

Projekt 2

Bilbane

Gruppe 10

Kursus 62146

En rapport af:

Catrine U. Frølund (s224870), Hjalmar Elmegaard (s224861),
Maks D. Bragt (s210979), Oliver D. Booth (s224850) og Rasmus T. Mortensen (s224863).

Underviser: Christian Lotz Felter
Afdeling: Institut for Ingeniørteknologi og -didaktik
Dato: January 22, 2023

Indholdsfortegnelse

1	Indledning (Fælles)	1
2	Eksperimentér (Oliver)	1
3	Opmåling af elastikker (Oliver)	2
4	Sammenligning af karakteristikker (Rasmus)	3
4.1	Enkeltløkke	3
4.2	Enkelt- og dobbeltløkke	4
4.3	Affyringsplatform	5
5	Arbejdssætningen (Catrine og Maks)	6
5.1	Dobbeltløkkens arbejde	6
5.2	Affyringsplatformens arbejde	7
5.3	Bilens fart	7
6	Det perfekte hop (Catrine, Maks og Hjalmar)	8
6.1	Beregning af hoppet	8
6.2	Fremstilling af hoppet	9
6.3	Sammenligning mellem teori og praksis	10
7	Diskussion (Fælles)	11
8	Konklusion (Fælles)	12
9	Kildeliste	12
10	Bilag	12

Navnet på hvert afsnit indeholder navnet på personen, som har været hovedansvarlig for teksten i det givne afsnit. Alle har dog deltaget i udarbejdelse af indholdet.

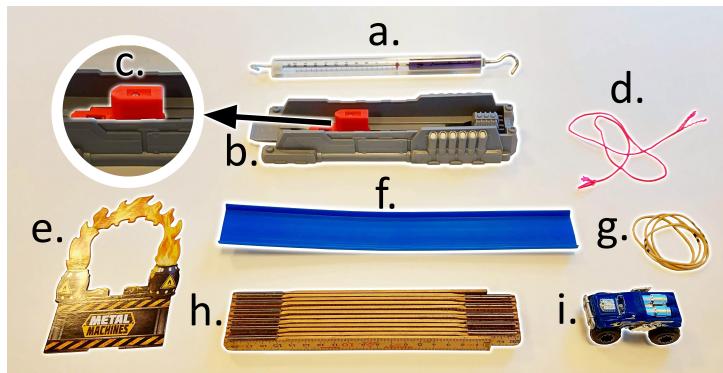
1 Indledning (Fælles)

Dette projekt handler om kræfternes arbejde i en bilbane med elastikker som kraftgenerator i affyringsplatformen og med et påmonteret hop. Elastikkernes kraft og fjederkonstant måles under forskellige forhold og databehandles vha. Excel ift. den overførte energi til modelbilen. På baggrund af beregninger af det skrå kast og databehandlingen, designes og 3D-printes en optimal hoprampe til bilbanen og der udføres målinger af hoplængden. De teoretiske beregninger, målinger og databehandling visualiseres, sammenlignes og diskuteres.

2 Eksperimentér (Oliver)

I [figur 1](#) ses en oversigt med alle de dele der bruges i projektets forsøgsopstillinger. I alt bruges følgende ting til projektet og eksperimenterne:

- a. Dynamometer
- b. Affyringsplatform
- c. Skubber/puffer
- d. Snor
- e. Dekorative flammer
- f. Bilbane
- g. Elastikker
- h. Tommestok
- i. Bil
- j. Rampe / 'hopholder' (illustreres i [figur 13](#))



Figur 1: Oversigt med alle projektets anvendte artikler.

Mange af tingene stammer fra et Zuru Metal Machines Road Rampage legetøjssæt; nemlig affyringsplatform, de dekorative flammer, bilbanen og bilen. Denne relativt simple samling af ting kan dog stadig foresage komplekse og indviklede spørgsmål, som behandles i denne rapport. I denne samling er der et par ting, som er især bemærkelsesværdige: dynamometeret, affyringsplatformen, elastikkerne og bilen.

Dynamometeret i dette projekt, er et tryk/træk dynamometer. Dette betyder at dynamometeret mäter den kraft som enden (ofte en krog af en art) belastes med. Dynamometeret består af en gennemsigtig cylinder, som indeholder en fjeder. Denne gennemsigtige cylinder er markeret med tal fra 0 til 20, som markerer det antal Newton der trykkes eller trækkes. I denne rapport bruger vi kun dynamometeret til måling af trækkræfter.

Affyringsplatformen er en del af det tidligere nævnte legetøjssæt. Denne platform har en rød skubber, der forbinder løst til bagenden af bilen. Denne er drevet af elastikker, som påsættes under affyringsplatformen. Når skubberen trækkes tilbage lagres der potentiel energi i elastikkerne, som så overføres til bilen når skubberen udløses. Når skubberen trækkes tilbage holdes den fast af én af to trekantede tænder på affyringsplatformen - samme princip som en skraldenøgle. I dette projekt måles der både på skubberens kraft med én og to elastikker.

Elastikkerne er det primære fokus i størstedelen af projektet, og kræver derfor en god del analyse. Elastikkerne i projektet opfører sig som fjedre, men er ikke idéelle. Ikke nok med at elastikkerne har en masse, så kan de også

deformere permanent. Da fjederskonstanten har følgende sammenhæng; $k = \frac{E \cdot A_0}{L_0}$, hvor den afhænger af materialets E-modul, tværsnitsarealet af fjederen og længden af fjederen, ved vi at deformationer vil lede til en ændring i fjederskonstanten. Deformationer leder til ændring i tværsnitsarealet og længden af fjederen, alt afhængig af materialets egenskaber. Alle disse ikke-idéelle faktorer skal der tages højde for, når analysen foretages.

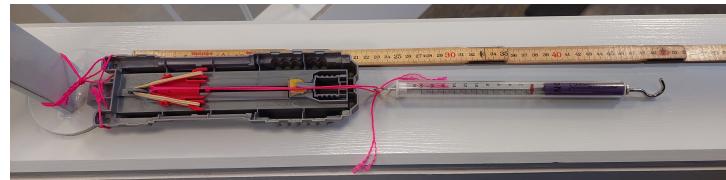
3 Opmåling af elastikker (Oliver)

I dette projekt er hensigten at måle fjederkarakteristikkerne for elastikker, da det tillader teoretiske beregninger på andre situationer, som elastikkerne udsættes for.

