



Trigonométrie

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 *IT

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0$,
2. $\sin x = 1$,
3. $\sin x = -1$,
4. $\cos x = 1$,
5. $\cos x = -1$,
6. $\cos x = 0$,
7. $\tan x = 0$,
8. $\tan x = 1$.

[Correction ▼](#)

[005063]

Exercice 2 *IT

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$,
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
3. $\tan x = -1$,
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

[Correction ▼](#)

[005064]

Exercice 3 **IT

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans I les équations suivantes :

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,
2. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = [0, 4\pi]$,
3. $\tan(5x) = 1$, $I = [0, \pi]$,
4. $\cos(2x) = \cos^2 x$, $I = [0, 2\pi]$,
5. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$, $I = [0, 2\pi]$,
6. $\cos(nx) = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$),
7. $|\cos(nx)| = 1$,

8. $\sin(nx) = 0$,
9. $|\sin(nx)| = 1$,
10. $\sin x = \tan x$, $I = [0, 2\pi]$,
11. $\sin(2x) + \sin x = 0$, $I = [0, 2\pi]$,
12. $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2$, $I = [-\pi, \pi]$.

[Correction ▼](#)

[005065]

Exercice 4 **IT

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1. $\cos x \leq \frac{1}{2}$, $I = [-\pi, \pi]$,
2. $\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = \mathbb{R}$,
3. $\cos x > \cos \frac{x}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,
4. $\cos^2 x \geq \cos(2x)$, $I = [-\pi, \pi]$,
5. $\cos^2 x \leq \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,
6. $\cos \frac{x}{3} \leq \sin \frac{x}{3}$, $I = [0, 2\pi]$.

[Correction ▼](#)

[005066]

Exercice 5 *I

Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

[Correction ▼](#)

[005067]

Exercice 6 *I

Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

[Correction ▼](#)

[005068]

Exercice 7 ***

Montrer que $\sum \cos(a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_n$ (la somme comporte 2^n termes).

[Correction ▼](#)

[005069]

Exercice 8 ***I

1. Calculer $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ pour a élément donné de $]0, \pi[$ (penser à $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$).
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)$.

[Correction ▼](#)

[005070]

Exercice 9 **

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2^{4\cos^2 x + 1} + 16 \cdot 2^{4\sin^2 x - 3} = 20$.

[Correction ▼](#)

[005071]

Exercice 10 ***

Soit a un réel distinct de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan \theta$.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$

On trouvera deux méthodes, l'une algébrique et l'autre utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

Exercice 11 ****

On veut calculer $S = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$.

1. Calculer $\tan(5x)$ en fonction de $\tan x$.
2. En déduire un polynôme de degré 4 dont les racines sont $\tan 9^\circ$, $-\tan 27^\circ$, $-\tan 63^\circ$ et $\tan 81^\circ$ puis la valeur de S .

Correction ▼

[005073]

Exercice 12 ***

Combien l'équation

$$\tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0,$$

possède-t-elle de solutions dans $[0, \pi]$?

Correction ▼

[005074]

Exercice 13 **I

On veut calculer $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$. Pour cela, on pose $a = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$, $b = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$ et $z = e^{2i\pi/5}$.

1. Vérifier que $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$.
2. Vérifier que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
3. En déduire un polynôme de degré 2 dont les racines sont a et b puis les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$.

Correction ▼

[005075]

Exercice 14 **I

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \cos^2 x$,
2. $x \mapsto \cos^4 x$,
3. $x \mapsto \sin^4 x$,
4. $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$,
5. $x \mapsto \sin^6 x$,
6. $x \mapsto \cos x \sin^6 x$,
7. $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$,
8. $x \mapsto \cos^3 x$.

Correction ▼

[005076]

Exercice 15 **

Calculer $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x \, dx$ et $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x \, dx$.

Correction ▼

[005077]

Exercice 16 **

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$,
2. $\sin \left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$,
3. $\tan \left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{\cos(2x)}$,
4. $\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}$.

Exercice 17 ***

Soit k un réel distinct de -1 et de 1 .

1. Etudier les variations de $f_k : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1-2k\cos x+k^2}}$.
2. Calculer $\int_0^\pi f_k(x) dx$.

Correction ▼

[005079]

Exercice 18 *I**

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).
2. $\sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).
3. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).

