Chapitre 8

Géométrie élémentaire de l'espace

Objectifs

- Rappeler les différents modes de repérage dans l'espace
- Rappeler les notions de produit vectoriel, de produit scalaire et de produit mixte ainsi que leurs applications.
- Étudier les droites, les plans et les sphères de l'espace.

Sommaire

$\mathscr{E}$ désigne l'espace usuel.

I) Les modes de repérage

1) Repère cartésien

DÉFINITION 8.1

*Un repère $\mathscr{R}$ de l'espace est la donnée d'un point O appelé **origine** et de trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ **non coplanaires** appelés **vecteurs de base**, on note $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ la base associée. Les droites passant par O et de vecteurs directeurs respectifs, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont appelés **les axes** du repère et notées (Ox), (Oy) et (Oz).*

THÉORÈME 8.1

*Soit $\overrightarrow{a}$ un vecteur quelconque de l'espace, il existe des réels x, y, z tels que $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$ et **le triplet** (x, y, z) **est unique**. Les réels x, y, z sont appelés **coordonnées** de $\overrightarrow{a}$ dans la base $\mathfrak{B}$.*

Preuve: En effet, cela découle du résultat suivant : si $x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}+z\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$ alors $x=y=z=0$ (par l'absurde : si $x\neq 0$ alors les trois vecteurs de base sont coplanaires). □

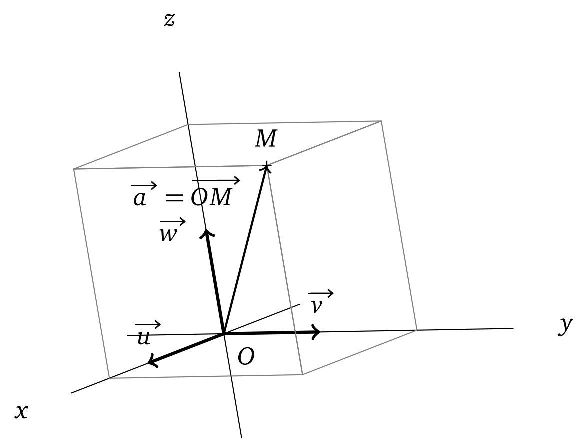


FIGURE 8.1: Coordonnées dans l'espace

Soit M un point de l'espace, les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}$ sont par définition, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$, autrement dit :

$$M(x,y,z) \iff \overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}+z\overrightarrow{w}.$$

Soient $A(x,y,z)$ et $B(x',y',z')$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x'-x,y'-y,z'-z)$ car $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Le choix d'un repère cartésien permet d'identifier l'espace à l'ensemble $\mathbb{R}^3$.

2) Repère orthonormal

On choisit arbitrairement un repère $\mathscr{R}_0=(O,\overrightarrow{u}_0,\overrightarrow{v}_0,\overrightarrow{w}_0)$, on définit alors la notion de distance et d'orthogonalité de la manière suivante :

DÉFINITION 8.2

Soient $\overrightarrow{a}(x,y,z)$ et $\overrightarrow{b}(x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathscr{E}$:
- *La norme du vecteur $\overrightarrow{a}$ est $\|\overrightarrow{a}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. La distance d'un point A à un point B de $\mathscr{E}$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $AB=\|\overrightarrow{AB}\|$.*
- *Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont dits orthogonaux lorsque $\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\|^2=\|\overrightarrow{a}\|^2+\|\overrightarrow{b}\|^2$.*

Une fois ce choix [arbitraire] effectué, on dit que l'espace $\mathscr{E}$ est **euclidien**.

Remarques :
- La définition de l'orthogonalité est cohérente avec le théorème de *Pythagore* du plan.
- Avec la définition de norme dans le repère $\mathscr{R}_0$, on a : $\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\|^2-\|\overrightarrow{a}\|^2-\|\overrightarrow{b}\|^2=2(xx'+yy'+zz')$, la définition d'orthogonalité devient alors $xx'+yy'+zz'=0$.
- Avec cette définition, le repère $\mathscr{R}_0$ est un repère **orthonormal**.

THÉORÈME 8.2

Soit $\mathscr{R}_1 = (O', \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{w}_1)$ un autre repère orthonormal, soit $\overrightarrow{a}$ de coordonnées (x,y,z) dans $\mathscr{R}_0$ et (x_1,y_1,z_1) dans $\mathscr{R}_1$, et $\overrightarrow{b}$ de coordonnées (x',y',z') dans $\mathscr{R}_0$ et (x'_1,y'_1,z'_1) dans $\mathscr{R}_1$, on a :

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2} \text{ et } xx'+yy'+zz' = x_1x'_1+y_1y'_1+z_1z'_1.$$

Preuve: On a $\overrightarrow{u}_1 = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{v}_1 = \alpha'\overrightarrow{u} + \beta'\overrightarrow{v} + \gamma'\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w}_1 = \alpha''\overrightarrow{u} + \beta''\overrightarrow{v} + \gamma''\overrightarrow{w}$ avec $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 = \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2 = 1$ et $\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma' = \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'' = \alpha''\alpha'+\beta''\beta'+\gamma''\gamma' = 0$, on a les relations : $x = \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1$, $y = \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1$ et $z = \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1$, on calcule ensuite $x^2+y^2+z^2$ et $xx'+yy'+zz'$ en remplaçant et en simplifiant grâce aux relations précédentes. □

THÉORÈME 8.3

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ une base de $\mathscr{E}$, il existe une base orthonormale $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ de $\mathscr{E}$ telle que $\overrightarrow{a}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{b}$ dans le plan défini par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Preuve: Cf : méthode de *Schmidt*. □

