Chapitre 5

Géométrie élémentaire du plan

Objectifs

- Rappeler les différents modes de repérage dans le plan.
- Rappeler les notions de déterminant et de produit scalaire ainsi que leurs applications.
- Étudier les droites et les cercles du plan.

Sommaire

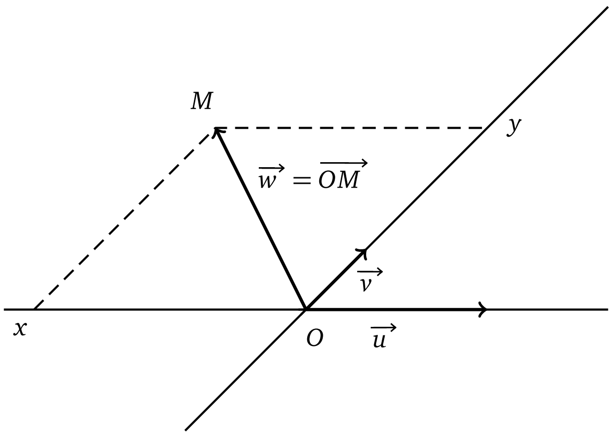
$\mathscr{P}$ désigne un plan (affine). La notion de points est admise ainsi que la notion de vecteur du plan. L'ensemble des vecteurs du plan est noté P, on admet qu'il a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I) Les modes de repérage

1) Repère cartésien

DÉFINITION 5.1
Un repère $\mathscr{R}$ du plan $\mathscr{P}$ est la donnée d'un point O appelé ***origine*** *et de deux vecteurs* ***non colinéaires*** $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$*, appelés* ***vecteurs de base****. On note le repère $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une* ***base*** *de l'ensemble des vecteurs du plan. Les droites passant par O de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont appelées* ***axes*** *du repère et sont notées (Ox) et (Oy).*

Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur quelconque du plan, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$:



De plus, le couple (x, y) est unique.
Preuve: Supposons $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ alors $(x-a)\overrightarrow{u} = (b-y)\overrightarrow{v}$, si $x-a \neq 0$ ou $b-y \neq 0$ alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ce qui est absurde. □

Les réels x et y sont appelées **coordonnées** du vecteurs $\overrightarrow{w}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Soit M un point du plan, par définition, les coordonnées du point M dans le repère $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, autrement dit :

$$M(x, y)_{\mathscr{R}} \iff \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}.$$

Le choix d'un repère cartésien permet d'identifier le plan à l'ensemble $\mathbb{R}^2$.

Repère orthonormal direct : On choisit arbitrairement un repère $\mathscr{R}_0 = (O, \overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v_0})$ de $\mathscr{P}$, à tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v_0})$ on associe son affixe $z = x + iy$. On définit alors les notions de distances et de mesure d'angles orientés de la manière suivante :

DÉFINITION 5.2

Soient $\overrightarrow{w}(z)$ et $\overrightarrow{w}'(z')$ deux vecteurs du plan :
- *La norme du vecteur $\overrightarrow{w}$ est : $\|\overrightarrow{w}\| = |z|$. La distance d'un point A à un point B est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.*
- *Si les vecteurs sont non nuls, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}')$ est donnée par :*

$$(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}') = \text{Arg}(\frac{z'}{z}) \pmod{2\pi}.$$

*On dit alors qu'on a muni le plan d'une structure euclidienne orientée, ou plus briévement que $\mathscr{P}$ est un **plan euclidien orienté**.*

Propriétés : on retrouve les propriétés usuelles :
- $\|\overrightarrow{w}\| = 0 \iff \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
- $\|\lambda\overrightarrow{w}\| = |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{w}\|$.
- $\|\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}'\| \leqslant \|\overrightarrow{w}\| + \|\overrightarrow{w}'\|$ [inégalité triangulaire].
- Si les vecteurs sont non nuls, $\|\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}'\| = \|\overrightarrow{w}\| + \|\overrightarrow{w}'\| \iff \exists k > 0, \overrightarrow{w}' = k\overrightarrow{w}$.
- $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}'') = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}') + (\overrightarrow{w}', \overrightarrow{w}'') \pmod{2\pi}$ [relation de *Chasles* sur les angles].
- $(\overrightarrow{w}', \overrightarrow{w}) = -(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}') \pmod{2\pi}$
- $(k\overrightarrow{w}, k'\overrightarrow{w}') = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}') \pmod{2\pi}$ si $kk' > 0$, et $(k\overrightarrow{w}, k'\overrightarrow{w}') = \pi + (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}') \pmod{2\pi}$ si $kk' < 0$,

DÉFINITION 5.3

Un repère cartésien $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est dit orthonormal direct ssi : $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$ [vecteurs unitaires] et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ [orthogonaux et dans le sens direct].

On remarquera que le repère $\mathscr{R}_0$ qui a été choisi est orthonormal direct car $\overrightarrow{u_0}$ a pour affixe 1 et $\overrightarrow{v_0}$ pour affixe i.