Correction ▼

[005080]

Exercice 19 ***

Résoudre le système $\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases}$ où a, b et c sont trois réels.

Correction ▼

[005081]

Exercice 20 **

Montrer que $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

Correction ▼

[005082]

Exercice 21 ***

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.
2. En déduire les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$ pour x élément de $\left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10} \right\}$.

Correction ▼

[005083]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
 2. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\frac{\pi}{2}\}$.
 3. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\frac{3\pi}{2}\}$.
 4. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, 2\pi\}$.
 5. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\pi\}$.
 6. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$.
 7. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
 8. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.
-

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z})$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$.
 2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in (-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z})$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\}$.
 3. $\tan x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \{\frac{3\pi}{4}\}$.
 4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \{\frac{\pi}{6}\}$.
 5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in (-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z})$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$.
 6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in (-\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z})$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.
-

Correction de l'exercice 3 ▲

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \in (\frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z})$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\}$.
2. $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in (\frac{5\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{7\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \in (\frac{5\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{7\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z})$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,4\pi]} = \{\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\}$.
3. $\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \{\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}\}$.
4. $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
5. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in (-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}) \cup 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$.
6. $\cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
7. $|\cos(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
8. $\sin(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
9. $|\sin(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
10. $\sin x = \tan x \Leftrightarrow \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x \frac{\cos x - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
- 11.

$$\begin{aligned}\sin(2x) + \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x + \pi) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / 2x = x + \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / 2x = -x + 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{2k\pi}{3})\end{aligned}$$

$$\text{De plus, } \mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\}.$$

12.

$$12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2 \Leftrightarrow 6\cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [-\pi, -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}, \pi]$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$.

3. Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \cos x > \cos \frac{x}{2} &\Leftrightarrow 2\cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow (2\cos \frac{x}{2} + 1)(\cos \frac{x}{2} - 1) > 0 \Leftrightarrow 2\cos \frac{x}{2} + 1 < 0 \text{ et } \cos \frac{x}{2} \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} < -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{x}{2} \notin 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right] \text{ et } x \notin 4\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \frac{8\pi}{3} + 4k\pi\right] \text{ et } x \notin 4\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right] \end{aligned}$$

4. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos^2 x \geq \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \geq \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-\pi, \pi]$.

5. Pour $x \in [0, 2\pi]$, $\cos^2 x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

6. Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{3} \leq \sin \frac{x}{3} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \sin \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / 2k\pi \leq \frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \leq x \leq 3\pi + \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} (1 + \cos(2 \times \frac{\pi}{8})) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \text{ et puisque } \cos \frac{\pi}{8} > 0,$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

De même, puisque $\sin \frac{\pi}{8} > 0$, $\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \cos(2 \times \frac{\pi}{8}))}$ et

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

De même,

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour n naturel non nul, on pose $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)}$. • $S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2 \cos a_1$ • Soit $n \geq 1$. Supposons que $S_n = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n$ alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_{n+1})} = e^{ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)} + e^{-ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)} \\ &= 2 \cos(a_{n+1}) S_n = 2^{n+1} \cos a_1 \dots \cos a_{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \geq 1, S_n = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n$. Ensuite, pour $n \geq 1, \sum \cos(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n) = \operatorname{Re}(S_n) = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n$ (et on obtient aussi $\sum \sin(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n) = \operatorname{Im}(S_n) = 0$).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum \cos(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque a est dans $]0, \pi[$ alors, pour tout entier naturel non nul $k, \frac{a}{2^k}$ est dans $]0, \pi[$ et donc $\sin \frac{a}{2^k} \neq 0$. De plus, puisque $\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right) = \sin\left(2 \times \frac{a}{2^k}\right) = 2 \sin\left(\frac{a}{2^k}\right) \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$, on a :

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(a) \sin\left(\frac{a}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right) \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \frac{\sin a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}}.$$

$$\forall a \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{\sin a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}}.$$

2. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) > 0$ car $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. Puis

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}}\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right) - \ln\left(\frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right).$$

Maintenant, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right) - \ln\left(\frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right) \right) = \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).$$

$$\forall a \in]0, \pi[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \cdot 2^{4 \sin^2 x - 3} &= 20 \Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \cdot 2^{1 - 4 \cos^2 x} = 20 \Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} - 10 + 16 \times 2^{-4 \cos^2 x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} - 10 + \frac{16}{2^{4 \cos^2 x}} = 0 \Leftrightarrow (2^{4 \cos^2 x})^2 - 10 \times 2^{4 \cos^2 x} + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} = 2 \text{ ou } 2^{4 \cos^2 x} = 8 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x = 1 \text{ ou } 4 \cos^2 x = 3 \\ &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \mathbb{Z}\right). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Tout d'abord, d'après la formule de MOIVRE,

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta),$$

et par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \text{ et } \sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$$

Ensuite, $\tan(3\theta)$ et $\tan\theta$ existent $\Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$. Soit donc $\theta \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta) = \frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)} = \frac{3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta}{\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^3\theta$.

