# Fonctions usuelles

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile  ** facile  *** difficulté moyenne  **** difficile  ***** très difficile
I : Incontournable  T : pour travailler et mémoriser le cours

## Exercice 1 **I

1. Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $f$ est paire, $f'$ est impaire et si $f$ est impaire, $f'$ est paire.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ une fonction $n$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. $f^{(n)}$ désignant la dérivée $n$-ième de $f$, montrer que si $f$ est paire, $f^{(n)}$ est paire si $n$ est pair et impaire si $n$ est impair.
3. Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. A-t-on des résultats analogues concernant les primitives de $f$ ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant la condition « $f$ est paire (ou impaire) » par la condition « $f$ est $T$-périodique ».

Correction ▼ [005097]

## Exercice 2 **

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction ▼ [005098]

## Exercice 3 **I

1. Etudier brièvement la fontion $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et tracer son graphe.
2. Trouver tous les couples $(a,b)$ d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.

Correction ▼ [005099]

## Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $(**)$ $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2$,
2. $(*)$ $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$,
3. $(**)$ $2\,\mathrm{Argsh}\,x = \mathrm{Argch}\,3 - \mathrm{Argth}\,\frac{7}{9}$,
4. $(**)$ $\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0$,
5. $(**)$ $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Correction ▼ [005100]

## Exercice 5 **

Trouver $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Correction ▼ [005101]

## Exercice 6

Construire le graphe des fonctions suivantes :

1. (*) $f_1(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$.
2. (**) $f_2(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$.
3. (***) $f_3(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.
4. (**) $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$.
5. (***) $f_5(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0,+\infty[$).
6. (**) $f_6(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6))$.

Correction ▼ [005102]

**Correction de l'exercice 1 ▲**

1. Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f$ est paire, alors, pour tout réel $x$, $f(-x) = f(x)$. En dérivant cette égalité, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = f'(x),$$

et donc $f'$ est impaire. De même, si $f$ est impaire, pour tout réel $x$, on a $f(-x) = -f(x)$, et par dérivation on obtient pour tout réel $x$, $f'(-x) = f'(x)$. $f'$ est donc paire.

$$\boxed{(f \text{ paire} \Rightarrow f' \text{ impaire}) \text{ et } (f \text{ impaire} \Rightarrow f' \text{ paire.})}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ une fonction $n$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons $f$ paire. Par suite, pour tout réel $x$, $f(-x) = f(x)$. Immédiatement par récurrence, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(-x) = (-1)^n f(x).$$

Ceci montre que $f^{(n)}$ a la parité de $n$, c'est-à-dire que $f^{(n)}$ est une fonction paire quand $n$ est un entier pair et est une fonction impaire quand $n$ est un entier impair. De même, si $f$ est impaire et $n$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}$ a la parité contraire de celle de $n$.

3. Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire et $F$ une primitive de $f$. Montrons que $F$ est paire. Pour $x$ réel, posons $g(x) = F(x) - F(-x)$. $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$,

$$g'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0.$$

$g$ est donc constante sur $\mathbb{R}$ et par suite, pour tout réel $x$, $g(x) = g(0) = F(0) - F(0) = 0$. Ainsi, $g$ est la fonction nulle et donc, pour tout réel $x$, $F(x) = F(-x)$. On a montré que $F$ est paire. Par contre, si $f$ est paire, $F$ n'est pas nécessairement impaire. Par exemple, la fonction $f\ :\ x \mapsto 1$ est paire, mais $F\ :\ x \mapsto x+1$ est une primitive de $f$ qui n'est pas impaire.

4. On montre aisément en dérivant une ou plusieurs fois l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$, que les dérivées successives d'une fonction $T$-périodique sont $T$-périodiques. Par contre, il n'en est pas de même des primitives. Par exemple, si pour tout réel $x$, $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$, $f$ est $\pi$-périodique, mais la fonction $F\ :\ x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$, qui est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$, n'est pas $\pi$-périodique ni même périodique tout court.

