Chapitre 25

Géométrie affine et euclidienne

Objectifs

- Définir les notions de : espaces affines, sous-espaces affines, applications affines et leurs propriétés.
- Rappeler la notion de barycentre et définir la notion de convexité.
- Calculer la distance d'un point à un sous-espace affine.
- Étudier les isométries. Faire la classification en dimension $1, 2$ et 3.

Sommaire

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$ - e.v. de dimension finie.

I) Espace affine

1) Translations

Soit $\overrightarrow{u} \in E$, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application [1] $t_{\overrightarrow{u}} : E \to E$ définie par $t_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. L'ensemble de ces applications est noté $\mathscr{T}_E$ et il est facile de vérifier que $(\mathscr{T}_E, \circ)$ est un groupe abélien, c'est un sous - groupe du groupe des permutations de E.

1. non linéaire si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

Si $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont deux vecteurs de E, alors il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $t_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$. Cette propriété très simple, suggère un autre point de vue pour les éléments de E : la notion de points.

DÉFINITION 25.1

Un espace affine est un espace vectoriel dont les éléments sont vus tantôt comme des points (lettres majuscules), tantôt comme des vecteurs (minuscules). D'une façon imagée, on peut dire qu'un point est la pointe de la flèche d'un vecteur. Si de plus E est muni d'un produit scalaire, alors on dira que $(E, (.|.))$ est un espace affine euclidien, dans ce cas, la distance entre deux points A et B est $d(A,B) = \|B - A\|$.

La propriété précédente peut alors s'énoncer sous la forme suivante : si A et B sont deux points de E, alors il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que B $= t_{\overrightarrow{u}}(A)$. Ce vecteur $\overrightarrow{u}$ est noté : $\overrightarrow{AB}$, on remarquera que $\overrightarrow{AB} = B - A$, et que $A + \overrightarrow{AB} = B$.

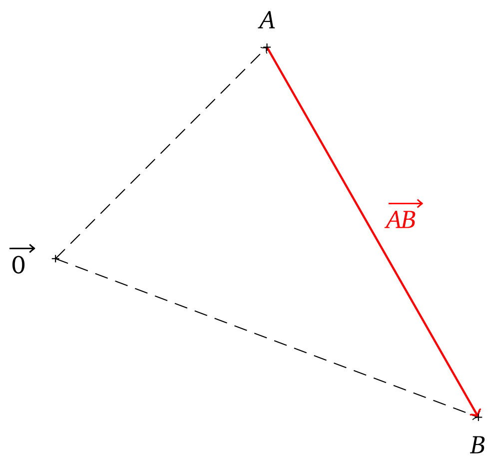


FIGURE 25.1: Notion de points

2) Sous - espaces affines

DÉFINITION 25.2

Un sous - espace affine de E est l'image d'un s.e.v. de E par une translation. Soit $\mathcal{V}$ une partie de E, $\mathcal{V}$ est un s.e.a. de E ssi il existe un s.e.v V et un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\mathcal{V} = t_{\overrightarrow{u}} < V >$, si c'est le cas, V est appelé direction du s.e.a. $\mathcal{V}$ (ce que l'on écrira : $(\mathcal{V}, V)$), et on pose $\dim(\mathcal{V}) = \dim(V)$. On remarquera qu'un s.e.v. est un s.e.a. de direction lui - même.

Propriétés :

- Si $\mathcal{V}$ est un s.e.a. de direction V, alors V est unique (mais pas le vecteur de la translation), de plus $\mathcal{V}$ est un s.e.v. ssi $\mathcal{V}$ contient le vecteur nul.
- Si $(\mathcal{V}, V)$ est un s.e.a. alors $\forall\, A \in \mathcal{V},\ \mathcal{V} = \{A + \overrightarrow{u} \ /\ \overrightarrow{u} \in V\}$, et $V = \{\overrightarrow{AB} \ /\ B \in \mathcal{V}\}$, on remarquera que $\forall\, B \in E, B \in \mathcal{V} \iff \overrightarrow{AB} \in V$.
- Si $(\mathcal{V}, V)$ est un s.e.a. de E, alors $\mathcal{V}$ est un espace affine isomorphe à V. C'est à dire que $\mathcal{V}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel isomorphe à V.
- Si $(\mathcal{V}, V)$ et $(\mathcal{V}', V')$ sont deux s.e.a. de E, et si $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$ n'est pas vide, alors $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$ est un s.e.a de direction $V \cap V'$.
- Soient $(\mathcal{V}, V)$ et $(\mathcal{V}', V')$ sont deux s.e.a. de E, soient $A \in \mathcal{V}$ et $A' \in \mathcal{V}'$, alors $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' \neq \emptyset \iff \overrightarrow{AA'} \in V + V'$. On remarquera que la condition est nécessairement remplie lorsque $E = V + V'$.

Exercice: Étudier les s.e.a. de E lorsque $\dim(E) = 1, 2, 3$.

3) Parallélisme, orthogonalité

DÉFINITION 25.3

Soient $(\mathscr{V},V)$ et $(\mathscr{V}',V')$ deux s.e.a. de E, on dit que $\mathscr{V}$ est parallèle à $\mathscr{V}'$ lorsque $V\subset V'$. On dit que $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ sont parallèles lorsque $V=V'$ (même direction). Si E est euclidien, on dit que $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ sont orthogonaux lorsque V et V' sont deux s.e.v. orthogonaux de E ($V\subset V'^{\perp}$), si $A\in E$, l'orthogonal à $\mathscr{V}$ passant par A est le s.e.a. de E contenant A et de direction $V^{\perp}$.

Propriétés :
- Deux s.e.a. parallèles sont soit égaux, soit d'intersection vide (on dit qu'ils sont strictement parallèles).
- Soient $(\mathscr{V},V)$ et $(\mathscr{V}',V')$ deux s.e.a. de E, si $\mathscr{V}$ est parallèle à $\mathscr{V}'$, alors soit $\mathscr{V}\subset\mathscr{V}'$, soit $\mathscr{V}\cap\mathscr{V}'=\emptyset$.

Exercice: Étudier la position relative de deux s.e.a. en dimension 2 et 3.

4) Repères cartésiens

DÉFINITION 25.4

Un repère cartésien $\mathscr{R}=(O,\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ de E, est la donnée d'un point O de E (appelé origine du repère), et d'une base $\mathscr{B}=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ de E. Si E est euclidien et que $\mathscr{B}$ est une b.o.n.d. de E, on dira que le repère $\mathscr{R}$ est un repère orthonormal direct. Pour tout point M de E, on appelle coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathscr{B}$. On remarquera qu'il s'agit des coordonnées de $M-O$ dans la base $\mathscr{B}$.

