



## Sujets de l'année 2005-2006

---

### 1 Devoir à la maison

#### Exercice 1

Soient  $a, b, c$  des réels vérifiant  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  et  $P$  la matrice réelle  $3 \times 3$  suivante :

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de  $P$ .
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\ker P$  et  $\operatorname{Im} P$ .
3. Soit  $Q = I - P$ , calculer  $P^2$ ,  $PQ$ ,  $QP$  et  $Q^2$ .
4. Caractériser géométriquement  $P$  et  $Q$ .

[Correction ▼](#)

[002578]

#### Exercice 2

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose  $u$  nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif  $n$  tel que  $u^n = 0$ .

1. Montrer que  $u$  n'est pas inversible.
2. Déterminer les valeurs propres de  $u$  et les sous-espaces propres associés.

[Correction ▼](#)

[002579]

#### Exercice 3

Soit  $M$  la matrice de  $\mathbb{R}^4$  suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de  $M$  et ses sous-espaces propres.
2. Montrer que  $M$  est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et  $P$  la matrice de passage.
4. On a  $D = P^{-1}MP$ , pour  $k \in \mathbb{N}$  exprimer  $M^k$  en fonction de  $D^k$ , puis calculer  $M^k$ .

[Correction ▼](#)

[002580]

## 2 Partiel

### Exercice 4

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. Démontrer que les valeurs propres de  $A$  sont  $-1$  et  $2$ . Déterminer les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que  $A$  est diagonalisable et donner une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.
4. Trouver une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

[Correction ▼](#)

[002581]

### Exercice 5

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $A$  la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de  $A$  et déterminer pour quelles valeurs de  $a$  la matrice est inversible.
2. Calculer  $A^{-1}$  lorsque  $A$  est inversible.

[Correction ▼](#)

[002582]

### Exercice 6

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Expliquer sans calcul pourquoi la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

[Correction ▼](#)

[002583]

### Exercice 7

Soit  $A$  une matrice  $2 \times 2$  à coefficients réels. On suppose que dans chaque colonne de  $A$  la somme des coefficients est égale à 1.

1. Soient  $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , on suppose que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

montrer qu'alors

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$

2. Soit le vecteur  $\varepsilon = (1, -1)$ , montrer que c'est un vecteur propre de  $A$ . On notera  $\lambda$  sa valeur propre.
3. Montrer que si  $v$  est un vecteur propre de  $A$  non colinéaire à  $\varepsilon$ , alors la valeur propre associée à  $v$  est égale à 1.
4. Soit  $e_1 = (1, 0)$ . Montrer que la matrice, dans la base  $(e_1, \varepsilon)$ , de l'endomorphisme associé à  $A$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

En déduire que si  $\lambda \neq 1$ , alors  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 8**

Soient  $A$  et  $B$  des matrices non nulles de  $M_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $A.B = 0$ .

1. Démontrer que  $\text{Im } B \subset \ker A$ .
2. On suppose que le rang de  $A$  est égal à  $n - 1$ , déterminer le rang de  $B$ .

Correction ▼

[002585]

**3 Examen****Exercice 9****I**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$  la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha + 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

*Première partie :*

1. Factoriser le polynôme caractéristique  $P_{A_\alpha}(X)$  en produit de facteurs du premier degré.
2. Déterminer selon la valeur du paramètre  $\alpha$  les valeurs propres distinctes de  $A_\alpha$  et leur multiplicité.
3. Déterminer les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles la matrice  $A_\alpha$  est diagonalisable.
4. Déterminer selon la valeur de  $\alpha$  le polynôme minimal de  $A_\alpha$ .

*Seconde partie :*

On suppose désormais que  $\alpha = 0$ , on note  $A = A_0$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  associé à la matrice  $A$ .

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de  $A$ .
2. Démontrer que  $f$  admet un plan stable (c'est-à-dire  $f$ -invariant).
3. Démontrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ .

4. Ecrire la décomposition de Dunford de  $B$  (justifier).
5. Pour  $t \in \mathbb{R}$ , calculer  $\exp tB$  et exprimer  $\exp tA$  à l'aide de  $P$  et  $\exp tB$ .
6. Donner les solutions des systèmes différentiels  $Y' = BY$  et  $X' = AX$ .

**II**

On rappelle qu'une matrice  $N \in M_n(\mathbb{C})$  est dite nilpotente d'ordre  $m$  si  $N^m = 0$ , et si pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $k < m$ , on a  $N^k \neq 0$ . Soient  $N \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente d'ordre  $m$  et  $A \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice telle que  $AN = NA$ .

1. Déterminer un polynôme annulateur de  $N$ . En déduire le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de  $N$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $N$ .
3. Démontrer que  $\det(I + N) = 1$ .
4. On suppose  $A$  inversible. Démontrer que les matrices  $AN$  et  $NA^{-1}$  sont nilpotentes. En déduire que

$$\det(A + N) = \det A.$$

5. On suppose  $A$  non inversible. En exprimant  $(A + N)^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , démontrer que

$$\det(A + N) = 0.$$

[Correction ▼](#)

[002586]

## 4 Rattrapage

### Exercice 10

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ , montrer que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)

[002587]

### Exercice 11

Soit  $N$  une matrice nilpotente, il existe  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $N^q = 0$ . Montrer que la matrice  $I - N$  est inversible et exprimer son inverse en fonction de  $N$ .

