Chapitre 7

Courbes paramétrées

Objectifs

- Définition d'une courbe paramétrée et du vocabulaire qui s'y rattache. Lien avec la cinématique.
- Plan d'étude d'une courbe paramétrée. Étude locale au voisinage d'un point. Étude des branches infinies.
- Définition et étude des courbes polaires.
- Étude des coniques.

Sommaire

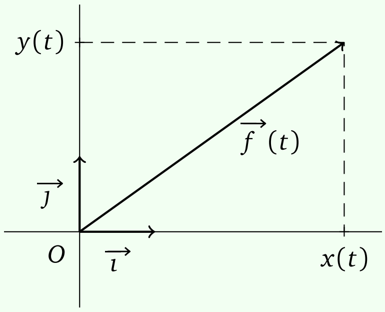
$\mathscr{P}$ désigne un plan affine muni d'un repère [éventuellement orthonormé direct] $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on note $\overrightarrow{P} = \{a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath} \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des vecteurs du plan. Dans tout le chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point).

I) Généralités

1) Fonctions vectorielles

DÉFINITION 7.1

Une fonction vectorielle est une fonction $\overrightarrow{f}: I \to \overrightarrow{P}$*. Pour* $t \in \mathbb{R}$ *on note* $(x(t), y(t))$ *les coordonnées de* $\overrightarrow{f}(t)$ *dans la base* $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$*, on a donc* $\overrightarrow{f}(t) = x(t)\overrightarrow{\imath} + y(t)\overrightarrow{\jmath}$*. On remarquera que* x *et* y *sont deux fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$*.*



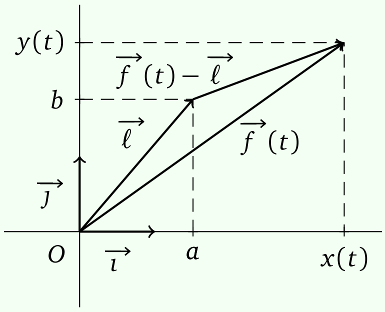
Remarque: Le repère étant choisi, se donner une fonction vectorielle revient à se donner deux fonctions réelles. Si le repère est orthonormé direct, on peut utiliser la notion d'affixe complexe.

DÉFINITION 7.2

Soit $\overrightarrow{f}: I \to \overrightarrow{P}$ *une fonction vectorielle, soit* $\overrightarrow{\ell} \in \overrightarrow{P}$ *et soit* t_0 *un élément de* I *(ou une borne de* I*), on dit que* $\overrightarrow{f}$ *admet pour limite le vecteur* $\overrightarrow{\ell}$ *en* t_0 *lorsque :*

$$\lim_{t \to t_0} \|\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{\ell}\| = 0$$

Notation : $\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{\ell}$ *ou* $\overrightarrow{f}(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \overrightarrow{\ell}$*.*



Caractérisation de la limite avec les fonctions coordonnées :

THÉORÈME 7.1

Si $\overrightarrow{f}(t) = x(t)\overrightarrow{\imath} + y(t)\overrightarrow{\jmath}$ *et si* $\overrightarrow{\ell} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath}$ *alors :* $\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{\ell} \iff \begin{cases} x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} a \\ y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} b \end{cases}.$

Preuve: Supposons le repère orthonormé, alors $\|\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{\ell}\| = \sqrt{[x(t)-a]^2 + [y(t)-b]^2}$ ce qui donne l'implication de droite à gauche. D'autre part, on a : $|x(t) - a| \leqslant \|\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{\ell}\|$ et $|y(t) - b| \leqslant \|\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{\ell}\|$ ce qui donne la réciproque. □

Par analogie avec les fonctions réelles, on définit les notions de continuité puis de dérivabilité.

DÉFINITION 7.3

Soit $\overrightarrow{f}: I \to \overrightarrow{P}$ *une fonction vectorielle et* t_0 *un élément de* I*, on dit que* $\overrightarrow{f}$ *est continue en* t_0 *lorsque* $\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{f}(t_0)$*.*

Remarque : si $\overrightarrow{f}(t) = x(t)\overrightarrow{\imath} + y(t)\overrightarrow{\jmath}$ alors il découle du théorème précédent que $\overrightarrow{f}$ est continue en t_0 ssi les fonctions x et y sont continues en t_0.

DÉFINITION 7.4

Soit $\overrightarrow{f}: I \to \overrightarrow{P}$ *une fonction vectorielle et* t_0 *un élément de* I*, on dit que* $\overrightarrow{f}$ *est dérivable en* t_0 *lorsqu'il existe un vecteur* $\overrightarrow{\ell}$ *tel que* $\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}[\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{f}(t_0)] = \overrightarrow{\ell}$*, auquel cas on écrit* $\overrightarrow{f}'(t_0) = \overrightarrow{\ell}$*.*

Remarque : si $\overrightarrow{f}(t) = x(t)\overrightarrow{\imath} + y(t)\overrightarrow{\jmath}$ alors il découle du théorème précédent que $\overrightarrow{f}$ est dérivable en t_0 ssi les fonctions x et y sont dérivables en t_0 auquel cas on a $\boxed{\overrightarrow{f}'(t_0) = x'(t_0)\overrightarrow{\imath} + y'(t_0)\overrightarrow{\jmath}}$.

On peut alors vérifier que l'on retrouve les règles usuelles de dérivation : dérivée d'une somme, de $\lambda \cdot \overrightarrow{f}$, de $\overrightarrow{f} \circ g$, auxquelles s'ajoutent de nouvelles règles :

THÉORÈME 7.2

Soient $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ deux fonctions vectorielles dérivables sur I, on a :
- *dérivée du produit scalaire :* $\left(\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g}\right)' = \overrightarrow{f}' \cdot \overrightarrow{g} + \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g}'$.
- *dérivée du déterminant :* $\left(\det(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})\right)' = \det(\overrightarrow{f}', \overrightarrow{g}) + \det(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}')$.
- *dérivée de la norme : si $\overrightarrow{f}$ ne s'annule pas,* $\|\overrightarrow{f}\|' = \frac{\overrightarrow{f}' \cdot \overrightarrow{f}}{\|\overrightarrow{f}\|}$.

Preuve: En exercice. □

Pour terminer cette partie nous allons définir la notion de classe d'une fonction :

DÉFINITION 7.5

Une fonction vectorielle $\overrightarrow{f} : I \to \overrightarrow{P}$ est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur l'intervalle I lorsqu'elle est k fois dérivable sur I et que sa dérivée k-ième (notée $\overrightarrow{f}^{(k)}$) est continue sur I.