Représentation(s) paramétrique(s) d'un s.e.a. : Soit $(\mathscr{V},V)$ un s.e.a. de E, soit $\mathscr{R}=(O,\mathscr{B})$ un repère cartésien de E, soit $\mathscr{U}=(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_p})$ une base de V, et soit $A\in\mathscr{V}$. Notons C_i la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v_i}$ dans la base $\mathscr{B}$, et C_0 la matrice colonne des coordonnées de A dans le repère $\mathscr{R}$. Soit $M\in E$, notons X la matrice colonne des coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}$, $M\in\mathscr{V}\iff\overrightarrow{AM}\in V$ ce qui équivaut à :

$$\exists\,\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{R},\ X=C_0+\lambda_1C_1+\dots+\lambda_pC_p$$

Ce système est appelé un *paramétrage* de $\mathscr{V}$.

Équation(s) cartésienne(s) d'un hyperplan affine : Soit $\mathscr{R}=(O,\mathscr{B})$ un repère de E, avec $\dim(E)=n$, soit $(\mathscr{H},H)$ un hyperplan affine de E, soit $\mathscr{U}=(\overrightarrow{u}_1,\dots,\overrightarrow{u}_{n-1})$ une base de H, et soit $A\in\mathscr{H}$. Un point M de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ appartient à $\mathscr{H}$ ssi $\overrightarrow{AM}\in H$, ce qui revient à dire que la famille $\mathscr{U}\cup\{\overrightarrow{AM}\}$ est une famille liée, ce qui est encore équivalent à : $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}_1,\dots,\overrightarrow{u}_{n-1},\overrightarrow{AM})=0$, en développant ce déterminant sur sa dernière colonne, on obtient une équation cartésienne de H de la forme : $a_1x_1+\dots+a_nx_n=b$ avec au moins un des coefficients a_i non nul, et b une constante. On remarquera qu'une équation cartésienne de la direction (*ie* de H) est $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$. Si E est euclidien et la base orthonormale, alors une telle équation peut s'écrire à l'aide d'un produit scalaire : $(\overrightarrow{u}\,|\overrightarrow{AM})=0$ où $\overrightarrow{u}$, de coordonnées $(a_1,\dots,a_n)$, est un vecteur normal à H.

Exercice: Montrer que la réciproque est vraie, c'est à dire que les points de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ vérifiant une équation du type $a_1x_1+\dots+a_nx_n=b$ avec au moins un des coefficients a_i non nul, forment un hyperplan affine de direction l'hyperplan vectoriel d'équation cartésienne $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$.

Changement de repère : Soient $\mathscr{R}=(O,\mathscr{B})$ et $\mathscr{R}'=(O',\mathscr{B}')$ deux repères cartésiens de E, notons P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Soit $M\in E$, soit X la matrice colonne des coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}$, et X' dans le repère $\mathscr{R}'$. On a $X=\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OM})=\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OO'})+\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{O'M})=\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OO'})+P\times\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{O'M})$, c'est à dire :

$$X=\mathrm{Coord}_{\mathscr{R}}(O')+P\times X'\ \text{ et donc }\ X'=\mathrm{Coord}_{\mathscr{R}'}(O)+P^{-1}\times X.$$

Cas particuliers : Si on change seulement d'origine, alors $P=I_n$ et donc $X'=\mathrm{Coord}_{\mathscr{R}'}(O)+X$. Si on garde la même origine et que l'on change de base, alors $X'=P^{-1}\times X$.

II) Applications affines

1) Définition, exemples

DÉFINITION 25.5

Soit E et F deux $\mathbb{R}$ e.v. et soit $f : E \to F$ une application, on dit que f est une application affine lorsqu'il existe $\overrightarrow{u} \in F$ et $g \in \mathscr{L}(E,F)$ tels que : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$. C'est à dire : $\forall\, M \in E,\ f(M) = \overrightarrow{u} + g(M)$. Lorsque $F = \mathbb{R}$, on dit que f est une forme affine.

Exemples:
- Il découle de la définition qu'une application linéaire est une application affine.
- De même, une translation est une application affine et sa partie linéaire est l'identité.

THÉORÈME 25.1

Si $f : E \to F$ est affine, alors on sait qu'il existe $\overrightarrow{u} \in F$ et $g \in \mathscr{L}(E,F)$ tels que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est unique ($\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{0})$), et l'application linéaire g est unique, on la notera : L_f (partie linéaire de f), de plus, on a la relation suivante : $\forall\, A, M \in E,\ \overrightarrow{f(A)f(M)} = L_f(\overrightarrow{AM})$, ou encore : $\forall\, A, M \in E,\ f(M) = f(A) + L_f(\overrightarrow{AM})$, ou encore : $\forall\, A \in E, \forall\, \overrightarrow{u} \in E,\ f(A+\overrightarrow{u}) = f(A) + L_f(\overrightarrow{u})$. De plus, si $A \in E$, f possède des points fixes ssi $\overrightarrow{Af(A)} \in \mathrm{Im}(L_f - \mathrm{id})$, auquel cas l'ensemble des points fixes de f (noté $\mathrm{Inv}(f)$) est un s.e.a. de direction $\ker(L_f - \mathrm{id})$.

Preuve: g étant linéaire, on a $g(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, donc $\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{0})$ ce qui prouve l'unicité de $\overrightarrow{u}$. Mais alors $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ ce qui prouve l'unicité de g. Soit $A, M \in E, f(M) - f(A) = \overrightarrow{u} + g(M) - \overrightarrow{u} - g(A) = g(M - A) = g(\overrightarrow{AM})$.

$f(M) = M \iff f(A) + L_f(\overrightarrow{AM}) = M \iff \overrightarrow{Af(A)} = (\mathrm{id} - L_f)(\overrightarrow{AM})$. Si c'est le cas et si A désigne un point fixe, alors $M \in \mathrm{Inv}(f) \iff M - A = \overrightarrow{u} + L_f(M) - [\overrightarrow{u} + L_f(A)] = L_f(M - A)$. □

Exemple: homothéties affines. Si $L_f = h_\lambda = \lambda\mathrm{id}$ une homothétie vectorielle ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$), soit $\overrightarrow{u} \in E$ et $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ h_\lambda$. $\mathrm{id} - h$ est une homothétie de rapport $1 - \lambda \neq 0$, c'est un automorphisme de E, donc f possède un unique point fixe : C. On a alors $M' = f(M) \iff M' - C = M' - C' = h(M - C)$ *i.e.* $\overrightarrow{CM'} = \lambda\overrightarrow{CM}$, on dit que f est l'homothétie de centre C et de rapport λ.