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right), \tan(3\theta) = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}.$$

2. Soit $a \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. **1ère méthode.** a est bien sûr racine de l'équation proposée, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} &= \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} \Leftrightarrow (3x - x^3)(1 - 3a^2) = (1 - 3x^2)(3a - a^3) \text{ (car } \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ne sont pas solution de l'équation)} \\ &\Leftrightarrow (x - a)((3a^2 - 1)x^2 + 8ax - a^2 + 3) = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant réduit du trinôme $(3a^2 - 1)x^2 + 8ax - a^2 + 3$ vaut :

$$\Delta' = 16a^2 - (3a^2 - 1)(-a^2 + 3) = 3a^4 + 6a^2 + 3 = (\sqrt{3}(a^2 + 1))^2 > 0.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles :

$$\mathcal{S} = \left\{ a, \frac{4a - \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2}, \frac{4a + \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2} \right\}.$$

2ème méthode. Il existe un unique réel $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \left\{ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\}$ tel que $a = \tan\alpha$. De même, si x est un réel distinct de $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \left\{ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\}$ tel que $x = \tan\theta$ (à savoir $\alpha = \text{Arctan } a$ et $\theta = \text{arctan } x$). Comme $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\begin{aligned} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} &= \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} \Leftrightarrow \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} \Leftrightarrow \tan(3\theta) = \tan(3\alpha) \\ &\Leftrightarrow 3\theta \in 3\alpha + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \alpha + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ceci refournit les solutions $x = \tan\alpha = a$, puis

$$x = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{a + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}a} = \frac{(a + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}a)}{1 - 3a^2} = \frac{4a + \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2},$$

$$\text{et } x = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4a - \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2}.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Pour $x \notin \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$,

$$\tan(5x) = \frac{\operatorname{Im}((e^{ix})^5)}{\operatorname{Re}((e^{ix})^5)} = \frac{5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x}{\cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x} = \frac{5\tan x - 10\tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10\tan^2 x + 5\tan^4 x},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^5 x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right), \tan(5x) = \frac{5\tan x - 10\tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10\tan^2 x + 5\tan^4 x}.$$

2. $9^\circ, -27^\circ, -63^\circ$ et 81° vérifient $\tan(5 \times 9^\circ) = \tan(5 \times (-27^\circ)) = \tan(5 \times (-63^\circ)) = \tan(5 \times 81^\circ) = 1$.
On résout donc l'équation :

$$\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right).$$

Les solutions, exprimées en degrés et éléments de $] -90^\circ, 90^\circ[$, sont $-63^\circ, -27^\circ, 9^\circ, 45^\circ$ et 81° . Ainsi, les cinq nombres $\tan(-63^\circ), \tan(-27^\circ), \tan(9^\circ), \tan(45^\circ)$ et $\tan(81^\circ)$ sont deux à deux distincts et solutions de l'équation $\frac{5X - 10X^3 + X^5}{1 - 10X^2 + 5X^4} = 1$ qui s'écrit encore :

$$X^5 - 5X^4 - 10X^3 + 10X^2 + 5X - 1 = 0.$$

Le polynôme $X^5 - 5X^4 - 10X^3 + 10X^2 + 5X - 1$ admet déjà $\tan(45^\circ) = 1$ pour racine et on a

$$X^5 - 5X^4 - 10X^3 + 10X^2 + 5X - 1 = (X - 1)(X^4 - 4X^3 - 14X^2 - 4X + 1).$$

Les quatre nombres $\tan(-63^\circ), \tan(-27^\circ), \tan(9^\circ)$ et $\tan(81^\circ)$ sont ainsi les racines du polynôme $X^4 - 4X^3 - 14X^2 - 4X + 1$. Ce dernier peut donc encore s'écrire $(X - \tan(9^\circ))(X + \tan(27^\circ))(X + \tan(63^\circ))(X - \tan(81^\circ))$. L'opposé du coefficient de X^3 à savoir 4 vaut donc également $\tan(9^\circ) - \tan(27^\circ) - \tan(63^\circ) + \tan(81^\circ)$ et on a montré que :

$$\tan(9^\circ) - \tan(27^\circ) - \tan(63^\circ) + \tan(81^\circ) = 4.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Pour $x \in [0, \pi]$, posons $f(x) = \tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x)$.