De fleste moderne elastikker er lavet af en blanding af naturlig gummi og syntetisk gummi [1], som begge er elastomerer. Elastomerer er selvfølgelig meget elastiske, men deformerer desværre også nemt [2]. I praksis betyder dette, at man ikke kan trække særligt meget i elastikkerne før de deformerer permanent. Dette har stor betydning for målingerne, da fjederkraften afhænger af forlængelsen af fjederen fra en ustrakt længde, som ændrer sig når elastikken deformeres. Det betyder at elastikkerne skal trækkes op til det maksimale træk de skal belastes med i forsøget, og så have nok tid til at deformere til den nye ustrakte længde. I forsøget trækkes alle elastikkerne op til 15 N. Gennem en indledende analyse blev det konkluderet at en ventetid på 10 sekunder var tilstrækkelig for både enkeltløkkede og dobbeltløkkede elastikker.



Figur 2: Billede af forsøgsopstilling 1.



Figur 3: Billede af forsøgsopstilling 2. Bemærk at affyringsplatformen er vendt på hovedet.

en tommestok, som bruges til at måle forlængelsen af elastikken, samtidigt med at kraften måles på dynamometeret. Før målingerne starter, måles den ustrakte og udeformerede længde af elastikken. Efter forsøget måles den nye ustrakte længde (som er resultat af deformationen), som så kan sammenlignes med den tidligere ustrakte længde (før deformationen). Denne værdi bruges ikke specifikt i opgaverne, men giver en god indikation om at elastikken ikke vender tilbage til sit udgangspunkt. Derfor bruges den samme elastik ikke til flere forsøg.

Under målingen var kraften på dynamometeret brugt som uafhængig variabel. Det betyder at elastikken blev strukket indtil en bestemt kraft kunne aflæses på dynamometeret, f.eks. 15 N, hvorefter forlængelsen af elastikken til den kraft blev noteret. Den største fordel ved denne metode ligger i hvor præcist man kan aflæse dynamometeret og tommestokken. Tommestokken har tydelig markering ved hver millimeter, hvor dynamometeret er markeret ved hver femtedel Newton; altså 0, 0.2, 0.4, osv. Da måleren i dynamometeret er en rød ellipsoide, kan det være svært at måle helt nøjagtigt, især når man samtidigt skal sørge for at forlængelsen forbliver konstant. Derfor er det nemmere for én person at sørge for at dynamometeret forbliver ved en konstant kraft, imens en anden person aflæser den tilsvarende forlængelse. At aflæse forlængelsen er også mere præcist, da man i virkeligheden kan se helt ned til en halv millimeters forskel i forlængelsen. En præcision som ikke er mulig ved aflæsning af

Til dette projekts formål, kan forsøgsopstillingerne i figur 2 og 3 arrangeres. Forsøgsopstilling 1, som ses på figur 2, er opstillingen til måling af enkeltløkkede og dobbeltløkkede elastikker. Her spændes en snor fast til en lodret pæl, hvorefter den ene ende af elastikken spændes fast til snoren. Den anden ende af snoren bliver spændt fast til krogen på dynamometeret. Snor, elastik og dynamometer er placeret langs

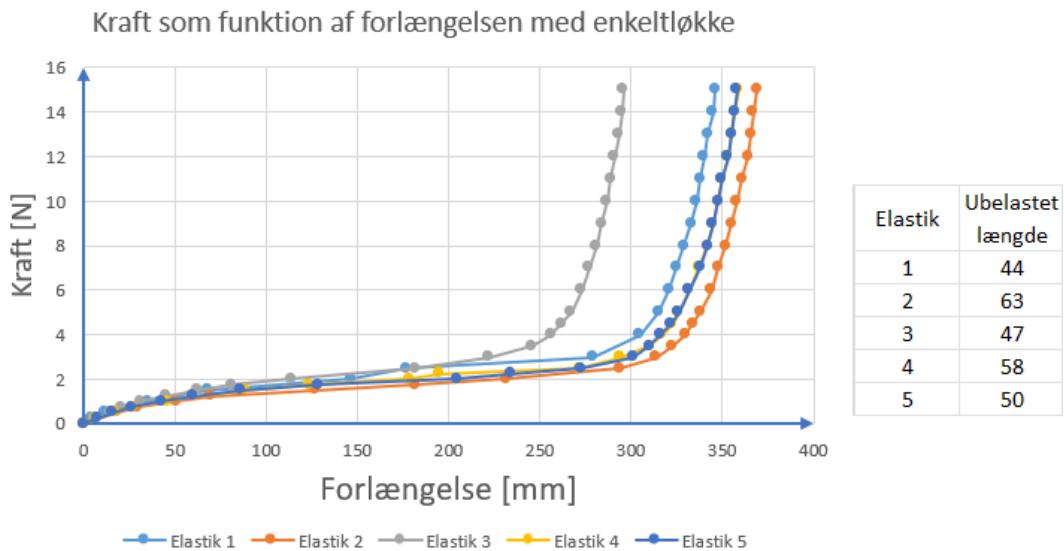
dynamometeret. Denne metode til aflæsning af værdier blev brugt til både forsøgsopstilling 1 og 2.

Forsøgsopstilling 2, som ses på [figur 3](#), er opstillingen til måling af elastikkerne i skubberen på affyringsplatformen. Bemærk at affyringsplatformen er vendt på hovedet, da det tillader at binde en snor gennem et hul i skubberen. Skubberens mekanisme kræver at man trækker elastikken/elastikkerne rundt om 2 kroge på skubberen og 1 krog på affyringsplatformens underside. Ligemeget om man bruger én eller flere elastikker, så er elastikken spændt når skubberen er i sin uspændte position. Dette betyder at flytningen af skubberen ikke svarer direkte til forlængelsen af skubberens elastikker, da de allerede er udstrakt til en ukendt forlængelse. I stedet kan skubberens forlængelse/vandring langs affyringsplatformen, som funktion af den tilførte kraft, bruges til at bestemme den energi som overføres til bilen.

Ovenstående metoder blev brugt til at lave 5 måleserier til enkeltløkkede og dobbeltløkkede elastikker og 3 måleserier til skubberen i opstilling 2. Disse blev indtastet i Excel, hvor der tilføjedes en søjle for forlængelse, som trækker elastikkens længde når den når 0 N - altså den ubelastede længde - fra længdeaflæsningerne. Derved fås kun elastikkens forlængelse, i stedet for en længde til det arbitraire punkt som tommestokken starter i.

