Suites

1 Convergence

Exercice 1

Montrer que toute suite convergente est bornée.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000506]

Exercice 2

Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000519]

Exercice 3

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000507]

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :
• Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000505]

Exercice 5

Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos\frac{2n\pi}{q}$.

1. Montrer que $u_{n+q} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000524]

Exercice 6

Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que pour tout $n > 0$: $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.

5. Conclusion ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000520]

Exercice 7

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n < 1/2$ pour tout $n \geq 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers α.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000539]

2 Limites

Exercice 8

Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geq 3$,

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000563]

Exercice 9

Déterminer les limites lorsque n tend vers l'infini des suites ci-dessous ; pour chacune, essayer de préciser en quelques mots la méthode employée.

1. $1\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \ldots\ ;\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\ ;\ \ldots$
2. $2/1\,;\,4/3\,;\,6/5\,;\,\ldots\,;\,2n/(2n-1)\,;\,\ldots$
3. $0{,}23\ ;\ 0{,}233\ ;\ \ldots\ ;\ 0{,}233\cdots3\ ;\ \ldots$
4. $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}$
5. $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
6. $\left[\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}\right]$
7. $\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
8. $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
9. $\left(1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n\right)$ puis $\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2\sqrt{2}}\ ;\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\ ;\ \ldots$

10. $\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$
11. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
12. $\frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$
13. Démontrer la formule $1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; en déduire $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [000568]

Exercice 10

On considère les deux suites :

$$u_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\ ;\ n\in\mathbb{N},$$

$$v_n=u_n+\frac{1}{n!}\ ;\ n\in\mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000570]

Exercice 11

Soit $a>0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0>0$ et par la relation

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que
$$u_{n+1}{}^2-a=\frac{(u_n{}^2-a)^2}{4u_n{}^2}.$$
2. Montrer que si $n\geq 1$ alors $u_n\geq\sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}{}^2-a=(u_{n+1}-\sqrt{a})(u_{n+1}+\sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1}-\sqrt{a}$ en fonction de $u_n-\sqrt{a}$.
5. Si $u_1-\sqrt{a}\leq k$ et pour $n\geq 1$ montrer que
$$u_n-\sqrt{a}\leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$
6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0=3$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000569]

Exercice 12

Soient a et b deux réels, $a<b$. On considère la fonction $f:[a,b]\longrightarrow[a,b]$ supposée continue et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0\in[a,b]\ \text{ et pour tout }\ n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=f(u_n).$$

1. On suppose ici que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x)=x$.
2. *Application.* Calculer la limite de la suite définie par :
$$u_0=4\ \text{ et pour tout }\ n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=\frac{4u_n+5}{u_n+3}.$$

3. On suppose maintenant que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.
4. *Application.* Soit
$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et pour tout} \quad n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1-u_n)^2.$$
Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000571]

Exercice 13

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geqslant a > 0$) :
$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \qquad \text{et} \qquad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$
3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que $u_n \leqslant v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000572]

Exercice 14

Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution, notée a_n, dans $[0,1]$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000574]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Écrire la définition de la convergence d'une suite (u_n) avec les "ε". Comme on a une proposition qui est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, c'est en particulier vrai pour $\varepsilon = 1$. Cela nous donne un "N". Ensuite séparez la suite en deux : regardez les $n < N$ (il n'y a qu'un nombre fini de termes) et les $n \geqslant N$ (pour lequel on utilise notre $\varepsilon = 1$).

Indication pour l'exercice 2 ▲

Écrire la convergence de la suite et fixer $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Une suite est *stationnaire* si, à partir d'un certain rang, elle est constante.