Si $\overrightarrow{f}(t) = x(t)\overrightarrow{\imath} + y(t)\overrightarrow{\jmath}$ alors la fonction $\overrightarrow{f}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ssi les fonctions x et y sont elles-mêmes de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, si c'est le cas, alors on a $\boxed{\overrightarrow{f}^{(k)}(t) = x^{(k)}(t)\overrightarrow{\imath} + y^{(k)}(t)\overrightarrow{\jmath}}$.

2) Définition d'une courbe paramétrée

DÉFINITION 7.6

Une courbe paramétrée (ou arc paramétré) C, de classe $\mathscr{C}^k$ est la donnée d'un triplet $C = (I, \overrightarrow{f}, \Gamma)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\overrightarrow{f}$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, et $\Gamma = \{M(t) \ / \ t \in I$ et $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM(t)}\}$. Le couple $(I, \overrightarrow{f})$ est appelé ***paramétrage*** *de la courbe, et Γ est appelé le* ***support*** *de la courbe [ou ensemble des points de la courbe].*

Exemples:
- Un arc paramétré est souvent donné par un paramétrage, exemple : soit C la courbe paramétrée par $x(t) = 1 + t^2$ et $y(t) = 1 - t^2 + t$, $t \in \mathbb{R}$.
- Une courbe cartésienne d'équation $y = g(x), x \in I$ est un cas particulier de courbe paramétrée, on peut prendre comme paramétrage : $x(t) = t$ et $y(t) = g(t)$, $t \in I$.

Interprétation cinématique :
- La courbe $C = (I, \overrightarrow{f}, \Gamma)$ est appelée **mouvement**, et le support Γ est appelé **trajectoire**.
- Le vecteur $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM(t)} = x(t)\overrightarrow{\imath} + y(t)\overrightarrow{\jmath}$ est appelé **vecteur position**.
- Le vecteur $\overrightarrow{f}'(t) = \frac{d(\overrightarrow{OM(t)})}{dt} = x'(t)\overrightarrow{\imath} + y'(t)\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{v}(t)$ est appelé **vecteur vitesse**. Lorsque $\overrightarrow{v}(t) \neq 0$, on dit que le point $M(t)$ est **régulier**, sinon on dit qu'il est **stationnaire**. Lorsque tous les points sont réguliers, on dit que la courbe C est régulière.
- Le vecteur $\overrightarrow{f}''(t) = \frac{d^2(\overrightarrow{OM(t)})}{dt^2} = x''(t)\overrightarrow{\imath} + y''(t)\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{a}(t)$ est appelé **vecteur accélération**. Lorsque $\overrightarrow{v}(t)$ et $\overrightarrow{a}(t)$ sont non colinéaires, (*i.e.* $\det(\overrightarrow{v}(t), \overrightarrow{a}(t)) \neq 0$), on dit que le point $M(t)$ est **birégulier**. Lorsque tous les points sont biréguliers, on dit que la courbe C est birégulière.

Exemple: Montrer que la courbe paramétrée par : $x(t) = 1 + t^2$ et $y(t) = 1 - t^2 + t$, est birégulière. Étudier les variations de x et de y, étudier le rapport $\frac{y}{x}$ au voisinage de ∞, et donner l'allure de la courbe.

II) Étude locale en un point

1) Tangente en un point

Soit $C = (I, \overrightarrow{f}, \Gamma)$ une courbe de classe $\mathscr{C}^n$ $(n \geqslant 1)$, soit $M(t_0)$ un point régulier et soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $t_0 + h \in I$, alors le vecteur :

$$\frac{1}{h}\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\overrightarrow{\imath} + \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}\overrightarrow{\jmath}$$

est un vecteur directeur de la droite $(M(t_0)M(t_0+h))$, donc lorsque h tend vers 0, cette droite « tend » vers la droite qui passe par $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{f}'(t_0)$.

Définition 7.7

*Si $M(t_0)$ est un point **régulier**, la droite qui passe par $M(t_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{f}'(t_0)$ [le vecteur vitesse] est appelée **tangente à la courbe au point** $M(t_0)$.*

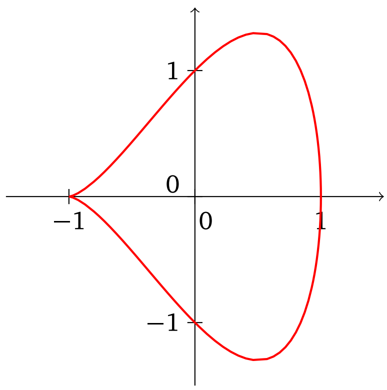
En un point stationnaire $M(t_0)$, si le quotient $\frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ admet une limite en t_0, alors celle-ci est le coefficient directeur de la tangente au point $M(t_0)$. Cela revient aussi à étudier la limite en t_0 du rapport $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ (si celui-ci existe).

*Nous démontrerons dans un autre chapitre que la **première dérivée non nulle** en t_0 de $\overrightarrow{f}$ donne un vecteur directeur de la tangente.*

Exemple: Étudier la courbe paramétrée par : $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)[1+\cos(t)]$.

Réponse : on peut se placer dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ car la fonction $x(t)$ est paire et la fonction $y(t)$ est impaire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe Ox, et on peut réduire l'étude à l'intervalle $[0; \pi]$. Le tableau des variations est :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		π
x'	0		$-$		0
x	1		↘		-1
y'	2	$+$	0	$-$	0
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0



Le point $M(\pi)$ est stationnaire, $\frac{y(t)-y(\pi)}{x(t)-x(\pi)} = \sin(t) \xrightarrow[t\to\pi]{} 0$ on a donc une tangente horizontale en $M(\pi)$.

2) Branches infinies

Définition 7.8

Soit t_0 un élément de I ou une borne de I, on dit que la courbe $C = (I, \overrightarrow{f}, \Gamma)$ admet une branche infinie en t_0 lorsque $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$ ou $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$.

Étude des branches infinies :

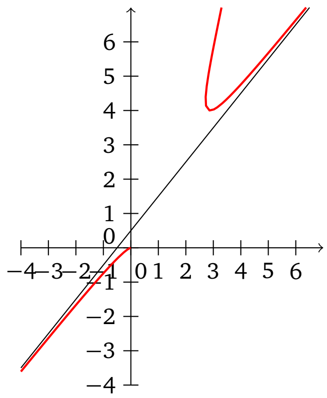
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$, alors on dit qu'il y a une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$.
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$, alors on dit qu'il y a une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$, alors on étudie la limite en t_0 du rapport $\frac{y(t)}{x(t)}$:
  - Si $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, on dit qu'il y a une branche parabolique dans la direction de l'axe Ox.