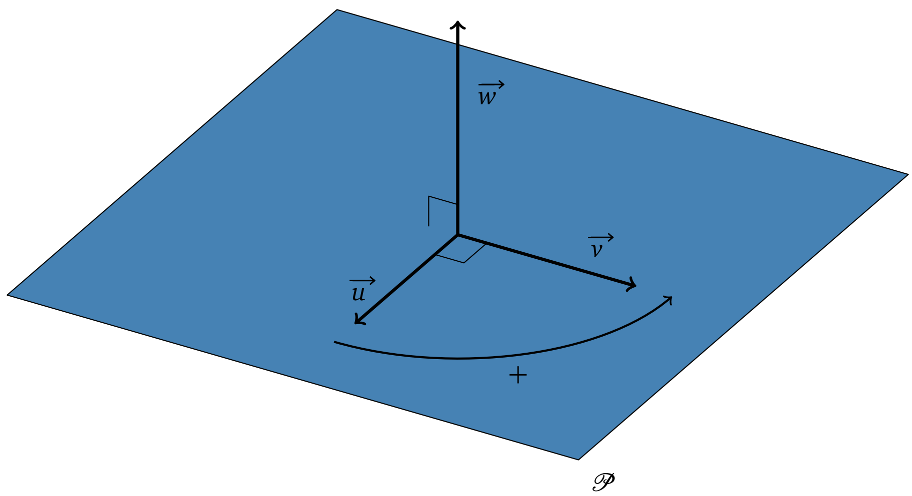
Conséquences :
- Tout plan de $\mathscr{E}$ est euclidien [non orienté], *i.e.* contient des bases orthonormales.
- La norme de $\mathscr{E}$ vérifient les propriétés :
  - $\|\overrightarrow{u}\| = \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ [découle de la définition].
  - $\|\alpha\overrightarrow{u}\| = |\alpha| \cdot \|\overrightarrow{u}\|$ [découle de la définition].
  - $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$ [inégalité triangulaire] : il suffit de se placer dans un plan contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

3) Repère orthonormal direct

La notion d'orientation sera définie ultérieurement. D'une manière imagée on conviendra que le repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est **direct** si **lorsque l'on tourne de $\overrightarrow{u}$ vers $\overrightarrow{v}$ on progresse dans le sens de $\overrightarrow{w}$ [règle du tire-bouchon]**, sinon on dira que $\mathscr{R}$ est orthonormal indirect.

DÉFINITION 8.3 (orientation induite)

Soit $\mathscr{P}$ un plan de $\mathscr{E}$, soit $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormal de $\mathscr{P}$ et soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur unitaire normal à $\mathscr{P}$. On dira que ce repère est orthonormal direct lorsque $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$. On dit que $\mathscr{P}$ est orienté par $\overrightarrow{w}$ [ou que $\mathscr{P}$ a été muni de l'orientation induite par $\overrightarrow{w}$].



THÉORÈME 8.4
Tout plan $\mathscr{P}$ de $\mathscr{E}$ possède exactement deux vecteurs unitaires normaux. De plus ils sont opposés.

Preuve: Soit $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormal de $\mathscr{P}$, on sait qu'il existe $\overrightarrow{w}$ tel que $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est un repère orthonormal de $\mathscr{E}$, on cherche $\overrightarrow{a}(x, y, z)$ [dans ce repère] unitaire tel que $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{v}$, ce qui donne $x = y = 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\overrightarrow{a} = \pm\overrightarrow{w}$. □

On ne définit pas les angles orientés de deux vecteurs dans l'espace, car un plan contenant ces deux vecteurs n'est pas intrinsèquement orienté [il faudrait faire un choix d'un vecteur normal unitaire pour chaque plan de $\mathscr{E}$!], par contre on peut définir l'angle **non orienté** [ou écart angulaire] de la manière suivante, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls :

- Si $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ avec $\lambda > 0$ on pose $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.
- Si $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ avec $\lambda < 0$ on pose $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires : soit $(O, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ un repère orthonormal d'un plan $\mathscr{P}$ contenant ces deux vecteurs, on a $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$, on pose alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left|\mathrm{Arg}\left(\frac{x'+iy'}{x+iy}\right)\right|$. On peut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ [ni de $\mathscr{P}$ d'ailleurs].

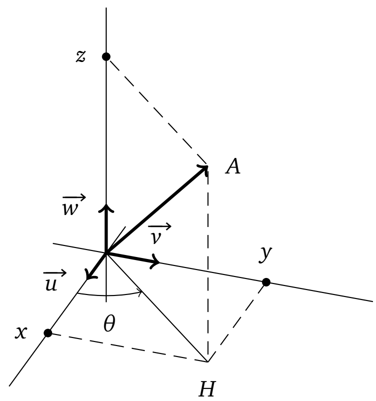
L'angle non orienté de deux vecteurs est un élément de $[0; \pi]$.

4) Coordonnées cylindriques et coordonnées sphériques

Coordonnées cylindriques :

Soit $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ un repère orthonormal direct et soit $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$. Le plan (xOy) est orienté par $\overrightarrow{w}$ et H désigne le projeté orthogonal de M sur xOy : H a des coordonnées polaires (r, θ) dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ c'est à dire $\overrightarrow{OH} = r\overrightarrow{u}(\theta) r\cos(\theta)\overrightarrow{u} + r\sin(\theta)\overrightarrow{v}$, d'où

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r\cos(\theta)\overrightarrow{u} + r\sin(\theta)\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$$



On dit que (r, θ, z) sont des **coordonnées cylindriques** de M,

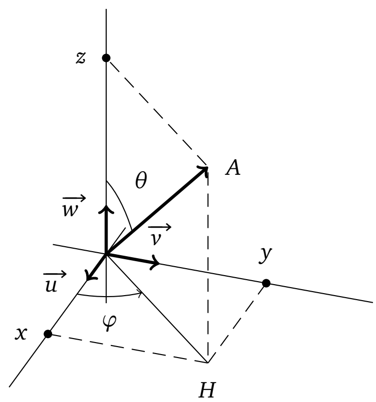
de plus on a $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$.

Coordonnées sphériques :

- Soit θ l'angle non orienté $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OM})$, $\theta \in [0; \pi]$, c'est la **colatitude** de M [la latitude étant $\frac{\pi}{2} - \theta$]
- Soit φ l'angle **orienté** $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OH})$, c'est la **longitude** de M.
- Soit $r = OM$.

