ВВЕДЕНИЕ

Вибрационная нагрузка, приложенная к поверхности упругого волновода, возбуждает в нем бегущие волны. Оценка характеристик этих волн используется в таких областях науки и техники, как сейсмология и сейсмостойкое строительство, виброзащита, а также в микроэлектронных устройствах на поверхностных акустических волнах и в системах прецизионного позиционирования. Волны, возбуждаемые в стальных, алюминиевых или композитных пластинах с помощью активных пьезосенсоров, выполненных в виде гибких и тонких накладок, распространяются на большие расстояния, взаимодействуя с любыми неоднородностями, что позволяет выявлять скрытые дефекты. В последнее время такая технология волнового контроля выделяется в самостоятельное научно-техническое направление — мониторинг дефектов конструкций (Structural Health Monitoring (SHM)) [1].

Для получения количественных характеристик возбуждаемых волн, используются различные подходы, от классического модального анализа до конечно-элементной аппроксимации (МКЭ). Промежуточное положение в этом ряду занимает полуаналитический интегральный подход, базирующийся на явном интегральном представлении вектора смещений волнового поля u, возбуждаемого поверхностной нагрузкой q, приложенной в некоторой области Ω (рисунок 1), через Фурье-символ K матрицы Грина рассматриваемой упругой слоистой структуры.

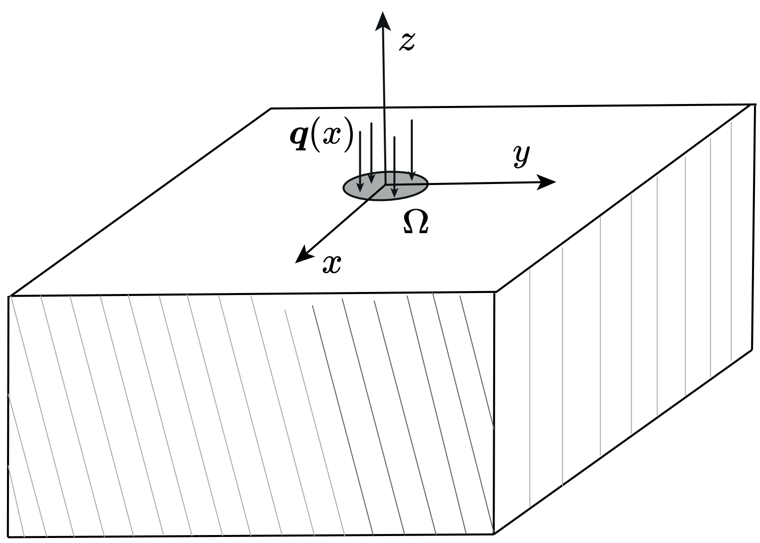

Рис. 1. Геометрия задачи

Цель данной работы: изучить моделирование процессов возбуждения и распространения волн в упругом волноводе на примере построения установившихся гармонических колебаний. Задачи: построить волновое поле, возбуждаемое точечным источником колебаний в упругом полупространстве методом конечных элементов при помощи программы COMSOL Multiphysics[2]; построить волновое поле, используя полуаналитический интегральный подход, базирующийся на явном интегральном представлении вектора смещений волнового поля через Фурье символ K матрицы Грина упругого полупространства с применением численного интегрирования средствами языка программирования Fortran и программы DINN5.

1. Постановка задачи

Однородное изотропное упругое полупространство в декартовой системе координат x, y занимает объем $-\infty < x, y < +\infty$. К его поверхности в области Ω приложена нагрузка $\tau = q(x, y)e^{(-i\omega x)}$, а вне Ω напряжения τ отсутствуют. Колебания среды предполагаются гармоническими установившимися с круговой частотой ω. На бесконечности перемещения и напряжения стремятся к нулю и выполняются условия излучения Зоммерфельда. Требуется определить волновое поле, возбуждаемое источником колебаний в упругой среде.

