Chapitre 14

Espaces vectoriels

Objectifs

- Rappeler la définition d'espace vectoriel et les exemples de référence.
- Définir la notion d'application linéaire, le vocabulaire lié à cette notion et les propriétés.
- Définir la notion de sous-espace vectoriel, la notion d'équation linéaire, la notion de sous-espace engendré par une famille de vecteurs.
- Définir et étudier la somme de deux sous-espaces vectoriels.
- Étudier deux exemples d'endomorphismes particulièrement importants : les projections et les symétries.

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I) Rappels

1) Définition

DÉFINITION 14.1

Soit E un ensemble non vide, on dit que E est un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel (ou $\mathbb{K}$-e.v.) lorsque E possède une addition et un produit par les scalaires (loi de composition externe, notée « . », c'est une application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$), avec les propriétés suivantes :

- *$(E,+)$ est un groupe abélien (l'élément neutre est noté 0_E ou $\overrightarrow{0_E}$ et appelé* **vecteur nul** *de E).*
- *La loi . (ou produit par les scalaires) doit vérifier : $\forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \forall\ x,y\in E$:*
  - $1.x = x$

- $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
- $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
- $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$

*Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$ - e.v., les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **les scalaires** et les éléments de E sont appelés **vecteurs** (parfois notés avec une flèche).*

2) Exemples de référence

Exemples:
- Un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-e.v..
- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-e.v., $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Q}$-e.v., $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. Plus généralement si $\mathbb{K}$ est corps inclus dans un autre corps $\mathbb{L}$, alors $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-e.v..
- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni des opérations suivantes :

$$(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n) \text{ et } \lambda.(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n),$$

  est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul est le n-uplet : $(0,\ldots,0)$.
- Si I est un ensemble non vide, alors l'ensemble des applications de I vers $\mathbb{K}$: $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$, pour les opérations usuelles (addition de deux fonctions et produit par un scalaire) est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul étant l'application nulle. En particulier $(\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K}),+,.)$ sont des $\mathbb{K}$-e.v., ainsi que l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-e.v., l'ensemble des applications de I vers E : $\mathscr{F}(I,E)$, pour les opérations usuelles sur les fonctions, est un $\mathbb{K}$-e.v..
- Espace produit : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., on définit sur $E\times F$ l'addition : $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$, et un produit par les scalaires : $\lambda.(x,y) = (\lambda.x,\lambda.y)$. On peut vérifier alors que $(E\times F,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul étant $(0_E,0_F)$.

3) Règles de calculs

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

- $\forall\ \overrightarrow{x}\in E, 0.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, et $\forall\ \lambda\in\mathbb{K}, \lambda.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
- $\forall\ \overrightarrow{x}\in E, \forall\ \lambda\in\mathbb{K}, -(\lambda.\overrightarrow{x}) = (-\lambda).\overrightarrow{x} = \lambda.(-\overrightarrow{x})$.
- $\forall\ \overrightarrow{x}\in E, \forall\ \lambda\in\mathbb{K}, \lambda.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \implies \lambda = 0$ ou $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

II) Applications linéaires

1) Définition

DÉFINITION 14.2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. et soit $f : E\to F$ une application, on dit que f est une application linéaire (ou morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels), lorsque :

$$\forall\ x,y\in E, \forall\ \lambda\in\mathbb{K}, f(x+y) = f(x)+f(y) \text{ et } f(\lambda.x) = \lambda.f(x).$$

Si de plus, f est bijective, alors on dit que f est un isomorphisme (d'espaces vectoriels). L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.

Une application linéaire est en particulier un morphisme de groupes additifs, donc si $f\in\mathscr{L}(E,F)$ alors : $f(0_E) = 0_F$ et $\forall\ x\in E, f(-x) = -f(x)$. De plus on peut parler du noyau de f : $\ker(f) = \{x\in E\ /\ f(x) = 0_F\}$, et f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

Exemples:
- L'application nulle (notée 0) de E vers F est linéaire.
- L'application identité de E : $\mathrm{id}_E : E\to E$ définie par $\mathrm{id}_E(x) = x$, est linéaire bijective (et $(\mathrm{id}_E)^{-1} = \mathrm{id}_E$).
- Soit $\lambda\in\mathbb{K}^*$, l'homothétie de rapport λ : $h_\lambda : E\to E$, définie par $h_\lambda(x) = \lambda.x$, est linéaire et bijective. Sa réciproque est l'homothétie de rapport $1/\lambda$. L'ensemble des homothéties de E est un groupe pour la loi $\circ$ car c'est un sous-groupe du groupe des permuations de E.

– L'application $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ définie par $f(x,y) = (x;-y)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^2$ sur lui-même.