$\overrightarrow{OH} = OH\cos(\varphi)\overrightarrow{u} + OH\sin(\varphi)\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{HM} = r\cos(\theta)\overrightarrow{w}$ et $OH = r\sin(\theta)$, donc :

$$\overrightarrow{OM} = r\sin(\theta)\cos(\varphi)\overrightarrow{u} + r\sin(\theta)\sin(\varphi)\overrightarrow{v} + r\cos(\theta)\overrightarrow{w}$$



on dit que (r, θ, φ) sont des **coordonnées sphériques** de M.

De plus on a $\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$.

Les coordonnées cylindriques et sphériques ne sont pas uniques.

II) Produit scalaire, produit vectoriel

1) Produit scalaire

DÉFINITION 8.4

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{E}$, on pose $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]$.

Remarques :
- On a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$ et $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ [symétrie].
- En se plaçant dans un plan $\mathscr{P}$ contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, où $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ désigne l'angle non orienté (orienter le plan ne changerait rien).
- On déduit que ce qui précède : $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$ (inégalité de *Cauchy-Schwarz*).
  L'égalité ayant lieu si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.
- On a $\boxed{\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}$.

THÉORÈME 8.5 (Applications)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs :
- *$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux ssi $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$.*
- *Si $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ est une base orthonormale de $\mathscr{E}$, alors les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans cette base sont :* $\begin{cases} x = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{a} \\ y = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{b} \\ z = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{c} \end{cases}$.

Preuve: Le premier résultat découle du théorème précédent. $2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{a} = \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{a}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{a}\|^2 = (x+1)^2 + y^2 + z^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 2x$, par conséquent $x = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{a}$ (idem pour y et z). □

THÉORÈME 8.6 (Expression dans une base orthonormale)

Si $\mathscr{R} = (O,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ est un repère orthonormal, si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (x,y,z) et $\overrightarrow{v}$ pour coordonnées (x',y',z'), alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Preuve: On sait que $2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2 - x^2 - y^2 - z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 2(xx' + yy' + zz')$ ce qui entraîne le résultat. □

THÉORÈME 8.7 (Bilinéarité)

Le produit scalaire est bilinéaire : soient $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors :
- *$[\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}]\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$ et $[\lambda\overrightarrow{u}]\cdot\overrightarrow{w} = \lambda[\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}]$.*
- *$\overrightarrow{u}\cdot[\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}] = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}\cdot[\lambda\overrightarrow{v}] = \lambda[\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}]$.*

Preuve: Découle du théorème précédent. □

2) Produit vectoriel

DÉFINITION 8.5

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et $\mathscr{P}$ un plan contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on oriente $\mathscr{P}$ en choisissant un vecteur unitaire normal $\overrightarrow{w}$ et on pose : $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]\overrightarrow{w} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|\ \sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}$.

Si on oriente le plan avec $-\overrightarrow{w}$ alors le produit mixte change de signe et donc le résultat ne change pas.

Il découle de cette définition :
- $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ssi $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
- $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
- $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ [antisymétrie].

– $\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|\cdot|\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})|$ et donc $\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)^2$.
– Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires alors $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}')\wedge\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}'\wedge\overrightarrow{v}$.
– Si $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $(\lambda\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\wedge(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$.

Cas particulier : si $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est orthonormale directe, alors $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}$.

Soit $\mathscr{R}=(O,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ une base orthonormale directe, soient $\overrightarrow{u}(x,y,z)$ et $\overrightarrow{v}(x',y',z')$ deux vecteurs quelconques, il est facile de vérifier que le vecteur $\overrightarrow{k}(yz'-y'z,-xz'+x'z,xy'-x'y)$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et que $\|\overrightarrow{k}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{v}\|^2-\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)^2 = \|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|^2$, on en déduit que si $\overrightarrow{w}$ est un vecteur unitaire normal au plan $\mathscr{P}$ contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, alors on a $\overrightarrow{k}=\pm\|\overrightarrow{k}\|\cdot\overrightarrow{w}$ et donc $\overrightarrow{k}=\pm\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, nous admettrons [cela découle de la définition de l'orientation que nous verrons ultérieurement] que ces deux vecteurs ont le même sens et donc $\overrightarrow{k}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, c'est à dire :

$$\boxed{\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = (yz'-y'z)\overrightarrow{a}+(-xz'+x'z)\overrightarrow{b}+(xy'-x'y)\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z'\end{vmatrix}\overrightarrow{a} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z'\end{vmatrix}\overrightarrow{b} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y'\end{vmatrix}\overrightarrow{c}}.$$

La formule ci-dessus reste vraie si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Il est facile de vérifier à partir de cette expression le résultat suivant :

THÉORÈME 8.8

Le produit vectoriel est bilinéaire :

$$(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w})+\mu(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}) \text{ et } \overrightarrow{u}\wedge(\lambda\overrightarrow{v}+\mu\overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})+\mu(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}).$$

Le produit vectoriel est interne dans $\mathscr{E}$ mais il n'admet pas d'élément neutre. Car s'il y avait un élément neutre $\overrightarrow{e}$, on devrait avoir $\overrightarrow{e}\wedge\overrightarrow{e}=\overrightarrow{0}=\overrightarrow{e}$, et pour tout $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{e}=\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$: absurde.

On peut remarquer également que le produit vectoriel n'est pas associatif, plus précisément :

THÉORÈME 8.9 (Formule du double produit vectoriel)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de $\mathscr{E}$: $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}).\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.

Preuve: On choisit $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ une b.o.n telle que $\overrightarrow{u}=\alpha\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{v}=\beta\overrightarrow{a}+\gamma\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{w}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c}$, on a alors : $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}=y\beta\overrightarrow{c}-z\beta\overrightarrow{b}-x\gamma\overrightarrow{c}+z\gamma\overrightarrow{a}$ d'où $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}) = -y\alpha\beta\overrightarrow{b}-z\alpha\beta\overrightarrow{c}+x\alpha\gamma\overrightarrow{b} = [x\alpha\gamma-y\alpha\beta]-z\alpha\beta\overrightarrow{c}$. D'autre part, $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{w})=x\alpha$ et $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})=\alpha\beta$, donc on a $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{w})\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})\overrightarrow{w} = x\alpha\beta\overrightarrow{a}+x\alpha\gamma\overrightarrow{b}-x\alpha\beta\overrightarrow{a}-\alpha\beta y\overrightarrow{b}-\alpha\beta z\overrightarrow{c}$ ce qui donne $[x\alpha\gamma-y\beta\alpha]\overrightarrow{b}-z\alpha\beta\overrightarrow{c}$, ce qui donne l'égalité. □

On déduit de l'antisymétrie que : $(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}).\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}).\overrightarrow{u}$.