Indication pour l'exercice 3 ▲

On prendra garde à ne pas parler de limite d'une suite sans savoir au préalable qu'elle converge !
Vous pouvez utiliser le résultat du cours suivant : Soit (u_n) une suite convergeant vers la limite ℓ alors toute sous-suite (v_n) de (u_n) a pour limite ℓ.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Dans l'ordre c'est vrai, faux et vrai. Lorsque c'est faux chercher un contre-exemple, lorsque c'est vrai il faut le prouver.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Pour la deuxième question, raisonner par l'absurde et trouver deux sous-suites ayant des limites distinctes.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. En se rappelant que l'intégrale calcule une aire montrer :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. Pour chacune des majorations, il s'agit de faire la somme de l'inégalité précédente et de s'apercevoir que d'un coté on calcule H_n et de l'autre les termes s'éliminent presque tous deux à deux.
3. La limite est $+\infty$.
4. Calculer $u_{n+1} - u_n$.
5. C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Pour la première question : attention on ne demande pas de calculer α ! L'existence vient du théorème des valeurs intermédiaires. L'unicité vient du fait que la fonction est strictement croissante.
Pour la dernière question : il faut d'une part montrer que (x_n) converge et on note ℓ sa limite et d'autre part il faut montrer que $\ell = \alpha$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Remarquer que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. Puis simplifier l'écriture de u_n.

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
2. Montrer que (u_n) est majorée et (v_n) minorée. Montrer que ces suites ont la même limite.
3. Raisonner par l'absurde : si la limite $\ell = \frac{p}{q}$ alors multiplier l'inégalité $u_q \leq \frac{p}{q} \leq v_q$ par $q!$ et raisonner avec des entiers.

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. C'est un calcul de réduction au même dénominateur.
2. Pour montrer la décroisance, montrer $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.
3. Montrer d'abord que la suite converge, montrer ensuite que la limite est $\sqrt{a}$.
4. Penser à écrire $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$.
5. Raisonner par récurrence.
6. Pour $u_0 = 3$ on a $u_1 = 3,166\ldots$, donc $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant u_1$ et on peut prendre $k = 0.17$ par exemple et $n = 4$ suffit pour la précision demandée.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Pour la première question et la monotonie il faut raisonner par récurrence. Pour la troisième question, remarquer que si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante et appliquer la première question.

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. Regarder ce que donne l'inégalité en élevant au carré de chaque coté.
2. Petites manipulations des inégalités.
3. (a) Utiliser 1.
   (b) Utiliser 2.
   (c) Une suite croissante et majorée converge ; une suite décroissante et minorée aussi.

Indication pour l'exercice 14 ▲

On notera $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \; - 1$.

1. C'est une étude de la fonction f_n.
2. On sait que $f_n(a_n) = 0$. Montrer par un calcul que $f_n(a_{n-1}) > 0$, en déduire la décroissance de (a_n). En calculant $f_n(\frac{1}{2})$ montrer que la suite (a_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Une fois établie la convergence de (a_n) vers une limite ℓ, composer l'inégalité $\frac{1}{2} \leqslant \ell < a_n$ par f_n. Conclure.

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Choisissons $\varepsilon = 1$, nous obtenons le N correspondant. Alors pour $n \geqslant N$, nous avons $|u_n - \ell| < 1$; autrement dit $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. Notons $M = \max_{n=0,\dots,N-1}\{u_n\}$ et puis $M' = \max(M, \ell+1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq M'$. De même en posant $m = \min_{n=0,\dots,N-1}\{u_n\}$ et $m' = \min(m, \ell-1)$ nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m'$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit (u_n) une suite d'entiers qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Dans l'intervalle $I =]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$ de longueur 1, il existe au plus un élément de $\mathbb{N}$. Donc $I \cap \mathbb{N}$ est soit vide soit un singleton $\{a\}$.
La convergence de (u_n) s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Fixons $\varepsilon = \frac{1}{2}$, nous obtenons un N correspondant. Et pour $n \geqslant N$, $u_n \in I$. Mais de plus u_n est un entier, donc

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n \in I \cap \mathbb{N}.$$

En conséquent, $I \cap \mathbb{N}$ n'est pas vide (par exemple u_N en est un élément) donc $I \cap \mathbb{N} = \{a\}$. L'implication précédente s'écrit maintenant :