---

**Correction de l'exercice 2 ▲**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \sqrt[n]{n}$ puis, pour $x$ réel strictement positif, $f(x) = x^{1/x}$ de sorte que pour tout naturel non nul $n$, on a $u_n = f(n)$. $f$ est définie sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$, $f(x) = e^{\ln x/x}$. $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} e^{\ln x/x}.$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ et donc $f'$ est strictement positive sur $]0,e[$ et strictement négative sur $]e,+\infty[$. $f$ est donc strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. En particulier, pour $n \geq 3$,

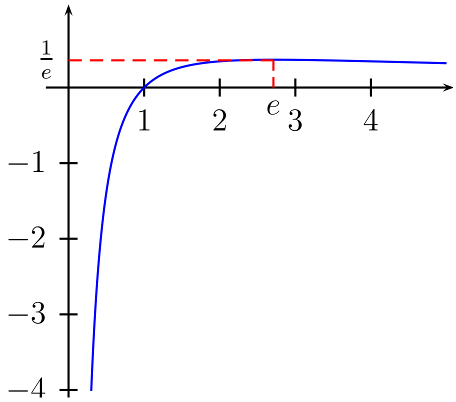
$$u_n = f(n) \leq f(3) = u_3 = \sqrt[3]{3}.$$

Comme $u_2 = \sqrt{2} > 1 = u_1$, on a donc $\text{Max}\{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \text{Max}\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\}$. Enfin, $\sqrt{2} = 1,41... < 1,44.. = \sqrt[3]{3}$ (on peut aussi constater que $(\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6$). Finalement,

$$\boxed{\text{Max}\{\sqrt[n]{n},\ n \in \mathbb{N}^*\} = \sqrt[3]{3} = 1,44...}$$

## Correction de l'exercice 3 ▲

1. Pour $x>0$, posons $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. $f$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour $x>0$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. $f$ est donc strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Le graphe de $f$ s'en déduit facilement :




2. Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls tels que $a<b$. On a alors

$$a^b=b^a\Leftrightarrow \ln(a^b)=\ln(b^a)\Leftrightarrow b\ln a=a\ln b\Leftrightarrow \frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}\Leftrightarrow f(a)=f(b).$$

Si $a\geq 3$, puisque $f$ est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, on a alors $f(a)>f(b)$ et en particulier, $f(a)\neq f(b)$. $a$ n'est donc pas solution. $a=1$ n'est évidemment pas solution. Par exemple, $a^b=b^a\Rightarrow 1^b=b^1\Rightarrow b=1=a$ ce qui est exclu. Donc, nécessairement $a=2$ et $b$ est un entier supérieur ou égal à 3, et donc à $e$, vérifiant $f(b)=f(2)$. Comme $f$ est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, l'équation $f(b)=f(2)$ a au plus une solution dans $[e,+\infty[$. Enfin, comme $2^4=16=4^2$, on a montré que : il existe un et un seul couple $(a,b)$ d'entiers naturels non nuls tel que $a<b$ et $a^b=b^a$, à savoir $(2,4)$.

## Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\ln|x+1|-\ln|2x+1|\leq \ln 2 &\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right|\leq \ln 2\Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{2x+1}\right|\leq 2 \text{ et } x+1\neq 0\\
&\Leftrightarrow -2\leq \frac{x+1}{2x+1}\leq 2 \text{ et } x\neq -1\Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1}+2\geq 0 \text{ et } \frac{x+1}{2x+1}-2\leq 0 \text{ et } x\neq -1\\
&\Leftrightarrow \frac{5x+3}{2x+1}\geq 0 \text{ et } \frac{-3x-1}{2x+1}\leq 0 \text{ et } x\neq -1\\
&\Leftrightarrow \left(x\in\left]-\infty,-\frac{3}{5}\right]\cup\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\right) \text{ et } \left(\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right[\right) \text{ et } x\neq -1\\
&\Leftrightarrow x\in ]-\infty,-1[\cup\left]-1,-\frac{3}{5}\right]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right[
\end{aligned}$$