THÉORÈME 5.1

Soit $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormal direct, soient $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w}'$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives z et z' dans le repère $\mathscr{R}_0$ et d'affixes respectives z_1 et z_1' dans le repère $\mathscr{R}$. On a :

$$\|\overrightarrow{w}\| = |z| = |z_1| \text{ et } (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}') = \text{Arg}(\frac{z'}{z}) = \text{Arg}(\frac{z_1'}{z_1}) \pmod{2\pi}.$$

Preuve: $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont d'affixe de module 1 et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, donc l'affixe de $\overrightarrow{u}$ est $e^{i\theta}$ [avec $\theta = (\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{u}) \pmod{2\pi}$] et l'affixe de $\overrightarrow{v}$ est $ie^{i\theta}$. On a $\overrightarrow{w} = x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v}$ avec $z_1 = x_1 + iy_1$, donc l'affixe de $\overrightarrow{w}$ dans le repère $\mathscr{R}_0$ est $z = x_1e^{i\theta} + y_1ie^{i\theta} = z_1e^{i\theta}$ par conséquent on a bien $|z| = |z_1|$. D'autre part $\text{Arg}(\frac{z'}{z}) = \text{Arg}(\frac{z_1'e^{i\theta}}{z_1e^{i\theta}}) = \text{Arg}(\frac{z_1'}{z_1})$. □

Il découle de ce théorème que la formule qui donne la norme des vecteurs et celle qui donne la mesure des angles orientés, sont valables dans ***tout repère orthonormal direct****. Un tel repère est utile pour les problèmes faisant intervenir des distances ou des angles.*

Exemples:

- Traduire l'orthogonalité, la colinéarité des vecteurs non nuls et l'alignement de trois points distincts à l'aide des affixes dans un repère orthonormal direct.
  Réponse : soient $\overrightarrow{w}(z)$ et $\overrightarrow{w}'(z')$, ils sont orthogonaux ssi $z = \lambda iz'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Il sont colinéaires ssi $z = \lambda z'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Les trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c'est à dire $b - a = \lambda(c - a)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Traduire que $C(c)$ est barycentre des points $A(a)$ et $B(b)$ affectés des coefficients respectifs α et β (avec $\alpha + \beta \neq 0$).
  Réponse : On a $(\alpha+\beta)\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ donc $c = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}a + \frac{\beta}{\alpha+\beta}b$.

Changement de repère : Soit $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère cartésien et $\mathscr{R}' = (O', \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$ un nouveau repère cartésien avec :

$$O'(a,b)_{\mathscr{R}},\ \overrightarrow{u}' = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{v}' = \gamma\overrightarrow{u} + \delta\overrightarrow{v}.$$

Soit M de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$ et (x', y') dans le repère $\mathscr{R}'$ alors :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + x'[\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}] + y'[\gamma\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}]$$

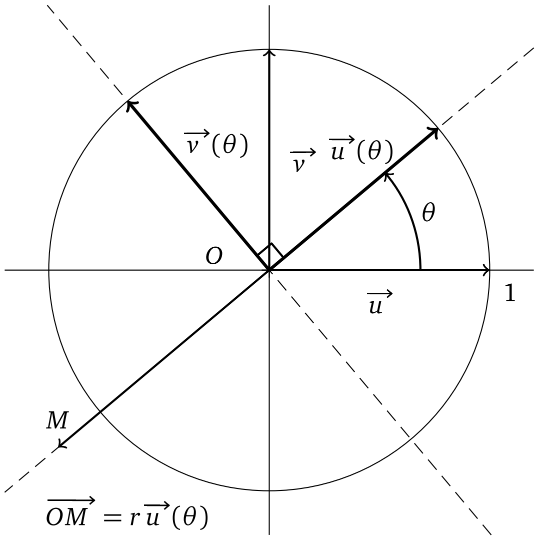
par conséquent on obtient les formules du changement de repère :

$$\begin{cases} x &= a + \alpha x' + \gamma y' \\ y &= b + \beta x' + \delta y' \end{cases}$$

2) Coordonnées polaires

Soit $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormal direct, pour tout réel θ, on note $\overrightarrow{u}(\theta)$ le vecteur d'affixe $e^{i\theta}$ et $\overrightarrow{v}(\theta)$ le vecteur d'affixe $ie^{i\theta}$, c'est à dire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}(\theta) &= \cos(\theta)\overrightarrow{u} + \sin(\theta)\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{v}(\theta) &= -\sin(\theta)\overrightarrow{u} + \cos(\theta)\overrightarrow{v} \end{cases}$$



Le repère $\mathscr{R}(\theta) = (O, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ est un repère orthonormal direct, il se déduit de $\mathscr{R}$ par la rotation de centre O et d'angle θ, c'est le **repère polaire d'angle** θ. La droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\theta)$ est appelée **axe polaire d'angle** θ.

Soit M un point du plan d'affixe z, on sait qu'il existe des réels r et θ tels que $z = re^{i\theta}$, on en déduit que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}(\theta)$, par définition on dit que (r, θ) est un couple de **coordonnées polaires** du point M. On a $|r| = |z| = OM$ et $\theta = \operatorname{Arg}(z) \pmod{\pi}$ [c'est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ à π près].

- *Les coordonnées polaires sont pas uniques, par exemple pour l'origine on a $r = 0$ et θ quelconque.*
- *Le réel r désigne l'abscisse du point M sur l'axe polaire dans le repère $(O, \overrightarrow{u}(\theta))$, donc r n'est pas forcément positif.*
- *Si (r, θ) sont des coordonnées polaires de M alors les coordonnées cartésiennes sont $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.*

II) Produit scalaire et produit mixte

1) Définitions

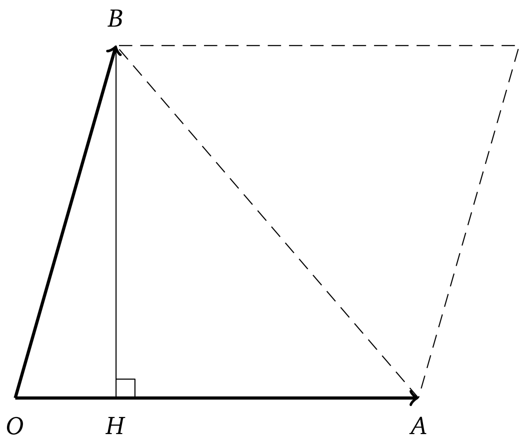
DÉFINITION 5.4

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls, on appelle :
- ***produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*
- ***produit mixte** de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ le réel : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*

Si l'un des deux vecteurs est nul alors par définition, les deux résultats sont nuls.

