Les rationnels, les réels

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 I

Montrer que les nombres suivants sont irrationnels.

1. (**) $\sqrt{2}$ et plus généralement $\sqrt[n]{m}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2 et m est un entier naturel supérieur ou égal à 2, qui n'est pas une puissance n-ième parfaite.
2. (**) $\log 2$.
3. (****) π (LAMBERT a montré en 1761 que π est irrationnel, LEGENDRE a démontré en 1794 que π^2 est irrationnel, LINDEMANN a démontré en 1882 que π est transcendant).
   Pour cela, supposer par l'absurde que $\pi = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Considérer alors $I_n = \int_0^{p/q} \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} \sin x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que I_n vérifie
   (a) I_n est un entier relatif ;
   (b) $I_n > 0$;
   (c) $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ (voir devoir).
4. (***) e (HERMITE a démontré en 1873 que e est transcendant. C'est historiquement le premier « vrai » nombre dont on a réussi à démontrer la transcendance).
   Pour cela, établir que pour tout entier naturel n, $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$, puis que **pour tout** entier naturel non nul n, $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Raisonner alors par l'absurde.
5. (***) $\cos(\frac{2\pi}{7})$. Pour cela trouver une équation du troisième degré à coefficients entiers dont les solutions sont $\cos(\frac{2\pi}{7})$, $\cos(\frac{4\pi}{7})$ et $\cos(\frac{6\pi}{7})$, puis vérifier que cette équation n'a pas de racine rationnelle (supposer par l'absurde qu'il y a une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{PGCD}(p,q) = 1$ et montrer que p divise 1 et q divise 8). (On rappelle le théorème de GAUSS : soient a, b et c trois entiers relatifs tous non nuls. Si a divise bc et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c).
6. (***) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Correction ▼ [005209]

Exercice 2 **IT

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et bornées. Montrer que $\sup A$, $\sup B$, $\sup(A+B)$, $\inf A$, $\inf B$, $\inf(A+B)$ existent et que l'on a $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ et $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$. ($A+B$ désigne l'ensemble des sommes d'un élément de A et d'un élément de B).

Correction ▼ [005210]

Exercice 3 **

Soit $A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

Correction ▼ [005211]

Exercice 4 **IT

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup\{|x-y|,\ (x,y)\in A^2\}=\sup A-\inf A$.

Correction ▼ [005212]

Exercice 5 ***IT

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Que dire de $\sup(A\cap B)$, $\sup(A\cup B)$, $\sup(A+B)$ et $\sup(AB)$? ($A+B$ (resp. AB) désigne l'ensemble des sommes (resp. des produits) d'un élément de A et d'un élément de B).

Correction ▼ [005213]

Exercice 6 ****

Soit u_n le chiffre des unités de C_n^k, k entier naturel fixé non nul et n entier naturel supèrieur ou égal à k. Montrer que le nombre $0,u_ku_{k+1}u_{k+2}\ldots$ est rationnel.

Correction ▼ [005214]

Exercice 7 ** Identité de CATALAN

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

Correction ▼ [005215]

Exercice 8 **I Inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et de MINKOWSKI

Soient a_1,..., a_n, b_1,..., b_n des nombres réels.

1. En considérant la fonction $f\ :\ x\mapsto\sum_{k=1}^n(a_k+xb_k)^2$, montrer que $|\sum_{k=1}^n a_kb_k|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).
2. En déduire l'inégalité de MINKOWSKI : $\sqrt{\sum_{k=1}^n(a_k+b_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$.
   (l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ affirme que le produit scalaire de deux vecteurs est inférieur ou égal au produit de leurs normes et l'inégalité de MINKOWSKI est l'inégalité triangulaire).

Correction ▼ [005216]

Exercice 9 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$.

