Algèbre linéaire II

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 ***

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un projecteur p et un automorphisme g de E tel que $f = g \circ p$.

Correction ▼ [005598]

Exercice 2 **I

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non nul de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0$. Montrer que f est nilpotent.

Correction ▼ [005599]

Exercice 3 ***

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient f et g deux projecteurs distincts et non nuls de E tels qu'il existe deux complexes a et b tels que :

$$fg - gf = af + bg.$$

1. Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ on a : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(g)$. En déduire que $gf = f$ puis que $a + b = 0$ puis que $a = -1$.
2. Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq -1$, on a $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que si f et g sont deux projecteurs qui ne commutent pas et vérifient de plus $fg - gf = af + bg$ alors
   (a,b) est élément de $\{(-1,1),(1,-1)\}$. Caractériser alors chacun de ces cas.

Correction ▼ [005600]

Exercice 4 ***

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

1. Montrer que $[(\forall g \in \mathscr{L}(F,E),\ f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0) \Rightarrow f \text{ bijective}]$.
2. On pose $\dim E = p$, $\dim F = n$ et $\text{rg} f = r$. Calculer la dimension de $\{g \in \mathscr{L}(F,E) / \ f \circ g \circ f = 0\}$.

Correction ▼ [005601]

Exercice 5 **I

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. u est l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E,\ u(P) = P(X+1) - P$.

1. Déterminer $\text{Ker} u$ et $\text{Im} u$.

2. Déterminer explicitement une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005602]

Exercice 6 ***

Rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) \\ \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) & \cos(6a) \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005603]

Exercice 7 ***

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i = j$, j si $i = j-1$ et 0 sinon. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction ▼ [005604]

Exercice 8 ***

Soient n un entier naturel non nul puis $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit f l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice X associe $AX + XA$. Calculer $\text{Tr}(f)$.

Correction ▼ [005605]

Exercice 9 **

Soient a un réel non nul et A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue M : $aM + \text{Tr}(M)A = B$.

Correction ▼ [005606]

Exercice 10 **

Rang de la matrice $(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Correction ▼ [005607]

Exercice 11 **

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $E = \{M(x,y) = xI + yJ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.
2. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
3. Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(E,+,\times)$?
4. Résoudre dans E les équations :
   (a) $X^2 = I$
   (b) $X^2 = 0$
   (c) $X^2 = X$.
5. Calculer $(M(x,y))^n$ pour n entier naturel et x et y réels.

Correction ▼ [005608]

Exercice 12 ***

On appelle idéal bilatère de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ tout sous-ensemble I de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\text{a) } (I,+) \text{ est un groupe et b) } \forall A \in I,\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AM \in I \text{ et } MA \in I.$$

Déterminer tous les idéaux bilatères de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.

Correction ▼ [005609]

Exercice 13 ***

Soient a_1,..., a_n n réels tous non nuls et $A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$.

Inverse de A en cas d'existence ?

Correction ▼ [005610]

Exercice 14 **

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices carrées de format n telles que $a_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+r-1$ et $b_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+s-1$ où r et s sont deux entiers donnés entre 1 et n. Montrer que si $AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ alors $c_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+r+s-1$.

Correction ▼ [005611]

Exercice 15 **I

Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005612]

Exercice 16 ***I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\omega = e^{2i\pi/n}$.
Soit $A = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction ▼ [005613]

Exercice 17 **I

Soit A une matrice carrée de format n. Calculer le déterminant de sa comatrice.

Correction ▼ [005614]

Exercice 18 ***I

Soit A une matrice carrée de format n. Etudier le rang de com$A$ en fonction du rang de A.

Correction ▼ [005615]

Exercice 19 ***

Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M = \text{com}M$ ($n \geqslant 2$).

Correction ▼ [005616]

Exercice 20 ***I Théorème de HADAMARD

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$. (Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.)

Correction ▼ [005617]

Exercice 21 *I

Existe-t-il deux matrices carrées A et B telles que $AB - BA = I_n$.

Correction ▼ [005618]

Exercice 22 **I

Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un complexe a tel que $f = a\mathrm{Tr}$.

Correction ▼ [005619]

Exercice 23 ***

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$ (a réel donné). Calculer $\lim_{n\to+\infty} A_n^n$.

Correction ▼ [005620]

Exercice 24 **

Soient A une matrice carrée de format n et f l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à une matrice M associe MA. Trouver la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (ordonnée par l'ordre lexicographique).

Correction ▼ [005621]

Exercice 25 ***

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et B l'élément de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ défini par blocs par $B = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A.

Correction ▼ [005622]

Exercice 26 ***

Soit H un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists \lambda_A \in \mathbb{C}/\ HAH = \lambda_A H$. Montrer que $\mathrm{rg}H \leqslant 1$.

Correction ▼ [005623]

Exercice 27 ***

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1)\ M^2 = 0 \text{ et } (2)\ \mathrm{rg}M \leqslant 1 \text{ et } \mathrm{tr}M = 0.$$

Correction ▼ [005624]

Exercice 28 ***I

Soient A et B deux matrices carrées de format n telles que $AB - BA = A$. Calculer la trace de A^{2010}.

Correction ▼ [005625]

Exercice 29 **

Soient $M(a) = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ et $N(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$. $M(a)$ et $N(a)$ sont-elles semblables ?

Correction ▼ [005626]

Exercice 30 ***I

Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [005627]

Exercice 31 **I Exponentielle d'une matrice nilpotente

Pour A matrice nilpotente donnée, on pose $\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1. Montrer que si A et B commutent et sont nilpotentes alors $A+B$ est nilpotente et $\exp(A+B) = \exp A \times \exp B$.
2. Montrer que $\exp A$ est inversible.
3. Calculer $\exp A$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005628]

Correction de l'exercice 1 ▲

Deux cas particuliers se traitent immédiatement.
Si $f=0$, on prend $p=0$ et $g=Id_E$ et si $f\in\mathscr{GL}(E)$, on prend $p=Id_E$ et $g=f$.
On se place dorénavant dans le cas où $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$ ne sont pas réduit à 0.
Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}f$ dans E et G un supplémentaire de $\mathrm{Im}f$ dans E.
On sait que la restriction f' de f à F réalise un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}f$. D'autre part $\dim\mathrm{Ker}f=\dim G<+\infty$ et donc $\mathrm{Ker}f$ et G sont isomorphes. Soit φ un isomorphisme de $\mathrm{Ker}f$ sur G.
On définit une unique application linéaire g en posant $g_{/\mathrm{Ker}f}=\varphi$ et $g_{/F}=f'$.
g est un automorphisme de E. En effet,

$$g(E)=g(\mathrm{Ker}f+F)=g(\mathrm{Ker}f)+g(F)=\varphi(\mathrm{Ker}f)+f'(F)=G+\mathrm{Im}f=E,$$

