



## Matrice d'une application linéaire

Corrections d'Arnaud Bodin.

### Exercice 1

Soit  $\mathbb{R}^2$  muni de la base canonique  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la projection sur l'axe des abscisses  $\mathbb{R}\vec{i}$  parallèlement à  $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$ . Déterminer  $\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ , la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Même question avec  $\text{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$  où  $\mathcal{B}'$  est la base  $(\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$  de  $\mathbb{R}^2$ . Même question avec  $\text{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ .

[Correction ▼](#)

[001087]

### Exercice 2

Soient trois vecteurs  $e_1, e_2, e_3$  formant une base de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $\phi$  l'application linéaire définie par  $\phi(e_1) = e_3$ ,  $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$  et  $\phi(e_3) = e_3$ .

1. Écrire la matrice  $A$  de  $\phi$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ . Déterminer le noyau de cette application.
2. On pose  $f_1 = e_1 - e_3$ ,  $f_2 = e_1 - e_2$ ,  $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$ . Calculer  $e_1, e_2, e_3$  en fonction de  $f_1, f_2, f_3$ . Les vecteurs  $f_1, f_2, f_3$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$  ?
3. Calculer  $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$  en fonction de  $f_1, f_2, f_3$ . Écrire la matrice  $B$  de  $\phi$  dans la base  $(f_1, f_2, f_3)$  et trouver la nature de l'application  $\phi$ .
4. On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ . Quelle relation lie  $A, B, P$  et  $P^{-1}$  ?

[Correction ▼](#)

[001097]

### Exercice 3

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice par rapport à la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de  $\mathbb{R}^3$  et calculer la matrice de  $f$  par rapport à cette base.

[Correction ▼](#)

[002433]

### Exercice 4

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ . En utilisant l'application linéaire associée de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , calculer  $A^p$  pour  $p \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 5**

Soient  $A, B$  deux matrices semblables (i.e. il existe  $P$  inversible telle que  $B = P^{-1}AP$ ). Montrer que si l'une est inversible, l'autre aussi ; que si l'une est idempotente, l'autre aussi ; que si l'une est nilpotente, l'autre aussi ; que si  $A = \lambda I$ , alors  $A = B$ .

Indication ▼ Correction ▼

[002444]

**Exercice 6**

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$  dans la base canonique. Soient  $e_1 = (-2, 3)$  et  $e_2 = (-2, 5)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et déterminer  $\text{Mat}(f, \mathcal{B}')$ .
2. Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient  $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases}$ .

Correction ▼

[001104]

**Exercice 7**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels et  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $\text{rg}(A) \geq 2$ . Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  a-t-on  $\text{rg}(A) = 2$  ?

Correction ▼

[002774]

**Exercice 8**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\text{rg}(A)$  et  $\text{rg}(B)$ . Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires associées  $f_A$  et  $f_B$ .

Correction ▼

[001099]

**Exercice 9**

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même telle que  $f^2 = f$ .

1. Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .
2. Supposons que  $E$  soit de dimension finie  $n$ . Posons  $r = \dim \text{Im } f$ . Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que :  $f(e_i) = e_i$  si  $i \leq r$  et  $f(e_i) = 0$  si  $i > r$ . Déterminer la matrice de  $f$  dans cette base  $\mathcal{B}$ .

Correction ▼

[001093]

**Exercice 10**

Trouver toutes les matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui vérifient

1.  $M^2 = 0$  ;
2.  $M^2 = M$  ;
3.  $M^2 = I$ .

**Exercice 11**

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$  définie en posant pour tout  $P(X) \in \mathbb{R}_n[X] : f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire et que son image est incluse dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Dans le cas où  $n = 3$ , donner la matrice de  $f$  dans la base  $1, X, X^2, X^3$ . Déterminer ensuite, pour une valeur de  $n$  quelconque, la matrice de  $f$  dans la base  $1, X, \dots, X^n$ .
3. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ . Calculer leur dimension respective.
4. Soit  $Q$  un élément de l'image de  $f$ . Montrer qu'il existe un unique  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :  $f(P) = Q$  et  $P(0) = P'(0) = 0$ .