2) Propriétés des applications affines

- Une application affine f est entièrement déterminée par la donnée d'un point O et son image $O' = f(O)$, et la partie linéaire L_f.
- Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications affines, alors $f \circ g$ est une application affine de E vers G, et $L_{f\circ g} = L_f \circ L_g$.
- Soit $f : E \to F$ une application affine, soit $(\mathscr{H}, H)$ un s.e.a. de E, alors $f < \mathscr{H} >$ est un s.e.a. de F de direction $L_f < H >$.
- Une application affine transforme trois points alignés en trois points alignés, et conserve le parallélisme.
- Soit $f : E \to E$ une application affine et soit $A \in E$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ et une unique application affine g tels que : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ avec $g(A) = A$.

Exemples:
- Projection affine : si p est affine de E vers E et si $p \circ p = p$, alors $L_p \circ L_p = L_p$ donc L_p est une projection vectorielle sur $F = \ker(L_p - \mathrm{id})$ parallèlement à $G = \ker(L_p)$, alors $\mathrm{Im}(p - \mathrm{id}) = \ker(p) = G$. Soit A un point et A' son image, alors $p(A') = A'$, A' est donc invariant, on en déduit que $\overrightarrow{AA'} \in \mathrm{Im}(L_p - \mathrm{id}_E) = \ker(L_p)$ et que l'ensemble des invariants de p est le s.e.a. $\mathscr{F}$ passant par A et dirigé par $F = \ker(L_p - \mathrm{id}_E)$, A' appartient au s.e.a. passant par A et de direction G, si on note $\mathscr{G}_A$ celui-ci, alors $\{A'\} = \mathscr{G}_A \cap \mathscr{F}$. On dit que :

$$\boxed{p \text{ est la projection affine sur } \mathscr{F} \text{ et parallèlement à } G.}$$

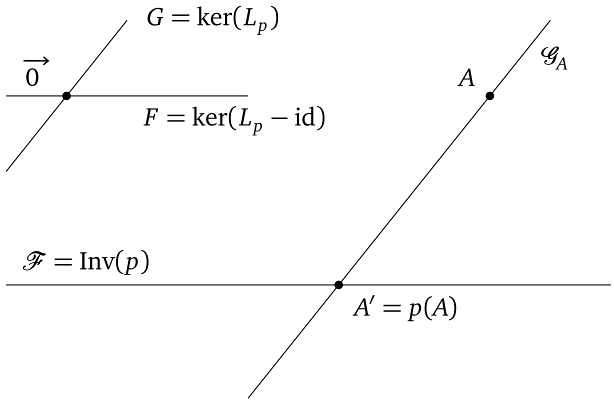


FIGURE 25.2: Projection affine

– Symétrie affine : si s est affine de E vers E et si $s \circ s = \mathrm{id}_E$, alors $L_s \circ L_s = \mathrm{id}_E$ donc L_s est une symétrie vectorielle par rapport à $F = \ker(L_s - \mathrm{id})$ et parallèlement à $G = \ker(L_s + \mathrm{id})$, et on a $\mathrm{Im}(L_s - \mathrm{id}) = \ker(L_s + \mathrm{id}) = G$. Soit $A \in E$ et A' son image, on a $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{s(A')s(A)} = L_s(\overrightarrow{A'A})$, donc $\overrightarrow{AA'} \in G$, on en déduit que s à des points invariants, si on pose I le milieu de $[A,A']$, alors $\overrightarrow{AI} \in G$ donc $\overrightarrow{A'I'} = -\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{A'I}$ et donc $I' = I$: c'est un point invariant, on en déduit que l'ensemble des points invariants est le s.e.a. $\mathscr{F}$ passant par I et dirigé par F. On dit que :

$$\boxed{s \text{ est la symétrie affine par rapport à } \mathscr{F} \text{ et parallèlement à G.}}$$

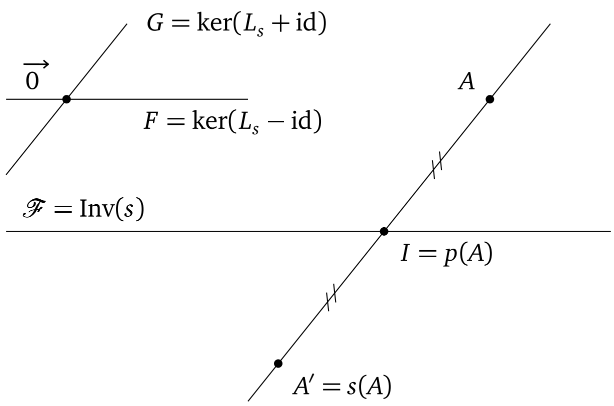


FIGURE 25.3: Symétrie affine

3) Groupe affine

DÉFINITION 25.6
On dit que $f : E \to F$ est un isomorphisme affine de E vers F lorsque f est affine et bijective. Lorsque $F = E$, on dit que f est un automorphisme affine de E, l'ensemble des automorphismes affines de E est noté $\mathrm{GA}(E)$ et appelé groupe affine de E. On remarquera que $GL(E) \subset \mathrm{GA}(E)$.

Exemples:
– Une translation est un automorphisme affine.
– Une homothétie de centre C et de rapport non nul λ, est un automorphisme affine.
– Une projection affine qui n'est pas id_E n'est pas un automorphisme affine.
– Une symétrie affine est un automorphisme affine.

THÉORÈME 25.2

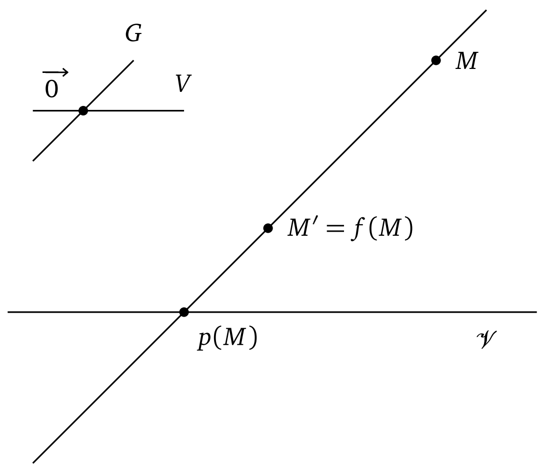
Une application affine $f : E \to F$ est un isomorphisme affine ssi L_f est isomorphisme vectoriel de E vers F, si c'est le cas, alors f^{-1} est également une application affine et sa partie linéaire est $L_{f^{-1}} = [L_f]^{-1}$. En particulier, lorsque $F = E$, $f \in \mathrm{GA}(E)$ ssi $L_f \in GL(E)$.

