Chapitre 1

Notations et Symboles

Objectifs

- Connaître les ensembles de nombres.
- Connaître le vocabulaire lié aux ensembles, les symboles correspondant et leurs propriétés.
- Connaître les quantificateurs et savoir les utiliser.
- Connaître l'implication et l'équivalence ainsi que les méthodes pour démontrer l'une et l'autre.
- Être capable d'utiliser les symboles Σ et $\prod$, et d'effectuer des calculs avec ceux-ci.

Sommaire

I) Les ensembles

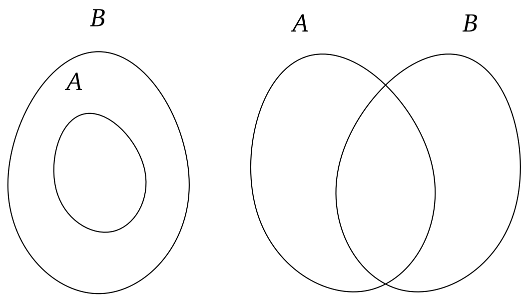
1) Les ensembles de nombres

- L'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$.
- L'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.
- L'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q}$, un rationnel est une **fraction d'entiers**. Tout rationnel peut s'écrire de **manière unique** sous forme **irréductible** avec le numérateur dans $\mathbb{Z}$ et le dénominateur dans $\mathbb{N}^*$.
- L'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$, parmi ceux - ci on distingue ceux qui sont rationnels (les éléments de $\mathbb{Q}$) et ceux qui sont **irrationnels**, par exemple $\sqrt{2}$ est irrationnel car ce n'est pas un élément de $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$, qui fera l'objet d'un chapitre.

2) Vocabulaire lié aux ensembles

- L'ensemble vide : $\emptyset$.
- **L'égalité** : on dit que deux ensembles A et B sont égaux lorsqu'ils ont exactement les mêmes éléments (notation : $A = B$).

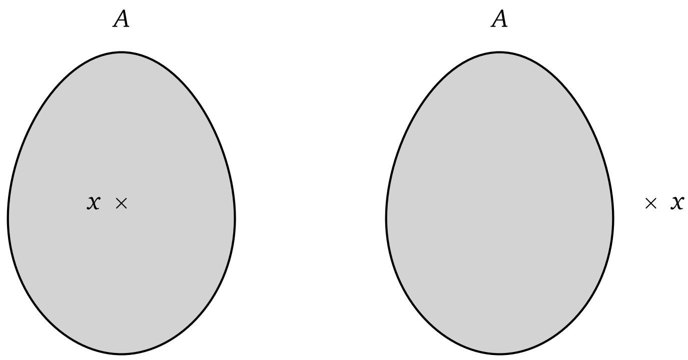
– **L'inclusion** : le symbole correspondant est $\subset$ (se lit « est inclus dans »), il s'utilise entre deux **ensembles**. La proposition : $A \subset B$ signifie que A et B sont deux ensembles et que **tous les éléments de** A **sont également éléments de** B, la négation de cette proposition est : $A \not\subset B$, ce qui signifie que **au moins un élément de** A **n'est pas dans** B, par exemple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$. Si E et A désignent des ensembles, et si A est inclus dans E, on dit que A est une **partie** de E. L'ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$, donc écrire « $A \subset E$ » revient à écrire « $A \in \mathscr{P}(E)$ ». L'ensemble vide ($\emptyset$) et E sont des parties de E.



$A \subset B$ $A \not\subset B$

Dire que deux ensembles A et B sont égaux, revient à dire que A est inclus dans B, et B est inclus dans A. Donc démontrer une égalité entre deux ensembles, peut se faire en montrant une double inclusion.

– **L'appartenance** : le symbole correspondant est $\in$ (se lit « appartient à »), il s'utilise entre un **élément** et un **ensemble**. La proposition $x \in A$ signifie que A est un ensemble et que x est un élément de cet ensemble, la négation est $x \notin A$. Par exemple $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