2. Pour $x>0$

$$\begin{aligned}
x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x=x\ln\sqrt{x}\Leftrightarrow \ln x(\sqrt{x}-\frac{x}{2})=0\\
&\Leftrightarrow \ln x\times\sqrt{x}(2-\sqrt{x})=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=4.
\end{aligned}$$

3. $\text{Argch}\,3 = \ln(3+\sqrt{3^2-1}) = \ln(3+\sqrt{8})$ et $\text{Argth}\,\frac{7}{9} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}}\right) = \ln\sqrt{8}$. Donc, $\text{Argch}\,3 - \text{Argth}\,\frac{7}{9} = \ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$. Par suite,

$$\begin{aligned}2\,\text{Argsh}\,x = \text{Argch}\,3 - \text{Argth}\,\frac{7}{9} &\Leftrightarrow x = \text{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)\\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{8}}\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = \frac{3\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1)}{4}.\end{aligned}$$

4. Pour $x \in ]0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{100},\frac{1}{10},1\right\}$,

$$\begin{aligned}\ln_x(10)+2\ln_{10x}(10)+3\ln_{100x}(10) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\ln(10)}{\ln x}+2\frac{\ln(10)}{\ln(10x)}+3\frac{\ln(10)}{\ln(100x)} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{(\ln x+\ln(10))(\ln x+2\ln(10))+2\ln x(\ln x+2\ln(10))+3\ln x(\ln x+\ln(10))}{\ln x(\ln x+\ln(10))(\ln x+2\ln(10))} = 0\\ &\Leftrightarrow 6\ln^2 x+10\ln(10)\times\ln x+2\ln^2(10) = 0\\ &\Leftrightarrow \ln x \in \left\{\frac{-5\ln(10)+\sqrt{13\ln^2(10)}}{6}, \frac{-5\ln(10)-\sqrt{13\ln^2(10)}}{6}\right\}\\ &\Leftrightarrow x \in \left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6}, 10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}.\end{aligned}$$

Comme aucun de ces deux nombres n'est dans $\left\{\frac{1}{100},\frac{1}{10},1\right\}$, $\mathscr{S} = \left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6}, 10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}$.

5. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}2^{2x}-3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1} &\Leftrightarrow 2^{2x}+2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}\\ &\Leftrightarrow 2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1) \Leftrightarrow 3\times 2^{2x-1} = 4\times 3^{x-\frac{1}{2}}\\ &\Leftrightarrow 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow (2x-3)\ln 2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)\ln 3\\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3}{2\ln 2-\ln 3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

Pour $x>0$, $(x^x)^x = e^{x\ln(x^x)} = e^{x^2\ln x}$ et $x^{(x^x)} = e^{x^x\ln x}$. Par suite,

$$\forall x>0,\ \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(\ln x(x^2-x^x)).$$

Or, $x^2-x^x = -x^x(1-x^{2-x}) = -e^{x\ln x}(1-e^{(2-x)\ln x})$. Quand $x$ tend vers $+\infty$, $(2-x)\ln x$ tend vers $-\infty$. Donc, $1-e^{(2-x)\ln x}$ tend vers 1 puis $x^2-x^x$ tend vers $-\infty$. Mais alors, $\ln x(x^2-x^x)$ tend vers $-\infty$, puis $\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(\ln x(x^2-x^x))$ tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0.}$$

