

# Chapitre 17

## La dimension finie

### Objectifs

- Définir les notions de familles libres, familles liées, familles génératrices et étudier leurs propriétés.
- Définir la notion de dimension finie et établir le théorème fondamental de la dimension finie.
- Définir les notions de bases, de coordonnées et les propriétés.
- Faire le lien entre la dimension finie et les applications linéaires : notion de rang, théorème du rang...
- Étudier la méthode de *Gauss* pour le calcul du rang d'une famille de vecteurs.

### Sommaire

I)	Espaces de dimension finie	1
1)	Familles génératrices	1
2)	Familles libres, familles liées	2
3)	Familles libres et familles liées en dimension finie	4
II)	Propriétés de la dimension finie	4
1)	Bases, coordonnées	4
2)	Sous-espaces vectoriels	7
3)	Applications linéaires et dimension finie	8
III)	Notion de rang	9
1)	Rang d'une application linéaire	9
2)	Rang d'une famille de vecteurs	10
3)	Méthode du pivot de Gauss	11
IV)	Exercices	12

### I) Espaces de dimension finie

#### 1) Familles génératrices



##### DÉFINITION 17.1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. et soit  $A$  une famille de vecteurs de  $E$ , on dit que la famille  $A$  est une famille génératrice de  $E$  lorsque  $E = \text{Vect}[A]$ . Ce qui signifie que tout vecteur de  $E$  est combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de  $A$ .

##### Exemples:

- Soit  $E = \mathbb{K}^n$ , pour  $i \in \llbracket 1..n \rrbracket$ , on pose  $e_i = (\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,n})$ , alors la famille  $A = (e_1, \dots, e_n)$  est une famille génératrice de  $E$ , car :

$$(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

- Soit  $E = \mathbb{K}_n[X]$ , la famille  $A = (X^i)_{0 \leq i \leq n}$  est une famille génératrice de  $E$ .

- Soit  $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , la famille  $A = (f_k)_{0 \leq k \leq n}$  où  $f_k : x \mapsto e^{kx}$ , n'est pas une famille génératrice de  $E$ . Si elle l'était, il existerait des réels  $a_k$  tels que  $\sin = \sum_{k=0}^n a_k f_k$ , en posant  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , on aurait alors pour tout réel  $x : \sin(x) = P(e^x)$ , la fonction  $\sin$  s'annulant une infinité de fois et la fonction  $\exp$  étant injective, on voit que  $P$  possède une infinité de racines, donc  $P = 0$  i.e. tous les réels  $a_k$  sont nuls et donc la fonction  $\sin$  est nulle, ce qui est absurde.

**THÉORÈME 17.1 (premières propriétés)**

Soit  $A$  une famille génératrice de  $E$  :

- Toute sur-famille de  $A$  est génératrice, i.e. si  $B$  est une famille de vecteurs de  $E$  telle que  $A \subset B$ , alors  $B$  est génératrice.
- Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $B = (f(x))_{x \in A}$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ .
- Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $f$  est surjective si et seulement si  $f(A)$  est une famille génératrice de  $F$ .

**Preuve:** Le premier point est évident. Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , soit  $y \in \text{Im}(f)$ , alors il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ , mais  $A$  est génératrice de  $E$ , donc il existe  $x_1, \dots, x_n \in A$  et des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ ,  $f$  étant linéaire, on a alors  $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$ , ce qui prouve que  $B$  est génératrice de  $\text{Im}(f)$ . Le troisième point en découle.  $\square$

**Exercice:** Les familles suivantes sont-elles génératrices dans  $\mathbb{K}^3$  ?

- $A = \{(1, 1, 1); (-1, 0, 2); (1, 2, 3)\}$ .
- $A = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ .

**DÉFINITION 17.2 (espace de dimension finie)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v, on dit que  $E$  est de dimension finie lorsque  $E$  possède une famille génératrice **finie**, c'est à dire lorsqu'il existe des vecteurs  $x_1, \dots, x_n \in E$  tels que  $E = \text{Vect}[x_1, \dots, x_n]$ . Si ce n'est pas le cas, on dit que  $E$  est de dimension infinie.

**Exemples:**

- $\mathbb{K}^n$  est de dimension finie.
- $\mathbb{K}_n[X]$  est de dimension finie.
- $\mathbb{K}[X]$  est de dimension infinie. En effet : sinon, il existerait une famille de polynômes  $P_1, \dots, P_n$  telle que  $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}[P_1, \dots, P_n]$ , mais alors tout polynôme aurait un degré inférieur ou égal à  $\max(\deg(P_1), \dots, \deg(P_n))$ , ce qui est absurde. Nous verrons plus loin que  $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est également de dimension infinie.

**THÉORÈME 17.2**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie :

- Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\text{Im}(f)$  est de dimension finie. En particulier lorsque  $f$  est **surjective**,  $F$  est de dimension finie.
- Si  $F$  est de dimension finie, alors  $E \times F$  est de dimension finie également.

**Preuve:** Le premier point découle directement du théorème précédent. Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille génératrice de  $E$  et si  $(y_1, \dots, y_p)$  est une famille génératrice de  $F$ , alors pour  $(x, y) \in E \times F$ , on a :

$$(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{k=1}^p \beta_k y_k \right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i (x_i, 0_F) + \sum_{1 \leq k \leq p} \beta_k (0_E, y_k),$$

ce qui prouve que la famille  $((x_i, 0_F); (0_E, y_k))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq p}$  est une famille génératrice finie de  $E \times F$ .  $\square$

## 2) Familles libres, familles liées

**DÉFINITION 17.3**

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -e.v  $E$ , on dit que :

- La famille est **libre** lorsque la seule combinaison linéaire de la famille qui donne le vecteur nul est celle pour laquelle tous les coefficients sont nuls (on dit aussi que les vecteurs sont

linéairement indépendants), c'est à dire :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0_E \implies \forall k \in \llbracket 1..n \rrbracket, \alpha_k = 0.$$

- La famille est dite *liée* lorsqu'elle n'est pas libre (on dit aussi que les vecteurs sont *linéairement dépendants*), ce qui signifie qu'il existe des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  **non tous nuls** tels que :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0_E.$$



### THÉORÈME 17.3 (caractérisation des familles liées)



La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.

**Preuve:** Supposons  $x_1 = \sum_{k=2}^n \alpha_k x_k$ , on a alors  $x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0_E$  avec le coefficient de  $x_1$  qui est non nul, donc la famille est liée.

Réciproquement : si la famille est liée, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nuls tels que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E$ , supposons que

$$\lambda_1 \neq 0, \text{ on a alors : } x_1 = \sum_{k=2}^n \frac{-\lambda_k}{\lambda_1} x_k.$$

□



Soient  $x, y \in E$ , alors la famille  $(x, y)$  est liée si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.