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow \tan x, \tan(2x), \tan(3x)$ et $\tan(4x)$ existent

$$\Leftrightarrow (x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), (2x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), (3x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \text{ et } (4x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow (x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), (x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}), (x \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}) \text{ et } (x \notin \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x \notin \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8} \right\}.$$

f est définie et continue sur

$$\left[0, \frac{\pi}{8} \right[\cup \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6} \right[\cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[\cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8} \right[\cup \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8} \right[\cup \left[\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4} \right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \right[\cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8} \right[\cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi \right].$$

Sur chacun des dix intervalles précédents, f est définie, continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. La restriction de f à chacun de ces dix intervalles est donc bijective de l'intervalle considéré sur l'intervalle image, ce qui montre déjà que l'équation proposée, que l'on note dorénavant (E) , a au plus une solution par intervalle et donc au plus dix solutions dans $[0, \pi]$. Sur $I = [0, \frac{\pi}{8}[$ ou $I =]\frac{7\pi}{8}, \pi]$, puisque $f(0) = f(\pi) = 0$, (E) a exactement une solution dans I . Ensuite, dans l'expression de somme f , une et

une seule des quatre fonctions est un infiniment grand en chacun des nombres considérés ci-dessus, à l'exception de $\frac{\pi}{2}$. En chacun de ces nombres, f est un infiniment grand. L'image par f de chacun des six intervalles ouverts n'ayant pas $\frac{\pi}{2}$ pour borne est donc $]-\infty, +\infty[$ et (E) admet exactement une solution dans chacun de ces intervalles d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ceci porte le total à $6 + 2 = 8$ solutions. En $\frac{\pi}{2}^-$, $\tan x$ et $\tan(3x)$ tendent vers $+\infty$ tandis que $\tan(2x)$ et $\tan(4x)$ tendent vers 0. f tend donc vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}^-$, et de même f tend vers $-\infty$ en $\frac{\pi}{2}^+$. L'image par f de chacun des deux derniers intervalles est donc encore une fois $]-\infty, +\infty[$. Finalement,

(E) admet exactement dix solutions dans $[0, \pi]$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. D'après les formules d'EULER,

$$z + z^4 = e^{2i\pi/5} + e^{8i\pi/5} = e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = a.$$

De même,

$$z^2 + z^3 = e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} = e^{4i\pi/5} + e^{-4i\pi/5} = 2\cos\frac{4\pi}{5} = b.$$

2. Puisque $z \neq 1$ et $z^5 = e^{2i\pi} = 1$,

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z} = \frac{1 - 1}{1 - z} = 0.$$

3. $a + b = z + z^2 + z^3 + z^4 = -1$ et $ab = (z + z^4)(z^2 + z^3) = z^3 + z^4 + z^6 + z^7 = z + z^2 + z^3 + z^4 = -1$. Donc,

$$a + b = -1 \text{ et } ab = -1.$$

Ainsi, a et b sont les solutions de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$ à savoir les nombres $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Puisque $\frac{2\pi}{5} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\frac{4\pi}{5} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, on a $a > 0$ et $b < 0$. Finalement,

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

1. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ et une primitive de $x \mapsto \cos^2 x$ est $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$.

2. D'après les formules d'EULER,

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3) \end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^4 x$ est $x \mapsto \frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x) + 2\sin(2x) + 3x)$.

3.

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3) \end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x \mapsto \sin^4 x$ est $x \mapsto \frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x) - 2\sin(2x) + 3x)$.

4. $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4} \sin^2(2x) = \frac{1}{8} (1 - \cos(4x))$ et une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$ est $x \mapsto \frac{1}{8} (x - \frac{1}{4} \sin(4x))$.