- Si $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \infty$, on dit qu'il y a une branche parabolique dans la direction de l'axe Oy.
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$, alors on étudie la limite de $y(t) - ax(t)$ en t_0 :
  - Si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b$, alors on dit qu'il y a une asymptote d'équation $y = ax + b$.
  - Si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = \infty$, alors on dit qu'il y a une branche parabolique dans la direction asymptotique $y = ax$.

Exemples:

- Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée par $x(t) = \frac{t^3}{t^2-9}$ et $y(t) = \frac{t(t-2)}{t-3}$.
  Réponse : On a $I =]-\infty; -3[\cup]-3; 3[\cup]3; +\infty[$.
  $*$ En $t_0 = -3$: $\lim\limits_{\to 3} x(t) = \infty$ et $\lim\limits_{t\to 3} y(t) = -5/2$, il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = -5/2$.
  $*$ En $t_0 = 3$: $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t(t-2)(t+3)}{t^3} \underset{3}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$ puis on calcule $y(t) - \frac{2}{3}x(t) = \frac{t(t+6)}{3(t+3)} \underset{3}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$ il y a donc une asymptote d'équation $y + \frac{2}{3}x = \frac{3}{2}$. $y(t) - \frac{2}{3}x(t) - \frac{3}{2} = \frac{(t-3)(2t+9)}{6(t+3)}$ donc la courbe est au-dessus de l'asymptote au voisinage à droite de 3, et en-dessous au voisinage à gauche de 3.
  En $t_0 = \pm\infty$: on a $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{\infty}{\longrightarrow} 1$ et $y(t) - x(t) = \frac{t^2-6t}{t^2-9} \underset{\infty}{\longrightarrow} 1$, on a donc une asymptote d'équation $y = x + 1$. D'autre part, $y(t) - x(t) - 1 = \frac{9-6t}{t^2-9}$, donc la courbe est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$ et en-dessous au voisinage de $+\infty$.
- Étudier la courbe paramétrée par : $x(t) = \frac{t}{\ln(t)}$ et $y(t) = \frac{t^2}{t-1}$.

t	0		1		2		e		$+\infty$
x'	‖	$-$	‖		$-$		0	$+$	
x	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	e	↗	$+\infty$
y'	‖	$-$	‖	$-$	0		$+$		
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗		↗	$+\infty$



$*$ En $+\infty$: $\frac{y(t)}{x(t)} \longrightarrow +\infty$: branche parabolique de direction Oy.
$*$ En 0 : $\frac{y'(t)}{x'(t)} \longrightarrow 0$: on arrive à l'origine horizontalement.
$*$ En 1 : $\frac{y(t)}{x(t)} \longrightarrow 1$ et $y(t) - x(t) \longrightarrow \frac{1}{2}$: asymptote d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.

Dans la suite du chapitre, $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ désigne un repère orthonormé direct.

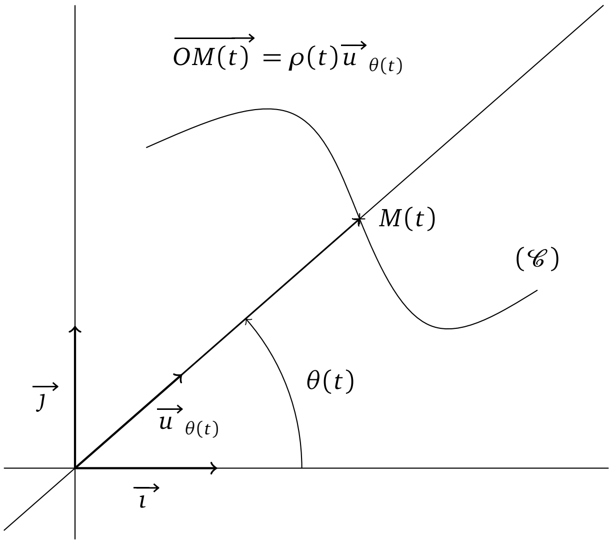
III) Courbes paramétrées en polaires

1) Généralités

Une courbe paramétrée de $\mathscr{P}$ peut être représentée par des coordonnées polaires $(\rho(t), \theta(t))$ en fonction du paramètre réel t. Dans ce cas la fonction vectorielle correspondante est :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{f}(t) = \rho(t)\overrightarrow{u}(\theta(t)) \text{ ou } \overrightarrow{u}(\theta(t)) = \cos(\theta(t))\overrightarrow{\imath} + \sin(\theta(t))\overrightarrow{\jmath}$$

ce qui équivaut au paramétrage cartésien $x(t) = \rho(t)\cos(\theta(t))$ et $y(t) = \rho(t)\sin(\theta(t))$.



Le vecteur vitesse : On a $\overrightarrow{v}(\theta) = \overrightarrow{u}(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)\overrightarrow{\imath} + \cos(\theta)\overrightarrow{\jmath}$, les fonctions vectorielles $\theta \mapsto \overrightarrow{u}(\theta)$ et $\theta \mapsto \overrightarrow{v}(\theta)$ sont donc dérivables et on a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\theta} = \overrightarrow{v}(\theta) \text{ et } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}\theta} = -\overrightarrow{u}(\theta).$$

On en déduit que si les fonctions $t \mapsto \rho(t)$ et $t \mapsto \theta(t)$ sont dérivables sur I alors la fonction $t \mapsto \overrightarrow{f}(t)$ l'est aussi et on a :

$$\overrightarrow{f}'(t) = \rho'(t)\overrightarrow{u}(\theta(t)) + \rho(t)\theta'(t)\overrightarrow{v}(\theta(t)).$$

Le vecteur accélération : Si les fonctions $t \mapsto \rho(t)$ et $t \mapsto \theta(t)$ sont deux fois dérivables sur I alors la fonction $t \mapsto \overrightarrow{f}(t)$ l'est aussi et on a :

$$\overrightarrow{f}''(t) = \left[\rho''(t) - \rho(t)\theta'(t)^2\right]\overrightarrow{u}(\theta(t)) + \left[2\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)\theta''(t)\right]\overrightarrow{v}(\theta(t)).$$

2) Cas particulier

Le cas particulier le plus simple est celui où $\theta(t) = t$, autrement dit le paramètre est l'angle polaire θ.

DÉFINITION 7.9

La courbe polaire d'équation $r = \rho(\theta)$ où $\rho : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^k, k \geqslant 1$, est la courbe paramétrée par : $\overrightarrow{OM(\theta)} = \overrightarrow{f}(\theta) = \rho(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$, c'est à dire $\begin{cases} x(\theta) = & \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = & \rho(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$.