### Exemples:

- $E = \mathbb{K}^n$ , la famille  $A = (e_1, \dots, e_n)$  avec  $e_i = (\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,n})$  est une famille libre.
- $E = \mathbb{K}_n[X]$ , la famille  $A = (X^i)_{0 \leq i \leq n}$  est une famille libre.
- $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{C})$ , pour  $k \in \llbracket 0..n \rrbracket$  on pose  $f_k : x \mapsto e^{kx}$ , alors la famille  $A = (f_k)_{0 \leq k \leq n}$  est libre.
- $E = \mathbb{K}^2$ , soit  $i = (1, 1), j = (1, 2)$  et  $k = (4, 3)$ , la famille  $A = (i, j, k)$  est une famille liée.
- Soit  $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  pour  $k \in \llbracket 1..n \rrbracket$  on pose  $f_k : x \mapsto \sin(kx)$ . Montrer par récurrence sur  $n$  que la famille  $A = (f_1, \dots, f_n)$  est libre.

**Réponse:** Il est clair que  $(f_1)$  est libre, supposons que  $(f_1, \dots, f_{n-1})$  soit libre et supposons que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = 0$ ,

on a donc pour tout réel  $x$  de  $[a; b]$  :  $\sum_{k=0}^n \alpha_k \sin(kx) = 0$ , en dérivant deux fois cette relation, on obtient :

$\sum_{k=1}^n k^2 \alpha_k \sin(kx) = 0$ , en lui retranchant  $n^2$  fois la première, on obtient :  $\sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - n^2) \alpha_k f_k = 0$ , de l'hypothèse de récurrence on déduit que  $\alpha_k = 0$  pour  $k \in \llbracket 1..n-1 \rrbracket$ , il reste alors  $\alpha_n f_n = 0$  et donc  $\alpha_n = 0$ .



### THÉORÈME 17.4 (propriétés des familles libres et des familles liées)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v

- Si  $x \in E$ , alors la famille  $(x)$  est libre si et seulement si  $x \neq 0_E$ .
- Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
- Toute partie d'une famille libre est une famille libre.
- Toute famille contenant une famille liée est une famille liée.
- L'image d'une famille liée par une application linéaire est une famille liée.
- Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $f$  est injective si et seulement si  $f$  transforme toute famille libre de  $E$  en une famille libre de  $F$ .
- La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre si et seulement si  $\forall x \in \text{Vect}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $x$  s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs  $x_1, \dots, x_n$ .
- Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille libre, alors  $\forall x \in E, x \in \text{Vect}[x_1, \dots, x_n] \iff (x_1, \dots, x_n, x)$  est liée.

**Preuve:** Démontrons les trois derniers points :

Si  $f$  est injective et si  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre dans  $E$ , supposons que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k) = 0_F$ , alors  $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \in \ker(f)$ , donc  $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0_E$ , mais cette famille étant libre, les coefficients  $\alpha_k$  sont tous nuls.

Si  $f$  transforme une famille libre en une famille libre : si  $x \in \ker(f)$  et si  $x \neq 0_E$ , alors  $(x)$  est libre, donc  $(f(x))$  est libre i.e.  $f(x) \neq 0_F$  ce qui est absurde, donc  $x = 0_E$  et  $f$  est injective.

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre et si  $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k$ , alors  $\sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k) x_k = 0_E$  et donc, la famille étant libre,  $\alpha_k = \beta_k$  pour  $k \in \llbracket 1..n \rrbracket$ .

Réciproquement, si l'écriture est unique alors  $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0_E \implies \forall k \in \llbracket 1..n \rrbracket, \alpha_k = 0$ , i.e. la famille est libre.

Si  $x \in \text{Vect}[x_1, \dots, x_n]$ , alors  $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$  ce qui prouve que la famille  $(x_1, \dots, x_n, x)$  est liée.

Réciproque : si  $(x_1, \dots, x_n, x)$  est liée, alors il existe des scalaires  $\alpha_k$  pour  $k \in \llbracket 1..n+1 \rrbracket$  tels que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k + \alpha_{n+1} x = 0_E$ , si  $\alpha_{n+1} = 0$ , alors il reste  $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0_E$  donc tous les scalaires  $\alpha_k$  sont nuls, ce qui est contradictoire, d'où  $\alpha_{n+1} \neq 0$ , ce qui entraîne  $x = -\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}} x_k$ .  $\square$

### 3) Familles libres et familles liées en dimension finie



#### THÉORÈME 17.5 (fondamental de la dimension finie)



Si  $E$  est de dimension finie et si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille génératrice de  $E$ , alors toute famille de cardinal supérieur ou égal à  $n + 1$  est une famille liée.

**Preuve:** Par récurrence sur  $n$  : pour  $n = 1$  on a  $E = \text{Vect}[x_1]$  soit  $x, y \in E$ ,  $x = \alpha x_1$  et  $y = \beta x_1$ . Si  $\alpha = 0$  alors  $x = 0_E$  et la famille  $(x, y)$  est liée, sinon on a  $y = \beta/\alpha x$  et donc la famille  $(x, y)$  est liée.

Supposons le théorème vrai au rang  $n$  et soit  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  une famille génératrice de  $E$ , soit  $(y_1, \dots, y_{n+2})$  une famille de vecteurs de  $E$ , on pose  $F = \text{Vect}[x_1, \dots, x_n]$ . Si tous les vecteurs  $y_i$  sont dans  $F$  alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et la famille  $(y_1, \dots, y_{n+2})$  est liée, dans le cas contraire, supposons  $y_{n+2} \notin F$ , pour tout  $j \in \llbracket 1..n+2 \rrbracket$  il existe un scalaire  $\lambda_j$  et un vecteur  $u_j$  de  $F$  tels que  $y_j = u_j + \lambda_j x_{n+1}$ , on a donc  $\lambda_{n+2} \neq 0$ , on en déduit  $x_{n+1}$  en fonction de  $u_{n+2}$  et  $y_{n+2}$ , d'où pour  $j \in \llbracket 1..n+1 \rrbracket$  :  $y_j = u_j - \frac{\lambda_j}{\lambda_{n+2}} u_{n+2} + \frac{\lambda_j}{\lambda_{n+2}} y_{n+2}$ , mais la famille  $(u_j - \frac{\lambda_j}{\lambda_{n+2}} u_{n+2})_{j \in \llbracket 1..n+1 \rrbracket}$  est liée dans  $F$  (hypothèse de récurrence), donc la famille  $(y_j - \frac{\lambda_j}{\lambda_{n+2}} y_{n+2})_{j \in \llbracket 1..n+1 \rrbracket}$  est liée dans  $E$ , ce qui entraîne que la famille  $(y_1, \dots, y_{n+2})$  est liée dans  $E$ .  $\square$

**Exemples:**

- $E = \mathbb{K}^n$ , pour  $i \in \llbracket 1..n \rrbracket$ , on pose  $e_i = (\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,n})$ , on a vu en exemple que la famille  $A = (e_1, \dots, e_n)$  est génératrice, donc dans  $\mathbb{K}^n$ , toute famille de  $n + 1$  vecteurs (ou plus) est liée.
- $E = \mathbb{K}_n[X]$ , on sait que la famille  $A = (X^0, \dots, X^n)$  est génératrice, donc dans  $\mathbb{K}_n[X]$  toute famille de  $n + 2$  vecteurs (ou plus) est liée.
- $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est de dimension infinie, sinon il existe une famille génératrice finie  $A = (f_1, \dots, f_n)$ , mais alors toute famille de  $n + 1$  vecteurs est liée, or la famille  $(g_0, \dots, g_n)$  où  $g_k : x \mapsto e^{kx}$ , est une famille libre, on a donc une contradiction, ce qui prouve que  $E$  est de dimension infinie.