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n = a.$$

Donc la suite (u_n) est stationnaire (au moins) à partir de N. En prime, elle est bien évidemment convergente vers $\ell = a \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Il est facile de se convaincre que (u_n) n'a pas de limite, mais plus délicat d'en donner une démonstration formelle. En effet, dès lors qu'on ne sait pas qu'une suite (u_n) converge, on ne peut pas écrire $\lim u_n$, c'est un nombre qui n'est pas défini. Par exemple l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n + 1/n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

n'a pas de sens. Par contre voilà ce qu'on peut dire : *Comme la suite $1/n$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, la suite u_n est convergente si et seulement si la suite $(-1)^n$ l'est. De plus, dans le cas où elles sont toutes les deux convergentes, elles ont même limite.* Cette affirmation provient tout simplement du théorème suivant
Théorème : Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers deux limites ℓ et ℓ'. Alors la suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$ est convergente (on peut donc parler de sa limite) et $\lim w_n = \ell + \ell'$.
De plus, il n'est pas vrai que toute suite convergente doit forcément être croissante et majorée ou décroissante et minorée. Par exemple, $(-1)^n/n$ est une suite qui converge vers 0 mais qui n'est ni croissante, ni décroissante.

Voici maintenant un exemple de rédaction de l'exercice. On veut montrer que la suite (u_n) n'est pas convergente. Supposons donc par l'absurde qu'elle soit convergente et notons $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. (Cette expression a un sens puisqu'on suppose que u_n converge).
Rappel. Une *sous-suite* de (u_n) (on dit aussi *suite extraite* de (u_n)) est une suite (v_n) de la forme $v_n = u_{\phi(n)}$ où ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Cette fonction ϕ correspond "au choix des indices qu'on veut garder" dans notre sous-suite. Par exemple, si on ne veut garder dans la suite (u_n) que les termes pour lesquels n est un multiple de trois, on pourra poser $\phi(n) = 3n$, c'est à dire $v_n = u_{3n}$.

Considérons maintenant les sous-suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ de (u_n). On a que $v_n = 1 + 1/2n \to 1$ et que $w_n = -1 + 1/(2n+1) \to -1$. Or on a le théorème suivant sur les sous-suites d'une suite convergente :
Théorème : Soit (u_n) une suite convergeant vers la limite ℓ (le théorème est encore vrai si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$). Alors, toute sous-suite (v_n) de (u_n) a pour limite ℓ.
Par conséquent, ici, on a que $\lim v_n = \ell$ et $\lim w_n = \ell$ donc $\ell = 1$ et $\ell = -1$ ce qui est une contradiction. L'hypothèse disant que (u_n) était convergente est donc fausse. Donc (u_n) ne converge pas.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Vrai. Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite (c'est un résultat du cours).
2. Faux. Un contre-exemple est la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_n$ est la suite constante (donc convergente) de valeur 1, et $(u_{2n+1})_n$ est constante de valeur -1. Cependant la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.
3. Vrai. La convergence de la suite $(u_n)_n$ vers ℓ, que nous souhaitons démontrer, s'écrit :
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \text{tel que} \;\; (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$
Fixons $\varepsilon > 0$. Comme, par hypothèse, la suite $(u_{2p})_p$ converge vers ℓ alors il existe N_1 tel
$$2p \geqslant N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| < \varepsilon.$$
Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_p$ il existe N_2 tel que
$$2p+1 \geqslant N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon.$$
Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors
$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. $u_{n+q} = \cos\left(\frac{2(n+q)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right) = u_n$.
2. $u_{nq} = \cos\left(\frac{2nq\pi}{q}\right) = \cos(2n\pi) = 1 = u_0$ et $u_{nq+1} = \cos\left(\frac{2(nq+1)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) = u_1$. Supposons, par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ. Alors la sous-suite $(u_{nq})_n$ converge vers ℓ comme $u_{nq} = u_0 = 1$ pour tout n alors $\ell = 1$. D'autre part la sous-suite $(u_{nq+1})_n$ converge aussi vers ℓ, mais $u_{nq+1} = u_1 = \cos\frac{2\pi}{q}$, donc $\ell = \cos\frac{2\pi}{q}$. Nous obtenons une contradiction car pour $q \geq 2$, nous avons $\cos\frac{2\pi}{q} \neq 1$. Donc la suite (u_n) ne converge pas.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ donc
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$$
(C'est un encadrement de l'aire de l'ensemble des points (x,y) du plan tels que $x \in [n, n+1]$ et $0 \leqslant y \leqslant 1/x$ par l'aire de deux rectangles.) Par calcul de l'intégrale nous obtenons l'inégalité :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. $H_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$, nous majorons chaque terme de cette somme en utilisant l'inégalité $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$ obtenue précédemment : nous obtenons $H_n \leqslant \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-1) - \ln(n-2) + \cdots - \ln(2) + \ln(2) - \ln(1) + 1$. Cette somme est télescopique (la plupart des termes s'éliminent et en plus $\ln(1) = 0$) et donne $H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
L'autre inégalité s'obtient de la façon similaire en utilisant l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
3. Comme $H_n \geqslant \ln(n+1)$ et que $\ln(n+1) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ alors $H_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