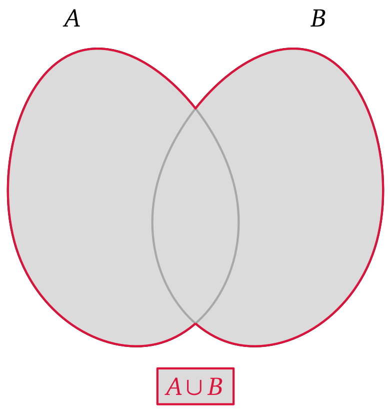


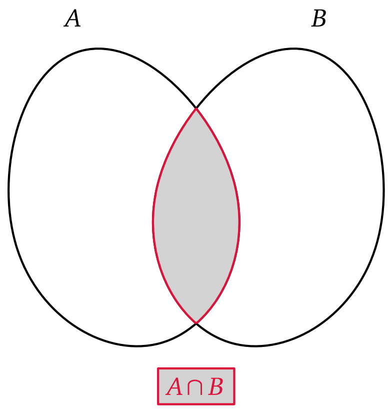
$x \in A$ $x \notin A$

– **La réunion** : le symbole correspondant est $\cup$ (se lit « union »), il s'utilise entre deux **ensembles**, le résultat ne donne pas une proposition mais un autre **ensemble**. $A \cup B$ est l'ensemble que l'on obtient en regroupant les éléments de A avec ceux de B, par exemple $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

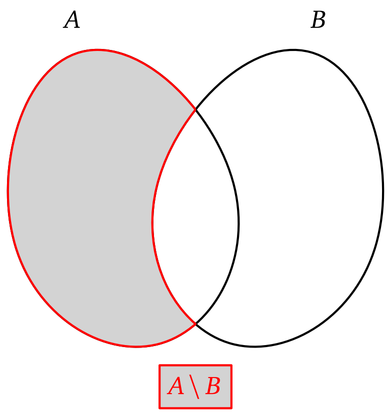
– **L'intersection** : le symbole correspondant est $\cap$ (se lit « inter »), il s'utilise entre deux **ensembles**, là encore le résultat est un ensemble. $A \cap B$ désigne l'ensemble des éléments **communs** à A et B. Par exemple $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^* = \mathbb{N}^*$. On dit que deux ensembles sont **disjoints** lorsque leur intersection est l'ensemble vide. Si A, B, C sont trois ensembles, on peut vérifier la propriété suivante :

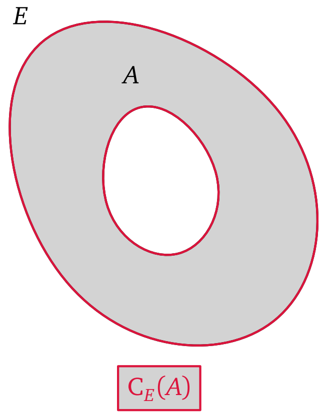
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ et } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$





- **La différence** : le symbole correspondant est $\setminus$ (se lit « moins »), il s'utilise entre deux **ensembles**, là encore le résultat est un ensemble. Si A et B désignent deux parties d'un ensemble E, l'ensemble $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B.
- **Le complémentaire** : si A désigne une **partie** d'un ensemble E, le complémentaire de A dans E est noté $\complement_E(A)$ (ou bien $E \setminus A$) et désigne l'ensemble des éléments de E qui **ne sont pas dans** A. Par exemple $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels. Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, on peut vérifier les propriétés suivantes :
  - $A \cup \complement_E(A) = E$.
  - $\complement_E(E) = \emptyset$, $E \setminus \emptyset = E$.
  - $E \setminus (E \setminus A) = A$.
  - $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$ (loi de *De Morgan*[1]).
  - $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$ (2ième loi de *De Morgan*).





- **Produit cartésien** : si E et F désignent deux ensembles, le produit cartésien de E par F est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. Notation : $E \times F = \{(x, y) \ / \ x \in E, \ y \in F\}$. On rappelle que $(x, y) = (a, b)$ si et seulement si $x = a$ et $y = b$.

3) Les quantificateurs

Les quantificateurs servent à construire des propositions portant sur les éléments d'un ensemble, il en existe deux types :

- Le quantificateur **universel**, le symbole correspondant est $\forall$ (se lit « pour tout »), par exemple la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ » se lit « pour tout réel x, le carré de x est positif ou nul », ou bien encore « le carré de tout réel est positif ».

1. *MORGAN Augustus* DE (1806 – 1871) logicien anglais.

– Le quantificateur **existentiel**, le symbole correspondant est $\exists$ (se lit « il existe au moins un »), par exemple la proposition « $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 = -1$ », se lit « il existe au moins un nombre complexe dont le carré vaut -1 ».

L'utilisation des quantificateurs est régie par deux règles :

a) La négation de $\forall$ est $\exists$ (et vice - versa).

b) On ne peut pas intervertir deux quantificateurs de nature différente.

Les deux propositions « $\forall x \in A, \exists y \in B, \cdots$ » et « $\exists y \in B, \forall x \in A, \cdots$ », n'ont pas le même sens. En effet, dans la première le y dépend de x alors que dans la seconde il s'agit du même y pour tous les x.