#### THÉORÈME 17.6



Si  $E$  est de dimension finie et si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille libre, alors toute famille génératrice de  $E$  contient au moins  $n$  vecteurs.

**Preuve:** Soit  $(y_1, \dots, y_m)$  une famille génératrice de  $E$ , si  $n > m$ , alors d'après le théorème fondamental, la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée, ce qui est contradictoire, donc  $m \geq n$ .  $\square$

## II) Propriétés de la dimension finie

### 1) Bases, coordonnées

**DÉFINITION 17.4**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v et soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ , on dit que  $B$  est une base de  $E$  lorsque  $B$  est à la fois **libre et génératrice** de  $E$ . Si c'est le cas, alors  $\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ , tel que  $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ . Par définition  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  sont les **coordonnées** de  $x$  dans la base  $B$ , et on pose  $\text{Coord}_B(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  (on fera attention à l'ordre sur les vecteurs de la base  $B$ ,  $\lambda_i$  est la coordonnée de  $x$  sur le vecteur  $e_i$ ).

**Exemples:**

- $E = \mathbb{K}^n$ , la famille  $B = (e_1, \dots, e_n)$  où  $e_i = (\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,n})$  pour  $i \in \llbracket 1..n \rrbracket$ , est une famille libre et génératrice de  $\mathbb{K}^n$ , c'est donc une base, on l'appelle **base canonique** de  $\mathbb{K}^n$ . Si  $u = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ , alors on sait que  $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ , donc  $\text{Coord}_B(u) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , c'est à dire : dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  les coordonnées d'un vecteur  $u$  sont les composantes de  $u$ .
- $E = \mathbb{K}_n[X]$ , on sait que la famille  $B = (X^0, \dots, X^n)$  est libre et génératrice de  $\mathbb{K}_n[X]$ , c'est donc une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ , on l'appelle **base canonique** de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Si  $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ , alors  $\text{Coord}_B(P) = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ , c'est à dire : dans la base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$ , les coordonnées d'un polynôme  $P$  sont les coefficients de  $P$ .
- Dans  $\mathbb{K}_n[X]$ , soit  $a \in \mathbb{K}$ , d'après la formule de Taylor en  $a$ , la famille  $B = ((X - a)^k)_{k \in \llbracket 0..n \rrbracket}$  est une famille libre et génératrice de  $\mathbb{K}_n[X]$ , c'est donc une base. Pour  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ , on sait que  $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$ , donc  $\text{Coord}_B(P) = (P(a), P'(a), \dots, \frac{P^{(n)}(a)}{n!})$ .

**Exercice:**  $E = \mathbb{K}^2$ , on pose  $i = (1, 1)$  et  $j = (1, 2)$ , montrer que  $B = (i, j)$  est une base de  $E$ , et pour  $u = (x, y) \in E$ , calculer  $\text{Coord}_B(u)$ .

**THÉORÈME 17.7 (existence de bases)**

Tout  $\mathbb{K}$ -e.v non réduit au vecteur nul et de dimension finie, possède des bases. Plus précisément, toute famille génératrice contient une base.

**Preuve:** Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille génératrice de  $E$ , si tous ces vecteurs sont nuls, alors  $E = \{0_E\}$  ce qui est exclu, donc au moins un des vecteurs de la famille est non nul, on peut donc considérer les sous-familles de  $(x_1, \dots, x_n)$  qui sont libres et en prendre une de **cardinal maximal** :  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ . Posons  $y_j = x_{i_j}$  pour  $j \in \llbracket 1..r \rrbracket$ , lorsque  $k \notin \{i_1, \dots, i_r\}$  on a  $(y_1, \dots, y_r, x_k)$  est liée (maximalité de  $r$ ), donc  $x_k \in \text{Vect}[y_1, \dots, y_r]$ , mais alors  $\text{Vect}[x_1, \dots, x_n] \subset \text{Vect}[y_1, \dots, y_r]$ , ce qui entraîne que  $(y_1, \dots, y_r)$  est une famille génératrice de  $E$ , comme elle est libre, c'est une base de  $E$ .  $\square$

**THÉORÈME 17.8 (propriété fondamentale des bases en dimension finie)**

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie, alors toutes les bases de  $E$  ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé **dimension de  $E$**  et noté  $\dim(E)$  ou  $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ . Par convention  $\{0_E\}$  est de dimension 0.

**Preuve:** Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , cette famille est libre, donc toute famille génératrice possède au minimum  $n$  vecteurs, mais cette famille est également génératrice, donc toute famille libre contient au maximum  $n$  vecteurs, finalement, toute base de  $E$ , étant à la fois libre et génératrice, contient exactement  $n$  vecteurs.  $\square$

**Exemples:**

- La base canonique de  $\mathbb{K}^n$  contient  $n$  vecteurs, donc  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$ .
- La base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$  contient  $n + 1$  vecteurs, donc  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$ .
- $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  donc  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ , mais  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ .
- Une droite vectorielle est un espace de dimension 1 et un plan vectoriel est un espace de dimension 2.

**THÉORÈME 17.9 (application)**

Si  $E$  est de dimension  $n \geq 1$  et si  $B$  est une famille de vecteurs de  $E$  alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- $B$  est une base de  $E$ .
- $B$  est libre de cardinal  $n$  (on dit aussi libre maximale).
- $B$  est génératrice de cardinal  $n$  (on dit aussi génératrice minimale).

**Preuve:** On a évidemment  $a) \implies b)$  et  $a) \implies c)$ .

Montrons  $b) \implies c)$  : si  $B$  est libre de cardinal  $n$  :  $B = (y_1, \dots, y_n)$ , alors pour tout  $x \in E$ , la famille  $(y_1, \dots, y_n, x)$  est liée (car de cardinal  $n+1$  et  $E$  possède une base de cardinal  $n$ ), ce qui entraîne que  $x \in \text{Vect}[y_1, \dots, y_n]$ , ce qui prouve que  $B$  est génératrice.

Montrons  $c) \implies a)$  : si  $B$  est génératrice de cardinal  $n$ , on peut extraire de  $B$  une famille libre de cardinal maximal, cette famille sera alors une base de  $E$ , elle est donc de cardinal  $n$ , mais  $B$  est de cardinal  $n$ , donc cette famille extraite ne peut être que  $B$  elle-même, c'est à dire  $B$  est une base de  $E$ .  $\square$

**Exercice:** Montrer que dans  $\mathbb{K}_n[X]$ , la famille  $B = (X^k(1-X)^{n-k})_{k \in [0..n]}$  est une base.

**Réponse:** La base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$  possède  $n+1$  vecteurs et  $\text{card}(B) = n+1$ , il suffit donc de démontrer que  $B$  est libre : si on a  $\sum_{k=0}^n \alpha_k X^k (1-X)^{n-k} = 0$ , en évaluant en 1, il reste  $\alpha_n = 0$ , donc  $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k (1-X)^{n-k} = 0$ , c'est à dire  $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k (1-X)^{n-1-k} = 0$ , on peut terminer par récurrence sur  $n$  pour montrer que  $B$  est libre, la propriété étant évidente pour  $n=0$ .  $B$  est donc une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

On remarquera au passage la puissance du théorème précédent, car le fait que cette famille  $B$  soit génératrice n'est pas du tout évident à démontrer « à la main ».




