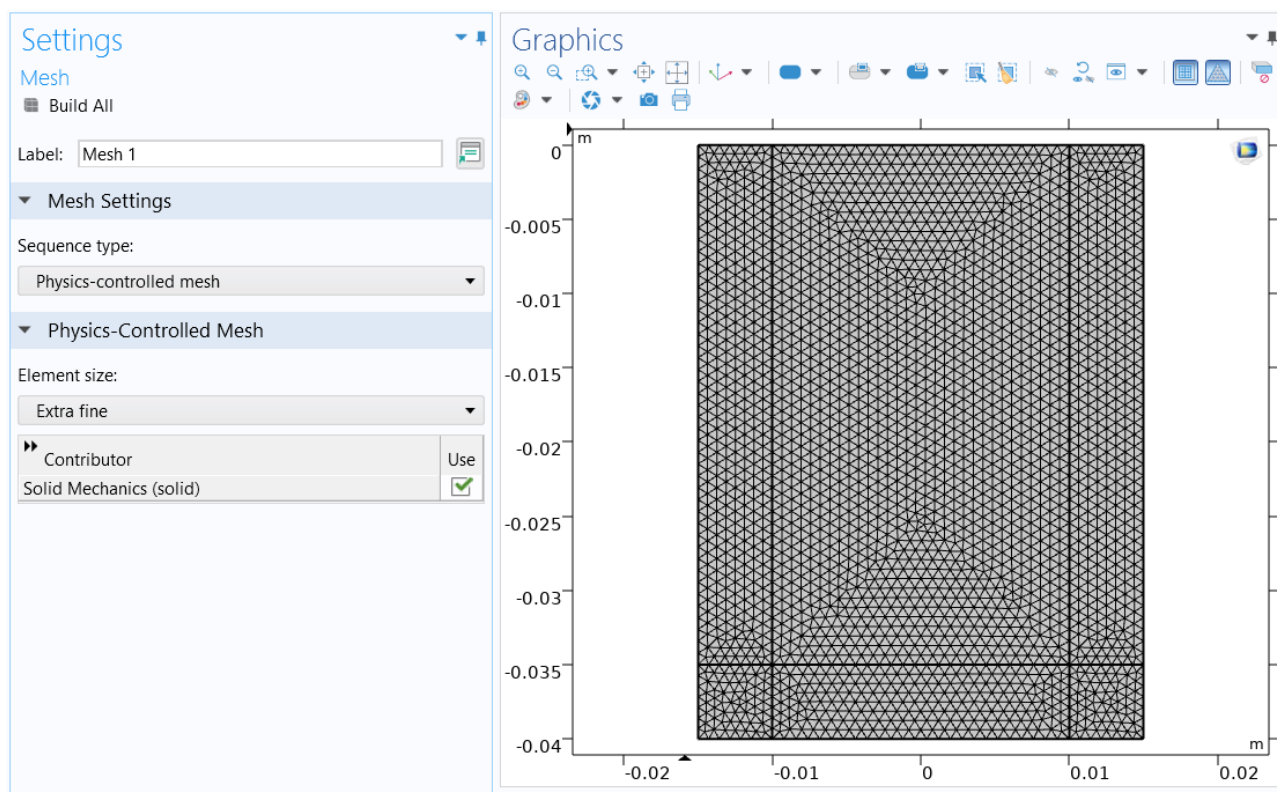


Рис. 15. Наложение сетки

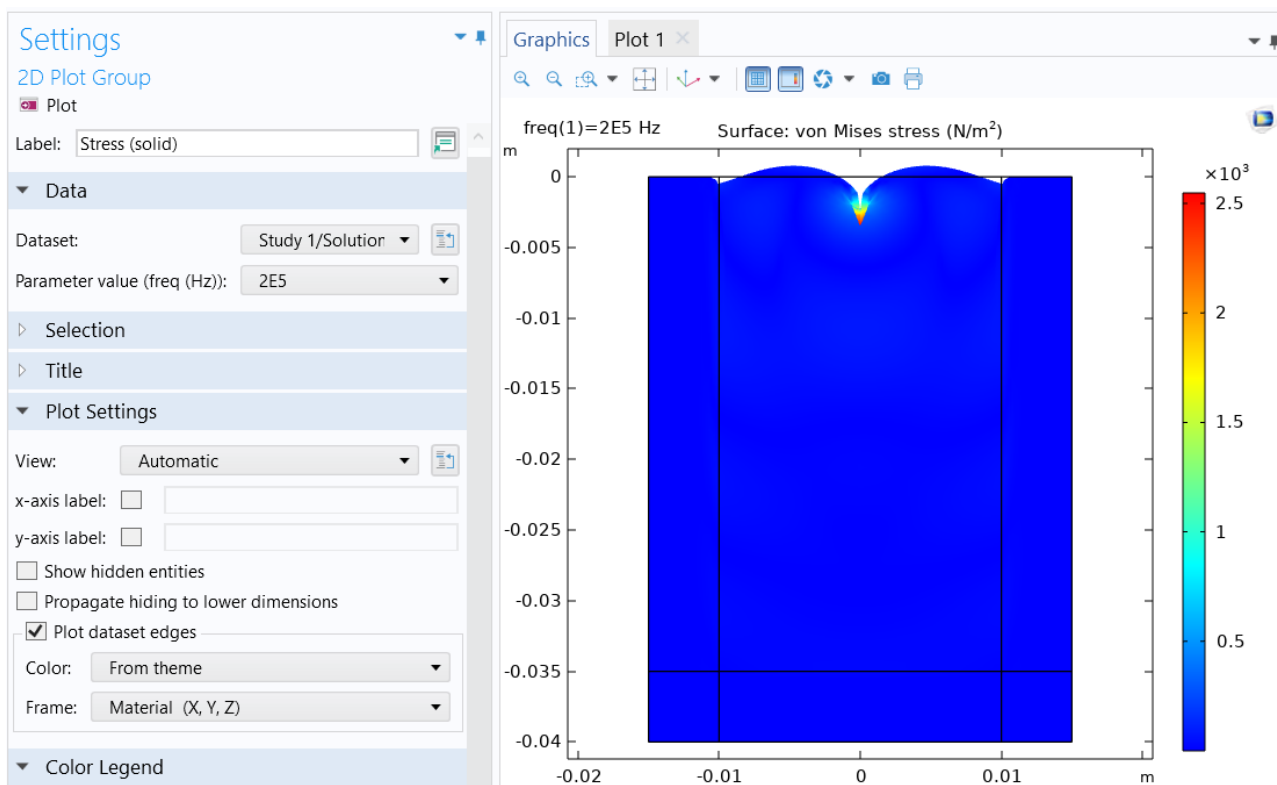


Рис. 16. График, полученный в результате вычислений