DÉFINITION 14.3 (vocabulaire)

– *Une application linéaire de E vers E est appelée un endomorphisme de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$ (on a donc $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$).*
– *Un isomorphisme de E vers E est appelé un automorphisme de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté* $\mathrm{GL}(E)$ *et appelé groupe linéaire de E.*
– *Une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$ est appelée une forme linéaire sur E. L'ensemble des formes linéaires sur E est noté E^* et appelé dual de E (on a donc $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$).*

Exemples:
– $\mathrm{id}_E \in \mathrm{GL}(E), \forall\ \lambda \in \mathbb{K}^*, h_\lambda \in \mathrm{GL}(E)$.
– Soit $E = \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ et $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$, alors ϕ est une forme linéaire sur E.
– Soit $E = \{u \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \ /\ (u_n) \text{ converge}\}$ est un $\mathbb{C}$-e.v. et l'application $\phi : E \to \mathbb{C}$ définie par $\phi(u) = \lim u_n$, est une forme linéaire sur E.
– Soient $a,b,c \in \mathbb{K}$, l'application $\phi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ définie par $\phi(x,y,z) = ax + by + cz$, est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^3$. En exercice, montrer la réciproque, c'est à dire que toutes les formes linéaires sur $\mathbb{K}^3$ sont de ce type.

2) Propriétés

Il est facile de vérifier les propriétés suivantes :
– La composée de deux applications linéaires est linéaire. On en déduit que $\mathrm{GL}(E)$ est stable pour la loi $\circ$.
– Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$. On en déduit que $\mathrm{GL}(E)$ est stable par symétrisation, *i.e.* si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.
– $(\mathrm{GL}(E),\circ)$ est un groupe (non abélien en général), c'est en fait un sous-groupe du groupe des permutations de E : $(S_E,\circ)$.
– $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
– Si $f,g \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f+g$ et $\lambda.f$ sont linéaires. On en déduit que $(\mathscr{L}(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. (s.e.v. dans $\mathscr{F}(E,F)$).
– $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau, la loi $\circ$ jouant le rôle d'une multiplication.

Remarques :
– En général, l'anneau $\mathscr{L}(E)$ n'est pas commutatif. Le groupe des inversibles de cet anneau est $\mathrm{GL}(E)$.
– La loi $\circ$ jouant le rôle d'une multiplication, on adopte les notations usuelles des anneaux pour les puissances, *i.e.* si $u \in \mathscr{L}(E)$ et si n est entier, alors :

$$u^n = \begin{cases} \mathrm{id}_E & \text{si } n = 0 \\ u \circ \cdots \circ u & n \text{ fois si } n > 0 \\ u^{-1} \circ \cdots \circ u^{-1} & -n \text{ fois si } u \text{ est inversible et } n < 0 \end{cases},$$

de plus si $u,v \in \mathscr{L}(E)$ commutent (*i.e.* $u \circ v = v \circ u$), alors on peut utiliser le binôme de *Newton* :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

– Soit $E = \mathbb{K}^2$ et $f : (x;y) \mapsto (y;0)$, on vérifie facilement que $f \in \mathscr{L}(E)$ et que $f^2 = 0$ (application nulle), pourtant $f \neq 0$. Cet exemple montre qu'en général $\mathscr{L}(E)$ n'est pas un anneau intègre.

III) Sous-espaces vectoriels

1) Définition

DÉFINITION 14.4

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et soit H un ensemble, on dit que H est un sous-espace vectoriel de E (ou s.e.v de E) lorsque :

- *$H \subset E$, $H \neq \emptyset$.*
- *$\forall\ x, y \in H, x + y \in H$ (H est stable pour l'addition).*
- *$\forall\ x \in H, \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x \in H$ (H est stable pour la loi .).*

Si c'est le cas, alors il est facile de vérifier que $(H, +, .)$ est lui-même un $\mathbb{K}$-e.v.

Exemples:

- $\mathscr{L}(E, F)$ est un s.e.v. de $\mathscr{F}(E, F)$.
- L'ensembles des fonctions paires (respectivement impaires) définies sur $\mathbb{R}$ est un s.e.v. de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- L'ensemble des suites complexes de limite nulle et un s.e.v de l'espace des suites complexes convergentes, qui est lui-même un s.e.v de l'espace de suites complexes bornées, qui est lui-même un s.e.v de l'espace des suites complexes.
- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$ est un s.e.v de $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{C})$.
- Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3\ /\ ax + by + cz = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{K}^3$.

THÉORÈME 14.1 (noyau et image d'une application linéaire)

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $\ker(f)$ est un s.e.v de E et $\operatorname{Im}(f)$ est un s.e.v de F.

Preuve: Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Remarque : Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors f est un isomorphisme si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im}(f) = F$.