### THÉORÈME 17.10

Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , l'application :

$$\begin{aligned} \text{Coord}_B : E &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto \text{Coord}_B(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme entre  $E$  et  $\mathbb{K}^n$ .

**Preuve:** En exercice.  $\square$

 Ce théorème permet de calculer facilement les coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs connaissant les coordonnées de chacun d'eux.




### THÉORÈME 17.11

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v, soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , toute application linéaire de  $E$  vers  $F$  est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs de la base  $B$ , plus précisément, si on se donne  $y_1, \dots, y_n \in F$ , alors il existe une unique application linéaire  $f : E \rightarrow F$  telle que  $\forall i \in [1..n], f(e_i) = y_i$ , de plus :

- $f$  est injective si et seulement si  $(y_1, \dots, y_n)$  est libre dans  $F$ .
- $f$  est surjective si et seulement si  $(y_1, \dots, y_n)$  est génératrice de  $F$ .
- $f$  est bijective si et seulement si  $(y_1, \dots, y_n)$  est une base de  $F$ .

**Preuve:** Soit  $x \in E$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{Coord}_B(x)$ , on définit  $f : E \rightarrow F$  en posant  $f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k$ . Il est facile de vérifier que  $f$  est linéaire et que c'est la seule qui vérifie  $f(e_k) = y_k$  pour  $k \in [1..n]$ .

Les deux équivalences suivantes sont simples à démontrer et la troisième est la conjonction des deux précédentes. On retient la troisième en disant que  $f$  est un isomorphisme de  $E$  vers  $F$  si et seulement si  $f$  transforme une base de  $E$  en une base de  $F$ .  $\square$

 Il en découle que deux applications linéaires de  $E$  vers  $F$  qui coïncident sur une base de  $E$  sont égales.



### THÉORÈME 17.12 (de la base incomplète)

Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et soit  $(y_1, \dots, y_r)$  une famille libre de  $E$  avec  $r < n$  alors il existe des vecteurs  $e_{i_{r+1}}, \dots, e_{i_n}$  de  $B$  tels que la famille  $(y_1, \dots, y_r, e_{i_{r+1}}, \dots, e_{i_n})$  soit une base de  $E$ .

**Preuve:** Comme  $r < n$  la famille  $(y_1, \dots, y_r)$  n'est pas génératrice de  $E$ , donc il existe au moins un vecteur  $e_k$  tel que  $(y_1, \dots, y_r, e_k)$  soit libre. Posons  $A = (y_1, \dots, y_r, e_1, \dots, e_n)$  alors  $A$  est une famille génératrice de  $E$ . La famille  $A$  contient des familles libres et parmi celles-ci il y en a qui contiennent les vecteurs  $y_1, \dots, y_r$ , on peut donc considérer une sous-famille libre de  $A$  qui contient ces vecteurs et qui soit de **cardinal maximal** :  $C = (y_1, \dots, y_r, e_{i_{r+1}}, \dots, e_{i_s})$ , si  $k \notin \{i_{r+1}, \dots, i_s\}$  alors la famille  $(y_1, \dots, y_r, e_{i_{r+1}}, \dots, e_{i_s}, e_k)$  est liée (maximalité de  $C$ ), donc  $e_k \in \text{Vect}[C]$  ce qui entraîne que  $C$  est une famille génératrice de  $E$ , or  $C$  est libre donc  $C$  est une base de  $E$ , ce qui entraîne également que  $s = n$  car toutes les bases de  $E$  ont  $n$  vecteurs.  $\square$

**Exemple:** Soit  $E = \mathbb{K}^3$  et  $B = (i, j, k)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^3$ , soit  $u = (1, 1, 1)$ . La famille  $(u)$  est libre, on peut donc compléter cette famille en une base de  $E$  avec deux vecteurs de la base canonique. Les vecteurs  $i$  et  $u$  sont non colinéaires, donc  $(u, i)$  est libre. On a  $j \notin \text{Vect}[u, i]$  donc  $(u, i, j)$  est libre, c'est donc une base de  $\mathbb{K}^3$ . On remarquera que  $(u, i, k)$  et  $(u, j, k)$  conviennent également.

## 2) Sous-espaces vectoriels



### THÉORÈME 17.13

*Si  $E$  est de dimension finie, alors tout s.e.v  $F$  de  $E$  est de dimension finie et  $\dim(F) \leq \dim(E)$ . De plus, si  $\dim(F) = \dim(E)$  alors  $F = E$ .*

**Preuve:** Si  $\dim(E) = 0$  il n'y a rien à démontrer. On suppose donc  $\dim(E) = n \geq 1$ , si  $F = \{0_E\}$  alors il n'y a rien à démontrer, on suppose donc  $F \neq \{0_E\}$ , mais alors  $F$  contient des familles libres et elles ont tout un cardinal inférieur ou égal à  $n$ , on peut donc considérer une famille  $\mathcal{C}$  libre de  $F$  de **cardinal maximal**, on a alors  $\forall x \in F, \mathcal{C} \cup (x)$  est liée, donc  $x \in \text{Vect}[\mathcal{C}]$  ce qui prouve que  $\mathcal{C}$  est une base de  $F$ , et le premier point est démontré. Si  $\dim(F) = \dim(E)$ , alors  $\text{card}(\mathcal{C}) = n$ , donc  $\mathcal{C}$  est également une base de  $E$ , d'où  $E = F$ .  $\square$



### THÉORÈME 17.14

*Si  $E$  est de dimension finie, alors tout s.e.v  $F$  de  $E$  admet au moins un supplémentaire  $G$  dans  $E$ .*

**Preuve:** On écarte les trois cas triviaux :  $E = \{0_E\}, F = E, F = \{0_E\}$ . Dans le cas général, soit  $(y_1, \dots, y_p)$  une base de  $F$  alors on peut compléter cette famille en une base de  $E$  :  $(y_1, \dots, y_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ , on pose alors  $G = \text{Vect}[e_{p+1}, \dots, e_n]$  et on vérifie que  $G$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .  $\square$



### THÉORÈME 17.15

*Soient  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un  $\mathbb{K}$ -e.v  $E$  de dimension finie, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.
- ii) La somme  $F + G$  est directe et  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ .
- iii)  $E = F + G$  et  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ .

**Preuve:** Il est clair que  $i) \implies ii)$ .

Supposons  $ii)$  : soit  $B = (y_1, \dots, y_p)$  une base de  $F$ , alors  $\dim(G) = n - p$  (où  $n = \dim(E)$ ), soit  $B' = (y_{p+1}, \dots, y_n)$  une base de  $G$ , il est facile de vérifier que  $F \cap G = \{0_E\} \implies B \cup B'$  est libre, or  $\text{card}(B \cup B') = n$ , c'est donc une famille génératrice de  $E$ , ce qui entraîne  $E = F + G$ , donc  $ii) \implies iii)$ .