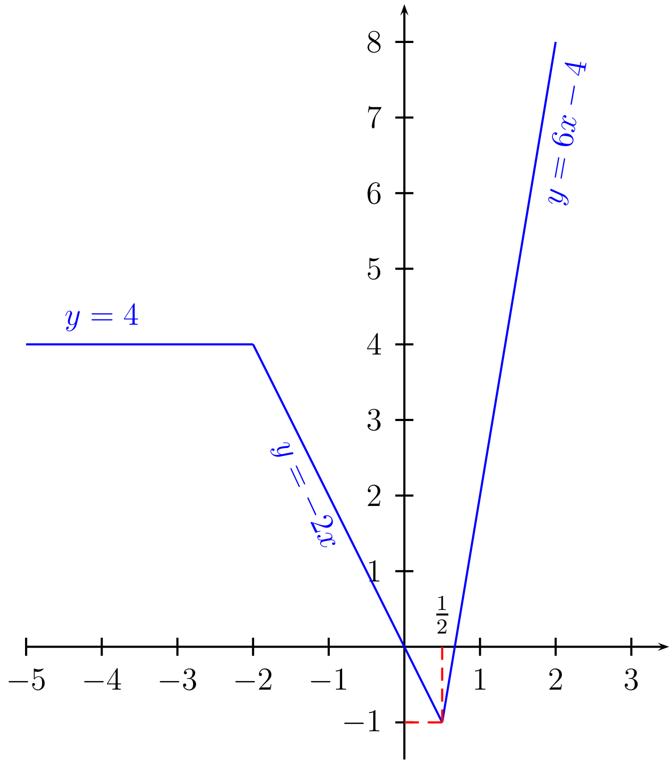
## Correction de l'exercice 6 ▲

On notera $\mathscr{C}_i$ le graphe de $f_i$.

1. $f_1$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$. On précise dans un tableau l'expression de $f_1(x)$ suivant les valeurs de $x$.

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $-2$ | $1/2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert 2x-1\rvert$ | $-2x+1$ | $-2x+1$ | $2x-1$ |
| $\lvert x+2\rvert$ | $-x-2$ | $x+2$ | $x+2$ |
| $f_1(x)$ | $4$ | $-2x$ | $6x-4$ |

On en déduit $\mathscr{C}_1$.



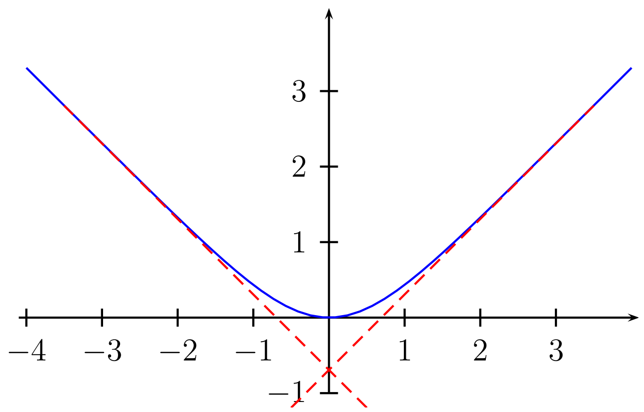

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. $\text{ch}\,x\geq 1$ et donc $f_2(x)$ existe et $f_2(x)\geq 0$. $f_2$ est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $f_2$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire. Puisque la fonction $x\mapsto \text{ch}\,x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et que la fonction $x\mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, $f_2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et, par parité, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$. $f_2$ est paire et donc $f_2'$ est impaire. Par suite, $f_2'(0)=0$ et $\mathscr{C}_2$ admet l'axe des abscisses pour tangente en $(0,f_2(0))=(0,0)$. **Etude en** $+\infty$. Pour $x\geq 0$,

$$f_2(x)=\ln\left(\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right)=\ln(e^x+e^{-x}\Big)-\ln 2=\ln(e^x(1+e^{-2x}))-\ln 2=x-\ln 2+\ln(1+e^{-2x}).$$

Quand $x$ tend vers $+\infty$, $e^{-2x}$ tend vers $0$ et donc, $\ln(1+e^{-2x})$ tend vers $0$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f_2(x)=+\infty$. De plus, $\lim_{x\to+\infty}(f_2(x)-(x-\ln 2))=0$ et la droite $(D)$ d'équation $y=x-\ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_2$ en $+\infty$. Par symétrie par rapport à la droite $(Oy)$, la droite $(D')$ d'équation $y=-x-\ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_2$ en $-\infty$. Enfin, pour tout réel $x$,

$$f_2(x)-(x-\ln 2)=\ln(1+e^{-2x})>\ln 1=0,$$

et $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de $(D)$ sur $\mathbb{R}$. De même, $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de $(D')$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit $\mathscr{C}_2$.