4. $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leqslant 0$ d'après la première question. Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Ainsi $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.
   Enfin comme $H_n \geqslant \ln(n+1)$ alors $H_n \geqslant \ln(n)$ et donc $u_n \geqslant 0$.
5. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel γ. Ce réel γ s'appelle *la constante d'Euler* (d'après Leonhard Euler, 1707-1783, mathématicien d'origine suisse). Cette constante vaut environ $0,5772156649\ldots$ mais on ne sait pas si γ est rationnel ou irrationnel.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. La fonction polynomiale $P(x) := x^3 - 3x + 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $P'(x) = 3x^2 - 3$, qui est strictement négative sur $]-1,+1[$. Par conséquent P est strictement décroissante sur $]-1,+1[$. Comme $P(0) = 1 > 0$ et $P(1/2) = -3/8 < 0$ il en résulte grâce au théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un réel unique $\alpha \in]0,1/2[$ tel que $P(\alpha) = 0$.
2. Comme $f(x) - x = (x^3 - 3x + 1)/9$ il en résulte que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans $]0,1/2[$.
3. Comme $f'(x) = (x^2 + 2)/3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 1/9$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que $f(\mathbb{R}^+) = [1/9,+\infty[$. Comme $x_1 = f(x_0) = 1/9 > 0$ alors $x_1 > x_0 = 0$; f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit par récurrence que $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui prouve que la suite (x_n) est croissante.
4. Un calcul simple montre que $f(1/2) < 1/2$. Comme $0 = x_0 < 1/2$ et que f est croissante on en déduit par récurrence que $x_n < 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en effet si $x_n < 1/2$ alors $x_{n+1} = f(x_n) < f(1/2) < 1/2$).
5. D'après les questions précédentes, la suite (x_n) est croissante et majorée, elle converge donc vers un nombre réel $\ell \in]0,1/2]$. De plus comme $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit par continuité de f que $\ell = f(\ell)$. Comme $f(1/2) < 1/2$, On en déduit que $\ell \in]0,1/2[$ et vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$. D'après la question 2, on en déduit que $\ell = \alpha$ et donc (x_n) converge vers α.

Correction de l'exercice 8 ▲

Remarquons d'abord que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1-k^2}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. En écrivant les fractions de u_n sous la cette forme, l'écriture va se simplifier radicalement :

$$u_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2.2}\frac{(3-1)(3+1)}{3.3}\cdots\frac{(k-1)(k+1)}{k.k}\frac{(k)(k+2)}{(k+1).(k+1)}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n.n}$$

Tous les termes des numérateurs se retrouvent au dénominateur (et vice-versa), sauf aux extrémités. D'où :

$$u_n = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

Donc (u_n) tends vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. 0.
2. 1.
3. $7/30$.
4. $1/2$.
5. 1.
6. $-3/2$.
7. 1.
8. 3.