Supposons  $iii)$  : avec les notations précédentes, l'hypothèse  $E = F + G$  implique que  $B \cup B'$  est génératrice de  $E$ , mais elle est de cardinal  $n$ , c'est donc une famille libre ce qui entraîne que la somme  $F + G$  est directe et donc  $E = F \oplus G$ , donc  $iii) \implies i)$ .  $\square$



### THÉORÈME 17.16

*Si  $E$  est de dimension finie et si  $F$  et  $G$  sont deux s.e.v de  $E$ , alors (formule de Grassmann<sup>1</sup>) :*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

**Preuve:** Soit  $H$  un supplémentaire de  $F \cap G$  dans  $F$  :  $F = H \oplus (F \cap G)$ , on a donc d'après la propriété précédente,  $\dim(H) = \dim(F) - \dim(F \cap G)$ . On vérifie ensuite que  $F + G = H \oplus G$ , on en déduit alors que  $\dim(F + G) = \dim(H) + \dim(G)$ , ce qui donne la formule.  $\square$

1. Hermann Günter GRASSMANN (1809 – 1877) : mathématicien allemand qui a développé les notions fondamentales de l'algèbre linéaire.



**THÉORÈME 17.17**

Si  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie, alors  $E \times F$  est de dimension finie et  $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$ .

**Preuve:** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(y_1, \dots, y_p)$  une base de  $F$ , alors on a déjà montré que la famille  $B = ((e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, y_1), \dots, (0_E, y_p))$  est une famille génératrice de  $E \times F$ , on peut vérifier alors que c'est aussi une famille libre, ce qui donne le résultat.  $\square$

**Exemple:** Si  $\dim(E) = 3$ , décrire les s.e.v de  $E$  et étudier les positions relatives (intersection de deux s.e.v de  $E$ ).

**3) Applications linéaires et dimension finie****THÉORÈME 17.18 (dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ )**

Si  $\dim(E) = n$  et  $\dim(F) = p$ , alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie et  $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np$ .

**Preuve:** Ce théorème sera établi dans le chapitre sur les matrices.  $\square$

**Exemples:**

- $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$  est de dimension  $np$ .
- Si  $\dim(E) = n$ , alors  $\dim(E^*) = n$  (dual de  $E$ ).

**THÉORÈME 17.19 (comparaison des dimensions)**

Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie et si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  :

- $f$  injective  $\implies \dim(E) \leq \dim(F)$ .
- $f$  surjective  $\implies \dim(E) \geq \dim(F)$ .
- $f$  bijective (isomorphisme)  $\implies \dim(E) = \dim(F)$ .

**Preuve:** Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $B' = (y_1, \dots, y_p)$  une base de  $F$ .

Si  $f$  est injective, alors la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre dans  $F$  donc  $n \leq p = \dim(F)$ .

Si  $f$  est surjective, alors la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice de  $F$  donc  $n \geq p = \dim(F)$ .

Si  $f$  est un isomorphisme, alors la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$  donc  $n = p = \dim(F)$ .  $\square$

**Remarques:**

- Tout  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .
- Si  $E$  est de dimension finie, alors  $E$  est isomorphe à  $E^*$ , son dual.

**THÉORÈME 17.20 (caractérisations des isomorphismes)**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie tels que  $\dim(E) = \dim(F)$ , et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est injective.
- $f$  est surjective.
- $f$  est bijective.
- $\exists g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g = \text{id}_F$ .
- $\exists h \in \mathcal{L}(F, E), h \circ f = \text{id}_E$ .

**Preuve:** Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

$a) \implies b)$  : si  $f$  est injective alors  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre de cardinal  $n$  dans  $F$ , or  $\dim(F) = \dim(E) = n$ , c'est une famille génératrice de  $F$ , et donc  $f$  est surjective.

$b) \implies c)$  :  $f$  est surjective, donc la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice de  $F$  de cardinal  $\dim(F)$ , c'est donc une base de  $F$ , ce qui signifie que  $f$  est un isomorphisme.

$c) \implies d)$  :  $f$  est bijective, il suffit donc de prendre  $g = f^{-1}$ .

$d) \implies e)$  : on a  $f \circ g = \text{id}_F$  donc  $f$  est surjective, ce qui entraîne que  $f$  est bijective, on a donc  $g = f^{-1}$  et il suffit alors de prendre  $h = g$ .

$e) \implies a)$  : on a  $h \circ f = \text{id}_E$ , donc  $f$  est injective.  $\square$

**Remarques:**

- Lorsque  $\dim(E) = \dim(F)$  l'égalité  $f \circ g = \text{id}_F$  entraîne automatiquement  $g \circ f = \text{id}_E$ , ce qui est tout à fait remarquable puisqu'en général la loi  $\circ$  n'est pas commutative.



- Le théorème précédent est faux en dimension infinie comme le montre les exemples suivants :  $f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  définie par  $f(P) = P'$  (surjective non injective) et  $g : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  définie par  $g(P) = XP$  (injective non surjective).

**Exemples:**

- Polynômes d'endomorphismes : si  $\dim(E) = n$  alors  $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$ , donc si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors la famille  $(id, u, \dots, u^{n^2})$  est liée, donc il existe un polynôme  $P = \sum \lambda_k X^k$  non nul de degré  $\leq n^2$  tel que  $P(u) = 0$ . Si  $P(0) \neq 0$ , alors  $\lambda_0 \neq 0$  d'où  $id_E = - \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_k}{\lambda_0} u^k$ , ou encore :

$$id_E = u \circ \left[ - \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_k}{\lambda_0} u^{k-1} \right].$$

Ce qui prouve que  $u \in GL(E)$  et  $u^{-1} = - \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_k}{\lambda_0} u^{k-1}$ .

- Polynôme d'interpolation de Lagrange : soient  $a_0, \dots, a_n$   $n+1$  scalaires distincts, on note  $f : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$  définie par  $f(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$ . Il est facile de vérifier que  $f$  est linéaire et injective, comme  $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$ ,  $f$  est un **isomorphisme**, par conséquent pour  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$  il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  tel que  $\forall i \in \llbracket 0..n \rrbracket, P(a_i) = \alpha_i$ . Soit  $B = (e_0, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^{n+1}$ , on note  $L_i$  l'unique polynôme de degré  $\leq n$  tel que  $f(L_i) = e_i$ . On vérifie facilement que :

$$L_i(X) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

C'est le  $i$ -ième polynôme d'interpolation de Lagrange aux points  $(a_0, \dots, a_n)$ , on en déduit que :

$$f^{-1}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(X).$$

**Exercice:** Soit  $E$  de dimension finie et soit  $u \in GL(E)$ , soit  $F$  un s.e.v de  $E$  stable par  $u$ , on appelle  $v$  la restriction de  $u$  à  $F$ , c'est à dire  $v : F \rightarrow F$  définie par  $v(x) = u(x)$ . Montrer que  $v \in GL(F)$ .