Propriétés : si la fonction ρ est de classe $\mathscr{C}^2$ alors :

- Le vecteur vitesse au point $M(\theta)$ est $\overrightarrow{f}'(\theta) = \rho'(\theta)\overrightarrow{u}(\theta) + \rho(\theta)\overrightarrow{v}(\theta)$ et le vecteur accélération est $\overrightarrow{f}''(t) = [\rho''(\theta) - \rho(\theta)]\overrightarrow{u}(\theta) + 2\rho'(\theta)\overrightarrow{v}(\theta)$.
- $M(\theta)$ est un point régulier $\iff (\rho'(\theta), \rho(\theta)) \neq (0,0)$, on en déduit que tous les points de la courbe **distincts de** O sont des **points réguliers**.
- $M(\theta)$ est birégulier $\iff 2\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2 - \rho(\theta)\rho''(t) \neq 0$ (c'est le déterminant entre les vecteurs vitesse et accélération dans la base $(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$.

3) Plan d'étude d'une courbe polaire

- Restriction du domaine d'étude :
  - Si $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$: alors la courbe présente une symétrie par rapport à l'axe Ox, on peut restreindre l'étude à $t \geqslant 0$.
  - Si $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$: alors la courbe présente une symétrie par rapport à l'axe Oy, on peut restreindre l'étude à $t \geqslant 0$.

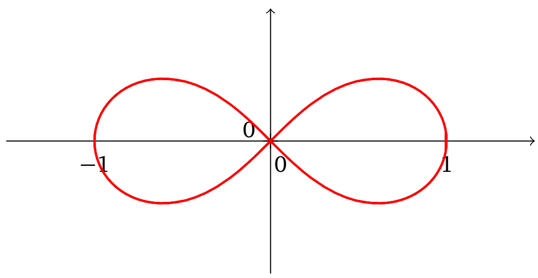
  - Si $\rho(2\alpha-\theta)=\rho(\theta)$: alors la courbe présente une symétrie par rapport à la droite d'équation polaire $\theta=\alpha$, on peut restreindre l'étude à $\theta \geqslant \alpha$.
  - Si $\rho(2\alpha-\theta)=-\rho(\theta)$: alors la courbe présente une symétrie par rapport à la droite d'équation polaire $\theta=\alpha+\pi/2$, on peut restreindre l'étude à $\theta \geqslant \alpha$.
  - Si $\rho(T+\theta)=\rho(\theta)$: (T est une période de ρ), alors le point $M(T+\theta)$ se déduit de $M(\theta)$ par la rotation de centre O et d'angle T, on peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur T.
  - Si $\rho(T+\theta)=-\rho(\theta)$: (T est une anti-période de ρ), alors le point $M(T+\theta)$ se déduit de $M(\theta)$ par la rotation de centre O et d'angle $T+\pi$, on peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur T.
- On étudie ensuite les variations de la fonction ρ.
- Classification des points :
  - Si $M(\theta_0)\neq O$: alors le point $M(\theta_0)$ est régulier, donc la tangente est portée par le vecteur vitesse : $\overrightarrow{f}'(\theta_0)=\rho'(\theta_0)\overrightarrow{u}(\theta_0)+\rho(\theta_0)\overrightarrow{v}(\theta_0)$. L'équation de cette tangente dans le repère $(M(\theta_0),\overrightarrow{u}(\theta_0),\overrightarrow{v}(\theta_0))$ est : $\rho(\theta_0)X-\rho'(\theta_0)Y=0$, son coefficient directeur est $\frac{\rho(\theta_0)}{\rho'(\theta_0)}$ lorsque $\rho'(\theta_0)\neq 0$.
  - Si $M(\theta_0)=O$ alors $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\frac{1}{\rho(\theta)}\overrightarrow{OM(\theta)}=\overrightarrow{u}(\theta_0)$, donc la **tangente est dirigée par le vecteur** $\overrightarrow{u}(\theta_0)$,
- Recherche des points doubles :

$$M(\theta)=M(\theta') \iff \begin{cases}\theta=\theta'+2k\pi\\ \rho(\theta)=\rho(\theta')\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\theta=\theta'+(2k+1)\pi\\ \rho(\theta)=-\rho(\theta')\end{cases}.$$

- Branches infinies : il y en a une lorsque $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\rho(\theta)=\pm\infty$ avec θ_0 réel, ou bien lorsque $\rho(\theta)$ a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $\pm\infty$. D'où la distinction :
  - Si $\lim\limits_{\theta\to\pm\infty}\rho(\theta)=\pm\infty$ alors on dit qu'il y a une branche infinie en spirale.
  - Si $\lim\limits_{\theta\to\pm\infty}\rho(\theta)=a\in\mathbb{R}$ alors on dit qu'il y a un cerce asymptote, de centre O et de rayon $|a|$.
  - Si $\theta_0\in\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\rho(\theta)=\pm\infty$ alors dans le repère polaire d'angle θ_0, les coordonnées de $M(\theta)$ sont $X=\rho(\theta)\cos(\theta-\theta_0)$ et $Y=\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$, la limite de l'abscisse X en θ_0 est infinie, on étudie celle de Y :
    - Si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0)=a\in\mathbb{R}$ alors on dit qu'il y a une asymptote d'équation $Y=a$ dans le repère polaire, dans le repère d'origine l'équation dévient $-\sin(\theta_0)x+\cos(\theta_0)y=a$.
    - Si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0)=\pm\infty$ alors on dit qu'il y a une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation polaire $\theta=\theta_0$.

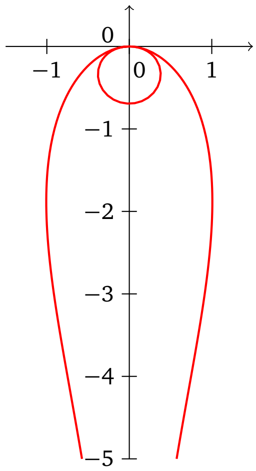
Exemples:
- Étudier la courbe polaire d'équation $\rho(\theta)=a\sqrt{\cos(2\theta)}$ où $a>0$ (Lemniscate de *Bernoulli*).
  $*$ ρ est paire et π-périodique : étude sur $[0;\frac{\pi}{2}]\cap D_\rho=[0;\frac{\pi}{4}]$, on complétera avec la symétrie par rapport à Ox, puis avec la symétrie de centre O.
  $*$ En $\theta_0=0$: $\rho(0)=a$ et $\overrightarrow{f}'(0)=a\overrightarrow{\jmath}$: tangente verticale.
  $*$ En $\theta_0=\frac{\pi}{4}$: $M(\theta_0)=O$ donc la tangente est la première bissectrice.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
ρ	a	$\searrow$	0



- Étudier la courbe polaire d'équation $\rho(\theta)=\ln(1-\sin(\theta))$.
  Réponse : La fonction est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$. La fonction ρ est 2π-périodique et $\rho(\pi-\theta)=\rho(\theta)$, il y a donc une symétrie par rapport à l'axe Ox, on peut donc restreindre l'étude à $[-\pi/2;\pi/2[$. Le tableau des variations est :

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	$\ln(2)$ $\searrow$	$-\infty$



∗ Points particuliers :

i) En $\theta_0 = -\pi/2$: un vecteur directeur de la tangente est $\ln(2)\overrightarrow{\imath}$, on a donc une tangente horizontale.
ii) En $\theta_0 = 0$: on a $M(\theta_0) = O$ et $\rho'(0) = -1$, donc $M(0)$ est un point régulier et la tangente en portée par $\overrightarrow{u}(0) = \overrightarrow{\imath}$.