Установившийся режим колебаний означает, что зависимость всех характеристик задачи (перемещения, напряжения и др.) от времени t описывается множителем $e^{(-i\omega x)}$. В силу линейности задачи данный множитель можно сократить и работать только с комплексными амплитудами соответствующих величин, не оговаривая этого особо. Например, $Re[u(x, y)e^{(-i\omega x)}]$ - вектор перемещений точек среды. Работать будем только с вектором $u(x, y) = \{u, v\}$, называя его также вектором перемещений.

Вектор перемещений характеризует отклонение каждой точки тела от начального положения, компоненты его u, v являются непрерывными функциями координат. Векторные величины здесь обозначаются чертой сверху; предполагается, что векторы являются векторами-столбцами.

Механическое состояние упругого тела характеризуется компонентами тензоров деформаций ε_{ij} и напряжений $\sigma_{i,j}$, которые в линейной теории упругости связаны уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},\ i = 1, 2, 3...$$

Формула 1 - Уравнение движения

соотношениями обобщенного закона Гука

$$\sigma_{i,j} = c_{ij}^{mn}\varepsilon_{mn},\ i, j = 1, 2, 3...$$

Формула 2 - Обобщенный закон Гука

и геометрическими соотношениями Коши:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i},$$

Формула 3 - Геометрическое уравнение Коши

где

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

В нашем случае пространство является однородным и изотропным, поэтому вместо общего закона Гука (Формула 2) воспользуемся его частным случаем, зависящем только от констант λ и μ:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij},$$

Формула 4 - Частный случай закона Гука

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Для нахождения каждой компоненты пространства в отдельности представим уравнение движения (Формула 1) в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y} + f_x + \rho\omega^2 u = 0 \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + f_y + \rho\omega^2 v = 0 \\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma z}{\partial z} + f_z + \rho\omega^2 w = 0 \end{cases}$$

Формула 6 - Уравнение движения в виде системы

Для упрощения системы ОДУ введем следующую замену:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

После серии подстановок и сворачиваний получим систему, называемую уравнениями Ляме:

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x} + \mu\Delta u + f_x + \rho\omega^2 u = 0 \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial y} + \mu\Delta v + f_y + \rho\omega^2 v = 0 \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial z} + \mu\Delta w + f_z + \rho\omega^2 w = 0 \end{cases}$$

Формула 7 - Уравнения Ляме

которые вместе с граничными условиями:

$$\bar{\tau}|_{z=0} = \begin{cases} \bar{q}(x,y), (x,y) \in \Omega \\ 0, (x,y) \notin \Omega \end{cases},$$

$$\tau_i = \sigma_{ij} n_j,\ i = 1,2,3$$

Формула 8 - Начальные условия

и условиями на бесконечности:

$$u- > 0,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}- > \infty$$

Формула 9 - Физические условия

составляют краевую задачу (Формула 1)-(Формула 6), к решению которой сводится вопрос нахождения поля u.

2. Метод конечных элементов В данном разделе мы построим волновое поле с помощью COMSOL Multiphisics. Эта программа имеет широкий функционал, множество модулей и предназначена для создания большого количества физических процессов, поэтому при работе с ней необходимо учитывать множество нюансов. Для рассмотрения части из них пройдемся по всем этапам создания модели волнового поля.

Первым шагом будет выбор пространства, в котором будут проходить все последующие вычисления. В нашем случае это будет двумерная плоскость $\{X, Y\}$

Рис. 2. Окно выбора мерности пространства

Далее COMSOL предоставляет нам выбор процесса, который мы предпочтем рассматривать. Из имеющихся вариантов используем “механики твердых тел” (Solid Mechanics), так как построенный в итоге волновод должен являться упругим.

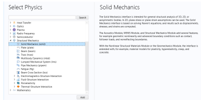

Рис. 3. Окно выбора мерности пространства

Следующее окно, с которым мы сталкиваемся, предлагает нам выбрать дополнительные условия, которые мы будем накладывать на наше пространство. Выберем "частотное поле"(Frequency Domain), потому что этот модуль будет работать с поступающим напряжением, как с установившимися гармоническими колебаниями.