3. $f_3$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. **Etude en** $-\infty$. Soit $x \leq -1$.

$$f_3(x) = x+\sqrt{x^2-1} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}.$$

Or, quand $x$ tend vers $-\infty$, $x-\sqrt{x^2-1}$ tend vers $-\infty$ et donc $\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = 0$. **Etude en** $+\infty$. Immédiatement, $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$. Ensuite, pour $x \geq 1$,

$$\frac{f_3(x)}{x} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} = 1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}},$$

qui tend vers 2 quand $x$ tend vers $+\infty$. Mais alors,

$$f_3(x)-2x = -x+\sqrt{x^2-1} = \frac{(-x+\sqrt{x^2-1})(-x-\sqrt{x^2-1})}{-x-\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty}(f_3(x)-2x) = 0$ et donc que la droite $(D)$ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathscr{C}_3$ en $+\infty$. **Etude en** 1. Pour $x > 1$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = \frac{(x-1)+\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} = 1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

et pour $x \in ]-1,1[$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = \frac{(x-1)+\sqrt{(-x+1)(x+1)}}{-(-x+1)} = 1-\sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}.$$

Par suite, $\lim_{x\to1,\,x>1} \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x\to1,\,x<1} \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = -\infty$. On en déduit que $f_3$ n'est pas dérivable en 1, mais que $\mathscr{C}_3$ admet deux demi-tangentes parallèles à $(Oy)$ au point de $\mathscr{C}_3$ d'abscisse 1. Les résultats sont analogues en $-1$. **Etude des variations de $\mathbf{f_3}$**. Pour $x \in ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f_3(x) = x+\sqrt{x^2-1}$ et donc

$$f_3'(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Si $x > 1$, on a $x+\sqrt{x^2-1} > 0$ et donc, $f_3'(x) > 0$. Si $x < -1$, on a

$$\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x| = -x,$$

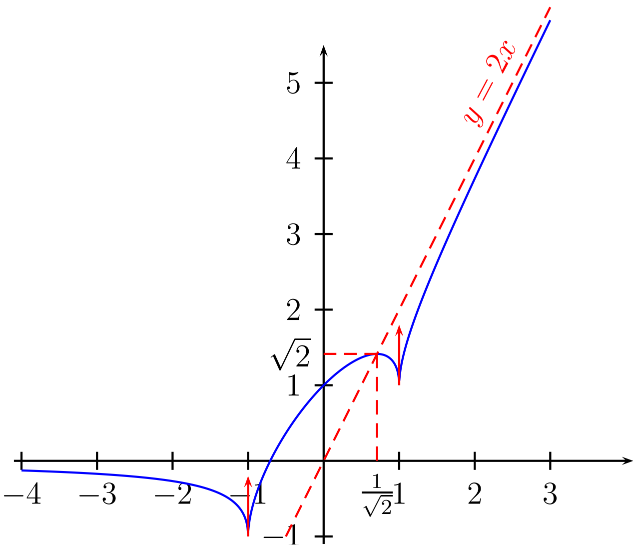
et donc, $x+\sqrt{x^2-1} < 0$ puis $f_3'(x) < 0$. Ainsi, $f_3$ est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Pour $x \in ]-1,1[$, $f_3(x) = x+\sqrt{-x^2+1}$ et donc

$$f_3'(x) = 1-\frac{x}{\sqrt{-x^2+1}} = \frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}}.$$

