Enoncés et corrections : Sandra Delaunay

Exo7

Sujets de l'année 2008-2009

1 Partiel

Exercice 1

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels.

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

On suppose $a+c=b+d=1$ et $a-b\neq 1$.

1. Soient (x_1,x_2), (y_1,y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, tels que
$$A\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$
montrer qu'alors
$$y_1+y_2=x_1+x_2.$$
2. Soit le vecteur $\vec{x}=(1,-1)$, vérifier que $\vec{x}$ est un vecteur propre de A, et déterminer sa valeur propre.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A et calculer ses racines.
4. Déterminer un vecteur propre, $\vec{y}$, de A non colinéaire à $\vec{x}$ et exprimer la matrice de l'endomorphisme défini par A dans la base $(\vec{x},\vec{y})$.

Correction ▼ [002611]

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ une base de E, si $\vec{u}$ est un vecteur de E on note (x,y,z) ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Soit f une application linéaire de E dans lui-même, définie par

$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow E\\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x+y-z\\ 2x+2z\\ 4x-2y+4z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
2. Déterminer les sous-espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Soient $\vec{u}_1=(1,0,-1)$, $\vec{u}_2=(1,2,0)$ et $\vec{u}_3=(0,1,1)$. Démontrer que $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est une base de E.
4. Calculer $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$ et déterminer la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$.
5. Déterminer les valeurs propres de f et, pour chacune, un vecteur propre.

Correction ▼ [002612]

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On cherche à déterminer une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2=-I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n. On notera f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

1. Démontrer que l'existence d'une telle matrice implique la parité de n.
2. On suppose maintenant que $n = 4$.
   (a) Démontrer que pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} \neq 0$, les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.
   (b) Soit $\vec{x}_1 \neq 0$, on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{x}_1$ et $f(\vec{x}_1)$.
      i. Démontrer que F est stable par f.
      ii. Soit $\vec{x}_2 \in E$, on suppose que $\vec{x}_2 \notin F$, démontrer que $\mathscr{B} = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2))$ est une base de E.
   (c) Ecrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (d) Calculer $\det f$ et $\det(\lambda \mathrm{id}_E - f)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (e) L'endomorphisme f admet-il des valeurs propres réelles ?

Correction ▼ [002613]

2 Examen

Exercice 4

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On suppose dans la suite que $b = 1$ et $a \neq 0$
   (a) Déterminer les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de A.
   (b) Trouver D diagonalisable et N nilpotente telles que D commute avec N et

$$A = D + N.$$

3. Soit le système différentiel suivant :

$$\mathscr{E} : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \end{cases}$$

   Déterminer les solutions de $\mathscr{E}$.

Correction ▼ [002614]

Exercice 5

Questions préliminaires :

(a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit λ une valeur propre de u et $\vec{x}$ un vecteur propre associé à λ. Démontrer que $\vec{x}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

(b) Enoncer le théorème de Hamilton-Cayley.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A. Donner une base de vecteurs propres de A et diagonaliser A.
2. On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.

   (a) Démontrer que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A.

   (b) Déterminer les valeurs propres de B et leur multiplicité.

   (c) Ecrire le polynôme caractéristique de B.

   (d) Déterminer B telle que $B^3 = A$.

Correction ▼ [002615]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels.

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

On suppose $a+c=b+d=1$ et $a-b\neq 1$.