∗ Branche infinie en $\pi/2$:

$Y = \rho(\theta)\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\rho(\theta)\cos(\theta) = -\ln(1-\sin(\theta))\cos(\theta)$, c'est à dire, en posant $u = \theta - \pi/2$, $Y = \ln(1-\cos(u))\sin(u) = \ln(2\sin^2(\frac{u}{2}))\sin(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$, il y a donc une asymptote d'équation $Y = 0$ dans le repère polaire, c'est à dire $x = 0$ dans le repère d'origine.

∗ Points doubles :

cela revient à chercher $\theta \in [-\pi/2; \pi/2[$ tel que $\rho(\theta) = -\rho(\theta+\pi)$, ce qui donne $\sin(\theta) = 0$ et donc $\theta = 0$, par conséquent O est le seul point double.

IV) Les coniques

1) Définition monofocale

Définition 7.10

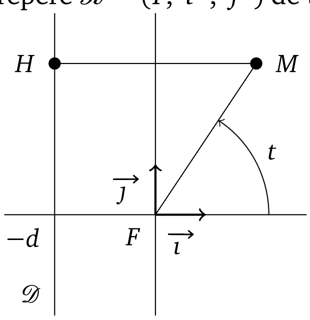
Soit F un point du plan, $\mathfrak{D}$ une droite affine ne passant pas par F et soit e un réel strictement positif. On a appelle conique de foyer F, de directrice $\mathfrak{D}$ et d'excentricité e l'ensemble

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{P} \ / \ MF = e\,\mathrm{d}(M,\mathfrak{D})\}$$

Lorsque :

- *$e = 1$: la courbe $\mathscr{C}$ est appelée parabole.*
- *$e < 1$: la courbe $\mathscr{C}$ est appelée ellipse.*
- *$e > 1$: la courbe $\mathscr{C}$ est appelée hyperbole.*

On choisit un repère $\mathscr{R} = (F, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ de tel sorte que $\mathfrak{D}$ admette comme équation dans ce repère $x = -d$ où $d = \mathrm{d}(F,\mathfrak{D})$:



Une équation cartésienne dans le repère $(F, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est : $MF^2 = e^2MH^2$ c'est à dire $x^2+y^2 = e^2(x+d)^2$ ou encore $x^2(1-e^2) - 2e^2dx + y^2 - e^2d^2 = 0$. Déterminons maintenant un paramétrage polaire : on a $MH = |x_H - x_M| = |d+x| = |d+\rho\cos(t)|$, et $MF = |\rho|$, on a donc $M \in \mathscr{C} \iff \rho^2 = e^2\left(d+\rho\cos(t)\right)^2$ ce qui équivaut à $\rho = e(d+\rho\cos(t))$ ou $\rho = -e(d+\rho\cos(t))$, on obtient ainsi que $\mathscr{C}$ est la réunion de deux courbes : $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ avec $\mathscr{C}_1$ d'équation polaire : $\rho_1 = \frac{ed}{1-e\cos(t)}$ et $\mathscr{C}_2$ d'équation polaire $\rho_2 = \frac{-ed}{1+e\cos(t)}$. On voit que $\rho_2(\pi+t) = -\rho_1(t)$ et donc $M_2(\pi+t) = M_1(t)$, on en déduit que les deux courbes sont confondues, $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$ et donc :

THÉORÈME 7.3

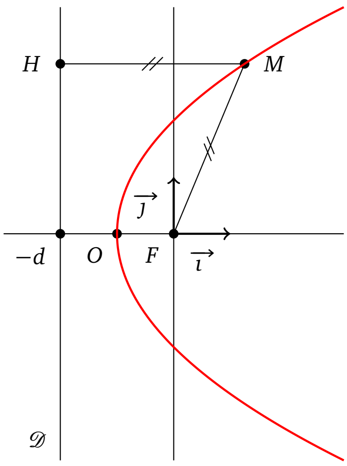
Une équation polaire de $\mathscr{C}$ dans le repère $(F, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est : $\rho(t) = \frac{p}{1-e\cos(t)}$ où $p = ed$ est appelé paramètre de la courbe. Une équation cartésienne dans le repère $(F, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est :

$$x^2(1-e^2) - 2epx + y^2 - p^2 = 0$$

2) Le cas de la parabole

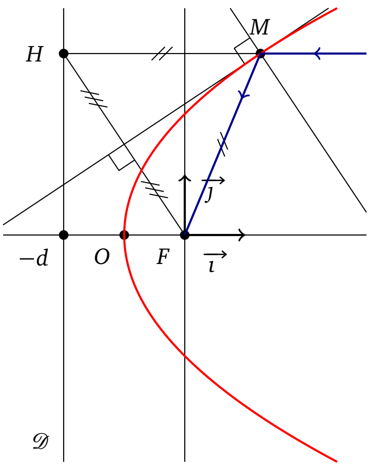
Équation réduite : On a $e = 1$, l'équation cartésienne devient $y^2 = 2px + p^2 = 2p(x + \frac{d}{2})$. Soit $O(-\frac{d}{2}, 0)$, alors dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ l'équation devient : $\boxed{Y^2 = 2pX}$ c'est **l'équation réduire** de la parabole. On est ramené à tracer la courbe représentative de la fonction $f(X) = \sqrt{2pX}$ puis à faire une symétrie par rapport à Ox.

Allure de la courbe :



Parabole de sommet $O(-\frac{d}{2}, 0)$ et d'axe Ox.

Tangente en un point : paramétrons la parabole par $x(t) = \frac{t^2}{2p} - \frac{d}{2}$ et $y(t) = t$ dans le repère $(F, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la tangente est dirigée par la vitesse $\vec{v}(t)$ de coordonnées $(\frac{t}{p}, 1)$, or $\overrightarrow{FH}$ a pour coordonnées $(-p, t)$, on en déduit que $\vec{v}(t) \cdot \overrightarrow{FH} = 0$. La tangente est donc la perpendiculaire à (FH) passant par M, **c'est la médiatrice du segment** $[FH]$:



Application : principe du miroir parabolique.