9. 1 ; 2.
10. $3/4$.
11. 0.
12. 0.
13. $1/3$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. La suite (u_n) est strictement croissante, en effet $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. La suite (v_n) est strictement décroissante :
$$v_{n+1}-v_n = u_{n+1}-u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}(\frac{2}{n}-1).$$
Donc à partir de $n \geq 2$, la suite (v_n) est strictement décroissante.
2. Comme $u_n \leq v_n \leq v_2$, alors (u_n) est une suite croissante et majorée. Donc elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. De même $v_n \geq u_n \geq u_0$, donc (v_n) est une suite décroissante et minorée. Donc elle converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$. De plus $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$. Et donc $(v_n - u_n)$ tend vers 0 ce qui prouve que $\ell = \ell'$.
3. Supposons que $\ell \in \mathbb{Q}$, nous écrivons alors $\ell = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Nous obtenons pour $n \geq 2$:
$$u_n \leq \frac{p}{q} \leq v_n.$$
Ecrivons cette égalité pour $n = q$: $u_q \leq \frac{p}{q} \leq v_q$ et multiplions par $q!$: $q!u_q \leq q!\frac{p}{q} \leq q!v_q$. Dans cette double inégalité toutes les termes sont des entiers ! De plus $v_q = u_q + \frac{1}{q!}$ donc :
$$q!u_q \leq q!\frac{p}{q} \leq q!u_q + 1.$$
Donc l'entier $q!\frac{p}{q}$ est égal à l'entier $q!u_q$ ou à $q!u_q + 1 = q!v_q$. Nous obtenons que $\ell = \frac{p}{q}$ est égal à u_q ou à v_q. Supposons par exemple que $\ell = u_q$, comme la suite (u_n) est strictement croissante alors $u_q < u_{q+1} < \cdots < \ell$, ce qui aboutit à une contradiction. Le même raisonnement s'applique en supposant $\ell = v_q$ car la suite (v_n) est strictement décroissante. Pour conclure nous avons montré que ℓ n'est pas un nombre rationnel.

En fait ℓ est le nombre $e = \exp(1)$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1.
$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2+a}{u_n}\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4u_n^2}(u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) \\ &= \frac{1}{4}\frac{(u_n^2-a)^2}{u_n^2} \end{aligned}$$
2. Il est clair que pour $n \geqslant 0$ on a $u_n > 0$. D'après l'égalité précédente pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1}^2 - a \geqslant 0$ et comme u_{n+1} est positif alors $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$.
Soit $n \geqslant 1$. Calculons le quotient de u_{n+1} par u_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{u_n^2}\right)$ or $\frac{a}{u_n^2} \leqslant 1$ car $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.

3. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite $\ell > 0$. D'après la relation
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$
quand $n \to +\infty$ alors $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$. À la limite nous obtenons la relation
$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right).$$
La seule solution positive est $\ell = \sqrt{a}$. Conclusion (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. La relation
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$$
s'écrit aussi
$$(u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2}.$$
Donc
$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{4(u_{n+1} + \sqrt{a})}\left(\frac{u_n + \sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leqslant (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{4(2\sqrt{a})}\left(1 + \frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leqslant (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$
5. Par récurrence pour $n = 1$, $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$. Si la proposition est vraie rang n, alors
$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 \\ &\leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n} \end{aligned}$$
6. Soit $u_0 = 3$, alors $u_1 = \frac{1}{2}(3 + \frac{10}{3}) = 3,166\ldots$. Comme $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant u_1$ donc $u_1 - \sqrt{10} \leq 0.166\ldots$. Nous pouvons choisir $k = 0,17$. Pour que l'erreur $u_n - \sqrt{a}$ soit inférieure à 10^{-8} il suffit de calculer le terme u_4 car alors l'erreur (calculée par la formule de la question précédente) est inférieure à $1,53 \times 10^{-10}$. Nous obtenons $u_4 = 3,16227766\ldots$ Bilan $\sqrt{10} = 3,16227766\ldots$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule. Le nombre de chiffres exacts double à chaque itération, avec u_5 nous aurions (au moins) 16 chiffres exacts, et avec u_6 au moins 32...

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Si $u_0 \leqslant u_1$ alors comme f est croissante $f(u_0) \leqslant f(u_1)$ donc $u_1 \leqslant u_2$, ensuite $f(u_1) \leqslant f(u_2)$ soit $u_2 \leqslant u_3$,... Par récurrence on montre que (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par a alors elle converge. Si $u_0 \leqslant u_1$ alors la suite (u_n) est croissante et majorée par b donc converge.

   Notons ℓ la limite de $(u_n)_n$. Comme f est continue alors $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$. De plus la limite de $(u_{n+1})_n$ est aussi ℓ. En passant à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$ nous obtenons l'égalité $\ell = f(\ell)$.