4 Sammenligning af karakteristikker (Rasmus)

4.1 Enkeltløkke



Figur 4: Målt kraft ved forlængelse af 5 forskellige elastikker.

I [figur 4](#) ses kraftkurverne under forlængelse af fem forskellige elastikker som i [figur 2](#). Som det også ses i figurens tabel, havde alle fem elastikker forskellige ubelastede længder - dvs. hvor langt de kunne strækkes før de begyndte at trække imod. Disse ubelastede længder er målt fra et arbitraert punkt, som tommestokken kunne støtte imod, og de passer derfor kun til den måde disse fem enkeltløkkede elastikker var fastspændt på. Værdierne kan derfor ikke sammenlignes med dobbeltløkkken. Den forskellige elasticitet af de enkelte elastikker giver derfra en forskydning af kurvernes forløb. Jo strammere elastik, jo længere forskydning mod venstre - altså jo mindre forlængelse for hver tilsvarende kraftpåvirkning. Dette hænger også nogenlunde sammen med tabellen over ubelastede elastikker, hvor de mindste værdier betyder de strammeste elastikker. Denne tendens passer ikke fuldstændig, men den ubelastede længde var meget svær at få et præcist mål for, og den ubelastede længde for elastik 1 kunne derfor sagtens være en målefejl.

4.2 Enkelt- og dobbeltløkke

Målingerne i spørsgsmål 4.1 blev udført med elastikken monteret med enkeltløkke. Det er interessant at foretage tilsvarende målinger med dobbeltløkket elastik, da dette er meget tættere på den måde elastikken er monteret i affyrings-platformen. Derfor gentages samme procedure som beskrevet ovenfor - bare med begge ender af elastikken holdt i dynamometerets bøjle, og midten af elastikken fastholdt. Graferne for disse nye målinger med dobbeltløkke viste nogenlunde samme form som for enkeltløkke i figur 4 - dog med højere kraft og kortere forlængelse. Dette er også helt hvad der ville forventes, da der nu bliver strukket i 4 strenge samtidig, i stedet for kun 2.

I figur 5 ses en sammenligning af henholdsvis en typisk enkelt- og dobbeltløkket elastik. Her ses også tydeligt at den dobbeltløkkede elastik ikke har et nær så langt fladt stykke midt på kurven. Med en typisk elastik menes at der er udvalgt den elastik som ligger mest i midten af hver af de 5 måleserier. Der blev forsøgt at lave et gennemsnit af dem alle, men de så ud til at have så forskelligt et forløb midt på kurven at gennemsnittet var ubrugeligt.

Da dobbeltløkken som sagt betyder at der trækkes i dobbelt så mange strenge på én gang, burde dette i princippet kunne udlignes temmelig simpelt. De forskellige elastikstrenge er i princippet parallelforbundne fjedre, hvor fjederkonstanterne for hver fjeder i systemet kan lægges sammen:

$$F_{fjeder} = (k_1 + k_2) \cdot x \quad (1)$$

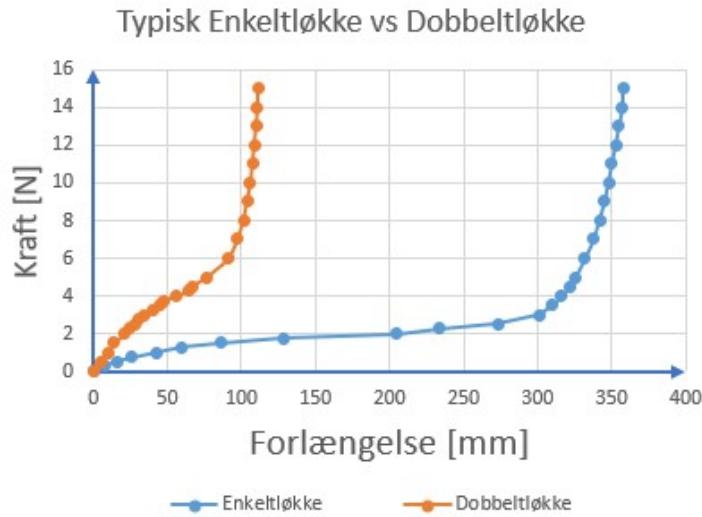
hvor k -værdierne er fjederkonstanterne og x er forlængelsen. I dette tilfælde er fjederkonstanterne i princippet ens, da det er flere strenge af samme elastik der bliver strukket. Derfor bliver k dobbelt så stor, når det er 4 strenge som når det er 2. Dermed vil kræfterne for de to målinger som ideelle fjedre være:

$$F_{dobbelt} = 2k \cdot x, \quad F_{enkelt} = k \cdot x$$

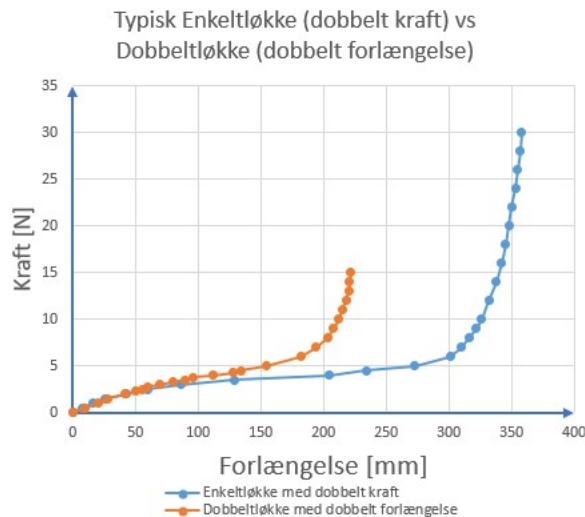
Udligningen skal ske både for x - og y -aksen. Derfor skal forlængelsen af den stivere dobbeltløkke fordobles, samt kraftmålingen for den slappere enkeltløkke fordobles. Da udtrykket for den ideelle fjeder (1) er lineært, burde de to kurver derefter ligge oven i hinanden.

I figur 6 ses et forsøg på at udligne forskellen på enkelt- og dobbeltløkke ved denne fordobling af henholdsvis kraft og forlængelse. Det ses tydeligt på figuren at det slet ikke lykkes, og at de to kurver stadig ligger langt fra hinanden. Forløbet er mere ens, men dobbeltløkkens kurve mangler at blive forlænget meget mere for at ligge oven i enkeltløkkens kurve.

