Intégrales curvilignes, intégrales multiples

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 **

Calculer l' intégrale de la forme différentielle ω le long du contour orienté C dans les cas suivants :

1. $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ et C est l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 2x+1$ joignant les points $(0,-1)$ et $(0,1)$ parcouru une fois dans le sens des y croissants.
2. $\omega = (x-y^3)dx + x^3dy$ et C est le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct.
3. $\omega = xyzdx$ et C est l'arc $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t \sin t$, t variant en croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Correction ▼ [005906]

Exercice 2 **

Soit $\omega = x^2dx + y^2dy$. Calculer l'intégrale de ω le long de tout cercle du plan parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Même question avec $\omega = y^2dx + x^2dy$.

Correction ▼ [005907]

Exercice 3 **

Calculer les intégrales multiples suivantes

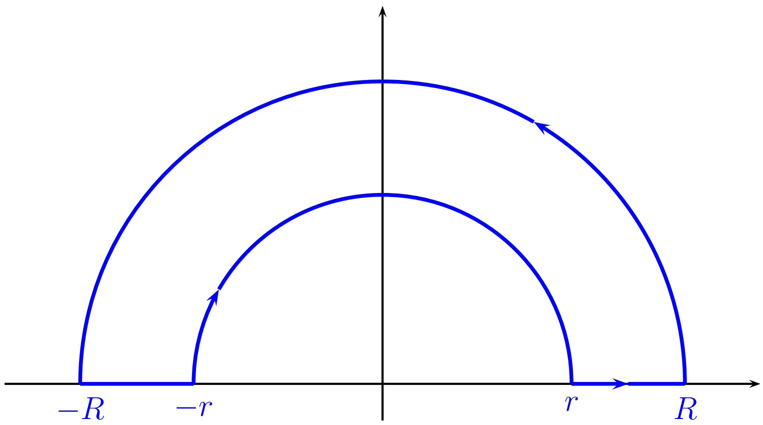
1. $I = \iint_D (x+y)\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1\}$.
2. $I = \iint_{[-1,1]^2} |x+y|\,dxdy$.
3. $I = \iint_D xy\,dxdy$ où D est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$.
4. $I = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy$.
5. $I = \iint_{x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$.
6. $I = \iiint_{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1} xyzdxdydz$.
7. $I = \iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant 1} zdxdydz$.

Correction ▼ [005908]

Exercice 4 *** I

(Un calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$).

1. r et R sont deux réels strictement positifs tels que $r < R$. On considère le contour Γ orienté suivant



Calculer l'intégrale de la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}((x\sin x - y\cos x)dx + (x\cos x + y\sin x)dy)$$

le long de ce contour orienté.

2. En déduire $\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx$ en fonction d'une autre intégrale.
3. En faisant tendre r vers 0 et R vers $+\infty$, déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Correction ▼ [005909]

Exercice 5 ***

Soient $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in]0, +\infty[^4$ tel que $p_1 < p_2$ et $q_1 < q_2$.
Calculer l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x \text{ et } 2q_2y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2y\}$.

Correction ▼ [005910]

Exercice 6 *** I

Calculer le volume de $B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$ (boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour $\| \ \|_2$).

Correction ▼ [005911]

Exercice 7 **

Calculer le volume de l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz = 1$.

Correction ▼ [005912]

Exercice 8 **** Inégalité isopérimétrique

Une courbe fermée (C) est le support d'un arc paramétré γ de classe C^1 régulier et simple. On note $\mathscr{L}$ sa longueur et $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par la courbe fermée (C). Montrer que

$$\mathscr{A} \leqslant \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}.$$

Pour cela, on supposera tout d'abord $\mathscr{L} = 2\pi$ et on choisira une paramétrisation normale de l'arc. On appliquera ensuite la formule de PARSEVAL aux intégrales permettant de calculer $\mathscr{L}$ et $\mathscr{A}$ et on comparera les sommes des séries obtenues.

Correction ▼ [005913]

Exercice 9 ***

Calculer $I = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1} (x^2 - y^2)\,dxdy$.

Correction ▼ [005914]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. C est l'arc paramétré $t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{2}, t\right)$, t variant en croissant de -1 à 1.