Correction ▼

[001094]

**Exercice 12**

Pour toute matrice carrée  $A$  de dimension  $n$ , on appelle trace de  $A$ , et l'on note  $\text{tr}A$ , la somme des éléments diagonaux de  $A$  :

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

1. Montrer que si  $A, B$  sont deux matrices carrées d'ordre  $n$ , alors  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .
2. Montrer que si  $f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ ,  $M$  sa matrice par rapport à une base  $e$ ,  $M'$  sa matrice par rapport à une base  $e'$ , alors  $\text{tr}M = \text{tr}M'$ . On note  $\text{tr}f$  la valeur commune de ces quantités.
3. Montrer que si  $g$  est un autre endomorphisme de  $E$ ,  $\text{tr}(f \circ g - g \circ f) = 0$ .

Correction ▼

[002442]

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

$A$  est *idempotente* s'il existe un  $n$  tel que  $A^n = I$  (la matrice identité).

$A$  est *nilpotente* s'il existe un  $n$  tel que  $A^n = (0)$  (la matrice nulle).

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

---

Il faut trouver les propriétés de l'application linéaire  $f$  associée à chacune de ces matrices. Les résultats s'expriment en explicitant une (ou plusieurs) matrice  $M'$  qui est la matrice de  $f$  dans une base bien choisie et ensuite en montrant que toutes les autres matrices sont de la forme  $M = P^{-1}M'P$ .

Plus en détails pour chacun des cas :

1.  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$  et discuter suivant la dimension du noyau.
  2. Utiliser l'exercice 10 :  $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f$  et il existe une base telle que  $f(e_i) = 0$  ou  $f(e_i) = e_i$ .
  3. Écrire  $(M - I)(M + I) = 0$  puis montrer  $\text{Im}(f + \text{id}) \subset \text{Ker}(f - \text{id})$  et  $\text{Im}(f - \text{id}) \subset \text{Ker}(f + \text{id})$  et discuter suivant les dimensions.
-

### Correction de l'exercice 1 ▲

---

L'expression de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est la suivante  $f(x, y) = (x - y, 0)$ . Autrement dit à un vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  on associe le vecteur  $\begin{pmatrix} x - y \\ 0 \end{pmatrix}$ .

On note que  $f$  est bien une application linéaire. Cette expression nous permet de calculer les matrices demandées.

1. Calcul de  $\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ . Comme  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ , la matrice s'obtient en calculant  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$  :

$$f(\vec{i}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i} \quad f(\vec{j}) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{i}$$

donc

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On garde la même application linéaire mais la base de départ change (la base d'arrivée reste  $\mathcal{B}$ ). Comme  $\mathcal{B}' = (\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$  on exprime  $f(\vec{i} - \vec{j})$  et  $f(-2\vec{i} + 3\vec{j})$  dans la base d'arrivée  $\mathcal{B}$ .

$$f(\vec{i} - \vec{j}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(-2\vec{i} + 3\vec{j}) = f\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Toujours avec le même  $f$  on prend  $\mathcal{B}'$  comme base de départ et d'arrivée, il s'agit donc d'exprimer  $f(\vec{i} - \vec{j})$  et  $f(-2\vec{i} + 3\vec{j})$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . Nous venons de calculer que

$$f(\vec{i} - \vec{j}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{i} \quad f(-2\vec{i} + 3\vec{j}) = f\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\vec{i}$$

Mais il nous faut obtenir une expression en fonction de la base  $\mathcal{B}'$ . Remarquons que

$$\begin{cases} \vec{u} &= \vec{i} - \vec{j} \\ \vec{v} &= -2\vec{i} + 3\vec{j} \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{i} &= 3\vec{u} + \vec{v} \\ \vec{j} &= 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

Donc

$$f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} = 6\vec{u} + 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \quad f(-2\vec{i} + 3\vec{j}) = -5\vec{i} = -15\vec{u} - 5\vec{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Donc

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

---

1. La matrice  $A$  est composée des vecteurs colonnes  $\phi(e_i)$ , on sait

$$\phi(e_1) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \phi(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le noyau de  $\phi$  (ou celui de  $A$ ) est l'ensemble de  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tel que  $AX = 0$ .