[Correction ▼](#)

[002588]

### Exercice 12

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de  $A$ .
3. Démontrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Ecrire la décomposition de Dunford de  $B$  (justifier).

[Correction ▼](#)

[002589]

### Exercice 13

La suite de Fibonacci  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$  est la suite  $(F_n)_{n \geq 0}$  définie par la relation de récurrence  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ , avec  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$ .

1. Déterminer une matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que  $A$  admet deux valeurs propres réelles distinctes que l'on note  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  avec  $\lambda_1 < \lambda_2$ .
3. Trouver des vecteurs propres  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , sous la forme  $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
4. Déterminer les coordonnées du vecteur  $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$  dans la base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , on les note  $x_1$  et  $x_2$ .

5. Montrer que  $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n x_1 \varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2 \varepsilon_2$ . En déduire que

$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

6. Donner un équivalent de  $F_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

[Correction ▼](#)

[002590]

### Correction de l'exercice 1 ▲

Soient  $a, b, c$  des réels vérifiant  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  et  $P$  la matrice réelle  $3 \times 3$  suivante :

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculons le déterminant de  $P$ .

$$\det P = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{vmatrix} = 0.$$

2. Déterminons les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\ker P$  et  $\operatorname{Im} P$ .

$$\ker P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

on a

$$(x, y, z) \in \ker P \iff \begin{cases} a(ax + by + cz) = 0 \\ b(ax + by + cz) = 0 \\ c(ax + by + cz) = 0 \end{cases}$$

Or,  $a, b$  et  $c$  ne sont pas simultanément nuls car  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , ainsi

$$\ker P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz = 0\},$$

c'est le plan vectoriel d'équation  $ax + by + cz = 0$ .

L'image de  $P$  est le sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs colonnes de la matrice  $P$ . Sachant que  $\dim \ker P + \dim \operatorname{Im} P = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ , on sait que la dimension de l'image de  $P$  est égale à 1, c'est-à-dire que l'image est une droite vectorielle. En effet, les vecteurs colonnes de  $P$  sont les vecteurs

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ ab \\ ac \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab \\ b^2 \\ bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ c^2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$a \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, b \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, c \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace  $\operatorname{Im} P$  est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

3. Soit  $Q = I - P$ , calculons  $P^2$ ,  $PQ$ ,  $QP$  et  $Q^2$ .

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 & a^3b + ab^3 + abc^2 & a^3c + ab^2c + ac^3 \\ a^3b + ab^3 + abc^2 & a^2b^2 + b^4 + b^2c^2 & a^2bc + b^3c + bc^3 \\ a^3c + ab^2c + ac^3 & a^2bc + b^3c + bc^3 & a^2c^2 + b^2c^2 + c^4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2(a^2 + b^2 + c^2) & ab(a^2 + b^2 + c^2) & ac(a^2 + b^2 + c^2) \\ ab(a^2 + b^2 + c^2) & b^2(a^2 + b^2 + c^2) & bc(a^2 + b^2 + c^2) \\ ac(a^2 + b^2 + c^2) & bc(a^2 + b^2 + c^2) & c^2(a^2 + b^2 + c^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = P. \end{aligned}$$

Car  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

Si  $Q = I - P$ , on a

$$PQ = P(I - P) = PI - P^2 = P - P = 0,$$

$$QP = (I - P)P = IP - P^2 = P - P = 0$$

et

$$Q^2 = (I - P)(I - P) = I^2 - IP - PI + P^2 = I - P - P + P = I - P = Q.$$

#### 4. Caractérisons géométriquement $P$ et $Q$ .

Nous avons vu que le noyau de  $P$  était égal au plan vectoriel d'équation  $ax + by + cz = 0$  et que son image de était la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $(a, b, c)$ . Par ailleurs, on a  $P^2 = P$ , égalité qui caractérise les projecteurs, l'endomorphisme de matrice  $P$  est donc la projection sur  $\text{Im } P$  suivant la direction  $\ker P$ .

Soit  $X \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$QX = 0 \iff IX - PX = 0 \iff PX = X \iff X \in \text{Im } P,$$

ainsi  $\ker Q = \text{Im } P$ . D'autre part,

$$Q = I - P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

On a  $\dim \text{Im } Q = 2$  et les vecteurs colonnes de  $Q$  vérifient l'équation  $ax + by + cz = 0$ , ainsi  $\text{Im } Q = \ker P$ . L'égalité  $Q^2 = Q$  prouve que  $Q$  est également un projecteur, c'est la projection sur  $\text{Im } Q$  dirigée par  $\ker Q$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose  $u$  nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif  $n$  tel que  $u^n = 0$ .

#### 1. Montrons que $u$ n'est pas inversible.

On a :  $0 = \det u^n = (\det u)^n$ , d'où  $\det u = 0$ , ce qui prouve que  $u$  n'est pas inversible.