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{(t^2-1)/2}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} t + \frac{t}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} \right) dt \\ &= 0 \text{ (fonction impaire)}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \omega = 2\ln 2.}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_0^{2\pi} ((\cos t - \sin^3 t)(-\sin t) + \cos^3 t(\cos t))dt = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t - \cos t \sin t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\cos^2 t \sin^2 t - \cos t \sin t)dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\sin^2(2t)}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{1}{4}(1-\cos(4t))\right) dt = 2\pi\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \omega = \frac{3\pi}{2}.}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin t \cos t \sin t)(-\sin t)\, dt = -\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^3 t\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t + \cos^4 t \sin t)dt = \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\ &= -\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \omega = -\frac{2}{15}.}$$

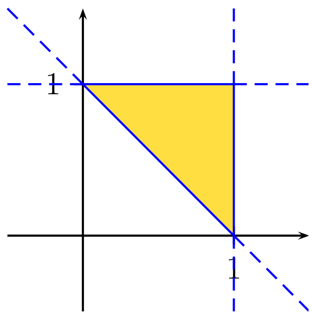
Correction de l'exercice 2 ▲

1. $\omega = x^2dx + y^2dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et est fermée car $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$. On en déduit que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de SCHWARZ. Par suite, l'intégrale de ω le long de tout cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique est nulle.
2. $\omega = y^2dx + x^2dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et n'est pas fermée car $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$. On en déduit que ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2$. L'intégrale de ω le long d'un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique n'est plus nécessairement nulle.
   On parcourt le cercle C le cercle de centre (a,b) et de rayon $R > 0$ une fois dans le sens trigonométrique ou encore on considère l'arc paramétré $\gamma\ :\ t \mapsto (a + R\cos t, b + R\sin t)$, t variant en croissant de 0 à 2π.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left((b+R\sin t)^2(-R\sin t)+(a+R\cos t)^2(R\cos t)\right)\,dt\\
&= R\int_0^{2\pi}(a\cos t-b\sin t+2aR\cos^2 t-2bR\sin^2 t+R^2(\cos^3 t-\sin^3 t))\,dt\\
&= R^2\int_0^{2\pi}(2a\cos^2 t-2b\sin^2 t+R(\cos^3 t-\sin^3 t))\,dt\\
&= R^2\int_0^{2\pi}(a(1+\cos t)-b(1-\cos t)+R(\cos t-\sin t)(\cos^2 t+\cos t\sin t+\sin^2 t))\,dt\\
&= R^2\int_0^{2\pi}(a-b+R(\cos t-\sin t)(1+\cos t\sin t))\,dt\\
&= R^2\left(2\pi(b-a)+\int_0^{2\pi}R(\cos t-\sin t+\cos^2 t\sin t-\cos t\sin^2 t)\,dt\right)\\
&= 2\pi R^2(b-a).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Représentons le domaine $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\leqslant 1,\ y\leqslant 1,\ x+y\geqslant 1\}$.



$$I=\iint_D (x+y)\,dxdy=\int_0^1\left(\int_{1-x}^1 (x+y)dy\right)dx \text{ (ou aussi } \int_0^1\left(\int_0^{1-y}(x+y)dx\right)dy)$$
$$=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1}dx=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx$$
$$=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+x\right)dx=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}.$$

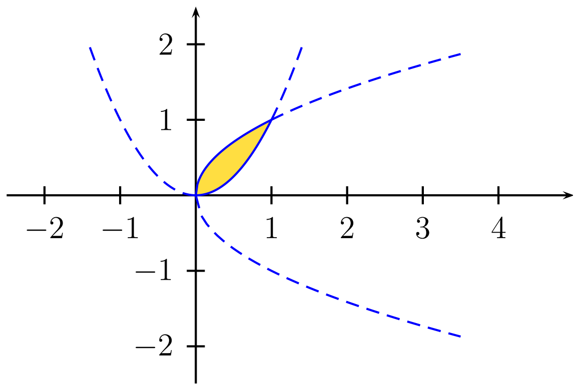
$$\boxed{\iint_D (x+y)\,dxdy=\frac{2}{3}.}$$