5.

$$\begin{aligned} \sin^6 x &= \left(\frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \right)^6 = -\frac{1}{64} (e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{64} (2\cos(6x) - 12\cos(4x) + 30\cos(2x) - 20) = \frac{1}{32} (-\cos(6x) + 6\cos(4x) - 15\cos(2x) + 10) \end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x \mapsto \sin^6 x$ est $x \mapsto \frac{1}{32} (-\frac{1}{6} \sin(6x) + \frac{3}{2} \sin(4x) - \frac{15}{2} \sin(2x) + 10x)$.

6. $\cos x \sin^6 x = \sin' x \sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos x \sin^6 x$ est $x \mapsto \frac{1}{7} \sin^7 x$.

7. $\cos^5 x \sin^2 x = \cos x (1 - \sin^2 x)^2 \sin^2 x = \sin' x \sin^2 x - 2 \sin' x \sin^4 x + \sin' x \sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$ est $x \mapsto \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x$.

8. $\cos^3 x = \sin' x - \sin' x \sin^2 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ est $x \mapsto \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Pour x réel, on a :

$$\begin{aligned} \cos^4 x \sin^6 x &= \left(\frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \right)^4 \left(\frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \right)^6 \\ &= -\frac{1}{2^{10}} (e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) (e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{2^{10}} (e^{10ix} - 2e^{8ix} - 3e^{6ix} + 8e^{4ix} + 2e^{2ix} - 12 + 2e^{-2ix} + 8e^{-4ix} - 3e^{-6ix} - 2e^{-8ix} + e^{-10ix}) \\ &= -\frac{1}{2^9} (\cos 10x - 2\cos 8x - 3\cos 6x + 8\cos 4x + 2\cos 2x - 6) \\ &= -\frac{1}{512} (\cos 10x - 2\cos 8x - 3\cos 6x + 8\cos 4x + 2\cos 2x - 6) \end{aligned}$$

(Remarque. La fonction proposée était paire et l'absence de sinus était donc prévisible. Cette remarque guidait aussi les calculs intermédiaires : les coefficients de e^{-2ix} , e^{-4ix} , ... étaient les mêmes que ceux de e^{2ix} , e^{4ix} , ...) Par suite,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{512} \left(\left[\frac{\sin 10x}{10} - \frac{\sin 8x}{4} - \frac{\sin 6x}{2} + 2\sin 4x + \sin 2x \right]_{\pi/6}^{\pi/3} - 6 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{512} \left(\frac{1}{10} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} (0 - 0) + 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \pi \right) \\ &= -\frac{1}{512} \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - 2\sqrt{3} - \pi \right) = \frac{9\sqrt{3} + 4\pi}{2048}. \end{aligned}$$

2. Pour x réel, on a

$$\begin{aligned} \cos^4 x \sin^7 x &= \cos^4 x \sin^6 x \sin x = \cos^4 x (1 - \cos^2 x)^3 \sin x \\ &= \cos^4 x \sin x - 3\cos^6 x \sin x + 3\cos^8 x \sin x - \cos^{10} x \sin x. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
J &= \left[-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{3\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{3} + \frac{\cos^{11} x}{11} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\
&= -\frac{1}{5} \times \frac{1-9\sqrt{3}}{32} + \frac{3}{7} \times \frac{1-27\sqrt{3}}{128} - \frac{1}{3} \times \frac{1-81\sqrt{3}}{512} + \frac{1}{11} \times \frac{1-243\sqrt{3}}{2048} \\
&= \frac{1}{2^{11} \times 3 \times 5 \times 7 \times 11} (-14784(1-9\sqrt{3}) + 7920(1-27\sqrt{3}) - 1540(1-81\sqrt{3}) + 105(1-243\sqrt{3})) \\
&= \frac{1}{2365440} (-8299 + 18441\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. $\tan \frac{x}{2}$ existe si et seulement si $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ existe si et seulement si $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}.$$

2. **1 ère solution.** Pour tout réel x ,

$$\sin(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0,$$

2 ème solution.

$$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{Im}(e^{i(x-\frac{2\pi}{3})} + e^{ix} + e^{i(x+\frac{2\pi}{3})}) = \operatorname{Im}(e^{ix}(j^2 + 1 + j)) = 0.$$