(puisque φ et f' sont des isomorphismes) et donc g est surjective. Par suite g est bijective de E sur lui-même puisque $\dim E<+\infty$.
Soit p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Ker}f$. On a

$$(g\circ p)_{/\mathrm{Ker}f}=g\circ 0_{/\mathrm{Ker}f}=0_{/\mathrm{Ker}f}=f_{/\mathrm{Ker}f}\text{ et }(g\circ p)_{/F}=g\circ Id_{/F}=f'=f_{/F}.$$

Ainsi les endomorphismes $g\circ p$ et f coïncident sur deux sous espaces supplémentaires de E et donc $g\circ p=f$.
Finalement, si on note $P(E)$ l'ensemble des projecteurs de E,

$$\boxed{\forall f\in\mathscr{L}(E),\ \exists g\in\mathscr{GL}(E),\ \exists p\in P(E)/\ f=g\circ p.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

(Ne pas confondre : $(\forall x\in E,\ \exists p\in\mathbb{N}^*/\ f^p(x)=0)$ et $(\exists p\in\mathbb{N}^*/\ \forall x\in E,\ f^p(x)=0)$. Dans le deuxième cas, p est indépendant de x alors que dans le premier cas, p peut varier quand x varie).
Soit $\mathscr{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E. Pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$, il existe un entier non nul p_i tel que $f^{p_i}(e_i)=0$. Soit $p=\mathrm{Max}\{p_1,...,p_n\}$. p est un entier naturel non nul et pour i dans $[\![1,n]\!]$, on a

$$f^p(e_i)=f^{p-p_i}(f^{p_i}(e_i))=f^{p-p_i}(0)=0.$$

Ainsi l'endomorphisme f^p s'annule sur une base de E et on sait que $f^p=0$.
On a donc trouvé un entier non nul p tel que $f^p=0$ et par suite f est nilpotent.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. A partir de $fg-gf=af+bg$ (1), on obtient après composition à droite par g, $fg-gfg=afg+bg$ ou encore $fg=g\circ\frac{1}{1-a}(fg+bId)$ (puisque $1-a\neq 0$). On en déduit

$$\mathrm{Im}(fg)\subset\mathrm{Im}g.$$

Mais alors en écrivant (1) sous la forme $f=\frac{1}{a}(fg-gf-bg)$ (puisque a n'est pas nul), on obtient

$$\mathrm{Im}f\subset\mathrm{Im}g.$$

L'égalité $\mathrm{Im}f\subset\mathrm{Im}g$ montre que tout vecteur de $\mathrm{Im}f$ est invariant par g et fournit donc l'égalité $gf=f$. On compose alors (1) à droite par f et en tenant compte de $gf=f$ et de $f^2=f$, on obtient $f-f=af+bf$ et donc $(a+b)f=0$ puis $b=-a$ puisque f n'est pas nul.
(1) s'écrit alors $fg-f=a(f-g)$. En composant à droite par g, on obtient : $a(fg-g)=0$ et donc $fg=f$ puisque a n'est pas nul. (1) s'écrit maintenant $g-f=a(f-g)$ ou encore $(a+1)(g-f)=0$ et donc, puisque f et g sont distincts, $a=-1$.

