Droites du plan ; droites et plans de l'espace

Fiche corrigée par Arnaud Bodin

1 Droites dans le plan

Exercice 1

Soit P un plan muni d'un repère $\mathscr{R}(O,\vec{i},\vec{j})$, les points et les vecteurs sont exprimés par leurs coordonnées dans $\mathscr{R}$.

1. Donner un vecteur directeur, la pente une équation paramétrique et une équation cartésienne des droites (AB) suivantes :
   (a) $A(2,3)$ et $B(-1,4)$
   (b) $A(-7,-2)$ et $B(-2,-5)$
   (c) $A(3,3)$ et $B(3,6)$
2. Donner des équations paramétriques et cartésiennes des droites passant par A et dirigées par $\vec{v}$ avec :
   (a) $A(2,1)$ et $\vec{v}(-3,-1)$
   (b) $A(0,1)$ et $\vec{v}(1,2)$
   (c) $A(-1,1)$ et $\vec{v}(1,0)$
3. Donner des équations paramétriques et cartésiennes des droites définies comme suit :
   (a) passant par le point $(0,4)$ et de pente 3,
   (b) passant par le point $(2,-3)$ et parallèle à l'axe des x,
   (c) passant par le point $(-2,5)$ et parallèle à la droite $D : 8x+4y=3$.

Correction ▼ [001956]

Exercice 2

On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations $(AB) : x+2y=3, (AC) : x+y=2, (BC) : 2x+3y=4$.

1. Donner les coordonnées des points A,B,C.
2. Donner les coordonnées des milieux A',B',C' des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
3. Donner une équation de chaque médiane et vérifier qu'elles sont concourantes.

Indication ▼ Correction ▼ [001960]

Exercice 3 Point équidistant d'une famille de droites

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère la droite D_λ d'équation cartésienne : $(1-\lambda^2)x+2\lambda y=4\lambda+2$.
Montrer qu'il existe un point Ω équidistant de toutes les droites D_λ.

Indication ▼ Correction ▼ [004952]

Exercice 4

Déterminer le projeté orthogonal du point $M(x_0,y_0)$ sur la droite (D) d'équation $2x-3y=5$ ainsi que son symétrique orthogonal.

Correction ▼ [006884]

2 Droites et plans dans l'espace

Exercice 5

1. Trouver une équation du plan (P) défini par les éléments suivants.
   (a) A, B et C sont des points de (P)
      i. $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$ et $C(0,1,0)$.
      ii. $A(1,1,1)$, $B(2,0,1)$ et $C(-1,2,4)$.
   (b) A est un point de (P), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de (P)
      i. $A(1,2,1)$, $\vec{u}(4,0,3)$ et $\vec{v}(1,3,-1)$.
      ii. $A(1,0,2)$, $\vec{u}(2,-1,3)$ et $\vec{v}(-1,4,5)$.
   (c) A est un point de (P), D est une droite contenue dans (P)
      i. $A(0,0,0)$ et $(D) : \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 4x-y+2z=0 \end{cases}$
      ii. $A(1,1,0)$ et $(D) : \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=1-3t \end{cases}$
   (d) D et D' sont des droites contenues dans (P)
      i. $(D) : \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 3x-y-z+5=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$
      ii. $(D) : \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x+3y+z-4=0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 2x+y-3z+7=0 \\ 3x+2y+z-1=0 \end{cases}$
2. Montrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :

$$\begin{cases} x=2+s+2t \\ y=2+2s+t \\ z=1-s-t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=1+3u-v \\ y=3+3u+v \\ z=1-2u \end{cases}$$

Correction ▼ [002011]

Exercice 6

On considère la famille de plans $(P_m)_{m\in\mathbb{R}}$ définis par les équations cartésiennes :

$$m^2x+(2m-1)y+mz=3$$

1. Déterminer les plans P_m dans chacun des cas suivants :
   (a) $A(1,1,1)\in P_m$
   (b) $\vec{n}(2,-\frac{5}{2},-1)$ est normal à P.
   (c) $\vec{v}(1,1,1)$ est un vecteur directeur de P
2. Montrer qu'il existe un unique point Q appartenant à tous les plans P_m.