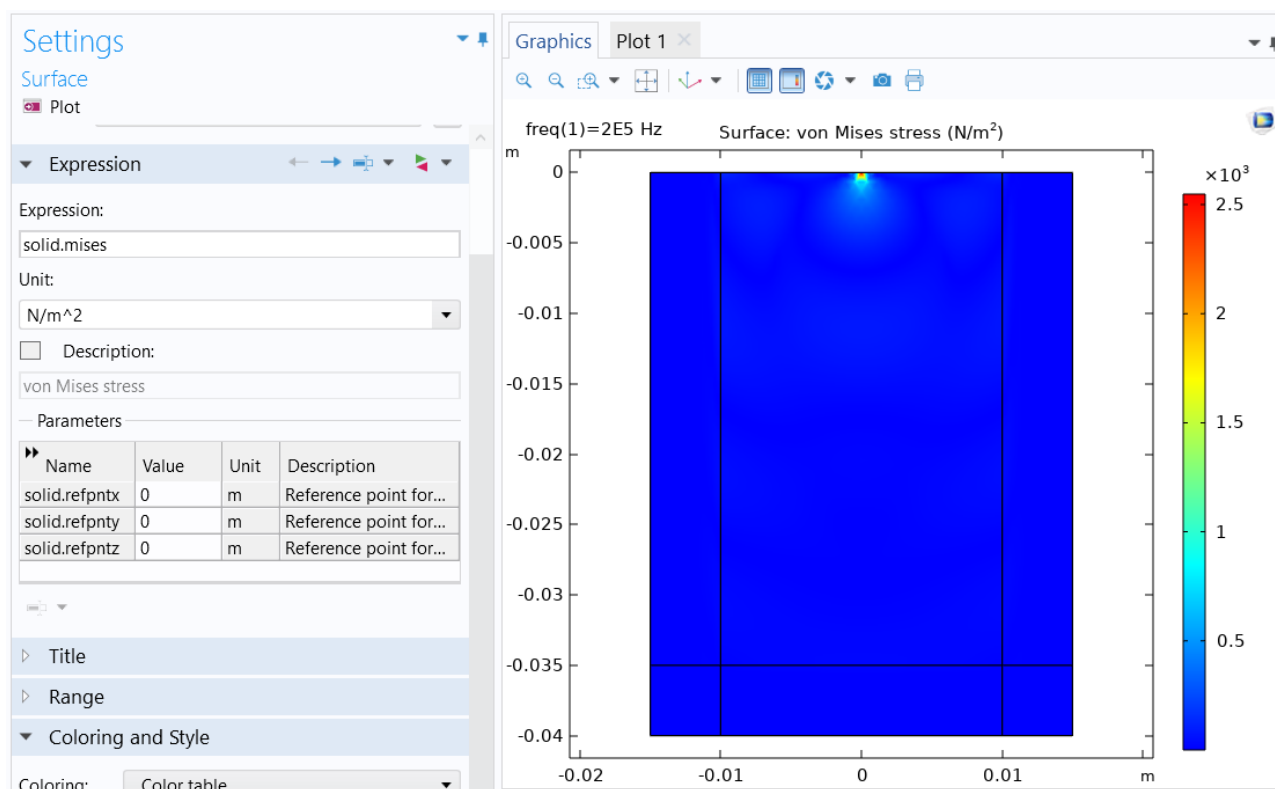


Рис. 17. График напряжений

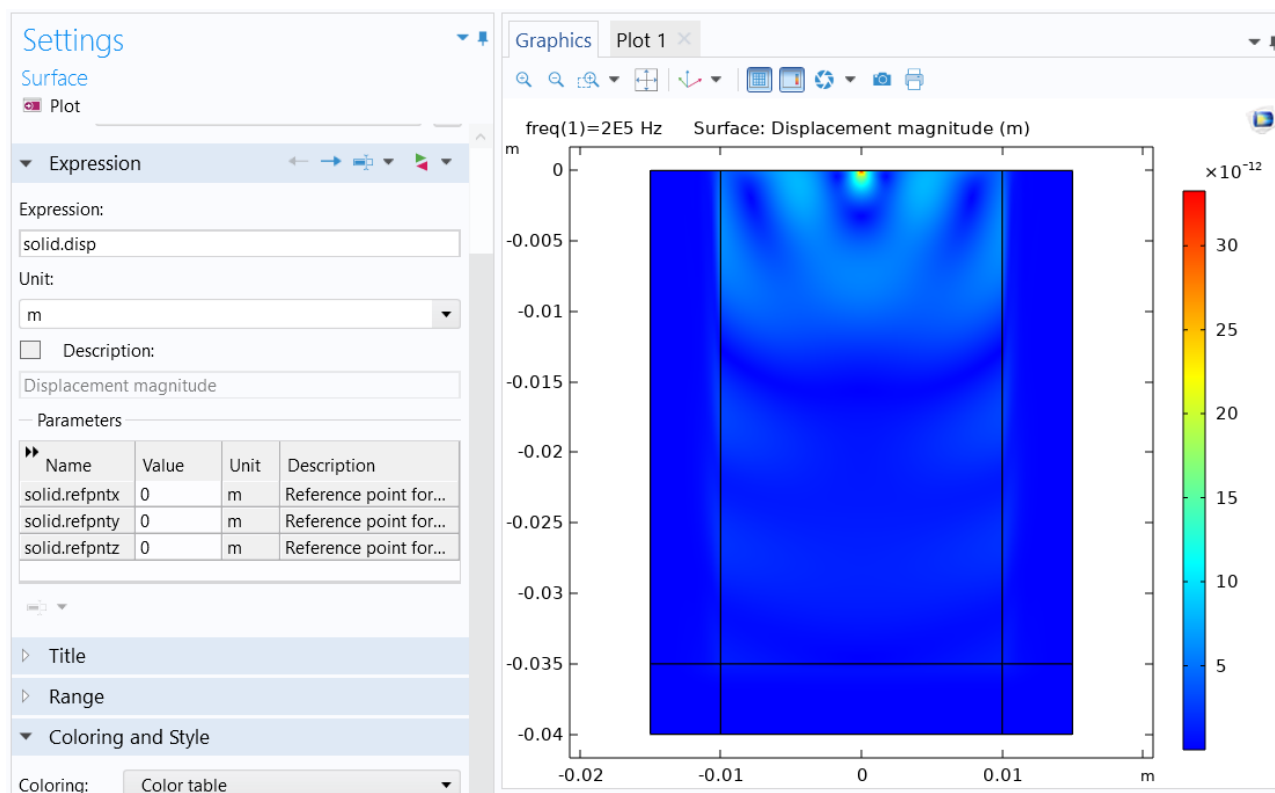


Рис. 18. График распространения волны в поле



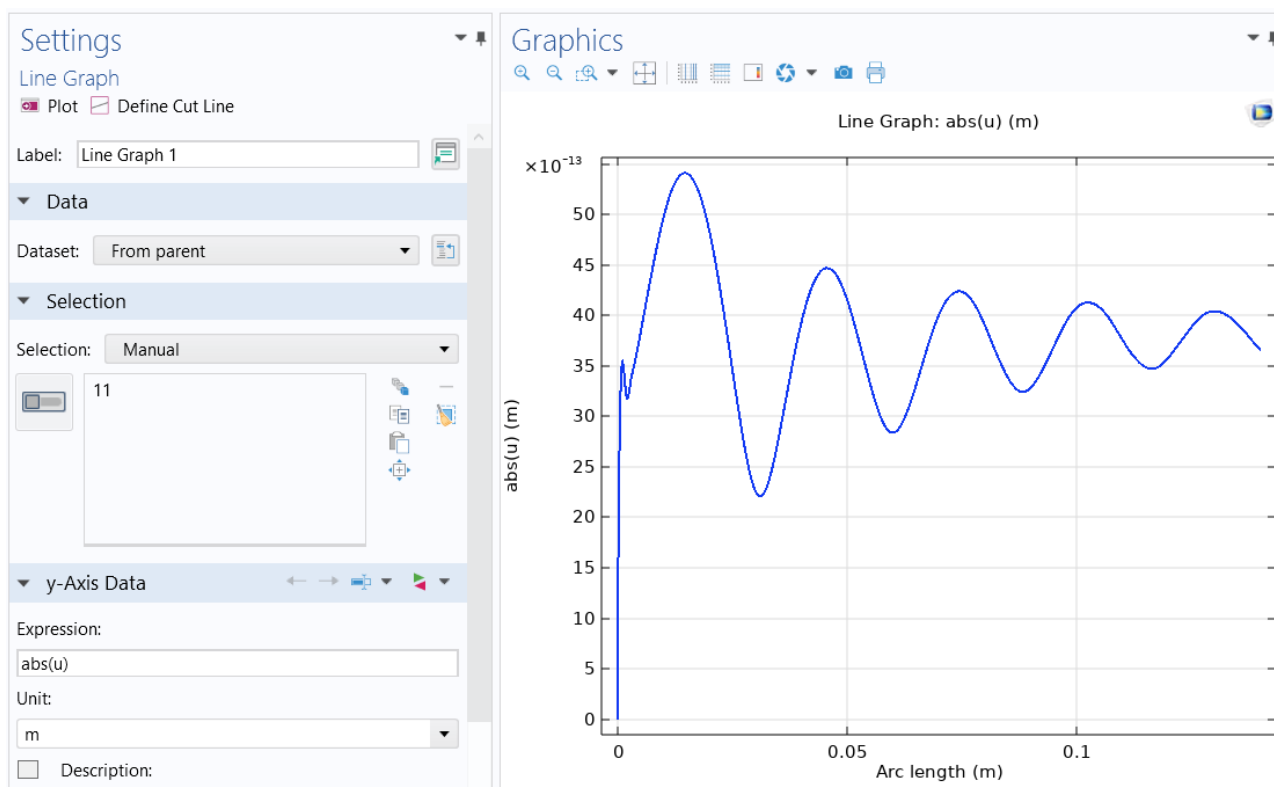


Рис. 19. График амплитуды горизонтальной компоненты поля  $u$

Если полученной модели недостаточно, можно добавить и другие графики с различными параметрами. Например, добавим двумерный график, отображающий зависимость величины нагрузки от расположения на объекте. В качестве функции, описывающей эту зависимость, возьмем компоненту вектора перемещений  $u$ .