#### 2. Déterminons les valeurs propres de $u$ et les sous-espaces propres associés.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ , il existe alors un vecteur  $x \in E$  non nul tel que  $u(x) = \lambda x$ . Or,  $u(x) = \lambda x \Rightarrow u^n(x) = \lambda^n x$ . Mais,  $u^n(x) = 0$  et  $x \neq 0$ , d'où  $\lambda^n = 0$  et donc  $\lambda = 0$ . La seule valeur propre possible de  $u$  est donc 0 et c'est une valeur propre car, comme  $u$  n'est pas inversible, le noyau de  $u$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ . L'endomorphisme  $u$  admet donc 0 comme unique valeur propre, le sous-espace propre associé est  $\ker u$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

Soit  $M$  la matrice de  $\mathbb{R}^4$  suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

#### 1. Déterminons les valeurs propres de $M$ et ses sous-espaces propres.

Les valeurs propres de  $M$  sont les réels  $\lambda$  tels que  $\det(M - \lambda I) = 0$ .

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 9) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda + 3).$$

Les valeurs propres de  $M$  sont donc 2, -2, 3 et -3. Notons  $E_2$ ,  $E_{-2}$ ,  $E_3$  et  $E_{-3}$  les sous-espaces propres associés.

$$\begin{aligned}
E_2 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 2X\} \\
&= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, 2x - z = 2y, 7y + 6t = 2z, 3z = 2t\} \\
&\text{or } \begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 2y \\ 7y + 6t = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 4x \\ 14x + 9z = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \\ t = -3x \end{cases}
\end{aligned}$$

ainsi,  $E_2$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $u_1 = (1, 2, -2, -3)$ .

$$\begin{aligned}
E_{-2} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -2X\} \\
&= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = -2x, 2x - z = -2y, 7y + 6t = -2z, 3z = -2t\} \\
&\text{or } \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = -2y \\ 7y + 6t = -2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = 4x \\ -14x - 9z = 2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = -2x \\ t = 3x \end{cases}
\end{aligned}$$

ainsi,  $E_{-2}$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $u_2 = (1, -2, -2, 3)$ .

$$\begin{aligned}
E_3 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 3X\} \\
&= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = 3x, 2x - z = 3y, 7y + 6t = 3z, 3z = 3t\} \\
&\text{or } \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 3y \\ 7y + 6t = 3z \\ 3z = 3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 9x \\ 21x + 6t = 3z \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ z = -7x \\ t = -7x \end{cases}
\end{aligned}$$

ainsi,  $E_3$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $u_3 = (1, 3, -7, -7)$ .

$$\begin{aligned}
E_{-3} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -3X\} \\
&= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = -3x, 2x - z = -3y, 7y + 6t = -3z, 3z = -3t\} \\
&\text{or } \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = -3y \\ 7y + 6t = -3z \\ 3z = -3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = 9x \\ -21x - 6z = -3z \\ z = -t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ z = -7x \\ t = 7x \end{cases}
\end{aligned}$$

ainsi,  $E_{-3}$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $u_4 = (1, -3, -7, 7)$ .

2. Montrons que  $M$  est diagonalisable.

La matrice  $M$  admet quatre valeurs propres distinctes, ce qui prouve que les quatres vecteurs propres correspondants sont linéairement indépendants. En effet, les vecteurs  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$  déterminés en 1) forment une base de  $\mathbb{R}^4$ . L'endomorphisme dont la matrice est  $M$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  est représenté par une matrice diagonale dans la base  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  puisque  $Mu_1 = 2u_1, Mu_2 = -2u_2, Mu_3 = 3u_3$  et  $Mu_4 = -3u_4$ .



3. Déterminons une base de vecteurs propres et  $P$  la matrice de passage.

Une base de vecteurs propres a été déterminée dans les questions précédentes. C'est la base  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  et la matrice de passage est la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

4. On a  $D = P^{-1}MP$ , pour  $k \in \mathbb{N}$  exprimons  $M^k$  en fonction de  $D^k$ , puis calculons  $M^k$ .

On a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ donc } D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}.$$

Mais,  $M = PDP^{-1}$ , d'où, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ .

Pour calculer  $M^k$ , il faut donc déterminer la matrice  $P^{-1}$  qui exprime les coordonnées des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  dans la base  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ .

On résout le système, et on a :

$$\begin{cases} u_1 = i + 2j - 2k - 3l \\ u_2 = i - 2j - 2k + 3l \\ u_3 = i + 3j - 7k - 7l \\ u_4 = i - 3j - 7k + 7l \end{cases} \iff \begin{cases} i = \frac{1}{10}(7u_1 + 7u_2 - 2u_3 - 2u_4) \\ j = \frac{1}{10}(7u_1 - 7u_2 - 3u_3 + 3u_4) \\ k = \frac{1}{10}(u_1 + u_2 - u_3 - u_4) \\ l = \frac{1}{10}(3u_1 - 3u_2 - 2u_3 + 2u_4) \end{cases}$$

d'où

$$P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$M^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminons le polynôme caractéristique de  $A$ .