Forklaringen i dette findes hovedsageligt i at elastikkerne opfører sig temmelig anderledes end ideelle fjedre. Der



Figur 5: Forlængelse af typisk elastik med enkelt- og dobbeltløkke

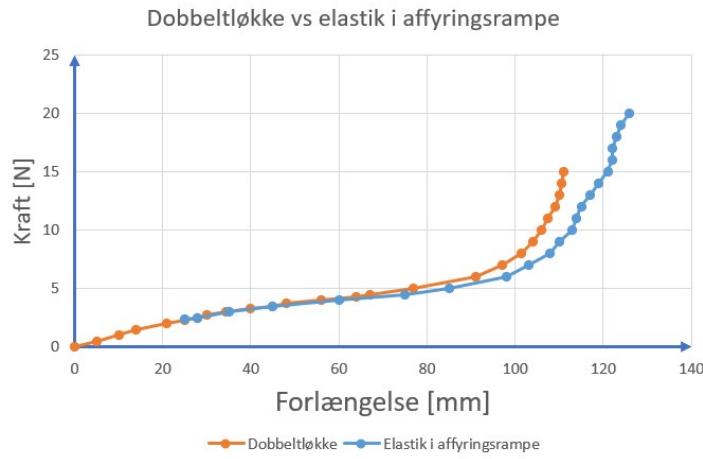


Figur 6: Forlængelsesforløb hvor enkeltløkkens kraft og dobbeltløkkens forlængelse er fordoblet.

Det ses tydeligt på figuren at det slet ikke lykkes, og at de to kurver stadig ligger langt fra hinanden.

foregår en form for strækhærdning i materialet, som giver en kurve som tydeligvis ikke er lineær, som grafen for den ideelle fjeder ville være. Der skal altså eksponentielt mere kraft til at forlænge elastikkerne, og denne strækhærdning ser ud til at have en forstærket effekt ved dobbeltløkke i forhold til enkelt.

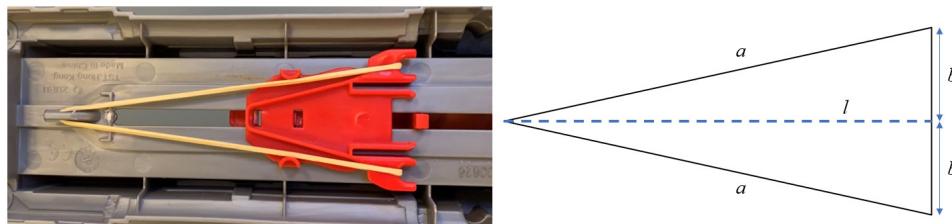
4.3 Affyringsplatform



Figur 7: Sammenligning af dobbeltløkke og affyringsplatformen

ved den forlængelse, som dens forspændte kraft svarer til på kurven for dobbeltløkkens. Helt konkret, som det ses i bilag 2), så er kurven for affyringsplatformens elastik forskudt 25 mm i positiv retning, da dens nulpunkt findes ved 2.4N, og er strakt 3 mm ved 2.5N. Tilsvarende 2.5N giver en 28 mm forlængelse på dobbeltløkkens, og startpunktet for affyringsplatformen bliver derfor 3 mm bagved dette - altså 25 mm.

Denne forspænding af elastikken i affyringsplatformen betyder i praksis at pufferen ikke begynder at bevæge sig så snart man trækker i den. Først når der trækkes med mere end de 2.4N, overstiger kraften forspændingen, og pufferen begynder at bevæge sig. Man kunne være fristet til at tro at dette ville føre til en større energiophobning i elastikken, og det er til dels rigtigt, da det kræver mere energi at forskyde pufferen. Dog friges denne ekstra energi ikke til bilen, da pufferen igen bliver bremset før den når ustrakt elastiklængde. Dertil kommer en vis mængde friktionsarbejde, især fordi pufferens træk sker fra et forskudt punkt i forhold til elastikkernes montering. Der vil derfor være et twist, som giver større normalkraft fra kontaktoverfladen på affyringsplatform, og dermed større friktion.



Figur 8: Affyringsplatform set nedefra, samt skitse af de to trekantede elastikkerne.

En anden effekt på elastikken monteret i affyringsplatformen er, at længdeforskydningen faktisk ikke er helt 1-til-1 med elastikkens faktiske forlængelse. Dette skyldes at elastikken monteres på to punkter, som er forskudt fra forskydningsretningen.

Vil man gerne kende den faktiske forlængelse af elastikken monteret i affyringsplatformen, kan der opstilles et udtryk for dette. Formen på den monterede elastik danner en trekant, hvis midterlinje danner pufferens forskyd-

ning - se [figur 8](#). Her er tværsiden mellem elastikkens to monteringspunkter 3 cm, og derfor bliver $b = 15$ mm. Derudover skal der tages højde for at trekanten fortsætter ud foran pufferens stopklods, og denne ekstra længde på 60 mm må derfor lægges oven i pufferens forskydning for at få l . Da forlængelseslinjen l opdeler elastikkens form i to retvinklede trekanter, kan sidelængden a udregnes med Pythagoras - altså $a = \sqrt{l^2 + b^2}$, hvor l vil være mellem 60 – 150 mm - altså endepunkterne for pufferens bevægelse. Med de nævnte værdier og ekstra længde fås følgende udtryk for elastikkens faktiske forlængelse a :

$$a = \sqrt{(60\text{ mm} + l_{\text{pufferforskydning}})^2 + (15\text{ mm})^2}$$

Dette er dog den totale længde af elastikken (per streng). Det er dens forlængelse fra ubelastet tilstand vi har brug for at kende, og denne kan derfor findes ved at trække den ustrakte længde fra. Den ustrakte længde kender vi til at være $a_{\text{ustrakt}} = 30$ mm fra dobbeltløkkemålingerne. Derfor:

$$a_{\text{faktisk forlængelse}} = a - a_{\text{ustrakt}} = \sqrt{(60\text{ mm} + l_{\text{pufferforskydning}})^2 + (15\text{ mm})^2} - 30\text{ mm} \quad (2)$$

Her får den korte tværgående side af trekanten en relativt lavere indvirkning, jo længere pufferen trækkes tilbage. Dette fører også til en lidt uintuitiv indvirkning på elastikkens faktiske forlængelse, som faktisk vokser langsommere end pufferens forskydning. Dette ses også i [figur 7](#), hvor pufferen skal forskydes mere end dobbeltløkkeelastikken for at opnå tilsvarende kraft. Her er det vigtigt at pointere at forlængelsen for "elastik i affyringsrammen" er målt ud fra pufferens forskydning, og ikke den nu kendte faktiske forlængelse af elastikken - deraf afvigelsen.