### III) Notion de rang

#### 1) Rang d'une application linéaire

**DÉFINITION 17.5**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , on sait que  $\text{Im}(f)$  est de dimension finie, par définition, on appelle **rang** de  $f$  la dimension de  $\text{Im}(f)$ .

Notation :  $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$ .

**Remarques:**

- Si  $B = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  alors on sait que  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$  donc  $\dim(\text{Im}(f)) \leq n$ , c'est à dire :

$$\text{rg}(f) \leq \dim(E).$$

- Si de plus  $F$  est de dimension finie, alors  $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(F)$ , donc :

$$\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F)).$$

- $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ , donc :

$$f \text{ est surjective} \iff \text{rg}(f) = \dim(F).$$

**THÉORÈME 17.21 (théorème du rang)**

Si  $E$  est de dimension finie et si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  alors :  $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$ .

**Preuve:** Soit  $G$  un supplémentaire de  $\ker(f)$  dans  $E$  :  $E = \ker(f) \oplus G$ . Il est facile de vérifier que l'application linéaire  $v : G \rightarrow \operatorname{Im}(f)$  définie par  $v(x) = f(x)$  est un isomorphisme, ce qui entraîne que  $\dim(G) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rg}(f)$ , or  $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(G)$ , d'où le résultat.  $\square$

**Conséquences :** Soit  $f : E \rightarrow F$  linéaire, si  $E$  de dimension finie, alors :  $f$  est injective  $\iff \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$ .

**Exemples:**

- Soit  $u : \mathbb{K}_{n+1}[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X]$  définie par  $u(P) = P(X+1) - P(X)$ . Il est clair que  $u$  est linéaire, on vérifie que  $\ker(u) = \mathbb{K}$ , le théorème du rang nous dit alors que  $\operatorname{rg}(u) = \dim(\mathbb{K}_{n+1}[X]) - \dim(\ker(u)) = n+2-1 = n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ , ce qui prouve que  $u$  est surjective.
- Soient  $F$  et  $G$  deux s.e.v de  $E$ , on considère l'application  $\varphi : F \times G \rightarrow E$  définie par  $\varphi(x, y) = x + y$ , on vérifie que  $\varphi$  est linéaire et que  $\ker(\varphi) = \{(x, -x) \mid x \in F \cap G\}$ . On voit que  $\ker(\varphi)$  est isomorphe à  $F \cap G$  et que  $\operatorname{Im}(\varphi) = F + G$ , le théorème du rang nous dit alors que  $\dim(F \times G) = \dim(F \cap G) + \dim(F + G)$ , d'où  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ , on retrouve ainsi la formule de *Grassmann*.

**Exercice:** Soit  $B = (i, j, k)$  une base de  $\mathbb{K}^3$ , on considère  $u : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^4$  définie par

$$\begin{cases} u(i) &= (1, 2, -1, 0) \\ u(j) &= (-1, 0, 1, -2) \\ u(k) &= (1, 4, -1, -2) \end{cases}.$$

Calculer le rang de  $u$  :

**Réponse:**  $x = ai + bj + ck \in \ker(u) \iff \begin{cases} b &= -c \\ a &= -2c \end{cases}$ , on en déduit que  $\ker(u) = \operatorname{Vect}[2i + j - k]$ ,

d'où  $\operatorname{rg}(u) = \dim(\mathbb{K}^3) - 1 = 2$ , donc  $\operatorname{Im}(u)$  est un plan vectoriel, comme  $u(i)$  et  $u(j)$  sont non colinéaires, on a  $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}[u(i), u(j)]$ .



#### THÉORÈME 17.22 (propriétés du rang)



Soient  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -e.v, soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , on a :  $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f))$ .  
De plus, si  $f$  est surjective, alors  $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)$ , et si  $g$  est injective, alors  $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$ .

**Preuve:** Soit  $h : \operatorname{Im}(f) \rightarrow G$  définie par  $h(x) = g(x)$ , alors  $h$  est linéaire et  $\operatorname{Im}(h) = \operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$ , on a donc  $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(h) \leq \dim(\operatorname{Im}(f))$  d'après le théorème du rang, de plus l'inclusion ci-dessus prouve que  $\operatorname{rg}(h) \leq \operatorname{rg}(g)$ , d'où le résultat.

Si  $f$  est surjective, alors  $\operatorname{Im}(f) = F$  et donc  $h = g$ , d'où  $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)$ .

Si  $g$  est injective, alors  $h$  est injective, donc  $\operatorname{rg}(h) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rg}(f)$ .  $\square$

**Exercice:** Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie et soit  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ , montrer que :

$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

## 2) Rang d'une famille de vecteurs



#### DÉFINITION 17.6

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -e.v  $E$ . On appelle **rang** de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  la dimension du s.e.v engendré par cette famille.

Notation :  $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim(\operatorname{Vect}[x_1, \dots, x_n])$ .

**Remarques:**

- La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est génératrice de  $F = \operatorname{Vect}[x_1, \dots, x_n]$ , donc son rang est inférieur ou égal à  $n$ . De plus on sait que l'on peut extraire de cette famille une base de  $F$  en prenant une sous-famille libre de **cardinal maximal**, ce cardinal maximal est donc le rang de la famille.
- La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre si et seulement si c'est une base de  $F = \operatorname{Vect}[x_1, \dots, x_n]$  ce qui équivaut à  $\dim(F) = n$ , ce qui équivaut encore à : le rang de la famille est égal à  $n$ , donc :

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ libre} \iff \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) = n.$$

- Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  alors :

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\operatorname{Vect}[f(e_1), \dots, f(e_n)]) = \operatorname{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

**Exemples:**

- Dans  $\mathbb{K}^3$  calculons le rang de la famille  $(i, j, k)$  avec  $i = (1, 1, 1)$ ,  $j = (-1, 2, 5)$  et  $k = (3, 0, -3)$ . La famille  $(i)$  est libre,  $j$  est non colinéaire à  $i$  donc  $(i, j)$  est libre, mais  $k = 2i - j$  donc la famille  $(i, j, k)$  est liée, par conséquent  $(i, j)$  est libre maximale d'où  $\operatorname{rg}(i, j, k) = 2$  et  $\operatorname{Vect}[i, j, k] = \operatorname{Vect}[i, j]$ .

### 3) Méthode du pivot de Gauss

Celle-ci est utilisée dans la pratique pour le calcul du rang d'une famille de vecteurs.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$  et soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , on considère une famille de vecteurs de  $E : (x_1, \dots, x_p)$  dont on cherche le rang. On a les propriétés suivantes :

- Si  $x_p = 0_E$ , alors  $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(x_1, \dots, x_{p-1})$ . Autrement dit, si l'un des vecteurs de la famille est nul, on peut le retirer de la famille, cela ne change pas le rang (en fait cela ne change pas le s.e.v engendré).
- Si  $\alpha \in \mathbb{K}^*$ , alors  $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(\alpha x_1, x_2, \dots, x_p)$ , autrement dit, multiplier l'un des vecteurs par un scalaire non nul ne change pas le rang.
- Si  $\lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ , alors  $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(x_1 + \sum_{k=2}^p \lambda_k x_k, x_2, \dots, x_p)$ . Autrement dit, ajouter à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres ne change pas le rang.
- Si on a le système suivant (dans le cas où  $p \leq n$ ) :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_{1,1}e_1 + \lambda_{1,2}e_2 + \dots + \lambda_{1,n}e_n \\ x_2 = \lambda_{2,2}e_2 + \dots + \lambda_{2,n}e_n \\ \vdots \\ x_p = \lambda_{p,p}e_p + \dots + \lambda_{p,n}e_n \end{cases},$$

alors si les scalaires  $\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{p,p}$  (pivots de Gauss) sont **tous non nuls**, on a  $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = p$ , c'est à dire la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre.