2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{4x+5}{x+3}$ est continue et dérivable sur l'intervalle $[0,4]$ et $f([0,4]) \subset [0,4]$. La fonction f est croissante (calculez sa dérivée). Comme $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$ alors (u_n) est décroissante. Calculons la valeur de sa limite ℓ. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ soit $4x+5 = x(x+3)$. Comme $u_n \geqslant 0$ pour tout n alors $\ell \geqslant 0$. La seule solution positive de l'équation du second degré $4x+5 = x(x+3)$ est $\ell = \frac{1+\sqrt{21}}{2} = 2,7912\ldots$
3. Si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante (car $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \leqslant f \circ f(y)$). Nous appliquons la première question avec la fonction $f \circ f$. La suite $(u_0, u_2 = f \circ f(u_0), u_4 = f \circ f(u_2), \ldots)$ est monotone et convergente. De même pour la suite $(u_1, u_3 = f \circ f(u_1), u_5 = f \circ f(u_3), \ldots)$.
4. La fonction f définie par $f(x) = (1-x)^2$ est continue et dérivable de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Elle est décroissante sur cet intervalle. Nous avons $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{9}{16}$, $u_3 = 0,19\ldots$,... Donc la suite (u_{2n}) est croissante, nous savons qu'elle converge et notons ℓ sa limite. La suite (u_{2n+1}) et décroissante, notons ℓ' sa limite. Les limites ℓ et ℓ' sont des solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$. Cette équation s'écrit $(1 - f(x))^2 = x$, ou encore $(1-(1-x)^2)^2 = x$ soit $x^2(2-x)^2 = x$. Il y a deux solutions évidentes 0 et 1. Nous factorisons le polynôme $x^2(2-x)^2 - x$ en $x(x-1)(x-\lambda)(x-\mu)$ avec λ et μ les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 1$: $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,3819\ldots$ et $\mu = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. Les solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$ sont donc $\{0, 1, \lambda, \mu\}$. Comme (u_{2n}) est croissante et que $u_0 = \frac{1}{2}$ alors (u_{2n}) converge vers $\ell = 1$ qui est le seul point fixe de $[0,1]$ supérieur à $\frac{1}{2}$. Comme (u_{2n+1}) est décroissante et que $u_1 = \frac{1}{4}$ alors (u_{2n+1}) converge vers $\ell' = 0$ qui est le seul point fixe de $[0,1]$ inférieur à $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Soient $a, b > 0$. On veut démontrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, cette inégalité est équivalente à $ab \leqslant (\frac{a+b}{2})^2$. De plus,

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4ab \leqslant a^2 + 2ab + b$$
$$\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2$$

ce qui est toujours vrai car $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ est un carré parfait. On a donc bien l'inégalité voulue.

2. Quitte à échanger a et b (ce qui ne change pas les moyennes arithmétique et géométrique, et qui préserve le fait d'être compris entre a et b), on peut supposer que $a \leqslant b$. Alors en ajoutant les deux inégalités

$$a/2 \leqslant a/2 \leqslant b/2$$
$$a/2 \leqslant b/2 \leqslant b/2,$$

on obtient

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b.$$

De même, comme tout est positif, en multipliant les deux inégalités

$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \leqslant \sqrt{b}$$

on obtient

$$a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. Il faut avant tout remarquer que pour tout n, u_n et v_n sont strictement positifs, ce qui permet de dire que les deux suites sont bien définies. On le démontre par récurrence : c'est clair pour u_0 et v_0, et si u_n et v_n sont strictement positifs alors leurs moyennes géométrique (qui est u_{n+1}) et arithmétique (qui est v_{n+1}) sont strictement positives.

   (a) On veut montrer que pour chaque n, $u_n \leqslant v_n$. L'inégalité est claire pour $n = 0$ grâce aux hypothèses faites sur u_0 et v_0. Si maintenant n est plus grand que 1, u_n est la moyenne géométrique de u_{n-1} et v_{n-1} et v_n est la moyenne arithmétique de u_{n-1} et v_{n-1}, donc, par 1., $u_n \leqslant v_n$.