Preuve: On a $f = t_{\vec{u}} \circ L_f$, comme $t_{\vec{u}}$ est une bijection, il en découle que f est bijective ssi L_f est bijective. Si c'est le cas, alors $f^{-1} = [L_f]^{-1} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-L_f^{-1}(\vec{u})} \circ [L_f]^{-1}$, ce qui prouve que f^{-1} est affine de partie linéaire $[L_f]^{-1}$. □

Conséquence : $\mathrm{GA}(E)$, l'ensemble des automorphismes affines de E, est un groupe pour la loi $\circ$, d'où le nom de *groupe affine* de E (c'est un sous - groupe du groupe des permutations de E).

DÉFINITION 25.7 (affinité)

Soit $(\mathscr{V}, V)$ un s.e.a. de E, soit G un supplémentaire de V, soit α un réel, et soit p la projection affine sur $\mathscr{V}$ parallèlement à G. Pour tout point M de E, on note $f(M) = M'$ le point défini par $\overrightarrow{p(M)M'} = \alpha\overrightarrow{p(M)M}$. L'application f ainsi définie est appelé affinité de rapport α, par rapport à $\mathscr{V}$ et parallèlement à G. On remarquera que pour $\alpha = 0$ on a $f = p$, pour $\alpha = 1$, on a $f = \mathrm{id}_E$, et pour $\alpha = -1$ on a $f = s_{\mathscr{V}}$ la symétrie affine par rapport à $\mathscr{V}$ et parallèlement à G.



THÉORÈME 25.3

L'affinité f définie ci - dessus et une application affine, de plus, si $\alpha \neq 0$ alors f est un automorphisme affine, et la réciproque est l'affinité par rapport à $\mathscr{V}$, parallèlement à G, et de rapport $1/\alpha$.

Preuve: On a $f(M) = p(M) + \alpha M - \alpha p(M) = (1-\alpha)p(\vec{0}) + [\alpha \mathrm{id}_E + (1-\alpha)L_p](M)$, ce qui prouve que f est affine avec $L_f = \alpha \mathrm{id}_E + (1-\alpha)L_p$. D'autre part, on a par construction, $p(M') = p(M)$, d'où en reprenant la définition, $\overrightarrow{p(M')M'} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{p(M')M'}$, ce qui prouve que M' est l'image de M par l'affinité de rapport $1/\alpha$, par rapport à $\mathscr{V}$ et parallèlement à G. □

Groupe des homothéties - translations : L'application $L : \mathrm{GA}(E) \to GL(E)$ définie par $L(f) = L_f$ est un morphisme de groupes. Son noyau est $\ker(L) = \mathscr{T}_E$, on retrouve que l'ensemble des translations de E est un groupe pour la loi $\circ$. Notons $H_v(E)$ l'ensemble des homothéties vectorielles de E (de rapport non nul), $H_v(E)$ est un sous - groupe de $GL(E)$, donc son image réciproque par L est un sous - groupe de $\mathrm{GA}(E)$, or cette image réciproque est l'ensemble des automorphisme affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle, donc $L^{-1} < H_v(E) >= \mathscr{T}_E \cup \mathscr{H}_E$, ensemble des translations et des homothéties affines de E, appelé *groupe des homothéties - translations*.

4) Expression analytique d'une application affine

Soit $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ un repère cartésien de E, $\mathscr{R}' = (I, \mathscr{B}')$ un repère cartésien de F, et $f : E \to F$ une application affine. Pour $M \in E$, on pose $M' = f(M)$, $X = \text{Coord}_{\mathscr{R}}(M)$, $Y = \text{Coord}_{\mathscr{R}'}(M')$ et $Y_0 = \text{Coord}_{\mathscr{R}'}(O')$. On a :

$$\begin{aligned} Y =& \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{IM'})\\ =& \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{IO'}) + \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{O'M'})\\ =& \text{Coord}_{\mathscr{R}'}(O') + \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(L_f(\overrightarrow{OM}))\\ =& Y_0 + \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\text{mat}}(L_f)X \end{aligned}$$

On obtient ainsi la relation :

$$Y = Y_0 + AX \text{ où } Y_0 = \text{Coord}_{\mathscr{R}'}(O'),\ X = \text{Coord}_{\mathscr{R}}(M) \text{ et } A = \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\text{mat}}(L_f).$$

Cette relation écrite sous la forme d'un système est appelée *expression analytique* de f dans les repères $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} y_1 & = & u_1 & + & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ y_n & = & u_n & + & a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p \end{array}\right. .$$

III) Barycentres

1) Définition

DÉFINITION 25.8

*Soit $A_1, \cdots, A_n$ des points de E, et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ des réels, On appelle système de points pondérés la famille $S = ((A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n))$, et on appelle poids du système S le nombre $p(S) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Lorsque le poids du système S est **non nul**, on appelle barycentre du système S le point G_S défini par $G_S = \frac{\alpha_1}{p(S)}A_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{p(S)}A_n$, ce que l'on note : $G_S = \text{Bar}[(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)]$. Lorsque tous les coefficients α_i sont égaux, G_S est appelé isobarycentre (ou centre de gravité) du système S.*

2) Propriétés

- Si $G = \text{Bar}[(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)]$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $G = \text{Bar}[(A_1, \lambda\alpha_1), \cdots, (A_n, \lambda\alpha_n)]$. En prenant $\lambda = 1/p(S)$, on peut imposer que le poids du système vaut 1.
- Soit $S = ((A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n))$ un système de poids non nul, et soit $G \in E$, alors :

$$G = \text{Bar}(S) \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

- Soit $S = ((A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n))$ un système de poids non nul, et soit $G \in E$, alors :

$$G = \text{Bar}(S) \iff \exists\ M \in E, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = p(S)\overrightarrow{MG}.$$

  Si c'est le cas, alors l'égalité de droite a lieu **pour tout** point $M \in E$. En particulier, si $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ est un repère de E, en prenant $M = O$, on obtient que $\text{Coord}_{\mathscr{R}}(G) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{p(S)} \text{Coord}_{\mathscr{R}}(A_i)$.