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y = 0 \\ y = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$

Donc  $\text{Ker } \phi = \{(x, 0, -x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Le noyau est donc de dimension 1.

2. On applique le pivot de Gauss comme si c'était un système linéaire :

$$\begin{cases} e_1 & - & e_3 & = & f_1 & L_1 \\ e_1 & - & e_2 & & = & f_2 & L_2 \\ -e_1 & + & e_2 & + & e_3 & = & f_3 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 & - & e_3 & = & f_1 \\ & - & e_2 & + & e_3 & = & f_2 - f_1 \\ & e_2 & & & & = & f_3 + f_1 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1 \end{matrix}$$

On en déduit

$$\begin{cases} e_1 & = & f_1 + f_2 + f_3 \\ e_2 & = & f_1 + f_3 \\ e_3 & = & f_2 + f_3 \end{cases}$$

Donc tous les vecteurs de la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  s'expriment en fonction de  $(f_1, f_2, f_3)$ , ainsi la famille  $(f_1, f_2, f_3)$  est génératrice. Comme elle a exactement 3 éléments dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  de dimension 3 alors  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$  est une base.

3.

$$\phi(f_1) = \phi(e_1 - e_3) = \phi(e_1) - \phi(e_3) = e_3 - e_3 = 0$$

$$\phi(f_2) = \phi(e_1 - e_2) = \phi(e_1) - \phi(e_2) = e_3 - (-e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - e_2 = f_2$$

$$\phi(f_3) = \phi(-e_1 + e_2 + e_3) = -\phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) = -e_3 + (-e_1 + e_2 + e_3) = -e_1 + e_2 = f_3$$

Dans la base  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$  nous avons

$$\phi(f_1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \quad \phi(f_2) = f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \quad \phi(f_3) = f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Donc la matrice de  $\phi$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\phi$  est la projection orthogonal sur le plan d'équation  $(x' = 0)$  (dans la base  $\mathcal{B}'$ ).

4.  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ . En effet la matrice de passage contient -en colonnes- les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base  $\mathcal{B}'$  exprimés dans l'ancienne base  $\mathcal{B}$ .

Si un vecteur a pour coordonnées  $X$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $X'$  dans la base  $\mathcal{B}'$  alors  $PX' = X$  (attention à l'ordre). Et si  $A$  est la matrice de  $\phi$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $B$  est la matrice de  $\phi$  dans la base  $\mathcal{B}'$  alors

$$B = P^{-1}AP$$

(Une matrice de passage entre deux base est inversible.)

Ici on calcule l'inverse de  $P$  :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve donc bien les mêmes résultats que précédemment.

---

**Correction de l'exercice 3 ▲**

Notons l'ancienne base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  et ce qui sera la nouvelle base  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ . Soit  $P$  la matrice de passage qui contient -en colonnes- les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base  $\mathcal{B}'$  exprimés dans l'ancienne base  $\mathcal{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que  $P$  est inversible (on va même calculer son inverse) donc  $\mathcal{B}'$  est bien une base. De plus

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on calcule } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -12 & 30 & -6 \\ 12 & -24 & 6 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$B$  est la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

Nous associons à la matrice  $A$  son application linéaire naturelle  $f$ . Si  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  alors  $f(e_1)$  est donné par le premier vecteur colonne,  $f(e_2)$  par le deuxième, etc. Donc ici

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_n, f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{n-1}, \dots \text{ et en général } f(e_i) = e_{n+1-i}$$

Calculons ce que vaut la composition  $f \circ f$ . Comme une application linéaire est déterminée par les images des éléments d'une base alors on calcule  $f \circ f(e_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  en appliquant deux fois la formule précédente :

$$f \circ f(e_i) = f(f(e_i)) = f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-(n+1-i)} = e_i$$

Comme  $f \circ f$  laisse invariant tous les vecteurs de la base alors  $f \circ f(x) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Donc  $f \circ f = \text{id}$ . On en déduit  $f^{-1} = f$  et que la composition itérée vérifie  $f^p = \text{id}$  si  $p$  est pair et  $f^p = f$  si  $p$  est impair. Conclusion :  $A^p = I$  si  $p$  est pair et  $A^p = A$  si  $p$  est impair.

