矩阵树定理（Matrix-tree Theorem）笔记

silverxz
有待破壳的程序蛋 | 消灭并接受昨天的自己

矩阵树定理是把图的生成树个数和矩阵行列式联系起来的一个定理。此处试图整理它的一种证明方式。

- 定义
- 几条引理
- 矩阵树定理

一. 定义

首先设我们讨论的无向图 $G=(V,E)$ 有 p 个顶点， q 条边。

然后我们把 G 的每条边任意指定一个方向，这样我们就可以定义 G 的关联矩阵（Incidence matrix） $M(G)$ ，它是一个 $p\times q$ 矩阵。

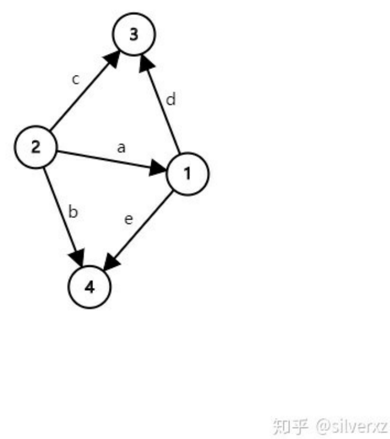
$$M_{ij}=\begin{cases}-1 & v_i\text{是}e_j\text{的起点}\\ 1 & v_i\text{是}e_j\text{的终点}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

然后定义 G 的拉普拉斯矩阵（Laplacian matrix） $L(G)$ ，它是一个 $p\times p$ 矩阵

$$L_{ij}=\begin{cases}-m_{ij} & i\neq j\text{, }v_i\text{和}v_j\text{之间有}m_{ij}\text{条边}\\ deg(v_i) & i=j\end{cases}$$

注意到 M 和 G 任意指定的方向相关，而 L 与之无关，不过这不影响我们接下来的证明。

举一个例子。



上图的关联矩阵 M 和拉普拉斯矩阵 L 分别是：

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1\\-1&-1&-1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1\end{bmatrix}\text{ , }L=\begin{bmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&2&0\\-1&-1&0&2\end{bmatrix}$$

容易发现 L 是对称的。实际上非主对角线上的元素也可以不是-1，因为图 G 允许重边存在。

二. 几条引理

> Lemma 1 $MM^T=L$ ，其中 M^T 表示 M 的转置

证明：很容易就可以从定义中得出。

$$(MM^T)_{ij}=\sum_{e_k\in E}M_{ik}M^T_{kj}=\sum_{e_k\in E}M_{ik}M_{jk}$$

然后分情况讨论。 $i\neq j$ 时，当且仅当存在一条边 $e_k\in E$ 把 v_i,v_j 连起来时， $M_{ik}M_{jk}=-1$ ，其余情况 $M_{ik}M_{jk}=0$ ，因此结果就是 v_i,v_j 之间的边数。

$i=j$ 时，当且仅当存在一条边 $e_k\in E$ 的一端是 v_i 时， $M_{ik}M_{jk}=1$ ，因此结果就是它的度。这就证明了引理1。

然后我们定义一些 M 的子矩阵，它们是证明的关键。

> Def 1 定义reduced incidence matrix（减关联矩阵？？我不会翻译啊） M_0 是去掉 M 最后一行得到的 $(p-1)\times q$ 矩阵。
> Def 2 在此基础上，定义一个 $(p-1)\times(p-1)$ 矩阵 $M_0[S]$ ，其中集合 $S=\{i_1,i_2,\dots,i_{p-1}\}\subseteq\{1,2,\dots,q\}$ 。它的意

> 思是，抽出矩阵 M_0 的第 $i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}$ 列，得到一个新的矩阵，称之为 $M_0[S]$

S 中的每个元素 i_k 都和一条边 e_k 对应，所以为了方便，以下不区分 S 和它所一一对应的边集。

然后我们证明引理2

> Lemma 2 令 S 是边集 E 的一个大小为 $p-1$ 的子集，若 $G'=(V,S)$ 不构成生成树，则 $\det M_0[S]=0$ ；若 G' 构成树，则 $\det M_0[S]=\pm 1$ 。其中 $\det$ 表示矩阵的行列式

若 G' 不构成生成树，则 G' 包含圈 C 。假设 C 是由 $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}$ 共 k 条边构成的圈，那么容易证明矩阵 $M_0[S]$ 中， $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 这 k 列线性相关（证明的过程有点类似于向量合成的感觉，就矩阵而言比较直观），故 $\det M_0[S]=0$

若 G' 构成生成树，则我们可以把 G' 中的点进行排序（实际是拓扑排序），排成 $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ 。其中 u_1 是任意的叶结点， u_2 是 G' 删除 u_1 后的任意的叶结点，……以此类推。排序不一定唯一，但是总是叶结点在前。叶结点总存在，所以排序总能进行。

然后我们把 $M_0[S]$ 的行重新排序，第一行对应 u_1 ，第二行对应 u_2 ……这样。之后我们对 $M_0[S]$ 的列重新排序。排序后， e_1 是唯一与 u_1 关联的边（因为它是叶结点），……， e_k 是删除 $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ 后唯一与 u_k 关联的边。边的另一端在矩阵中的编号总大于这个结点，因此我们发现， $M_0[S]$ 已经被变成了一个下三角矩阵（我说清楚了么……？）。主对角线元总是 ± 1 ，因此我们得到 $\det M_0[S]=\pm 1$ 。这个引理也就证明完了。

