



## Les complexes

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*IT

Calculer de deux façons les racines carrées de  $1 + i$  et en déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

[Correction ▼](#)

[005119]

### Exercice 2 \*\*T

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1.  $z^2 + z + 1 = 0$
2.  $2z^2 + 2z + 1 = 0$
3.  $z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$ ,  $\theta$  réel donné.
4.  $z^2 - (6 + i)z + (11 + 13i) = 0$
5.  $2z^2 - (7 + 3i)z + (2 + 4i) = 0$ .

[Correction ▼](#)

[005120]

### Exercice 3 \*\*IT Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas

1. On pose  $z = e^{2i\pi/5}$  puis  $a = z + z^4$  et  $b = z^2 + z^3$ . Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont  $a$  et  $b$  et en déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ,  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .
2. Le cercle de centre  $\Omega$  d'affixe  $-\frac{1}{2}$  passant par le point  $M$  d'affixe  $i$  recoupe  $(Ox)$  en deux points  $I$  et  $J$ . Montrer que  $\overline{OI} + \overline{OJ} = \overline{OI} \cdot \overline{OJ} = -1$  et en déduire une construction à la règle et au compas, du pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 dont un des sommets est le point d'affixe 1.
3. La diagonale  $[AC]$  d'un pentagone régulier  $(ABCDE)$  est recoupée par deux autres diagonales en deux points  $F$  et  $G$ . Calculer les rapports  $\frac{AF}{AC}$  et  $\frac{FG}{AF}$ .

[Correction ▼](#)

[005121]

### Exercice 4 \*\*\*

Soit  $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  donné. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$ .

[Correction ▼](#)

[005122]

### Exercice 5 \*\*\*\*\*

1. Soit  $(ABC)$  un triangle dont les longueurs des côtés  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$  sont notées respectivement  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Soit  $I$  le centre du cercle inscrit au triangle  $(ABC)$ . Montrer que  $I = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$ .
2. Déterminer  $z$  complexe tel que  $O$  soit le centre du cercle inscrit au triangle  $(PQR)$  dont les sommets ont pour affixes respectives  $z$ ,  $z^2$  et  $z^3$ .

**Exercice 6 \*\*\*I**

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$ . Montrer que :

$$\begin{aligned} ABC \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2 + bz + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \Leftrightarrow \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0. \end{aligned}$$

Correction ▼

[005124]

**Exercice 7 \*\*T**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$ .

Correction ▼

[005125]

**Exercice 8 \*\***

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(z^2 + 1)^n - (z - 1)^{2n} = 0$ .

Correction ▼

[005126]

**Exercice 9 \*\*I**

Déterminer les complexes  $z$  tels que  $z, \frac{1}{z}$  et  $z - 1$  aient même module.

Correction ▼

[005127]

**Exercice 10 \*\*I**

On note  $U$  l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (z \in U \setminus \{-1\} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} / z = \frac{1+ix}{1-ix}).$$

Correction ▼

[005128]

**Exercice 11 \*\*IT**

Forme trigonométrique de  $\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$  et de  $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$ .

Correction ▼

[005129]

**Exercice 12 \*T**

Calculer  $(1+i\sqrt{3})^9$ .

Correction ▼

[005130]

**Exercice 13 \*\*T**

Déterminer les racines quatrièmes de  $i$  et les racines sixièmes de  $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ .

Correction ▼

[005131]

**Exercice 14 \*\*\***

Montrer que les solutions de l'équation  $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} - nz^n = 0$  sont de module inférieur ou égal à 1.

Correction ▼

[005132]

**Exercice 15 \*\*T**

Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ , on pose  $Z = \frac{1+z}{1-z}$ . Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  d'affixes  $z$  tels que

1.  $|Z| = 1$ .
2.  $|Z| = 2$ .

3.  $Z \in \mathbb{R}$ .

4.  $Z \in i\mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)

[005133]

### Exercice 16 \*T

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1.  $z' = z + 3 - i$

2.  $z' = 2z + 3$

3.  $z' = iz + 1$

4.  $z' = (1 - i)z + 2 + i$

[Correction ▼](#)

[005134]

### Exercice 17 \*\*I

On considère l'équation  $(E) : (z - 1)^n - (z + 1)^n = 0$  où  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné.