On a

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} -3-X & -2 & -2 \\ 2 & 1-X & 2 \\ 3 & 3 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-X & 0 & -2 \\ 2 & -1-X & 2 \\ 3 & 1+X & 2-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3-X & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 4-X \\ 3 & 1+X & 2-X \end{vmatrix} = -(1+X) \begin{vmatrix} -3-X & -2 \\ 5 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= -(1+X)[(X-4)(X+3)+10] = -(1+X)(X^2-X-2) = -(1+X)^2(X-2) \end{aligned}$$

2. Démontrons que les valeurs propres de  $A$  sont  $-1$  et  $2$  et déterminons les sous-espaces propres associés. Les valeurs propres de  $A$  sont les racines du polynôme caractéristique, ce sont donc bien les réels  $-1$  et  $2$ .

Les sous-espaces propres associés sont les ensembles

$$E_{-1} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ker(A + I_3)$$

et

$$E_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ker(A - 2I_3)$$

On a

$$(x, y, z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -3x - 2y - 2z = -x \\ 2x + y + 2z = -y \\ 3x + 3y + 2z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace caractéristique  $E_{-1}$  associé à la valeur propre  $-1$  est donc le plan vectoriel d'équation  $x + y + z = 0$ , il est de dimension 2, égale à la multiplicité de la racine  $-1$ .

On a

$$(x, y, z) \in E_2 \iff \begin{cases} -3x - 2y - 2z = 2x \\ 2x + y + 2z = 2y \\ 3x + 3y + 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -5x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à  $y = -x$  et  $2z = -3x$ .

Le sous-espace caractéristique  $E_2$  associé à la valeur propre  $2$  est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $(2, -2, -3)$ , il est de dimension 1, égale à la multiplicité de la racine  $2$ .

3. Démontrons que  $A$  est diagonalisable et donnons une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

La question précédente et les résultats obtenus sur les dimensions des sous-espaces propres permettent d'affirmer que la matrice  $A$  est diagonalisable. Une base de  $\mathbb{R}^3$  obtenue à partir de bases des sous-espaces propres est une base de vecteurs propres dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale. Par exemple dans la base formée des vecteurs  $u_1 = (1, -1, 0)$ ,  $u_2 = (1, 0, -1)$  et  $u_3 = (2, -2, -3)$ , la matrice de  $u$  est la matrice  $D$  qui s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Trouvons une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

La matrice cherchée  $P$  est la matrice de passage exprimant la base de vecteurs propres  $(u_1, u_2, u_3)$  dans la base canonique. C'est donc la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On a  $P^{-1}AP = D$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $A$  la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculons le déterminant de  $A$  et déterminons pour quelles valeurs de  $a$  la matrice est inversible.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

La matrice  $A$  est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, c'est-à-dire si et seulement si  $1 + a^3 \neq 0$ , ce qui équivaut à  $a \neq -1$  car  $a \in \mathbb{R}$ .

2. Calculons  $A^{-1}$  lorsque  $A$  est inversible, c'est-à-dire  $a \neq -1$ . Pour cela nous allons déterminer la comatrice  $\tilde{A}$  de  $A$ . On a

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix},$$

on remarque que  $\tilde{A} = {}^t\tilde{A}$  et on a bien  $A\tilde{A} = {}^t\tilde{A}A = (-1 - a^3)I_3$  d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1 - a^3)}\tilde{A} = \frac{1}{-1 - a^3} \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Expliquons sans calcul pourquoi la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

On remarque que le polynôme caractéristique de  $A$  est égal à  $(1 - X)^4$ . Ainsi la matrice  $A$  admet-elle une unique valeur propre :  $\lambda = 1$ , si elle était diagonalisable, il existerait une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PI_4P^{-1}$  alors  $A = I_4$ , or ce n'est pas le cas, par conséquent la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

### Correction de l'exercice 7 ▲

Soit  $A$  une matrice  $2 \times 2$  à coefficients réels. On suppose que dans chaque colonne de  $A$  la somme des coefficients est égale à 1.

1. Soient  $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , on suppose que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

montrons qu'alors

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$

Compte tenu des hypothèses, la matrice  $A$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix},$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels. On a alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ (1-a)x_1 + (1-b)x_2 = y_2 \end{cases}$$

ce qui implique  $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$ .

2. Montrons que le vecteur  $\varepsilon = (1, -1)$  est un vecteur propre de  $A$ .

Si  $A\varepsilon = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ , alors  $y_1 + y_2 = 0$  donc  $y_2 = -y_1$  et  $A\varepsilon = y_1\varepsilon$ , ce qui prouve que  $\varepsilon$  est un vecteur propre.

On peut aussi le voir de la manière suivante

$$A\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b)\varepsilon.$$

On note  $\lambda = (a-b)$  sa valeur propre.

3. Montrons que si  $v$  est un vecteur propre de  $A$  non colinéaire à  $\varepsilon$ , alors la valeur propre associée à  $v$  est égale à 1.

Soit  $v = (x_1, x_2)$  un vecteur propre de  $A$  non colinéaire à  $\varepsilon$ , notons  $\mu$  sa valeur propre, on a  $Av = \mu v$ , et, d'après la question 1), on a

$$x_1 + x_2 = \mu x_1 + \mu x_2 = \mu(x_1 + x_2)$$

ce qui implique  $\mu = 1$  car  $v$  est supposé non colinéaire à  $\varepsilon$  donc  $x_1 + x_2 \neq 0$ .