至此，我们已经几乎做完了所有准备工作。不过还要提到一条线性代数的定理。

> Binet-Cauchy Theorem 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵， $B=(b_{ij})$ 是一个 $n\times m$ 矩阵。则有 L $\det(AB)=\sum_S(\det A[S])(\det B[S])$ ，其中 S 大小为 m ，且是 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的子集。 $A[S]$ 的记号和上面的类似，是取 A 中，与 S 中元素对应的 m 列得到的 $m\times m$ 新矩阵； $B[S]$ 则改为取行，也得到了一个 $m\times m$ 新矩阵。

它是 $\det(AB)=\det A\times\det B$ （其中 A,B 是同阶方阵）的扩展形式，此处不证明（因为我的线性代数实在是太差了）

三. 矩阵树定理

现在我们完成最后的部分。

> Matrix-tree Theorem 设图 $G=(V,E)$ ，拉普拉斯矩阵 L 。则 G 的生成树的个数等于 $\det L_0$ ，其中 L_0 是去掉 L 第 i 列第 i 行得到的子矩阵（ i 任意）。

不妨设去掉最后一行最后一列。

与引理1类似，我们很容易可以得到 $L_0=M_0M_0^T$ ，这样，由Binet-Cauchy Theorem可以得到：

$$\begin{aligned}\det L_0 &= \sum_S(\det M_0[S])(\det M_0^T[S])\\ &= \sum_S(\det M_0[S])^2\end{aligned}$$

而引理2告诉我们，在 S 构成生成树时， $\det M_0[S]=\pm 1$ ；否则等于0。因此 $\det L_0$ 就等于生成树的个数，证明完毕。

四. ?

没想到吧，还有。

> Thm 有p个顶点的完全图 K_p ，生成树的个数为 p^{p-2} 个

这个可以用矩阵树定理证明，读者自证不难（逃

不过还有一种很有意思的办法：用Prüfer编码证明。证明过程清晰且简单。

五. 最后

之所以学了矩阵树定理，是因为假期看图论的MOOC，姜守旭老师说“课后自己了解”。结果就了解出来这些（吐血）。实际上矩阵树定理还有其他的证明方式（比如不借助 M 的），还适用于有向图，还有其他的扩展（比如可以和特征值关联起来）。但是我线代实在太差，搞不了那么多，就先写到这。

上面的证明过程来自于Richard P. Stanley的 topics in algebraic combinatorics 的Chapter9，里面有更多的内容，能看英文的可以去看看！

编辑于 2021-02-27 21:37

矩阵 图论 高等代数

推荐阅读

线性代数笔记-（12）图和网络

图（graph）是由结点（nodes）和边（edges）组成。为了描述上面的那副图，我们构造一个 关联矩阵（incidence matrix） \operatorname{A} nodes\ \ \ 1\ \ \ \ \ \ \ 2\ \ \ \ \ \ \ \ 3\ \ \ ...

前方一片天　发表于慢慢爱上数...

离散数学笔记（9.4）图的矩阵表示

湫沨　发表于离散数学学...

图与矩阵

前面我们了解了4种基本的向量空间，看到过许多矩阵，知道了怎么求他们的各个向量空间，基，计算他们的维度等等。 但是，这些矩阵都是虚构出来的，并不是真实的数据来源。其实，线性代数的用...

托比欧

【图论】Laplacian矩阵基础知识

这篇笔记讨论无权重无向图的Laplacian矩阵，是图论的一个小知识点。图论是非常有意思的数学分支。在控制领域，尤其是分布式控制，里面涉及了大量图论知识，学好这一部分是十分必要的。Defin...

凸优化不秃头

9 条评论　切换为时间排序

写下你的评论...

chenxia25　2021-06-27

感谢。

赞

大师姐　2021-05-26

感谢分享，尤其是最后的参考文献，谢谢

赞

Gauss　2021-02-27

纠正个小错误，dif2那里应该是抽出M0的p-1列

赞

silverxz (作者) 回复 Gauss　2021-02-27

谢谢。

赞

王某某　2020-07-31

请问一下m矩阵去掉最后一行是什么思路?

赞

silverxz (作者) 回复 王某某　2020-07-31

如果要问是如何想到的，我恐怕不知道......但是从这个证明回推，去掉一行起到的关键作用是：使得M0[S]当S是生成树的边集时，可以通过行交换和列交换构成下三角矩阵。

如果我们不去掉一行，由于S的基数是p-1，M[S]就是px(p-1)的矩阵，不是方阵，不好用下三角求行列式。而去掉一行之后，矩阵变成方阵，还可以变成下三角的，那行列式就很好求了。

1

王某某 回复 silverxz (作者)　2020-08-01

嗯，谢谢，你的证明非常棒！

赞

展开其他 2 条回复

赞同 77　9 条评论　分享　喜欢　收藏　申请转载　···