THÉORÈME 14.2 (image d'un s.e.v par une application linéaire)

Soit H un s.e.v de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $f < H >$ (ensemble des images par f des éléments de H) est un s.e.v de F.

Preuve: Il suffit de considérer la restriction de f à H : $g : H \to F$ définie par $\forall\ x \in H, g(x) = f(x)$, il est clair que g est linéaire et que $f < H >= \operatorname{Im}(g)$, on peut appliquer alors le théorème précédent. □

THÉORÈME 14.3 (image réciproque d'un s.e.v par une application linéaire)

Soit H un s.e.v de F et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $f^{-1} < H >$ (ensemble des antécédents des éléments de H par f) est un s.e.v de E.

Preuve: Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

THÉORÈME 14.4 (intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v de E (I est un ensemble d'indices), alors $\bigcap\limits_{i \in I} H_i$ est un s.e.v de E.

Preuve: Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Exemples:

- $H = \{f \in \mathscr{C}^0([a; b], \mathbb{R})\ /\ \int_0^b f = 0\}$ est un s.e.v de $\mathscr{C}^0([a; b], \mathbb{R})$, car c'est le noyau de la forme linéaire $\phi : f \mapsto \int_0^b f$.
- $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3\ /\ ax + by + cz = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{K}^3$ car c'est le noyau de la forme linéaire $\phi : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$.
- $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3\ /\ 2x + y - z = 0 \text{ et } 3x - 2z = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{K}^3$ car c'est l'intersection des noyaux des deux formes linéaires : $\phi_1 : (x, y, z) \mapsto 2x + y - z$ et $\phi_2 : (x, y, z) \mapsto 3x - 2z$.

DÉFINITION 14.5 (hyperplan)

Soit H un s.e.v de E, on dit que H est un hyperplan de E lorsqu'il existe une forme linéaire ϕ sur E, non identiquement nulle, telle que $H = \ker(\phi)$.

2) Équations linéaires

DÉFINITION 14.6

Une équation linéaire est une équation du type : $u(x) = b$ avec $u \in \mathscr{L}(E,F), b \in F$ et $x \in E$ (inconnue). L'équation $u(x) = 0_F$ est appelée équation homogène associée.

Exemples:

– Tout système linéaire est une équation linéaire, par exemple, le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 3 \\ 3x & + & 5y & = & -1 \end{array}\right.$, peut se mettre sous la forme $u(X) = b$ avec $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u(x,y) = (2x - y, x + 2y, 3x + 5y)$, avec $b = (1,3,-1) \in \mathbb{R}^3$ et $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, il est facile de vérifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

– Une équation différentielle linéaire est une équation linéaire, par exemple l'équation différentielle : $y' + y = 1$ peut se mettre sous la forme $u(y) = b$ avec $u : \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $u(y) = y' + y$ (u est linéaire), et $b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la fonction constante 1.

THÉORÈME 14.5 (structure des solutions d'une équation linéaire)

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et soit $b \in F$, l'équation linéaire $u(x) = b$ avec $x \in E$ a des solutions si et seulement si $b \in \mathrm{Im}(u)$. Si c'est le cas, et si $x_0 \in E$ désigne une solution particulière (i.e. $u(x_0) = b$), alors l'ensemble de toutes les solutions est :

$$S = \{y + x_0 \ / \ y \in \ker(u)\} = x_0 + \ker(u).$$

Preuve: Il est clair qu'il y a des solutions si et seulement si $b \in \mathrm{Im}(u)$. Si on a $u(x_0) = b$, alors l'équation $u(x) = b$ équivaut à $u(x) = u(x_0)$, ou encore à $u(x - x_0) = 0_F$ (u est linéaire), ce qui équivaut encore à $\exists\ y \in \ker(u), x = y + x_0$.
□

Exemples:

– Le système linéaire équivaut à (méthode de *Gauss*[1]) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -y & + & 2x & = & 1 \\ & & 5x & = & 5\ (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & 13x & = & 4\ (L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -y & + & 2x & = & 1 \\ & & x & = & 1 \\ & & 0 & = & -9\ (L_3 \leftarrow L_3 - 13L_2) \end{array}\right.$$

La dernière équation montre que ce système n'a pas de solution (*i.e.* $b \notin \mathrm{Im}(u)$).

– Pour l'équation différentielle, il y a une solution particulière : $y_0 : t \mapsto 1$. L'équation homogène associée est $y' + y = 0$ dont les solutions sont les fonctions $y = \lambda\phi$ où $\phi : t \mapsto e^{-t}$. L'ensemble des solutions est donc $S = \{1 + \lambda\phi \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3) Sous-espace engendré

DÉFINITION 14.7 (combinaisons linéaires)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, tout vecteur x de E pour lequel il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est noté $\mathrm{Vect}\left[x_1, \ldots, x_n\right]$.