Correction ▼ [005217]

Exercice 10 **** Sous groupes de $(\mathbb{R},+)$

1. Montrer que les sous groupes du groupe $(\mathbb{R},+)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$, a réel donné, soit denses dans $\mathbb{R}$.
   Indication : pour G sous-groupe donné de $(\mathbb{R},+)$, non réduit à $\{0\}$, considérer $a=\text{Inf }(G\cap]0;+\infty[)$ puis envisager les deux cas $a=0$ et $a>0$.
   (Definition : G est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $(\forall x\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists y\in G/\ |y-x|<\varepsilon)$.
2. Application 1. Montrer que $\{a+b\sqrt{2},\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Application 2 (groupe des périodes d'une fonction).
   (a) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des périodes de f est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$ (ce sous-groupe est réduit à $\{0\}$ si f n'est pas périodique).
   (b) Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes, est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005218]

Exercice 11 **

Montrer que $\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005219]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soient m et n deux entiers naturels supérieurs à 2.

$$\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / \sqrt[n]{m} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / a^n = m \times b^n.$$

Tout d'abord, si $b = 1$, $m = a^n$ et m est une puissance n-ième parfaite. Ensuite, $a = 1$ est impossible car $m \times b^n \geq 2$. Supposons alors que a et b soient des entiers supérieurs à 2 (et que $a^n = m \times b^n$). L'exposant de tout facteur premier de a^n ou de b^n est un multiple de n et par unicité de la décomposition en facteurs premiers, il en est de même de tout facteur premier de m. Ceci montre que, si $\sqrt[n]{m}$ est rationnel, m est une puissance n-ième parfaite. Réciproquement, si m est une puissance n-ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est un entier et en particulier un rationnel. En résumé :

$$\boxed{\forall (m,n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2,\ \sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow m \text{ est une puissance } n \text{ -ième parfaite.}}$$

Par suite, si m n'est pas une puissance n-ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est irrationnel.

2.

$$\log 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / \log 2 = \frac{a}{b} \Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 10^{a/b} = 2 \Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 10^a = 2^b$$
$$\Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 5^a = 2^{b-a}.$$

Puisque $5^a > 1$, ceci impose $b - a \in \mathbb{N}^*$. Mais alors, l'égalité ci-dessus est impossible pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$ par unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a montré par l'absurde que

$$\boxed{\log 2 \text{ est irrationnel.}}$$

3. Supposons par l'absurde que π soit rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\pi = \frac{p}{q}$. Pour n entier naturel non nul donné, posons

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (p - qx)^n \sin x \, dx = \frac{1}{n!} \int_0^{p/q} x^n (p - qx)^n \sin x \, dx.$$

• Tout d'abord, pour $0 \leq x \leq \frac{p}{q}$, on a $0 \leq x(p - qx) = \frac{p}{2q} \left(p - \frac{p}{2q} \times q \right) = \frac{p^2}{4q}$, et donc (puisque $0 \leq \sin x \leq 1$ pour $x \in [0, \pi]$),

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^{p/q} \left(\frac{p^2}{4q} \right)^n dx = \frac{\pi}{n!} \left(\frac{p^2}{4q} \right)^n.$$

D'après le résultat admis par l'énoncé, $\frac{\pi}{n!} \left(\frac{p^2}{4q} \right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite (I_n) converge et $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$. • Ensuite, puisque pour x élément de $[0, \pi]$, on a $x^n (p - qx)^n \sin x \geq 0$, pour n entier naturel non nul donné, on a

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (p - qx)^n \sin x \, dx \geq \frac{1}{n!} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} x^n (p - qx)^n \sin x \, dx \geq \frac{1}{n!} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{p}{4q} \left(p - \frac{p}{4q} \times q \right) \right)^n \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2} n!} \left(\frac{3p^2}{16q} \right)^n > 0.$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$. • Vérifions enfin que, pour tout entier naturel non nul n, I_n est un entier (relatif). Soit $P_n = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n$. P_n est un polynôme de degré $2n$ et 0 et $\frac{p}{q}$ sont racines d'ordre n de P_n et donc, pour $0 \leq k \leq n$, racines d'ordre $n - k$ de $P_n^{(k)}$. En particulier, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)} \left(\frac{p}{q} \right)$ sont, pour $0 \leq k < n$, des entiers relatifs. De même, puisque $\deg P_n = 2n$, pour $k \geq 2n + 1$, $P_n^{(k)} \geq 0$ et en particulier, $P_n^{(k)}(0)$ et $Pn^{(k)} \left(\frac{p}{q} \right)$ sont, pour $k \geq 2n + 1$, des entiers relatifs. Soit k un entier tel que $n \leq k \leq 2n$.