2) Interprétation géométrique

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls, soient O, A et B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$, soit H le projeté orthogonal de B sur (OA). En orientant (OA) dans le sens du vecteur $\overrightarrow{OA}$, on a $\|\overrightarrow{u}\| = \overline{OA}$ et $\|v\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \overline{OH}$, d'où $\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overline{OH} \times \overline{OA}}$.



Supposons les deux vecteurs non colinéaires, en orientant la droite (HB) dans le sens directement orthogonal à (OA), on a $\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v}) = \overline{HB}$ et par conséquent : $\boxed{[\vec{u},\vec{v}] = \overline{OA}\times\overline{HB}}$.

*On remarque que $[\vec{u},\vec{v}]$ est le double de l'aire (algébrique) du triangle (OAB) et par conséquent c'est l'aire algèbrique du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, cette aire est positive lorsque les deux vecteurs sont **dans le sens direct**.*

3) Propriétés

THÉORÈME 5.2 (Applications)

Le produit scalaire est nul ssi les vecteurs sont orthogonaux.
Le produit mixte est nul ssi les vecteurs sont colinéaires.

Preuve: Cela découle de la définition. □

Exemples:
- Trois points A, B et C sont alignés ssi $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}] = 0$.
- Soient A, B, C, H quatre points du plan avec $A \neq B$, H est le projeté orthogonal de C sur (AB) ssi

$$\begin{cases} [\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}] & = 0 \\ \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} & = 0 \end{cases}$$

THÉORÈME 5.3 (Symétrie)

*Le produit scalaire est **symétrique** : $\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}$.*
*Le produit mixte est **antisymétrique** : $[\vec{v},\vec{u}] = -[\vec{u},\vec{v}]$.*

Preuve: Cela découle de la définition. □

THÉORÈME 5.4 (Expression dans une base orthonormale directe)

Soit $(\vec{a},\vec{b})$ une base orthonormale directe du plan, soit $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' \text{ et } [\vec{u},\vec{v}] = xy' - x'y.$$

Preuve: Supposons les vecteurs non nuls, soit $z = x + iy$ l'affixe de $\vec{u}$ et $z' = x' + iy'$ l'affixe de $\vec{v}$, alors on peut écrire sous forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, on a alors $\|\vec{u}\| = r$, $\|\vec{v}\| = r'$. On a $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(\operatorname{Arg}(\frac{z'}{z})) = \cos(\theta'-\theta) = \cos(\theta')\cos(\theta) + \sin(\theta')\sin(\theta) = \frac{x'}{r'}\frac{x}{r} + \frac{y'}{r'}\frac{y}{r}$ ce qui donne bien $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$. D'autre part $\sin(\vec{u},\vec{v}) = \sin(\theta'-\theta) = \sin(\theta')\cos(\theta) - \cos(\theta')\sin(\theta) = \frac{y'}{r'}\frac{x}{r} - \frac{x'}{r'}\frac{y}{r}$ ce qui donne $[\vec{u},\vec{v}] = xy' - x'y$. Si l'un des vecteurs est nul, le résultat est évident. □

Si z est l'affixe de $\vec{u}$ et z' celui de $\vec{v}$ dans une base orthonormale directe alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \operatorname{Re}[\bar{z}z']$ et $[\vec{u},\vec{v}] = \operatorname{Im}(\bar{z}z')$.

THÉORÈME 5.5 (Bilinéarité)

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ des vecteurs du plan et α, β des réels :
- $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2)=\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}_1+\beta\vec{u}\cdot\vec{v}_2$ *[linéarité à droite du produit scalaire] et* $(\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2)\cdot\vec{v})=\alpha\vec{u}_1\cdot\vec{v}+\beta\vec{u}_2\cdot\vec{v}$ *[linéarité à gauche].*
- $[\vec{u},\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2]=\alpha[\vec{u},\vec{v}_1]+\beta[\vec{u},\vec{v}_2]$ *[linéarité à droite du déterminant] et* $[\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2,\vec{v}]=\alpha[\vec{u}_1,\vec{v}]+\beta[\vec{u}_2,\vec{v}]$ *[linéarité à gauche].*

Preuve: La propriété de symétrie et d'antisymétrie fait qu'il suffit de vérifier la linéarité d'un seul côté. Il suffit de se placer dans une base orthonormale directe et d'appliquer le théorème précédent. □

THÉORÈME 5.6 (Coordonnées dans une base orthonormale)

Soit $\mathfrak{B}=(\vec{u},\vec{v})$ une base orthonormale (directe ou indirecte) et soit $\vec{w}$ un vecteur du plan, les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $\mathfrak{B}$ sont :

$$(\vec{w}\cdot\vec{u},\vec{w}\cdot\vec{v}).$$

Preuve: On a $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$, d'où $\vec{w}\cdot\vec{u}=(x\vec{u}+y\vec{v})\cdot\vec{u}=x\vec{u}\cdot\vec{u}+y\vec{v}\cdot\vec{v}$ or $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2=1$ et $\vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, il reste alors $x=\vec{w}\cdot\vec{u}$. De même on montre que $y=\vec{w}\cdot\vec{v}$. □

Remarques:
- $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$ [dans une base orthonormale].
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$. On en déduit en particulier :
  a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ [identité de polarisation],
  b) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$ [théorème de la médiane],
  c) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ [théorème de *Pythagore*].