1. Montrer que les solutions de  $(E)$  sont imaginaires pures.

2. Montrer que les solutions de  $(E)$  sont deux à deux opposées.

3. Résoudre  $(E)$ .

[Correction ▼](#)

[005135]

### Exercice 18 \*\*\*T ESIM 1993

Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on pose  $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ ,  $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$  et  $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ .

1. Quels sont les nombres complexes  $z$  pour lesquels  $\operatorname{th} z$  existe ?

2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $\operatorname{th} z = 0$ .

3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  le système  $\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z| < 1 \end{cases}$ .

4. Montrer que la fonction  $\operatorname{th}$  réalise une bijection de  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}\}$  sur  $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ .

[Correction ▼](#)

[005136]

### Correction de l'exercice 1 ▲

D'abord on a  $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ . Les racines carrées de  $1+i$  dans  $\mathbb{C}$  sont donc  $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$  et  $-\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ . On a aussi, pour  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(x+iy)^2 = 1+i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1) \\ y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) \in \left\{ \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right) \right\}.$$

Les racines carrées de  $1+i$  sont donc aussi  $\pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$ . Puisque  $\operatorname{Re}(e^{i\pi/8}) = \cos \frac{\pi}{8} > 0$ , on obtient  $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ , ou encore

$$e^{i\pi/8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)$$

et donc, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ et } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

### Correction de l'exercice 2 ▲

- $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$  ou  $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2$ .
- $\Delta' = 1^2 - 2 = -1 = i^2$ . L'équation a donc deux solutions non réelles et conjuguées, à savoir  $z_1 = \frac{1}{2}(-1+i)$  et  $z_2 = \frac{1}{2}(-1-i)$ .
- Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Pour tout complexe  $z$ , on a

$$\begin{aligned} z^2 - 2z\cos\theta + 1 &= (z - \cos\theta)^2 + 1 - \cos^2\theta = (z - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = (z - \cos\theta)^2 - (i\sin\theta)^2 \\ &= (z - \cos\theta - i\sin\theta)(z - \cos\theta + i\sin\theta) = (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

L'équation proposée a donc deux solutions (pas nécessairement distinctes)  $z_1 = e^{i\theta}$  et  $z_2 = e^{-i\theta}$ . De plus,  $\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$  et ces solutions sont distinctes si et seulement si  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ .

- Soit (E) l'équation  $z^2 - (6+i)z + (11+3i) = 0$ . Son discriminant est  $\Delta = (6+i)^2 - 4(11+3i) = -9 - 40i$ . Comme  $40 = 2 \times 20 = 2 \times (4 \times 5)$  et que  $4^2 - 5^2 = 16 - 25 = -9$ , on est en droit de deviner que  $\Delta = (4-5i)^2$ . L'équation (E) a deux solutions distinctes dans  $\mathbb{C}$  à savoir  $z_1 = \frac{6+i+4-5i}{2} = 5-2i$  et  $z_2 = \frac{6+i-4+5i}{2} = 1+3i$ .
- Soit (E) l'équation  $2z^2 - (7+3i)z + (2+4i) = 0$ . Son discriminant est  $\Delta = (7+3i)^2 - 8(2+4i) = 24 + 10i$ . Comme  $10 = 2 \times 5 = 2 \times (5 \times 1)$  et que  $5^2 - 1^2 = 24$ , on est en droit de deviner que  $\Delta = (5+i)^2$ . L'équation proposée a deux solutions distinctes dans  $\mathbb{C}$  à savoir  $z_1 = \frac{7+3i+5+i}{4} = 3+i$  et  $z_2 = \frac{7+3i-5-i}{4} = \frac{1}{2}(1+i)$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

- On a  $a = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  et  $b = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ .  $1, z, z^2, z^3$  et  $z^4$  sont les cinq racines cinquièmes de 1 dans  $\mathbb{C}$ . Par suite,  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ . Mais alors

$$a + b = z + z^2 + z^3 + z^4 = -1$$

et

$$ab = (z + z^4)(z^2 + z^3) = z^3 + z^4 + z^6 + z^7 = z + z^2 + z^3 + z^4 = -1 \text{ (car } z^5 = 1).$$

$a$  et  $b$  sont donc les solutions de l'équation  $X^2 + X - 1 = 0$  dont les racines sont  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ . Enfin, puisque  $\frac{2\pi}{5} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on a  $a > 0$ . Par suite,  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$  et  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ . D'autre part,  $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$  et donc,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = +\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