3) Le cas de l'ellipse

Équation réduite : On a $e < 1$, une équation cartésienne dans le repère $(F, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est (avec $e < 1$) :

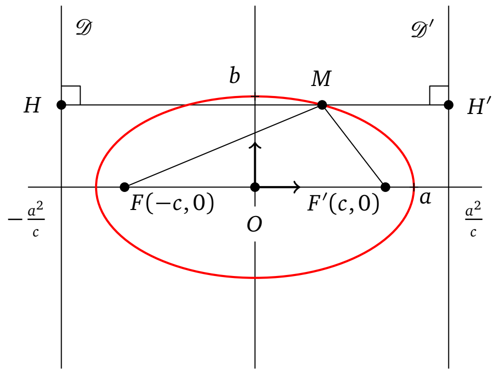
$$x^2(1-e^2)-2epx+y^2-p^2=0 \iff x^2-2\frac{ep}{1-e^2}x+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{p^2}{1-e^2}$$
$$\iff \left(x-\frac{ep}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{p^2}{1-e^2}+\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}=\frac{p^2}{(1-e^2)^2}$$
$$\iff \frac{\left(x-\frac{ep}{1-e^2}\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

avec $a=\frac{p}{1-e^2}$ et $b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$. Soit $O(\frac{ep}{1-e^2},0)$, alors dans le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$, on a $X=x-\frac{ep}{1-e^2}$ et $Y=y$, donc l'équation devient $\boxed{\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1}$. C'est **l'équation réduite** de l'ellipse.

Remarques :
- On a $b<a$ car $0<1-e^2<1$.
- Les coordonnées de F dans le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ sont $(-c=-\frac{ep}{1-e^2},0)$.
- On a $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $e=\frac{c}{a}$ et l'équation de la directrice dans le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ est $X=-d-c=-\frac{a^2}{c}$. En particulier on en déduit que $0<c<a<\frac{a^2}{c}$.
- L'ellipse est symétrique par rapport à Oy, elle a donc un deuxième foyer F' de coordonnées $(c,0)$ et une autre directrice $\mathfrak{D}'$ d'équation $X=\frac{a^2}{c}$ dans le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.
- Un paramétrage possible dans le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ est $X(t)=a\cos(t)$ et $Y(t)=b\sin(t)$ avec $t\in\mathbb{R}$.

Étude de la courbe : Les fonctions X et Y sont 2π-périodiques, X est paire et Y est impaire, on a donc une symétrie par rapport à Ox, on réduit l'étude sur $[0,\pi]$. On a $X(\pi-t)=-X(t)$ et $Y(\pi-t)=Y(t)$: symétrie par rapport à (Oy), on réduit l'étude sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. La tangente au point $M(0)$ est verticale et la tangente au point $M(\frac{\pi}{2})$ est horizontale :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
X	a	$\searrow$	0
Y	0	$\nearrow$	b



Ellipse de centre $O(\frac{ep}{1-e^2},0)$, de demi-grand axe $a=\frac{p}{1-e^2}$, de demi-petit axe $b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$.

THÉORÈME 7.4

Pour tout point M de l'ellipse, on a $MF+MF'=2a$.

Preuve: On a $MF+MF'=e\times MH+e\times MH'=ed(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')=e2\frac{a^2}{c}=2a$. □

THÉORÈME 7.5 (Tangente en un point)

En tout point M de l'ellipse, la tangente est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Preuve: On choisit un paramétrage de l'ellipse puis on dérive la relation $\|\overrightarrow{FM(t)}\|+\|\overrightarrow{F'M(t)}\|=2a$ ce qui donne $\overrightarrow{v}(t)\cdot\left[\frac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|}+\frac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|}\right]=\overrightarrow{0}$, or le deuxième vecteur est un vecteur directeur de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$, le résultat en découle. □

4) Le cas de l'hyperbole

Équation réduite : On a $e > 1$, une équation cartésienne dans le repère $(F, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est :

$$x^2(1-e^2)-2epx+y^2-p^2=0 \iff x^2-2\frac{ep}{1-e^2}x+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{p^2}{1-e^2}$$
$$\iff \left(x+\frac{ep}{e^2-1}\right)^2-\frac{y^2}{e^2-1}=\frac{p^2}{1-e^2}+\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}=\frac{p^2}{(e^2-1)^2}$$
$$\iff \frac{\left(x+\frac{ep}{e^2-1}\right)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

avec $a=\frac{p}{e^2-1}$ et $b=\frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$. Posons $O(\frac{-ep}{e^2-1},0)$, alors dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on a $X=x+\frac{ep}{e^2-1}$ et $Y=y$, l'équation cartésienne s'écrit alors $\boxed{\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1}$ c'est **l'équation réduite** de l'hyperbole.

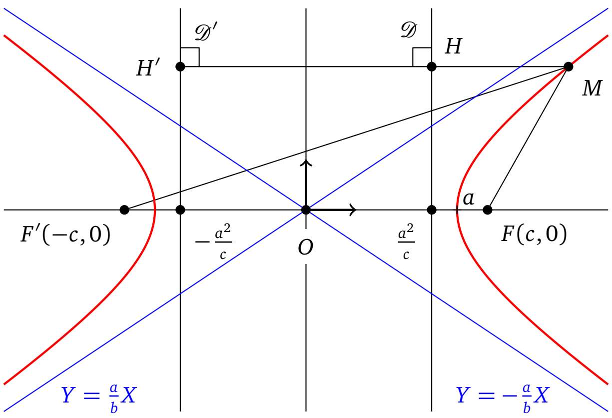
Remarques :
- Les coordonnées de F dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont $(c=\frac{ep}{e^2-1},0)$.
- On a $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $e=\frac{c}{a}$ et l'équation de la directrice dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $X=-d+c=\frac{a^2}{c}$. En particulier on en déduit que $0<\frac{a^2}{c}<a<c$.
- L'hyperbole est symétrique par rapport à Oy, elle a donc un deuxième foyer F' de coordonnées $(-c,0)$ et une autre directrice $\mathfrak{D}'$ d'équation $X=-\frac{a^2}{c}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
- Un paramétrage possible dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $X(t)=\pm a\mathrm{ch}(t)$ et $Y(t)=b\mathrm{sh}(t)$ avec $t\in\mathbb{R}$.