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

Soit  $A, B$  tel que  $B = P^{-1}AP$ .

1. Supposons  $A$  inversible, alors il existe  $A'$  tel que  $A \times A' = I$  et  $A' \times A = I$ . Notons alors  $B' = P^{-1}A'P$ . On a

$$B \times B' = (P^{-1}AP) \times (P^{-1}A'P) = P^{-1}A(PP^{-1})A'P = P^{-1}AA'P = P^{-1}IP = I$$

De même  $B' \times B = I$ . Donc  $B$  est inversible d'inverse  $B'$ .

2. Supposons que  $A^n = I$ . Alors

$$\begin{aligned} B^n &= (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1}) \cdots AP \\ &= P^{-1}A^nP \\ &= P^{-1}IP = I \end{aligned}$$

Donc  $B$  est idempotente.

3. Si  $A^n = (0)$  alors le même calcul qu'au-dessus conduit à  $B^n = (0)$ .  
4. Si  $A = \lambda I$  alors  $B = P^{-1}(\lambda I)P = \lambda I \times P^{-1}P = \lambda I$  (car la matrice  $\lambda I$  commute avec toutes les matrices).

---

### Correction de l'exercice 6 ▲

---

1. Notons  $P$  la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B} = ((1,0), (0,1))$  vers (ce qui va être) la base  $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ . C'est la matrice composée des vecteurs colonnes  $e_1$  et  $e_2$  :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det P = -4 \neq 0$  donc  $P$  est inversible et ainsi  $\mathcal{B}'$  est bien une base.

Alors la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est :

$$B = P^{-1}AP = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. Il est très facile de calculer la puissance d'une matrice diagonale :

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}$$

Comme  $A = PBP^{-1}$  on va en déduire  $A^n$  :

$$A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10 & -4\frac{1}{3^n} \\ -15 & 10\frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$

3. Si l'on note  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  alors les équations que vérifient les suites s'écrivent en terme matriciel :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Si l'on note les conditions initiales  $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  alors  $X_n = A^n X_0$ . On en déduit

$$\begin{cases} x_n &= \frac{1}{4} \left( 10x_0 - 4\frac{1}{3^n}y_0 \right) \\ y_n &= \frac{1}{4} \left( -15x_0 + 10\frac{1}{3^n}y_0 \right) \end{cases}$$

Après simplification :

$$\begin{cases} x_n &= \frac{5}{2}x_0 - \frac{1}{3^n}y_0 \\ y_n &= -\frac{15}{4}x_0 + \frac{5}{2}\frac{1}{3^n}y_0 \end{cases}$$

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

---

Avant toute, un coup d'œil sur la matrice nous informe de deux choses : (a)  $A$  n'est pas la matrice nulle donc  $\text{rg}(A) \geq 1$  ; (b) il y a 3 lignes donc  $\text{rg}(A) \leq 3$  (le rang est plus petit que le nombre de colonnes et que le nombre de lignes).

1. Montrons de différentes façons que  $\text{rg}(A) \geq 2$ .

– **Première méthode : sous-déterminant non nul.** On trouve une sous-matrice  $2 \times 2$  dont le déterminant est non nul. Par exemple la sous-matrice extraite du coin en bas à gauche vérifie  $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$  donc

$\text{rg}(A) \geq 2$ .

– **Deuxième méthode : espace vectoriel engendré par les colonnes.** On sait que l'image de l'application linéaire associée à la matrice  $A$  est engendrée par les vecteurs colonnes. Et le rang est la dimension de cette image. On trouve facilement deux colonnes linéairement indépendantes : la deuxième  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

et la troisième  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  colonne. Donc  $\text{rg}(A) \geq 2$ .