DÉFINITION 5.5 (notion de déterminant)

*Dans une base $\mathfrak{B}=(\vec{u},\vec{v})$ **quelconque** le déterminant entre deux vecteurs $\vec{w}(x,y)$ et $\vec{w}'(x',y')$ est la quantité $\det_{\mathfrak{B}}(\vec{w},\vec{w}')=xy'-x'y$, notée $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.*

Si la base $\mathfrak{B}$ est orthonormale directe, ce déterminant correspond au produit mixte : $\|\vec{w}\|.\|\vec{w}'\|\sin(\vec{w},\vec{w}')$, mais si la base $\mathfrak{B}$ est quelconque ce n'est plus le cas. Cependant on la relation suivante :

THÉORÈME 5.7

$\det_{\mathfrak{B}}(\vec{w},\vec{w}')=\dfrac{[\vec{w},\vec{w}']}{[\vec{u},\vec{v}]}$. *Le déterminant apparaît donc comme un rapport d'aires (algébriques) de deux parallèlogrammes.*

Preuve: Il suffit de développer le produit mixte $[\vec{w},\vec{w}']$ par bilinéarité dans la base $\mathfrak{B}$, cela donne $(xy'-x'y)[\vec{u},\vec{v}]$. □

*On en déduit que $\det_{\mathfrak{B}}$ a les **propriétés du produit mixte** : il est bilinéaire, antisymétrique, et caractérise la colinéarité lorsqu'il est nul.*

III) Droites et cercles

1) Équations paramétriques

Soit $\mathscr{R}=(O,\vec{u},\vec{v})$ un repère.

Pour une droite : Soit $A(x_A,y_A)\in\mathscr{P}$ et soit $\vec{w}(a,b)$ un vecteur non nul, par définition la droite passant par A et dirigée par $\vec{w}$ (ou de vecteur directeur $\vec{w}$) est :

$$\mathscr{D}=\{M\in\mathscr{P}\ /\ \overrightarrow{AM}\text{ est colinéaire à }\vec{w}\}.$$

Par conséquent $M(x,y) \in \mathscr{D} \iff \boxed{\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= x_A + ta \\ y &= y_A + tb \end{cases}}$, ce système est appelé **représentation paramétrique** de $\mathscr{D}$.

Cette représentation n'est pas unique, on peut prendre un autre point ou un autre vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Si B est un autre point de $\mathscr{D}$ distinct de A, alors on peut prendre $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$.

Pour un cercle : On suppose le repère **orthonormal**, soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $I(a,b)$ et de rayon $R > 0$, alors par définition on a :

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{P} \ / \ IM = R\}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathscr{C} &\iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, (x-a) + i(y-b) = Re^{it} \\ &\iff \boxed{\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= a + R\cos(t) \\ y &= b + R\sin(t) \end{cases}} \end{aligned}$$

Ce système est appelé **représentation paramétrique** de $\mathscr{C}$. Celle-ci n'est pas unique, en posant $u = \tan(\frac{t}{2})$ pour $t \neq \pi \pmod{2\pi}$, on a $\sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}$ et $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, par conséquent le système

$$\begin{cases} x &= a + R\frac{1-u^2}{1+u^2} \\ y &= b + R\frac{2u}{1+u^2} \end{cases}$$

avec $u \in \mathbb{R}$, est une représentation paramétrique de $\mathscr{C}$ privé du point $A(a-R,b)$.

2) Quelques propriétés du cercle

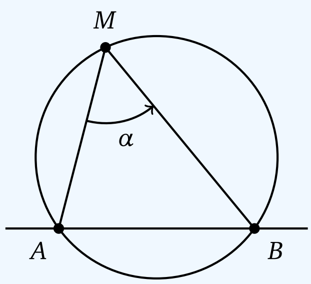
Le repère est orthonormal, $M(x,y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(a,b)$ et de rayon $R > 0$ ssi $IM = R$ c'est à dire : $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$. C'est l'équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

THÉORÈME 5.8

Soient A, B deux points distincts du plan et α un réel, alors l'ensemble :

$$E = \{M \in \mathscr{P} \ / \ (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \pmod{\pi}\}$$

est :
- *la droite (AB) privée de A et B lorsque $\alpha = 0 \pmod{\pi}$.*
- *un cercle passant par A et B et privé de A et B lorsque $\alpha \neq 0 \mod \pi$.*



Preuve: On choisit le repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$, dans ce repère on a $A(0)$, $B(b)$ et $M(z)$ avec $b \in \mathbb{R}_+^*$, alors l'équation est équivalente à $\mathrm{Im}[\frac{(z-b)e^{-i\alpha}}{z}] = 0$, c'est à dire $\mathrm{Im}[(z-b)\bar{z}e^{-i\alpha}] = 0$ ce qui donne $-\sin(\alpha)|z|^2 + bx\sin(\alpha) + by\cos(\alpha) = 0$ avec $z = x + iy$.
- Si $\alpha = 0 \pmod{\pi}$ alors on obtient $y = 0$ qui l'équation de la droite (AB).
- Sinon on obtient $|z|^2 - bx - by\operatorname{cotan}(\alpha) = 0$ c'est à dire : $(x - \frac{b}{2})^2 + (y - \frac{b}{2}\operatorname{cotan}(\alpha))^2 = \frac{b^2}{4\sin^2(\alpha)}$. C'est l'équation d'un cercle qui passe par A et B (et de rayon $R = \frac{b}{2|\sin(\alpha)|}$).

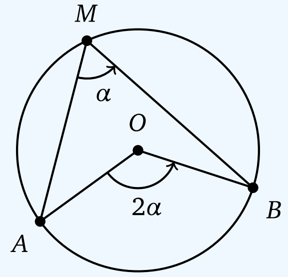
□

Conséquence : quatre points distincts A, B, C, D sont alignés ou cocycliques ssi :

$$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi}.$$

THÉORÈME 5.9 (De l'angle inscrit)

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O passant par deux points distincts A et B, alors pour tout point M du plan, M appartient à $\mathscr{C}\setminus\{A,B\}$ ssi $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \pmod{\pi}$.