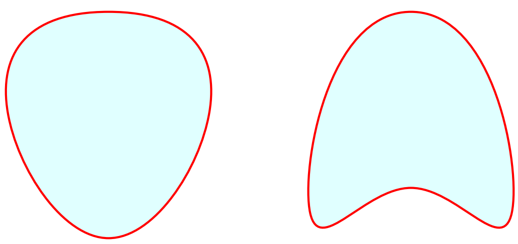
- Si $(\mathscr{H}, H)$ est un s.e.a. de E, alors $\mathscr{H}$ est stable par barycentration, c'est à dire que pour tout système pondéré de points de $\mathscr{H}$ et de poids non nul, le barycentre correspondant est dans $\mathscr{H}$.
  Preuve: Si $G = \text{Bar}[(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)]$, alors $\overrightarrow{A_1G} = \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{p(S)} \overrightarrow{A_1A_i} \in H$. □
- Une application affine conserve le barycentre, c'est à dire si $G = \text{Bar}[(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)]$, alors $f(G) = \text{Bar}[(f(A_1), \alpha_1), \cdots, (f(A_n), \alpha_n)]$.
  Preuve: On a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$, donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_f(\overrightarrow{GA_i}) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire :
  $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \overrightarrow{0}$$
  ce qui prouve le résultat. □
- *Associativité du barycentre* : Soit $G = \text{Bar}[(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)]$, on considère le sous - système $S' = [(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_k, \alpha_k)]$, avec $1 \leqslant k < n$, on suppose $p(S') \neq 0$ et on pose :
  $$G' = \text{Bar}[(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_k, \alpha_k)]$$
  alors on a :
  $$G = \text{Bar}[(G', p(S')), (A_{k+1}, \alpha_{k+1}), \cdots, (A_n, \alpha_n)]$$
  Preuve: On a $p(S)G = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k + \alpha_{k+1} A_{k+1} + \cdots + \alpha_n A_n = p(S')G' + \alpha_{k+1} A_{k+1} + \cdots + \alpha_n A_n$, ce qui prouve la formule. □

Exercice: Intersection des trois médianes du triangle.

3) Parties convexes

DÉFINITION 25.9 (segment)
Soit A et B deux points distincts de E, le segment $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de coefficients de même signe (et de somme non nulle). D'après les propriétés précédentes, on peut écrire :
$$[A, B] = \{tA + (1-t)B \ / \ t \in [0; 1]\ \}.$$

DÉFINITION 25.10 (convexe)
Soit $\mathscr{V}$ une partie non vide de E, on dit que $\mathscr{V}$ est convexe lorsque pour tous points A et B de $\mathscr{V}$, le segment $[A, B]$ est inclus dans $\mathscr{V}$.



Convexe Non convexe

Exemples:
- Un s.e.a. de E est convexe.
- Un segment $[A, B]$ est convexe.
  Preuve: Soit $C, D \in [A, B]$, on a $C = tA + (1-t)B$ et $D = uA + (1-u)B$ avec $t, u \in [0; 1]$. Soit $s \in [0; 1]$, alors $sC + (1-s)D = [ts + u(1-s)]A + [s(1-t) + (1-s)(1-u)]B$, il est facile de vérifier que ces deux coefficients sont positifs et de somme 1, donc le point $sC + (1-s)D \in [A, B]$, c'est à dire $[C, D] \subset [A, B]$. □

- Si E est euclidien, alors une boule (ouverte ou fermée) est convexe, par contre une sphère n'est pas convexe.
  Preuve: Soit $O \in E$ et $\mathscr{S} = \{\ M \in E\ /\ \|\overrightarrow{OM}\| = r\ \}$ la sphère de centre O et de rayon $r > 0$. Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{S}$ et $C = 1/2A + 1/2B$ le milieu de $[A,B]$, supposons $C \in \mathscr{S}$ alors $r = \|\overrightarrow{OC}\| = 1/2\|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\| \leqslant 1/2\|\overrightarrow{OA}\| + 1/2\|\overrightarrow{OB}\| \leqslant r/2 + r/2 = r$, par conséquent $\|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OA}\| + \|\overrightarrow{OB}\|$ donc il existe $\lambda > 0$ tel que $\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB}$, mais l'égalité des normes entraîne $\lambda = 1$ et donc $A = B$ ce qui est absurde, $\mathscr{S}$ n'est donc pas convexe. □

Propriétés :
- L'image d'un segment par une application affine, est un segment.
  Preuve: Soit $[A,B]$ un segment, $f : E \to E$ une application affine, et $M' \in E$, $M' \in f < [A,B] > \iff \exists\ t \in [0;1], M' = f(tA + (1-t)B) = tf(A) + (1-t)f(B) \iff M' \in [f(A), f(B)]$, donc $f < [A,B] >= [f(A), f(B)]$. □
- Une intersection non vide entre deux convexes, est un convexe.
- L'image d'un convexe par une application affine est un convexe.

Exercice: Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan affine E, on appelle *intérieur du triangle bords inclus*, l'ensemble des barycentres de A, B, C affectés de réels positifs (justifier la définition), on appelle $\mathscr{T}$ cet ensemble, montrer que $\mathscr{T}$ est un convexe. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme affine, montrer que f possède un maximum et un minimum sur $\mathscr{T}$, et que ceux - ci sont atteints en un sommet.

IV) Isométries affines

1) Calculs de distances

E est un espace affine euclidien.

DÉFINITION 25.11
Soit $(\mathscr{H}, H)$ un s.e.a. de E, la projection affine orthogonale sur $\mathscr{H}$ est la projection affine sur $\mathscr{H}$ et parallèlement à $H^\perp$, on la notera $p_{\mathscr{H}}$.

Soit $(\mathscr{H}, H)$ un s.e.a. de E, soit $M \in E$, pour $A \in \mathscr{H}$, on pose $f(A) = \|\overrightarrow{AM}\|^2$, notons M' le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{H}$, alors $f(A) = \|\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}\|^2 = \|\overrightarrow{AM'}\|^2 + \|\overrightarrow{M'M}\|^2 \geqslant \|\overrightarrow{M'M}\|^2$, on voit donc que f est minorée sur $\mathscr{H}$ par la quantité $\|\overrightarrow{M'M}\|^2$, et que cette quantité est atteinte par f ssi $A = M'$, on peut donc énoncer :

THÉORÈME 25.4
Si $(\mathscr{H}, H)$ est un s.e.a. de E et M un point de E, alors l'ensemble $\{\|\overrightarrow{AM}\|\ /\ A \in \mathscr{H}\ \}$ possède un minimum, atteint uniquement pour $A = M'$ le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{H}$, ce minimum est $\|\overrightarrow{M'M}\|$ est appelé distance de M à $\mathscr{H}$, noté $d(M, \mathscr{H})$. De plus $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{p_{\mathscr{H}}(A)p_{\mathscr{H}}(M)} = p_H(\overrightarrow{AM})$ et $\overrightarrow{M'M} = p_{H^\perp}(\overrightarrow{AM})$, par conséquent, pour tout point A de $\mathscr{H}$: $d(M, \mathscr{H}) = d(\overrightarrow{AM}, H)$.

