Enoncés : Stephan de Bièvre
Corrections : Johannes Huebschmann

Exo7

Dérivées partielles : Révisions

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$?

Indication ▼ Correction ▼ [002624]

Exercice 2

Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier la réponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$? Justifier la réponse.
4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
5. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1,1,2)$.
6. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$. Déterminer la matrice jacobienne de F au point $(1,1)$. La fonction F admet-elle une réciproque locale au voisinage du point $(2,2)$?

Indication ▼ Correction ▼ [002625]

Exercice 3

Soit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Indication ▼ Correction ▼ [002626]

Exercice 4

On considère les fonctions $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (\sin(xy), y\cos x, xy\sin(xy)\exp(y^2)), \quad g(u,v,w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.

2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(u,v,w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat sous (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Indication ▼ Correction ▼ [002627]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Utiliser les coordonnées polaires (r,φ) dans le plan et le fait que $\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} r\log r = 0$.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Pour réfuter la différentiabilité de f en $(0,0)$, il suffit de trouver une dérivée directionnelle qui n'est pas combinaison linéaire des dérivées partielles (par rapport aux deux variables).
2. Le plan tangent au point $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ du graphe $z=f(x,y)$ de F est donnée par l'équation

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{2}$$

Indication pour l'exercice 3 ▲

Calculer mène à la vérité.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Écrire $f(x,y) = (\sin(xy), y\cos x, xy\sin(xy)\exp(y^2)) = (u,v,w)$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $f(x,y) = (x^2+y^2)^x = e^{x\log(x^2+y^2)} = e^{2r\cos\varphi\log r}$. Puisque $\cos\varphi$ est borné, $\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\varphi\log r = 0$ d'où

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = e^{\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\varphi\log r} = e^0 = 1,$$

car la fonction exponentielle est continue.

2. Dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ les dérivées partielles par rapport aux variables x et y se calculent ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$

3. Pour que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe, il faut et il suffit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x,0)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{(x^2)^x-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{2x\log x}-1}{x}$$

existe. Si $x>0$,
$$\frac{e^{2x\log x}-1}{x} = 2\log x + \varepsilon(x)$$
où $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varepsilon(x) = 0$. Par conséquent, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas. D'autre part,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{f(0,y)-1}{y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{(y^2)^0-1}{y} = 0$$

existe.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Puisque $f(x,y) = \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} = r(\cos^2\varphi\sin\varphi + 3\sin^3\varphi)$, il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0$$

car $\cos^2\varphi\sin\varphi + 3\sin^3\varphi$ reste borné. Par conséquent la fonction f est continue en $(0,0)$.

2. Les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x,0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{0}{x^2} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{f(0,y)}{y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{3y^3}{y^2} = 3$$

existent.

3. Puisque $f(x,x) = \frac{4x^3}{2x^2} = 2x$, la dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ suivant le vecteur $v=(1,1)$ est non nulle. Par conséquent, la fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

4.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} = \frac{2xy(x^2+y^2)-2x(x^2y+3y^3)}{(x^2+y^2)^2} = -4\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+3y^2)(x^2+y^2)-2y(x^2y+3y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+8x^2y^2+3y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

5. D'après (2), cette équation s'écrit

$$z-2=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)=1-x+3(y-1)$$

d'où $z=3y-x$.

6. La fonction $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s'écrit $F(x,y)=\left(\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2},\frac{y^2x+3x^3}{x^2+y^2}\right)$ et sa matrice jacobienne

$$\mathrm{J}_F(1,1)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

au point $(1,1)$ est inversible. Par conséquent, la fonction F admet une réciproque locale au voisinage du point $(1,1)$. Au point $(2,2)$,

$$\mathrm{J}_F(2,2)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(2,2)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial x}(2,2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

d'où la fonction F admet également une réciproque locale au voisinage du point $(2,2)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial z}&=\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

d'où (1).

Correction de l'exercice 4 ▲

1. $g(f(x,y))=xy^2\sin^2(xy)\cos x\exp(y^2)$
2.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}&=y^2\sin(xy)\exp(y^2)(2xy\cos x\cos(xy)-x\sin x\sin(xy)+\cos x\sin(xy))\\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}&=2xy\cos x\sin(xy)\exp(y^2)(xy\cos(xy)+(1+y^2)\sin(xy))\end{aligned}$$

3. Calculons d'abord

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=y\sin(xy)\exp(y^2)+xy^2\cos(xy)\exp(y^2)\\ &=y\exp(y^2)(\sin(xy)+xy\cos(xy))\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=x\sin(xy)\exp(y^2)+x^2y\cos(xy)\exp(y^2)+2xy^2\sin(xy)\exp(y^2)\\ &=x\exp(y^2)(\sin(xy)+xy\cos(xy)+2y^2\sin(xy))\\ &=x\exp(y^2)((1+2y^2)\sin(xy)+xy\cos(xy)).\end{aligned}$$

Ainsi la matrice jacobienne J_f de f s'écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{J_f}&=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}y\cos(xy) & x\cos(xy)\\ -y\sin x & \cos x\\ y\exp(y^2)(\sin(xy)+xy\cos(xy)) & x\exp(y^2)((1+2y^2)\sin(xy)+xy\cos(xy))\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

De même, la matrice jacobienne J_g de g est :

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_g &= \left[\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}\right] = [vw, uw, uv] \\ &= \left[xy^2 \sin(xy) \cos x \exp(y^2), xy \sin^2(xy) \exp(y^2), y \sin(xy) \cos x\right]\end{aligned}$$

4. La matrice jacobienne $\mathrm{J}_{g\circ f}$ de la fonction composée $g \circ f$ s'écrit comme produit matricielle

$$\mathrm{J}_{g\circ f} = \mathrm{J}_g \circ \mathrm{J}_f = \left[\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} &= (xy^2 \sin(xy) \cos x \exp(y^2)) y \cos(xy) \\ &\quad - (xy \sin^2(xy) \exp(y^2)) y \sin x \\ &\quad + (y \sin(xy) \cos x) y \exp(y^2)(\sin(xy) + xy \cos(xy)) \\ &= xy^3 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2)) - xy^2 \sin x \sin^2(xy) \exp(y^2) \\ &\quad + y^2 \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) + xy^3 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) \\ &= y^2 \sin(xy) \exp(y^2)(2xy \cos x \cos(xy) - x \sin x \sin(xy) + \cos x \sin(xy)) \\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} &= (xy^2 \sin(xy) \cos x \exp(y^2)) x \cos(xy) \\ &\quad + (xy \sin^2(xy) \exp(y^2)) \cos x \\ &\quad + (y \sin(xy) \cos x) x \exp(y^2)((1+2y^2) \sin(xy) + xy \cos(xy)) \\ &= x^2y^2 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) + xy \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) \\ &\quad + xy(1+2y^2) \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) + x^2y^2 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) \\ &= 2x^2y^2 \cos x \sin(xy) \cos(xy) \exp(y^2) + 2xy(1+y^2) \cos x \sin^2(xy) \exp(y^2) \\ &= 2xy \cos x \sin(xy) \exp(y^2)(xy \cos(xy) + (1+y^2) \sin(xy)).\end{aligned}$$