- **Troisième méthode : espaces vectoriel engendré par les lignes.** Il se trouve que -miraculeusement- la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes égal la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes (car  $\text{rg}(A) = \text{rg}(^t A)$ ). Comme les deuxième et troisième lignes sont linéairement indépendantes alors  $\text{rg}(A) \geq 2$ .

Attention : les dimensions des espaces vectoriels engendrés sont égales mais les espaces sont différents !

- En utilisant la dernière méthode : le rang est exactement 2 si la première ligne est dans le sous-espace engendré par les deux autres. Donc

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) = 2 &\iff (a, 2, -1, b) \in \text{Vect}\{(3, 0, 1, -4), (5, 4, -1, 2)\} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (a, 2, -1, b) = \lambda(3, 0, 1, -4) + \mu(5, 4, -1, 2) \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} 3\lambda + 5\mu = a \\ 4\mu = 2 \\ \lambda - \mu = -1 \\ -4\lambda + 2\mu = b \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \\ a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion la rang de  $A$  est 2 si  $(a, b) = (1, 3)$ . Sinon le rang de  $A$  est 3.

### Correction de l'exercice 8 ▲

- Commençons par des remarques élémentaires : la matrice est non nulle donc  $\text{rg}(A) \geq 1$  et comme il y a  $p = 4$  lignes et  $n = 3$  colonnes alors  $\text{rg}(A) \leq \min(n, p) = 3$ .
  - Ensuite on va montrer  $\text{rg}(A) \geq 2$  en effet le sous-déterminant  $2 \times 2$  (extrait du coin en haut à gauche) :  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$  est non nul.
  - Montrons que  $\text{rg}(A) = 2$ . Avec les déterminants il faudrait vérifier que pour toutes les sous-matrices  $3 \times 3$  les déterminants sont nuls. Pour éviter de nombreux calculs on remarque ici que les colonnes sont liées par la relation  $v_2 = v_1 + v_3$ . Donc  $\text{rg}(A) = 2$ .
  - L'application linéaire associée à la matrice  $A$  est l'application  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ . Et le théorème du rang  $\dim \text{Ker } f_A + \dim \text{Im } f_A = \dim \mathbb{R}^3$  donne ici  $\dim \text{Ker } f_A = 3 - \text{rg}(A) = 1$ .

Mais la relation  $v_2 = v_1 + v_3$  donne immédiatement un élément du noyau : en écrivant  $v_1 - v_2 + v_3 =$

0 alors  $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  Donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } f_A$ . Et comme le noyau est de dimension 1 alors

$$\text{Ker } f_A = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Pour une base de l'image, qui est de dimension 2, il suffit de prendre 2 vecteurs colonnes quelconques de la matrice  $A$  par exemple

$$\text{Im } f_A = \text{Vect}\{v_1, v_2\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- On fait le même travail avec  $B$  et  $f_B$ .

- Matrice non nulle avec 4 lignes et 4 colonnes donc  $1 \leq \text{rg}(B) \leq 4$ .

- Comme le sous-déterminant (du coin supérieur gauche)  $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2$  est non nul alors  $\text{rg}(B) \geq 2$ .

(c) Et pareil avec le sous-déterminant  $3 \times 3$  :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

qui est non nul donc  $\text{rg}(B) \geq 3$ .

(d) Maintenant on calcule le déterminant de la matrice  $B$  et on trouve  $\det B = 0$ , donc  $\text{rg}(B) < 4$ . Conclusion  $\text{rg}(B) = 3$ . Par le théorème du rang alors  $\dim \text{Ker } f_B = 1$ .