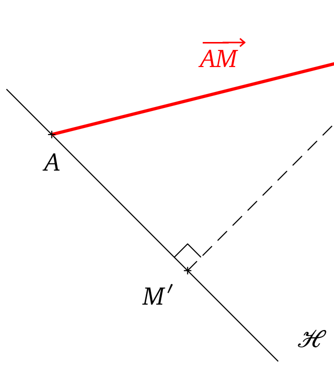


FIGURE 25.4: Distance de M à $\mathscr{H}$

Exemples:

- Distance d'un point M à une droite affine $(\mathscr{D}, D)$ dans le plan :

  Soit A un point de $\mathscr{D}$, alors $d(M, \mathscr{D}) = d(\overrightarrow{AM}, D)$, soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul orthogonal à D, le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sur $D^{\perp}$ est $(\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{v})\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2}$, d'où la formule :

  $$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|(\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{v})|}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$

  Si $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormé de E, et si $ax + by - c = 0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{D}$, alors on peut prendre $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, ce qui donne :

  $$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- En dimension 3, distance d'un point M à un plan affine $(\mathscr{P}, P)$:

  Soit A un point de $\mathscr{P}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base de P, un vecteur orthogonal à P est $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, on a donc :

  $$d(M, \mathscr{P}) = \frac{|(\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{w})|}{\|\overrightarrow{w}\|} = \frac{|[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}.$$

  Si $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormé de E, et si $ax + by + cz - d = 0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{P}$, alors on peut prendre $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$, ce qui donne :

  $$d(M, \mathscr{P}) = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

- En dimension 3, distance d'un point M à une droite affine $(\mathscr{D}, D)$:

  Soit A un point de $\mathscr{D}$ et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de D, alors :

  $$\begin{aligned} d(M, \mathscr{D}) &= \|\overrightarrow{AM} - p_D(\overrightarrow{AM})\| \\ &= \left\|\overrightarrow{AM} - \frac{(\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{u})}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}\right\| \\ &= \sqrt{\|\overrightarrow{AM}\|^2 - \frac{(\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{u})^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2}} \\ &= \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}. \end{aligned}$$

Exercice: Soient A et B deux points distincts de E, et soit $k \in \mathbb{R}^{*+}$. Étudier le lieu des points M tels que $MA = kMB$, on séparera les cas $k = 1$ et $k \neq 1$.

2) Isométries, généralités

DÉFINITION 25.12
Une isométrie est une application f de E vers F qui conserve les distances c'est à dire telle que : $\forall A,B \in E, \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$. *L'ensemble des isométries de E dans F est noté* $\text{Is}(E,F)$ *et* $\text{Is}(E,E) = \text{Is}(E)$.

THÉORÈME 25.5
Une application $f : E \to E$ est une isométrie si et seulement si f est affine et sa partie linéaire, L_f, est un endomorphisme orthogonal de E, c'est à dire : $f \in \text{Is}(E) \iff L_f \in \text{O}(E)$.

Preuve: Si $\vec{u} \in E$ et $A \in E$, soit $B = A + \vec{u}$, alors $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|L_f(\overrightarrow{AB})\| = \|L_f(\vec{u})\|$. □

Exemples:
- Une translation est une isométrie affine.
- Une symétrie affine orthogonale est une isométrie affine.
- Une projection affine orthogonale autre que l'identité n'est pas une isométrie affine.

THÉORÈME 25.6
$(\text{Is}(E), \circ)$ *est un sous - groupe de* $(\text{GA}(E), \circ)$. *L'application $D : \text{Is}(E) \to \{\pm 1\}$ définie par $D(f) = \det(L_f)$ est un morphisme de groupes, son noyau est donc un sous - groupe de $\text{Is}(E)$ que l'on note $\text{Is}^+(E)$: ensemble des isométries positives ou* ***déplacements*** *de E, le complémentaire de cet ensemble dans $\text{Is}(E)$ est noté $\text{Is}^-(E)$: ensemble des isométries négatives ou* ***antidéplacements*** *de E.*

Remarque: $f \in \text{Is}^+(E) \iff L_f \in \text{SO}(E)$, ce qui signifie que L_f est une rotation. On rappelle que si $g \in \text{O}(E)$, alors $\ker(g - \text{id}_E)^\perp = \text{Im}(g - \text{id}_E)$.

3) Isométries de la droite

E est une droite euclidienne orientée, $f \in \text{Is}(E)$. On sait que la partie linéaire est un endomorphisme orthogonale : $L_f \in \text{O}(E) = \{\pm \text{id}_E\}$, on a donc deux cas :
- Si $L_f = \text{id}_E$: alors f est une **translation**, c'est un déplacement.
- Si $L_f = -\text{id}_E = h_{-1}$: alors f est une homothétie affine de rapport -1, c'est à dire une **symétrie centrale**, c'est un antidéplacement.

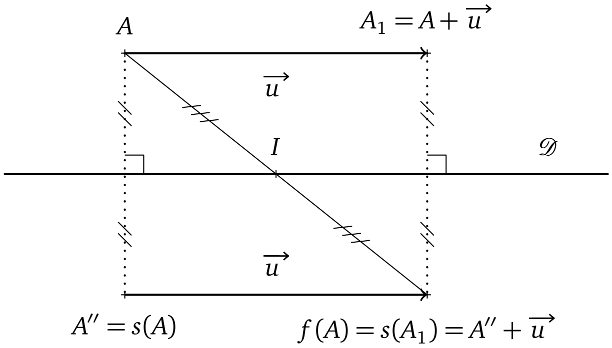
4) Isométries du plan

E est un plan euclidien orienté, $f \in \text{Is}(E)$ et $\text{Inv}(f)$ désigne l'ensemble des points fixes de f.