2. (D'après 1), si a est distinct de 0 et de 1, nécessairement $a=-1$ et (1) s'écrit $fg-gf=-f+bg$).
Soit x un élément de Ker$g$. (1) fournit $-g(f(x))=af(x)$ $(*)$ puis en prenant l'image par g, $(a+1)g(f(x))=0$. Puisque a est distinct de -1, on obtient $g(f(x))=0$ et $(*)$ fournit $af(x)=0$ puis $f(x)=0$. Donc x est élément de Ker$f$. On a montré que Ker$g\subset$ Ker$f$.
On en déduit $\mathrm{Im}(g-Id)\subset \mathrm{Ker}f$ et donc $f(g-Id)=0$ ou encore $fg=f$. (1) s'écrit $f-gf=af+bg$ et en composant à gauche par f, on obtient $f-fgf=af+bfg$. En tenant compte de $fg=f$, on obtient $(a+b)f=0$ et donc $b=-a$.
(1) s'écrit alors $f-gf=a(f-g)$ et en composant à gauche par g, on obtient $0=a(gf-g)$ et donc $gf=g$. (1) s'écrit enfin $f-g=a(f-g)$ et donc $a=1$.
3. Si $a=0$, (1) s'écrit $fg-gf=bg$. En composant à gauche ou à droite par g, on obtient $gfg-gf=bg$ et $fg-gfg=bg$. En additionnant ces deux égalités, on obtient $fg-gf=2bg$. D'où, en tenant compte de (1), $bg=2bg$ et puisque g n'est pas nul, $b=0$. Par suite $fg-gf=0$ ce qui est exclu par l'énoncé. Donc, on ne peut avoir $a=0$. D'après 1) et 2), $(a,b)\in\{(-1,1),(1,-1)\}$.
1er cas. $(a,b)=(-1,1)$. C'est le 1) : $fg-gf=-f+g$. On a vu successivement que $gf=f$ puis que $fg=g$ fournissant $(g-Id)f=0$ et $(f-Id)g=0$ ou encore $\mathrm{Im}f\subset\mathrm{Ker}(g-Id)=\mathrm{Im}g$ et $\mathrm{Im}g\subset\mathrm{Im}f$ et donc $\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}g$. Réciproquement, si f et g sont deux projecteurs de même image alors $gf=f$, $fg=g$ et donc $fg-gf=-f+g$. Le premier cas est donc le cas de deux projecteurs de même image .
2ème cas. $(a,b)=(1,-1)$. C'est le cas de deux projecteurs de même noyau.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Si $N=\mathrm{Ker}f\neq\{0\}$, considérons g non nul tel que $\mathrm{Im}g\neq\{0\}$ et $\mathrm{Im}g\subset\mathrm{Ker}f$.
Pour un tel g, $f\circ g=0$ puis $f\circ g\circ f=0$ et donc $g=0$ par hypothèse, contredisant g non nulle. Donc $\mathrm{Ker}f=\{0\}$.
Si $\mathrm{Im}f\neq F$, on choisit g nulle sur $\mathrm{Im}f$ et non nulle sur un supplémentaire de $\mathrm{Im}f$ (dont l'existence est admise en dimension infinie). Alors, $g\circ f=0$ puis $f\circ g\circ f=0$ et donc $g=0$ contredisant g non nulle. Donc $\mathrm{Im}f=F$.
Finalement, f est bien un isomorphisme de E sur F.
2. Soit $A=\{g\in\mathscr{L}(F,E)/\ f\circ g\circ f=0\}$. Tout d'abord A est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(F,E)$ car contient l'application nulle et est stable par combinaison linéaire (ou bien A est le noyau de l'application linéaire de $\mathscr{L}(F,E)$ dans $\mathscr{L}(E,F)$ qui à g associe $f\circ g\circ f$).
Soit J un supplémentaire de $I=\mathrm{Im}f$ dans F. Un élément g de $\mathscr{L}(F,E)$ est entièrement déterminé par ses restrictions à I et J.
$$f\circ g\circ f=0\Leftrightarrow (f\circ g)_{/I}=0 \text{ et } g_{/J} \text{ est quelconque}\Leftrightarrow g(I)\subset N.$$
Pour être le plus méticuleux possible, on peut alors considérer l'application G de $\mathscr{L}(I,N)\times\mathscr{L}(J,E)$ dans $\mathscr{L}(F,E)$ qui à un couple (g_1,g_2) associe l'unique application linéaire g de F dans E telle que $g_{/I}=g_1$ et $g_{/J}=g_2$. G est linéaire et injective d'image A. Donc
$$\dim A=\dim\mathscr{L}(I,N)\times\dim\mathscr{L}(J,E)=\dim\mathscr{L}(I,N)+\dim\mathscr{L}(J,E)=r(p-r)+(n-r)p=pn-r^2.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. u est dans L(E) car u est linéaire et si P est un polynôme de degré au plus n alors $u(P)$ est un polynôme de degré au plus n.
• Les polynômes constants sont dans Ker$u$. Réciproquement , soit Pun élément de Ker$u$ puis $Q=P-P(0)$.
Par hypothèse, $P(0)=P(1)=P(2)=...$ et donc 0, 1, 2, ... sont des racines de Q. Puisque le polynôme Q admet une infinité de racines, Q est nul et donc $P=P(0)$ et $P\in\mathbb{K}_0[X]$. Ainsi, $\mathrm{Ker}u=\mathbb{K}_0[X]$.
• Mais alors, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}u=(n+1)-1=n$. D'autre part, si P est dans $\mathbb{K}_n[X]$, $P(X+1)-P$ est dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ (si on pose $P=a_nX^n+\ldots$, le coefficient de X^n dans $u(P)$ est $a_n-a_n=0$). En résumé, $\mathrm{Im}u\subset\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\dim\mathrm{Im}u=\dim\mathbb{K}_{n-1}[X]<+\infty$ et donc $\mathrm{Im}u=\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}u = \mathbb{K}_0[X] \text{ et } \mathrm{Im}u = \mathbb{K}_{n-1}[X].}$$

2. On part de $P_0 = 1$ et aussi de $P_1 = X$ qui vérifient bien $u(P_0) = 0$ et $u(P_1) = P_0$.
   Trouvons $P_2 = aX^2 + bX$ tel que $u(P_2) = P_1$ (il est clair que si $\deg(P) \geqslant 1$, $\deg(u(P)) = \deg(P) - 1$ et d'autre part, les constantes sont inutiles car $\mathrm{Ker}u = \mathbb{K}_0[X]$).

   $$u(P_2) = P_1 \Leftrightarrow a(X+1)^2 + b(X+1) - aX^2 - bX = X \Leftrightarrow (2a-1)X + a + b = 0 \Leftrightarrow a = \tfrac{1}{2} \text{ et } b = -a.$$

   On prend $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{1}{2}X(X-1)$.
   Trouvons $P_3 = aX^3 + bX^2 + cX$ tel que $u(P_3) = P_2$.

   $$\begin{aligned} u(P_3) = P_2 &\Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) - aX^3 - bX^2 - cX = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\ &\Leftrightarrow \left(3a - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(3a + 2b - \frac{1}{2}\right)X + a + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

   On prend $P_3 = \frac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$.
   Essayons, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

   $$\begin{aligned} u(P_{k+1}) &= \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X+1-i) - \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X-i) = \frac{1}{(k+1)!}((X+1)-(X-k))\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) \\ &= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = P_k. \end{aligned}$$

   Enfin, les P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, constituent une famille de $n+1 = \dim\mathbb{K}_n[X]$ polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{K}_n[X]$ et donc la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée.

Correction de l'exercice 6 ▲

(C'est en fait un exercice sur les polynômes de TCHEBYCHEV de 1ère espèce et vous pouvez généraliser cet exercice en passant au format n au lieu du format 4.)
Si on note C_j, $j \in \{1,2,3,4\}$, la j-ème colonne de A alors $C_j = (\cos(i+j-2)a)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ puis pour j élément de $\{1,2\}$,

$$C_{j+2} + C_j = (2\cos(i+j-1)a\cos a)_{1 \leqslant i \leqslant 4} = 2\cos a C_{j+1}$$

et donc $C_3 = 2\cos a C_2 - C_1 \in \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ et $C_4 = 2\cos a C_3 - C_2 \in \mathrm{Vect}(C_2, C_3) \subset \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$.
Donc $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ et $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(C_1, C_2) \leqslant 2$.
Enfin $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) \\ \cos(a) & \cos(2a) \end{vmatrix} = \cos(2a) - \cos^2 a = \cos^2 a - 1 = -\sin^2 a$.
• Si a n'est pas dans $\pi\mathbb{Z}$, ce déterminant n'est pas nul et donc les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires. Dans ce cas, $\mathrm{rg}A = 2$.
• Si a est dans $\pi\mathbb{Z}$, la première colonne n'est pas nulle et les autres colonnes lui sont colinéaires. Dans ce cas, $\mathrm{rg}A = 1$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2 \text{ si } a \notin \pi\mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{rg}(A) = 1 \text{ si } a \in \pi\mathbb{Z}.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&\dots&\dots&0\\0&1&3&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&n-1\\0&\dots&&\dots&0&1\end{pmatrix}=I+N \text{ où } N=\begin{pmatrix}0&2&0&\dots&\dots&0\\0&0&3&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&n-1\\0&\dots&&\dots&0&0\end{pmatrix}.$$