(e) Cela signifie que les colonnes (et aussi les lignes) sont liées, comme il n'est pas clair de trouver la relation à la main on résout le système  $BX = 0$  pour trouver cette relation ; autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou encore } \begin{cases} 2x + 2y - z + 7t = 0 \\ 4x + 3y - z + 11t = 0 \\ -y + 2z - 4t = 0 \\ 3x + 3y - 2z + 11t = 0 \end{cases}$$

Après résolution de ce système on trouve que les solutions s'écrivent  $(x, y, z, t) = (\lambda, 2\lambda, -\lambda, -\lambda)$ . Et ainsi

$$\text{Ker } f_B = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Et pour une base de l'image il suffit de prendre 3 vecteurs colonnes quelconques de la matrice  $B$ , par exemple  $v_1, v_2, v_3$  :

$$\text{Im } f_B = \text{Vect} \{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

### Correction de l'exercice 9 ▲

1. Nous devons montrer  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$  et  $\text{Ker } f + \text{Im } f = E$ .

(a) Si  $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$  alors d'une part  $f(x) = 0$  et d'autre part il existe  $x' \in E$  tel que  $x = f(x')$ . Donc  $0 = f(x) = f(f(x')) = f(x') = x$  donc  $x = 0$  (on a utilisé  $f \circ f = f$ ). Donc  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ .

(b) Pour  $x \in E$  on le réécrit  $x = x - f(x) + f(x)$ . Alors  $x - f(x) \in \text{Ker } f$  (car  $f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0$ ) et  $f(x) \in \text{Im } f$ . Donc  $x \in \text{Ker } f + \text{Im } f$ . Donc  $\text{Ker } f + \text{Im } f = E$ .

(c) Conclusion :  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

2. Notons  $r$  le rang de  $f$  :  $r = \dim \text{Im } f$ . Soit  $\{e_1, \dots, e_r\}$  une base de  $\text{Im } f$  et soit  $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$  une base de  $\text{Ker } f$ . Comme  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$  alors  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ . Pour  $i > r$  alors  $e_i \in \text{Ker } f$  donc  $f(e_i) = 0$ .

Comme  $f \circ f = f$  alors pour n'importe quel  $x \in \text{Im } f$  on a  $f(x) = x$  : en effet comme  $x \in \text{Im } f$ , il existe  $x' \in E$  tel que  $x = f(x')$  ainsi  $f(x) = f(f(x')) = f(x') = x$ . En particulier si  $i \leq r$  alors  $f(e_i) = e_i$ .

3. La matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est donc :

$$\begin{pmatrix} I & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$$

où  $I$  désigne la matrice identité de taille  $r \times r$  et les  $(0)$  désignent des matrices nulles.

### Correction de l'exercice 10 ▲

1. Soit  $M$  une matrice telle que  $M^2 = 0$  et soit  $f$  l'application linéaire associée à  $M$ . Comme  $M^2 = 0$  alors  $f \circ f = 0$ . Cela entraîne  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ . Discutons suivant la dimension du noyau :

(a) Si  $\dim \text{Ker } f = 3$  alors  $f = 0$  donc  $M = 0$  (la matrice nulle).

(b) Si  $\dim \text{Ker } f = 2$  alors prenons une base de  $\mathbb{R}^3$  formée de deux vecteurs du noyau et d'un troisième vecteur. Dans cette base la matrice de  $f$  est  $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$  mais comme  $f \circ f = 0$  alors  $M'^2 = 0$  ; un petit calcul implique  $c = 0$ . Donc  $M$  et  $M'$  sont les matrices de la même application linéaire  $f$  mais exprimées dans des bases différentes, donc  $M$  et  $M'$  sont semblables.

(c) Si  $\dim \text{Ker } f = 1$  alors comme  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$  on a  $\dim \text{Im } f \leq 1$  mais alors cela contredit le théorème du rang :  $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3$ . Ce cas n'est pas possible.

(d) Conclusion :  $M$  est une matrice qui vérifie  $M^2 = 0$  si et seulement si il existe une matrice inversible  $P$  et des réels  $a, b$  tels que

$$M = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

2. On va s'aider de l'exercice 10. Si  $M^2 = M$  et  $f$  est l'application linéaire associée alors  $f \circ f = f$ . On a vu dans l'exercice 10 qu'alors  $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f$  et que l'on peut choisir une base  $(e_1, e_2, e_3)$  telle que  $f(e_i) = e_i$  puis  $f(e_i) = 0$ . Suivant la dimension du noyau cela donne que la matrice  $M'$  de  $f$  dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant  $M$  est semblable à l'une de ces matrices : il existe  $P$  inversible telle que  $M = P^{-1}M'P$  où  $M'$  est l'une des quatre matrices ci-dessus.