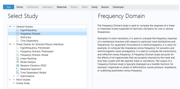

Рис. 4. Окно выбора мерности пространства

После проделанных ранее действий перед нами открывается рабочее пространство COMSOL, в котором можно задавать нужные нам формы, материалы, свойства, значения и т.д.

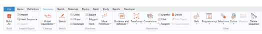

Рис. 5. Окно выбора мерности пространства

Для добавления желаемого объекта на область отображений на верхней панели секцию “геометрия” (Geometry) и нажмем на интересующую нас фигуру, например, прямоугольник.

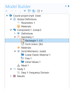

Рис. 6. Окно выбора мерности пространства

У созданной области не будет заданных заранее характеристик, поэтому зададим их самостоятельно. В будущем может возникнуть потребность в изменении конкретных параметров, поэтому для удобства заранее создадим константы, на которые будем ссылаться в других частях программы. Данный функционал предусмотрен в секции “параметры” (Parameters). В появившихся полях “имя” (Name) и “выражение” (Expression) зададим, соответственно, имена переменных и их значения.

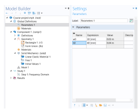

Рис. 7. Окно выбора мерности пространства

Передадим созданные переменные соответствующим полям и нажмем на кнопку “создать все объекты” (Build All Objects).

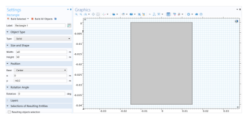

Рис. 8. Окно выбора мерности пространства

Далее нам понадобится область, на которую будет поступать нагрузка. Для этого, используя предыдущие шаги, создадим “точку” (Point), которая будет находиться, например, в центре верхней поверхности имеющегося прямоугольника.

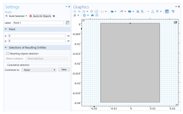

Рис. 9. Окно выбора мерности пространства

Для создания нагрузки на пространство в разделе Solid Mechanics добавим “точечную нагрузку” (Point Load) и нажмем на нагружаемую область, чтобы выбрать ее. Силу, с которой будут поступать колебания, зададим в разделе “сила” (Force).

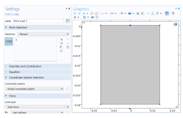

Рис. 10. Окно выбора мерности пространства

Теперь, когда мы создали объект, ему нужно задать материал. Для этого выбираем секцию “материалы” (Materials) на верхней панели и жмем “добавить материал” (Add Material).

Рис. 11. Окно выбора мерности пространства

В открывшейся библиотеке материалов выбираем подходящий. В нашем случае полупространство является упругим, поэтому соответствующим материалом будет “алюминий” (Aluminum).

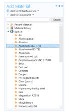

Рис. 12. Окно выбора мерности пространства

Следующим шагом нужно сделать наш прямоугольник полупространством, чтобы при распространении волны уходили на бесконечность и не отражались от поверхностей. Для этого выберем в секции “определения” (Definitions) инструмент “идеально подобранные слои” (Perfectly Matched Layers (PML)), который будет поглощать поступающие волны.

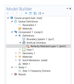

Рис. 13. Окно выбора мерности пространства

Для размещения PML необходимо создать слои на краях объекта. Для этого выберем наш прямоугольник в области “геометрия” и в блоке “слои” (Layers) зададим нужную позицию и толщину слоев.

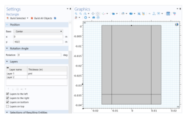

Рис. 14. Окно выбора мерности пространства

После этого возвращаемся к блоку PML и выбираем те слои, которые хотим сделать поглощающими.

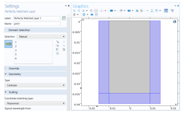

Рис. 15. Окно выбора мерности пространства

Одним из заключительных действий станет добавление на объект сетки. Для этого в разделе “сетка” (Mesh) выбираем, насколько маленькими будут фрагменты, на которые COMSOL разобьет нашу область. Чем меньше один фрагмент, там плотнее будет расположена сетка, и тем точнее будут полученные вычисления. Однако увеличение точности повлечет за собой увеличение вычислительной сложности, а значит остается выбрать наиболее подходящий вариант. Выбираем “очень гладко” (Extra fine) и нажимаем Build All.

