Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer, T. Tahani, F. Sarkis
Corrections : F. Sarkis

Sous-variétés

Exercice 1

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $S_\lambda = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda\}$.

1. Déterminez les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels S_λ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Dessiner S_λ en fonction de λ.
2. Pour $x,y \in \mathbb{R}^3$, soit $B(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$. Soit $x \in S_\lambda$, exprimer T_xS_λ à l'aide de B.

Correction ▼ [002547]

Exercice 2

On muni $\mathbb{R}^n$ de la norme $||x|| =< x,x >= \sum_{i=1}^n x_i^2$ où $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $< x,y >= \sum_{i=1}^n x_iy_i$. Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire telle que $< u(x),y >=< x,u(y) >$ et soit $Q = \{x \in \mathbb{R}^n; < u(x),x >= 1\}$ Montrez que Q est une sous-variété et déterminez le plan tangent.

Correction ▼ [002548]

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(\theta,\varphi) = (\cos\theta(1+1/2\cos\varphi), \sin\theta(1+1/2\cos\varphi), 1/2\sin\varphi)$ et soit $T = f(\mathbb{R}^2)$.

1. Soit R_θ la rotation d'angle θ autour de $(0z)$, et soit $C = \{(1+1/2\cos\varphi, 0, 1/2\sin\varphi); \varphi \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{U}_{\theta\in\mathbb{R}} R_\theta(C)$. Dessiner T.
2. Montrer que $f(\theta,\varphi) = f(\theta_0,\varphi_0)$ si et seulement si il existe $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ et $\varphi = \varphi_0 + 2l\pi$.
3. Montrer que pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, $f(U)$ est un ouvert de T.
4. Montrer que T est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

[002549]

Exercice 4

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ définie par $f(A) = det(A)$.

1. Montrer que $\lim_{\lambda\to 0} \frac{det(I+\lambda X)-1}{\lambda} = tr(X)$ (penser au polynôme caractéristique). En déduire $D_{Id_n}f(X)$.
2. En remarquant que $\frac{det(A+\lambda X)-det(A)}{\lambda}$ est égal à $det(A)\frac{det(I+\lambda A^{-1}X)-1}{\lambda}$, pour A inversible, calculer $D_Af(X)$ lorsque A est inversible.
3. Montrer que $Sl_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension n^2-1, dont l'espace tangent en Id est $\{X \in M_n(\mathbb{R}); tr(X) = 0\}$.

[002550]

Exercice 5

Soit E l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n. Soit $f : \mathscr{M}(\mathbb{R}) \to E$ définie par $f(A) = {}^tAA$.

1. Montrer que $D_Af(X) = {}^tAX + {}^tXA$.
2. Soit $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $S \in E$ et $X = 1/2AS$. Montrer que $D_Af(X) = S$. En déduire que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n-1)/2$, dont l'espace tangent en Id est $\{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}); {}^tX = -X\}$.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \to E$ un difféomorphisme de classe C^1. On suppose que $f^n = Id$ et $f(a) = a$. On pose $A = D_a f$ et $u(x) = \sum_{p=1}^{n} A^{-p} f^p(x)$ pour $x \in E$.

1. Montrer que u est un difféomorphisme local en a tel que $u \circ f = A \circ u$.
2. Soit F l'ensemble des points fixes de f. Montrer que F est une sous-variété de E.
3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x, y + y^3 - x^2)$. Montrer que g est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. En déduire que 2/ n'est plus nécessairement vrai si on supprime l'hypothèse $f^n = Id$.

[002552]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Considérons $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par $F(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2-\lambda$. Alors F est de classe C^1, $JacF(x_1,x_2,x_3)=(2x_1,2x_2,-2x_3)$ et $S_\lambda=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;F(x_1,x_2,x_3)=0\}$. Si $\lambda\neq 0$, rang$(JacF(x_1,x_2,x_3))=1$ (le maximum possible) car sinon x_1,x_2,x_3 seraient tous nuls : impossible car $x_1^2+x_2^2-x_3^2=\lambda\neq 0$. Comme $(0,0,0)\notin S_\lambda,\forall a\in S_\lambda$, rang$JacF(a)=1$ et donc S_λ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.
   Si $\lambda=0$ $T_0(S_\lambda)=\{$vecteurs tangents à S_n en $0\}$. Alors T_0S_0 est un cône et donc S_0 n'est pas une sous-variété.
2. Soientt $x,y\in\mathbb{R}^3$, $B(x,y)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$ et $x\in S_\lambda$. Si $\lambda\neq 0$, $JacF(x)=(2x_1,2x_2,-2x3)$ et donc
$$T_xS_\lambda=\{u\in\mathbb{R}^3;DF(x).u=0\}=\{u=(u_1,u_2,u_3);(2x_1,2x_2,-2x_3).\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=0\}=$$
$$\{(u_1,u_2,u_3);2x_1u_1+2x_2u_2-2x_3u_3=0\}=\{(u_1,u_2,u_3);2B(x,u)=0\}$$
   d'où
$$T_xS_\lambda=\{u\in\mathbb{R}^3;B(x,u)=0\}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Cas de $\mathbb{R}^2$.
$$u=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}\\u_{21}&u_{22}\end{pmatrix}.$$
L'hypothèse sur u implique que $u_{12}=u21$. Si $x=(x_1,x_2)$, on a
$$u(x)=\begin{pmatrix}u_{11}x_1+u_{12}x_2\\u_{21}x_1+u_{22}x_2\end{pmatrix}$$
et
$$<u(x),x>=\sum_{i=1}^{2}u_i(x)x_i=(u_{11}x_1+u_{12}x_2)x_1+(u_{21}x_1+u_{22}x_2)x_2=u_{11}x_1^2+u_{12}x_1x_2+u_{21}x_1x_2+u_{22}x_2^2.$$
Posons $f(x)=<u(x),x>-1$ alors
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2u_{11}x_1+u_{12}x_2+u_{21}x_2=2u_{11}x_1+2u_{12}x_2$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=2u_{22}x_2+u_{12}x_1+u_{21}x_1=2u_{21}x_1+2u_{22}x_2.$$
Calculons
$$Df(x).x=x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}=2(u_{11}x_1^2+u_{12}x_2x_1+u_{21}x_1x_2+u_{22}x_2^2)=2<u(x),x>.$$
Si $x=(x_1,x_2)\in Q$ alors $<u(x),x>=1\neq 0$ et donc $Df(x)$ étant non nul, il est de rang au moins 1 et donc de rang maximal. Q est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.
Déterminons le plan tangent de Q.
$$T_xQ=\{y\in\mathbb{R}^2;Df(x)(y)=0\}=\{y\in\mathbb{R}^n;\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)y_i=0\}=$$
$$\{y\in\mathbb{R}^n;2<u(x),y>=0\}.$$