4. Soit  $e_1 = (1, 0)$ . Montrons que la matrice, dans la base  $(e_1, \varepsilon)$ , de l'endomorphisme associé à  $A$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Pour cela on écrit  $Ae_1$  et  $A\varepsilon$  dans la base  $(e_1, \varepsilon)$ . On a d'une part  $A\varepsilon = \lambda\varepsilon$  et, d'autre part,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où la matrice dans la base  $(e_1, \varepsilon)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

où  $\alpha = a-1$  et  $\lambda = a-b$ .

On en déduit que si  $\lambda \neq 1$ , alors  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est égal à  $(1-X)(\lambda-X)$ , ainsi, si  $\lambda \neq 1$ , il admet deux racines distinctes ce qui prouve que  $A$  est diagonalisable.

### Correction de l'exercice 8 ▲

Soient  $A$  et  $B$  des matrices non nulles de  $M_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $A.B = 0$ .

1. Démontrons que  $\text{Im } B \subset \ker A$ .

Soit  $y \in \text{Im } B$ , il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $y = Bx$ , d'où  $Ay = ABx = 0$ , ainsi  $y \in \ker A$  ce qui prouve l'inclusion.

2. On suppose que le rang de  $A$  est égal à  $n-1$ , déterminons le rang de  $B$ .

On a  $\text{rg } B = \dim \text{Im } B$  et on sait que  $\dim \text{Im } A + \dim \ker A = n$  par conséquent, si  $\text{rg } A = n-1$  on a  $\dim \ker A = 1$  et l'inclusion  $\text{Im } B \subset \ker A$  implique  $\dim \text{Im } B \leq 1$  or,  $B$  est supposée non nulle d'où  $\dim \text{Im } B = 1 = \text{rg } B$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

#### I

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$  la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Première partie :

1. Factorisons le polynôme caractéristique  $P_{A_\alpha}(X)$  en produit de facteurs du premier degré.

On a

$$\begin{aligned} P_{A_\alpha}(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 0 & -2-X & -\alpha-1 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\ &= (-1-X)[(-2-X)(\alpha-X) + \alpha+1] \\ &= -(X+1)[X^2 + (2-\alpha)X + 1-\alpha]. \end{aligned}$$

Factorisons le polynôme  $X^2 + (2-\alpha)X + 1-\alpha$ , son discriminant est égal à

$$\Delta = (2-\alpha)^2 - 4(1-\alpha) = \alpha^2.$$

On a donc  $\sqrt{\Delta} = |\alpha|$ , ce qui nous donne les deux racines

$$\lambda_1 = \frac{\alpha-2-\alpha}{2} = -1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{\alpha-2+\alpha}{2} = \alpha-1.$$

Le polynôme caractéristique  $P_{A_\alpha}(X)$  se factorise donc en

$$P_{A_\alpha}(X) = -(X+1)^2(X-\alpha+1).$$

2. Déterminons selon la valeur du paramètre  $\alpha$  les valeurs propres distinctes de  $A_\alpha$  et leur multiplicité.

Les valeurs propres de  $A_\alpha$  sont les racines du polynôme caractéristique  $P_{A_\alpha}$ , ainsi,

- si  $\alpha = 0$ , la matrice  $A_\alpha$  admet une valeur propre triple  $\lambda = -1$ ,
- si  $\alpha \neq 0$ , la matrice  $A_\alpha$  admet deux valeurs propres distinctes  $\lambda_1 = -1$  valeur propre double et  $\lambda_2 = \alpha - 1$ , valeur propre simple.

3. Déterminons les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles la matrice  $A_\alpha$  est diagonalisable.

Il est clair que dans le cas  $\alpha = 0$ , la matrice n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait une matrice inversible  $P$  telle que  $A_\alpha = P(-I)P^{-1} = -I$ , ce qui n'est pas le cas.

Si  $\alpha \neq 0$ , la matrice  $A_\alpha$  est diagonalisable si le sous-espace propre associé à la valeur propre  $-1$  est de dimension 2. Déterminons ce sous-espace propre.

$$E_{-1} = \ker(A_\alpha + I) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x, y, z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x + (\alpha+1)z = -x \\ x - 2y = -y \\ -x + y + \alpha z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Il faut distinguer les cas  $\alpha = -1$  et  $\alpha \neq -1$ .

- Si  $\alpha = -1$ , le sous-espace  $E_{-1}$  est le plan vectoriel d'équation  $x = y$ , dans ce cas la matrice  $A_\alpha$  est diagonalisable.
- Si  $\alpha \neq -1$ , le sous-espace  $E_{-1}$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $(1, 1, 0)$ , dans ce cas la matrice  $A_\alpha$  n'est pas diagonalisable.

4. Déterminons selon la valeur de  $\alpha$  le polynôme minimal de  $A_\alpha$ .

Notons  $Q_A$  le polynôme minimal de  $A_\alpha$ . On sait que la matrice  $A_\alpha$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si son polynôme minimal a toutes ses racines dans  $\mathbb{R}$  et que celles-ci sont simples. Or, nous venons de démontrer que  $A_\alpha$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement  $\alpha = -1$ , on a donc

- Si  $\alpha = -1$ ,  $A_\alpha$  est diagonalisable, donc  $Q_A(X) = (X+1)(X-\alpha+1) = (X+1)(X+2)$ .
- Si  $\alpha \neq -1$ ,  $A_\alpha$  n'est pas diagonalisable, donc  $Q_A(X) = P_A(X) = (X+1)^2(X-\alpha+1)$ .

