SPEIT-SJTU
année 2018-2019 – semestre 1
Fondements de l'électromagnétisme (PH371)
TD4 – induction

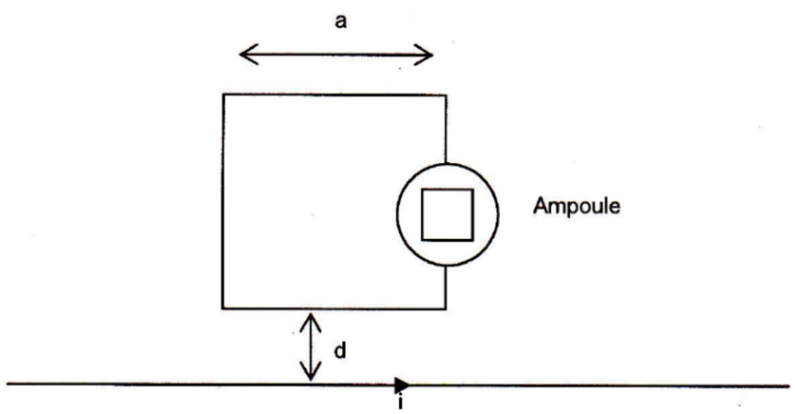
Exercice 1: Enroulement dans un champ magnétique variable

Un enroulement est un circuit filiforme constitué de N spires circulaires.
Soit un enroulement fixe dans le référentiel d'étude. Les spires sont de rayon R, de centre O, d'axe Oz. Il existe dans l'espace un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ variable d'expression, en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{B} = B_0 \cos\left(\frac{\pi r}{2R}\right) \cos(\omega t)\, \overrightarrow{e}_z$.

Exprimer la f.é.m. induite e aux bornes de l'enroulement. Application numérique avec $B_0 = 100$ mT ; $N = 50$; $R = 10$ cm ; $f = \frac{\omega}{2\pi} = 50$ Hz.
Exercice 1: SOLUTION
Après une intégration par parties, on obtient : $e = 4\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) N B_0 \omega R^2 \sin(\omega t)$.
Numériquement : $e = 22,85 \sin(100\pi t)$.

Exercice 2: Ligne à haute tension

Une ligne à haute tension assimilée à un fil droit infini transporte un courant sinusoïdal i de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $Ie = 1$ kA. Soit une bobine plate d'épaisseur négligeable, constituée de N spires carrées de côté $a = 30$ cm, dont la résistance et l'inductance propre sont négligeables. Cette bobine est mise en série avec une ampoule qui s'allume si la tension à ses bornes est supérieure à $1,5$ V. Le circuit ainsi réalisé, est approché de la ligne à haute tension à une distance $d = 2$ cm. On rappelle la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1}.



1. Déterminer l'inductance mutuelle du fil et du cadre.

2. Déterminer le nombre minimal de spires de la bobine, pour que l'ampoule s'allume. Application numérique.

Exercice 2: SOLUTION

1. Orientons le circuit par le vecteur unitaire normal au plan de la figure et allant vers l'observateur, noté u_θ. Écrivons le champ magnétique créé par la ligne haute tension : $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{u}_\theta$. Le flux du champ magnétique créé par le fil à travers les N spires est $\frac{N\mu_0 ia}{2\pi} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)$, d'où la valeur de la mutuelle inductance :

$$M = \frac{N\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right).$$

2. Le flux magnétique donne aussi la f.é.m. induite : $e = -\frac{N\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\frac{dI}{dt}$. Cette f.é.m. dépasse, en valeur absolue, la valeur $U_{lim} = 1,5$ V pour $N \geq \frac{U_{lim}}{\sqrt{2}\mu_0 I_e f a \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)}$. Numériquement on trouve $N = 20,3$, c'est-à-dire qu'il faut avoir au moins 21 spires.

Exercice 3: Flux du champ créé par un dipôle à travers un solénoïde

Soit un dipôle magnétique de moment dipolaire $\vec{M}$. Soit un solénoïde rectiligne infini, ayant n spires par mètres dans la direction de son axe Oz. Le dipôle est placé sur l'axe Oz du solénoïde. Le moment magnétique fait avec l'axe Oz l'angle $\alpha = (\vec{e_z}, \vec{M})$.

1. Exprimer le flux du champ magnétique $\vec{B}$ créé par le dipôle à travers une spire du solénoïde. Idée : On pourra considérer le potentiel vecteur $\vec{A}$ associé au dipôle, et calculer la circulation de $\vec{A}$ le long de la spire.