(b) On sait d'après 2. que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $u_n \leqslant u_{n+1}$ i.e. (u_n) est croissante. De même, d'après 2., $u_n \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $v_{n+1} \leqslant v_n$ i.e. (v_n) est décroissante.

(c) Pour tout n, on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. (u_n) est donc croissante et majorée, donc converge vers une limite ℓ. Et (v_n) est décroissante et minorée et donc converge vers une limite ℓ'. Nous savons maintenant que $u_n \to \ell$, donc aussi $u_{n+1} \to \ell$, et $v_n \to \ell'$; la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ s'écrit à la limite :

$$\ell = \sqrt{\ell\ell'}.$$

De même la relation $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ donnerait à la limite :

$$\ell' = \frac{\ell+\ell'}{2}.$$

Un petit calcul avec l'une ou l'autre de ces égalités implique $\ell = \ell'$.

Il y a une autre méthode un peu plus longue mais toute aussi valable.
Définition Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si

1. $u_n \leqslant v_n$,
2. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante,
3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Alors, on a le théorème suivant :
Théorème : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, elles sont toutes les deux convergentes et ont la même limite.
Pour appliquer ce théorème, vu qu'on sait déjà que (u_n) et (v_n) vérifient les points 1 et 2 de la définition, il suffit de démontrer que $\lim(u_n - v_n) = 0$. On a d'abord que $v_n - u_n \geqslant 0$. Or, d'après (a)

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Donc, si on note $w_n = v_n - u_n$, on a que $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n/2$. Donc, on peut démontrer (par récurrence) que $0 \leqslant w_n \leq \frac{w_0}{2^n}$, ce qui implique que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Donc $v_n - u_n$ tend vers 0, et ceci termine de démontrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite en utilisant le théorème sur les suites adjacentes.

Correction de l'exercice 14 ▲

Notons $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \quad -1.$$

1. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$. De plus $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n-1 \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f_n, admet un zéro dans l'intervalle $[0,1]$. De plus elle strictement croissante (calculez sa dérivée) sur $[0,1]$ donc ce zéro est unique.
2. Calculons $f_n(a_{n-1})$.

$$\begin{aligned} f_n(a_{n-1}) &= \sum_{k=1}^{n} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + f_{n-1}(a_{n-1}) \\ &= a_{n-1}^n \quad (\text{car } f_{n-1}(a_{n-1}) = 0 \text{ par définition de } a_{n-1}). \end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité

$$0 = f_n(a_n) < f_n(a_{n-1}) = a_{n-1}^n.$$

Or f_n est strictement croissante, l'inégalité ci-dessus implique donc $a_n < a_{n-1}$. Nous venons de démontrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.

Remarquons avant d'aller plus loin que $f_n(x)$ est la somme d'une suite géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 2.$$

Évaluons maintenant $f_n(\frac{1}{2})$, à l'aide de l'expression précédente

$$f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - 2 = -\frac{1}{2^n} < 0.$$

Donc $f_n(\frac{1}{2}) < f_n(a_n) = 0$ entraîne $\frac{1}{2} < a_n$.

Pour résumer, nous avons montré que la suite $(a_n)_n$ est strictement décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.

3. Comme $(a_n)_n$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ alors elle converge, nous notons ℓ sa limite :

$$\frac{1}{2} \leqslant \ell < a_n.$$

Appliquons f_n (qui est strictement croissante) à cette inégalité :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f_n(\ell) < f_n(a_n),$$

qui s'écrit aussi :

$$-\frac{1}{2^n} \leqslant f_n(\ell) < 0,$$

et ceci quelque soit $n \geqslant 1$. La suite $(f_n(\ell))_n$ converge donc vers 0 (théorème des "gendarmes"). Mais nous savons aussi que

$$f_n(\ell) = \frac{1-\ell^{n+1}}{1-\ell} - 2;$$

donc $(f_n(\ell))_n$ converge vers $\frac{1}{1-\ell} - 2$ car $(\ell^n)_n$ converge vers 0. Donc

$$\frac{1}{1-\ell} - 2 = 0, \text{ d'où } \ell = \frac{1}{2}.$$