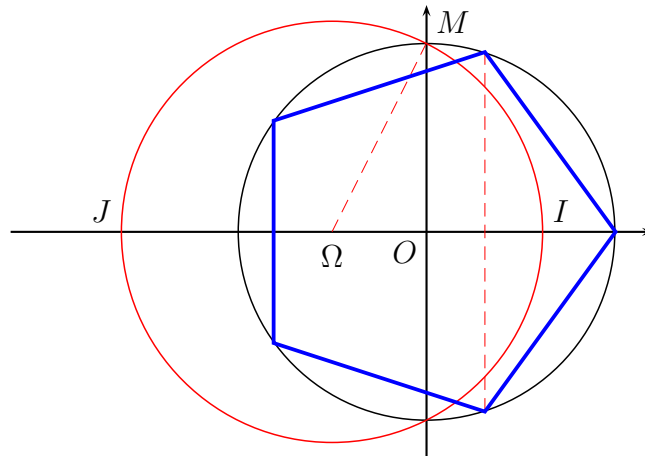
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

De même, en remplaçant  $\sqrt{5}$  par  $-\sqrt{5}$ ,  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$  et  $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ . Enfin,  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ .

2. Le rayon du grand cercle vaut, d'après le théorème de PYTHAGORE :

$$R = \sqrt{\Omega O^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Donc  $x_I = x_\Omega + R = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  et  $x_J = x_\Omega - R = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ . Par suite,  $x_I = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  et  $x_J = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ . Ceci montre que les médiatrices des segments  $[O, I]$  et  $[O, J]$  coupent le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 en quatre des cinq sommets du pentagone.

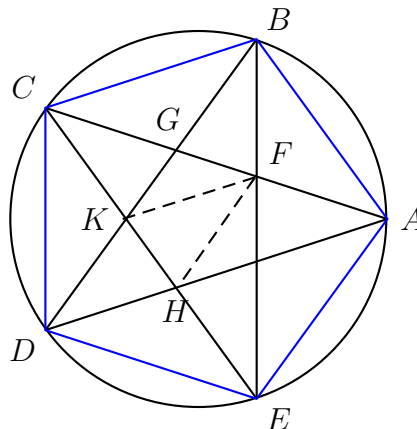


3. Posons  $x = \frac{AF}{AC}$ . D'après le théorème de THALES (je vous laisse vérifier les parallélismes),

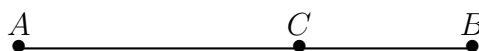
$$x = \frac{AF}{AC} = \frac{HK}{HC} = \frac{FG}{FC} = \frac{AC-2AF}{AC-AF} = \frac{1-2x}{1-x}.$$

Donc  $x^2 - 3x + 1 = 0$  et puisque  $x < 1$ ,  $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . Puis

$$\frac{AG}{AC} = \frac{AC-AF}{AC} = 1-x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{FG}{AF} = \frac{AC-2AF}{AF} = \frac{1}{x} - 2 = \frac{2}{3-\sqrt{5}} - 2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$



Définition du *nombre d'or*.



On veut que  $C$  partage le segment  $[A, B]$  de telle sorte que  $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$  («  $\frac{\text{petit}}{\text{moyen}} = \frac{\text{moyen}}{\text{grand}}$  ») c'est-à-dire, en posant  $a = AB$  et  $x = AC$ ,  $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$  ou encore  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{x}{a} - 1 = 0$  et donc, puisque  $\frac{x}{a} > 0$ ,  $\frac{x}{a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

Le nombre d'or (ou proportion dorée) est le nombre  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618\dots$

On peut aussi prendre pour le nombre d'or le rapport  $\frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$

#### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $\alpha \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .  $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = e^{2i\alpha}$ . Donc,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i(\frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3})} = \omega_k \Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / i(\omega_k + 1)z = \omega_k - 1.$$

Maintenant, pour  $k \in \{-1, 0, 1\}$ ,

$$\omega_k = -1 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \in -k\pi + \frac{3\pi}{2} + 3\pi\mathbb{Z},$$

ce qui est exclu pour  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Donc,