Correction ▼ [002020]

Exercice 7

1. Déterminer la distance du point A au plan (P)

   (a) $A(1,0,2)$ et $(P) : 2x+y+z+4=0$.

   (b) $A(3,2,1)$ et $(P) : -x+5y-4z=5$.

2. Calculer la distance du point $A(1,2,3)$ à la droite $(D) : \begin{cases} -2x+y-3z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$

Correction ▼ [002021]

Exercice 8

1. On considère le point $A(-2,4,1)$, les vecteurs $\vec{u}(1,1,1)$, $\vec{v}(2,2,-4)$, $\vec{w}(3,-1,1)$ et le repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. On note x', y'et z' les coordonnées dans ce repère. Donner les formules analytiques du changement de repère exprimant x,y,z en fonction de x',y',z'.
2. On considère la droite $(D) : \begin{cases} y-z=3 \\ x+y=2 \end{cases}$. Utiliser le changement de repère pour donner une équation de D dans le repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.
3. Donner les formules analytiques du changement de repère inverse.

Correction ▼ [002034]

Exercice 9

1. Définir analytiquement la projection orthogonale sur le plan d'équation $2x+2y-z=1$.
2. Définir analytiquement la projection orthogonale sur la droite d'équation $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-z=2 \end{cases}$.
3. Donner l'expression analytique de la projection sur le plan (P) contenant le point $C(2,-1,1)$ et ayant pour vecteurs directeurs $\vec{u}(0,-1,1)$ et $\vec{u'}(-2,0,1)$, selon la droite (AB), où $A(1,-1,0)$ et $B(0,-1,3)$.

Correction ▼ [002039]

Indication pour l'exercice 2 ▲

Les médianes sont les droites (AA'), (BB'), (CC').

Indication pour l'exercice 3 ▲

La distance d'un point $M(x_0,y_0)$ à une droite D d'équation $ax+by+c=0$ est donnée par la formule $d(M,D) = \frac{|ax_0+by_0+c_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. (a) Un vecteur directeur est $\overrightarrow{AB}$ dont les coordonnées sont $(x_B - x_A, y_B - y_A) = (-3,1)$. Pour n'importe quel vecteur directeur $\vec{v} = (x_v, y_v)$ la pente est le réel $p = \frac{y_v}{x_v}$. La pente est indépendante du choix du vecteur directeur. On trouve ici $p = -\frac{1}{3}$. Une équation paramétrique de la droite de vecteur directeur $\vec{v}$ passant par $A = (x_A, y_A)$ est donnée par $\begin{cases} x = x_v t + x_A \\ y = y_v t + y_A \end{cases}$. Donc ici pour le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ on trouve l'équation paramétrique $\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 3 \end{cases}$

   Il y a plusieurs façons d'obtenir une équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

   Première méthode. On sait que $A = (x_A, y_A)$ appartient à la droite donc ses coordonnées vérifient l'équation $ax_A + by_A + c = 0$, idem avec B. On en déduit le système $\begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ -a + 4b + c = 0 \end{cases}$. Les solutions s'obtiennent à une constante multiplicative près, on peut fixer $a = 1$ et on trouve alors $b = 3$ et $c = -11$.

   (b) On trouve $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (5, -3)$, $p = -\frac{3}{5}$ et $\begin{cases} x = 5t - 7 \\ y = -3t - 2 \end{cases}$

   Deuxième méthode. Pour trouver l'équation cartésienne on part de l'équation paramétrique réécrite ainsi $\begin{cases} \frac{x+7}{5} = t \\ -\frac{y+2}{3} = t \end{cases}$ On en déduit $\frac{x+7}{5} = -\frac{y+2}{3}$; d'où l'équation $2x + 5y + 24 = 0$.

   (c) On trouve $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0,3)$, la droite est donc verticale (sa pente est infinie) une équation paramétrique est $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3t + 6 \end{cases}$. Une équation cartésienne est simplement $(x = 3)$.