Seconde partie :

On suppose désormais que  $\alpha = 0$ , on note  $A = A_0$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  associé à la matrice  $A$ . On a donc

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $P_A(X) = -(X+1)^3$ .

1. *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de  $A$ .*

La matrice  $A$  admet une unique valeur propre  $\lambda = -1$  de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace  $E_{-1} = \ker(A+I)$ , et on a

$$(x, y, z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Le sous-espace  $E_{-1}$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $(1, 1, 0)$ .

Le sous-espace caractéristique de  $A$ , associé à l'unique valeur propre  $\lambda = -1$ , est le sous-espace  $N_{-1} = \ker(A+I)^3$ , or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que  $P_A(A) = 0$ , ainsi, la matrice  $(A+I)^3$  est la matrice nulle, ce qui implique  $N_{-1} = \mathbb{R}^3$ , c'est donc l'espace tout entier.

2. *Démontrons que  $f$  admet un plan stable.*

La matrice de  $f$  n'est pas diagonalisable, mais comme son polynôme caractéristique se factorise sur  $\mathbb{R}$ , elle est trigonalisable, ce qui prouve qu'elle admet un plan stable, le plan engendré par les deux premiers vecteurs d'une base de trigonalisation.

Par ailleurs, on a  $E_{-1} = \ker(A+I) \subset \ker(A+I)^2 \subset \ker(A+I)^3 = \mathbb{R}^3$ , le sous-espace  $\ker(A+I)^2$  est clairement stable par  $A$  car pour tout  $v \in \ker(A+I)^2$ ,  $Av \in \ker(A+I)^2$ , en effet

$$(A+I)^2 Av = A(A+I)^2 v = 0.$$

Démontrons que ce sous-espace est un plan. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc  $\ker(A+I)^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x+y+z=0\}$ , c'est bien un plan vectoriel.

3. *Démontrons qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*et trouvons une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ .*

Nous cherchons des vecteurs  $e_1, e_2, e_3$  tels que  $Ae_1 = e_1$ ,  $Ae_2 = e_1 - e_2$  et  $Ae_3 = e_2 - e_3$ . Le vecteur  $e_1$  appartient à  $E_1 = \ker(A+I)$ , nous choisirons  $e_2 \in \ker(A+I)^2$  tel que  $(e_1, e_2)$  soit une base de  $\ker(A+I)^2$ . Remarquons que si l'on cherche  $e_2 = (x, y, z)$  tel que  $Ae_2 = e_1 - e_2$ , on obtient le système

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = 1-y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

ce qui nous donne bien un vecteur de  $\ker(A+I)^2$ . Ainsi, les vecteurs  $e_1 = (1, 1, 0)$  et  $e_2 = (1, 0, 1)$  conviennent. Il nous reste à chercher un vecteur  $e_3$  tel que  $Ae_3 = e_2 - e_3$ , c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ 1-z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = -y \\ -x+y = 1-z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases}$$

Le vecteur  $e_3 = (0, 0, 1)$  convient. On obtient alors la matrice  $P$  suivante qui est inversible et vérifie  $A = PBP^{-1}$ ,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 4. Décomposition de Dunford de $B$

On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à  $-I$ . Or, il existe un unique couple de matrice  $D$  et  $N$ ,  $D$  diagonalisable et  $N$  nilpotente, telles que  $B = D + N$  et  $DN = ND$ . C'est donc là la décomposition de Dunford,  $B = D + N$  avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

#### 5. Pour $t \in \mathbb{R}$ , calculons $\exp tB$ et exprimons $\exp tA$ à l'aide de $P$ et $\exp tB$ .

Remarquons tout d'abord que  $N^2 = 0$  donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(tN)^2 = 0$  et l'exponentielle est égale à  $\exp(tN) = I + tN$ , par ailleurs  $ND = DN$ , donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , les matrices  $tN$  et  $tD$  commutent également,  $(tN)(tD) = (tD)(tN)$ , on a donc

$$\exp(tB) = \exp(tD + tN) = \exp(tD)\exp(tN) = \exp(-tI)\exp(-tN) = e^{-t}(I + tN).$$

D'où

$$\exp(tB) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer l'exponentielle de la matrice  $tA$ , on écrit

$$\exp(tA) = \exp(t(PBP^{-1})) = \exp(P(tA)P^{-1}) = P\exp(tB)P^{-1}.$$

#### 6. Solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$ .

La solution générale du système  $Y' = BY$  s'écrit

$$S(t) = \exp(tB)v$$

où  $v = (a, b, c)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . La solution  $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$  s'écrit donc

$$S(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a + bt \\ b + ct \\ c \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la solution du système  $X' = AX$ , on écrit

$$X' = AX \iff X' = (PBP^{-1})X \iff P^{-1}X' = (BP^{-1})X \iff (P^{-1}X)' = B(P^{-1}X)$$

ainsi, en notant  $Y = P^{-1}X$  ou encore  $X = PY$ , les solutions du système  $X' = AX$  sont les  $PS(t)$  où  $P$  est la matrice vérifiant  $A = PBP^{-1}$  et  $S$  une solution du système  $Y' = BY$ .