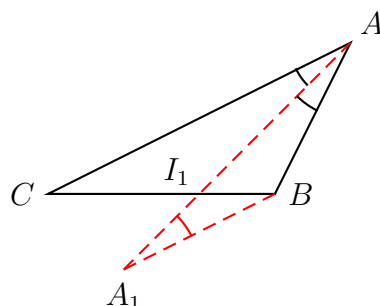
$$\begin{aligned} \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / z = \frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k + 1)} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / z = \frac{e^{i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})} - e^{-i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})}}{e^{i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})} i(e^{i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})} + e^{-i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})})} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / z = \frac{2i \sin(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})}{i(2 \cos(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}))} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / z = \tan\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

#### Correction de l'exercice 5 ▲

- On note  $I_1$  le point d'intersection de la bissectrice  $(\Delta_1)$  de l'angle  $\widehat{BAC}$  et de la droite  $(BC)$ . La parallèle à  $(AC)$  passant par  $B$  coupe  $\Delta_1$  (puisque  $(AC)$  n'est pas parallèle à  $(\Delta_1)$ ) en un point  $A_1$ . Les angles alternes-internes  $\widehat{CAA_1}$  et  $\widehat{AA_1B}$  sont alors égaux. Puisque d'autre part,  $\widehat{CAA_1} = \widehat{A_1AB}$ , on en déduit que  $\widehat{AA_1B} = \widehat{A_1AB}$  et donc que le triangle  $(ABA_1)$  est isocèle en  $B$ . D'après le théorème de THALÈS, on a alors

$$\frac{I_1B}{I_1C} = \frac{A_1B}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b},$$

et donc puisque  $I_1$  est entre  $B$  et  $C$ ,  $b\overrightarrow{I_1B} + c\overrightarrow{I_1C} = \vec{0}$ , ou enfin  $I_1 = \text{bar}\{B(b), C(c)\}$ .



On a aussi bien sûr les deux autres égalités  $I_2 = \text{bar}\{A(a), C(c)\}$  et  $I_3 = \text{bar}\{A(a), B(b)\}$  où  $I_2$  et  $I_3$  sont les points d'intersection des deux autres bissectrices avec  $(AC)$  et  $(AB)$  respectivement. Soit alors  $I' = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$ . D'après le théorème du barycentre partiel, on a

$$I' = \text{bar}\{A(a), I_1(b+c)\} = \text{bar}\{B(b), I_2(a+c)\} = \text{bar}\{C(c), I_3(a+b)\},$$

ce qui montre que  $I'$  est sur  $(AI_1)$ ,  $(BI_2)$  et  $(CI_3)$ , c'est-à-dire sur les trois bissectrices. Par suite,  $I' = I$ .

2. Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

$$z, z^2 \text{ et } z^3 \text{ ne sont pas deux à deux distincts} \Leftrightarrow z^2 = z \text{ ou } z^3 = z \text{ ou } z^3 = z^2 \Leftrightarrow z \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ensuite, pour  $z \notin \{-1, 0, 1\}$ ,

$$z, z^2 \text{ et } z^3 \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / z^3 - z = \lambda(z^2 - z) \Leftrightarrow \frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Finalement,  $(z, z^2, z^3)$  est un « vrai » triangle si et seulement si  $z$  n'est pas réel. Soit alors  $z$  un complexe non réel.

$O$  centre du cercle inscrit au triangle  $(PQR) \Leftrightarrow O = \text{bar}\{P(QR), Q(PR), R(PQ)\}$

$$\Leftrightarrow z|z^2 - z^3| + z^2|z - z^3| + z^3|z - z^2| = 0 \Leftrightarrow z \cdot |z| \cdot |1 - z|(|z| + |z| + |z| + |z|^2)$$

$$\Leftrightarrow |z| + |z| + |z| + |z|^2 = 0 \text{ (E) (car } z \notin \mathbb{R})$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} |z| + |z| + |z| + |z|^2 = 0 &\Leftrightarrow (z + \frac{|z|}{z}) + |1 + z| = 0 \Rightarrow z + \frac{|z|}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + \frac{|z|}{z} = \bar{z} + \frac{|z|}{\bar{z}} \\ &\Leftrightarrow z - \bar{z} - |z| \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})(1 - \frac{1}{|z|}) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{|z|} = 0 \text{ (car } z \neq \bar{z}) \\ &\Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

Posons donc  $z = e^{i\theta}$  où  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ . En reportant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} z \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} + |1 + e^{i\theta}| = 0 \Leftrightarrow 2\cos\theta + |e^{i\theta/2}| \cdot |2\cos\frac{\theta}{2}| = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\theta + |\cos\frac{\theta}{2}| = 0 \Leftrightarrow 2|\cos\frac{\theta}{2}|^2 + |\cos\frac{\theta}{2}| - 1 = 0 \Leftrightarrow |\cos\frac{\theta}{2}| \text{ est solution de l'équation } 2X^2 + X - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \in \left\{\frac{1}{2}, -1\right\} \Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z \in \{j, j^2\} \end{aligned}$$

Les nombres complexes solutions sont donc  $j$  et  $j^2$ .