Deux vecteurs x et y de E sont dits colinéaires lorsque l'un des deux est combinaison linéaire de l'autre, i.e. $\exists\ \lambda \in \mathbb{K}, x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

1. *Carl Friedrich* (1777 – 1855) : mathématicien allemand de génie, sans doute l'un des plus grands de tous les temps.

Exemples:
- Vect $\left[0_E\right] = \{0_E\}$.
- Si $x \in E \setminus \{0_E\}$, alors Vect $[x] = \{\lambda x \ / \ \lambda \in \mathbb{K}\}$, c'est un s.e.v de E appelé droite vectorielle engendrée par x. On dit que x est un vecteur directeur de cette droite. Les autres vecteurs directeurs sont les vecteurs de la forme λx avec $\lambda \neq 0$.
- Soient $x, y \in E$ deux vecteurs non nuls, si les deux vecteurs sont colinéaires, alors Vect $[x, y] =$ Vect $[x] =$ Vect $[y]$ (droite vectorielle). Si ces deux vecteurs sont non colinéaires, alors :

$$\text{Vect}\left[x,y\right] = \{\alpha x + \beta y \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$$

  c'est un s.e.v de E, on l'appelle plan vectoriel engendré par x et y, il contient (strictement) les deux droites engendrées par x et y.
- Dans $\mathbb{K}^3$ déterminer une équation cartésienne du plan vectoriel engendré par les vecteurs $x = (1,1,1)$ et $y = (0,-1,1)$.

THÉORÈME 14.6 (image d'une combinaison linéaire par une application linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors l'image par f d'une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et une combinaison linéaire de la famille $(f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ (dans F) avec les mêmes coefficients.

Preuve: Par récurrence sur n : pour $n = 1$ il n'y a rien à démontrer. Supposons le théorème vrai au rang n, et soit $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1}$, f étant linéaire, on peut écrire $f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) + \lambda_{n+1}.f(x_{n+1})$, on applique alors l'hypothèse de récurrence pour conclure. □

THÉORÈME 14.7 (sous-espace engendré)

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E, l'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille : Vect $[x_1, \ldots, x_n]$ est un s.e.v de E. C'est même le plus petit (pour l'inclusion) s.e.v de E qui contient tous les vecteurs de cette famille. On l'appelle s.e.v engendré par $(x_1, \ldots, x_n)$.

Preuve: Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Exemples:
- Soit $E = \mathbb{K}^n$ pour $i \in [\![1..n]\!]$ on pose $e_i = (\delta_{i,1}, \ldots, \delta_{i,n})$, on a alors $E =$ Vect $[e_1, \ldots, e_n]$.
- Soit $H = \{u \in \mathbb{K}^3 \ / \ \exists\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}, u = (\alpha - \beta, 2\alpha - 2\beta + \gamma, -\alpha + \beta + 2\gamma)\}$. Posons $e_1 = (1,2,-1)$, $e_2 = (-1,-2,1)$ et $e_3 = (0,1,2)$, on a alors $H =$ Vect $[e_1, e_2, e_3]$, ce qui prouve que H est un s.e.v de $\mathbb{K}^3$. On remarque que $e_2 = -e_1$, donc finalement $H =$ Vect $[e_1, e_3]$, et comme e_1 et e_3 ne sont pas colinéaires, H est un plan vectoriel.
- Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les deux fonctions $\text{id}_{\mathbb{R}}$ et 1 sont non colinéaires, donc elles engendrent un plan vectoriel dans E : $P =$ Vect $[\text{id}_{\mathbb{R}}, 1]$. $f \in P$ équivaut à $\exists\ a, b \in \mathbb{R}, f = a.\text{id}_{\mathbb{R}} + b.1$, et donc $f : x \mapsto ax + b$, P est donc l'ensemble des applications affines.

4) Somme de deux sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 14.8 (somme de deux s.e.v)

Soient F et G deux s.e.v de E, on appelle somme de F et G l'ensemble noté $F + G$ et défini par :

$$F + G = \{x \in E \ / \ \exists\ u \in F, v \in G, x = u + v\}.$$

THÉORÈME 14.8

La somme de deux s.e.v de E est un s.e.v de E.

Preuve: F et G sont deux s.e.v de E , donc ce sont en particulier des $\mathbb{K}$-e.v, par conséquent le produit cartésien $F \times G$ est lui-même un $\mathbb{K}$-e.v. On considère alors l'application $f : F \times G \to E$ définie par $f(u, v) = u + v$. On vérifie facilement que f est linéaire, il est clair d'après la définition que $F + G = \text{Im}(f)$, et donc $F + G$ est un s.e.v de E □

Exemples:
- Dans $\mathbb{K}^2$, posons $i = (1,0)$, $j = (0,1)$, $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (1,-1)$, on peut vérifier que $\mathbb{K}^2 =$ Vect $[i] +$ Vect $[j] =$ Vect $[e_1] +$ Vect $[e_2]$.
- Soient $x, y \in E$ deux vecteurs, on a Vect $[x] +$ Vect $[y] =$ Vect $[x, y]$. Plus généralement, on peut remplacer x et y par deux familles de vecteurs de E.