3. $\tan(\frac{\pi}{4} - x)$, $\tan(\frac{\pi}{4} + x)$ et $\frac{2}{\cos(2x)}$ existent si et seulement si $\frac{\pi}{4} - x$, $\frac{\pi}{4} + x$ et $2x$ ne sont pas dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc, pour $x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \frac{1-\tan x}{1+\tan x} + \frac{1+\tan x}{1-\tan x} \quad (\text{pour } x \text{ vérifiant de plus } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \\
&= \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos(2x)} \\
&= \frac{2}{\cos(2x)} \quad (\text{ce qui reste vrai pour } x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

4. Pour $x \notin \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2}{\tan(2x)}.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

1. • Pour tout réel x , $1 - 2k\cos x + k^2 = (k - \cos x)^2 + \sin^2 x \geq 0$. De plus,

$$1 - 2k\cos x + k^2 = 0 \Rightarrow k - \cos x = \sin x = 0 \Rightarrow x \in \pi\mathbb{Z} \text{ et } k = \cos x \Rightarrow k \in \{-1, 1\},$$

ce qui est exclu. Donc,

$$\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \forall x \in \mathbb{R}, 1 - 2k\cos x + k^2 > 0.$$

• f_k est donc définie sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} en vertu de théorèmes généraux, impaire et 2π -périodique. On l'étudie dorénavant sur $[0, \pi]$. Pour $x \in [0, \pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= \cos x (1 - 2k \cos x + k^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \sin x (2k \sin x) (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2} \\ &= (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2} (\cos x (1 - 2k \cos x + k^2) - k \sin^2 x) \\ &= (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2} (-k \cos^2 x + (1 + k^2) \cos x - k) \\ &= (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2} (k \cos x - 1)(k - \cos x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_k(x) = \frac{(k \cos x - 1)(k - \cos x)}{(1 - 2k \cos x + k^2)^{3/2}}.$$

1er cas : $|k| < 1$ et $k \neq 0$. (si $k = 0$, $f_k(x) = \sin x$) Pour tout réel x , $(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2} (k \cos x - 1) < 0$ et $f'_k(x)$ est du signe de $\cos x - k$.

x	0	Arccos k	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	1	0

(car $f_k(\text{Arccos } k) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-2k^2+k^2}} = 1$).

2ème cas : $k > 1$. Pour tout réel x , $(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2} (k - \cos x) > 0$ et $f'_k(x)$ est du signe de $k \cos x - 1$.

x	0	Arccos $\frac{1}{k}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{1}{k}$	0

(car $f_k(\text{Arccos } \frac{1}{k}) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+\frac{1}{k^2}}} = \frac{1}{k}$).

3ème cas : $k < -1$. Pour tout réel x , $(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2} (k - \cos x) < 0$ et $f'_k(x)$ est du signe de $1 - k \cos x$.

x	0	Arccos $\frac{1}{k}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$-\frac{1}{k}$	0

(car $f_k(\text{Arccos } \frac{1}{k}) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+\frac{1}{k^2}}} = -\frac{1}{k}$).

2. Pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, posons $I_k = \int_0^\pi f_k(x) dx$.

Si $k = 0$, $I_k = \int_0^\pi \sin x dx = 2$. Sinon,

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{k} \int_0^\pi \frac{2k \sin x}{2\sqrt{1-2k \cos x + k^2}} dx = \frac{1}{k} \left[\sqrt{1-2k \cos x + k^2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{k} (\sqrt{1+2k+k^2} - \sqrt{1-2k+k^2}) = \frac{1}{k} (|k+1| - |k-1|). \end{aligned}$$

Plus précisément, si $k \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, $I_k = \frac{1}{k} ((1+k) - (1-k)) = 2$, ce qui reste vrai pour $k = 0$. Si $k > 1$, $I_k = \frac{1}{k} ((1+k) - (k-1)) = \frac{2}{k}$, et enfin, si $k < -1$, $I_k = \frac{2}{-k}$. En résumé,

$$\text{Si } k \in]-1, 1[, I_k = 2 \text{ et si } k \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, I_k = \frac{2}{|k|}.$$

Correction de l'exercice 18 ▲

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

1ère solution.

$$S_n + iS'_n = \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i\sin(kx)) = \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k.$$

Maintenant, $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc,

1er cas. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $S_n = n+1$ et $S'_n = 0$.

2ème cas. Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} S_n + iS'_n &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2} e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2} e^{-i(n+1)x/2} + e^{i(n+1)x/2}} = e^{inx/2} \frac{-2i \sin \frac{(n+1)x}{2}}{-2i \sin \frac{x}{2}} \\ &= e^{inx/2} \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \begin{cases} \frac{\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

2ème solution.