Si $x \in ]-1,0]$, on a clairement $f_3'(x) > 0$. Si x$\in [0,1[$, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\operatorname{sgn}(f_3'(x)) = \operatorname{sgn}(\sqrt{-x^2+1} - x) = \operatorname{sgn}((-x^2+1) - x^2) = \operatorname{sgn}(1-2x^2) = \operatorname{sgn}((1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})) = \operatorname{sgn}[\frac{1}{\sqrt{2}} - x).$$

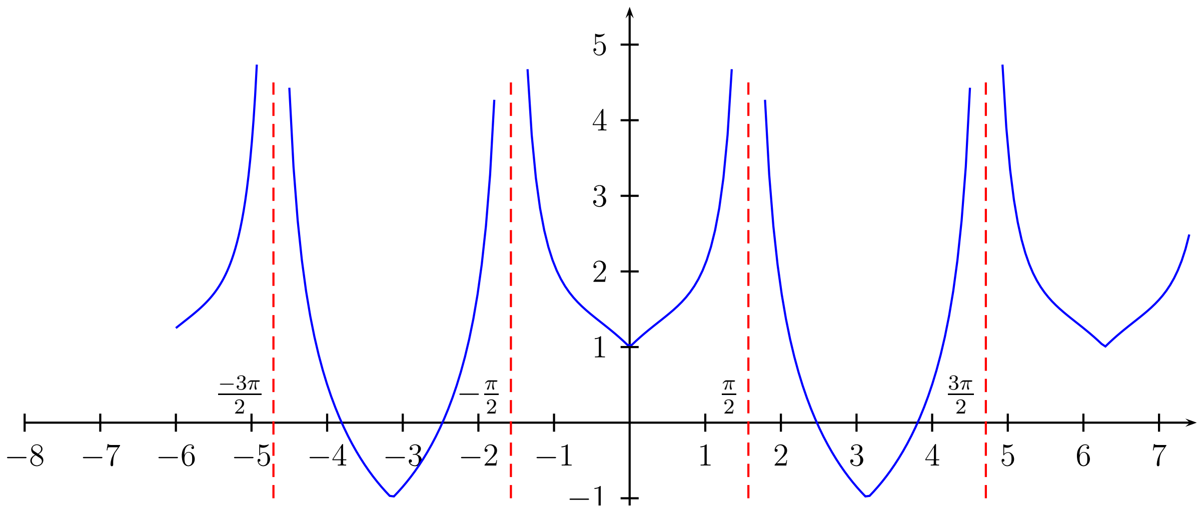
Donc, $f_3'$ est strictement positive sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ et s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En résumé, $f_3'$ est strictement négative sur $]-\infty,-1[$ et sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ et strictement positive sur $\left]-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et sur $]1,+\infty[$. $f_3$ est donc strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ et strictement décroissante sur $\left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $[1,+\infty[$. On en déduit $\mathscr{C}_3$.




4. $f_4$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, $2\pi$-périodique et paire. On étudie donc $f_4$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. **Etude des variations de f₄**. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_4(x) = \tan x + \cos x$ et donc,

$$f_4'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \geq 1 - 1 = 0,$$

avec égalité si et seulement si $\sin x = \cos^2 x = 1$ ce qui est impossible. Donc, $f_4'$ est strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f_4$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_4(x) = -\tan x + \cos x$ et $f_4$ est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. On a immédiatement $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = +\infty$. On en déduit $\mathscr{C}_4$.