1. Soient (x_1,x_2), (y_1,y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, tels que
$$A\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$
On montre que $y_1+y_2=x_1+x_2$.
On a
$$A\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1+bx_2\\ cx_1+dx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix},$$
d'où $y_1+y_2=ax_1+bx_2+cx_1+dx_2=(a+c)x_1+(b+d)x_2=x_1+x_2$.
2. *Soit le vecteur $\vec{x}=(1,-1)$, vérifions que $\vec{x}$ est un vecteur propre de A, et déterminons sa valeur propre.*
$$A.\vec{x}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b\\ c-d\end{pmatrix},$$
or $c-d=(1-a)-(1-b)=-(a-b)$, car $a+b=c+d=1$. Ainsi,
$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b\\ -(a-b)\end{pmatrix}=(a-b)\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}.$$
Ainsi, le vecteur $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $a-b$.
3. *Déterminons le polynôme caractéristique de A et calculons ses racines.*
Tout d'abord, compte tenu de l'hypothèse $a+b=c+d=1$, nous écrirons
$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ 1-a & 1-b\end{pmatrix}.$$
D'où
$$P_A(X)=\begin{vmatrix} a-X & b\\ 1-a & 1-b-X\end{vmatrix}=(a-X)(1-b-X)-b(1-a)=X^2-(a-b+1)X+(a-b).$$
On sait, d'après la question précédente que $a-b$ est racine de ce polynôme, or, le produit des racines est égal à $a-b$ et la somme à $a-b+1$, ainsi la seconde racine est égale é 1.
4. *Déterminons un vecteur propre, $\vec{y}$, de A non colinéaire à $\vec{x}$ et exprimons la matrice de l'endomorphisme défini par A dans la base $(\vec{x},\vec{y})$.*
Un vecteur propre non colinéaire à $\vec{x}$ est vecteur propre pour la valeur propre 1. Ainsi, si on note $\vec{y}=(y_1,y_2)$, on a
$$A\vec{y}=\vec{y}\iff\begin{pmatrix} a & b\\ 1-a & 1-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix},$$
ce qui équivaut à
$$\begin{cases} ay_1+by_2=y_1\\ (1-a)y_1+(1-b)y_2=y_2\end{cases}\iff (a-1)y_1+by_2=0.$$
Le vecteur $\vec{y}=(b,1-a)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ une base de E, si $\vec{u}$ est un vecteur de E on note (x,y,z) ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Soit f une application linéaire de E dans lui-même, définie par

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y-z \\ 2x+2z \\ 4x-2y+4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. *Ecrivons la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.*
   On a $f(\vec{e}_1)=(-1,2,4)$, $f(\vec{e}_2)=(1,0,-2)$ et $f(\vec{e}_3)=(-1,2,4)$. D'où la matrice
   $$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$
2. *Déterminons les sous-espaces* $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$.
   Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est engendré par les vecteurs $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)=f(\vec{e}_1)$, c'est donc le plan vectoriel engendré par les vecteurs $f(\vec{e}_1)=(-1,2,4)$ et $f(\vec{e}_2)=(1,0,-2)$ qui sont clairement linéairement indépendants.
   Pour le noyau, on a $\ker f=\{\vec{u}\in E,\ f(\vec{u})=\vec{0}\}$, ainsi,
   $$\vec{u}=(x,y,z)\in\ker f \iff \begin{cases} -x+y-z=0 \\ 2(x+z)=0 \\ 4x-2y+4z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$
   C'est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{v}=(1,0,-1)$.
3. Soient $\vec{u}_1=(1,0,-1)$, $\vec{u}_2=(1,2,0)$ et $\vec{u}_3=(0,1,1)$. *Démontrons que* $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ *est une base de* E.
   Pour cela nous allons vérifier que le déterminant de leurs coordonnées est non nul,
   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-1=1\neq 0.$$
   Ainsi, les trois vecteurs $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de E, car E est de dimension 3.
4. *Calculons $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$ et déterminons la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$.*
   On a $f(\vec{u}_1)=\vec{0}$,
   $$f(\vec{u}_2)=\begin{pmatrix} -1+2 \\ 2 \\ 4-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\vec{u}_2.$$
   $$f(\vec{u}_3)=\begin{pmatrix} 1-1 \\ 2 \\ -4+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}=2\vec{u}_3.$$
   Ainsi la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ s'écrit
   $$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
5. *Déterminons les valeurs propres de f et, pour chacune, un vecteur propre.*
   D'après la question précédente, les valeurs propres de f sont 0, 1 et 2, et les vecteurs propres sont $\vec{u}_1$ pour la valeur propre 0, $\vec{u}_2$ pour la valeur propre 1 et $\vec{u}_3$ pour la valeur propre 2.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On cherche à déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n. On notera f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