2. Exprimer le flux du champ magnétique $\vec{B}$ créé par le dipôle à travers le solénoïde.

3. En déduire l'inductance mutuelle d'une spire de courant et d'un solénoïde.

Exercice 3: SOLUTION

1. Soit une spire (C) du solénoïde, et (S) le disque dont la frontière est (C). (C) et (S) sont orientés par le vecteur $\vec{e_z}$. D'après la formule de Stokes, le flux de $\vec{B}$ à travers (S) est égal à la circulation de $\vec{A}$ le long de (C), soit $\int_{M\in(C)} \vec{A}(M).\vec{dl}(M)$. Or le potentiel vecteur créé par le dipôle est de la forme $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M}\wedge\vec{OM}}{OM^3}$. On suppose que le point O est choisi à l'endroit où se trouve le dipôle. Prenons le système des coordonnées cylindriques d'origine O et d'axe principal Oz. Alors $\vec{OM} = R\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ et $\vec{dl} = dl\vec{e_\theta}$. On considère que le moment dipolaire $\vec{M}$ est dans le plan Oxz. On a alors, par définition de α : $\vec{M} = Msin\alpha\vec{e_x} + Mcos\alpha\vec{e_z}$. Calculons alors :

$$\vec{M}\wedge\vec{OM}.\vec{dl} = Mdl[(sin\alpha\vec{e_x})\wedge(R\vec{e_r} + z\vec{e_z})]\vec{e_\theta} = MdlRcos\alpha - Mdlzsin\alpha cos\theta$$

. Intégrons cette quantité sur le pourtour du cercle (C). On trouve : $2\pi R^2 Mcos\alpha$. D'où la valeur de la circulation du potentiel vecteur le long de (C) : $\int_{M\in(C)} \vec{A}(M).\vec{dl}(M) = \frac{\mu_0 Mcos\alpha}{2}\frac{R^2}{OM^3}$. Or $OM = (R^2+z^2)^{1/2}$, et donc $\int_{M\in(C)} \vec{A}(M).\vec{dl}(M) = \frac{\mu_0 Mcos\alpha}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$.

2. Une longueur dz le long de l'axe du solénoïde porte ndz spires. Le flux de $\vec{B}$ à travers les spires de cette portion dz est donc $\frac{\mu_0 Mcos\alpha}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$. Pour avoir le flux Φ de $\vec{B}$ à travers

tout le solénoïde, il suffit d'intégrer cette quantité pour z allant de $-\infty$ à $+\infty$. On obtient : $\Phi = \frac{\mu_0 M cos\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R^2 dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$ soit, après calcul :

$$\Phi = \mu_0 M n cos\alpha$$

.

3. On considère que la boucle de courant est équivalente à un dipôle de moment M. On appelle S l'aire de la surface associée à la boucle, et I l'intensité du courant qui la parcourt. On a alors $M = IS$, et donc $\Phi = DI$ avec $D = \mu_0 S n cos\alpha$. D représente l'inductance mutuelle de la spire de courant et du solénoïde.

Exercice 4: Induction créée par un moment magnétique

Une aiguille aimantée de moment magnétique $\vec{M}$ placée en O peut tourner dans le plan xOy (contenant $\vec{M}$). Sa vitesse angulaire est ω et on appelle θ l'angle entre $\vec{M}$ et Ox. Une spire circulaire de rayon a et d'axe Ox est placée à une distance r de l'aiguille sur l'axe Ox ($r \gg a$). On note R la résistance totale de la spire.

1. Calculer le flux du champ créé par l'aiguille à travers la spire.

2. En déduire le courant parcourant la spire. Déterminer le couple subi par la spire.

3. Déterminer le champ créé par la spire en O et en déduire le couple subi par l'aiguille. Commenter.

Exercice 4: SOLUTION

1. La spire est petite par rapport à la distance au dipôle magnétique, donc on peut considérer que le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le dipôle, est uniforme sur sa surface. Le calcul du flux de $\vec{B}_1$ à travers la spire est donc simple : $\Phi = \pi a^2 \vec{e}_x \cdot \vec{B}_1$ avec

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \left(2\cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_y\right).$$

Le signe $-$ devant $\sin\theta$ est dû au fait que le moment dipolaire est incliné de θ par rapport à $\vec{e}_x$, tandis que la spire est fixe sur l'axe Ox. On trouve donc après calcul :

$$\Phi = \frac{\mu_0 M a^2 \cos\theta}{2r^3}.$$

2. La f.é.m. e induite le long de la spire est $e = -\frac{d\Phi}{dt}$. Le calcul conduit à :

$$e = \frac{\mu_0 M a^2 \omega \sin\theta}{2r^3}.$$

On néglige les effets d'auto-induction dans la spire : elle est supposée purement résistive. Par suite, $e = Ri$ et on trouve l'intensité dans la spire :

$$i = \frac{\mu_0 M a^2 \omega \sin\theta}{2Rr^3}.$$

La spire subit des forces de Laplace. L'action résultante de ces forces est un couple $\vec{\Gamma}_1 = \vec{m} \wedge \vec{B}_1$ avec $\vec{m}$ le moment magnétique de la spire, soit $\vec{m} = m\vec{e}_x$ avec $m = \pi a^2 i$. On trouve finalement

$$\vec{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \Gamma_1 = -\frac{\mu_0 M a^2 i \sin\theta}{4r^3} = -\frac{\mu_0^2 M^2 a^4 \omega \sin^2\theta}{8Rr^6}.$$

3. La spire crée en O le champ $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{2a}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \vec{e}_x$. L'aiguille subit le couple de Laplace :

$$\vec{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \Gamma_2 = \left(\vec{M} \wedge \vec{B}_2\right) \cdot \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 M a^2 i \sin\theta}{4r^3}.$$

On observe que $\vec{\Gamma}_1 = \vec{\Gamma}_2$: le principe de l'action et de la réaction est vérifié.