## Correction de l'exercice 6 ▲

$(A, B, C)$  équilatéral  $\Leftrightarrow C = r_{A, \pi/3}(B)$  ou  $C = r_{A, -\pi/3}(B) \Leftrightarrow c - a = (-j^2)(b - a)$  ou  $c - a = (-j)(b - a)$

$$\Leftrightarrow (-1 - j^2)a + j^2b + c = 0 \text{ ou } (-1 - j)a + jb + c = 0 \Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (j^2)^2a + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0.$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
(A, B, C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \\
&\Leftrightarrow (ja + j^2b + c)(j^2a + jb + c) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + (j + j^2)(ab + ac + bc) = 0 \\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
(A, B, C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \\
&\Leftrightarrow -a^2 + ab + ac - bc - b^2 + bc + ba - ac - c^2 + ca + cb - ab = 0 \\
&\Leftrightarrow (c-a)(a-b) + (a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) = 0 \Leftrightarrow \frac{(c-a)(a-b) + (a-b)(b-c) + (b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0.
\end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

Le discriminant de l'équation  $Z^2 - (5 - 14i)Z - 2(5i + 12) = 0$  vaut

$$\Delta = (5 - 14i)^2 + 8(5i + 12) = -75 - 100i = 25(-3 - 4i) = (5(1 - 2i))^2.$$

Cette équation admet donc les deux solutions  $Z_1 = \frac{5-14i+5-10i}{2} = 5 - 12i$  et  $Z_2 = \frac{5-14i-5+10i}{2} = -2i$ . Ensuite,

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de l'équation proposée} &\Leftrightarrow z^2 = 5 - 12i = (3 - 2i)^2 \text{ ou } z^2 = -2i = (1 - i)^2 \\
&\Leftrightarrow z = 3 - 2i \text{ ou } z = -3 + 2i \text{ ou } z = 1 - i \text{ ou } z = -1 + i.
\end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

Posons, pour  $n$  naturel non nul,  $P = (X^2 + 1)^n - (X - 1)^{2n}$ .

$$\begin{aligned}
P &= X^{2n} + (\text{termes de degré} \leq 2n - 2) - X^{2n} + 2nX^{2n-1} + (\text{termes de degré} \leq 2n - 2) \\
&= 2nX^{2n-1} + (\text{termes de degré} \leq 2n - 2).
\end{aligned}$$

Donc  $\deg(P) = 2n - 1$  et  $P$  admet dans  $\mathbb{C}$ ,  $2n - 1$  racines, distinctes ou confondues.

$$\begin{aligned}
(z^2 + 1)^n = (z - 1)^{2n} &\Leftrightarrow \exists k \in \{0, \dots, n - 1\} / z^2 + 1 = \omega_k(z - 1)^2 \text{ où } \omega_k = e^{2ik\pi/n} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \{0, \dots, n - 1\} / (1 - \omega_k)z^2 + 2\omega_k z + (1 - \omega_k) = 0
\end{aligned}$$

Si  $k = 0$ , l'équation précédente s'écrit  $2z = 0$  ou encore  $z = 0$ . Si  $k$  est élément de  $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ ,  $\Delta'_k = \omega_k^2 - (1 - \omega_k)^2 = 2\omega_k - 1 = 2e^{2ik\pi/n} - 1$ . Soit  $d_k$  une racine carrée dans  $\mathbb{C}$  de  $\Delta'_k$  (difficile à expliciter semble-t-il). On a  $S = \{0\} \cup \left\{ \frac{-e^{2ik\pi/n} \pm d_k}{1 - e^{2ik\pi/n}}, k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \right\}$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

Soient  $z$  un complexe non nul,  $M$  le point d'affixe  $z$  et  $A$  le point d'affixe 1.

$$|z| = \left| \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1,$$



et

$$|z| = |z-1| \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M \in \text{med}[OA] \Leftrightarrow x_M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z-1| \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } \text{Re}(z) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = -j \text{ ou } z = -j^2.$$