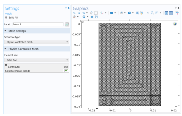

Рис. 16. Окно выбора мерности пространства

Теперь, когда у нас заданы практически все условия, осталось зайти в раздел “изучение” (Study), (Step 1: Frequency Domain), задать частоту колебаний и нажать “вычислить” (Compute).

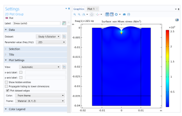

Рис. 17. Окно выбора мерности пространства

Полученный результат показывает, что нагрузка, приложенная к алюминиевому полупространству, была слишком велика, отчего материал сильно деформировался. В нашем случае этот итог не несет никакой информативности, так что в разделе “результат” (Result), в блоке “стресс” (Stress) удаляем пункт “деформация” (Deformation).

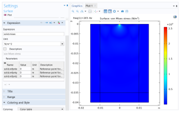

Рис. 18. Окно выбора мерности пространства

Чтобы на графике было видно распространение волн, а не распределение нагрузки, поменяем в настройках поверхности “выражение” (Expression) на пакет “solid.disp”. Нажимаем “построить график” (Plot).

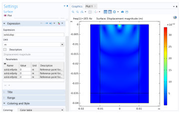

Рис. 19. Окно выбора мерности пространства

Если полученной модели недостаточно, можно добавить и другие графики с различными параметрами. Например, добавим двумерный график $\{X, Y\}$, отображающий зависимость величины нагрузки от расположения на объекте.

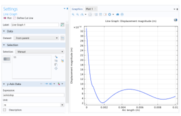

Рис. 20. Окно выбора мерности пространства

Теперь, когда мы на примере рассмотрели принцип работы МКЭ, обратимся к методу полуаналитического решения.

3. Полуаналитический метод

Предполагаем $f_x = f_y = f_z = 0$ (отсутствие объемных сил). Чтобы избавиться от части производных и зависимости от x и y, воспользуемся преобразованием Фурье:

$$\begin{cases} U = \mathcal{F}[u] \\ V = \mathcal{F}[v] \\ W = \mathcal{F}[w] \end{cases}$$

Преобразование Фурье производим только по x и y, для z оставляем запись в производных:

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)(-\alpha_1^2 U - \alpha_1\alpha_2 V - \alpha_1 i W') + \mu(-\alpha_1^2 U - \alpha_2^2 U + U'') + \rho\omega^2 U = 0 \\ (\lambda+\mu)(-\alpha_1\alpha_2 U - \alpha_2^2 V - \alpha_2 i W') + \mu(-\alpha_1^2 V - \alpha_2^2 V + V'') + \rho\omega^2 V = 0 \\ (\lambda+\mu)(-\alpha_1 i U' - \alpha_2 i V' + W'') + \mu(-\alpha_1^2 W - \alpha_2^2 W + W'') + \rho\omega^2 W = 0 \end{cases}$$

При $z = 0$ нормаль к поверхности будетравна $\bar{n} = (0,0,1)$, следовательно функция напряжений на поверхности (Формула 8) будет равна $\tau = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\}$:

$$\begin{cases} \mu(u'_z + w'_x) = q_1 \\ \mu(v'_z + w'_y) = q_2 \\ \lambda(u'_x + v'_y + w'_z) + 2\mu w'_z = q_3 \end{cases}$$

Для данных начальных условий также введем преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}[\bar{q}] = \bar{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$$

$$\begin{cases} \mu(U' - \alpha_1 i W) = Q_1 \\ \mu(V' - \alpha_2 i W) = Q_2 \\ \lambda(-\alpha_1 i U - \alpha_2 i V) + (\lambda + 2\mu)W' = Q_3 \end{cases}$$

Для получения двух независимых волновых уравнений, расщепим уравнения Ляме следующей заменой:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ w = w \end{cases}$$

Или же в трансформантах:

$$\begin{cases} U = -\alpha_1 i\Phi - \alpha_2 i\Psi \\ V = -\alpha_2 i\Phi + \alpha_1 i\Psi \\ W = W, \Phi = \mathcal{F}[\varphi], \Psi = \mathcal{F}[\psi] \end{cases}$$