2. (a) Equation paramétrique $\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = -t + 1 \end{cases}$

   Troisième méthode. Pour une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, on sait que $\vec{n} = (a,b)$ est un vecteur normal à la droite et donc $\vec{v} = (-b, a)$ est un vecteur directeur (car alors $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$). Réciproquement si $\vec{v} = (-b, a)$ est un vecteur directeur alors une équation est de la forme $ax + by + c = 0$ pour une certaine constante c à déterminer.

   Ici on nous donne le vecteur directeur $\vec{v} = (-3, -1)$ donc on cherche une équation sous la forme $-x + 3y + c = 0$. Pour trouver c, on utilise que A appartient à la droite donc $-x_A + 3y_A + c = 0$, ce qui conduit à $c = -1$. Ainsi une équation de la droite est $-x + 3y = 1$.

   (b) On trouve $2x - y + 1 = 0$.

   (c) Droite horizontale d'équation $(y = 1)$.

3. Voici juste les résultats :

   (a) $3x - y + 4 = 0$,

   (b) $y = -3$,

   (c) $8x + 4y = 4$ (les droites parallèles à $8x + 4y = 3$ sont de la forme $8x + 4y = c$).

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Le point A est l'intersection des droites (AB) et (AC). Les coordonnées (x,y) de A sont donc solutions du système : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ donné par les équations des deux droites. La seule solution est $(x,y) = (1,1)$. On a donc $A = (1,1)$. On fait de même pour obtenir le point $B = (-1,2)$ et $C = (2,0)$.
2. Notons A' le milieu de $[BC]$ alors les coordonnées se trouvent par la formule suivante $A' = (\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}) = (\frac{1}{2}, 1)$. De même on trouve $B' = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ et $C' = (0, \frac{3}{2})$.
3. (a) Les médianes ont pour équations : $(AA') : (y = 1)$; $(BB') : (3x + 5y = 7)$; $(CC') : (3x + 4y = 6)$.

(b) Vérifions que les trois médianes sont concourantes (ce qui est vrai quelque soit le triangle). On calcule d'abord l'intersection $I = (AA') \cap (BB')$, les coordonnées du point I d'intersection vérifient donc le système $\begin{cases} y = 1 \\ 3x+5y = 7 \end{cases}$. On trouve $I = (\frac{2}{3}, 1)$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que I appartient à la droite (CC') d'équation $3x+4y = 6$. En effet $3x_I + 4y_I = 6$ donc $I \in (CC')$.

Conclusion : les médianes sont concourantes au point $I = (\frac{2}{3}, 1)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Nous savons que la distance d'un point $M(x_0, y_0)$ à une droite D d'équation $ax+by+c = 0$ est donnée par la formule $d(M,D) = \frac{|ax_0+by_0+c_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Pour une droite D_λ la formule donne : $d(M, D_\lambda) = \frac{|(1-\lambda^2)x_0+2\lambda y_0-(4\lambda+2)|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\lambda^2}}$.

On cherche un point $M_0 = (x_0, y_0)$ tel que pour tout λ, $d(M_0, D_\lambda) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante.

L'égalité $d(M_0, D_\lambda)^2 = k^2$ conduit à

$$\Big((1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda+2)\Big)^2 = k^2\Big((1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2\Big)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Nos inconnues sont x_0, y_0, k. On regarde l'égalité comme une égalité de deux polynômes en la variable λ.

Pour ne pas avoir à tout développer on raffine un peu : on identifie les termes de plus haut degré en λ^4 : $x_0^2\lambda^4 = k^2\lambda^4$ donc $x_0^2 = k^2$.

En évaluant l'égalité pour $\lambda = 0$ cela donne $(x_0-2)^2 = k^2$. On en déduit $(x_0-2)^2 = x_0^2$ dont la seule solution est $x_0 = 1$. Ainsi $k = 1$ (car $k > 0$).

L'égalité pour $\lambda = +1$ donne $(2y_0-6)^2 = 4k^2$ et pour $\lambda = -1$ donne $(-2y_0+2)^2 = 4k^2$. La seule solution est $y_0 = 2$.