1. *Démontrons que l'existence d'une telle matrice implique la parité de n.*
   Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, on a alors
   $$\det(A^2) = (\det A)^2 = (-1)^n,$$
   ce qui implique n pair, car un carré est toujours positif.
2. On suppose maintenant que $n = 4$.
   (a) *Démontrons que pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} \neq 0$, les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.*
   Soit $\vec{x} \in E$, on suppose $\vec{x} \neq 0$, supposons qu'il existe des réels a, b tels que $a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0}$, on a alors
   $$a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0} \Longrightarrow f(a\vec{x} + bf(\vec{x})) = \vec{0} \Longrightarrow af(\vec{x}) - b\vec{x} = \vec{0},$$
   car $f^2 = -\mathrm{id}_E$. Or,
   $$\begin{cases} a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0} \\ af(\vec{x}) - b\vec{x} = \vec{0} \end{cases} \Longrightarrow (a^2 + b^2)\vec{x} = \vec{0},$$
   ce qui implique $a^2 + b^2 = 0$ car $\vec{x} \neq \vec{0}$, et, donc $a = b = 0$. Ce qui prouve que les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.
   (b) Soit $\vec{x}_1 \neq 0$, on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{x}_1$ et $f(\vec{x}_1)$.
      i. *Démontrons que F est stable par f.*
      Soit $\vec{x} \in F$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = a\vec{x}_1 + bf(\vec{x}_1)$, d'où
      $$f(\vec{x}) = f(a\vec{x}_1 + bf(\vec{x}_1)) = af(\vec{x}_1) + bf^2(\vec{x}) = af(\vec{x}_1) - b\vec{x}_1 \in F.$$
      D'où la stabilité de F par f.
      ii. Soit $\vec{x}_2 \in E$, on suppose que $\vec{x}_2 \notin F$.
      Démontrons que $\mathscr{B} = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2))$ est une base de E. La dimension de E étant égale à 4, il suffit de démontrer que les vecteurs sont linéairement indépendants. Supposons qu'il existe $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que
      $$a_1\vec{x}_1 + b_1 f(\vec{x}_1) + a_2\vec{x}_2 + b_2 f(\vec{x}_2) = \vec{0},$$
      on a alors,
      $$a_2\vec{x}_2 + b_2 f(\vec{x}_2) \in F,$$
      et, comme F est stable par f,
      $$f(a_2\vec{x}_2 + b_2 f(\vec{x}_2)) = a_2 f(\vec{x}_2) - b_2\vec{x}_2 \in F.$$
      Ce qui implique
      $$(a_2^2 + b_2^2)\vec{x}_2 \in F \quad \text{d'où} \quad a_2^2 + b_2^2 = 0$$
      car on a supposé $\vec{x}_2 \notin F$. On a donc $a_2 = b_2 = 0$ et, par conséquent, $a_1\vec{x}_1 + b_1 f(\vec{x}_1) = 0$, or les vecteurs $\vec{x}_1$ et $f(\vec{x}_1)$ sont linéairement indépendants, ce qui implique $a_1 = b_1 = 0$. D'où l'indépendance des vecteurs $\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2)$.

(c) *Ecrivons la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.*

On calcule les images des vecteurs de la base $\mathscr{B}$. On a $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_1)$, $f(f(\vec{x}_1)) = -\vec{x}_1$, $f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_2)$, $f(f(\vec{x}_2)) = -\vec{x}_2$. D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) *Calculons* $\det f$ *et* $\det(\lambda \mathrm{id}_E - f)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a, en développant par blocs,

$$\det f = \det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

De même,

$$\det(\lambda \mathrm{id}_E - f) = \det(\lambda I_4 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+1)^2.$$

(e) *L'endomorphisme f admet-il des valeurs propres réelles ?*

Les valeurs propres réelles de f sont les réels λ qui annulent $\det(\lambda \mathrm{id}_E - f)$, ce sont donc les réels λ tels que $\lambda^2 + 1 = 0$. Ainsi, f n'admet pas de valeurs propres réelles.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Donnons les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette décomposition de $A = D + N$ est sa décomposition de Dunford si et seulement si N est nilpotente (il est clair que D est diagonale) et si $ND = DN$.