Exercice: Traduire dans le langage mathématique : la suite (u_n) est majorée. Écrire la négation. Qu'en est-il de la suite définie par $u_n = n^2$? Justifier.

Réponse: $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$. La négation est $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$. La suite (n^2) n'est pas majorée : soit $M \in \mathbb{R}$, si $n > M$, alors $(n+1)^2 > n > M$.

II) Le raisonnement

1) La conjonction et la disjonction

Soient P et Q deux propositions, par définition la proposition « P et Q » est vraie uniquement lorsque P et Q sont vraies simultanément ; la proposition « P ou Q » est fausse uniquement lorsque P et Q sont fausses simultanément. On résume ceci avec une table de vérité :

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

2) L'implication

Le symbole de l'implication est $\Longrightarrow$ (se lit « implique »), il s'utilise entre deux **propositions** construisant ainsi une nouvelle proposition. Si P et Q désignent deux propositions, alors **par définition** la proposition $P \Longrightarrow Q$ est **fausse** lorsque P est vraie et Q fausse, elle est **vraie** dans **tous les autres cas**.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposition $P \Longrightarrow Q$ se lit parfois « si P alors Q », sa **réciproque** est : $Q \Longrightarrow P$, et sa **contraposée** est : (non Q) $\Longrightarrow$ (non P).

Lorsque la proposition $P \Longrightarrow Q$ est vraie et si on sait que la proposition P est vraie, alors d'après la définition, on peut affirmer que la proposition Q est nécessairement vraie. Ce raisonnement est appelé **déduction**.

Exemple: Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, alors démontrer la proposition : « $A \subset B$ », revient à démontrer pour tout élément x de E, l'implication : $x \in A \Longrightarrow x \in B$.

Comment démontrer que $P \Longrightarrow Q$ (sous - entendu : est vraie) ?

a) ***Méthode directe*** *: on suppose que la proposition P est vraie (c'est **l'hypothèse**), on cherche alors à établir que nécessairement la proposition Q est vraie elle aussi. Remarquons que si la proposition P est fausse alors la proposition $P \Longrightarrow Q$ est vraie indépendamment de Q.*

b) ***Par l'absurde*** *: on suppose le contraire de $P \Longrightarrow Q$, c'est à dire on suppose que P est vraie et que Q est fausse. On montre alors que ceci conduit à une contradiction, or il ne doit pas y avoir de contradictions en mathématiques (principe de non - contradiction), ce qui signifie que l'hypothèse faite est fausse et par conséquent $P \Longrightarrow Q$.*

3) L'équivalence

Le symbole de l'équivalence est $\Longleftrightarrow$ (se lit « équivaut à »), il s'utilise entre deux propositions donnant ainsi une nouvelle proposition. Si P et Q désignent deux propositions, alors **par définition** la proposition $P \Longleftrightarrow Q$ est **vraie** lorsque P et Q ont toutes deux la même valeur de vérité, sinon elle est fausse.

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La proposition $P \Longleftrightarrow Q$ se lit parfois : P si et seulement si Q (ou bien P ssi Q). Dire que P équivaut à Q revient à dire que P implique Q et que **la réciproque est vraie**.

Exemple: Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, alors démontrer la proposition : « $A = B$ », revient à démontrer pour tout élément x de E, l'équivalence : $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$.

Comment démontrer que $P \Longleftrightarrow Q$?

a) *En deux temps : on établit dans un premier temps que $P \Longrightarrow Q$, puis dans un deuxième temps on établit la réciproque (i.e. $Q \Longrightarrow P$).*

b) *Méthode directe : on suppose que la proposition P est vraie (**hypothèse**) puis on cherche à établir que Q est vraie **en s'assurant à chaque étape du raisonnement que l'équivalence est conservée**. Cette méthode n'est pas toujours applicable.*

THÉORÈME 1.1

Soient P et Q deux propositions :

- *La proposition $P \Longleftrightarrow Q$ est équivalente à $(\text{non } P) \Longleftrightarrow (\text{non } Q)$.*
- *Non(P et Q) et équivalente à « non(P) ou non(Q) ».*
- *Non(P ou Q) est équivalente à « non(P) et non(Q) ».*
- *L'implication $P \Longrightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée : $(\text{non } Q) \Longrightarrow (\text{non } P)$.*
- *L'implication $P \Longrightarrow Q$ est équivalente à « (non P) ou Q ».*
- *La proposition non($P \Longrightarrow Q$) est équivalente à « P et non(Q) ».*

Preuve: Il suffit de faire les tables de vérités. □

Comment démontrer « P ou Q » : cette proposition est équivalente à « (non P) $\Longrightarrow Q$ ». Par conséquent, démontrer « P ou Q » revient à démontrer « (non P) $\Longrightarrow Q$ ».