2. Si on pose pour $(x,y)\in /mbr^2$, $f(x,y)=|x+y|$ alors pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y)=f(x,y)$ ou encore f prend les mêmes valeurs en deux points symétriques par rapport à O. Puisque le point O est centre de symétrie de $[-1,1]^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\, x+y\geqslant 0} f(x,y)\,dxdy + \iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\, x+y\leqslant 0} f(x,y)\,dxdy\\
&= 2\iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\, x+y\geqslant 0}(x+y)\,dxdy = 2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-x}^{1}(x+y)\,dy\right)dx\\
&= 2\int_{-1}^{1}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=-x}^{y=1}dx = 2\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{2}+x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx\\
&= 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times 2\right) = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{[-1,1]^2}|x+y|\,dxdy = \frac{8}{3}.}$$

3. Représentons le domaine $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$.



$$I = \int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy\right)x\,dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{12}.$$

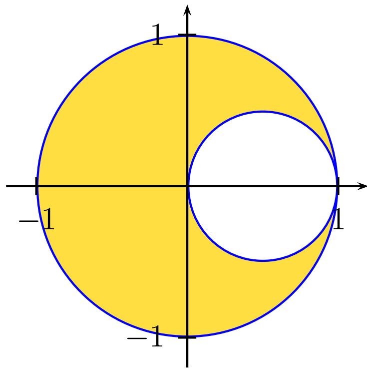
4. En passant en polaires, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{0\leqslant r\leqslant 1,\, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\frac{1}{1+r^2}\,rdrd\theta\\
&= \left(\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\,dr\right)\times\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\ \text{(intégrales indépendantes)}\\
&= 2\pi\times\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1 = \pi\ln 2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy = \pi\ln 2.}$$

5. Posons $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$. Puisque $x\leqslant x^2+y^2\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\frac{1}{4}$, D est l'intersection de l'intérieur du disque de centre O et de rayon 1, bord compris, et de l'extérieur du disque de centre $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, bord compris. Soit M un point du plan. On note (r,θ) un couple de coordonnées polaires de M tel que $r\geqslant 0$ et $\theta\in[0,2\pi]$.

$$M\in D\Leftrightarrow r\cos\theta\leqslant r^2\leqslant 1\Leftrightarrow r=0 \text{ ou } (0<r\leqslant 1 \text{ et } r\geqslant\cos\theta.$$



En passant en polaires, on obtient

$$
\begin{aligned}
I &= 2\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1,\, y\geqslant 0}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy = 2\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_{\cos\theta}^{1}\frac{r}{(1+r^2)^2}dr\right)d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_0^1\frac{r}{(1+r^2)^2}dr\right)d\theta\right)\\
&= 2\left(\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}dr\right]_{\cos\theta}^{1}d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}dr\right]_0^1 d\theta\right)\\
&= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1+\cos^2\theta}-\frac{1}{2}\right)d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2\theta}d\theta\\
&= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2+\tan^2\theta}d(\tan\theta) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+2}\,dt = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.}$$

6.

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyzdxdydz = \int_0^1\left(\int_x^1\left(\int_y^1 zdz\right)ydy\right)xdx = \int_0^1\left(\int_x^1\frac{1}{2}(1-y^2)ydy\right)xdx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_x^1(y-y^3)dy\right)xdx = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_x^1 xdx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)xdx\\
&= \frac{1}{8}\int_0^1(x^5-2x^3+x)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{48}.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyzdxdydz = \frac{1}{48}.}$$

7. En sommant par tranches, on obtient

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} zdxdydz = \int_0^1\left(\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1-\sqrt{z}} dxdy\right)zdz\\
&= \int_0^1\left(\iint_{\sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant 1}(1-\sqrt{z})^4dudv\right)zdz \text{ (en posant } x=(1-\sqrt{z})^2u \text{ et } y=(1-\sqrt{z})^2v)\\
&= \mathscr{A}(D)\times\int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4dz \text{ où } D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ \sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant 1\}.
\end{aligned}
$$

Maintenant,

$$\mathscr{A}(D) = \int_0^1\left(\int_0^{(1-\sqrt{u})^2}dv\right)du = \int_0^1(1-2\sqrt{u}+u)du = 1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

et

$\int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4 dz = \int_0^1 (z - 4z^{3/2} + 6z^2 - 4z^{5/2} + z^3)\, dz = \frac{1}{2} - \frac{8}{5} + 2 - \frac{8}{7} + \frac{1}{4} = \frac{1}{140}$.