Conclusion : le point de coordonnées $M_0 = (1, 2)$ est situé à une distance $k = 1$ de toutes les droites D_λ.

Correction de l'exercice 4 ▲

(D) est une droite de vecteur normal $\vec{n} = (2, -3)$. Le projeté orthogonal $p(M_0)$ de M_0 sur (D) est de la forme $M_0 + \lambda.\vec{n}$ où λ est un réel à déterminer. Le point $M_0 + \lambda.\vec{n}$ a pour coordonnées $(x_0+2\lambda, y_0-3\lambda)$.

$$M_0 + \lambda.\vec{n} \in (D) \iff 2(x_0+2\lambda) - 3(y_0-3\lambda) = 5 \iff \lambda = \frac{-2x_0+3y_0+5}{13}.$$

$p(M_0)$ a pour coordonnées $\left(x_0 + 2\frac{-2x_0+3y_0+5}{13}, y_0 - 3\frac{-2x_0+3y_0+5}{13}\right)$ ou encore $p(M_0) = \left(\frac{9x_0+6y_0+10}{13}, \frac{6x_0+4y_0-15}{13}\right)$.

Le symétrique orthogonal $s(M_0)$ vérifie : $s(M_0) = M_0 + 2\overrightarrow{M_0p(M_0)}$ (car $p(M_0)$ est le milieu du segment $[M_0, s(M_0)]$) autrement dit $s(M_0) = M_0 + 2\lambda.\vec{n}$ (pour le λ obtenu ci-dessus).

Ses coordonnées sont donc $s(M_0) = \left(x_0 + 4\frac{-2x_0+3y_0+5}{13}, y_0 - 6\frac{-2x_0+3y_0+5}{13}\right)$ ou encore $\left(\frac{5x_0+12y_0+20}{13}, \frac{12x_0-5y_0-30}{13}\right)$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. (a) Une équation d'un plan est $ax+by+cz+d = 0$. Si un point appartient à un plan cela donne une condition linéaire sur a, b, c, d. Si l'on nous donne trois point cela donne un système linéaire de trois équations à trois inconnues. On trouve :
   i. $x+y+z-1 = 0$
   ii. $3x+3y+z-7 = 0$

   (b) $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal au plan. Si $\vec{n} = (a, b, c)$ alors une équation du plan est $ax+by+cz+d = 0$. On trouve :
   i. $-9x+7y-12z+7 = 0$
   ii. $17x+13y-7z-3 = 0$

(c) Trouver deux points B,C de la droite D. Le vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs de P. Procédé ensuite comme la question précédente. On obtient :

i. Par exemple $B = (0,-6,-3)$ et $C = (1,12,-8)$ appartiennent à D. On trouve l'équation $4x-y+2z = 0$.

ii. Par exemple $B = (0,-1,1)$ et $C = (1,1,2)$ appartiennent à D. On trouve l'équation $2x-y-1 = 0$.

(d) Trouver un point A de D et deux points B,C de la droite D'. Le vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs de P. Puis procédé comme avant.

2. Les plans sont définis paramétriquement par (P) : $(2,2,2)+s(1,2,-1)+t(2,1,-1)$ donc deux des vecteurs directeurs sont $\vec{u} = (1,2,-1)$ et $\vec{v} = (2,1,-1)$. Un vecteur normal à (P) est alors $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-1,-1,-3)$.
Pour le plan (P') défini par $(1,3,1)+u(3,3,-2)+v(-1,1,0)$, il a pour vecteurs directeurs $\vec{u'} = (3,3,-2)$ et $\vec{v'} = (-1,1,0)$. Un vecteur normal à (P') est alors $\vec{n'} = \vec{u'} \wedge \vec{v'} = (2,2,6)$.
Les vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires donc les plans (P) et (P') sont parallèles (ou confondus).
Maintenant le point $A = (2,2,1)$ appartient à (P) (on a fait $s = 0$ et $t = 0$). Il appartient aussi à (P') (en prenant $u = -1$ et $v = 0$).
Bilan. (P) et (P') sont parallèles et ont un point commun : ils sont égaux !