N est nilpotente et donc $N^n=0$. Par suite,

$$I=I-(-N)^n=(I+N)(I-N+\ldots+(-N)^{n-1}).$$

Ainsi A est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $I-N+\ldots+(-N)^{n-1}$.
Calcul de N^p pour $1\leqslant p\leqslant n$.

$$N^2=\left(\sum_{j=2}^{n} jE_{j-1,j}\right)^2=\sum_{2\leqslant j,k\leqslant n} jkE_{j-1,j}E_{k-1,k}=\sum_{j=2}^{n-1} j(j+1)E_{j-1,j}E_{j,j+1}=\sum_{j=3}^{n} j(j-1)jE_{j-2,j}.$$

c'est-à-dire $N^2=\begin{pmatrix}0&0&2\times3&0&\dots&0\\\vdots&&\ddots&3\times4&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\ddots&0\\&&&&\ddots&(n-1)n\\\vdots&&&&&0\\0&\dots&&\dots&0&0\end{pmatrix}$.

Ensuite, $N^3=\left(\sum_{j=3}^{n}(j-1)jE_{j-2,j}\right)\left(\sum_{k=2}^{n} kE_{k-1,k}\right)=\sum_{j=4}^{n} j(j-1)(j-2)E_{j-3,j}$.
Supposons que pour p donné dans $[\![1,n-1]\!]$, $N^p=\sum_{j=p+1}^{n} j(j-1)\ldots(j-p+1)E_{j-p,j}$.
Alors $N^{p+1}=\left(\sum_{j=p+1}^{n} j(j-1)\ldots(j-p+1)E_{j-p,j}\right)\left(\sum_{k=2}^{n} kE_{k-1,k}\right)=\sum_{j=p+2}^{n} j(j-1)\ldots(j-p)E_{j-p-1,j}$. Ainsi

$$\boxed{A^{-1}=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ où } a_{i,j}=0 \text{ si } i>j,\ 1 \text{ si } i=j \text{ et } (-1)^{i+j-2}\prod_{k=0}^{j-i-1}(j-k) \text{ sinon.}}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

On note $\mathscr{B}=(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$\mathrm{Tr}f=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\alpha_{i,j}$ où $\alpha_{i,j}$ désigne la (i,j)-ème coordonnée de $f(E_{i,j})=AE_{i,j}+E_{i,j}A$ dans la base $\mathscr{B}$.
Mais pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ donné,

$$AE_{i,j}=\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

et de même,

$$E_{i,j}A=\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l}=\sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}.$$

Donc $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\alpha_{i,j}=a_{i,i}+a_{j,j}$ puis

$$\mathrm{Tr}f=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{i,i}+a_{j,j})=2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,i}=2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)=2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Tr}A=2n\mathrm{Tr}A.$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}f=2n\mathrm{Tr}A.}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Si M est solution, nécessairement $a\text{Tr}M + (\text{Tr}M)(\text{Tr}A) = \text{Tr}B$ ou encore $(\text{Tr}M)(a+\text{Tr}A) = \text{Tr}B$.
1er cas. Si $\text{Tr}A \neq -a$ alors nécessairement $\text{Tr}M = \frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}$ puis $M = \frac{1}{a}\left(B - \frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}A\right)$.
Réciproquement, si $M = \frac{1}{a}\left(B - \frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}A\right)$ alors

$$aM + (TrM)A = B - \frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}A + \frac{1}{a}\left(\text{Tr}B - \frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}\text{Tr}A\right)A = B.$$

$$\boxed{\text{Si Tr}A \neq -a,\ \mathscr{S} = \left\{\frac{1}{a}\left(B - \frac{\text{Tr}B}{a+\text{Tr}A}A\right)\right\}.}$$

2ème cas. Si $\text{Tr}A = -a$ et $\text{Tr}B \neq 0$, il n'y a pas de solution .
3ème cas. Si $\text{Tr}A = -a$ et $\text{Tr}B = 0$, M est nécessairement de la forme $\frac{1}{a}B + \lambda A$ où λ est un réel quelconque.
Réciproquement, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ puis $M = \frac{1}{a}B + \lambda A$. Alors

$$aM + (\text{Tr}M)A = B + a\lambda A + \left(\frac{1}{a}\text{Tr}B + \lambda\text{Tr}A\right)A = B + a\lambda A - a\lambda A = B,$$

et toute matrice de la forme $B + \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est solution.

$$\boxed{\text{Si Tr}A = -a,\ \mathscr{S} = \varnothing \text{ si Tr}B \neq 0 \text{ et } \mathscr{S} = \{B + \lambda A,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ si Tr}B = 0.}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, notons C_j la j-ème colonne de la matrice A. Posons encore $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}$.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$Cj = (i + j(i+1))_{1 \leqslant i \leqslant n} = (i)_{1 \leqslant i \leqslant n} + j(i+1)_{1 \leqslant i \leqslant n} = U + jV.$$

Donc $\text{Vect}(C_1, ..., C_n) \subset \text{Vect}(U,V)$ et en particulier, $\text{rg}A \leqslant 2$. Maintenant, si $n \geqslant 2$, les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires car $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Donc, si $n \geqslant 2$, $\text{rg}A = 2$ et si $n = 1$, $\text{rg}A = 1$.

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2,\ \text{rg}(i+j+ij)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = 2 \text{ et si } n = 1,\ \text{rg}(i+j+ij)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = 1.}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. $E = \text{Vect}(I,J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension inférieure ou égale à 2. De plus, la famille (I,J) est libre car la matrice J n'est pas une matrice scalaire et donc $\dim E = 2$.
2. Puisque $(E,+,.)$ est un espace vectoriel, $(E,+)$ est un groupe commutatif.
   Ensuite, $I^2 = I \in E$, $IJ = JI = J \in E$ et $J^2 = (I + E_{1,2})^2 = I + 2E_{1,2} = I + 2(J-I) - I = 2J - I \in E$. Par bilinéarité du produit matriciel, la multiplication est interne dans E et commutative. De plus, $I \in E$ et finalement E est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   Remarque. $M(x,y)M(x',y') = xx'I + (xy' + yx')J + yy'(2J - I) = (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J$.