### Correction de l'exercice 10 ▲

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $z = \frac{1+ix}{1-ix}$ . Puisque  $1-ix \neq 0$ ,  $z$  est bien défini et  $|z| = \frac{|1+ix|}{|1-ix|} = \frac{|1+ix|}{|1+ix|} = 1$ . Enfin,  $z = \frac{-1+ix+2}{1-ix} = -1 + \frac{2}{1-ix} \neq -1$ . On a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1+ix}{1-ix} \in U \setminus \{-1\}.$$

Réciproquement, soit  $z \in U \setminus \{-1\}$ . Il existe un réel  $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$  tel que  $z = e^{i\theta}$ . Mais alors,

$$z = e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} (1 + i \tan \frac{\theta}{2})}{\cos \frac{\theta}{2} (1 - i \tan \frac{\theta}{2})} = \frac{1 + i \tan \frac{\theta}{2}}{1 - i \tan \frac{\theta}{2}} \quad (\cos \frac{\theta}{2} \neq 0 \text{ car } \frac{\theta}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}),$$

et  $z$  est bien sous la forme voulue avec  $x = \tan \frac{\theta}{2}$ .

### Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$1 + \cos \theta + i \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = -1 \text{ et } \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Donc,  $\frac{1+\cos \theta - i \sin \theta}{1-\cos \theta + i \sin \theta}$  existe pour  $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ . Pour un tel  $\theta$ ,

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)}{\sin \frac{\theta}{2} \sin(\theta/2) + i \cos(\theta/2)} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \frac{e^{-i\theta/2}}{e^{i(\pi-\theta)/2}} = -i \cotan \left( \frac{\theta}{2} \right).$$

- **1er cas.**  $\cotan \frac{\theta}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[ \Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]2k\pi, \pi + 2k\pi[$ . Dans ce cas, la forme trigonométrique de  $\frac{1+\cos \theta - i \sin \theta}{1-\cos \theta + i \sin \theta}$  est  $\cotan(\frac{\theta}{2})e^{-i\pi/2}$  (module =  $\cotan(\frac{\theta}{2})$  et argument =  $-\frac{\pi}{2} (2\pi)$ ).

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = \left[ \cotan \left( \frac{\theta}{2} \right), -\frac{\pi}{2} \right].$$

- **2ème cas.**  $\cotan \frac{\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$ . Dans ce cas,

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = -\cotan \left( \frac{\theta}{2} \right) \cdot e^{i\pi/2} = |\cotan \left( \frac{\theta}{2} \right)| e^{i\pi/2},$$

et donc,

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = \left[ -\cotan \left( \frac{\theta}{2} \right), \frac{\pi}{2} \right].$$

- **3ème cas.**  $\cotan \frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ . Dans ce cas, on a  $\frac{1+\cos \theta - i \sin \theta}{1-\cos \theta + i \sin \theta} = 0$ .

2. Pour  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ , on a

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = i\cotan\frac{\theta}{2}.$$

Si  $\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]2k\pi, \pi + 2k\pi[$ ,  $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [\cotan\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Si  $\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$ ,  $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [-\cotan\frac{\theta}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ .

Si  $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = 0$ .

### Correction de l'exercice 12 ▲

$$(1+i\sqrt{3})^9 = (2e^{i\pi/3})^9 = 2^9 e^{3i\pi} = -512.$$

La forme algébrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à l'addition.  
La forme trigonométrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à la multiplication.

### Correction de l'exercice 13 ▲

$i = e^{i\pi/2}$  et les racines quatrièmes de  $i$  sont donc les  $e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})}$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Ensuite,  $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-2}{e^{i\pi/3}} = -2e^{-i\pi/3} = 2e^{2i\pi/3}$ . Les racines sixièmes de  $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$  sont donc les  $\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})}$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

### Correction de l'exercice 14 ▲

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > 1$ .

$$|1+z+\dots+z^{n-1}| \leq 1+|z|+|z|^2+\dots+|z|^{n-1} < |z|^n+|z|^n+\dots+|z|^n = n|z|^n = |nz^n|,$$

et en particulier,  $1+z+\dots+z^{n-1} \neq nz^n$ . Donc, si  $1+z+\dots+z^{n-1}-nz^n=0$ , alors  $|z| \leq 1$ .