**Preuve:** Laissez en exercice. □

La méthode est la suivante, on exprime les vecteurs  $x_1, \dots, x_p$  dans une base  $(e_1, \dots, e_n)$ , puis on effectue sur ce système des transformations élémentaires de manière à le rendre triangulaire (comme le système ci-dessus). Les transformations élémentaires de la méthode de Gauss sont :

- Échanger deux lignes :  $L_i \leftrightarrow L_j$  (elle permet de mettre le pivot dans la bonne ligne (ligne  $k$  pour le  $k$ -ième pivot)).
- Échanger deux colonnes :  $C_i \leftrightarrow C_j$  (elle permet de mettre le pivot dans la bonne colonne (colonne  $k$  pour le  $k$ -ième pivot)).
- Multiplier une ligne par un scalaire non nul :  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ .
- Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne :  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  (elle permet les éliminations à partir de la ligne du pivot dans les lignes suivantes).

D'après les propriétés précédentes, après chaque opération élémentaire, on obtient une nouvelle famille qui a le même rang que la précédente.

**Exemple:** Soit  $x_1 = (2, 3, -3, 4, 2)$ ,  $x_2 = (3, 6, -2, 5, 9)$ ,  $x_3 = (7, 18, -2, 7, 7)$  et  $x_4 = (2, 4, -2, 3, 1)$ . On prend

$B = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^5$ , on a alors le système de coordonnées :

$$\begin{aligned} \text{Système initial : } & \begin{cases} x_1 : \boxed{2} & 3 & -3 & 4 & 2 \\ x_2 : & 3 & 6 & -2 & 5 & 9 \\ x_3 : & 7 & 18 & -2 & 7 & 7 \\ x_4 : & 2 & 4 & -2 & 3 & 1 \end{cases} \\ \text{Étape 1 : } & \begin{cases} x_1 : \boxed{2} & 3 & -3 & 4 & 2 \\ 2x_2 - 3x_1 = v_2 : & 3 & 5 & -2 & 12 & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ 2x_3 - 7x_1 = v_3 : & 15 & 17 & -14 & & L_3 \leftarrow 2L_3 - 7L_1 \\ x_4 - x_1 = v_4 : & 1 & 1 & -1 & -1 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \\ \text{Étape 2 } (L_2 \leftrightarrow L_4) : & \begin{cases} x_1 : \boxed{2} & 3 & -3 & 4 & 2 \\ v_4 : & \boxed{1} & 1 & -1 & -1 \\ v_3 - 15v_4 : & & 2 & 1 & 15 & L_3 \leftarrow L_3 - 15L_2 \\ v_2 - 3v_4 : & & 2 & 1 & 15 & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{cases} \\ \text{Étape 3 : } & \begin{cases} x_1 : \boxed{2} & 3 & -3 & 4 & 2 \\ v_4 : & \boxed{1} & 1 & -1 & -1 \\ v_3 - 15v_4 : & & \boxed{2} & 1 & 15 \\ v_2 - v_3 + 12v_4 : & & & 0 & 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc  $\text{rg}(x_1, \dots, x_4) = \text{rg}(v_1, v_4, v_3 - 15v_4) = 3$ , de plus on a  $v_2 - v_3 + 12v_4 = 0$ , ce qui donne  $x_2 = 4x_1 + x_3 - 6x_4$ , et par conséquent :  $\text{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{rg}(x_1, x_3, x_4) = 3$ .

## IV) Exercices

### ★Exercice 17.1

Dans chacun des cas suivants, montrer que  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -e.v et calculer sa dimension et donner une base :

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = x + 2y - 3z = 0\}$ .
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (x, y, z) = (\alpha - \beta, 2\alpha - 2\beta + \gamma, 2\gamma + \beta - \alpha)\}$ .
- $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0, x + 2y - z - t = 0\}$ .
- $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ .
- $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \exists P \in \mathbb{R}_n[X], f : t \mapsto e^{-t}P(t)\}$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F = \{f \in \mathcal{F}([0; 1], \mathbb{R}) / \forall k \in \llbracket 0..n-1 \rrbracket, f \text{ est constante sur } ]\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}[\}$ .

### ★Exercice 17.2

Dans  $\mathbb{K}^4$  on pose  $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, 1, 3)$ ,  $\vec{c} = (2, 1, 1, 1)$ ,  $\vec{d} = (-1, 0, -1, 2)$  et  $\vec{e} = (2, 3, 0, 1)$ . On pose  $U = \text{Vect}[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$  et  $V = \text{Vect}[\vec{d}, \vec{e}]$ . Déterminer une base des s.e.v suivants :  $U, V, U \cap V, U + V$ .

### ★Exercice 17.3

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  définie par

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \\ f(\vec{j}) = -4\vec{j} - 2\vec{k} \\ f(\vec{k}) = 4\vec{i} + 12\vec{j} + 5\vec{k} \end{cases}.$$

- Déterminer le rang de  $f$ , son noyau et son image.
- Déterminer les réels  $\lambda$  tels que  $f - \lambda \text{id}$  soit non inversible.

## ★ Exercice 17.4

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie dans une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\mathbb{R}^3$  par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) &= \vec{i} + \vec{j} \\ f(\vec{j}) &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ f(\vec{k}) &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \end{cases}$$

Déterminer  $\text{rg}(f)$ , puis  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$ , donner une base de chaque.

## ★ Exercice 17.5

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre d'un  $\mathbb{K}$ -e.v  $E$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , on pose  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  et

$v_i = u + e_i$ . Montrer que la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre ssi  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq -1$ .

## ★ Exercice 17.6

Soit  $(P_0, \dots, P_n)$  une famille de polynômes telle que  $\forall k \in \llbracket 0..n \rrbracket, \deg(P_k) = k$ . Montrer que cette famille est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$  (théorème des degrés étagés).

## ★ Exercice 17.7

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $u : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_{n+1}[X]$  définie par  $u(P) = 2XP - P'$ . Montrer que  $u$  est linéaire et calculer  $\text{rg}(u)$ .

## ★ Exercice 17.8

Soit  $E = \mathbb{K}^3$ , on pose  $i = (1, 1, 1)$ ,  $j = (0, 1, 2)$  et  $k = (-1, 0, 2)$ . Montrer que  $B = (i, j, k)$  est une base

de  $E$  et pour  $x \in E$ , calculer  $\text{Coord}_B(x)$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  définie par  $\begin{cases} f(i) &= 2i + j \\ f(j) &= -i + k \\ f(k) &= i - j + k \end{cases}$ , déterminer

$\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .

## ★ Exercice 17.9

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie, et soit  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ .

- Montrer que si  $F$  et  $G$  ont la même dimension, alors ils possèdent au moins un supplémentaire commun.
- Exemple : soit  $E = \mathbb{K}^4$ ,  $F = \text{Vect}[(1, 1, 0, -1); (2, 0, 1, -1)]$  et  $G = \{(x, y, z, t) \in E / x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$ . Montrer que  $\dim(F) = \dim(G)$  et trouver un supplémentaire commun.

## ★ Exercice 17.10

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , montrer que :

- $f$  est injective ssi  $\exists g \in \mathcal{L}(F, E), g \circ f = \text{id}_E$ .
- $f$  est surjective ssi  $\exists h \in \mathcal{L}(F, E), f \circ h = \text{id}_F$ .

## ★ Exercice 17.11

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie, et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ .

- Montrer que si  $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$  et  $E = \ker(f) + \ker(g)$ , alors ces deux sommes sont directes.
- Montrer que si les sommes  $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$  et  $\ker(f) + \ker(g)$  sont directes, alors  $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g) = \ker(f) \oplus \ker(g)$ .

## ★ Exercice 17.12

Soit  $E = \mathbb{K}_n[X]$ .

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  défini par  $u(X^k) = X^k(1 - X)^{n-k}$  pour  $k \in \llbracket 0..n \rrbracket$ . Montrer que  $u \in \text{GL}(E)$ .
- Soient  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$   $n + 1$  scalaires distincts, et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  défini par  $u(X^k) = (X + a_k)^n$  pour  $k \in \llbracket 0..n \rrbracket$ . Montrer que  $u \in \text{GL}(E)$ .

## ★Exercice 17.13

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$ .

- Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de  $n$  formes linéaires sur  $E$ , on suppose qu'il existe une famille de vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$  telle que  $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ . Montrer que  $B = (x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $E$ , pour  $x \in E$  calculer  $\text{Coord}_B(x)$ . Montrer que  $B' = (f_1, \dots, f_n)$  est une base de  $E^*$ , pour  $f \in E^*$ , calculer  $\text{Coord}_{B'}(f)$ .
- Exemple : soit  $E = \mathbb{K}_n[X]$  et soient  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$   $n+1$  scalaires distincts, pour  $i \in \llbracket 0..n \rrbracket$  on définit la forme linéaire  $f_i$  en posant  $f_i(P) = P(a_i)$ . Déterminer une famille de polynômes dans  $E$   $(L_0, \dots, L_n)$  telle que  $f_i(L_j) = \delta_{i,j}$ , appliquer alors le résultat de la question précédente.  
Même question avec les formes linéaires  $g_i$  définies par  $g_i(P) = P^{(i)}(a)$  avec  $i \in \llbracket 0..n \rrbracket$  et  $a \in \mathbb{K}$  fixé.

## ★Exercice 17.14

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$ , et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  des scalaires **distincts** tels que pour  $k \in \llbracket 1..p \rrbracket$  il existe un vecteur  $x_k \in E$  **non nul** tel que  $u(x_k) = \lambda_k x_k$ . Montrer que la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre, que dire alors de  $p$ ? En déduire qu'il existe une infinité de scalaires  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que  $u - \lambda \text{id} \in \text{GL}(E)$ .
- Montrer que tout endomorphisme de  $E$  est la somme de deux automorphismes de  $E$ .

## ★Exercice 17.15

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on dit que  $u$  est nilpotent d'indice  $p \in \mathbb{N}^*$  lorsque  $u^{p-1} \neq 0$  et  $u^p = 0$ .

- Montrer que si  $u$  est nilpotent d'indice  $p$ , alors  $u \pm \text{id}_E \in \text{GL}(E)$  et déterminer l'inverse. Montrer que si  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes de  $E$  nilpotents et qui commutent, alors  $u + v$  est nilpotent.
- On suppose  $\dim(E) = n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent d'indice  $p$ . Montrer qu'il existe un vecteur  $x_0$  de  $E$  tel que la famille  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$  soit libre dans  $E$ . Que dire alors de  $p$ ? de la famille  $(\text{id}, u, \dots, u^{p-1})$ ? Déduire de ce qui précède que si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotent, alors  $u^n = 0$ .

## ★Exercice 17.16

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$ , soient  $a, b \in \mathcal{L}(E)$ , on cherche à résoudre l'équation  $a \circ u = b$  d'inconnue  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- Montrer qu'il s'agit d'une équation linéaire.
- Montrer qu'il existe une solution particulière ssi  $\text{Im}(a) \subset \text{Im}(b)$ .
- Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène, montrer qu'il s'agit d'un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n(n - \text{rg}(a))$ . Donner alors toutes les solutions. Dans quel cas y-a-t-il une seule solution?

## ★Exercice 17.17

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  de rang égal à 1.

- Montrer qu'il existe un scalaire unique  $\lambda$  tel que  $u^2 = \lambda u$ .
- Montrer que si  $a \in \mathbb{K}^* \setminus \{\lambda\}$ , alors  $u - a \text{id}_E \in \text{GL}(E)$  et calculer l'inverse.

## ★Exercice 17.18

Soit  $E$  un e.v de dimension 3, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 = 0$  et  $f \neq 0$ . Montrer que  $\text{rg}(f) = 1$ .

## ★Exercice 17.19

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie, et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ .
- $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ .
- $\ker(f) = \ker(f^2)$ .

## ★ Exercice 17.20

Soit  $E$  un e.v de dimension finie, soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- a)  $\text{rg}(u + v) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ .
- b)  $\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\}$  et  $E = \ker(u) + \ker(v)$

## ★ Exercice 17.21

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie, soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et soit  $g \in \mathcal{L}(F, E)$ , on suppose que  $f \circ g \circ f = f$  et  $g \circ f \circ g = g$ .

- a) Montrer que les applications :  $f, g, f \circ g, g \circ f$  ont le même rang.
- b) Montrer que  $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(g)$  et  $F = \text{Im}(f) \oplus \ker(g)$ .

## ★ Exercice 17.22

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie, et  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- a)  $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(g)$ .
- b)  $\exists h \in \text{GL}(F), \exists k \in \mathcal{L}(E), h \circ f = g \circ k$ .

## ★ Exercice 17.23

On pose  $u : \mathbb{K}_{n+1}[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X]$  définie par  $u(P) = P(X+1) - P(X)$ .

- a) Montrer que  $u$  est linéaire, déterminer  $\ker(u)$ , en déduire le rang et  $\text{Im}(u)$ .
- b) Soit  $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ , montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  tel que  $\begin{cases} u(P) = Q \\ P(0) = 0 \end{cases}$ . Montrer

$$\text{que } \forall n \in \mathbb{N}, P(n+1) = \sum_{k=0}^n Q(k).$$

- c) On note  $P_n$  l'unique polynôme vérifiant  $P_n(0) = 0$  et  $u(P_n) = X^n$ . Calculer  $P_0$  et montrer que pour  $n \geq 1$  :  $P_n = \frac{1}{n+1} \left( X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k P_k \right)$ . En déduire  $P_1, P_2, P_3$ .