Det skal dog nævnes at vi fornemmede nogle mulige væsentlige fejlkilder ved denne del af målingerne. Forløbet på affyringsrampen var sværere at måle præcist, da den spændte snor mellem pufferen og dynamometeret (se [figur 3](#)) skabte stor friktion med affyringsplatformen, så forskydningsmålingen ikke udlignede sig fuldstændig spontant, men i stedet skete lidt i ryk. Derudover må vi nok indrømme at én dataserie for en enkelt elastik i affyringsplatformen ikke er tilstrækkeligt til at udelukke om der bare var tale om en meget løsere elastik i det tilfælde. Hvis der vælges måledata fra den slappeste af de fem dobbeltløkkeelastikker, så ligger kurverne næsten oven i hinanden - uden særlig afvigelse for forlængelse i affyringsplatformens elastik.

5 Arbejdssætningen (Catrine og Maks)

5.1 Dobbeltløkkens arbejde

Dobbeltløkkens arbejde kan beregnes med numerisk integration i Excel. Dette kan gøres ved at plotte de målte værdier og lave en trendlinje. Ligningen for trendlinjen kan nu bruges til at lave en serie beregnede værdier med ensartede intervaller på x-aksen. Her er det vigtigt at man indstiller antallet af betydende cifre for trendlinjens ligning. Fejlværdien ved et lavt antal betydende cifre er ikke så stor for simple regresioner, men bruger man polynomier med højere grad end 2 er det meget vigtigt. I denne måleserie har vi set afvigelser på 10 gange det forventede resultat. Dobbeltløkkens arbejde er lig arealet under grafen for trendlinjen. Da Excel ikke kan integrere findes arealet ved at gange hver x-værdi med afstanden til den forrige x-værdi og gange dette med gennemsnittet af de to x-værdiers tilhørende y-værdier. Arealet er summen af disse beregninger og bruges i stedet for egentlig integration. Beregningen af dobbeltløkkens arbejde ved en forlængelse på 100 mm giver en værdi på 0.345 J ([Figur 9](#)).

Bevægelse [mm]	Numerisk integration dobbeltløkke	
	Kraft [N]	Arbejde [Nm][J]
0	0,000	
5	0,476	0,0012
10	0,739	0,2350
15	6,318	0,2644
95	7,790	0,2997
100	10,200	0,3447

Figur 9: Numerisk integration

5.2 Affyringsplatformens arbejde

Platformens puffer trækkes af dobbeltløkkeelastikker, men i platformen er de forstrukket med cirka 27 mm. Arbejdet der udføres tilsvarer arealet under grafen for dobbeltløkkeelastikker, som det beskrives i afsnit 5.1. Dataområdet defineres til alle x-værdier fra 25 mm til 115 mm, der tilsvarer platformens bevægelsesområde. Beregningen viser at det udførte arbejde er 1.29 J ved anvendelse af 2 elastikker (Figur 10). I platformen ligger elastikken ikke parallel med pufferen, så der skal korrigeres med formlen (2) fra afsnit 4.3. Kræfterne der beregnes ligger tæt på de målte kræfter i den første halvdel af pufferens bevægelsesområde, men på de sidste centimeter får vi en fordobling af de beregnede kræfter. Den målte kraft er til sammenligning 0.88 J. Det hænger sammen med elastikkens karakteristika, hvor den får en meget høj fjederkonstant inden den når sin maksimale længde. Havde vi haft nyere elastikker i platformen ville den målte kraft være tættere på den beregnede.

Numerisk integration platform			
Puffer [mm]	Kraft		Arbejde
	Forlængels [mm]	Platform med 2 elastikker [N]	[Nm][J]
0	26,84658	2,630151	0,0000
5	31,70832	2,976102	0,0280
10	36,58911	3,342458	0,0660
15	41,48520	3,718815	0,1466
85	110,7738	14,59089	0,8728
90	115,7481	28,49806	1,2918

Figur 10: Platformens arbejde

5.3 Bilens fart

Bilens fart umiddelbart efter at den har forladt skubberen kan beregnes via arbejdssætningen

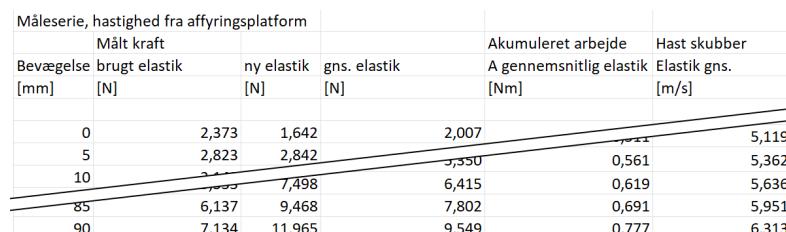
$$T_1 + \sum U = T_2 \iff \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + \sum U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \quad (3)$$

hvor T_1 er tilstand 1, $\sum U$ er summen af det påførte arbejdet og T_2 er tilstand 2. Både tilstand 1 og 2 indeholder kun kinetisk energi, da bilen kører vandret på affyringsplattformen. I vores tilfælde, hvor bilen holder stille i tilstand 1, er $T_1 = 0$ og det påførte arbejde er elastikkernes arbejde, da vi i disse beregninger ser vi bort fra friktion og vindmodstand. Isolerer vi da v_2 , og indsætter vi $\sum U = F \cdot s$, hvor F er elastikkernes kraft og s er længden af skubberens bevægelse, får vi et udtryk for denne:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot s}{m}} \quad (4)$$

Hvis bilen vejer $m_{bil} = 32\text{g}$ og man ser bort fra pufferens masse, er bilens fart når den forlader affyringsplattformen $v_{(2,bil)} = 8,98\text{m/s}$, hvis der bliver affyret med to elastikker i affyringsmodulet. Hvis man medtager pufferens masse på $m_{(puffer)} = 7\text{g}$ bliver farten $v_{(2,bil+skubber)} = 8,13\text{m/s}$ hvis der bliver brugt to elastikker.

Hastighederne er her estimeret ud fra det beregnede arbejde med formlen (4). Da beregningen for arbejde adskiller sig fra de målte data direkte på pufferen, beregnes der også en hastighed med numerisk integration for de målte værdier på pufferen. Her beregnes bilens hastighed til $6,31\text{m/s}$ (figur 11). Hastighedsforskellen ser ikke voldsom ud, men skal vi få samme hastighed i Excel kræver det 4 elastikker på pufferen.