3) Produit mixte

DÉFINITION 8.6

*L'espace $\mathscr{E}$ étant orienté, on appelle **produit mixte** de trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, le nombre :*

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}.$$

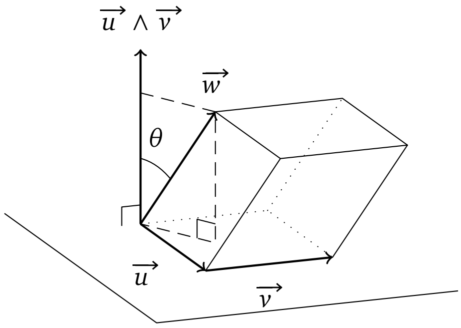
Cette définition dépend de l'orientation choisie, à cause du produit vectoriel.

Lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires on a $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ et donc $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=0$. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires alors $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=0$ ssi $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ ce qui revient à dire que $\overrightarrow{w}$ est dans un plan contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On peut affirmer :

$\boxed{\text{Le produit mixte de trois vecteurs est nul ssi ils sont coplanaires.}}$.

Interprétation géométrique : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ *est le volume algébrique du parallélépipède construit sur* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$.

En effet, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, or $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos(\theta)$ et $\|\vec{w}\| \cos(\theta)$ représente la hauteur algébrique du parallélépipède, ce qui entraîne le résultat.



THÉORÈME 8.10

Le produit mixte est trilinéaire, c'est à dire :

$$[\lambda\vec{u} + \mu\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] = \lambda[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \mu[\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}', \vec{w}] = \lambda[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \mu[\vec{u}, \vec{v}', \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w} + \mu\vec{w}'] = \lambda[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \mu[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}'].$$

Preuve: Ceci découle de la définition avec la bilinéarité du produit vectoriel et du produit scalaire. □

THÉORÈME 8.11

Soit $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *une base orthonormale directe et soient* $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(x', y', z')$ *et* $\vec{w}(x'', y'', z'')$, *alors :*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z.$$

Preuve: On sait que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y)$ et donc $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = x''yz' - x''y'z + y''zx' - y''z'x + z''xy' - z''x'y$. □

Notation : On pose $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x''yz' - x''y'z + y''zx' - y''z'x + z''xy' - z''x'y$, pour obtenir cette expression on ajoute tous les produits de 3 termes obtenus en en prenant un par ligne et un par colonne avec un signe + dans le sens de la diagonale principale et un signe − sinon (règle de *Sarrus*).

THÉORÈME 8.12

Le produit mixte est antisymétrique, c'est à dire :

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}],\ [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}],\ [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$$

Autrement dit, permuter deux vecteurs change le signe du produit mixte.

Preuve: Cela découle du théorème précédent. □

Il en découle en particulier que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$.

Extension : Si $\mathfrak{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base **quelconque** de $\mathscr{E}$, et si on a trois vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(x', y', z')$ et $\vec{w}(x'', y'', z'')$ alors on pose :

$$\det_{\mathfrak{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x''yz' - x''y'z + y''zx' - y''z'x + z''xy' - z''x'y,$$

c'est le déterminant dans la base $\mathfrak{B}$ des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Il est facile de vérifier avec la trilinéarité et l'antisymétrie du produit mixte, que

$$\boxed{\det_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \frac{[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]}{[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}]}}$$

le déterminant apprait donc comme le rapport de deux volumes algébriques. On déduit de cette relation que l'application déterminant dans une base est trilinéaire, antisymétrique et que $\det_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = 0$ ssi les trois vecteurs sont coplanaires [ce qui est bien utile lorsque l'on cherche une équation de plan dans un repère cartésien qui n'est pas orthonormal !].

Le produit mixte apparaît aussi comme le déterminant dans une base orthonormale directe [et le résultat ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie]. On remarquera également que si $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$, alors $\alpha = \det_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$, $\beta = \det_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{a},\overrightarrow{u},\overrightarrow{c})$ et $\gamma = \det_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{u})$.

III) Droites, plans et sphères

1) Le cas des plans

Soit $\mathscr{R} = (O,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ un repère de $\mathscr{E}$.

• Plan $\mathscr{P}$ défini par la donnée d'un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\overrightarrow{w}(\alpha',\beta',\gamma')$:

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in\mathscr{P} &\iff (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \text{ sont coplanaires}\\
&\iff \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}\\
&\iff \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_A + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_A + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases} [\textbf{représentation paramétrique} \text{ de } \mathscr{P}]\\
&\iff \det_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0\\
&\iff \begin{vmatrix} x-x_A & \alpha & \alpha' \\ y-y_A & \beta & \beta' \\ z-z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0\\
&\iff [\beta\gamma'-\beta'\gamma](x-x_A) - [\alpha\gamma'-\alpha'\gamma](y-y_A) + [\alpha\beta'-\alpha'\beta](z-z_A) = 0
\end{aligned}$$

On obtient ainsi une **équation cartésienne** de $\mathscr{P}$, elle peut se mettre sous la forme $ax+by+cz = d$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Si on avait $a = b = c = 0$ alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ seraient coplanaires avec tous les vecteurs de $\mathscr{E}$, et donc ils seraient colinéaires ce qui est exclu.