Или же, для большей наглядности, используем компоненту  $v$ .

Как можно заметить, полуаналитический метод является не только рабочим, но еще и достаточно точным. Конечно, создание даже одной математической модели данным подходом затрачивает значительно больше времени, чем получение графика в COMSOL Multiphysics методом конечных элементов, однако возможность поэтапных расчетов увеличивает гибкость полуаналитического метода.

В конечном итоге, вне зависимости от выбора одного из методов, на выходе будут получены корректные данные.

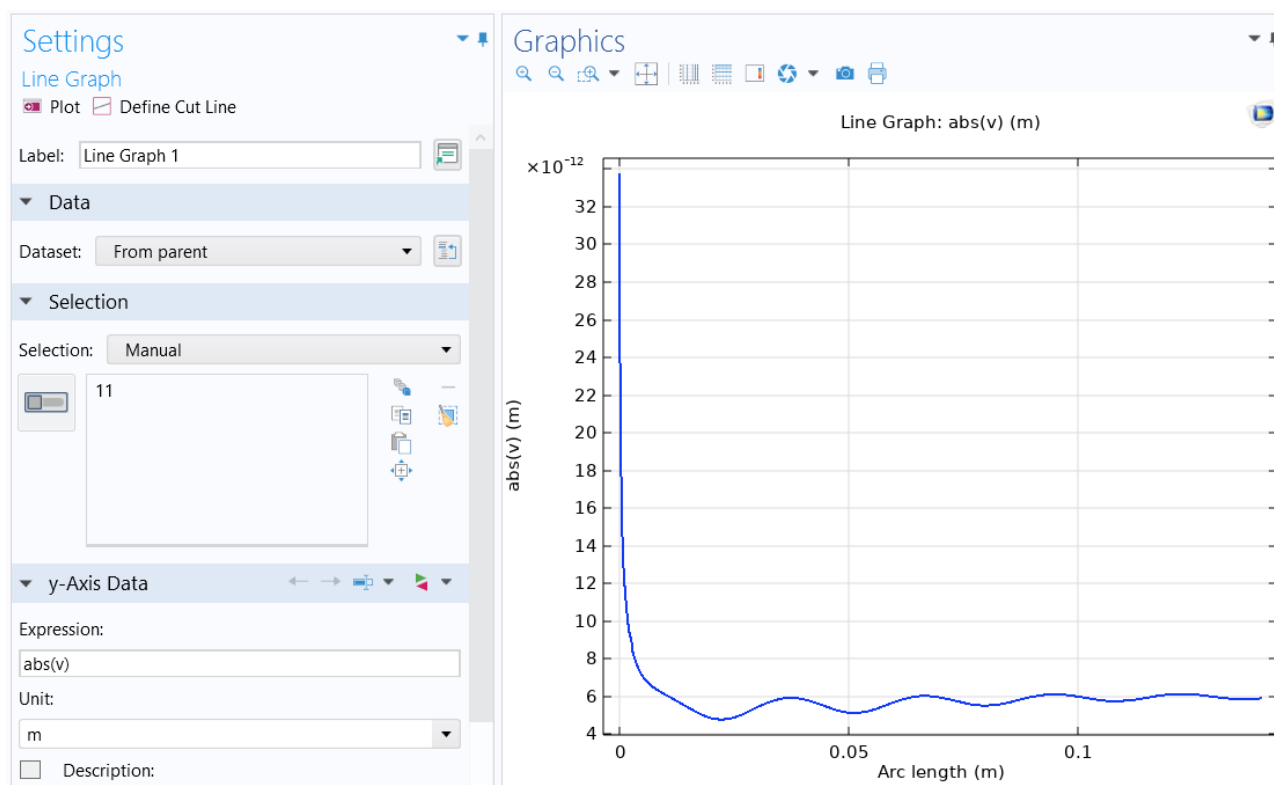
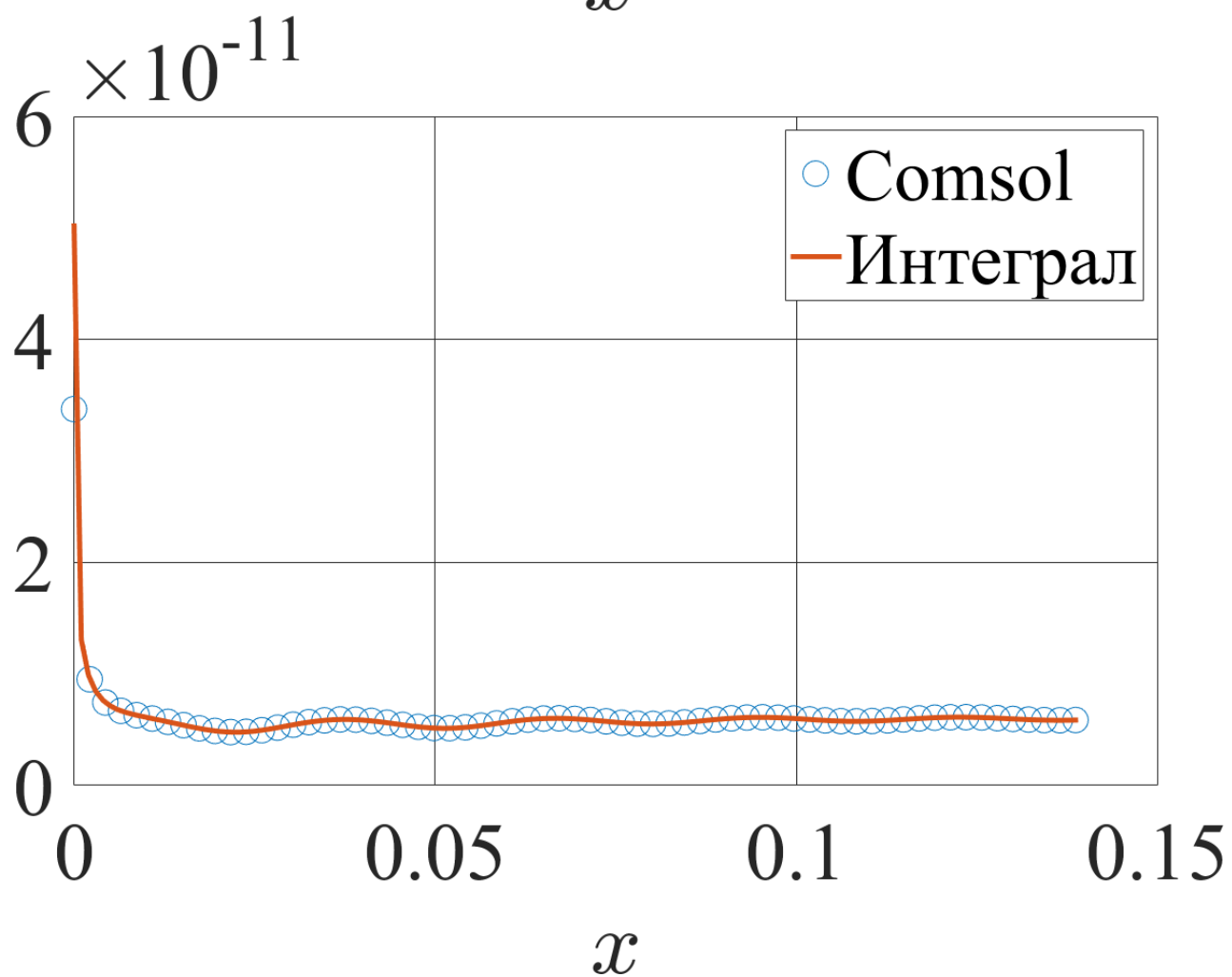
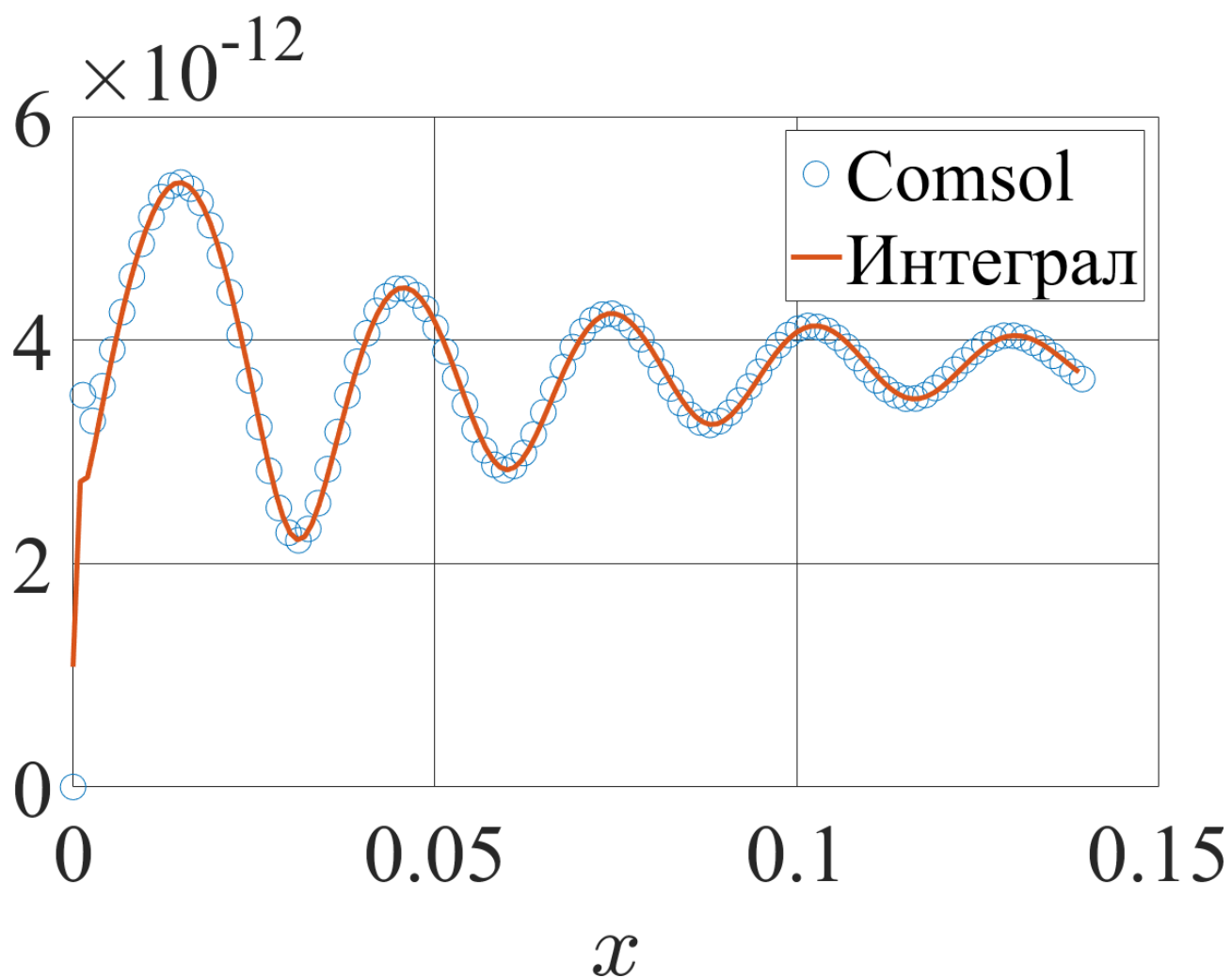