DÉFINITION 14.9 (somme directe)

Soient F et G deux s.e.v de E, on dit que la somme $F+G$ est directe lorsque $F\cap G=\{0_E\}$. Si c'est le cas on note $F\oplus G$ au lieu de $F+G$.

Exemples:
- Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le s.e.v des fonctions paires et le s.e.v des fonctions impaires sont en somme directe.
- Dans $\mathbb{K}^3$ le plan P d'équation $x+y+z=0$ et la droite engendrée par le vecteur $i=(1,1,1)$ sont en somme directe, mais P n'est pas en somme directe avec le plan P' engendré par i et $j=(1,-1,1)$.

THÉORÈME 14.9 (caractérisation des sommes directes)

Soient F et G deux s.e.v de E, les assertions suivantes sont équivalentes :

a) F et G sont en somme directe.

*b) $\forall\ z\in F+G, \exists\ x\in F, y\in G$, **uniques**, $z=x+y$ (i.e. tout vecteur de $F+G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G).*

c) $\forall\ x,\in F, y\in G$, si $x+y=0_E$ alors $x=y=0_E$.

d) L'application linéaire $\phi: F\times G\to E$ définie par $\phi(x,y)=x+y$ est injective.

Preuve: Montrons $a)\implies b)$: soient $x,x'\in F, y,y'\in G$ tels que $x+y=x'+y'$, alors on a $x-x'=y'-y$, or $x-x'\in F$ et $y'-y\in G$, on a donc un élément commun à F et G, la somme étant directe, cet élément est nul, d'où $x=x'$ et $y=y'$.

Montrons que $b)\implies c)$: soient $x\in F$ et $y\in G$ tels que $x+y=0_E$, on a alors $x+y=0_E+0_E$ avec $0_E\in F$ et $0_E\in G$, d'après l'hypothèse $b)$, on a $x=0_E$ et $y=0_E$.

Montrons $c)\implies d)$: l'hypothèse $c)$ signifie exactement que $\ker(\phi)=\{(0_E,0_E)\}$, donc ϕ est injective.

Montrons que $d)\implies a)$: soit $x\in F\cap G$, on a donc $x\in F$ et $-x\in G$, on peut alors considérer $\phi(x,-x)$, ce qui donne 0_E, mais d'après l'hypothèse $d)$, ϕ est injective, donc $(x,-x)=(0_E,0_E)$, d'où $x=0_E$, donc la somme $F+G$ est directe. □

DÉFINITION 14.10 (s.e.v supplémentaires)

Soient F et G deux s.e.v de E , on dit que F et G sont supplémentaires lorsque $F\oplus G=E$. Ce qui signifie que $E=F+G$ et la somme $F+G$ est directe, ou encore : tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemples:
- Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le s.e.v des fonctions paires et le s.e.v des fonctions impaires sont supplémentaires.
- Dans $E=\mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ le s.e.v $H=\{f\in E\ /\ \int_a^b f=0\}$ et le s.e.v $G=\mathrm{Vect}\left[id_{\mathbb{R}}\right]$ sont supplémentaires.

THÉORÈME 14.10 (caractérisations des hyperplans)

Soit H un s.e.v de E, les assertions suivantes sont équivalentes :

a) H est un hyperplan de E (i.e. le noyau d'une forme linéaire sur E non nulle).

b) $\exists\ x_0\in E\setminus H$ tel que $H\oplus\mathrm{Vect}\left[x_0\right]=E$.

c) $\forall\ x_0\in E\setminus H, H\oplus\mathrm{Vect}\left[x_0\right]=E$.

Preuve: Montrons que $a)\implies c)$: soit $x_0\in E\setminus H$, comme x_0 n'est pas dans H, il est facile de voir que H et $\mathrm{Vect}\left[x_0\right]$ sont en somme directe. Soit ϕ une forme linéaire (non nulle) telle que $\ker(\phi)=H$, on a $\phi(x_0)=\alpha\neq 0$, soit $x\in E$ et $\lambda=\phi(x)$, posons $y=x-\frac{\lambda}{\alpha}x_0$, on a $\phi(y)=0$, donc $y\in H$ et de plus $x=y+\frac{\lambda}{\alpha}x_0$, ce qui prouve que $E=H+\mathrm{Vect}\left[x_0\right]$.

Montrons que $c)\implies b)$: rien à faire.