La solution générale du système  $X' = AX$  s'écrit donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t}(a + bt) \\ e^{-t}(b + ct) \\ e^{-t}c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a + b + (c + b)t \\ a + bt \\ b + c + ct \end{pmatrix}$$

où  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

## II

Soient  $K$  un corps,  $N \in M_n(K)$  une matrice nilpotente et  $A$  une matrice telle que  $AN = NA$ .

1. *Déterminons les valeurs propres de  $N$ .*

La matrice  $N$  étant nilpotente, il existe un entier naturel  $m$  tel que  $N^m = 0$ , on a donc  $\det N^m = (\det N)^m = 0$  donc  $\det N = 0$ , l'endomorphisme de matrice  $N$  n'est pas bijectif ce qui prouve que 0 est valeur propre de  $N$ , c'est la seule, en effet si  $\lambda$  est une autre valeur propre et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé à  $\lambda$  on a

$$Nx = \lambda x \Rightarrow N^m x = \lambda^m x$$

d'où  $\lambda^m x = 0$ , mais  $x \neq 0$  donc  $\lambda = 0$ . Ainsi la matrice  $N$  admet une unique valeur propre  $\lambda = 0$  de multiplicité  $n$ .

2. *Démontrons que  $N$  est trigonalisable.*

Le polynôme caractéristique de  $N$  admet une unique racine  $0 \in K$ , toutes ses racines sont donc dans  $K$ , ce qui prouve que la matrice  $N$  est trigonalisable. Elle est semblable à une matrice triangulaire n'ayant que des 0 sur la diagonale.

3. *Démontrons que  $\det(I + N) = 1$ .*

Compte tenu de ce qui précède, la matrice  $N + I$  est une matrice triangulaire n'ayant que des 1 sur la diagonale, or le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux, ainsi on a bien  $\det(N + I) = 1$ .

4. *On suppose  $A$  inversible. Démontrons que les matrices  $AN$  et  $NA^{-1}$  sont nilpotentes.*

Comme les matrices  $A$  et  $N$  commutent, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $(AN)^k = A^k N^k$  donc pour  $k = m$ ,  $(AN)^m = A^m N^m = A \cdot 0 = 0$  ce qui prouve que  $AN$  est nilpotente. De même  $NA^{-1} = A^{-1}N$  et  $NA^{-1}$  est nilpotente.

On en déduit que

$$\det(A + N) = \det A.$$

L'égalité  $AN = NA$  implique  $N = ANA^{-1}$  ainsi, on a

$$\det(N + A) = \det(ANA^{-1} + A) = \det(A(NA^{-1} + I)) = \det A \det(NA^{-1} + I) = \det A.$$

5. *On suppose  $A$  non inversible. En exprimant  $(A + N)^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , démontrons que  $\det(A + N) = 0$ .*

Comme les matrices  $A$  et  $N$  commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de  $A + N$ . Soit  $m$  tel que  $N^m = 0$  et, pour tout  $k < m$ ,  $N^k \neq 0$  on a alors

$$(A + N)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k A^k N^{m-k} = \sum_{k=1}^m C_m^k A^k N^{m-k} = A \sum_{k=1}^m C_m^k A^{k-1} N^{m-k}$$

ainsi

$$\det((A + N)^m) = \det A \cdot \det \sum_{k=1}^m C_m^k A^{k-1} N^{m-k} = 0$$

car  $\det A = 0$ . Or,  $\det((A + N)^m) = (\det(A + N))^m$ , on a donc bien  $\det(A + N) = 0$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ , on montre que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

Le polynôme caractéristique  $P_A(X)$  est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-X \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - c^2 = X^2 - (a+d)X + ad - c^2,$$



déterminons ses racines : calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (a+d)^2 - 4(ad - c^2) \\ &= a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4c^2 \\ &= a^2 + d^2 - 2ad + 4c^2 \\ &= (a-d)^2 + 4c^2 \geq 0\end{aligned}$$

On a  $\Delta = 0 \iff a-d=0$  et  $c=0$ , mais, si  $c=0$ , la matrice  $A$  est déjà diagonale. Sinon  $\Delta > 0$  et le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 11 ▲

Soit  $N$  une matrice nilpotente, il existe  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $N^q = 0$ . Montrons que la matrice  $I - N$  est inversible et exprimons son inverse en fonction de  $N$ .

On remarque que  $(I - N)(I + N + N^2 + \dots + N^{q-1}) = I - N^q = I$ . Ainsi, la matrice  $I - N$  est inversible, et son inverse est  $(I - N)^{-1} = I + N + N^2 + \dots + N^{q-1}$ .

### Correction de l'exercice 12 ▲

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  associé.

- Factorisons le polynôme caractéristique de  $A$ .

On a

$$\begin{aligned}P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(X^2 - 2X) + (1-X) \\ &= (1-X)(X^2 - 2X + 1) = (1-X)^3.\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  admet une valeur propre triple  $\lambda = 1$ .

- Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de  $A$ .

La matrice  $A$  admet une unique valeur propre  $\lambda = 1$  de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace  $E_1 = \ker(A - I)$ , et on a

$$(x, y, z) \in E_1 \iff \begin{cases} x - y = x \\ x - z = y \\ -x + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

Le sous-espace  $E_1$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $(1, 0, 1)$ .

Le sous-espace caractéristique de  $A$ , associé à l'unique valeur propre  $\lambda = 1$ , est le sous-espace  $N_1 = \ker(A - I)^3$ , or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que  $P_A(A) = 0$ , ainsi, la matrice  $(A - I)^3$  est la matrice nulle, ce qui implique  $N_1 = \mathbb{R}^3$ , c'est donc l'espace tout entier.

- Démontrons qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous cherchons des vecteurs  $e_1, e_2, e_3$  tels que  $Ae_1 = e_1$ ,  $Ae_2 = e_1 + e_2$  et  $Ae_3 = e_2 + e_3$ . Le vecteur  $e_1$  appartient à  $E_1 = \ker(A - I)$ , et  $\ker(A - I)$  est la droite d'équations :  $\{y = 0, x = z\}$ . On détermine  $e_2 = (x, y, z)$  tel que  $Ae_2 = e_1 + e_2$ , on obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ 1+y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-y = 1+x \\ x-z = y \\ -x+2z = 1+z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x-z = -1 \end{cases}$$

Ainsi, les vecteurs  $e_1 = (1, 0, 1)$  et  $e_2 = (-1, -1, 0)$  conviennent. Il nous reste à chercher un vecteur  $e_3$  tel que  $Ae_3 = e_2 + e_3$ , c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-y = x-1 \\ x-z = y-1 \\ -x+2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = z \end{cases}$$

Le vecteur  $e_3 = (0, 1, 0)$  convient. On obtient alors la matrice  $P$  suivante qui est inversible et vérifie  $A = PBP^{-1}$ ,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#### 4. Décomposition de Dunford de $B$

On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à  $I$ . Or, il existe un unique couple de matrices  $D$  et  $N$ ,  $D$  diagonalisable et  $N$  nilpotente, telles que  $B = D + N$  et  $DN = ND$ . Or si

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $N^3 = 0$ . La décomposition  $B = D + N$  est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice  $B$ .

### Correction de l'exercice 13 ▲

La suite de Fibonacci  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$  est la suite  $(F_n)_{n \geq 0}$  définie par la relation de récurrence  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ , avec  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$ .

1. Déterminons une matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Notons, pour  $n \geq 1$ ,  $X_n$  le vecteur  $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$  et  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Nous allons démontrer, par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \geq 1$ , on a  $X_n = A^n X_0$ , c'est clairement vrai pour  $n = 1$ , supposons que ce soit vrai pour un  $n$  arbitrairement fixé, on a alors

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0,$$

d'où le résultat.

2. Montrons que  $A$  admet deux valeurs propres réelles distinctes que l'on note  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  avec  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - X - 1.$$

Le discriminant  $\Delta = 5 > 0$ , le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. Trouvons des vecteurs propres  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , sous la forme  $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Posons  $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$  et calculons  $\alpha$  tel que  $A\varepsilon_1 = \lambda_1 \varepsilon_1$ , c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + 1 = \lambda_1 \alpha \\ \alpha = \lambda_1 \end{cases} \iff \alpha = \lambda_1$$

car  $\lambda_1^2 - \lambda_1 - 1 = 0$ , on a donc  $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et, de même,  $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Déterminons les coordonnées du vecteur  $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$  dans la base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , on les note  $x_1$  et  $x_2$ .

On cherche  $x_1$  et  $x_2$  tels que

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 = x_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$x_1$  et  $x_2$  sont donc solutions du système

$$\begin{cases} x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 (\lambda_1 - \lambda_2) = 1 \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ x_2 = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

5. Montrons que  $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n x_1 \varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2 \varepsilon_2$ .

Les vecteurs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  étant vecteurs propres de  $A$ , on a  $A\varepsilon_1 = \lambda_1 \varepsilon_1$  et  $A\varepsilon_2 = \lambda_2 \varepsilon_2$ , ainsi par récurrence, on a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $A^n \varepsilon_1 = \lambda_1^n \varepsilon_1$  et  $A^n \varepsilon_2 = \lambda_2^n \varepsilon_2$ . Ainsi,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^n (x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2) = x_1 A^n \varepsilon_1 + x_2 A^n \varepsilon_2 = \lambda_1^n x_1 \varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2 \varepsilon_2.$$

On en déduit que

$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

On a montré que  $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on a donc,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2^n \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où le résultat

$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

6. Donnons un équivalent de  $F_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On remarque que  $|\lambda_1| < 1$  et  $|\lambda_2| > 1$  ainsi, lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $\lambda_1^n$  tend vers 0 et  $\lambda_2^n$  tend vers  $+\infty$ . On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{F_n}{\lambda_2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n} + 1 = 1.$$

Ce qui prouve que  $\frac{\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1}$  est un équivalent de  $F_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

---