Exercice 5: Bobine équivalente à deux bobines en série

Deux bobines identiques de résistance r et d'inductance propre L sont placées l'une à côté de l'autre (voir figure 1). Lorsqu'on relie B_1 et A_2, l'ensemble est équivalent entre A_1 et B_2 à une bobine de résistance 10 Ω et d'inductance $L' = 90$ mH. Lorsque, *sans déplacer les bobines*, on relie B_1 et B_2, l'ensemble est équivalent entre A_1 et A_2 à une bobine de résistance 10 Ω et d'inductance $L'' = 70$ mH.

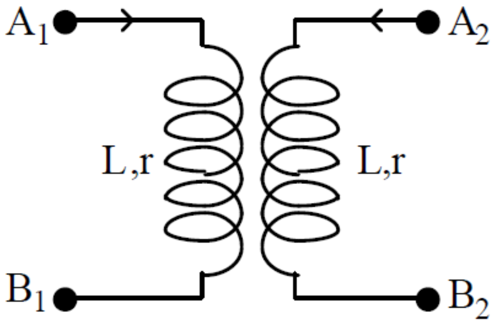


Figure 1: Deux bobines identiques en influence magnétique.

1. Interpréter les observations et en déduire les valeurs de r et L; que peut-on ainsi mesurer?
2. Proposer une méthode simple de mesure de l'inductance et de la résistance équivalente aux deux bobines en série.

Exercice 5: SOLUTION

Définissons les tensions $u_1 = V(A_1) - V(B_1)$ et $u_2 = V(A_2) - V(B_2)$.
Le cas a est celui où on relie B_1 et A_2. Le cas b est celui où on relie A_1 et A_2.

1. On a dans les deux cas :

$$u_1 = ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = ri_2 + L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}.$$

On distingue ensuite les deux cas étudiés :

cas a	cas b
$i_1 = i_2 = i$	$i_1 = -i_2 = i$
$V(A_1) - V(B_2) = u_1 + u_2$ $= 2ri + 2(L+M)\frac{di}{dt}$	$V(A_1) - V(A_2) = u_1 - u_2$ $= 2ri + 2(L-M)\frac{di}{dt}$
$L_a = 2(L+M)$	$L_b = 2(L-M)$

Dans les deux cas on mesure la même résistance totale : $r_a = r_b = 2r$.
A partir des expressions de L_a et L_b on obtient L et M :

$$L = \frac{L_a + L_b}{4} \quad \text{et} \quad M = \frac{L_a - L_b}{4}.$$

En particulier, on peut mesurer la mutuelle inductance M entre les deux circuits.
A.N. : $r = 5\ \Omega$; $L = 40$ mH ; $M = 5$ mH.

Remarque : L'orientation des courants et des tensions dans les deux bobines sont les mêmes dans les deux cas a et b. De plus, la disposition des deux bobines l'une par rapport à l'autre est la même. Par suite, la valeur de l'inductance mutuelle M (en particulier son signe) est la même dans les deux cas a et b.

2. Plaçons en série les 4 dipôles suivants : les deux bobines, un condensateur de capacité C, et une résistance R. On crée ainsi un circuit RLC série. Alimentons cet ensemble par un GBF qui fournit une tension sinusoïdale de pulsation ω. Observons la tension u aux bornes de la résistance R. Faisons varier la pulsation ω. On observe qu'il y a une résonance en intensité, pour une certaine valeur ω_0 de la pulsation.
   On a montré en cours (deuxième année) que cette pulsation est la pulsation propre du circuit RLC série. Or cette pulsation est de la forme :

   $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

   avec L l'auto-inductance équivalente de l'ensemble des deux bobines. Si on place les deux bobines comme dans le cas a, alors L est L_a. Si comme dans le cas b, alors L est L_b. La valeur de C est supposée connue, donc la mesure de ω_0 permet de déterminer L.
   La bande passante à -3 dB a pour largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$. La mesure de cette largeur conduit à la valeur du facteur de qualité Q. Or on sait que ce facteur a pour expression

   $$Q = \frac{1}{R+2r}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

   L et C sont connus, donc la valeur de Q conduit à celle de $R + 2r$, donc (puisque R est connue) à la valeur de r.