$$\frac{1}{n!}x^n(p-qx)^n = \frac{1}{n!}x^n\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^{n-i}(-1)^i q^i x^i = \sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i}{n!}p^{n-i}(-1)^i q^i x^{n+i} = \sum_{k=n}^{2n}\frac{C_n^{k-n}}{n!}p^{2n-k}(-1)^{k-n}q^{k-n}x^k.$$

On sait alors que

$$P_n^{(k)}(0) = k!\times(\text{coefficient de } x^k) = (-1)^{k-n}\frac{k!}{n!}C_n^{k-n}p^{2n-k}q^{k-n}.$$

ce qui montre que $P_n^{(k)}(0)$ est entier relatif (puisque $n \leq k \leq 2n$). Puis, comme $P_n\left(\frac{p}{q}-x\right) = P_n(x)$, on a encore $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}-x\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(x)$ et en particulier $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$. On a montré que pour tout entier naturel k, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont des entiers relatifs. Montrons alors que I_n est un entier relatif. Une première intégration par parties fournit : $I_n = [-P_n(x)\cos x]_0^{p/q} + \int_0^{p/q} P_n'(x)\cos x\,dx$. cos prend des valeurs entières en 0 et $\frac{p}{q} = \pi$ de même que P_n. Par suite,

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n'(x)\cos x\,dx \in \mathbb{Z}.$$

Une deuxième intégration par parties fournit : $\int_0^{p/q} P_n'(x)\cos x\,dx = [P_n'(x)\sin x]_0^{p/q} - \int_0^{p/q} P_n''(x)\sin x\,dx$. sin prend des valeurs entières en 0 et $\frac{p}{q} = \pi$, de même que P_n' et

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n''(x)\sin x\,dx \in \mathbb{Z}.$$

En renouvelant les intégrations par parties et puisque sin et cos prennent des valeurs entières en 0 et π de même que les dérivées succesives de P_n, on en déduit que :

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x)\sin x\,dx \in \mathbb{Z}.$$

Mais,

$$\int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x)\sin x\,dx = \int_0^{p/q}\frac{1}{n!}(-q)^n(2n)!\sin x\,dx = 2(-q)^n(2n)(2n-1)...(n+1) \in \mathbb{Z}.$$

Donc pour tout naturel n, I_n est un entier relatif, strictement positif d'après plus haut. On en déduit que pour tout naturel n, $I_n \geq 1$. Cette dernière constatation contredit le fait que la suite (I_n) converge vers 0. L'hypothèse π est rationnel est donc absurde et par suite,

$$\boxed{\pi \text{ est irrationnel.}}$$

4. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,dt$. • Pour $n = 0$, $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,dt = \int_0^1 e^t\,dt = e-1$ et donc, $e = 1 + \int_0^1 e^t\,dt = \sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!}e^t\,dt$. • Soit $n \geq 0$. Supposons que $e = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,dt$. Une intégrations par parties fournit :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)\times n!}e^t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\,dt = \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\,dt,$$

et donc,

$$e = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\,dt = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\,dt.$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence. Soit n un entier naturel non nul. D'après ce qui précède,

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,dt < e\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,dt = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Supposons alors par l'absurde que e soit rationnel. Alors, il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ e = \frac{a}{b}$. Soit n un entier naturel non nul quelconque. D'après ce qui précède, on a $0 < \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$, ce qui s'écrit encore après multiplication des trois membres par $bn!$

$$0 < a \times n! - b\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < \frac{3b}{n+1}.$$