Для упрощения последующих записей добавим замену

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

Преобразуем систему до тех пор, пока не получится следующее:

$$\begin{cases} -\alpha_1 i\mu\Phi'' - \alpha_2 i\mu\Psi'' - (\lambda+\mu)\alpha_1 iW' + \alpha_1 i[(\lambda+2\mu)\alpha^2 - \rho\omega^2]\Phi + \alpha_2 i[\mu\alpha^2 - \rho\omega^2]\Psi = \\ -\alpha_2 i\mu\Phi'' + \alpha_1 i\mu\Psi'' - (\lambda+\mu)\alpha_2 iW' + \alpha_2 i[(\lambda+2\mu)\alpha^2 - \rho\omega^2]\Phi + \alpha_1 i[-\mu\alpha^2 + \rho\omega^2]\Psi = \\ (\lambda+2\mu)W'' - (\lambda+\mu)\alpha^2\Phi' + (\rho\omega^2 - \mu\alpha^2)W = 0 \end{cases}$$

Мы хотим получить две независимые системы: относительно Φ, W и относительно Ψ. Для этого домножим первое уравнение системы на α_1, а второе - на α_2, после чего сложим их. Далее домножим первое уравнение системы на α_2, а второе - на $(-\alpha_1)$, после чего сложим их. Избавившись от коэффициента $(-\alpha^2 i)$, мы получим две независимые системы относительно Φ, W:

$$\begin{cases} \mu\Phi'' + (\lambda+\mu)W' + [\rho\omega^2 - (\lambda+2\mu)\alpha^2]\Phi = 0 \\ (\lambda+\mu)W'' - (\lambda+\mu)\alpha^2\Phi' + (\rho\omega^2 - \mu\alpha^2)W = 0 \end{cases}$$

и относительно Ψ:

$$\mu\Psi'' + (\rho\omega^2 - \mu\alpha^2)\Psi = 0$$

Аналогично поступим и с граничными условиями. Полученные системы относительно Φ, W:

$$\begin{cases} -\alpha^2\mu i(\Phi' + W) = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \\ -\alpha^2\lambda\Phi + (\lambda+2\mu)W' = Q_3 \end{cases}$$

и относительно Ψ:

$$-\alpha^2\mu\Psi' + (\rho\omega^2 - \mu\alpha^2)\Psi = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2$$

Перепишем предыдущие задачи в матричном виде. Для этого введем два вектора:

$$\bar{Y} = \{\Phi, \Phi', \Psi, \Psi'\}^T, \bar{X} = \{\Psi, \Psi'\}^T$$

Для сопоставления общего и частного случаев изменим вид систем общего случая:

$$\begin{cases} \frac{(\lambda+\mu)}{\mu}W' + \frac{[(\lambda+2\mu)\alpha^2-\rho\omega^2]}{\mu}\Phi = \Phi'' \\ \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\alpha^2\Phi' + \frac{(\mu\alpha^2-\rho\omega^2)}{(\lambda+2\mu)}W = W'' \end{cases}$$

$$\frac{(\mu\alpha^2-\rho\omega^2)}{\mu}\Psi = \Psi''$$

Подставим вектора в систему, а коэффициенты при трансформантах свернем в матрицы:

$$\begin{cases} A\bar{Y} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial z} & \text{-общий случай относительно } \Phi \\ T\bar{Y}|_{z=0} = \bar{P} & \text{-частный случай относительно } \Phi (\text{граничные условия}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B\bar{X} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial z} & \text{-общий случай относительно } \Psi \\ (l\bar{X})|_{z=0} = \alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2 & \text{-частный случай относительно } \Psi (\text{граничные условия}) \end{cases}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 0\ 0 \\ \frac{[(\lambda+2\mu)\alpha^2-\rho\omega^2]}{\mu}\ 0\ 0\ -\frac{(\lambda+\mu)}{\mu} \\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\alpha^2\ \frac{(\mu\alpha^2-\rho\omega^2)}{(\lambda+2\mu)}\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 0\ 0 \\ a_{21}\ 0\ 0\ a_{24} \\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ a_{42}\ a_{43}\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ \frac{(\mu\alpha^2-\rho\omega^2)}{(\lambda+2\mu)}\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ b_1\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -\lambda\alpha^2\ 0\ 0\ \lambda+2\mu \\ 0\ -i\mu\alpha^2\ -i\mu\alpha^2\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} Q_3 \\ \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \end{pmatrix}$$