### Correction de l'exercice 15 ▲

**A- Solutions algébriques.]** Pour  $z \in \mathbb{C}$ , posons  $z = x + iy$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

1.

$$|Z| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1+z|^2}{|1-z|^2} = 1 \Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2 \text{ et } (x, y) \neq (1, 0) \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'ensemble cherché est la droite  $(Oy)$ .

2.

$$\begin{aligned} |Z| = 2 &\Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = 4((1-x)^2 + y^2) \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0 \text{ et } (x, y) \neq (1, 0) \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0 \text{ et } (x, y) \neq (1, 0) \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9} \text{ et } (x, y) \neq (1, 0) \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre  $\Omega\left(\frac{5}{3}, 0\right)$  et de rayon  $\frac{4}{3}$ .

3.

$$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \\ &\Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = (1-z)(1+\bar{z}) \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z - \bar{z} = \bar{z} - z \text{ et } z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ et } z \neq 1. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est la droite  $(Ox)$  privé du point  $(1, 0)$ .

4.

$$\begin{aligned} Z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow Z = -\bar{Z} \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = -(1-z)(1+\bar{z}) \text{ et } z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - z\bar{z} = -1 + \bar{z} \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } z \neq 1. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 privé du point  $(1, 0)$ .

**B- Solutions géométriques.** Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $-1$  et  $1$  et  $\mathcal{E}$  l'ensemble cherché. Soit  $M$  un point du plan distinct de  $B$  d'affixe  $z$ .

1.

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow |z+1| = |z-1| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB] = (Oy).$$

2. Soit  $\Omega = \text{bar}(A(1), B(-4))$ . On a  $x_\Omega = \frac{-1}{5}(x_A - 4x_B) = \frac{5}{3}$  et  $y_\Omega = \frac{-1}{5}(y_A - 4y_B) = 0$ .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow |z+1|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow AM^2 = 4BM^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 - 4\overrightarrow{BM}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M})^2 - 4(\overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega M})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3\overrightarrow{\Omega M}^2 + 2(\overrightarrow{A\Omega} - 4\overrightarrow{B\Omega}) \cdot \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{A\Omega}^2 - 4\overrightarrow{B\Omega}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{1}{3}(\Omega A^2 - 4\Omega B^2) \end{aligned}$$

Or,  $\Omega A^2 = (\frac{5}{3} + 1)^2 = \frac{64}{9}$  et  $\Omega B^2 = (\frac{5}{3} - 1)^2 = \frac{4}{9}$ . Par suite,

$$\frac{1}{3}(\Omega A^2 - 4\Omega B^2) = \frac{1}{3}(\frac{64}{9} - \frac{16}{9}) = \frac{16}{9}.$$

Ainsi,

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{4}{3},$$

et on retrouve le cercle de centre  $\Omega(\frac{5}{3}, 0)$  et de rayon  $\frac{4}{3}$ .

3.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0 \ (\pi) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 \ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}. \end{aligned}$$

et on retrouve la droite  $(Ox)$  privée du point  $(1, 0)$ .

4.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\pi}{2} \ (\pi) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} \ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } B. \end{aligned}$$

et on retrouve le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 privé du point  $(1, 0)$ .

### Correction de l'exercice 16 ▲

Soit  $f$  la transformation considérée.

1.  $f$  est la translation de vecteur  $\vec{u}(3, -1)$ .

2.  $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$ .  $f$  est l'homothétie de rapport 2 et de centre  $\Omega(-3, 0)$ .

3.  $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$ . Comme  $i = e^{i\pi/2}$ ,  $f$  est la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre  $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

4.  $\omega = (1-i)\omega + 2+i \Leftrightarrow \omega = 1-2i$ . Comme  $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ ,  $f$  est la similitude de centre  $\Omega(1, -2)$ , de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$ .

---

**Correction de l'exercice 17 ▲**

---

1. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Soient  $M, A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $z, 1$  et  $-1$ .