En particulier, pour $n = 3b$, on a $0 < a \times (3b)! - b\sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < \frac{3b}{3b+1} < 1$. Mais ceci est impossible car $a \times n! - b\sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!}$ est un entier relatif. Il etait donc absurde de supposer que e est rationnel et finalement,

$$\boxed{e \text{ est irrationnel.}}$$

5. Une équation du troisième degré dont les solutions sont $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$ est

$$(X - \cos\tfrac{2\pi}{7})(X - \cos\tfrac{4\pi}{7})(X - \cos\tfrac{6\pi}{7}) = 0,$$

ou encore

$$X^3 - \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)X^2 + \left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right)X - \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

Calculons alors ces trois coefficients. Soit $\omega = e^{2i\pi/7}$. Puisque $\omega^7 = 1$ et que $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$, on a d'après les formules d'EULER

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}(\omega + \omega^6 + \omega^2 + \omega^5 + \omega^3 + \omega^4) = -\frac{1}{2},$$

puis,

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{4}((\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5) + (\omega+\omega^6)(\omega^3+\omega^4) + (\omega^2+\omega^5)(\omega^3+\omega\\ &= \frac{1}{4}((\omega^3+\omega^6+\omega+\omega^4) + (\omega^4+\omega^5+\omega^2+\omega^3) + (\omega^5+\omega^6+\omega+\omega^2))\\ &= \frac{2(-1)}{4} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8}(\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)(\omega^3+\omega^4)\\ &= \frac{1}{8}(\omega^3+\omega^6+\omega+\omega^4)(\omega^3+\omega^4) = \frac{1}{8}(\omega^6+1+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+1+\omega) = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Les trois nombres $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$ sont donc solution de l'équation $X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8} = 0$ ou encore de l'équation

$$8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0.$$

Montrons que cette équation n'admet pas de racine rationnelle. Dans le cas contraire, si, pour p entier relatif non nul et q entier naturel non nul tels que p et q sont premiers entre eux, le nombre $r = \frac{p}{q}$ est racine de cette équation, alors $8p^3 + 4p^2q - 4pq^2 - q^3 = 0$. Ceci peut encore s'écrire $8p^3 = q(-4p^2 + 4pq + q^2)$ ce qui montre que q divise $8p^3$. Comme q est premier avec p et donc avec p^3, on en déduit d'après le théorème de GAUSS que q divise 8. De même, l'égalité $q^3 = p(8p^2 + 4pq - 4q^2)$ montre que p divise q^3 et donc que p divise 1. Ainsi, $p \in \{-1, 1\}$ et $q \in \{1, 2, 4, 8\}$ ou encore $r \in \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}$. On vérifie alors aisément qu'aucun de ces nombres n'est racine de l'équation considérée et donc cette équation n'a pas de racine rationnelle. En particulier,

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{7} \text{ est irrationnel.}}$$

6. On sait que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels mais ceci n'impose rien à la somme $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Soit $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} &\Rightarrow (\alpha-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 \Rightarrow \alpha^2-2\sqrt{2}\alpha+2=8+2\sqrt{15}\\ &\Rightarrow (\alpha^2-2\sqrt{2}\alpha-6)^2=60 \Rightarrow \alpha^4+8\alpha^2-24=4\sqrt{2}\alpha(\alpha^2-6)\end{aligned}$$

Si maintenant, on suppose que α est rationnel, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a nécessairement $\alpha(\alpha^2-6)=0$ (dans le cas contraire, $\sqrt{2}=\frac{\alpha^4+8\alpha^2-24}{4\alpha(\alpha^2-6)}\in\mathbb{Q}$). Mais α n'est ni 0, ni $-\sqrt{6}$, ni $\sqrt{6}$ (car $\alpha^2>2+3+5=10>6$). Donc

$$\boxed{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \text{ est irrationnel.}}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ et admettent donc des bornes supérieures notées respectivement α et β. Pour tout $(a,b)\in A\times B$, on a $a+b\leq\alpha+\beta$. Ceci montre que $A+B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et donc que $\sup(A+B)$ existe dans $\mathbb{R}$. (De plus, puisque $\alpha+\beta$ est un majorant de $A+B$, on a déjà $\sup(A+B)\leq\alpha+\beta$). Soit alors $\varepsilon>0$. Il existe $a\in A$ et $b\in B$ tels que $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}<a\leq\alpha$ et $\beta-\frac{\varepsilon}{2}<b\leq\beta$, et donc tels que $\alpha+\beta-\varepsilon<a+b\leq\alpha+\beta$.
En résumé,

$$\textbf{(1)}\ \forall(a,b)\in A\times B,\ a+b\leq\alpha+\beta \text{ et } \textbf{(2)}\ \forall\varepsilon>0,\ \exists(a,b)\in A\times B/\ a+b>\alpha+\beta-\varepsilon.$$