$$l = \begin{pmatrix} 0 \\ -i\mu\alpha^2 \end{pmatrix}$$

В случае отсутствия кратных собственных значений, решение первой задачи $N = 4$ можно выписать в виде:

$$
\begin{gathered}
\bar{Y} = \sum_{k=1}^{N} t_k \bar{m}_k e^{\gamma_k z} \\
\gamma_k : \det(A - \gamma_k E) = 0 \\
\bar{m}_k : (A - \gamma_k E)\bar{m}_k = 0
\end{gathered} ,
$$

где N - размерность системы, γ_k - собственные значения; $\bar{m}_k$ - соответствующие собственные вектора матрицы системы; t_k - неизвестные константы, определяемые из N граничных условий; E - единичная матрица размерности N

Решение второй задачи $N = 2$:

$$
\begin{gathered}
\bar{X} = \sum_{j=1}^{N} s_j \bar{n}_j e^{\delta_j z} \\
\delta_j : \det(B - \delta_j E) = 0 \\
\bar{n}_j : (B - \delta_j E)\bar{n}_j = 0
\end{gathered}
$$

Найдем собственные значения:

$$
\det(A - \gamma_k E) = \gamma^4 - \gamma^2(a_{24}a_{42} + a_{43} + a_{21}) + a_{21}a_{43} = 0
$$

В целях упрощения полученных коэффициентов используем следующую замену:

$$
\begin{gathered}
\varkappa_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{(\lambda+2\mu)} \\
\varkappa_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} \\
\sigma_n = \sqrt{\alpha^2 - \varkappa_n^2}
\end{gathered} , \ n = 1, 2
$$

Тогда наши уравнения примут вид:

$$
a_{24}a_{42} + a_{43} + a_{21} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2
$$

$$
a_{21}a_{43} = \sigma_1^2\sigma_2^2
$$

Вернем полученные зачения, после чего уравнение определителя примет вид:

$$
\gamma^4 - \gamma^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sigma_1^2\sigma_2^2 = 0
$$

Решение данного квадратичного уравнения:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1^2 = \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+(\sigma_1^2-\sigma_2^2)}{2} = \sigma_1^2 \\ \gamma_2^2 = \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-(\sigma_1^2-\sigma_2^2)}{2} = \sigma_2^2 \end{array}\right\} => \begin{array}{c} \gamma_1 = \sigma_1 \\ \gamma_2 = -\sigma_1 \\ \gamma_3 = \sigma_2 \\ \gamma_4 = -\sigma_2 \end{array}$$

Найдем $\bar{m}_k$:

$$\bar{m}_k = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$$

$$(A - \gamma_k E)\bar{m}_k = \left\{\begin{array}{c} (a_{21} - \gamma_k^2)m_1 + \gamma_k a_{24} m_3 = 0 \\ \gamma_k a_{42} m_1 + (a_{43} - \gamma_k^2) m_3 = 0 \\ m_2 \ = \gamma_k m_1 \\ m_4 = \gamma_k m_3 \end{array}\right.$$

Т.к. $\det(A - \gamma_k E) = 0$, решение можно найти, зафиксировав одно из неизвестных:

$$\left.\gamma_1 = \sigma_1,\ m_1 = 1 \right\} =>\ \bar{m}_1 = \{1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1^2\}$$

$$\left.\gamma_2 = -\sigma_1,\ m_1 = 1 \right\} =>\ \bar{m}_2 = \{1, -\sigma_1, -\sigma_1, \sigma_1^2\}$$

$$\left.\gamma_3 = \sigma_2,\ m_3 = \alpha^2 \right\} =>\ \bar{m}_3 = \{\sigma_2, \sigma_2^2, \alpha^2, \alpha^2\sigma_2\}$$

$$\left.\gamma_3 = -\sigma_2,\ m_3 = \alpha^2 \right\} =>\ \bar{m}_4 = \{-\sigma_2, \sigma_2^2, \alpha^2, -\alpha^2\sigma_2\}$$