Рис. 20. График амплитуды вертикальной компоненты поля  $\mathbf{u}$

#### 4. Сравнение результатов, полученных при помощи полуаналитического метода и программного комплекса COMSOL

Для сравнения результатов ниже приведены полученные полуаналитическим методом графики амплитуд горизонтальной и вертикальной компонент поля  $\mathbf{u} = (u, w)$  на поверхности полупространства  $z = 0$ , на которые наложены соответствующие результаты, полученные в COMSOL.

Видно, что результаты совпадают. Важно отметить, что каждый из подходов имеет как преимущества, так и недостатки. COMSOL позволяет оперативно получить результаты в довольно широком круге задач, однако зачастую требует значительных вычислительных мощностей, и его результаты нуждаются в постобработке. В свою очередь, полуаналитический метод позволяет провести более глубокий и детальный анализ волновых явлений при меньшем, по сравнению с COMSOL, объеме вычислений, но требует больше внимания к математическим выкладкам и программированию.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Интегральные преобразования в задачах теории упругости, 1990
- [2] Mitra M., Gopalakrishnan S. Guided Wave Based Structural Health Monitoring: Review. Smart Materials and Structures, 2016, vol. 25, no. 5, pp. 1–27. DOI: 10.1088/0964-1726/25/5/053001
- [3] Горелик Г. С. Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. — 3-е изд.: под ред. С.М. Рытова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 656 с. — ISBN 978-5-9221-0776-1.