On en déduit que

$$\boxed{\sup(A+B)=\alpha+\beta=\sup A+\sup B.}$$

Pour les bornes inférieures, on peut refaire le travail précédent en l'adaptant ou appliquer le résultat précédent aux ensembles $-A$ et $-B$ car $\mathrm{Inf}A=-\sup(-A)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Posons pour n entier naturel non nul $u_n=\frac{1}{n}+(-1)^n$ de sorte que $A=\{u_n,\ n\in\mathbb{N}^*\}=\left\{0,\frac{1}{2}+1,\frac{1}{3}-1,\frac{1}{4}+1,\frac{1}{5}-1,\dots\right\}$.
Pour $n\geq1$, $u_{2n}=1+\frac{1}{2n}$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1<u_{2n}\leq\frac{3}{2}$. Pour $n\geq1$, $u_{2n-1}=-1+\frac{1}{2n-1}$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-1<u_{2n-1}\leq0$. Par suite, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-1<u_n\leq\frac{3}{2}$. Donc, $\sup A$ et $\inf A$ existent dans $\mathbb{R}$ et de plus $-1\leq\inf A\leq\sup A\leq\frac{3}{2}$. Ensuite, $\frac{3}{2}=u_2\in A$. Donc,

$$\boxed{\sup A=\max A=\frac{3}{2}.}$$

Enfin, pour chaque entier naturel non nul n, ona $-1\leq\inf A\leq u_{2n-1}=-1+\frac{1}{2n-1}$. On fait tendre n tend vers l'infini dans cet encadrement, on obtient

$$\boxed{\inf A=-1}$$

(cette borne inférieure n'est pas un minimum).

Correction de l'exercice 4 ▲

Posons $B = \{|y-x|,\ (x,y) \in A^2\}$. A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, et donc $m = \inf A$ et $M = \sup A$ existent dans $\mathbb{R}$. Pour $(x,y) \in A^2$, on a $m \leq x \leq M$ et $m \leq yM$, et donc $y - x \leq M - m$ et $x - y \leq M - m$ ou encore $|y-x| \leq M - m$. Par suite, B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. B admet donc une borne supérieure. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(x_0, y_0) \in A^2$ tel que $x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$ et $y_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$.
Ces deux éléments x_0 et y_0 vérifient,

$$|y_0 - x_0| \geq y_0 - x_0 > \left(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf A + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup A - \inf A - \varepsilon.$$

En résumé,

1. $\forall (x,y) \in A^2,\ |y-x| \leq \sup A - \inf A$ et
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (x,y) \in A^2 /\ |y-x| > \sup A - \inf A - \varepsilon$.

Donc, $\sup B = \sup A - \inf A$.

$$\boxed{\sup\ \{|y-x|,\ (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. $A \cap B$ peut être vide et on n'a rien à dire. Supposons donc $A \cap B$ non vide. Pour $x \in A \cap B$, on a $x \leq \sup A$ et $x \leq \sup B$ et donc $x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. Dans ce cas, $\sup(A \cap B)$ existe et $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. On ne peut pas améliorer. Par exemple, soit $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ et $B = ([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup \{0\}$. On a $\sup A = 1$, $\sup B = 1$, $A \cap B = \{0\}$ et donc $\sup(A \cap B) = 0 < 1 = \min\{\sup A, \sup B\}$.
2. Pour $x \in A \cup B$, on a $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Donc $\sup(A \cup B)$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Inversement, supposons par exemple $\sup A \geq \sup B$ de sorte que $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$. a est dans A et donc dans $A \cup B$. En résumé, $\forall x \in (A \cup B),\ x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in (A \cup B) /\ \max\{\sup A, \sup B\} - \varepsilon < x$ et donc

$$\boxed{\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.}$$

3. D'après l'exercice 2, $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
4. Pour $\sup(AB)$, tout est possible. Par exemple, si $A = B =]-\infty, 0]$ alors $\sup A = \sup B = 0$, mais $AB = [0, +\infty[$ et $\sup(AB)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soient k un entier naturel non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à k.