Vérifions que N est nilpotente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi la matrice N est bien nilpotente quelques soient les valeurs de a et b. Déterminons pour quelles valeurs de a et b les matrices commutent.

$$N.D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et
$$D.N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, $ND = DN$ si et seulement si $b = 2b$, c'est-à-dire si $b = 0$. Le paramètre a peut prendre n'importe quelle valeur.

2. On suppose dans la suite que $b = 1$ et $a \neq 0$.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) *Déterminons les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de A.*
   Commençons par déterminer les valeurs propres de A, ce qui est immédiat car A est sous forme triangulaire. Elle admet donc deux valeurs propres, 1 valeur propre double et 2 valeur propre simple. Notons E_1 et E_2 les sous-espaces propres de A.
$$E_1 = \{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = \vec{u}\}.$$
   On a
$$\vec{u} \in E_1 \iff \begin{cases} x + ay = x \\ y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
   L'espace E_1 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,0,0)$, ce sous-espace propre associé à la valeur propre double 1 est de dimension 1, la matrice n'est pas diagonalisable.
$$E_2 = \{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = 2\vec{u}\}.$$
   On a
$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} x + ay = 2x \\ y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = ay \\ y = z \end{cases}$$
   L'espace E_2 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(a,1,1)$. La valeur propre 2 étant simple, le sous-espace caractéristique N_2 associé est égal à l'espace E_2.
   Déterminons le sous-espace caractéristique N_1 associé à la valeur propre 1. On a
   $N_1 = \ker(A-I)^2$. Calculons la matrice $(A-I)^2$.
$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Ainsi, le noyau de $(A-I)^2$ est le plan engendré par les vecteurs $\vec{e}_1 = (1,0,0)$ et $\vec{e}_2 = (0,1,0)$.

   (b) *Déterminons D diagonalisable et N nilpotente telles que D commute avec N et*
$$A = D + N.$$
   Notons $\vec{e}_3 = (a,1,1)$, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la matrice associée à l'endomorphisme représenté par A s'écrit
$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M}.$$

Par construction, c'est la décomposition de Dunford de B et on a $A = PBP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $D = P\Delta P^{-1}$ et $N = PMP^{-1}$ vérifient, N nilpotente, D diagonalisable et $ND = DN$. Calculons les

$$D = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A - D.$$

Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N + D = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit le système différentiel suivant :

$$\mathscr{E} : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \end{cases}$$

Déterminons les solutions de $\mathscr{E}$.
Remarquons que, si l'on note $X = (x_1, x_2, x_3)$, le système $\mathscr{E}$ s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui correspond à la matrice A précédente avec $a = 2$ et $b = 1$. La solution générale du système s'écrit

$$X(t) = \exp(tA)V$$

où $V = (a, b, c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Par ailleurs $X = PY$ est solution de $X' = AX \iff Y$ est solution de $Y' = \underbrace{P^{-1}AP}_{B}Y$. La solution générale du système $Y' = BY$ s'écrit $Y = \exp(tB)V$ où $V \in \mathbb{R}^3$. Calculons donc l'exponentielle de la matrice tB pour $t \in \mathbb{R}$. On a vu dans la question précédente que $B = \Delta + M$ avec $\Delta M = M\Delta$, ainsi

$$\begin{aligned} \exp(tB) &= \exp(t\Delta).\exp(tM) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} .(I + tM) \quad \text{car } M^2 = O \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution générale du système $\mathscr{E}$ s'écrit donc $X = P\exp(tB).V$ où $V = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. C'est-à-dire