Correction de l'exercice 6 ▲

1. (a) Un point A appartient à un plan d'équation $ax+by+cz+d = 0$ si et seulement si $ax_A+by_A+cz_A+d = 0$. Donc $A(1,1,1) \in P_m$ si et seulement si $m^2+(2m-1)+m = 3$. Ce qui équivaut à $m^2+3m-4 = 0$. Les deux solutions sont $m = 1$ et $m = -4$. Donc A appartient aux plans P_1 et P_{-4} et pas aux autres.

(b) Un plan d'équation $ax+by+cz+d = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n} = (a,b,c)$. Donc si $\vec{n} = (2,-\frac{5}{2},-1)$ est un vecteur normal à P_m une équation cartésienne est de la forme $2x-\frac{5}{2}y-z+d = 0$. Or une équation de P_m est $m^2x+(2m-1)y+mz-3 = 0$. Ces deux équations sont égales à un facteur multiplicatif près $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $2x-\frac{5}{2}y-z+d = \lambda\left(m^2x+(2m-1)y+mz-3\right)$. On en déduit $2 = \lambda m^2$, $-\frac{5}{2} = \lambda(2m-1)$ et $-1 = \lambda m$. En divisant la première égalité par la troisième on trouve : $m = -2$. D'où $\lambda = \frac{1}{2}$. La seconde égalité est alors vérifiée.
Le seul plan ayant $\vec{n}$ pour vecteur normal est P_{-2}.

(c) Un vecteur est directeur du plan P si et seulement si le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$. Ici $\vec{n} = (m^2,2m-1,m)$. Donc $\vec{v} = (1,1,1)$ est vecteur directeur si et seulement si $m^2+2m-1+m = 0$. Ce qui équivaut à $m^2+3m-1 = 0$. Les deux plans qui ont pour vecteur directeur $\vec{v}$ sont les plans ayant le paramètre $m = \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

2. Nous allons prendre 3 plans de la famille (P_m), calculer leur point d'intersection et finalement montrer que ce point appartient aux autres plans.
Prenons trois paramètre "au hasard" $m = 0$, $m = 1$, $m = -1$. Un point qui appartient à ces trois plans doit vérifier les trois équations :

$$\begin{cases} y = -3 \\ x+y+z = 3 \\ x-3y-z = 3 \end{cases}$$

On résout ce système pour trouver que l'intersection des trois plan P_0, P_1 et P_{-1} est le point $Q = (0,-3,6)$.
Il ne reste plus qu'à vérifier que ce point appartient à tous les plans P_m : c'est le cas car $m^2\cdot 0+(2m-1)\cdot(-3)+m\cdot 6-3 = 0$.
Autre méthode. On cherche un point $Q = (x_0,y_0,z_0)$ qui vérifie l'égalité $m^2x_0+(2m-1)y_0+mz_0-3 = 0$ pour tout m. En considérant que c'est une égalité polynomiale en m (x_0,y_0,z_0 sont fixés) on en déduit que $m^2x_0+(2m-1)y_0+mz_0-3$ est le polynôme nul : $x_0m^2+(2y_0+z_0)m-y_0-3 = 0$. Ces coefficients sont nuls : $x_0 = 0$ (le coefficient de m^2), $2y_0+z_0 = 0$ (le coefficient de m), $-y_0-3 = 0$ (le terme constant).
On trouve bien sûr le même point d'intersection de tous les plans : $Q = (0,-3,6)$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. La distance d'un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ à un plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$ est donnée par la formule :
$$d(M_0,P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$
On trouve donc
   (a) $d(A,P) = \frac{|2\cdot1+1\cdot0+1\cdot2+4|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.
   (b) $d(A,P) = \frac{2}{\sqrt{42}}$.
2. Trouvons d'abord une équation paramétrique de la droite D. On pose par exemple $z=t$ et on exprime x et y en fonction de t. Partant du système $\begin{cases} -2x+y-3z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$ on trouve $x=1-t$ et $y=3+t$. La droite D est donc l'ensemble des point $M_t = (1-t, 3+t, t)$ (t parcourant $\mathbb{R}$).
La distance AM_t vérifie donc
$$AM_t^2 = \|\vec{A}M_t\|^2 = \|(1-t-1, 3+t-2, t-3)\|^2 = t^2+(t+1)^2+(t-3)^2 = 3t^2-4t+10.$$
Minimiser cette distance c'est trouver le minimum de la fonction $d(t) = 3t^2-4t+10$. Il est donc atteint pour t_0 vérifiant $d'(t_0)=0$, donc pour $t_0 = \frac{2}{3}$. La distance entre A et la droite D est donc la longueur $AM_{t_0} = \sqrt{d(t_0)} = \sqrt{\frac{26}{3}}$. Au passage on a obtenu la perpendiculaire à D passant par A c'est la droite (AM_{t_0}).