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$M(x,y) \text{ est inversible dans } E \Leftrightarrow \exists (x',y')\in\mathbb{R}^2/;(xx'-yy')I+(xy'+yx'+2yy')J=I$$
$$\Leftrightarrow \exists (x',y')\in\mathbb{R}^2/;\left\{\begin{array}{l} xx'-yy'=1\\ yx'+(x+2y)y'=0\end{array}\right. \text{ (car la famille } (I,J) \text{ est libre)} \quad (*).$$

Le déterminant de ce système d'inconnue (x',y') est $x(x+2y)+y^2=(x+y)^2$.
• Si $x+y\neq 0$, le système $(*)$ admet une et une seule solution. Dans ce cas, $M(x,y)$ est inversible dans E.
• Si $x+y=0$, le système $(*)$ s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x(x'+y')=1\\ -x(x'+y')=0\end{array}\right.$ et n'a pas de solution. Dans ce cas, $M(x,y)$ n'est pas inversible dans E.

$$\boxed{M(x,y) \text{ est inversible dans } E \Leftrightarrow x+y\neq 0.}$$

Remarque. Puisque $I\in E$, $M(x,y)$ est inversible dans E si et seulement si $M(x,y)$ est inversible dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Posons $X=xI+yJ$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(a) D'après 1), $X^2=(x^2-y^2)I+(2xy+2y^2)J$. Donc

$$X^2=I \Leftrightarrow x^2-y^2=1 \text{ et } 2xy+2y^2=0 \text{ (car la famille } (I,J) \text{ est libre)}$$
$$\Leftrightarrow (y=0 \text{ et } x^2=1) \text{ ou } (y=-xet0=1) \Leftrightarrow (y=0 \text{ et } x=1) \text{ ou } (y=0 \text{ et } x=-1)$$
$$\Leftrightarrow X=I \text{ ou } X=-I.$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\{I,-I\}.}$$

(b)

$$X^2=0 \Leftrightarrow x^2-y^2=0 \text{ et } 2xy+2y^2=0 \Leftrightarrow (y=0 \text{ et } x^2=0) \text{ ou } (y=-xet0=0) \Leftrightarrow y=-x.$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\{x(I-J),\ x\in\mathbb{R}\}.}$$

Remarque. L'équation $X^2=0$, de degré 2, admet une infinité de solutions dans E ce qui montre une nouvelle fois que $(E,+,\times)$ n'est pas un corps.

(c)

$$X^2=X \Leftrightarrow x^2-y^2=x \text{ et } 2xy+2y^2=y \Leftrightarrow y(2x+2y-1)=0 \text{ et } x^2-y^2=x$$
$$\Leftrightarrow (y=0 \text{ et } x^2=x) \text{ ou } (2(x+y)=1 \text{ et } (x+y)(x-y)=x) \Leftrightarrow (X=0 \text{ ou } X=I) \text{ ou } (2(x+y)=1 \text{ et } x-y$$
$$\Leftrightarrow X=0 \text{ ou } X=I.$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\{0,I\}.}$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $N=J-I=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Alors $M(x,y)=xI+y(I+N)=(x+y)I+yN$.

Puisque I et N commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$(M(x,y))^n=((x+y)I+yN)=(x+y)^nI+ny(x+y)^{n-1}N \text{ (car } N^k=0 \text{ pour } k\geqslant 2)$$
$$=\begin{pmatrix} (x+y)^n & ny(x+y)^{n-1}\\ 0 & (x+y)^n\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (M(x,y))^n=\begin{pmatrix}(x+y)^n&ny(x+y)^{n-1}\\0&(x+y)^n\end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

$\{0\}$ est un idéal bilatère de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.
Soit I un idéal non nul de de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$. Montrons que $I=\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Il existe une matrice A non nulle dans I. Pour tout quadruplet d'indices (i,j,k,l), I contient le produit

$$E_{i,j}AE_{k,l}=\sum_{1\leqslant u,v\leqslant n}a_{u,v}E_{i,j}E_{u,v}E_{k,l}=a_{j,k}E_{i,l}.$$

A est non nulle et on peut choisir j et k tels que $a_{j,k}$ soit non nul. I contient alors $a_{j,k}E_{i,l}\frac{1}{a_{j,k}}I_n=E_{i,l}$. Finalement I contient toutes les matrices élémentaires et donc encore toutes les sommes du type $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}I_nE_{i,j}=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, c'est-à-dire $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tout entier.

$$\boxed{\text{Les idéaux bilatères de l'anneau } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times) \text{ sont } \{0\} \text{ et } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

On inverse A en l'interprétant comme une matrice de passage.
Soit $\mathscr{B}=(e_1,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e'_1,...,e_n)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}$.

$$A\text{ inversible}\Leftrightarrow(e'_1,...,e'_n)\text{ base de }E\Leftrightarrow\text{Vect}(e_1,...,e_n)\subset\text{Vect}(e'_1,...,e'_n)\Leftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ e_i\in\text{Vect}(e'_1,...,e'_n).$$

Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.
Soit $u=e_1+...+e_n$. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $e'_i=a_ie_i+u$ ce qui fournit $e_i=\frac{1}{a_i}(e'_i-u)$.
En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient $u=\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}e'_i-\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right)u$ et donc $\lambda u=\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}e'_i$ où $\lambda=1+\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}$.
1er cas. Si $\lambda\neq0$, on peut exprimer u en fonction des e'_i, $1\leqslant i\leqslant n$, et donc les e_i fonction des e'_i. Dans ce cas A est inversible. Plus précisément, $u=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}e'_i$ puis, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $e_i=\frac{1}{a_i}\left(e'_i-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^n\frac{1}{a_j}e'_j\right)$ et enfin

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1}-\frac{1}{\lambda a_1^2}&-\frac{1}{\lambda a_2a_1}&\cdots&\cdots&-\frac{1}{\lambda a_na_1}\\-\frac{1}{\lambda a_1a_2}&\frac{1}{a_2}-\frac{1}{\lambda a_2^2}&&&\vdots\\\vdots&-\frac{1}{\lambda a_2a_3}&\ddots&&\vdots\\\vdots&\vdots&&\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{\lambda a_{n-1}^2}&-\frac{1}{\lambda a_na_{n-1}}\\-\frac{1}{\lambda a_1a_n}&-\frac{1}{\lambda a_2a_n}&\cdots&-\frac{1}{\lambda a_na_{n-1}}&\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\lambda a_n^2}\end{pmatrix}\text{ où }\lambda=1+\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}.$$