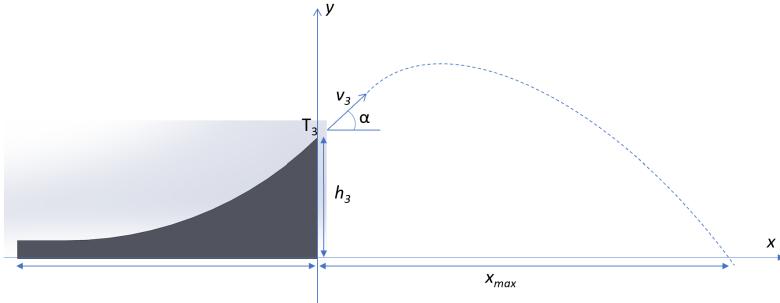


Figur 11: Bilens hastighed

6 Det perfekte hop (Catrine, Maks og Hjalmar)

6.1 Beregning af hoppet

Figur 12 beskriver tilstand 3 og kasteparablen, eller "hoppeparablen" om man vil, med variabler. v_3 er farten af bilen i udgangspunktet T_3 , α er udgangsvinklen, h er højden af rampen, og dermed højden for udgangspunktet og x_{max} er længden af hoppet. Hoppets længde afhænger af bilens fart i x-retning v_{3x} og tiden t ($x_{max} = x_3 + v_{3x}t$). Hvis vi isolerer for tiden og indsætter i stedvektorens y-koordinat, som når bilen rammer jorden skal være lig 0, får vi et udtryk for y som funktion af x :



Figur 12: Variabler brugt til beregning af hoplængden

$$y(x) = h_3 + v_3 \cdot \sin \alpha \cdot \left(\frac{x - x_0}{v_3 \cdot \cos \alpha} \right) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x - x_0}{v_3 \cdot \cos \alpha} \right)^2 = 0 \quad (5)$$

hvor g er tyngdeaccelerationen. Løser vi derefter ligningen, vælger den positive løsning og indsætter værdierne for α , g og h_3 samt sætter $x_0 = 0$ som i det viste koordinatsystem på figur 12, får vi et udtryk for hoplængden som funktion af bilens fart i udgangspunktet T_3 . For den lille rampe (beskrives i næste afsnit) er værdierne: $\alpha = 45^\circ$ og $h_3 = 100\text{mm}$, hvilket giver:

$$x_{max} = \frac{\left(v_3 + \sqrt{4 \cdot g \cdot h_3 + v_3^2} \right) \cdot v_3}{2 \cdot g} \approx \frac{\left(v_3 + \sqrt{3,94 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + v_3^2} \right) \cdot v_3}{19,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \quad (6)$$

For den store rampe (beskrives i næste afsnit) er værdierne $\alpha = 39^\circ$ og $h_3 = 330\text{mm}$, hvilket giver:

$$x_{max} = \frac{\left(\sin 39^\circ \cdot v_3 + \sqrt{(\sin 39^\circ)^2 \cdot v_3^2 + 2 \cdot g \cdot h_3} \right) \cdot v_3 \cdot \cos 39^\circ}{g} \approx \frac{\left(0,63 \cdot v_3 + \sqrt{(0,4 \cdot v_3^2 + 6,47 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2})} \cdot v_3 \cdot 0,78 \right)}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \quad (7)$$

Farten af bilen i udgangspunktet beregnes ved arbejdssætningen:

$$T_1 + \sum U = T_3 \iff E_{kin1} + E_{pot1} + \sum U = E_{kin3} + E_{pot3} \iff \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h_1 + \sum U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_3 + m \cdot g \cdot h_3 \quad (8)$$

I tilstand 1 er både den kinetiske og potentielle energi lig 0, da bilen holder stille i $h_1 = 0$, og ligningen for bilens fart i affyringspunktet T_3 (figur 12) er derfor:

$$v_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot (F \cdot s - m \cdot g \cdot h_3)}{m}} \quad (9)$$

Alle udregninger på baggrund af målte værdier af kræfterne i elastikkerne er beregnet i Excel (se bilag (2)). Vi finder at et gennemsnitshop på den lille rampe med to elastik burde være $x_{max} = 3,96\text{m}$ og med fire elastikker burde være $x_{max} = 8,03\text{m}$. For den store rampe er de beregnede hoplængder henholdsvis, for to elastikker $x_{max} = 3,70\text{m}$ og for fire elastikker $x_{max} = 7,69\text{m}$

6.2 Fremstilling af hoppet

I vores søgen efter at kunne konstruere den rampe der ville producere det længste hop, har vi regnet meget på optimering af rampens højde og udgangsvinkel ift. den kraft hvormed bilen bliver sendt afsted. Det længste hop beregnes ved

$$x_{max} = \frac{v_3^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} \quad (10)$$

Ud fra denne formel ses det at den optimale vinkel er 45° , idet x_{max} får den højeste værdi når $\sin 2\alpha = 1$, hvilket er tilfældet når $\alpha = 45^\circ$. Denne formel gælder dog kun når udgangspunktet og landingspunktet er på højde med hinanden, altså når $h_3 = 0$

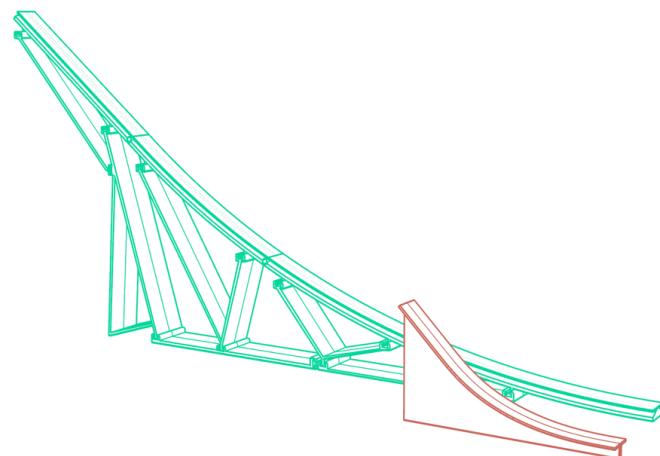
For at finde den værdi af α , der giver det længste hop når $h_3 > 0$, må man differentiere via partielt afledte og stationære punkter, og derefter indsætte det isolerede udtryk for svævetiden i stedvektorens y-koordinat med betingelsen at den er lig 0 ($y = h_3 + v_3 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0$). Man ender da med formlen: [3]

$$\sin^2 \alpha = \frac{v_3^2}{2(v_3^2 + g \cdot h_3)} \quad (11)$$

Dog afhænger v_3 i dette projekt, hvor bilen bliver sendt af pufferen og derefter er upåvirket af andet end tiltagende potentiel energi (da vi jo ser bort fra friktion og luftmodstand), af værdien for h_3 . Dvs. at vi, hver gang vi skruer på værdien for h_3 , også skruer på v_3 . v_3 er altså afhængig af h_3 . Derfor benyttede vi optimering i Excel og animation i GeoGebra til at finde de optimale værdier for alle parametre. (Se afsnit 6.3)