Étude de la courbe :

La partie de la courbe dans le demi-plan $X>0$ est paramétrée par $X(t)=a\mathrm{ch}(t)$ et $Y(t)=b\mathrm{sh}(t)$ avec $t\in\mathbb{R}$ (l'autre partie est symétrique par rapport à Oy]. La fonction X est paire et la fonction Y est impaire il y a donc une symétrie par rapport à Ox et on réduit l'étude sur $[0;+\infty[$.

t	0	$+\infty$
X	a	$\nearrow$ $+\infty$
Y	0	$\nearrow$ $+\infty$

La tangente au point $M(0)$ est verticale. En $+\infty$: on a $\frac{Y(t)}{X(t)}=\frac{b}{a}\mathrm{th}(t)\to\frac{b}{a}$, $Y(t)-\frac{b}{a}X(t)=-be^{-t}\to 0$, on a donc une asymptote d'équation $Y=\frac{b}{a}X$ et la courbe est sous l'asymptote.



$\boxed{\text{Hyperbole de centre } O}$.

Remarque : Lorsque $a=b$ les deux asymptotes sont orthogonales (ce sont les deux bissectrices) on dit alors que l'hyperbole est **équilatère**. Dans ce cas, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{\imath}-\vec{\jmath}]$ et

$\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}]$, on a $X = \frac{1}{\sqrt{2}}[X' + Y']$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}[-X' + Y']$ donc l'équation de l'hyperbole devient $(X - Y)(X + Y) = a^2$ *i.e.* $\boxed{X'Y' = \frac{a^2}{2}}$.

THÉORÈME 7.6

Pour tout point M de l'hyperbole, on a $|MF - MF'| = 2a$.

Preuve: Prenons M dans le demi-plan $X > 0$, on a $MF - MF' = e \times MH - e \times MH' = -ed(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') = -e2\frac{a^2}{c} = -2a$. □

THÉORÈME 7.7 (Tangente en un point)

En tout point M de l'hyperbole, la tangente est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Preuve: On choisit un paramétrage de l'hyperbole puis on dérive la relation $\|\overrightarrow{FM(t)}\| - \|\overrightarrow{F'M(t)}\| = \pm 2a$ ce qui donne $\overrightarrow{v}(t) \cdot \left[\frac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|} - \frac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|}\right] = \overrightarrow{0}$, or le deuxième vecteur est un vecteur directeur de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$, le résultat en découle. □

5) Définition bifocale

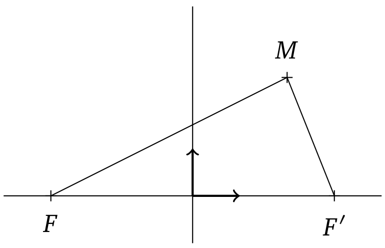
THÉORÈME 7.8

Soient F, F' deux points distincts du plan, soit $c = \frac{FF'}{2}$ et $a > c$, alors l'ensemble

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{P} \ / \ MF + MF' = 2a\}$$

est une ellipse de centre $O = \text{Mil}[F; F']$ d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ et de foyer F.

Preuve: Posons $O = \text{Mil}[F, F']$ comme origine, $\overrightarrow{\imath} = \frac{\overrightarrow{FF'}}{\|\overrightarrow{FF'}\|}$, et $\overrightarrow{\jmath}$ déduit de $\overrightarrow{\imath}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$.



. On a $F(-c, 0)$ et $F'(c, 0)$, d'où :

$$\begin{aligned}
MF + MF' = 2a &\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
&\iff 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2) = \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} \\
&\iff \begin{cases} 4a^4 + [x^2 + y^2 + c^2]^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) = [x^2 + y^2 + c^2]^2 - 4c^2x^2 \\ x^2 + y^2 + c^2 \leqslant 2a^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2) \\ x^2 + y^2 \leqslant 2a^2 - c^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \\ x^2 + y^2 \leqslant a^2 + (a^2 - c^2) \end{cases}
\end{aligned}$$

On a $a > d/2 = c$, donc $a^2 - c^2 > 0$, posons $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, on doit avoir la relation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, si cette relation est vérifiée, il est clair que $x^2 + y^2 \leqslant a^2 + b^2$ et par conséquent $MF + MF' = 2a \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. D'après l'étude précédente, on a une ellipse de centre O, de foyer F, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$, de directrice $\mathfrak{D}$ d'équation $x = -\frac{a^2}{c}$.

□

THÉORÈME 7.9

Soient F, F' deux points distincts du plan, soit $c = \frac{FF'}{2}$ et $0 < a < c$, alors l'ensemble

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{P} \ / \ |MF - MF'| = 2a\}$$

est une hyperbole de centre $O = \text{Mil}[F; F']$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ et de foyer F'.

Preuve: On choisit le même repère que précédemment :

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in \mathscr{C} &\iff MF^2 + MF'^2 - 2MF.MF' = 4a^2 \\
&\iff (x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a^2 = 2\sqrt{\left(x^2+y^2+c^2\right)^2 - 4x^2c^2} \\
&\iff x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = \sqrt{\left(x^2+y^2+c^2\right)^2 - 4x^2c^2} \\
&\iff \begin{cases} \left(x^2+y^2+c^2\right)^2 + 4a^4 - 4a^2(x^2+y^2+c^2) = \left(x^2+y^2+c^2\right)^2 - 4x^2c^2 \\ x^2+y^2+c^2 \geqslant 2a^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \\ x^2+y^2 \geqslant a^2 - b^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x^2+y^2 \geqslant a^2 - b^2 \end{cases} \quad \text{avec } b = \sqrt{c^2-a^2} \\
&\iff \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}.
\end{aligned}$$

En effet, cette équation entraîne $x^2 \geqslant a^2$ et donc $x^2 + y^2 \geqslant a^2 \geqslant a^2 - b^2$. D'après l'étude précédente, on a une hyperbole de centre O, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$, de foyer F', et de directrice $\mathfrak{D}$ d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. □

6) Définition algébrique

Soit (E) l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan vérifiant l'équation :

$$P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \text{ avec } (a,b,c) \neq (0,0,0).$$

DÉFINITION 7.11

*Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** de l'expression $P(x,y)$.*

Soit $\overrightarrow{u} = \cos(\theta)\overrightarrow{\imath} + \sin(\theta)\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{v} = -\sin(\theta)\overrightarrow{\imath} + \cos(\theta)\overrightarrow{\jmath}$, notons (x,y) les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et (X,Y) les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}' = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a alors les relations : $\begin{cases} x = X\cos(\theta) - Y\sin(\theta) \\ y = X\sin(\theta) + Y\cos(\theta) \end{cases}$. On en déduit que dans le repère $\mathscr{R}'$ l'équation de (E) devient :

$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0 \text{ avec } \begin{cases} A = a\cos^2(\theta) + c\sin^2(\theta) + b\sin(\theta)\cos(\theta) \\ B = (c-a)\sin(2\theta) + b\cos(2\theta) \\ C = a\sin^2(\theta) + c\cos^2(\theta) - b\sin(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
B^2 = a^2\sin^2(2\theta) + c^2\sin^2(2\theta) + b^2\cos^2(2\theta) - 2ac\sin^2(2\theta) - 2ab\sin(2\theta)\cos(2\theta) \\
+ 2bc\sin(2\theta)\cos(2\theta)
\end{aligned}$$

et

$$4AC = a^2\sin^2(2\theta)+c^2\sin^2(2\theta)-2ab\sin(2\theta)\cos(2\theta)+2bc\sin(2\theta)\cos(2\theta) + 4ac[\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)]-b^2\sin^2(2\theta)$$

on en déduit alors que $B^2-4AC = b^2-4ac[\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)+\frac{1}{2}\sin^2(2\theta)] = b^2-4ac$.