Géométriquement notre application est une projection (projection sur une droite pour la seconde matrice et sur un plan pour la troisième).

3. Dans cette question  $M^2 = I$ . Cela implique  $M^2 - I = 0$  donc  $(M - I)(M + I) = 0$  (et aussi  $(M + I)(M - I) = 0$ ). Attention cela n'implique pas  $M = +I$  ou  $M = -I$ .

Notons encore une fois  $f$  l'application linéaire associée à  $M$ . Alors  $f \circ f = \text{id}$  se réécrit aussi  $(f - \text{id})(f + \text{id}) = 0$  ou aussi  $(f + \text{id})(f - \text{id}) = 0$ . On en déduit que  $\text{Im}(f + \text{id}) \subset \text{Ker}(f - \text{id})$  et  $\text{Im}(f - \text{id}) \subset \text{Ker}(f + \text{id})$ .

On discute suivant la dimension de  $\text{Ker}(f - \text{id})$  :

(a) Si  $\dim \text{Ker}(f - \text{id}) = 3$  alors  $f - \text{id} = 0$  donc  $f = \text{id}$  et  $M = I$ .

(b) Si  $\dim \text{Ker}(f - \text{id}) = 2$  alors on choisit une base de  $\mathbb{R}^3$  dont les deux premiers vecteurs sont dans le noyau, la matrice de  $f - \text{id}$  dans cette nouvelle base est alors

$$M' - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1+c \end{pmatrix}$$

Ici  $M'$  est la matrice de  $f$  dans cette nouvelle base. Mais  $M'$  vérifie aussi  $M'^2 = I$  et un petit calcul implique que soit  $M' = I$  (cas déjà étudié) soit  $c = -2$  donc notre matrice  $M'$  s'écrit

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

(c) Si  $\dim \text{Ker}(f - \text{id}) = 1$  alors par le théorème du rang  $\dim \text{Im}(f - \text{id}) = 2$  et comme  $\text{Im}(f - \text{id}) \subset \text{Ker}(f + \text{id})$  alors  $\dim \text{Ker}(f + \text{id}) \geq 2$ . Si  $\dim \text{Ker}(f + \text{id}) = 3$  alors  $f + \text{id} = 0$  donc  $f = -\text{id}$ .

Si  $\dim \text{Ker}(f + \text{id}) = 2$  alors on choisit une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f + \text{id}$  sera

$$M' + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1+c \end{pmatrix}$$

Comme  $M'^2 = I$  alors on en déduit que  $c = +2$  donc

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Si  $\dim \text{Ker}(f - \text{id}) = 0$  alors  $\dim \text{Im}(f - \text{id}) = 3$  et comme  $\text{Im}(f - \text{id}) \subset \text{Ker}(f + \text{id})$  alors  $\dim \text{Ker}(f + \text{id}) = 3$  et ainsi  $f = -\text{id}$ .

(e) Conclusion : soit  $M = +I$ , soit  $M = -I$ , soit  $M$  est semblable à l'une des matrices  $M'$  suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire qu'il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $M = P^{-1}M'P$ .

Géométriquement l'application est une symétrie : par rapport à un plan vectoriel pour la matrice de gauche et par rapport à une droite vectorielle pour l'autre. Si  $M = -I$  il s'agit d'une symétrie centrale par rapport à l'origine.