Аналогично поступим с B:

$$\det(B - \delta_j E) = \delta^2 - b_1 = 0 => \delta_{1,2} = \pm\sqrt{b_1} => b_1 = \pm\sigma_2^2$$

Найдем $\bar{n}_j$:

$$\bar{n}_j = \{n_1, n_2\}$$

$$(B - \delta_j E)\bar{n}_j = \left\{\begin{array}{l} -\delta_j n_1 + n_2 = 0 \\ \sigma_2^2 n_1 - \delta_j n_2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\delta_1 = \sigma_2,\ n_1 = 1 => \bar{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$\delta_2 = -\sigma_2,\ n_1 = 1 => \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma_2 \end{pmatrix}$$

Так как мы рассматриваем плоскость, будем придерживаться следующих физических условий (Формула 9). Для их соблюдения необходимо, чиобы $\bar{Y}(\alpha,\ z),\ \bar{X}(\alpha,\ z) -> 0$. Однако в заданных функциях возникает проблема, связанная с поведением экспонент, поэтому мы рассмотри 2 случая:

$$\begin{aligned} &1)\ |\alpha| > \varkappa_k => \sigma_k = \sqrt{\alpha^2 - \varkappa_n^2}\text{- вещественная} \\ &2)\ |\alpha| < \varkappa_k => \sigma_k\ = \sqrt{\alpha^2 - \varkappa_n^2}\text{- чисто мнимая} \end{aligned}$$

В первом случае $e^{\sigma_k z} -> 0, e^{-\sigma_k z} -> \infty$, поэтому положим $t_2 = t_4 = s_2 = 0$.

Во втором случае анализ вклада показывает, что влияние экспоненты стремится к 0 $[I]$ => константы могут быть ненулевыми, но не будут противоречить условию $u(z) -> 0$.

В конечном итоге выходит, что количество констант больше 3, поэтому решение не будет единственным. В такой ситуации можно воспользоваться условиями излучения $[I]$, согласно которым , в случае однородного пространства, часть констант являются эквивалентными. Если отталкиваться от принципа Зоммерфельда, то останутся только те составляющие, которые описывают распространение волн от источника в бесконечность. Таким образом наши функции примут вид:

$$\begin{aligned} \bar{X}(\alpha,\ z) &= s_1 \bar{n}_1 e^{\sigma_2 z} \\ \bar{Y}(\alpha,\ z) &= t_1 \bar{m}_1 e^{\sigma_1 z} + t_3 \bar{m}_3 e^{\sigma_2 z} \end{aligned}$$

Осталось определить t_1, t_3, s_1 из граничных условий при $z = 0$. В силу линейности задачи получим:

$$T\bar{Y} = \begin{pmatrix} Q_3 \\ \alpha_1 Q_1 + \alpha_1 Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} Q_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\alpha_1 Q_1 + \alpha_1 Q_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} P_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_2$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T\bar{Y}_1 = \bar{e}_1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T\bar{Y}_2 = \bar{e}_2 \end{aligned}\right\} => T\bar{Y}_n|_{z=0} = \bar{e}_n$$

Отсюда получим:

$$\bar{Y} = P_1\bar{Y}_1 + P_2\bar{Y}_2$$
$$\bar{X} = (\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2)\bar{X}_1$$

Для обозначения компонент векторов $\bar{Y}_n$, $\bar{X}_1$ традиционно приняты обозначения:

$$\bar{Y}_1 = \begin{pmatrix} P \\ P' \\ R \\ R' \end{pmatrix}, \bar{Y}_2 = \begin{pmatrix} M \\ M' \\ S \\ S' \end{pmatrix}, \bar{X}_1 = \begin{pmatrix} N \\ N' \end{pmatrix}$$