Réciproquement l'ensemble $I = \{M(x,y,z) \ / \ ax+by+cz = d\}$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est un plan, effet supposons par exemple $a \neq 0$ alors l'équation équivaut $x = \frac{d}{a} - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z$, on obtient ainsi une représentation paramétrique de I qui est $\begin{cases} x = \dfrac{d}{a} + \lambda[-\dfrac{b}{a}] + \mu[-\dfrac{c}{a}] \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$, c'est le plan passant par $A(\frac{d}{a},0,0)$ et de base $\overrightarrow{u}(-\frac{b}{a},1,0)$ et $\overrightarrow{v}(-\frac{c}{a},0,1)$.

- *Si $ax+by+cz = d$ est une équation d'un plan $\mathscr{P}$, alors l'ensemble des vecteurs de ce plan admet comme équation $ax+by+cz = 0$.*
- *Si $\mathscr{P}$ admet comme équation $ax+by+cz = d$ et $\mathscr{P}'$ admet comme équation $kax+kby+kcz = d'$ avec $k \neq 0$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus si $d' = kd$ et strictement parallèles sinon.*

• Plan $\mathscr{P}$ défini par trois points non alignés $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ et $C(x_C, y_C, z_C)$: les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires et forment donc une base de $\mathscr{P}$, on est ainsi ramené au cas précédent.

• Plan $\mathscr{P}$ défini par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$: le repère $\mathscr{R}$ est supposé **orthonormal**, on peut écrire alors :

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(x - y_A) + c(z - z_A) = 0. \end{aligned}$$

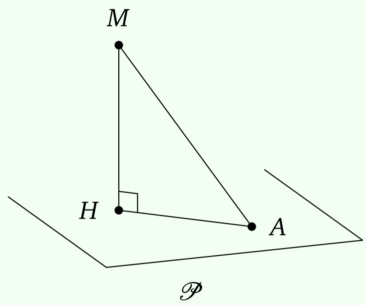
On trouve ainsi une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

Lorsque le repère est orthonormal, les coordonnées d'un vecteur normal au plan se lisent sur l'équation cartésienne du plan. Si on connaît $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base du plan alors on peut prendre $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ comme vecteur normal.

Définition 8.7 (Distance d'un point à un plan)

Soit $\mathscr{P}$ un plan, $M \in \mathscr{E}$, H son projeté orthogonal sur $\mathscr{P}$ et soit $A \in \mathscr{P}$, alors $AM^2 = AH^2 + HM^2$, par conséquent la distance AM est minimale lorsque $A = H$ auquel on a $AM = HM$, cette distance est appelée ***distance de** M **à** $\mathscr{P}$ et notée :*

$$\mathrm{d}(M, \mathscr{P}) = HM.$$



Calcul de $\mathrm{d}(M, \mathscr{P})$: Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal au plan et A un point du plan, on a $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{n}$, d'où $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{n} = \pm HM \|\overrightarrow{n}\|$ et donc :

$$\boxed{\mathrm{d}(M, \mathscr{P}) = HM = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}}.$$

Si $\mathscr{P}$ est donné par une équation cartésienne $ax + by + cz = d$ dans un repère orthonormal, alors on peut prendre $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ et on a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = ax + by + cz - d$ car $A \in \mathscr{P}$, par conséquent on a :

$$\mathrm{d}(M, \mathscr{P}) = HM = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Si $\mathscr{P}$ est donné par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, alors on peut prendre $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, on a alors $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}]$ d'où :

$$\mathrm{d}(M, \mathscr{P}) = HM = \frac{\left|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}]\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}.$$

2) Le cas des droites

Soit $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ un repère de $\mathscr{E}$.

• Droite $\mathfrak{D}$ définie par la donnée d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathfrak{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} [\textbf{représentation paramétrique} \text{ de } \mathfrak{D}] \end{aligned}$$

• Droite définie comme l'intersection de deux plans non parallèles : Soient $\mathscr{P}$ d'équation $ax+by+cz = d$ et $\mathscr{P}'$ d'équation $a'x + b'y + c'z = d'$ non parallèles, c'est à dire $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ et $\overrightarrow{u}'(a',b',c')$ sont non colinéaires, soit $\mathfrak{D} = \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ alors :

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathfrak{D} &\iff M \in \mathscr{P} \text{ et } M \in \mathscr{P}' \\ &\iff \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} [\textbf{représentation cartésienne} \text{ de } \mathfrak{D}] \end{aligned}$$

Pour trouver les points de cette droite, on résout le système en prenant une des inconnues comme paramètre.

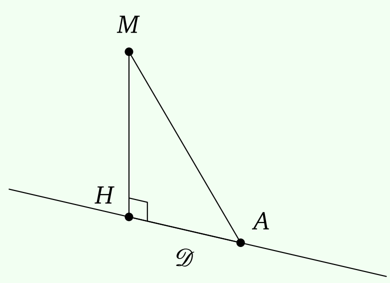
Exemple: Soit $\mathfrak{D}$ d'équations $\begin{cases} x+2y-3z = -1 \\ 2x - y + z = -2 \end{cases}$, ce système équivaut à $\begin{cases} x+2y = -1+3z \\ -5y = -7z \end{cases}$, ce qui donne comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -1 + t\dfrac{1}{5} \\ y = t\dfrac{7}{5} \\ z = t \end{cases}$, donc $\mathfrak{D}$ est la droite passant par $A(-1,0,0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, 1)$ ou encore $\overrightarrow{v}(1,7,5)$.

- *L'ensemble des vecteurs de $\mathfrak{D}$ admet comme équations* $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$.
- *À partir d'une représentation paramétrique de $\mathfrak{D}$ on peut trouver une représentation cartésienne en éliminant le paramètre.*

DÉFINITION 8.8 (Distance d'un point à une droite)

Soit $\mathfrak{D}$ une droite, $M \in \mathscr{E}$, H son projeté orthogonal sur $\mathfrak{D}$ et soit $A \in \mathfrak{D}$, alors $AM^2 = AH^2 + HM^2$, par conséquent la distance AM est minimale lorsque $A = H$ auquel on a $AM = HM$, cette distance est appelée ***distance de** M **à** $\mathfrak{D}$* *et notée :*

$$\mathrm{d}(M, \mathfrak{D}) = HM.$$



Calcul de $\mathrm{d}(M,\mathfrak{D})$: HM est la hauteur du parallèlogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$:

$$\boxed{\mathrm{d}(M,\mathfrak{D}) = HM = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}}.$$

THÉORÈME 8.13 (perpendiculaire commune à deux droites)

Soient $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ deux droites de $\mathscr{E}$, il existe une droite $\mathfrak{D}''$ perpendiculaire à $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ et qui rencontre $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$. Cette droite est unique lorsque $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ sont non parallèles.