Preuve: On prend le repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O,\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$. Dans ce repère on a $O(0)$, $A(R)$, $B(Re^{i\theta})$ et $M(Re^{i\alpha})$ avec $\theta = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi}$, $\frac{b-z}{a-z} = e^{i\theta/2}\frac{\sin(\frac{\alpha-\theta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$, ce qui prouve que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\alpha}{2} \pmod{\pi}$.
Réciproquement, si M vérifie la relation : on considère un point C du cercle distinct de A et B, on a alors $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \pmod{\pi}$ et donc M est sur le cercle $\mathscr{C}$. □

Application : soient A, B deux points distincts, I le milieu de $[A;B]$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et passant par A et B, alors : $\mathscr{C}\setminus\{A,B\} = \{M\in\mathscr{P} \ / \ (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\}$.

3) Équation(s) cartésienne(s) d'une droite

Même si le repère est quelconque, on peut utiliser la notion de déterminant.

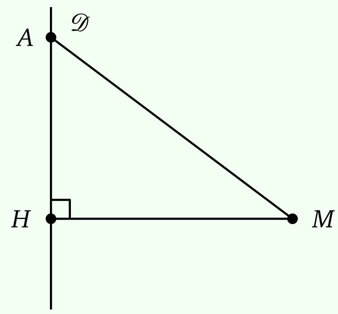
$M(x,y)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A,y_A)$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{w}(-b,a)$ ssi $\det(\overrightarrow{AM},\vec{w}) = 0$ c'est à dire $\boxed{a(x-x_A)+b(y-y_A)=0}$. C'est une équation cartésienne de $\mathscr{D}$, cette équation peut se mettre sous la forme $ax+by=c$.

Réciproquement si $(a,b)\neq(0,0)$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $ax+by=c$ est une droite. Un vecteur directeur est $\vec{w}(-b,a)$ et un point de cette droite est $A(\frac{c}{a},0)$ si $a\neq 0$ ou $A(0,\frac{c}{b})$ sinon.

Lorsque le repère est orthonormal, une droite $\mathscr{D}$ peut être définie par un point $A(x_A,y_A)$ et un **vecteur normal** $\vec{n}(a,b)$ non nul car dans ce cas : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \iff a(x-x_A)+b(y-y_A) = 0 \iff M(x,y)\in\mathscr{D}$. Lorsque le vecteur $\vec{n}$ est **unitaire** l'équation est dite **normale**, c'est une équation de la forme $\boxed{\cos(\theta)x+\sin(\theta)y = p}$.

DÉFINITION 5.6 (Distance d'un point à une droite)

*Soit $\mathscr{D}$ une droite et M un point du plan ; soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$, alors pour tout point A de $\mathscr{D}$ on a $AM = \sqrt{AH^2+HM^2}$, cette quantité est minimale lorsque $A=H$ et le minimum est $AM = MH$. Ce nombre est appelé **distance de** M **à** $\mathscr{D}$ et noté $\mathrm{d}(M,\mathscr{D}) = MH$.*



Calcul de $\mathrm{d}(M,\mathscr{D})$: Soit $ax+by=c$ une équation de $\mathscr{D}$ dans un repère orthonormal, on a $\overrightarrow{HM} = k\vec{n}$ en posant $\vec{n}(a,b)$ [vecteur normal à $\mathscr{D}$], soit $A(x_A,y_A)$ un point de $\mathscr{D}$, $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AM}$ donc $\overrightarrow{HA} = k\vec{n}-\overrightarrow{AM}$ par conséquent $(k\vec{n}-\overrightarrow{AM})\cdot\vec{n} = 0$ ce qui donne $k\|\vec{n}\|^2 = \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = a(x-x_A)+b(y-y_A) = ax+by-c$, finalement :

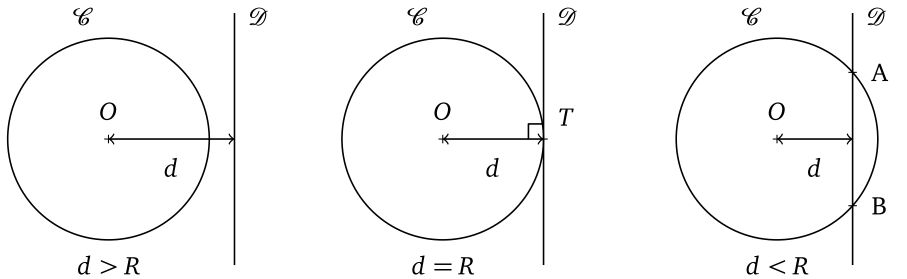
$$\mathrm{d}(M,\mathscr{D}) = MH = |k|\cdot\|\vec{n}\| = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax+by-c|}{\|\vec{n}\|} = \boxed{\frac{|ax+by-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

4) Intersections

Intersection entre une droite et un cercle :

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O de rayon $R > 0$ et soit $\mathscr{D}$ une droite, dans le repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire directeur de $\mathscr{D}$, l'équation de $\mathscr{C}$ et $x^2 + y^2 = R^2$ et une équation de $\mathscr{D}$ est de la forme $y = k$ avec $|k| = \mathrm{d}(O, \mathscr{D})$, il est alors facile d'en déduire :