2ème cas. Si $\lambda=0$, on a $\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}e'_i=0$ ce qui montre que la famille $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est liée et donc que A n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 14 ▲

Par hypothèse, $a_{i,j}=0$ pour $j\leqslant i+r-1$ et $bi,j=0$ pour $j\leqslant i+s-1$.
Soient i et j deux indices tels que $j\leqslant i+r+s-1$. Le coefficient ligne i, colonne j, de AB vaut $\sum_{k=1}^na_{i,k}b_{k,j}$.
Dans cette somme, si $k\leqslant i+r-1$, $a_{i,k}=0$. Sinon $k\geqslant i+r$ et donc $j\leqslant i+r+s-1\leqslant k+s-1$ et dans ce cas $b_{k,j}=0$.
Finalement, le coefficient ligne i, colonne j, de AB est bien nul si $j\leqslant i+r+s-1$.

Correction de l'exercice 15 ▲

Notons A la matrice de l'énoncé. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule du binôme de Newton, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(X^k) = (X+1)^k$. f coïncide donc sur la base $\mathscr{B}$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe $P(X+1)$ et f est donc cet endomorphisme.
f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de réciproque l'application qui à un polynôme P associe $P(X-1)$. Par suite, A est inversible d'inverse la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.
Le coefficient ligne i, colonne j, de A^{-1} vaut donc 0 si $i > j$ et $(-1)^{i+j}\binom{j}{i}$ si $i \leqslant j$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Calculons $A\overline{A}$. Soit $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne j, colonne k de $A\overline{A}$ vaut

$$\sum_{u=1}^{n} \omega^{(j-1)(u-1)}\omega^{-(u-1)(k-1)} = \sum_{u=1}^{n} \left(\omega^{j-k}\right)^{u-1}.$$

• Si $j = k$, ce coefficient vaut n.
• Si $j \neq k$, puisque $j-k$ est strictement compris entre $-n$ et n et que $j-k$ n'est pas nul, ω^{j-k} est différent de 1. Le coefficient ligne j, colonne k, de $A\overline{A}$ est donc égal à $\frac{1-\left(\omega^{j-k}\right)^n}{1-\omega^{j-k}} = \frac{1-1}{1-\omega^{j-k}} = 0$.
Finalement, $A\overline{A} = nI_n$. Ainsi, A est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}$.

Correction de l'exercice 17 ▲

On a toujours $A^t(\text{com}A) = (\det A)I_n$. Par passage au déterminant et puisqu'une matrice a même déterminant que sa transposée, on obtient

$$(\det A)(\det(\text{com}A)) = (\det A)^n.$$

• Si $\det A$ n'est pas nul, on en déduit $\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}$.
• Si $\det A$ est nul, on a $A^t(\text{com}A) = 0$ et donc ${}^t\text{com}A$ est soit nulle, soit diviseur de zéro, et donc dans tous les cas non inversible. Il en est de même de $\text{com}A$ et donc $\det(\text{com}A) = 0 = (\det A)^{n-1}$. Finalement

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_(\mathbb{R}),\ \det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}.}$$

Correction de l'exercice 18 ▲

• Si A est de rang n, c'est-à-dire inversible, l'égalité $(\text{com}A) \times \frac{1}{\det A}{}^tA = I_n$ montre que $\text{com}A$ est inversible et donc de rang n.
Dans ce qui suit, le lien entre le rang d'une matrice et la nullité des différents mineurs est hors programme. On suppose maintenant $\text{rg}(A) \leqslant n-1$.
• Si $\text{rg}A \leqslant n-2$. Montrons que tous les mineurs de format $n-1$ extraits de A sont nuls.
Soient $j_1, \ldots, j_{n-1}$, $n-1$ numéros de colonnes deux à deux distincts puis $A' \in \mathscr{M}_{n,n-1}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $C_{j_1}, \ldots, C_{j_{n-1}}$. Puisque A est de rang au plus $n-2$, la famille des colonnes de A' est liée et donc A' est de rang au plus $n-2$. Il en est de même de la matrice ${}^tA' \in \backslash - \infty, \backslash(\mathbb{K})$ et donc toute matrice A'' obtenue en supprimant l'une des colonnes de A' est carrée, de format $n-1$, non inversible. Son déterminant est donc nul.
Ainsi, tout déterminant obtenu en supprimant une ligne et une colonne de $\det(A)$ est nul ou encore tous les mineurs de format $n-1$ extraits de A sont nuls. Finalement, si $\text{rg}A \leqslant n-2$, $\text{com}A = 0$.
• Il reste à étudier le cas où $\text{rg}A = n-1$ et donc $\dim KerA = 1$.
L'égalité $\det A = 0$ impose $A^t(\text{com}A) = 0$. Mais alors $\text{Im}({}^t(\text{com}A)) \subset \text{Ker}A$ et en particulier $\text{rg}(\text{com}A) = \text{rg}({}^t(\text{com}A)) \leqslant \dim(\text{Ker}A) = 1$. Ainsi, si $\text{rg}(A) = n-1$ alors $\text{rg}(\text{com}A) \in \{0,1\}$.
Montrons que l'un au moins des mineurs de format $n-1$ extraits de A est non nul ce qui montrera que $\text{rg}(\text{com}A) = 1$.
Puisque $\text{rg}A = n-1$, il existe $n-1$ colonnes $C_{j_1}, \ldots, C_{j_{n-1}}$ de A constituant une famille libre. La matrice $A' \in \mathscr{M}_{n,n-1}(\mathbb{K})$ constituée par ces colonnes est de rang $n-1$. Il en est de même de sa transposée. Mais alors,

il existe $n-1$ colonnes de ${}^tA'$ linéairement indépendantes. La matrice A'' constituée de ces $n-1$ colonnes est carrée de format $n-1$ et de rang $n-1$. A'' est donc inversible et il en est de même de ${}^tA''$. Le déterminant de ${}^tA''$ est un mineur de format $n-1$ extrait de A et non nul.
En résumé,

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}(\mathrm{com}A) = \begin{cases} n \text{ si } \mathrm{rg}(A) = n \\ 1 \text{ si } \mathrm{rg}(A) = n-1 \\ 0 \text{ si } \mathrm{rg}(A) \leqslant n-2 \end{cases}.}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