Remarques :
- Si on change $\overrightarrow{v}$ en $-\overrightarrow{v}$ alors B est changé en $-B$ et on a toujours $B^2-4AC = b^2-4ac$.
- On a $A+C = a+c$.
- Si $A = B = C = 0$ alors $b^2 = 4ac$ et $a = -c$ ce qui entraîne $a = b = c = 0$. Par conséquent, puisque $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, on a aussi $(A,B,C)\neq(0,0,0)$.

THÉORÈME 7.10

Un changement de repère orthonormé ne change pas le discriminant.

Étape 1 : élimination du terme croisé. Nous allons choisir θ de telle sorte que $B = 0$ (réduction de l'équation) :
- Si $b = 0$: il n'y a rien à faire, on prend $\theta = 0$.
- Si $b \neq 0$ et $a = c$: il suffit de prendre $\theta = \frac{\pi}{4}$ (mod $\frac{\pi}{2}$).
- Si $b \neq 0$ et $a \neq c$ alors il suffit de prendre $\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{b}{a-c}\right)$.

Une fois ceci-fait, on a l'équation de (E) dans le repère $\mathscr{R}'$:

$$AX^2+CY^2+DX+EY+f = 0.$$

Étape 2 : élimination des termes en X et en Y et conclusion.
- Si $AC \neq 0$ (*i.e.* si $\Delta \neq 0$) : alors l'équation devient :

$$A[X+\frac{D}{2A}]^2+C[Y+\frac{E}{2C}]^2+F' = 0$$

ou encore dans le repère $\mathscr{R}'' = (O',\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ avec $O'(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C})_{\mathscr{R}'}$:

$$A[X']^2+C[Y']^2+F' = 0.$$

d'où la conclusion :
  - Si $AC > 0$, c'est à dire $\boxed{\text{si } \Delta < 0}$ [car ici $-4AC = \Delta$], alors l'ensemble (E) est **soit vide, soit une ellipse** [éventuellement un cercle].
  - Si $AC < 0$, c'est à dire $\boxed{\text{si } \Delta > 0}$, alors l'ensemble (E) est **soit une hyperbole, soit la réunion de deux droites sécantes** [lorsque $F' = 0$].
- Supposons $A = 0$ [donc $C \neq 0$], c'est à dire $\boxed{\Delta = 0}$, alors l'équation devient $C[Y+\frac{E}{2C}]^2+DX+F' = 0$, on en déduit que :
  - Si $D = 0$: alors l'ensemble (E) est **soit vide, soit la réunion de deux droites parallèles**.
  - Si $D \neq 0$: alors l'ensemble (E) est **une parabole** car on a $[Y+\frac{E}{2C}]^2 = 2p[X+\frac{F'}{D}]$ avec $p = -\frac{D}{2C}$.

V) Exercices

★Exercice 7.1

a) Étudier la courbe paramétrée par : $x(t) = \cos(t)^3$ et $y(t) = \sin(t)^3$ (astroïde).

b) Même question avec la courbe polaire $\rho(\theta) = 1+\cos(\theta)$ (cardioïde).

★Exercice 7.2

Á l'aide d'un paramétrage bien choisi, étudier l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

a) $x^3+2xy+y^3 = 0$ (Folium de Descartes) b) $(x^2+y^2)^3 = (x^2-y^2)^2$

★Exercice 7.3

Un cercle roule sans glisser sur l'axe Ox, on fixe un point M sur ce cercle. Étudier la trajectoire du point M.

★Exercice 7.4

a) Étudier la courbe paramétrée par $x(t) = \cos(t)^2$ et $y(t) = \cos(t)(1 + \sin(t))$.

b) Á tout point $M(t)$ de $C \setminus \{O\}$, on associe le point $M(u)$ de C tel que les droites $(OM(t))$ et $(OM(u))$ soient perpendiculaires. Déterminer (Γ) le lieu des milieux des segments $[M(t), M(u)]$.

★Exercice 7.5

Soit $r > 0$, soit C le cercle de centre O et de rayon r. Pour tout $M \in C$, le cercle de centre M passant par O coupe l'axe Ox en deux points O et A (éventuellement confondus), et coupe l'axe Oy en deux points O et B (éventuellement confondus), on considère H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB).

a) Calculer les coordonnées cartésiennes de H en fonction de celles de M.

b) Donner une représentation polaire du lieu des points H lorsque M décrit C. Étudier ce lieu.

★Exercice 7.6

Étudier les courbes paramétrées par :

a) $x(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$ et $y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$ b) $x(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{t}$ et $y(t) = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{t}$ c) $\rho(\theta) = 1 + \tan(\frac{\theta}{2})$ d) $\rho(\theta) = \frac{\theta+1}{\theta-1}$

★Exercice 7.7

Déterminer la nature de la courbe d'équation cartésienne (dans un repère orthonormé du plan) :

a) $x^2 - 2y^2 + x - 2y = 0$. b) $y^2 + 3x - 4y = 2$. c) $x^2 + xy + y^2 = 1$. d) $x^2 + \sqrt{3}xy + x = 2$.

★Exercice 7.8

Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MI^2 = MA \times MB$.

★Exercice 7.9

Soit (H) une hyperbole équilatère, soient A, B, C trois points distincts sur (H). Montrer que l'orthocentre du triangle (ABC) est sur l'hyperbole.

★Exercice 7.10

a) Étudier la courbe paramétrée par : $x(t) = \frac{1}{t^2-1}$ et $y(t) = \frac{t}{t^2-1}$.

b) Montrer que cette courbe est une hyperbole privée d'un point.

★Exercice 7.11

Soit (E) une ellipse de foyers F et F', soit M un point de (E). Soient P et Q les deux points de (E) tels que F est sur la corde $[M, P]$ et F' sur la corde $[M, Q]$.

a) À l'aide d'un paramètrage polaire, montrer que $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FP} = \frac{1}{F'M} + \frac{1}{F'Q} = \frac{2}{p}$, où p est le paramètre de (E).

b) En déduire que la quantité $\frac{F'M}{F'Q} + \frac{FM}{FP}$ est une constante.