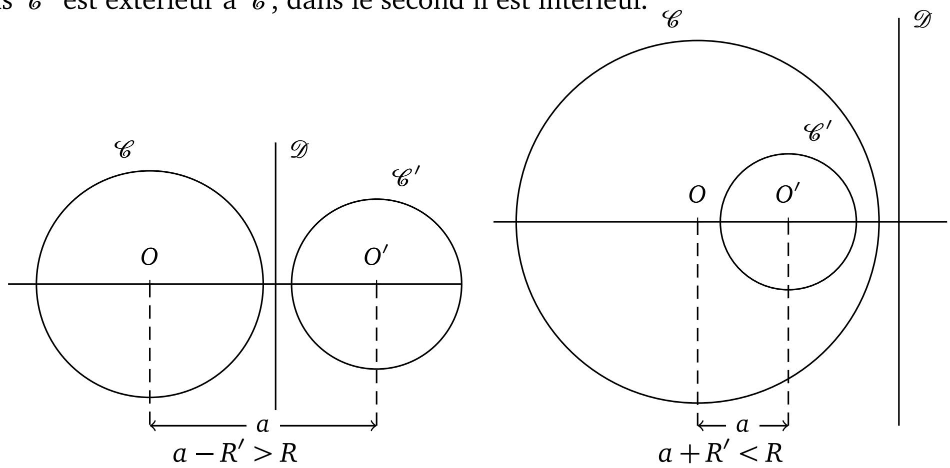
- Si $\mathrm{d}(O, \mathscr{D}) > R$: alors $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \emptyset$.
- Si $\mathrm{d}(O, \mathscr{D}) = R$: alors $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{T\}$, la droite $\mathscr{D}$ est dite **tangente au cercle** ; (OT) et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires.
- Si $\mathrm{d}(O, \mathscr{D}) < R$: alors $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{A, B\}$ avec $A \neq B$.



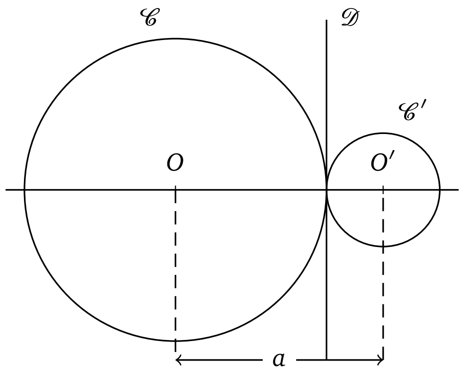
Dans un repère orthonormal, la tangente au cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(a, b)$ de rayon $R > 0$ au point $T(x_0, y_0)$ est la droite définie par $\overrightarrow{IT} \cdot \overrightarrow{TM} = 0$ c'est à dire la droite d'équation : $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$.

Intersection entre deux cercles : Soit $\mathscr{C}(O, R)$ et $\mathscr{C}', (O', R')$ deux cercles avec $O' \neq O$ et $R' \leqslant R$, on prend le repère $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{OO'}}{\|\overrightarrow{OO'}\|}$, dans ce repère on a $O'(a, 0)$ avec $a > 0$ et on doit résoudre le système $\begin{cases} x^2 + y^2 & = R^2 \\ (x-a)^2 + y^2 & = R'^2 \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} x^2 + y^2 & = R^2 \\ x & = \frac{R^2 - R'^2 + a^2}{2a} \end{cases}$, on est ramené à un cercle et une droite $\mathscr{D}$ avec $\mathrm{d}(O, \mathscr{D}) = \frac{R^2 - R'^2 + a^2}{2a} = d$, d'où la discussion :

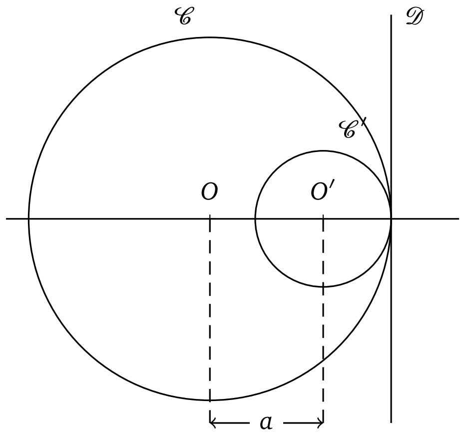
- Si $d > R$: c'est à dire $(a - R)^2 > R'^2$ ou encore : $\boxed{a - R' > R \text{ ou } a + R' < R}$ alors $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}' = \emptyset$. Dans le premier cas $\mathscr{C}'$ est extérieur à $\mathscr{C}$, dans le second il est intérieur.



- Si $d = R$: c'est à dire $\boxed{a - R' = R \text{ ou } a + R' = R}$ alors $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$ est un singleton, la droite $\mathscr{D}$ est tangente aux cercles, ceux-ci sont dits **tangents**.

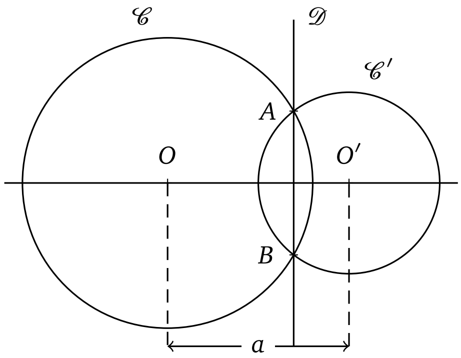


$a - R' = R$



$a + R' = R$

- Si $d < R$: c'est à dire $\boxed{R - R' < a < R + R'}$ alors $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}' = \{A, B\}$ avec $A \neq B$.



$a - R' < R$ et $a + R' > R$

5) Équations polaires

Pour une droite : Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan et soit θ_0 une mesure de l'angle que fait $\mathscr{D}$ avec l'axe (Ox) [θ_0 est défini à π près].