5. Soit $x>0$. $x$ n'est pas nul donc $\frac{1}{x}$ existe puis $1+\frac{1}{x}>0$ et $f_6(x)$ existe. **Etude en 0**. Pour $x>0$, $x\ln(1+\frac{1}{x})=-x\ln x+x\ln(1+x)$. Par suite, $x\ln(1+\frac{1}{x})$ tend vers 0 quand $x$ tend vers 0 par valeurs supérieures et donc $f_5(x)=\exp(x\ln(1+\frac{1}{x}))$ tend vers 1. Posons encore $f_5(0)=1$ et étudions la dérivabilité de $f_5$ en 0. Pour $x>0$,

$$\frac{f_5(x)-f_5(0)}{x-0}=\frac{1}{x}\left(\exp(x\ln(1+\frac{1}{x}))-1\right)=\frac{\exp\left(x\ln(1+\frac{1}{x})\right)-1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Or, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers 0, et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\exp(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right))-1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1.$$

D'autre part, $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers 0 par valeurs supérieures. Finalement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f_5(x)-f_5(0)}{x-0}=+\infty.$$

Ainsi, $f_5$ n'est pas dérivable en 0 mais $\mathscr{C}_5$ admet l'axe des ordonnées pour tangente en $(0,f_5(0))=(0,1)$. **Etude en $+\infty$**. Pour $x>0$, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ et donc $\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$. Par suite,

$$\lim_{x\to+\infty}f_5(x)=e.$$

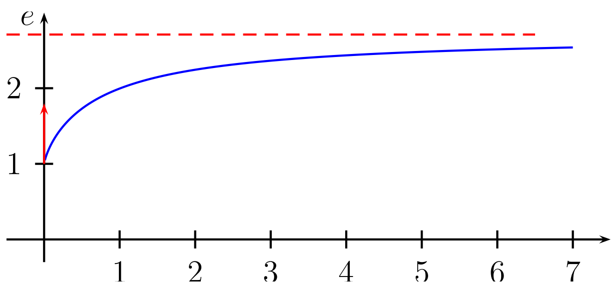
**Etude des variations de $\mathbf{f_5}$**. Pour $x>0$, $f_5(x)>0$ puis $\ln(f_5(x))=x\ln(1+\frac{1}{x})$. Par suite, pour $x>0$,

$$f_5'(x)=f_5(x)\ln(f_5)'(x)=f_5(x)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{x(-\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x}}\right)=f_5(x)g(x),$$

où $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$. Sur $]0,+\infty[$, $f_5'$ est du signe de $g$. Pour déterminer le signe de $g$, étudions d'abord les variations de $g$ sur $]0,+\infty[$. $g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$g'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0.$$

$g$ est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, et puisque $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$, $g$ est strictement positive sur $]0,+\infty[$. Il en est de même de $f_5'$. $f_5$ est strictement croissante sur $]0,+\infty($. On en déduit $\mathscr{C}_5$.




6. **Domaine de définition de $\mathbf{f_6}$**. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f_6(x)\text{ existe}&\Leftrightarrow x^2-5x+6>0\text{ et }1-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)>0\Leftrightarrow x^2-5x+6>0\text{ et }\frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln\frac{1}{2}}<1\\
&\Leftrightarrow x^2-5x+6>0\text{ et }\ln(x^2-5x+6)>\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-5x+6>\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow x^2-5x+\frac{11}{2}>0\Leftrightarrow x\in]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty[=\mathscr{D}_f.
\end{aligned}$$

**Variations de $\mathbf{f_6}$**. La fonction $x \mapsto x^2-5x+6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$. Comme $\frac{5+\sqrt{3}}{2} > \frac{5}{2}$ et que $\frac{5-\sqrt{3}}{2} < \frac{5}{2}$, la fonction $x \mapsto x^2-5x+6$ est strictement décroissante sur$\left]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction logarithme néperien est strictement croissante. La fonction $x \mapsto 1+\frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln 2}$ a le même sens de variations et finalement $f_6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$. **Axe de symétrie** Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow \frac{5}{2}-x \in \mathscr{D}_f$ et de plus, $\left(\frac{5}{2}-x\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}-x\right)+6 = x^2-5x+6$. Par suite,

$$\forall x \in D,\ f_6(\frac{5}{2}-x) = f_6(x).$$

$\mathscr{C}_6$ admet donc la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ pour axe de symétrie.
Le calcul des limites étant immédiat, on en déduit $\mathscr{C}_6$.