$$\begin{aligned}\binom{n+10\times k!}{k} &= \frac{(n+10\times k!)(n+10\times k!-1)\ldots(n+10\times k!-k+1)}{k!}\\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)+10\times k!\times K}{k!} \quad \text{(pour un certain entier } K)\\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} + 10K = \binom{n}{k} + 10K.\end{aligned}$$

La différence $\binom{n+10\times k!}{k} - \binom{n}{k}$ est donc divisible par 10. Par suite, $\binom{n+10\times k!}{k}$ et $\binom{n}{k}$ ont même chiffre des unités en base 10. Ainsi, $\forall n \geq k,\ u_{n+10\times k!} = u_n$ et donc la suite u est donc $10k!$-périodique. On sait alors que

$$\boxed{0, u_k u_{k+1} u_{k+2} \ldots \text{ est rationnel.}}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour $n=1$, $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$. L'identité proposée est donc vraie pour $n=1$.
Soit $n\geq 1$. Supposons que $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.
On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2(n+1)-1}\frac{(-1)^k}{k+1}&=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(n+1)}\\&=\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2(n+1)}=\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+2}=\sum_{k=n+2}^{2(n+1)}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall n\geq 1$, $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ (identité de CATALAN).

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Si les b_k sont tous nuls, l'inégalité est claire. Sinon, pour x réel, posons
$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k+xb_k)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)x+\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$
f est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit :
$$0\geq\Delta'=\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right),$$
ou encore $|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$, qui est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.
2.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\leq\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&\leq\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\quad(\text{CAUCHY-SCHWARZ})\\&=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2\end{aligned}$$
et donc, $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$, qui est l'inégalité de MINKOWSKI.

Correction de l'exercice 9 ▲

Pour $x\geq 1$, $x+2\sqrt{x-1}=x-1+2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}+1)^2\geq 0$. De même, $x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-1)^2\geq 0$. Donc, si on pose $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, $f(x)$ existe si et seulement $x\geq 1$ et pour $x\geq 1$, $f(x)=\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|$. Par suite,

$$f(x)=1\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+|\sqrt{x-1}-1|=0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=0\text{ et }\sqrt{x-1}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=0\text{ et }\sqrt{x-1}=1,$$

ce qui est impossible. L'équation proposée n'a pas de solution.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Soit G un sous groupe non nul de $(\mathbb{R},+)$ ($\{0\} = 0.\mathbb{Z}$ est du type voulu). Il existe dans G un réel non nul x_0. Puisque G est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$, le réel $-x_0$ est aussi dans G et l'un des deux réels x_0 ou $-x_0$ est strictement positif. Soit alors $A = G\cap]0,+\infty[$. D'après ce qui précède, A est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. A admet donc une borne inférieure que l'on note a.

   1er cas. Si $a = 0$, montrons dans ce cas que G est dense dans $\mathbb{R}$ (c'est par exemple le cas de $(\mathbb{Q},+)$). Soient x un réel et ε un réel strictement positif. Puisque $\inf A = \inf(G\cap]0,+\infty[) = 0$, il existe dans G un élément g tel que $0 < g < \varepsilon$. Puis il existe un entier relatif n tel que $ng \leq x-\varepsilon < (n+1)g$ à savoir $n = E\left(\frac{x-\varepsilon}{g}\right)$. Soit $y = (n+1)g$. D'une part, y est dans G (si $n+1 = 0$, $(n+1)g = 0 \in G$, si $n+1 > 0$, $(n+1)g = g+g+...+g \in G$ et si $n+1 < 0$, $(n+1)g = -(-(n+1)g) \in G$) et d'autre part

$$x-\varepsilon < (n+1)g = ng+g < x-\varepsilon+\varepsilon = x.$$

   On a montré que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in G/\ x-\varepsilon < y < x$ et donc

$$\boxed{\text{si } G \neq \{0\} \text{ et si } \inf(G\cap]0,+\infty[) = 0,\ G \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