### Correction de l'exercice 11 ▲

- Il est facile de voir que  $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$  donc  $f$  est linéaire, de plus,  $P$  étant un polynôme de degré  $\leq n$  alors  $f(P)$  aussi.
- Pour  $n = 3$  on calcule l'image de chacun des éléments de la base :

$$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0, \quad f(X) = (X + 1) + (X - 1) - 2X = 0,$$

$$f(X^2) = (X + 1)^2 + (X - 1)^2 - 2X^2 = 2, \quad f(X^3) = (X + 1)^3 + (X - 1)^3 - 2X^3 = 6X.$$

Donc la matrice de  $f$  dans la base  $(1, X, X^2, X^3)$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour le cas général on calcule

$$\begin{aligned} f(X^p) &= (X + 1)^p + (X - 1)^p - 2X^p \\ &= \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} X^k + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} X^k (-1)^{p-k} - 2X^p \\ &= \sum_{p-k \text{ pair et } k < p} 2 \binom{p}{k} X^k \end{aligned}$$

Donc la matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\binom{2}{0} & 0 & \cdots & 2\binom{p}{0} & 0 \\ & 0 & 0 & 2\binom{3}{1} & & 0 & 2\binom{p+1}{1} \\ & & 0 & 0 & \cdots & 2\binom{p}{2} & 0 \\ & & & 0 & & 0 & 2\binom{p+1}{3} \\ & & & & \ddots & \vdots & 0 \\ & & & & & 0 & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple de matrice,  $p$  est pair. Chaque colonne commence en alternant une valeur nulle/une valeur non-nulle jusqu'à l'élément diagonal (qui est nul).

3. Nous savons que  $f(1) = 0$  et  $f(X) = 0$  donc 1 et  $X$  sont dans le noyau  $\text{Ker } f$ . Il est aussi clair que les colonnes de la matrices  $f(X^2), \dots, f(X^n)$  sont linéairement indépendantes (car la matrice est échelonnée). Donc  $\text{Im } f = \text{Vect}\{f(X^2), f(X^3), \dots, f(X^n)\}$  et  $\dim \text{Im } f = n - 1$ .

Par la formule du rang  $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}_n[X]$  donc  $\dim \text{Ker } f = 2$ . Comme nous avons déjà deux vecteurs du noyau alors  $\text{Ker } f = \text{Vect}\{1, X\}$ .

4. Soit  $Q \in \text{Im } f$ . Il existe donc  $R \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $f(R) = Q$ . On pose ensuite  $P(X) = R(X) - R(0) - R'(0)X$ . On a tout fait pour que  $P(0) = 0$  et  $P'(0) = 0$ . De plus par la linéarité de  $f$  et son noyau alors

$$f(P) = f(R(X) - R(0) - R'(0)X) = f(R(X)) - R(0)f(1) - R'(0)f(X) = f(R) = Q.$$

Donc notre polynôme  $P$  convient.

### Correction de l'exercice 12 ▲

1. Notons  $C = AB$  et  $D = BA$ . Alors par la définition du produit de matrice :

$$c_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{donc } c_{ii} = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{ki}$$

Ainsi

$$\text{tr}(AB) = \text{tr } C = \sum_{1 \leq i \leq n} c_{ii} = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{ki}$$

De même

$$\text{tr}(BA) = \text{tr } D = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} b_{ik} a_{ki}$$

Si dans cette dernière formule on renomme l'indice  $i$  en  $k$  et l'indice  $k$  en  $i$  (ce sont des variables muettes donc on leur donne le nom qu'on veut) alors on obtient :

$$\text{tr}(BA) = \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq i \leq n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{ki} = \text{tr}(AB)$$

2.  $M$  et  $M'$  sont semblables donc il existe une matrice de passage  $P$  telle que  $M' = P^{-1}MP$  donc

$$\text{tr } M' = \text{tr}(P^{-1}(MP)) = \text{tr}((MP)P^{-1}) = \text{tr}(MI) = \text{tr } M$$

3. La trace a aussi la propriété évidente que

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B.$$

Fixons une base de  $E$ . Notons  $A$  la matrice de  $f$  dans cette base et  $B$  la matrice de  $g$  dans cette même base. Alors  $AB$  est la matrice de  $f \circ g$  et  $BA$  est la matrice de  $g \circ f$ . Ainsi la matrice de  $f \circ g - g \circ f$  est  $AB - BA$  Donc

$$\text{tr}(f \circ g - g \circ f) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0.$$