Autre méthode.
Il existe une formule pour calculer directement la distance. Si $\vec{v}$ est un vecteur directeur de D et M_0 un point de D alors
$$d(A,D) = \frac{\|\vec{v}\wedge\overrightarrow{AM_0}\|}{\|\vec{v}\|}.$$
On a paramétré la droite D par les points $M_t = (1,3,0)+t(-1,1,1)$. Donc $M_0 = (1,3,0) \in D$ et $\vec{v} = (-1,1,1)$ est un vecteur directeur de D. On a alors $\overrightarrow{AM_0} = (0,1,-3)$ et $\vec{v}\wedge\overrightarrow{AM_0} = (-4,-3,-1)$: on obtient :
$$d(A,D) = \frac{\|\vec{v}\wedge\overrightarrow{AM_0}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Notons $\mathscr{R}$ le repère initial $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dire qu'un point M du plan a pour coordonnées (x,y,z) dans $\mathscr{R}$ signifie $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
Si $\mathscr{R}'$ désigne un autre repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ alors le même point M a pour coordonnées (x',y',z') dans $\mathscr{R}'$ signifie $\overrightarrow{AM} = x'\vec{u}+y'\vec{v}+z'\vec{w}$.
La formule de changement c'est simplement écrire les coordonnées de l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x'\vec{u}+y'\vec{v}+z'\vec{w}$$
Mais on connaît les coordonnées de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ dans $\mathscr{R}$:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où l'égalité de changement de repère :

$$(\mathscr{S}) \qquad \left\{\begin{array}{l} x=-2+x'+2y'+3z' \\ y=4+x'+2y'-z' \\ z=1+x'-4y'+z' \end{array}\right.$$

2. Dans l'équation de la droite (D) $\left\{\begin{array}{l} y-z=3 \\ x+y=2 \end{array}\right.$ dans le repère $\mathscr{R}$ on remplace x,y,z par la formule $(\mathscr{S})$ obtenue à la question précédente.
   On obtient :
$$\left\{\begin{array}{l} \left(4+x'+2y'-z'\right)-\left(1+x'-4y'+z'\right)=3 \\ \left(-2+x'+2y'+3z'\right)+\left(4+x'+2y'-z'\right)=2 \end{array}\right. .$$
   Ce qui donne une équation de (D) dans le repère $\mathscr{R}'$:
$$\left\{\begin{array}{l} 6y'-2z'=0 \\ 2x'+4y'+2z'=0 \end{array}\right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{\begin{array}{l} 3y'-z'=0 \\ x'+2y'+z'=0 \end{array}\right.$$
   En particulier en faisant $(x',y',z')=(0,0,0)$ on remarque que cette droite passe par A.
3. Nous avions obtenu l'égalité $(\mathscr{S})$ de changement de repère de $\mathscr{R}'$ vers $\mathscr{R}$ qui s'écrit :
$$\left\{\begin{array}{l} x+2=x'+2y'+3z' \\ y-4=x'+2y'-z' \\ z-1=x'-4y'+z' \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} X=x'+2y'+3z' \\ Y=x'+2y'-z' \\ Z=x'-4y'+z' \end{array}\right.$$
   Où l'on a noté $X=x+2$, $Y=y-4$, $Z=z-1$. On inverse le système par la méthode de Gauss pour obtenir après calculs :
$$\left\{\begin{array}{l} x'=\frac{1}{12}\left(X+7Y+4Z\right) \\ y'=\frac{1}{12}\left(X+Y-2Z\right) \\ z'=\frac{1}{12}\left(3X-3Y\right) \end{array}\right.$$
   Donc
$$\left\{\begin{array}{l} x'=\frac{1}{12}\left(x+7y+4z-27\right) \\ y'=\frac{1}{12}\left(x+y-2z\right) \\ z'=\frac{1}{12}\left(3x-3y-6\right) \end{array}\right.$$
   Avec les matrices cela se fait ainsi : le système $(\mathscr{S})$ devient
$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Ainsi
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Notons P le plan d'équation $2x+2y-z=1$. Et soit $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ un point quelconque. $\vec{n}=(2,2,-1)$ est un vecteur normal au plan. On cherche $p(M_0)$ appartenant au plan sous la forme $M_0+\lambda\cdot\vec{n}$.
$$\begin{aligned} p(M_0)\in P &\iff M_0+\lambda\cdot\vec{n}\in P \\ &\iff (x_0,y_0,z_0)+\lambda(2,2,-1)\in P \\ &\iff (x_0+2\lambda,y_0+2\lambda,z_0-\lambda)\in P \\ &\iff 2(x_0+2\lambda)+2(y_0+2\lambda)-(z_0-\lambda)=1 \\ &\iff \lambda=\frac{1-2x_0-2y_0+z_0}{9} \end{aligned}$$