   2ème cas. Si $a > 0$, montrons dans ce cas que $G = a\mathbb{Z}$. Pour cela, montrons tout d'abord que a est dans G. Mais si a n'est pas élément de G, par définition de a, il existe un réel x dans $G\cap]a,2a[$ puis il existe un réel y dans $G\cap]a,x[$. Le réel $x-y$ est alors dans $G\cap]0,a[$ ce qui est impossible. Donc a est élément de G. Montrons alors que $G = a\mathbb{Z}$. Puisque a est dans G, G contient encore $a+a = 2a$, puis $a+a+a = 3a$ et plus généralement tous les na, $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque G contient aussi les opposés de ces nombres et également $0 = 0\times a$, G contient finalement tous les na, $n \in \mathbb{Z}$. On a ainsi montré que $a\mathbb{Z} \subset G$. Réciproquement, soit x un élément de G et $n = E\left(\frac{x}{a}\right)$ $(\in \mathbb{Z})$. Alors, $n \leq \frac{x}{a} < n+1$ puis $0 \leq x-na < a$. Or, x est dans G et na est dans G. Donc, $x-na$ est dans $G\cap[0,a[= \{0\}$, puis $x = na \in a\mathbb{Z}$. On a ainsi montré l'inclusion contraire et donc $G = a\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{si } \inf(G\cap]0,+\infty[) = a > 0,\ G = a\mathbb{Z}.}$$

2. Soit $G = \{a+b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$. On vérifie aisément que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Maintenant, la formule du binôme de NEWTON montre que, pour chaque entier naturel n,

$$(\sqrt{2}-1)^n \in G\cap]0,+\infty[.$$

   Or, $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2}-1)^n = 0$. Ceci montre que $\inf(G\cap]0;+\infty[) = 0$ et donc que G est dense dans $\mathbb{R}$.

3. (a) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $G_f = \{T \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\}$. 0 est élément de G_f (et c'est même le seul élément de G_f si f n'est pas périodique) et donc $G \neq \varnothing$. De plus, si T et T' sont deux éléments de G alors, pour x réel donné :

$$f(x+(T-T')) = f((x-T')+T) = f(x-T') = f(x-T'+T') = f(x),$$

   et $T-T'$ est encore un élément de G. On a montré que

$$\boxed{G_f \text{ est un sous groupe de } (\mathbb{R},+).}$$

   (b) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. G_f contient encore tous les nombres de la forme $a+b\sqrt{2}$, $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et est donc dense dans $\mathbb{R}$. Montrons que si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, f est constante. Soit x un réel quelconque. On va montrer que $f(x) = f(0)$. Remarque préliminaire : soit T une période strictement positive de f. Il existe un entier relatif p tel que $pT \leq x < (p+1)T$ à savoir $p = E\left(\frac{x}{T}\right)$. On a alors $f(x) = f(x-pT)$ avec $0 \leq x-pT < T$. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque G_f est dense dans $\mathbb{R}$, il existe dans G_f un réel T_n tel que $0 < T_n < \frac{1}{n}$ (ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty} T_n = 0$). Mais alors, puisque $0 < x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n < T_n$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n = 0$. Maintenant, la suite $\left(f\left(x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à $f(x)$) et donc convergente vers $f(x)$. On en déduit que

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty}\left(x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)\right) \quad \text{(par continuité de } f \text{ en 0)}$$
$$= f(0)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 11 ▲

Soient x un réel et ε un réel strictement positif. On a $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$ et donc tel que $x < r^3 < x+\varepsilon$, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^3$ sur $\mathbb{R}$. On a montré que

$$\boxed{\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$