- Si $\mathscr{D}$ passe par l'origine alors un point $M(r, \theta)$ est sur $\mathscr{D}$ ssi $\boxed{\theta = \theta_0 \pmod{\pi}}$, on dit que $\theta = \theta_0$ est **une équation polaire** de $\mathscr{D}$.
- Si $\mathscr{D}$ ne passe pas par l'origine : dans le repère polaire d'angle θ_0, $\mathscr{D}$ a pour équation $y' = K$ (une constante non nulle). Un point M de coordonnées polaires (r, θ) dans le repère d'origine a pour coordonnées polaires dans le repère polaire : $(r, \theta - \theta_0)$ par conséquent son ordonnée dans le repère polaire est $y' = r\sin(\theta - \theta_0)$ donc M est sur la droite $\mathscr{D}$ ssi $r = \frac{K}{\sin(\theta-\theta_0)}$, cette équation peut se mettre sous la forme $\boxed{r = \dfrac{1}{a\sin(\theta) + b\cos(\theta)}}$, on dit que c'est une **équation polaire** de $\mathscr{D}$. (Voir Fig 1)

Pour un cercle passant par O : Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre I de rayon $R > 0$ et passant par O, I admet comme coordonnées polaires (R, θ_0). Soit M un point du plan d'affixe $z = re^{i\theta}$ et différent de O, alors M est sur le cercle ssi $IM = R$, ou encore $|z - Re^{i\theta_0}|^2 = R^2$ ce qui donne $|r - Re^{i(\theta_0-\theta)}|^2 = R^2$ et donc $r^2 + R^2 - 2rR\cos(\theta - \theta_0) = R^2$, d'où $\boxed{r = 2R\cos(\theta - \theta_0)}$ [car $r \neq 0$] c'est une **équation polaire** du cercle $\mathscr{C}$. (Voir Fig 2)

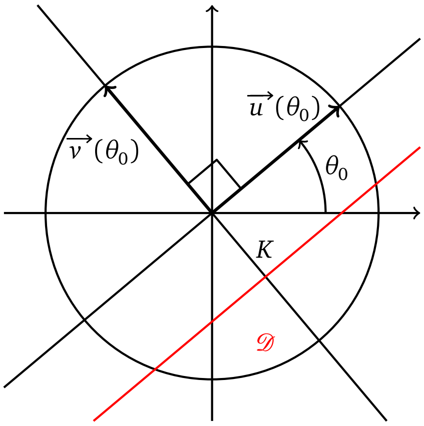


FIG 1 : Droite $\mathscr{D}$ ne passant pas par l'origine

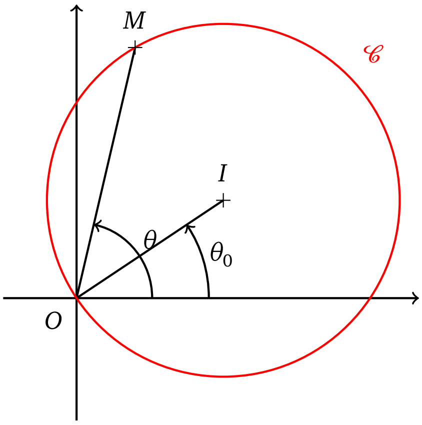


FIG 2 : Cercle $\mathscr{C}$ passant par l'origine

IV) Compléments : barycentres

1) Définition

Soient $A_1,\dots,A_n$ des points du plan et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des réels. On dit que $S=((A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n))$ est un système de points pondérés. La somme des coefficients, $p(S)=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, est le poids du système.

THÉORÈME 5.10

Lorsque $\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ est non nul, la fonction $f:\mathscr{P}\to P$ définie par $f(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ est bijective (sinon elle est constante).

Preuve: Soit O un point du plan, on découpe chaque vecteur avec O, $f(M)=(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)\overrightarrow{MO}+\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur $f(O)$. Le résultat en découle. □

DÉFINITION 5.7

Lorsque $\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ est non nul il existe un unique point G tel que $f(G)=\vec{0}$, ce point est appelé barycentre du système pondéré $((A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n))$ et noté $G=\operatorname{Bar}\begin{pmatrix}A_1 & \cdots & A_n\\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$. Lorsque tous les coefficients sont égaux entre eux, on dit que G est l'isobarycentre.

2) Propriétés

- Si $G=\operatorname{Bar}\begin{pmatrix}A_1 & \cdots & A_n\\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$ alors $\forall\lambda\in\mathbb{R}^*$, $G=\operatorname{Bar}\begin{pmatrix}A_1 & \cdots & A_n\\ \lambda\alpha_1 & \cdots & \lambda\alpha_n\end{pmatrix}$. En prenant $\lambda=\frac{1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$, on peut imposer que le poids du système vaut 1.
- Soit $S=((A_1,\alpha_1),\cdots,(A_n,\alpha_n))$ un système de poids $p(S)=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ non nul, et soit $G\in\mathscr{P}$, alors :
$$G=\operatorname{Bar}(S)\iff\exists\, M\in\mathscr{P},\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)\overrightarrow{MG}$$
Si c'est le cas, alors l'égalité de droite a lieu **pour tout** point $M\in\mathscr{P}$. En particulier, si $\mathscr{R}=(O,\mathscr{B})$ est un repère de $\mathscr{P}$, en prenant $M=O$, on obtient que $x_G=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{A_i}}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$ et $y_G=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_{A_i}}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$.
- L'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est exactement la droite (AB).

V) Exercices

★Exercice 5.1

Soit $\mathscr{P}$ un plan et soit $\mathfrak{D}$ une droite de $\mathscr{P}$, soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathfrak{D}$, soient $A, B \in \mathfrak{D}$, on appelle mesure algébrique $\overline{AB}$ l'abscisse de B dans le repère $(A, \overrightarrow{u})$ de $\mathfrak{D}$. Montrer que si $A, B, C, D \in \mathfrak{D}$ avec $C \neq D$, alors le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ est indépendant du vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ choisi. Montrer l'équivalence : $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD} \iff \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \lambda$.

★Exercice 5.2

Théorème de *Thalès*. Soient $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ trois droites de $\mathscr{P}$ strictement parallèles, soient $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ deux droites de $\mathscr{P}$ qui coupent $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ respectivement en A, B, C pour $\mathfrak{D}$ et A', B', C' pour $\mathfrak{D}'$. Montrer que : $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$.