En posant $\lambda_0 = \frac{1-2x_0-2y_0+z_0}{9}$, le projeté orthogonal de M_0 sur P est défini par $p(M_0) = (x_0 + 2\lambda_0, y_0 + 2\lambda_0, z_0 - \lambda_0)$.

2. Notons D la droite d'équation $\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x-z=2 \end{array} \right.$ et soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque.

   Il nous faut deux vecteurs normaux : par exemple $\vec{n_1} = (1,1,1)$ et $\vec{n_2} = (2,0,-1)$ (qui sont les vecteurs normaux aux deux plans définissant D).

   On cherche le projeté orthogonal $\pi(M_0)$ sur la droite D sous la forme $M_0 + \lambda_1\vec{n_1} + \lambda_2\vec{n_2}$. On va déterminer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ de sorte que ce point appartienne à D.

$$\begin{aligned}
\pi(M_0) \in D &\iff M_0 + \lambda_1\vec{n_1} + \lambda_2\vec{n_2} \in D \\
&\iff (x_0,y_0,z_0) + \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(2,0,-1) \in D \\
&\iff (x_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2, y_0 + \lambda_1, z_0 + \lambda_1 - \lambda_2) \in D \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} (x_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2) + (y_0 + \lambda_1) + (z_0 + \lambda_1 - \lambda_2) = 1 \\ 2(x_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2) - (z_0 + \lambda_1 - \lambda_2) = 2 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - x_0 - y_0 - z_0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = 2 - 2x_0 + z_0 \end{array} \right. \\
&\iff \lambda_1 = \frac{1}{14}\big(3 - 3x_0 - 5y_0 - 6z_0\big) \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{14}\big(5 - 5x_0 + y_0 + 4z_0\big)
\end{aligned}$$

   Ainsi $\pi(M_0) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(2,0,-1)$ avec les valeurs de λ_1, λ_2 obtenues.

3. Le principe est similaire, voici les étapes :

   (a) Trouver une équation du plan. Un vecteur normal au plan est $\vec{u} \wedge \vec{u'} = (-1,-2,-2)$. Donc le plan est d'équation $x + 2y + 2z - 2 = 0$.

   (b) Chercher le projeté d'un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sous la forme $M_0 + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$. Trouver λ_0 de sorte que $M_0 + \lambda_0 \cdot \overrightarrow{AB}$ appartiennent au plan.

   (c) On trouve $\overrightarrow{AB} = (-1,0,3)$ et $\lambda_0 = -\frac{1}{5}(x_0 + 2y_0 + 2z_0 - 2)$ et donc le projeté cherché est $p(M_0) = (x_0 - \lambda_0, y_0, z_0 + 3\lambda_0)$.