- $\text{Inv}(f) = E$: alors $f = \text{id}_E \in \text{Is}^+(E)$.
- $\text{Inv}(f) = \mathscr{D}$, droite affine, alors $f = s_{\mathscr{D}} \in \text{Is}^-(E)$, réflexion d'axe $\mathscr{D}$.
  Preuve: Soit D la direction de $\mathscr{D}$, alors $\ker(L_f - \text{id}_E) = D$, donc L_f est la réflexion d'axe D, d'où $L_f^2 = \text{id}_E$, f^2 est donc une translation qui possède des points fixes, d'où $f^2 = \text{id}_E$, ce qui prouve que f est la symétrie par rapport à $\mathscr{D}$ et parallèlement à $\ker(L_f + \text{id}_E) = D^\perp$: c'est donc une symétrie orthogonale. □
- $\text{Inv}(f) = \{O\}$: alors $f = \mathscr{R}_{(O,\theta)} \in \text{Is}^+(E)$, rotation de centre O et d'angle $\theta \neq 0(2\pi)$.
  Preuve: On a $\ker(L_f - \text{id}_E) = \{\vec{0}\}$, donc L_f est une rotation d'angle $\theta \neq 0(2\pi)$. Soit $M \in E$, on a $f(O) = O$, en posant $M' = f(M)$ on a $\overrightarrow{OM'} = L_f(\overrightarrow{OM})$, par conséquent $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta(2\pi)$, on dit que f est la rotation de centre O et d'angle θ : $f = \mathscr{R}_{(O,\theta)}$. □

– $\mathrm{Inv}(f)=\emptyset$: soit f est une translation de vecteur non nul (et alors $f\in\mathrm{Is}^+(E)$), soit f est la composée commutative entre une réflexion d'axe $\mathscr{D}$ et une translation de vecteur non nul appartenant à la direction de $\mathscr{D}$: $f=t_{\overrightarrow{u}}\circ s_{\mathscr{D}}=s_{\mathscr{D}}\circ t_{\overrightarrow{u}}$ (et alors $f\in\mathrm{Is}^-(E)$).

Preuve: Si $\ker(L_f-\mathrm{id}_E)=\{\overrightarrow{0}\}$ alors $\mathrm{Im}(L_f-\mathrm{id}_E)=E$ donc f possède des points fixes ce qui est exclu. Il reste donc deux cas :
1) $\ker(L_f-\mathrm{id}_E)=E$: alors $L_f=\mathrm{id}_E$ donc f est une translation.
2) $\ker(L_f-\mathrm{id}_E)=D$ droite vectorielle, alors L_f est une réflexion vectorielle et donc $L_f^2=\mathrm{id}_E$, dans ce cas f est la composée (commutative) entre la réflexion s d'axe $(\mathscr{D},D)$ passant par $I=\mathrm{Mil}[A,f(A)]$, et la translation de vecteur non nul $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{s(A)f(A)}\in D$, où A désigne un point quelconque de E, on remarquera que $\overrightarrow{u}=p_D(\overrightarrow{Af(A)})$. □



$$f=t_{\overrightarrow{u}}\circ s=s\circ t_{\overrightarrow{u}}$$

FIGURE 25.5: Symétrie glissée

En résumé :

$\mathrm{Inv}(f)=E$	$f=\mathrm{id}_E$
$\mathrm{Inv}(f)=\mathscr{D}$	$f=s_{\mathscr{D}}$
$\mathrm{Inv}(f)=\{O\}$	$f=\mathscr{R}_{(O,\theta)}$
$\mathrm{Inv}(f)=\emptyset$	$f=t_{\overrightarrow{u}}$ ou $f=s_{\mathscr{D}}\circ t_{\overrightarrow{u}}=t_{\overrightarrow{u}}\circ s_{\mathscr{D}}$ avec $\overrightarrow{u}\in D$

5) Isométries de l'espace

E est un espace euclidien orienté de dimension 3, $f\in\mathrm{Is}(E)$ et $\mathrm{Inv}(f)$ l'ensemble des points fixes de f.

– $\mathrm{Inv}(f)=E$: alors $f=\mathrm{id}_E\in\mathrm{Is}^+(E)$.

– $\mathrm{Inv}(f)=\mathscr{P}$, plan affine : alors $f=s_{\mathscr{P}}\in\mathrm{Is}^-(E)$, réflexion de plan $\mathscr{P}$.

Preuve: L_f est une réflexion vectorielle, donc $L_f^2=\mathrm{id}_E$, par conséquent f^2 est une translation avec points fixes (ceux de $\mathscr{P}$), donc f est la symétrie affine par rapport à $\mathscr{P}$ est parallèlement à $\ker(L_f+\mathrm{id}_E)=P^\perp$, c'est donc une symétrie orthogonale. □

– $\mathrm{Inv}(f)=\mathscr{D}$, droite affine : alors f est une rotation d'axe $\mathscr{D}$ et d'angle $\theta\neq 0(2\pi)$.

Preuve: L_f est une rotation d'axe $D=\mathrm{Vect}[\overrightarrow{u}]$ et d'angle θ dans le plan $D^\perp$ orienté par $\overrightarrow{u}$. Soit M un point de E et H son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$, alors $f(H)=H$, donc $\overrightarrow{Hf(M)}=L_f(\overrightarrow{HM})$, ce qui signifie que $\overrightarrow{Hf(M)}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{HM}$ par la rotation L_f. □

– $\mathrm{Inv}(f)=\{O\}$, alors f est la composée d'une rotation d'axe $\mathscr{D}$ passant par O et d'une réflexion par rapport à un plan $\mathscr{P}$ passant par O et orthogonal à $\mathscr{D}$.

Preuve: On a $\ker(L_f-\mathrm{id}_E)=\{\overrightarrow{0}\}$, donc L_f est la composée commutative entre une rotation d'axe $D=\ker(L_f+\mathrm{id}_E)$, d'angle θ et la réflexion de plan $P=D^\perp$. Soit $\mathscr{D}$ la droite affine passant par O et de direction D, et $\mathscr{P}$ le plan affine passant par O et de direction P, notons $s=s_{\mathscr{P}}$ et $r=\mathscr{R}_{(\mathscr{D},\theta)}$, alors les parties linéaires de $s\circ r$ et de $r\circ s$ coïncident avec L_f, de plus O est un point fixe pour l'une et l'autre ainsi que pour f, par conséquent $f=r\circ s=s\circ r$. □

– $\text{Inv}(f) = \emptyset$, alors soit f est une translation de vecteur non nul (et alors $f \in \text{Is}^+(E)$), soit f est la composée commutative entre une réflexion de plan $\mathscr{P}$ et une translation de vecteur non nul appartenant à P (et alors $f \in \text{Is}^-(E)$), soit f est la composée commutative entre une rotation d'axe $\mathscr{D}$ et une translation de vecteur non nul appartenant à D (et alors $f \in \text{Is}^+(E)$, on dit que f est un **vissage**).