Preuve: Soit $\mathfrak{D}$ passant par A, dirigée par $\overrightarrow{u}$ et soit $\mathfrak{D}'$ passant par A', dirigée par $\overrightarrow{u}'$.

∗ si elles sont parallèles alors elles sont dans un même plan $\mathscr{P}$ et il est clair que toute perpendiculaire à $\mathfrak{D}$ dans le plan est aussi une perpendiculaire à $\mathfrak{D}'$.

∗ si elles sont sécantes en un point I : alors elles sont dans un même plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathfrak{D}''$ passant par I et dirigée par $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'$ est une perpendiculaire commune. Tout perpendiculaire commune est dirigée par $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'$ et donc coupe le plan en un seul point, or elle doit couper $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$, donc elle coupe $\mathscr{P}$ en I, il n'y a que la droite $\mathfrak{D}''$.

∗ si elles sont non coplanaires : toute perpendiculaire commune est dirigée par $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'$. Soit $\mathscr{P}$ le plan contenant $\mathfrak{D}$ et de base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n})$, ce plan rencontre $\mathfrak{D}'$ en un point H' car $\mathfrak{D}'$ n'est pas parallèle à $\mathscr{P}$. La droite $\mathfrak{D}''$ passant par H' et dirigée par $\overrightarrow{n}$ rencontre $\mathfrak{D}$ en un point H car elles sont coplanaires non parallèles, donc $\mathfrak{D}''$ est une perpendiculaire commune. Une perpendiculaire commune doit être dans $\mathscr{P}$ et avoir un point commun avec $\mathfrak{D}'$ elle passe donc nécessairement par H', il n'y a qu'une solution : $\mathfrak{D}''$. □

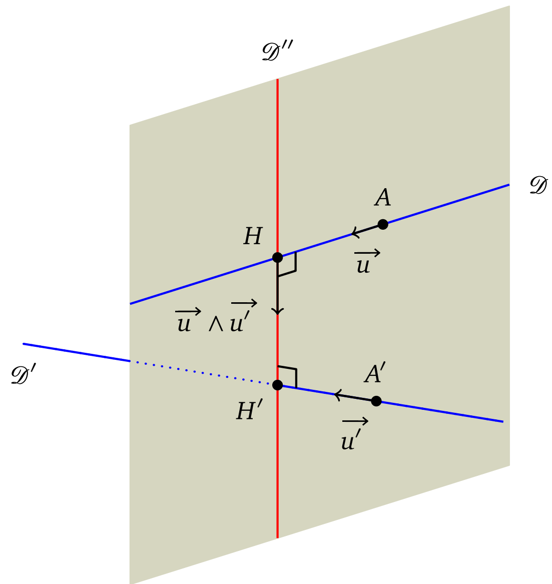


FIGURE 8.2: Perpendiculaire commune

Soit A un point de $\mathfrak{D}$, A′ un point de $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ une perpendiculaire commune avec $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}'' = \{H\}$ et $\mathfrak{D}' \cap \mathfrak{D}'' = \{H'\}$, alors :

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{AA'}\|^2 &= \|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'}\|^2 \\
&= [HH']^2 + \|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'A'}\|^2 + 2\overrightarrow{HH'} \cdot [\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'A'}] \\
&= [HH']^2 + \|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'A'}\|^2 \\
&\geqslant [HH']^2
\end{aligned}$$

On voit ainsi que la distance AA' est minimale lorsque $\|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H'A'}\|^2 = 0$ c'est ce qui se produit lorsque $A = H$ et $A' = H'$, cette distance minimale vaut alors HH'.

DÉFINITION 8.9 (Distance de deux droites)

*La distance minimale HH' est appelée **distance de $\mathfrak{D}$ à $\mathfrak{D}'$** et notée :* $\mathrm{d}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') = HH'$.

Calcul de $\mathrm{d}(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$:

$*$ Si les deux droites sont strictement parallèles on est ramené à calculer la distance d'un point à une droite, ce qui donne $\boxed{\mathrm{d}(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')=\mathrm{d}(A',\mathfrak{D})=\dfrac{\|\overrightarrow{AA'}\wedge\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}}$.

$*$ Si les deux droites sont sécantes, alors $H=H'$ et donc $\boxed{\mathrm{d}(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')=0}$.

$*$ Si les deux droites sont non coplanaires : soit $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'$, alors $\overrightarrow{HH'}=\dfrac{\overrightarrow{HH'}\cdot\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2}.\overrightarrow{n}$, or $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}+\overrightarrow{HH'}\cdot\overrightarrow{n}+\overrightarrow{H'A'}\cdot\overrightarrow{n}=\overrightarrow{HH'}\cdot\overrightarrow{n}$, par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{d}(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')=\|\overrightarrow{HH'}\|=\frac{\left|\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}=\frac{\left|[\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}']\right|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'\|}}.$$

3) Sphères

Le repère $\mathscr{R}=(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est supposé orthonormal, la sphère de centre $A(x_A,y_A,z_A)$ et de rayon $R>0$ est par définition $\mathscr{S}(A,R)=\{M\in\mathscr{E}\ /\ AM=R\}$, par conséquent :

$$M(x,y,z)\in\mathscr{S}\iff AM^2=R^2\iff\boxed{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2}.$$

C'est une **équation cartésienne** de $\mathscr{S}$.