Montrons que $b)\implies a)$: Pour $x\in E$, il existe $y\in H$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, **uniques** tels que $x=y+\lambda x_0$. Posons $\phi(x)=\lambda$. On définit ainsi une application non nulle de E vers $\mathbb{K}$, on peut vérifier ensuite que ϕ est bien linéaire (laissé en exercice), $x\in\ker(\phi)\iff\lambda=0\iff x=y\iff x\in H$, donc $\ker(\phi)=H$, ce qui prouve que H est un hyperplan.
□

IV) Projections, symétries

1) Projecteurs

DÉFINITION 14.11
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v, une projection dans E (ou un projecteur de E) est un endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$ (i.e. $p \circ p = p$).

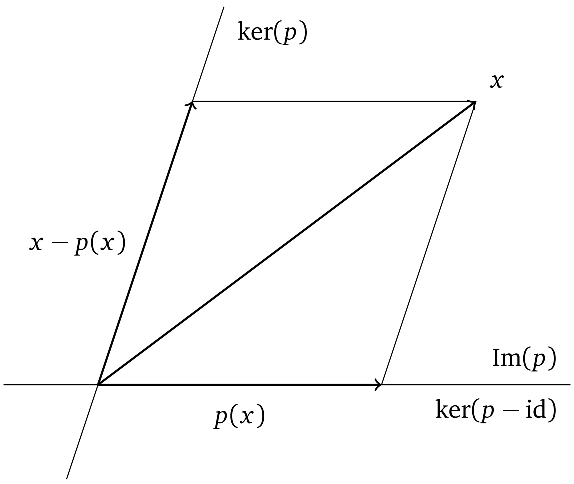
Exemples:
- $E = \mathbb{K}^2$ et $p(x, y) = (x, 0)$.
- $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et p qui à $f \in E$ associe $p(f) : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

Remarque : invariants d'un endomorphisme. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $x \in E$ est invariant par f (ou un point fixe de f) si et seulement si $f(x) = x$, ce qui équivaut à $(f - \mathrm{id}_E)(x) = 0_E$, ou encore $x \in \ker(f - \mathrm{id}_E)$. L'ensemble des points fixes de f est donc le s.e.v $\ker(f - \mathrm{id}_E)$.

THÉORÈME 14.11 (caractérisation des projections)
$p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur $\iff E = \ker(p) \oplus \ker(p - \mathrm{id}_E)$. Si c'est le cas, alors $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id}_E)$ et on dit que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$. Tout vecteur x de E se décompose de la manière suivante : $x = (x - p(x)) + p(x)$, avec $x - p(x) \in \ker(p)$ et $p(x) \in \ker(p - \mathrm{id}_E)$.

Preuve: Si p est un projecteur, soit $x \in \ker(p) \cap \ker(p - \mathrm{id}_E)$, alors $p(x) = 0_E = x$, donc la somme est directe. Soit $x \in E$, alors $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0_E$, donc $x - p(x) \in \ker(p)$, on a alors $x = (x - p(x)) + p(x)$ et $p(x) \in \ker(p - \mathrm{id}_E)$, donc $E = \ker(p) \oplus \ker(p - \mathrm{id}_E)$. De la définition, il découle que $\mathrm{Im}(p) \subset \ker(p - \mathrm{id}_E)$, l'inclusion étant évidente, on a $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - id_E)$.

Réciproque : si $E = \ker(p) \oplus \ker(p - \mathrm{id}_E)$, soit $x \in E$, alors $x = y + z$ avec $y \in \ker(p)$ et $z \in \ker(p - \mathrm{id}_E)$, d'où $p(x) = p(y) + p(z) = p(z) = z$, et donc $p^2(x) = p(z) = z = p(x)$, ce qui prouve que p est un projecteur. □



Exemples:
- Dans le premier exemple, p est la projection sur la droite $\mathrm{Vect}\,[(1,0)]$ et parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}\,[(0,1)]$.
- Dans le deuxième exemple, p est la projection sur le s.e.v des fonctions paires, parallèlement au s.e.v des fonctions impaires.

THÉORÈME 14.12 (projection associée à une décomposition)
Si F et G sont deux s.e.v de E supplémentaires ($E = F \oplus G$), alors il existe une unique projection p telle que $\mathrm{Im}(p) = F$ et $\ker(p) = G$, i.e. qui soit la projection sur F parallèlement à G.