Si $\mathrm{rg}M \leqslant n-1$, l'égalité $M = \mathrm{com}M$ entraîne $M^tM = M^t(\mathrm{com}M) = (\det M)I_n = 0$ et donc $M = 0$. En effet,

$$M^tM = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ M^tMX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXM^tMX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left\|{}^tMX\right\|^2 = 0$$
$$\Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tMX = 0 \Rightarrow {}^tM = 0 \Rightarrow M = 0.$$

En résumé, si M est solution, $M = 0$ ou M est inversible.
Dans le deuxième cas, d'après l'exercice 17, on doit avoir $\det M = (\det M)^{n-1}$ et donc, puisque $\det M \neq 0$, $\det M \in \{-1,1\}$ (et même $\det M = 1$ si n est impair) car $\det M$ est réel.
• Si $\det M = -1$, on doit avoir $M^tM = -I_n$ mais ceci est impossible car le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice M^tM vaut $m_{1,1}^2 + \ldots + m_{1,n}^2 \neq -1$.
• Il reste le cas où $\det M = 1$, l'égalité $M = \mathrm{com}M$ entraîne $M^tM = I_n$ c'est-à-dire M est orthogonale positive.
Réciproquement, si M est orthogonale positive, ${}^tM = M^{-1} = \frac{1}{\det M}{}^t(\mathrm{com}M) = {}^t\mathrm{com}M$ et donc $M = \mathrm{com}M$.
Finalement ,

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\} \cup O_n^+(\mathbb{R}).}$$

Correction de l'exercice 20 ▲

Montrons que $\mathrm{Ker}A$ est réduit à $\{0\}$. Dans le cas contraire, on dispose d'un vecteur colonne non nul X_0 tel que $AX_0 = 0$. Posons $X_0 = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0 \Rightarrow a_{i,i}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j \Rightarrow |a_{i,i}||x_i| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}||x_j|.$$

On prend alors pour i un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \mathrm{Max}\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}$. Puisque $X \neq 0$, on a $|x_{i_0}| > 0$. De plus,

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|\right)|x_{i_0}|,$$

et puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient après simplification $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$ ce qui contredit les hypothèses.
Donc $\mathrm{Ker}A = \{0\}$ et A est inversible.

Correction de l'exercice 21 ▲

Non, car $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0 \neq n = \mathrm{Tr}(I_n)$.

Correction de l'exercice 22 ▲

Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, posons $f(A) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}a_{i,j}$ où les $\alpha_{i,j}$ sont indépendants de A (les $\alpha_{i,j}$ sont les $f(E_{i,j})$).
Soient i et j deux entiers distincts pris dans $[\![1,n]\!]$.

$$\alpha_{i,i} = f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j}) = \alpha_{j,j},$$

et

$$\alpha_{i,j} = f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0) = 0.$$

Finalement en notant α la valeur commune des $\alpha_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, pour toute matrice A on a $f(A) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \alpha \mathrm{Tr} A$ où α est indépendant de A. (Réciproquement, les $f = \alpha \mathrm{Tr}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, sont des formes linéaires vérifiant $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(AB) = f(BA)$.)

Correction de l'exercice 23 ▲

Puisque $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 = 1$, il existe un unique réel $\theta_n \in [-\pi, \pi[$ tel que

$$\cos\theta_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \text{ et } \sin\theta_n = \frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}.$$

La matrice A_n s'écrit alors $A_n = \sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$ et donc

$$(A_n)^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Maintenant,

$$\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2} \times o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(o(1)) \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

Ensuite, en notant ε le signe de a, $\theta_n = \varepsilon \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et on en déduit que

$$n\theta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sin(\theta_n) = n\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\to} a.$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(A_n)^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 24 ▲

Soient i et j deux indices pris dans $[\![1,n]\!]$.

$$f(E_{i,j}) = E_{i,j}\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l},$$

et en remplissant coefficient à coefficient, on trouve la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} {}^tA & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & {}^tA \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 25 ▲

On note r le rang de A. Si $r = 0$, A est nulle et donc B est nulle.

Sinon, il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $A = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient $P' = \begin{pmatrix} P & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & P \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ et $Q' = \begin{pmatrix} P & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$. Puisque $\det(P') = (\det(P))^p \neq 0$ et $\det(Q') = (\det(Q))^p \neq 0$, les matrices P' et Q' sont inversibles. De plus, un calcul par blocs montre que

$$B = \begin{pmatrix} PJ_rQ & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & PJ_rQ \end{pmatrix} = P'J'_rQ' \text{ où } J'_r = \begin{pmatrix} J_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_r \end{pmatrix}.$$

La matrice B est équivalente a la matrice J'_r et a donc même rang que J'_r. Enfin, en supprimant les lignes nulles et les colonnes nulles, on voit que la matrice J'_r a même rang que la matrice I_{pr} à savoir pr. Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\mathrm{rg}B = p\mathrm{rg}A.}$$

Correction de l'exercice 26 ▲

Soit r le rang de H. Il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $H = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'égalité $HAH = \lambda_A H$ s'écrit après simplifications $J_rQAPJ_r = \lambda_A J_r$. Maintenant , quand A décrit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $B = QAP$ décrit également $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (par exemple, l'application qui à A associe QAP est une permutation de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de réciproque l'application qui à A associe $Q^{-1}AP^{-1}$).
L'énoncé s'écrit maintenant de manière plus simple : montrons que $(\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \exists \lambda_B \in \mathbb{K}/\ J_rBJ_r = \lambda_B J_r) \Rightarrow r \leqslant 1$.
Un calcul par blocs fournit en posant $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$

$$J_rBJ_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais si $r \geqslant 2$, il existe des matrices carrées B_1 de format r qui ne sont pas des matrices scalaires et donc telles que B_1 n'est pas colinéaire à I_r. Donc $r \leqslant 1$.