Sideløbende med alle disse beregninger og overvejelser, var designprocessen af hoprampen i gang. På baggrund af opgavens krav til rampen samt gruppens vision om et hop der kunne påmonteres de blå kørebaneskinner, så bilen ikke skulle køre direkte på printet, blev der skitseret et hop med en højde på $h_3 = 100\text{ mm}$ og en udgangsvinkel på $\alpha = 45^\circ$ samt et blødt slip. Det bløde slip var for at sikre bilen forlod rampen i en glat og flydende bevægelse. I Solidworks blev konstruktionen, set fra siden, optegnet, ekstruderet og til sidst blev der konstrueret koblinger så de blå skinner bare kunne skubbes på. Hele konstruktionen blev 3D-printet på højkant da det fjernede nødvendigheden for support. Efter printet blev rampen sat sammen med en kort blå skinne og det hele blev monteret på affyringsplatformen. Tolerancerne mellem rampen og de blå skinner var lidt optimistiske, men med lidt over talelse kunne det hele sættes sammen.

Da beregninger og design foregik sideløbende og da de lange udregninger i Excel blev lidt uoverskuelige, sneg der sig en regnfejl ind et sted, og vi troede i en periode at en højere rampe ville resultere i et længere hop. Det igangsatte en helt ny designproces. Det nye hop var 330 mm højt og havde en vinkel på 39° og skulle ifølge vores Excelberegninger give det længste hop efter de stillede parametre. I dette design ændrede vi konstruktionen lidt for at spare tid i printet. Det blev designet som gitterkonstruktion og blev printet i flere dele sideløbende, dog stadig med de samme principper ang. montage af de blå skinner. Efter printet var færdigt og samlet blev der fundet en fejl i Excel-udregningerne. Derfor var det nye og "forbedrede" hop ikke bedre hverken i teori eller praksis.



Figur 13: De to forskellige ramper

Figur 13 viser de to forskellige hop. Det røde hop (første design) er 100 mm højt, og det grønne (andet design)

330 mm højt. De to hop har forskellige vinkler og er to eksempler på forskellige løsninger på samme opgave. Begge hop bruger en blå skinne som bilen kan køre på, dog er konstruktionen meget anderledes. Det skyldtes til dels print tid og printerstørrelse. Begge hop fungere dog fint i praksis og opfylder kravene.

6.3 Sammenligning mellem teori og praksis

Til opmålinger af de faktiske hoplængder blev der lavet en opstilling bestående af bil, affyringsmodul og henholdsvis rampe 1 og 2 samt en to-meter lang tommestok til måling af hoplængden. Samtidigt filmede vi hopene med kamera (Figur 14), så vi ved hjælp af et computerprogram kunne analysere længde, hastighed og udgangsvinkel på hvert hop. Ved analyse af film kunne der ses et fald i hastighed på 3 procent ved en hoplængde på godt 3.5 m - det var kun ved de længste hop med flyvetid på over 0.5 s at luftmodstanden var målbar. Fra de kortere hop blev der beregnet gennemsnitlig hastighed langs x-aksen og derfra beregnet udgangsfart ved hjælp af udgangsvinkel. Den hurtigste udgangshastighed vi målte var $9.6 \frac{m}{s}$, hvor den teoretisk beregnede ved samme opstilling var $10.9 \frac{m}{s}$. Det omtalte hop havde en længde på 3.5 m, hvor den teoretiske hoplængde med den udgangshastighed burde være 8.0 m. Der var generelt størst afvigelse på selve hoplængden som det ses i analysen herunder.



Figur 14: Billede fra filmanalyse.

Figur 15 viser procentvis spredning fra gennemsnittet af de målte hoplængde-værdier for henholdsvis den lave og den høje rampe. Desværre fik vi ikke lavet målinger med den lave rampe med fire elastikker, så der er ingen data i den serie. Der er også kun én måling i serien "høj rampe, 2 elastikker", hvilket i praksis gør at vi ikke kan sige noget om afvigelser ift.

gennemsnittet på den måleserie. Som man ser er der en lille spredning på målingerne på hver rampe. I bilag (3) kan man se, at der er enkelte målinger der afviger med mere end 15%, men ellers er der ikke større procentvise afvigelser end 0-10 %. For den høje rampe er afvigelserne alle under 15%, med kun tre målinger med en afvigelse på mere end 10%.

Figur 16 viser den gennemsnitlige målte hoplængde samt den procentvise afvigelse i forhold til den beregnede hoplængde. Der er store afvigelser mellem de målte hoplængder og de beregnede (over 50 % for den lave rampe og over 70% for den høje rampe). I beregningerne af hoplængden har vi medtaget udgangshastigheden v_3 , højden af hoppet h_3 og udgangsvinklen α , hvor udgangshastigheden jo er afhængig af bilens hastigheden når

Afvigelser fra gennemsnitlig målt hoplængde

Rampelængde	Antal elastikker	< -25%	-25% - -10%	-10% - 0%	0%	0% - 10%	10% - 25%	> 25%
Lav	2	1		1		7		
	6		2	1		5		
Total		1	2	2	0	12	0	0

Rampelængde	Antal elastikker	< -25%	-25% - -10%	-10% - 0%	0%	0% - 10%	10% - 25%	> 25%
Høj	2				1			
	4			2		4		
	6		1	6		2	2	0
Total		0	1	8	1	6	2	0

Fejlsafskud = 2

Figur 15: Afvigelse fra gennemsnitlig målt hoplængde

Gennemsnitlig Hoplængde [m]			Beregnet hoplængde [m]			Afvigelse [m]		Afvigelse fra beregnet hoplængde [%]	
Antal elastikker	Lav rampe	Høj rampe	Antal elastikker	Lav rampe	Høj rampe	Lav rampe	Høj rampe	Lav rampe	Høj rampe
2	1,86	1,06	2	3,96	3,695	2,10	2,64	53%	71%
4	1,66	1,66	4	8,025	7,69 -	6,03 -	-	-	78%
6	3,21	2,89	6	12,089	11,671	8,88	8,78	73%	75%