Intersection droite-sphère :

Soit $\mathfrak{D}$ une droite dirigée par $\overrightarrow{a}$ [unitaire], prenons comme repère $\mathscr{R}'=(A,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ de telle sorte que $\mathfrak{D}$ soit dans le plan $(A,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ alors l'équation de $\mathscr{S}$ est $x^2+y^2+z^2=R^2$ et un système d'équations de $\mathfrak{D}$ est $\begin{cases}y=d\\z=0\end{cases}$ avec $|d|=\mathrm{d}(A,\mathfrak{D})$. Un point $M(x,d,0)$ est sur la sphère ssi $x^2=R^2-d^2$, d'où la discussion :

- Si $\mathrm{d}(A,\mathfrak{D})>R$: alors $\mathscr{S}\cap\mathfrak{D}=\emptyset$.
- Si $\mathrm{d}(A,\mathfrak{D})=R$: alors il y a un seul point commun $H(0,d,0)$, c'est le projeté orthogonal de A sur $\mathfrak{D}$, dans ce cas la droite $\mathfrak{D}$ est dite **tangente** à la sphère (et elle est perpendiculaire au rayon (AH)).
- Si $\mathrm{d}(A,\mathfrak{D})<R$: alors il y a deux points communs $I(\sqrt{R^2-d^2},d,0)$ et $J(-\sqrt{R^2-d^2},d,0)$.

Intersection plan-sphère :

Soit $\mathscr{P}$ un plan muni d'une base orthonormale $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$, prenons comme repère $\mathscr{R}'=(A,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ avec $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}$, alors une équation de $\mathscr{S}$ est $x^2+y^2+z^2=R^2$ et une équation de $\mathscr{P}$ est $z=d$ avec $|d|=\mathrm{d}(A,\mathscr{P})$, un point $M(x,y,d)$ appartient à $\mathscr{S}$ ssi $x^2+y^2=R^2-d^2$, d'où la discussion :

- Si $\mathrm{d}(A,\mathscr{P})>R$: alors $\mathscr{S}\cap\mathscr{P}=\emptyset$.
- Si $\mathrm{d}(A,\mathscr{P})=R$: alors il y a un seul point commun $H(0,0,d)$, c'est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$, dans ce cas le plan $\mathscr{P}$ est dit **tangent** à la sphère (et il est perpendiculaire au rayon (AH)).
- Si $\mathrm{d}(A,\mathfrak{D})<R$: alors $\mathscr{S}\cap\mathscr{P}=\{M(x,y,d)\ /\ x^2+y^2=R^2-d^2\}$ dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère $(H,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ avec $H(0,0,d)$ le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$, c'est l'équation du cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-d^2}$ car $\overrightarrow{HM}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$.

Le plan tangent à $\mathscr{S}$ au point $T_0\in\mathscr{S}$ est défini par $\overrightarrow{T_0M}\cdot\overrightarrow{AT_0}=0$.

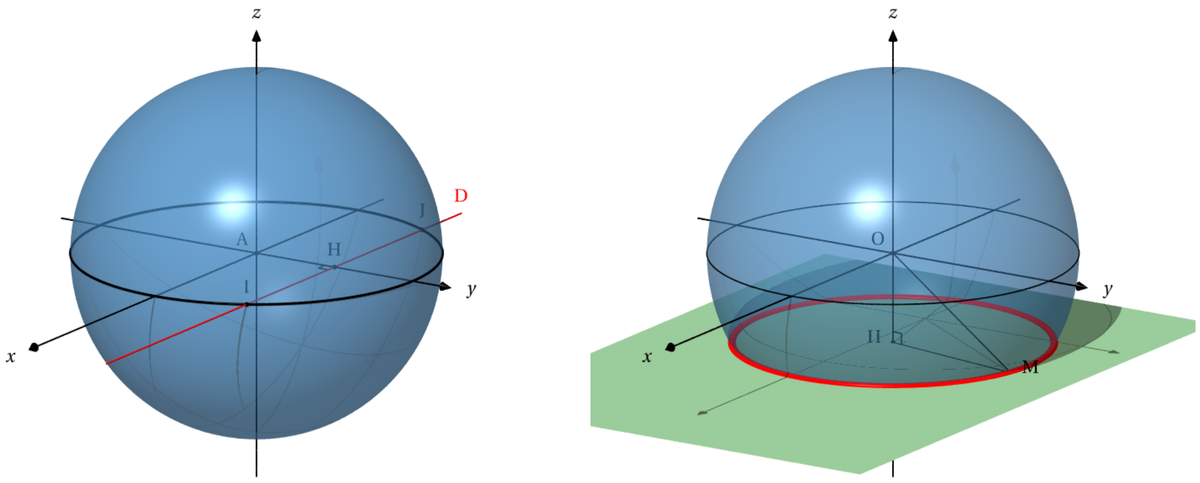


FIGURE 8.3: Intersection droite-sphère et intersection plan-sphère

Intersection sphère-sphère : montrer que l'étude de l'intersection entre deux sphères, se ramène à l'étude précédente, c'est à dire l'intersection entre un plan et une sphère.

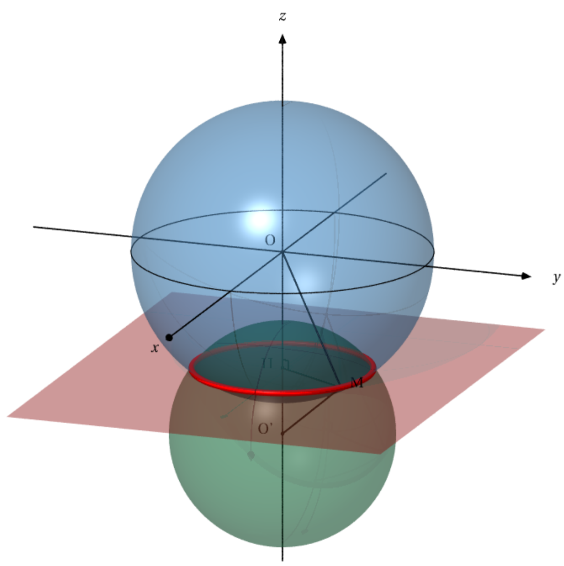


FIGURE 8.4: Intersection sphère-sphère

IV) Exercices

★Exercice 8.1

Soit $\mathfrak{R}$ un repère de $\mathscr{E}$, établir une équation du plan $\mathscr{P}$ dans les cas suivants :

a) Passant par $A(-1,2,3)$ et de base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}(1,1,1)$ et $\overrightarrow{v}(0,1,4)$.

b) Contenant la droite $\mathfrak{D}$: $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y+z & = & 1 \\ x-4y+z & = & 2 \end{array}\right.$, et tel que $\mathfrak{D}'$: $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ 2x-y+z & = & 2 \end{array}\right.$ soit parallèle à $\mathscr{P}$.

c) Passant par les points $A(-1,2,3)$, $B(2,-1,4)$ et $C(2,1,-1)$.

d) Passant par $A(-1,2,3)$ et parallèle au plan d'équation $3x+y-z=0$.

e) Passant par $A(-1,2,3)$ et contenant la droite $\mathfrak{D}$: $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z+2 & = & 0 \\ x-y+z-4 & = & 0 \end{array}\right.$.