III) Les symboles sigma et pi

1) Notation

On considère n nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$, la somme de ces n nombres est $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, par commodité cette somme sera notée : $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Le produit de ces n nombres est $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$, par commodité, ce produit sera noté : $\prod_{i=1}^{n} a_i$. L'indice utilisé pour parcourir les termes de la somme et du produit est noté i dans les exemples ci - dessus, mais le **nom** de l'indice importe peu, par exemple :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j \text{ et } \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{j=1}^{n} a_j.$$

Ce qui importe c'est la valeur de départ de l'indice, la valeur finale, et le fait que l'indice varie **de 1 en 1**.

Exemple: $1+2+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; $1\times 2\times\cdots\times n = \prod_{k=1}^{n} k = n!$.

2) Changement d'indice

Considérons la somme $\sum_{k=1}^{n} a_k$, effectuons le changement d'indice $q = k+1$, k allant de 1 à n de 1 en 1, l'indice q ira de 2 à $n+1$ de 1 en 1, et comme $k = q-1$, on peut écrire : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{q=2}^{n+1} a_{q-1}$. De même en posant $j = k-1$ et $i = n-k$, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}$. De la même façon, on a : $\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{q=2}^{n+1} a_{q-1}$, et en posant $j = k-1$ et $i = n-k$, on obtient : $\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \prod_{i=0}^{n-1} a_{n-i}$.

Après le changement d'indice, on doit retrouver exactement les mêmes termes que dans la somme initiale (ou le produit initial).

3) Règles de calculs

THÉORÈME 1.2

Soient $\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ des nombres, on a :

- *pour l'addition :*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha\times a_k = \alpha\times\sum_{k=1}^{n} a_k\ ; \qquad \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k;$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\times\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_k c_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k c_i\right).$$

- *pour la multiplication :*

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha\times a_k = \alpha^n \times \prod_{k=1}^{n} a_k\ ; \prod_{k=1}^{n}(a_k\times b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right).$$

Preuve: Celle - ci découle des propriétés des opérations usuelles sur les nombres. □

IV) Exercices

★Exercice 1.1

Soient A et B deux parties d'un ensemble E $(A, B \in \mathscr{P}(E))$, démontrer les assertions suivantes :

a) $A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B$.

b) $A \cap B = B \Longleftrightarrow B \subset A$.

c) $A \cup B = A \cap B \Longleftrightarrow A = B$.

d) $A \subset B \Longleftrightarrow (E \setminus B) \subset (E \setminus A)$.

e) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

★Exercice 1.2

Les assertions suivantes sont - elles vraies ou fausses ?

a) $\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, x \leqslant y$.

b) $\exists\, y \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{N}, y \leqslant x$.

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \exists\, n \in \mathbb{N}, x \leqslant 2^n$.

★Exercice 1.3

a) Factoriser puis calculer la somme : $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} ij \right)$.

b) Écrire la somme suivante avec le symbole Σ et montrer que celle - ci est nulle lorsque $p \geqslant 1$:

$$\binom{n}{n}\binom{n}{n-p} - \binom{n}{n-1}\binom{n-1}{n-p} + \cdots + (-1)^p \binom{n}{n-p}\binom{n-p}{n-p}$$

★Exercice 1.4

a) Simplifier les sommes suivantes : $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{3^k}$; $\sum\limits_{k=0}^{n} e^k$; $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$; $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

b) Simplifier les produits suivants : $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2}$, $\prod\limits_{k=1}^{n} e^k$.

★Exercice 1.5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (en raisonnant par équivalence) :

a) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \leqslant 1-x$; b) $|1-x| \geqslant 2|x| - 1$; c) $|x+2| \geqslant \dfrac{1-x}{1+x}$.

★Exercice 1.6

Compléter les valeurs initiales et finales des indices dans les sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\Big) = \sum_{j=?}^{?}\Big(\sum_{i=?}^{?} a_{i,j}\Big) \text{ et } \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\Big) = \sum_{j=?}^{?}\Big(\sum_{i=?}^{?} a_{i,j}\Big).$$

On disposera les termes $a_{i,j}$ dans un tableau, puis on calculera la somme en faisant d'abord le total de chaque ligne, et on recommencera le calcul en faisant d'abord le total de chaque colonne.