★Exercice 5.3

Théorème de *Pappus*. Soit $\mathscr{P}$ un plan affine, soient $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ deux droites de $\mathscr{P}$, soient $A, B, C \in \mathfrak{D}$ et $A', B', C' \in \mathfrak{D}'$, les six points sont supposés distincts. On suppose en outre que les droites (AB') et $(A'B)$ sont parallèles, et que les droites (AC') et $(A'C)$ sont parallèles. Montrer que les droites (BC') et $(B'C)$ sont parallèles.

★Exercice 5.4

Théorème de *Ménélaüs* Soit $\mathscr{P}$ un plan affine, soient $A, B, C \in E$ non alignés, soient $A' \in (BC) \setminus \{B, C\}$, $B' \in (AC) \setminus \{A, C\}$ et $C' \in (AB) \setminus \{A, B\}$. Montrer que les trois points A', B', C' sont alignés si et seulement si : $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$.

★Exercice 5.5

Théorème de *Céva* Soit $\mathscr{P}$ un plan affine, soient $A, B, C \in E$ non alignés, soient $A' \in (BC) \setminus \{B, C\}$, $B' \in (AC) \setminus \{A, C\}$ et $C' \in (AB) \setminus \{A, B\}$. Montrer que les trois droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes ou deux à deux parallèles ssi : $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

★Exercice 5.6

On désigne par E un plan rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \imath, \jmath)$. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul et $A, B \in$ E deux points distincts. On demande de déterminer précisément les ensembles suivants :

a) Ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

b) Ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

c) Ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ où k est une constante.

d) Ensemble des points M vérifiant $MA = MB$.

e) Ensemble des points M vérifiant $MA = k.MB$ où $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

★Exercice 5.7

Soient A, B, C trois points non alignés, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $B' = \mathrm{Mil}[AC]$ et $C' = \mathrm{Mil}[AB]$, en choisissant un bon repère, montrer que :

$$(BB') \perp (CC') \iff b^2 + c^2 = 5a^2.$$

a) En choisissant un bon repère.

b) En exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ à l'aide de normes, $\frac{1}{4}\left[\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right]$, ou $\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]$, ou $\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right]$.

★Exercice 5.8

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine et soit $\mathfrak{R}$ un repère de $\mathscr{P}$, établir une équation de la droite $\mathfrak{D}$ dans les cas suivants :

a) i) $\mathfrak{D} = (AB)$ avec $A(1,2)$ et $B(-1,3)$.
   ii) Passant par $A(1,2)$ et parallèle à la droite d'équation $x - y + 3 = 0$.
   iii) Passant par $A(1,2)$ et parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 1$.

b) $\mathscr{R}$ est supposé orthonormé direct :
   i) Passant par $A(1,2)$ et orthogonale à $\overrightarrow{v}(2,1)$.
   ii) Passant par $A(2,-3)$ et orthogonale à $\mathfrak{D}'$ d'équation $y = 2x + 1$.
   iii) Bissectrices des droites $\mathfrak{D} : 3x + 2y - 1 = 0$ et $\mathfrak{D}' : 2x - y + 2 = 0$.
   iv) Passant par $A(2,-1)$ et telle que $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') = \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$, avec $\mathfrak{D}' : 3x + 2y - 1 = 0$.

★Exercice 5.9

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien. Soient $A,\ B,\ C$ trois points non alignés de $\mathscr{P}$, soient I, J et K les pieds des trois hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C du triangle (ABC), on note I' le symétrique (orthogonal) de I par rapport au côté (AC) du triangle. On veut montrer que I', J et K sont alignés. Soit $A' = \text{Mil}[B;C]$, $B' = \text{Mil}[A;C]$ et $C' = \text{Mil}[A;B]$.

a) Montrer que $A,\ B,\ I,\ J$ sont sur un même cercle de centre C'.
b) Montrer que $K,\ B,\ C,\ J$ sont sur un même cercle de centre A'.
c) Montrer que $K,\ I,\ C,\ I'$ sont sur un même cercle de centre B'.
d) En déduire $(\overrightarrow{KJ}, \overrightarrow{KI'}) = (\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{II'}) \pmod{\pi}$.
e) Montrer que $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) \pmod{\pi}$. Calculer $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{II'})$.
f) En déduire que I', J et K sont alignés.
g) Application : une boule de billard venant de I, arrive sur le point J, en supposant que les lois de la réflexion s'appliquent parfaitement, quelle est la trajectoire de la boule ?

★Exercice 5.10

Soit ABC un triangle équilatéral et M un point à l'intérieur de ABC. Montrer que la somme des distances de M aux trois cotés de ABC ne dépend pas de M.

★Exercice 5.11

Soient A, B et C trois points non alignés, on pose $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, puis par permutation circulaire, on définit β et γ.

a) Déterminer l'affixe de O', centre du cercle circonscrit au triangle (A,B,C) et déterminer le rayon R.
b) Démontrer la relation : $\sin(2\alpha)\overrightarrow{O'A} + \sin(2\beta)\overrightarrow{O'B} + \sin(2\gamma)\overrightarrow{O'C} = \overrightarrow{0}$.
c) Montrer que le symétrique de l'orthocentre du triangle par rapport aux côtés, est sur le cercle circonscrit.

★Exercice 5.12

Soient A, B, C trois points du plan non alignés. Soit M un point du plan, on note M_1 son projeté orthogonal sur (BC), M_2 son projeté sur (AC) et M_3 son projeté sur (AB).

a) Montrer que M, C, M_1, M_2 sont cocycliques ainsi que M, B, M_1, M_3.
b) En déduire que $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}) \pmod{\pi}$.
c) Montrer que M est sur le cercle passant par A, B et C ssi les trois points M_1, M_2 et M_3 sont alignés.