★Exercice 8.2

Soit $\mathfrak{R}$ un repère de $\mathscr{E}$, établir un système d'équations de la droite $\mathfrak{D}$ dans les cas suivants :

a) Passant par $A(-1,2,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,2,-1)$.

b) Passant par $A(-1,2,3)$ et $B(2,-1,4)$.

c) Passant par $A(-1,2,3)$ et parallèle à la droite $\mathfrak{D}' : \left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z+2 &=& 0 \\ x-y+z-4 &=& 0 \end{array}\right.$.

★Exercice 8.3

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère, soient $\mathfrak{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& az+p \\ y &=& bz+q \end{array}\right.$ et $\mathfrak{D}' : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a'z+p' \\ y &=& b'z+q' \end{array}\right.$ deux droites. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ soient coplanaires.

★Exercice 8.4

$\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé, soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+y-z=1$ et $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(1,0,2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(-1,1,2)$.

a) Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$. Même question avec la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

b) Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $\mathscr{D}$. Même question avec la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{D}$.

★Exercice 8.5

$(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ est un repère orthonormé direct, dans les cas suivants, on demande une équation du plan $\mathscr{P}$:

a) passant par $A(1,1,1)$ et orthogonal à $\overrightarrow{u}(3,-1,2)$.

b) passant par $A(2,-1,1)$ et orthogonal à $\mathfrak{D} : \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z &=& 1 \\ 3x+y+2z &=& 2 \end{array}\right.$.

★Exercice 8.6

Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul et $A,B \in \mathscr{E}$ deux points distincts.

a) Démontrer que l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{n}=0$ est un plan, préciser.

b) Démontrer que l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est une sphère, préciser. Plus généralement, que dire de l'ensemble $\left\{M \in \mathscr{E} \ / \ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k\right\}$ où k est une constante ?

c) Démontrer que l'ensemble des points M vérifiant $MA=MB$ est un plan, préciser.

d) Démontrer que l'ensemble des points M vérifiant $MA=k.MB$ où $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, est une sphère.

★Exercice 8.7

$(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ est un repère orthonormé :

a) Soit $\mathfrak{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 1 \\ 3(x+z) &=& 2 \end{array}\right.$, soit $M(0,1,0)$, calculer $d(M,\mathfrak{D})$.

b) Soit $\mathscr{P} : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+\lambda+\mu \\ y &=& -1+\lambda-\mu \\ z &=& 1+2\lambda+3\mu \end{array}\right.$, soit $M(1,0,-2)$, calculer $d(M,\mathscr{P})$.

★Exercice 8.8

Montrer que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ de l'espace, on a :

$$(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w}+(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})\wedge\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}.$$

★Exercice 8.9

Montrer que pour tous vecteurs $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ de l'espace on a :

a) $\left(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{d}\right)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}\\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}\end{vmatrix}$.

b) $\left(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\right)\wedge\left(\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{d}\right)=[\overrightarrow{a},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}]\overrightarrow{b}-[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}]\overrightarrow{a}=[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d}]\overrightarrow{c}-[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}]\overrightarrow{d}$.

★Exercice 8.10

Soient $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.

a) Montrer que $[\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u}]=[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]^2$.

b) On suppose $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ non coplanaires, soient $\overrightarrow{u}'=\dfrac{\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}}{[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]}$, $\overrightarrow{v}'=\dfrac{\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u}}{[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]}$ et $\overrightarrow{w}'=\dfrac{\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}}{[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]}$.

i) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{u}'\cdot\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}'\cdot\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}'\cdot\overrightarrow{w}$ [idem avec $\overrightarrow{v}'$ et $\overrightarrow{w}'$].

ii) Montrer que $[\overrightarrow{u}',\overrightarrow{v}',\overrightarrow{w}']=\dfrac{1}{[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]}$.

★Exercice 8.11

Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires dans l'espace. On admet que le volume algébrique du tétraèdre $ABCD$ (noté $V(ABCD)$) est égal à un sixième du volume algébrique du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$.

a) Soit G le centre de gravité du tétraèdre $ABCD$, montrer que $V(GABC)=-V(GBCD)=V(GCDA)=-V(GDAB)$.

b) Montrer que $V(ABCD)=-4V(GABC)$.

★Exercice 8.12

Soient $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ deux droites de l'espace passant respectivement par $A(1,-1,0)$ et $A'(2,1,-1)$ et dirigées respectivement par $\overrightarrow{u}(-1,0,2)$ et $\overrightarrow{u}'(1,-1,-1)$, dans un repère orthonormé direct.

a) Montrer que ces deux droites sont non coplanaires.

b) Déterminer leur perpendiculaire commune.

c) Quelle est la distance entre ces deux droites ?

★Exercice 8.13

Soient $\mathfrak{D}_1,\mathfrak{D}_2,\mathfrak{D}_3$ trois droites du plan (muni d'un repère) d'équations respectives : $a_ix+b_iy=c_i$ avec $i\in[\![1..3]\!]$. Montrer que ces trois droites sont concourrantes ou 2 à 2 parallèles ssi : $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0$. On pourra considérer l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé (direct) et les trois vecteurs $\overrightarrow{u}(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{v}(b_1,b_2,b_3)$ et $\overrightarrow{w}(c_1,c_2,c_3)$.