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où encore

$$\begin{cases} x_1(t) = (a+2bt)e^t + 2ce^{2t} \\ x_2(t) = be^t + ce^{2t} \\ x_3(t) = ce^{2t} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Questions préliminaires :

(a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit λ une valeur propre de u et $\vec{x}$ un vecteur propre associé à λ.
Démontrons que $\vec{x}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.
On a $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, et, par récurrence sur n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(\vec{x}) = \lambda^n\vec{x}$. Notons
$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$, l'endomorphisme $P(u)$ vérifie

$$\begin{aligned} P(u)(\vec{x}) &= (a_0\mathrm{id}_E + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_du^d)(\vec{x}) \\ &= a_0\vec{x} + a_1\lambda\vec{x} + a_2\lambda^2\vec{x} + \cdots + a_d\lambda^d\vec{x} \\ &= P(\lambda)\vec{x} \end{aligned}$$

ce qui prouve que le vecteur $\vec{x}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

(b) Théorème de Hamilton-Cayley. Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit P le polynôme caractéristique de u, alors $P(u) = 0$ (le zéro étant celui de l'ensemble des endomorphisme de E)
Version matricielle : Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice et P_A son polynôme caractéristique, alors $P_A(A) = 0$ (le zéro étant celui de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$).

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminons les valeurs propres de A.*
   Pour cela calculons son polynôme caractéristique :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -9 & 1-X & 9 \\ 9 & 0 & -8-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(-8-X).$$

   La matrice A admet deux valeurs propres, 1 valeur propre double et -8 valeur propre simple.
   Déterminons une base de vecteurs propres de A.
   Soit $\vec{u} = (x,y,z)$ un vecteur propre associé à la valeur propre 1, on a

$$A.\vec{u} = \vec{u} \iff \begin{cases} x = x \\ -9x + y + 9z = y \\ 9x - 8z = z \end{cases} \iff x = z$$

   Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est un plan vectoriel dont les vecteurs $\vec{e}_1 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_2 = (1,0,1)$ forment une base.
   Soit $\vec{u} = (x,y,z)$ un vecteur propre associé à la valeur propre -8, on a

$$A.\vec{u} = -8\vec{u} \iff \begin{cases} x = -8x \\ -9x + y + 9z = -8y \\ 9x - 8z = -8z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre -8 est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_3 = (0, 1, -1)$.

Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ci-dessus forment une base de E composée de vecteurs propres de A.

Diagonalisons A.

Dans cette base, la matrice s'écrit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ et on a $A = PDP^{-1}$ avec

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.

   (a) *Démontrons que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A.*

   On considère le polynôme $P(X) = X^3$, on applique la question préliminaire a). Si λ est une valeur propre de B, alors $P(\lambda) = \lambda^3$ est une valeur propre de $A = P(B) = B^3$.

   (b) *Déterminons les valeurs propres de B et leur multiplicité.*

   Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de B (elles existent toujours dans $\mathbb{C}$) et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ les vecteurs propres associés, alors ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3$. Sachant que les valeurs propres de A sont 1,1 et -8, on a $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = 1$ et $\lambda_3^3 = -8$. Ainsi les valeurs propres de B sont 1 de multiplicité 2 et -2 de multiplicité 1.

   (c) *Ecrivons le polynôme caractéristique de B.*

   Compte tenu de la question précédente, on a

   $$P_B(X) = (1-X)^2(-2-X).$$

   (d) *Déterminons B telle que $B^3 = A$.*

   On a $P_B(X) = (1-X)^2(-2-X) = -X^3 + 3X - 2$, or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_B(B) = 0$, c'est-à-dire $-B^3 + 3B - 2I = 0$, par conséquent

   $$A = B^3 = 3B - 2I.$$

   Ainsi, $B = 1/3(A + 2I)$, d'où,

   $$B = 1/3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 9 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