Figur 16: Afvigelser mellem målt og beregnet hoplængde. Fra Excel-ark: Bilag (3)

den forlader pufferen (v_2). For at kunne optimere de forskellige parametre der bestemmer længden af hoppet, blev de indsat i et dynamisk excelark, hvor alle værdierne afhæng af hinanden. Det gjorde det nemt at optimere og udforske de forskellige teoretiske længder på hoppende alt efter hvilke parametre der blev ændret. Hvis de teoretiske parametre skal ændres for at beregninger mere ligner de faktiske målinger, vil det give bedst mening at ændre udgangshastigheden. Der er dog ikke meget viden der kan drages fra det, da afvigelsen mellem teori og praksis sker grundet alle de faktorer der ikke er medregnet i den teoretiske del. Det er blandt andet luftmodstand, rullemodstand, elastikens dæmpningsfaktor og intern friktion i affyringsmodulet, der alle påvirker hastigheden i praksis. Derfor er der afvigelser mellem teori og praksis. Det blev dog hurtigt observeret at udgangsvinkel ikke har den store betydning så længe den er omkring 45 grader. Det har dog en større betydning hvis udgangshastigheden var større, men med den lave fart der kunne opnås med elastikker var det begrænset hvor meget vinklen betød. Højden af hoppet betød igen først noget, hvis der var en større udgangshastighed, så under disse forhold var det optimalt med en lav rampe. Udgangshastigheden var den største faktor i forhold til længden af hoppet. Det var dog begrænset hvor meget den kunne påvirkes med de remedier der blev uddelt til opgaven. Derfor lå fokuset på de andre parametre. Hvis bilen virkelig skal flyve langt så skal udgangshastigheden være så høj som muligt, og efter denne udgangshastighed kan de andre parametre optimeres.

7 Diskussion (Fælles)

Da projektet startede, var de fleste i gruppen overbevist om, at den optimale vinkel til en given hophøjde (højden på rampen) var 45° . Da analysen på dette startede, var det tydeligt at der var mere til det, end man skulle tro. Resultatet af analysen, at den optimale vinkel afhænger af fart og højde, var overraskende, og viser hvorfor det er vigtigt at genoverveje tidlige overbevisninger.

Under analysen blev det også tydeligt, at højden på rampen faktisk først har en gavnlig indvirkning på hoplængden, altså at hoplængden bliver større, ved store størrelsesordnere. For den størrelsesorden der arbejdes med i projektet, en maksimal rampehøjde på 30-40 cm, betyder højere ramper en kortere hoplængde.

Ud over rampens højde, havde luftmodstand og friktion også en stor negativ indflydelse på hoplængden. Disse faktorer er svære at kvantificere, men er nødvendige, hvis man ønsker en model for den maksimale hoplængde. Problemet ligger i, at disse hæmmende kræfter afhænger af mange faktorer, som er svære at måle. Det ville være værd at kigge nærmere på disse faktorer, hvis det var kritisk at kende den nøjagtige hoplængde, men i praktisk ville det give mere mening at give et estimat for friktionen- og luftmodstandens negative påvirkning, som så kunne trækkes fra den maksimale hoplængde.

I projektet anvendte vi flere analysemetoder: symbolsk analyse vha. matematik og mekanik, numerisk analyse vha. Excel og eksperimentation og til sidst en visuel analyse i Geogebra. Ved at anvende alle disse analysemetoder, fik vi mange forskellige svar på de samme beregninger, som ledte til en udredning af fejl. Hvis man udelukkende havde analyseret i Excel, havde det været svært at spotte eventuelle fejl i formler, som påvirkede resultaterne. Det er derfor, at det er vigtigt at være kritisk over for resultater og analysemetoder, og derfor man altid skal sammenligne resultater med andre.

8 Konklusion (Fælles)

Projektet har omfattet stor analyse af både elastikkernes karakteristikker og indflydelsen af rampens karakteristikker på hoplængden af bilen. Begge analyser har involveret eksperimentelle forsøg, dataindsamling og databehandling. De analyserede elastikker er ikke perfekte fjedre, da de ikke strækkes lineært og deformeres permanent ved brug i affyringsmekanismen. Denne deformation leder til mindre lagret energi og kortere hoplængde, når anvendt. Ud over elastikkernes indflydelse på hoppet, er det også tydeligt at ydre faktorer som friktion og luftmodstand spiller en betydelig rolle i den maksimale hoplængde, da der er stor forskel mellem den teoretiske hoplængde og den faktiske hoplængde, hele 56%. Projektets analyse resulterede også i en formel for den optimale vinkel til en given højde på rampen, da vinklen på 45° kun gælder når højden på rampen er nul. Den optimale vinkel afhænger ikke bare af hoppets højde, men også den hastighed som bilen har når den forlader rampen.

Det er vigtigt at afgrænse projektets omfang til dét, der realistisk kan opnås i den givne tidsramme, samtidigt med at det ikke bliver for simpelt. Derfor tager rapportens model for det teoretiske hop kun højde for den energi bilen mister til potentiel energi på vej på af rampen. For en mere dybdegående model ville det være nødvendigt at inkludere beregninger på friktion og luftmodstand, men dette er nemmere sagt end gjort. Luftmodstabsberegninger havde taget en endnu større analyse, end der allerede er foretaget i projektet, og er derfor ikke inkluderet.

9 Kildeliste

- [1] Industrial Rubber Goods. Rubber bands. <http://www.industrialrubbergoods.com/rubber-bands.html>, Ukendt årstal. Tilgået: 2023-01-17.
- [2] William D. Callister David G. Rethwisch. *Callister's Materials Science and Engineering*. John Wiley Sons, Incorporated, 2020.
- [3] Ole Witt Hansen. The longest throw from a given height: Finding extremum using lagrange multipliers. http://olewitthansen.dk/Physics/The_longest_throw_from_a_given_height.pdf, 2008. Tilgået: 2023-01-17.

10 Bilag

1. Latex source code: Gruppe 10 - Latex.zip
2. Excel-ark: databehandling.xlsx
3. Excel-ark 2: Analyse0gTrackerData.xlsx
4. Geogebra visualisering: Gruppe 10 - Optimal vinkel.ggb
5. Video 1: HD_18.mp4
6. Video 1: HD_30.mp4