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=0}^n \cos(kx) &= \sum_{k=0}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sum_{k=0}^n (\sin(k + \frac{1}{2})x - \sin(k - \frac{1}{2})x) \\ &= \left(\sin \frac{x}{2} - \sin \frac{-x}{2} \right) + \left(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) + \dots + \left(\sin \frac{(2n-1)x}{2} - \sin \frac{(2n-3)x}{2} \right) \\ &\quad + \left(\sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right) \\ &= \sin \frac{(2n+1)x}{2} + \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2} \end{aligned}$$

et donc, si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \dots$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$. On a :

$$S_n + S'_n = \sum_{k=0}^n (\cos^2(kx) + \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^n 1 = n+1,$$

et

$$S_n - S'_n = \sum_{k=0}^n (\cos^2(kx) - \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^n \cos(2kx).$$

D'après 1), si $x \in \pi\mathbb{Z}$, on trouve immédiatement,

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = n+1 \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin^2(kx) = 0,$$

et si $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$S_n + S'_n = n+1 \text{ et } S_n - S'_n = \frac{\cos(nx) \sin(n+1)x}{\sin x},$$

de sorte que

$$S_n = \frac{1}{2} \left(n+1 + \frac{\cos(nx) \sin(n+1)x}{\sin x} \right) \text{ et } S'_n = \frac{1}{2} \left(n+1 - \frac{\cos(nx) \sin(n+1)x}{\sin x} \right).$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) \right) + i \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx) \right) &= \sum_{k=0}^n C_n^k e^{ikx} = \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{ix})^k 1^{n-k} \\ &= (1 + e^{ix})^n = (e^{ix/2} + e^{-ix/2})^n e^{inx/2} = 2^n \cos^n \left(\frac{x}{2} \right) \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right). \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) = 2^n \cos^n \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{nx}{2} \right) \text{ et } \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx) = 2^n \cos^n \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{nx}{2} \right).$$

Correction de l'exercice 19 ▲

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\sin a + \sin b + \sin c) = 0 \Leftrightarrow e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \\ &\Rightarrow |e^{ia} + e^{ib}| = |-e^{ic}| = 1 \Leftrightarrow |e^{ia/2} e^{ib/2} (e^{i(a-b)/2} + e^{-i(a-b)/2})| = 1 \\ &\Leftrightarrow \left| \cos \frac{a-b}{2} \right| = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z} \right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow a-b \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} / b = a + \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Par suite, nécessairement, $e^{ib} = je^{ia}$ ou $e^{ib} = j^2 e^{ia}$. Réciproquement, si $e^{ib} = je^{ia}$ ou encore $b = a + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1 + j)e^{ia} = j^2 e^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} / c = a - \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,$$

et si $e^{ib} = j^2 e^{ia}$ ou encore $b = a - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1 + j^2)e^{ia} = je^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} / c = a + \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ (a, a + \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, a - \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi), a \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{-1, 1\}, (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Correction de l'exercice 20 ▲

$$\begin{aligned} \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} &= 2(\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8}) = 2(\cos^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{\pi}{8}) \\ &= 2 \left((\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8})^2 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 21 ▲

1.

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / 3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10} \right\}.$$

2. $\cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{3ix}) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^3) = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \cos x (4 \cos^2 x - 3 - 2 \sin x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x (-4 \sin^2 x - 2 \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x = 0) \text{ ou } (4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0).\end{aligned}$$

D'après 1), l'équation $4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$ admet entre autre pour solutions $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{13\pi}{10}$ (car, dans chacun des deux cas, $\cos x \neq 0$), ou encore, l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$ admet pour solutions les deux nombres **distincts** $X_1 = \sin \frac{\pi}{10}$ et $X_2 = \sin \frac{13\pi}{10}$, qui sont donc les deux solutions de cette équation. Puisque $X_1 > 0$ et que $X_2 < 0$, on obtient

$$X_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } X_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Donc, (puisque $\sin \frac{13\pi}{10} = -\sin \frac{3\pi}{10}$),

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Ensuite, $\sin \frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos \frac{\pi}{5}$, et donc

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Puis

$$\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

et de même

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \cos \frac{3\pi}{10}$$