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Rightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Rightarrow |(z-1)^n| = |(z+1)^n| \Rightarrow |z-1|^n = |z+1|^n \Rightarrow |z-1| = |z+1| \\ &\Rightarrow AM = BM \Rightarrow M \in \text{med}[AB] \Rightarrow M \in (Oy) \Rightarrow z \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

$$(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^n((z+1)^n - (z-1)^n) = -(-1)^n((z-1)^n - (z+1)^n).$$

Par suite,

$$z \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow (z-1)^n - (z+1)^n = 0 \Leftrightarrow (-z-1)^n - (-z+1)^n = 0 \Leftrightarrow -z \text{ solution de } (E).$$

3. Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / z+1 = e^{2ik\pi/n}(z-1) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket / z = \frac{e^{2ik\pi/n} - 1}{e^{2ik\pi/n} + 1} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket / z = \frac{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n} + e^{-ik\pi/n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket / z = \frac{2i \sin \frac{k\pi}{n}}{2 \cos \frac{k\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket / z = i \cotan \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

---

**Correction de l'exercice 18 ▲**

---

1. Soit  $z \in \mathbb{C}$ .  $\text{sh } z$  et  $\text{ch } z$  sont définis et donc,  $\text{th } z$  existe si et seulement si  $\text{ch } z \neq 0$ . Or,

$$\text{ch } z = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow e^{2z} = e^{i\pi} \Leftrightarrow 2z \in i\pi + 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

$\text{th } z$  existe si et seulement si  $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ .

2. Soit  $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ .

$$\text{th } z = 0 \Leftrightarrow \text{sh } z = 0 \Leftrightarrow e^z = e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\pi\mathbb{Z}.$$

Comme  $i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cap i\pi\mathbb{Z} = \emptyset$ ,  $\text{th } z = 0$  si et seulement si  $z \in i\pi\mathbb{Z}$ .

3. Soit  $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ . Posons  $z = x + iy$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} |\text{th } z| < 1 &\Leftrightarrow |e^z - e^{-z}|^2 < |e^z + e^{-z}|^2 \Leftrightarrow (e^z - e^{-z})(e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}) < (e^z + e^{-z})(e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}) \\ &\Leftrightarrow -e^{z-\bar{z}} - e^{-(z-\bar{z})} < e^{z-\bar{z}} + e^{-(z-\bar{z})} \Leftrightarrow 2(e^{2iy} + e^{-2iy}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2y) > 0 \end{aligned}$$

Par suite,

$$\left\{ \begin{array}{l} |\text{Im } z| < \frac{\pi}{2} \\ |\text{th } z| < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |y| < \frac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow |y| < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow z \in \Delta.$$

4. Soit  $z \in \Delta$ . D'après 1),  $\text{th}z$  existe et d'après 3),  $|\text{th}z| < 1$ . Donc  $z \in \Delta \Rightarrow \text{th}z \in U$ . Ainsi,  $\text{th}$  est une application de  $\Delta$  dans  $U$ . Soit alors  $Z \in U$  et  $z \in \Delta$ .

$$\text{th}z = Z \Leftrightarrow \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = Z \Leftrightarrow e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z}.$$

Puisque  $Z \neq -1$ ,  $\frac{1+Z}{1-Z} \neq 0$  et on peut poser  $\frac{1+Z}{1-Z} = re^{i\theta}$  où  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ .

Par suite,

$$\begin{aligned} e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z} &\Leftrightarrow e^{2z} = re^{i\theta} \Leftrightarrow e^{2x} = r \text{ et } 2y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln r \text{ et } y \in \frac{\theta}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Maintenant, on ne peut avoir  $\theta = \pi$ . Dans le cas contraire, on aurait  $\frac{1+Z}{1-Z} = -r \in \mathbb{R}_-^*$  puis  $Z = \frac{r+1}{r-1} \in \mathbb{R}$ . Par suite, puisque  $|Z| < 1$ , on aurait  $Z \in ]-1, 1[$  et donc  $\frac{1+Z}{1-Z} \in \mathbb{R}_+^*$  ce qui est une contradiction. Donc,  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  puis  $\frac{\theta}{2} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Mais alors,

$$\begin{cases} \text{th}z = Z \\ z \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln r \\ y = \frac{\theta}{2} \end{cases}.$$

Ainsi, tout élément  $Z$  de  $U$  a un et un seul antécédent  $z$  dans  $\Delta$  (à savoir  $z = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+Z}{1-Z} \right| + \frac{i}{2} \text{Arg} \left( \frac{1+Z}{1-Z} \right)$  où  $\text{Arg} \left( \frac{1+Z}{1-Z} \right)$  désigne l'argument de  $\frac{1+Z}{1-Z}$  qui est dans  $]-\pi, \pi[$ ). Finalement,  $\text{th}$  réalise donc une bijection de  $\Delta$  sur  $U$ .

---