Dénombrement

Exercice 1

Pour A,B deux ensembles de E on note $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Pour E un ensemble fini, montrer :

$$\operatorname{Card} A\Delta B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2\operatorname{Card} A\cap B.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000236]

Exercice 2

En utilisant la fonction $x\mapsto(1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} kC_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000220]

Exercice 3

En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

1. 2^n+1 est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;
2. $3^{2n+1}+2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000222]

Exercice 4 **I

On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [005284]

Exercice 5

On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000239]

Exercice 6 Permutations

Combien y a-t-il de bijections f de $\{1,\dots,12\}$ dans lui-même possédant :

1. la propriété : n est pair $\Rightarrow f(n)$ est pair ?
2. la propriété : n est divisible par 3 $\Rightarrow f(n)$ est divisible par 3 ?

3. ces deux propriétés à la fois ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant *bijection* par *application.*

Correction ▼ Vidéo ■ [002912]

Exercice 7

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000237]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Tout d'abord faire un dessin (avec des patates !).
Pour A et B deux ensembles finis quelconques, commencer par (re)démontrer la formule : $\operatorname{Card} A\cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A\cap B$.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Évaluer $(1+x)^n$ en $x=1$, d'une part directement et ensuite avec la formule du binôme de Newton. Pour la deuxième égalité commencer par dériver $x\mapsto (1+x)^n$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Commencer par $2^n = (3-1)^n$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Coder un chemin par un mot : D pour droite, H pour haut.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Petits rappels : dans un jeu de 52 cartes il y a 4 "couleurs" (pique, cœur, carreau, trèfle) et 13 "valeurs" ($1=$ As, $2,3,\dots,10$, Valet, Dame, Roi). Une "main" c'est juste choisir 5 cartes parmi les 52, l'ordre du choix n'important pas.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Combien y-a-t'il de choix pour l'élément de A ? Combien y-a-t'il de choix pour le sous-ensemble de $E\setminus A$?

Correction de **l'exercice 1 ▲**

Tout d'abord si deux ensembles finis A et B sont disjoints alors $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.
Si maintenant A et B sont deux ensembles finis quelconques : nous décomposons $A \cup B$ en trois ensembles :

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B).$$

Ces trois ensembles sont disjoints deux à deux donc : $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A \setminus (A \cap B) + \operatorname{Card} B \setminus (A \cap B) + \operatorname{Card} A \cap B$.
Mais pour $R \subset S$ nous avons $\operatorname{Card} S \setminus R = \operatorname{Card} S - \operatorname{Card} R$.
Donc $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A - \operatorname{Card} A \cap B + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B + \operatorname{Card} A \cap B$.
Donc $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B$.
Appliquons ceci à $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$:

$$\operatorname{Card} A \Delta B = \operatorname{Card} A \cup B - \operatorname{Card} A \cap B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2 \operatorname{Card} A \cap B.$$

Correction de **l'exercice 2 ▲**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = (1+x)^n$. Par la formule du binôme de Newton nous savons que

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

1. En calculant $f(1)$ nous avons $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$.
2. En calculant $f(-1)$ nous avons $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.
3. Maintenant calculons $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^{k-1}$. Évaluons $f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k$.
4. Il s'agit ici de calculer la primitive F de f qui correspond à la somme : $F(x) = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1}$. En $F(1) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$.

Correction de **l'exercice 3 ▲**

L'astuce consiste à écrire $2 = 3 - 1$ (!)

$$2^n = (3-1)^n = 3 \times p + (-1)^n$$

Où $3 \times p$ ($p \in \mathbb{Z}$) représente les n premiers termes de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k (-1)^{n-k}$ et $(-1)^n$ est le dernier terme. Donc $2^n - (-1)^n = 3p$. Si n est impair l'égalité s'écrit $2^n + 1 = 3p$ et donc $2^n + 1$ est divisible par 3. Si n est pair $2^n - 1 = 3p$ donc $2^n + 1 = 3p + 2$ qui n'est pas divisible par 3.
Pour l'autre assertion regarder $3 = 7 - 4$.

Correction de **l'exercice 4 ▲**

On pose $H =$ "vers le haut" et $D =$ "vers la droite". Un exemple de chemin de $(0,0)$ à (p,q) est le mot $DD\ldots DHH\ldots H$ où D est écrit p fois et H est écrit q fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes du mot précédent.
Le nombre de choix de l'emplacement du H est C_{p+q}^q. Une fois que les lettres H sont placées il n'y a plus de choix pour les lettres D. Il y a donc C_{p+q}^q chemins possibles.
Remarque : si on place d'abord les lettres D alors on a C_{p+q}^p choix possibles. Mais on trouve bien sûr le même nombre de chemins car $C_{p+q}^p = C_{p+q}^{(p+q)-p} = C_{p+q}^q$.

Correction de **l'exercice 5 ▲**

1. Il s'agit donc de choisir 5 cartes parmi 52 : il y a donc C_{52}^5 mains différentes. Ceci peut être calculé : $C_{52}^5 = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2598960$.

2. Il y a 4 choix pour l'as (l'as de pique ou l'as de cœur ou ...), puis il faut choisir les 4 cartes restantes parmi 48 cartes (on ne peut pas rechoisir un as). Bilan $4 \times C_{48}^4$ mains comprenant exactement un as.
3. Il est beaucoup plus facile de compter d'abord les mains qui ne contiennent aucun valet : il faut choisir 5 cartes parmi 48 (on exclut les valets) ; il y a donc C_{48}^5 mains ne contenant aucun valet. Les autres mains sont les mains qui contiennent au moins un valet : il y en a donc $C_{52}^5 - C_{48}^5$.
4. Nous allons d'abord compter le nombre de mains que ne contiennent pas de roi ou pas de dame. Le nombre de mains qui ne contiennent pas de roi est C_{48}^5 (comme la question 3.). Le nombre de mains qui ne contiennent pas de dame est aussi C_{48}^5. Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame *n'est pas* $C_{48}^5 + C_{48}^5$, car on aurait compté deux fois les mains ne contenant ni roi, ni dame (il y a C_{44}^5 telles mains). Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame est donc : $2C_{48}^5 - C_{44}^5$ (on retire une fois les mains comptées deux fois !). Ce que nous cherchons ce sont toutes les autres mains : celles qui contiennent au moins un roi et au moins une dame. Leur nombre est donc : $C_{52}^5 - 2C_{48}^5 + C_{44}^5$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $(6!)^2$
2. $4! \times 8!$
3. $2!2!4!4!$
4. $6^6 \times 12^6$, $4^4 \times 12^8$, $2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Fixons un élément de A ; dans $E \setminus A$ (de cardinal $n-p$), nous pouvons choisir C_{n-p}^k ensembles à k éléments ($k = 0, 1, \dots, n$). Le nombre d'ensembles dans le complémentaire de A est donc

$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^k = 2^{n-p}.$$

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix, donc le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$