Preuve: Pour $x \in E$, il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$, **uniques** tels que $x = x_F + x_G$, on pose alors $p(x) = x_F$, ce qui définit une application de E dans E. On vérifie facilement que p est linéaire, et comme $x_F \in F$, on a par définition même de p, que $p^2(x) = x_F = p(x)$, donc p est bien un projecteur. On a $p(x) = 0_E \iff x_F = 0_E \iff x = x_G \iff x \in G$, donc $\ker(p) = G$, d'autre part, $p(x) = x \iff x = x_F \iff x \in F$, donc $\ker(p - \mathrm{id}_E) = F$, ce qui termine la preuve. □

Exemples:

– Soit $E=\mathbb{K}^3$, $F=\{(x,y,z)\in E \;/\; z=0\}$ et $G=\text{Vect}\left[(1,1,1)\right]$. Montrer que F et G sont supplémentaires, et déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G.
– Soit p un projecteur de E, montrer que $q=\text{id}_E-p$ est un projecteur, préciser ses éléments caractéristiques.

2) Symétries

DÉFINITION 14.12

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v, une symétrie de E est un endomorphisme s tel que $s^2=\text{id}_E$ (involution linéaire).

Exemples:
– Dans $E=\mathbb{K}^2$, l'application s définie par $s(x,y)=(y,x)$ est une symétrie.
– Dans $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'application s définie par $s(f)$ est la fonction qui à $s(f): x\mapsto f(-x)$, est une symétrie.

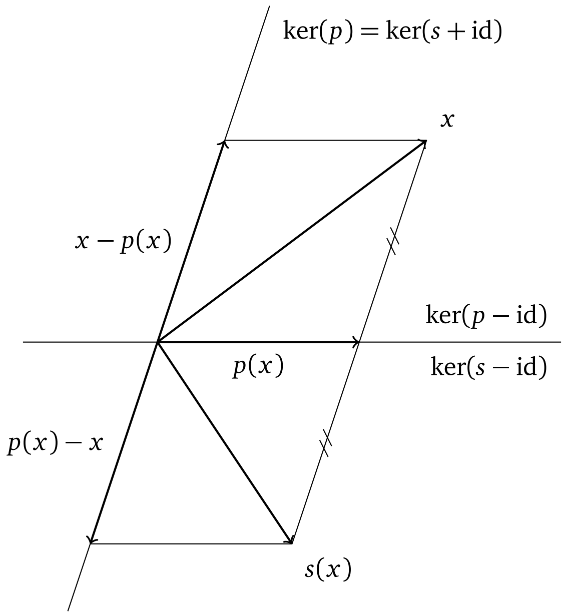
THÉORÈME 14.13 (caractérisation des symétries)

Soit $s\in\mathscr{L}(E)$, s est une symétrie $\iff E=\ker(s-\text{id}_E)\oplus\ker(s+\text{id}_E)$. Ce qui revient à dire que l'application $p=\frac{1}{2}(\text{id}_E+s)$ est une projection. Si c'est le cas, on dit que s est la symétrie par rapport à $\ker(s-\text{id}_E)$ (ensemble des invariants) et parallèlement à $\ker(s+\text{id}_E)$, et on dit que p est la projection associée à s. Tout vecteur x de E se décompose de la manière suivante :

$$x=\frac{1}{2}(x+s(x))+\frac{1}{2}(x-s(x))$$

avec $\frac{1}{2}(x+s(x))\in\ker(s-\text{id}_E)$ et $\frac{1}{2}(x-s(x))\in\ker(s+\text{id}_E)$.

Preuve: Posons $p=\frac{1}{2}(\text{id}_E+s)$, s est une symétrie équivaut à $s^2=\text{id}_E$, c'est à dire $(2p-\text{id}_E)^2=\text{id}_E$, ou encore $p^2=p$, ce qui équivaut à dire que $E=\ker(p)\oplus\ker(p-\text{id}_E)$, et donc $E=\ker(s+\text{id}_E)\oplus\ker(s-\text{id}_E)$. □



THÉORÈME 14.14 (symétrie associée à une décomposition)

Si F et G sont deux s.e.v de E supplémentaires ($E=F\oplus G$), alors il existe une unique symétrie s telle que $\ker(s-\text{id}_E)=F$ et $\ker(s+\text{id}_E)=G$, i.e. qui soit la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

Preuve: Soit p la projection sur F parallèlement à G, posons $s=2p-\text{id}_E$, on sait alors que s est une symétrie et $\ker(s-\text{id}_E)=\ker(p-\text{id}_E)=F$ et $\ker(s+\text{id}_E)=\ker(p)=G$, donc s existe. Réciproquement, si s existe, alors la projection associée est nécessairement la projection sur F parallèlement à G, or celle-ci est unique, c'est p, donc s est unique. □

Exemples:

– Dans le premier exemple ci-dessus, s est la symétrie par rapport à la droite $\text{Vect}[(1,1)]$ et parallèlement à la droite $\text{Vect}[(1,-1)]$.
– Dans le deuxième exemple, s est la symétrie par rapport au s.e.v des fonctions paires, et parallèlement au s.e.v des fonctions impaires.