Preuve: On ne peut pas avoir $\ker(L_f - \text{id}_E) = \{\overrightarrow{0}\}$ sinon on aurait $\text{Im}(L_f - \text{id}_E) = E$ et f aurait alors des points fixes. Il y a donc trois cas :
1) $\ker(L_f - \text{id}_E) = E$: alors $L_f = \text{id}_E$ donc f est une translation de vecteur non nul, et $f \in \text{Is}^+(E)$.
2) $\ker(L_f - \text{id}_E) = P$ plan vectoriel : alors L_f est la réflexion de plan P, soit $A \in E$ et $A' = f(A)$, dans ce cas, f est la composée commutative entre la réflexion s de plan $\mathscr{P}$ passant par $\text{Mil}[A,A']$ et de direction P, et la translation de vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{s(A)A'}$. On remarquera que $\overrightarrow{u} = p_P(\overrightarrow{AA'})$.
3) $\ker(L_f - \text{id}_E) = D$ droite vectorielle : alors L_f est une rotation vectorielle d'axe D et d'angle θ. On fixe un point A de E et on pose $A' = f(A)$, soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et de direction $D^\perp$, notons H le projeté orthogonal de $f(A)$ sur $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{HA'} \in D$, soit $g = t_{-\overrightarrow{v}} \circ f$, alors $L_g = L_f$, on a $\overrightarrow{Ag(A)} = \overrightarrow{AH} \in P = \text{Im}(L_g - \text{id}_E)$, donc g possède des points fixes, plus précisément, $\text{Inv}(g)$ est une droite affine de direction $\ker(L_g - \text{id}_E) = D$, g est donc une rotation vectorielle, et on a $f = t_{\overrightarrow{v}} \circ g$. De plus $g(A + \overrightarrow{v}) = g(A) + L_f(\overrightarrow{v}) = g(A) + \overrightarrow{v} = A'$, donc on a également $f = g \circ t_{\overrightarrow{v}}$. On remarquera que $\overrightarrow{v} = p_D(\overrightarrow{AA'})$ et que $M \in \mathscr{P} \iff f(M) = M + \overrightarrow{v}$. □

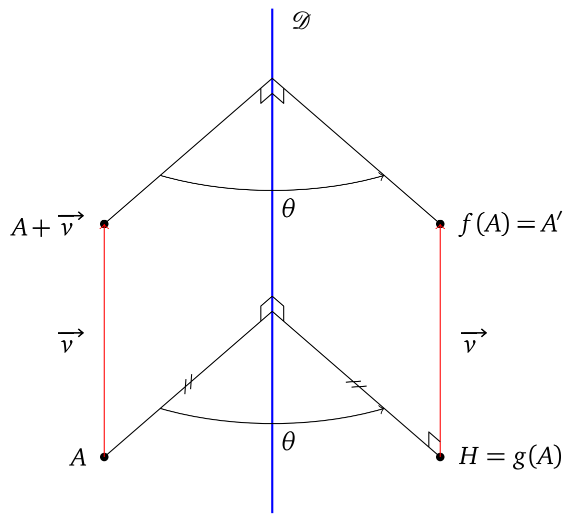


FIGURE 25.6: Vissage

En résumé :

$\text{Inv}(f) = E$	$f = \text{id}_E$
$\text{Inv}(f) = \mathscr{P}$	$f = s_{\mathscr{P}}$
$\text{Inv}(f) = \mathscr{D}$	$f = \mathscr{R}_{(\mathscr{D},\theta)}$
$\text{Inv}(f) = \{O\}$	$f = \mathscr{R}_{(\mathscr{D},\theta)} \circ s_{\mathscr{P}} = s_{\mathscr{P}} \circ \mathscr{R}_{(\mathscr{D},\theta)}$ avec $O \in \mathscr{D}$, $O \in \mathscr{P}$ et $D = P^\perp$
$\text{Inv}(f) = \emptyset$	$f = t_{\overrightarrow{u}}$ ou $f = s_{\mathscr{P}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\mathscr{P}}$ avec $\overrightarrow{u} \in P$, ou vissage

V) Exercices

★Exercice 25.1
Soit $f : E \to E$ une application affine. Montrer que f transforme toute droite en une droite parallèle si et seulement si f appartient au groupe des homothéties-translations.

★Exercice 25.2
Soit h une homothétie de centre A et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et soit $f \in GA(E)$, montrer que $f \circ h \circ f^{-1}$ est une homothétie.

★Exercice 25.3
Soit E un espace affine de dimension 3, on définit l'application affine f_α par son expression analytique dans un repère, déterminer la nature de f_α :

$$a)\ \begin{cases} x' &= -x-2y-2z+2 \\ y' &= x+2y+z-1 \\ z' &= -x-y+\alpha \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x' &= \frac{1}{7}(2x+3y+z)+1 \\ y' &= \frac{1}{7}(2x+3y+z)+1 \\ z' &= \frac{1}{7}(2x+3y+z)+\alpha \end{cases}.$$

★Exercice 25.4
Soit E un espace affine de dimension 3, on se donne un plan $\mathscr{P}_0$ et n droites $\mathfrak{D}_1,\ldots,\mathfrak{D}_n$. Un plan variable $\mathscr{P}$ se déplace parallèlement à $\mathscr{P}_0$ et coupe les droites $\mathfrak{D}_i$ en un point M_i ($i \in [\![1..n]\!]$), soit G l'isobarycentre des points M_i. Étudier le lieu des points G.

★Exercice 25.5
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct, étudier la nature de l'application f définie par son expression analytique :

$$a)\ \begin{cases} x' &= \frac{1}{5}(-3x+4y+12) \\ y' &= \frac{1}{5}(4x+3y-6) \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x' &= \frac{1}{5}(3x+4y+2) \\ y' &= \frac{1}{5}(-4x+3y+14) \end{cases}.$$

★Exercice 25.6
Soit E un espace affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormal direct, étudier la nature de l'application f dont l'expression analytique est :

$$a)\ \begin{cases} x' &= z+1 \\ y' &= x-3 \\ z' &= y+2 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x' &= \frac{1}{3}(-x+2y+2z)+1 \\ y' &= \frac{1}{3}(2x-y+2z)-1 \\ z' &= \frac{1}{3}(2x+2y-z)-1 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x' &= \frac{1}{2}(x+y-\sqrt{2}z)+1 \\ y' &= \frac{1}{2}(x+y+\sqrt{2}z)+1 \\ z' &= \frac{1}{2}(-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y)+1 \end{cases}.$$

★Exercice 25.7
E est un espace euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+2y+z=3$ et la droite $\mathfrak{D}$: $\begin{cases} -3x+2y+2z &= 4 \\ -7x+2y+6z &= 4 \end{cases}$, déterminer l'expression analytique de $s_{\mathscr{P}}$ la réflexion par rapport à $\mathscr{P}$, et celle de $s_{\mathfrak{D}}$, la symétrie orthogonale par rapport à $\mathfrak{D}$.