Correction de l'exercice 27 ▲

(1) $\Rightarrow$ (2).
$M^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}M \subset \mathrm{Ker}M \Rightarrow \mathrm{rg}M \leqslant \dim(\mathrm{Ker}M) = 3 - \mathrm{rg}M$ et donc $\mathrm{rg}M \leqslant 1$.
Si $\mathrm{rg}M = 0$ alors $\mathrm{Tr}M = 0$. On suppose maintenant que $\mathrm{rg}M = 1$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}M) = 2$.
Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}M$ alors il existe un vecteur e_3 (non nul) tel que $Me_3 = e_1$.
On complète la famille libre (e_1) de $\mathrm{Im}M \subset \mathrm{Ker}M$ en (e_1, e_2) base de $\mathrm{Ker}M$. La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0 \Rightarrow M(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0 \Rightarrow ce_1 = 0 \Rightarrow c = 0,$$

puis $a = b = 0$ car la famille (e_1, e_2) est libre.
M est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en particulier $\mathrm{Tr}M = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1).
Si $\text{rg}M = 0$, $M^2 = 0$.
Si $\text{rg}M = 1$, on peut se rappeler de l'écriture générale d'une matrice de rang 1 : il existe trois réels u_1, u_2 et u_3 non tous nuls et trois réels v_1, v_2 et v_3 non tous nuls tels que $M = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}$ ou encore il existe deux vecteurs colonnes, tous deux non nuls U et V tels que $M = U^tV$. L'égalité $\text{Tr}M = 0$ fournit $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$ ou encore ${}^tUV = 0$. Mais alors

$$M^2 = U^tVU^tV = U^t({}^tUV)^tV = 0$$

Cet exercice admet des solutions bien plus brèves avec des connaissances sur la réduction .

Correction de l'exercice 28 ▲

Soit p un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} A^pB - BA^p &= A^pB - A^{p-1}BA + A^{p-1}BA - A^{p-2}BA^2 + A^{p-2}BA^2 - \ldots + ABA^{p-1} - BA^p \\ &= \sum_{k=0} (A^{p-k}BA^k - A^{p-k-1}BA^{k+1}) = \sum_{k=0} A^{p-k-1}(AB - BA)A^k = \sum_{k=0} A^{p-k-1}AA^k \sum_{k=0} A^p \\ &= pA^p. \end{aligned}$$

Donc $2010 \times \text{Tr}(A^{2010}) = \text{Tr}(2010\, A^{2010}) = \text{Tr}(A^{2010}B) - \text{Tr}(BA^{2010}) = 0$ et $\text{Tr}(A^{2010}) = 0$.

Correction de l'exercice 29 ▲

Si $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables alors nécessairement $\text{Tr}(M(a)) = \text{Tr}(N(a))$. Or, pour tout scalaire a, $\text{Tr}(M(a)) = 4 - 3a = \text{Tr}(N(a))$. La trace ne fournit aucun renseignement.
On doit aussi avoir $\det(M(a)) = \det(N(a))$. Or, $\det(N(a)) = (1-a)^2(2-a)$ et

$$\begin{aligned} \det(M(a)) &= (4-a)(a^2-1-2) + 6(1-a+1) + 2(2-1-a) = (4-a)(a^2-3) + 14 - 8a = -a^3 + 4a^2 - 5a + 2 \\ &= (a-1)^2(2-a) = \det(N(a)). \end{aligned}$$

Le déterminant ne fournit aucun renseignement.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ de matrice $M(a)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (i,j,k)$ de $\mathbb{K}^3$.
Le problème posé équivaut à l'existence d'une base $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{K}^3$ telle que $f(e_1) = (1-a)e_1$, $f(e_2) = (1-a)e_2 + e_1$ et $f(e_3) = (2-a)e_3$. Soit (x,y,z) un élément de $\mathbb{K}^3$.

• $f((x,y,z)) = (1-a)(x,y,z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=0 \\ -6x-2y+2z=0 \\ 2x+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=x \end{array}\right.$. On peut prendre $e_1 = (1,-2,1)$.

• $f((x,y,z)) = (1-a)(x,y,z) + (1,-2,1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=1 \\ -6x-2y+2z=-2 \\ 2x+y=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x-1 \\ z=x-2 \end{array}\right.$. On peut prendre $e_2 = (0,-1,-2)$.

• $f((x,y,z)) = (2-a)(x,y,z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ -6x-3y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=0 \end{array}\right.$. On peut prendre $e_3 = (1,-2,0)$.

La matrice de la famille $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ dans la base $\mathscr{B}_0$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. $\det P = -4+4+1 = 1 \neq 0$ et donc la famille $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$. Puisque $\text{Mat}_{\mathscr{B}_0} f = M(a)$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}} f = N(a)$, les matrices $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables.

Correction de l'exercice 30 ▲

Soient A et B deux matrices carrées réelles de format n semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Il existe P élément de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PB = AP$ (bien plus manipulable que $B = P^{-1}AP$).
Posons $P = Q + iR$ où Q et R sont des matrices réelles. Par identification des parties réelles et imaginaires, on a $QB = AQ$ et $RB = AR$ mais cet exercice n'en est pas pour autant achevé car Q ou R n'ont aucune raison d'être inversibles.
On a $QB = AQ$ et $RB = AR$ et donc plus généralement pour tout réel x, $(Q + xR)B = A(Q + xR)$.
Maintenant, $\det(Q + xR)$ est un polynôme à coefficients réels en x mais n'est pas le polynôme nul car sa valeur en i (tel que $i^2 = -1$) est $\det P$ qui est non nul. Donc il n'existe qu'un nombre fini de réels x, éventuellement nul, tels que $\det(Q + xR) = 0$. En particulier, il existe au moins un réel x_0 tel que la matrice $P_0 = Q + x_0R$ soit inversible. P_0 est une matrice réelle inversible telle que $P_0A = BP_0$ et A et B sont bien semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 31 ▲

1. Soient p l'indice de nilpotence de A et q l'indice de nilpotence de B. Puisque A et B commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}$$

Dans cette somme,
• si $k \geqslant p$, $A^k = 0$ et donc $A^k B^{p+q-1-k} = 0$
• si $k \leqslant p-1$ alors $p+q-1-k \geqslant q$ et encore une fois $B^{p+q-1-k} = 0$.
Finalement, $(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k} = 0$ et $A+B$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $p+q-1$.
Les sommes définissant $\exp A$, $\exp B$ et $\exp(A+B)$ sont finies car A, B et $A+B$ sont nilpotentes et

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} A^i B^j \\ &\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} B^j\right) \text{ (toutes les sommes sont finies)} \\ &= \exp A \times \exp B.\end{aligned}$$

2. Si A est nilpotente, $-A$ l'est aussi et commute avec A. Donc $\exp A \times \exp(-A) = \exp(A - A) = \exp(0) = I_n$. $\exp A$ est inversible à gauche et donc inversible et $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.
3. Les puissances de A sont bien connues et on trouve immédiatement

$$\exp A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$