V) Exercices

★Exercice 14.1
Dans les cas suivants, dire si F est un s.e.v de E :

a) $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ($T > 0$ est fixé) :
i) $F = \{f \in E \ / \ f(1) - f(0) = 0\}$ ii) $F = \{f \in E \ / \ f(1) = 2f(0)\}$
iii) $F = \{f \in E \ / \ \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$ iv) $F = \{f \in E \ / \ \lim\limits_{\pm\infty} f = 0\}$
v) $F = \{f \in E \ / \ f$ est croissante$\}$.

b) $E = \mathbb{K}^n$, $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$:
i) $F = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ x_1 = x_2 = 0\}$. ii) $F = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ x_1 + x_2 = 0\}$.
iii) $F = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ x_1 \neq 0\}$. iv) $F = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 0\}$.
v) $F = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ x_1 = x_2\}$. vi) $F = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ x_1^2 + x_2^3 = 0\}$.

c) $E = \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$:
i) $F = \{u \in E \ / \ \lim u_n = 0\}$. ii) $F = \{u \in E \ / \ (u_n)$ est convergente$\}$.
iii) $F = \{u \in E \ / \ (u_n)$ est bornée$\}$. iv) $F = \{u \in E \ / \ (u_n)$ est périodique$\}$.

★Exercice 14.2
Pour les opérations usuelles sur les fonctions, étudier la structure des ensembles suivants :

a) $\mathscr{B}(I,\mathbb{C})$: ensemble des fonctions bornées sur l'intervalle I.
b) $\mathscr{P}_T(I,\mathbb{C})$: ensemble des fonctions T-périodiques sur I ($T \in \mathbb{R}^*$).
c) L'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) sur I et à valeurs complexes.
d) $\mathscr{L}(I,\mathbb{R})$: ensemble des fonctions lipschitziennes sur I.

★Exercice 14.3
Soit $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ définie par $f(x,y) = (-x+y, -y)$.

a) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$, déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.
b) Montrer que $f + \text{id}_E$ est nilpotente, en déduire f^n pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.
c) Soient (x_n) et (y_n) deux suites vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} x_{n+1} &= -x_n + y_n \\ y_{n+1} &= -y_n \end{cases}$. Expliciter x_n et y_n en fonction de n, x_0 et y_0.

★Exercice 14.4
Soit $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par $f(x,y,z) = (y,z,0)$.

a) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^3)$. Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.
b) Vérifier que f est nilpotente. En déduire $\text{id}_E - f \in \text{GL}(E)$ et expliciter $(\text{id}_E - f)^{-1}$.
c) Soient $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} x_{n+1} &= x_n - y_n \\ y_{n+1} &= y_n - z_n \\ z_{n+1} &= z_n \end{cases}$. Expliciter x_n, y_n et z_n en fonction de n et des premiers termes x_0, y_0, z_0.

★Exercice 14.5
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si :

$$\forall\, \overrightarrow{x} \in E, f(\overrightarrow{x}) \in \text{Vect}\left[\overrightarrow{x}\right]$$

★Exercice 14.6
Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$:

a) Montrer que $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(v) \iff v \circ u = 0$.

★Exercice 14.7
Soient F et G deux s.e.v supplémentaires dans E. Soit $u \in \mathscr{L}(F)$ et $v \in \mathscr{L}(G)$, montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que : $\forall\ x \in F, f(x) = u(x)$ et $\forall\ x \in G, f(x) = v(x)$.

★Exercice 14.8
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $f \in \mathscr{L}(E)$, montrer que :

a) $\ker(f) = \ker(f^2) \iff$ la somme $\ker(f) + \mathrm{Im}(f)$ est directe.

b) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff E = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ soient supplémentaires dans E. Donner un exemple pour f qui vérifie cette condition, mais qui ne soit pas un projecteur.

★Exercice 14.9

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$, montrer que $\begin{cases} u \circ v & = u \\ v \circ u & = v \end{cases} \iff u$ et v sont deux projecteurs de même noyau.

★Exercice 14.10
Soient $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que u et p commutent si et seulement si $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

★Exercice 14.11
Soit $E = \mathbb{K}^3$, $F = \{(x, y, z) \in E \ /\ z = 0\}$, et $G = \mathrm{Vect}\left[(1, 1, 1)\right]$. Montrer que F et G sont supplémentaires. Déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G, puis celle de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

★Exercice 14.12
Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, on peut donc considérer $\mathbb{K}$ comme un $\mathbb{Q}$-e.v.

b) Soit $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ un morphisme de corps. Montrer que σ est $\mathbb{Q}$-linéaire. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P, montrer que $\sigma(\alpha)$ est également racine de P.

c) Exemple : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[j] = \{a + bj \ /\ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Vérifier que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, et déterminer tous les morphismes de corps de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.