Найдем вид функций P,R,M,S,N для однородного полупространства. Для этого выпишем уравнение $T\bar{Y}$, подставляя $\bar{Y}_n$:

$$T\bar{Y}_n = (T\bar{m}_1)t_1 + (T\bar{m}_3)t_3 = \bar{e}_n$$

или в матричном виде:

$$B\bar{t} = \bar{e}_n,\ n = 1, 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2\mu(\alpha^2 - 0.5\varkappa_2^2) & 2\mu\alpha^2\sigma_2 \\ -2i\mu\alpha^2\sigma_1 & -i\mu\alpha^2(\alpha^2 + \sigma_2^2) \end{pmatrix}, \bar{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

По правилу Крамера:

$$t_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, t_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

где

$$\Delta = \det B$$
$$\text{при } n = 1,\ \Delta_1 = b_{22}, \Delta_2 = -b_{21},$$
$$\text{при } n = 2,\ \Delta_1 = -b_{12}, \Delta_2 = b_{11},$$

Определитель матрицы имеет вид:

$$\Delta = 4i\mu^2\alpha^2[-(\alpha^2 - 0.5\varkappa_2^2)^2 + \alpha^2\sigma_1\sigma_2]$$

Таким образом получим следующие компоненты:

$$P(\alpha,z)=\frac{2i\mu\alpha^2[-(\alpha^2-0.5\varkappa_2^2)e^{\sigma_1 z}+\sigma_1\sigma_2 e^{\sigma_2 z}]}{\Delta}$$
$$R(\alpha,z)=\frac{2i\mu\alpha^2\sigma_1[-(\alpha^2-0.5\varkappa_2^2)e^{\sigma_1 z}+\alpha^2 e^{\sigma_2 z}]}{\Delta}$$
$$M(\alpha,z)=\frac{2\mu\sigma_2[-\alpha^2 e^{\sigma_1 z}+(\alpha^2-0.5\varkappa_2^2)e^{\sigma_2 z}]}{\Delta}$$
$$S(\alpha,z)=\frac{2\mu\alpha^2[-\sigma_1\sigma_2 e^{\sigma_1 z}+(\alpha^2-0.5\varkappa_2^2)e^{\sigma_2 z}]}{\Delta}$$

Аналогично для $\bar{X}_1$:

$$N(\alpha,z)=\frac{i}{\mu\alpha^2\sigma_2}e^{\sigma_2 z}$$

Выразим искомые перемещения $\bar{U}$ через заданную нагрузку $\bar{Q}$:

$$\begin{cases} U=-i\alpha_1(P_1P+P_2M)-i\alpha_2(\alpha_2Q_1-\alpha_1Q_2)N \\ V=-i\alpha_2(P_1P+P_2M)+i\alpha_1(\alpha_2Q_1-\alpha_1Q_2)N \\ W=P_1R+P_2S \end{cases}.$$

Или, группируя члены при Q_k в матричном виде:

$$\bar{U}(\alpha_1,\alpha_2)=K(\alpha_1,\alpha_2,z)\bar{Q}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$K=\begin{pmatrix} -i(\alpha_1^2M+\alpha_2^2N) & -i\alpha_1\alpha_2(M+N) & -i\alpha_1P \\ -i\alpha_1\alpha_2(M-N) & -i(\alpha_2^2M+\alpha_1^2N) & -i\alpha_2P \\ \alpha_1S & \alpha_2S & R \end{pmatrix}.$$

Применив обратное преобразование Фурье, получаем:

$$\bar{u}(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma_1\Gamma_2}K(\alpha_1,\alpha_2,z)Q(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1x+\alpha_2y)}d\alpha_1d\alpha_2$$

Применим полуаналитический метод в тех же условиях, что и метод конечных элементов, затем сопоставим результаты. В плоском случае вид матрицы K значительно упрощается:

$$K=\begin{pmatrix} -i\alpha^2M & -i\alpha P \\ \alpha S & R \end{pmatrix}.$$

Преобразование Фурье сосредоточенной нагрузки $Q(x)=(0,1)$. Параметры для расчетов:

μ	λ	ρ	f
22.6 ГПа	18 ГПа	2700 кг/м^3	200 кГц