Finalement

$$\boxed{\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} z dx dy dz = \frac{1}{840}.}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. La forme différentielle ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. D'après le théorème de SCHWARZ, sur tout ouvert étoilé Ω contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la forme différentielle ω est exacte si et seulement si la forme différentielle ω est fermée.
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, posons $P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x - y\cos x)$ et $Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\cos x + y\sin x)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2xe^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\cos x + y\sin x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-x\sin x + \cos x + y\cos x)\\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-2x(x\cos x + y\sin x) + (x^2+y^2)(-x\sin x + \cos x + y\cos x))\\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x + (-2xy - x^3 - xy^2)\sin x),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{-e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x - y\cos x) + \frac{-2ye^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\sin x - y\cos x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-\cos x)\\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-(x^2+y^2)(x\sin x - y\cos x) - 2y(x\sin x - y\cos x) - (x^2+y^2)\cos x)\\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x + (-2xy - x^3 - xy^2)\sin x)\\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).\end{aligned}$$

Finalement, la forme différentielle ω est exacte sur tout ouvert étoilé Ω contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
On choisit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \leqslant 0\}$. Ω est un ouvert étoilé (en tout point de la forme $(0,y)$, $y > 0$) de $\mathbb{R}^2$ contenant le contour fermé Γ. Puisque ω est exacte sur Ω, on sait alors que $\int_\Gamma \omega = 0$.
2. Le contour Γ est constitué de 4 arcs :
• Γ_1 est l'arc $t \mapsto (t,0)$, t variant en croissant de r à R,
• Γ_2 est l'arc $t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$, t variant en croissant de 0 à π.
• Γ_3 est l'arc $t \mapsto (t,0)$, t variant en croissant de $-R$ à $-r$,
• Γ_4 est l'arc $t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$, t variant en décroissant de π à 0.
D'après la question 1), $\int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega + \int_{\Gamma_4} \omega = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \omega &= \int_r^R (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\, dt = \int_r^R P(t,0)\, dt\\ &= \int_r^R \frac{1}{t^2} \times t\sin t\, dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t}\, dt.\end{aligned}$$

De même, $\int_{\Gamma_3} \omega = \int_{-R}^{-r} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t}\, dt$ (puisque la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est paire) et donc $\int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega = 2\int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx$ puis pour tout $(r,R) \in]0,+\infty[^2$ tel que $r < R$,

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_2}\omega + \int_{\Gamma_4}\omega\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2}\omega &= \int_0^{\pi}(P(R\cos t, R\sin t)(-\sin t) + Q(R\cos t, \sin t)(\cos t))\,dt\\ &= \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}((\cos t\sin(R\cos t) - \sin t\cos(R\cos t))(-\sin t) + (\cos t\cos(R\cos t) + \sin t\sin(R\cos t))(\cos t))\,dt\\ &= \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt.\end{aligned}$$

De même, $\int_{\Gamma_4}\omega = \int_{\pi}^{0} e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt = -\int_0^{\pi} e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$ et on a montré que

$$\boxed{\forall (r,R)\in]0,+\infty[^2,\ r<R \Rightarrow \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt - \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt\right).}$$

3. • Etudions $\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt$. Pour $R>0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt\right| &\leqslant \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\,|\cos(R\cos t)|\,dt \leqslant \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt\\ &\leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-R(2t/\pi)}\,dt \text{ (la fonction sinus étant concave sur } \left[0,\frac{\pi}{2}\right])\\ &= \frac{\pi}{R}\left[-e^{-2Rt/\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{R}(1-e^{-2R})\\ &\leqslant \frac{\pi}{R}.\end{aligned}$$

Comme $\frac{\pi}{R}$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, $\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt = 0$. On en déduit que pour tout $r>0$, l'intégrale $\int_r^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ converge en $+\infty$ et que

$$\boxed{\forall r>0,\ \int_r^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt.}$$

• Etudions maintenant $\lim_{r\to 0}\int_0^{\pi} e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$. Soit $F : \begin{array}{ccc}[0,+\infty[\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R}\\ (r,t) & \mapsto & e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\end{array}$.

- Pour tout réel $r\in[0,+\infty[$, la fonction $t\mapsto F(r,t)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$.
- Pour tout réel $t\in[0,\pi]$, la fonction $r\mapsto F(r,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $(r,t)\in[0,+\infty[\times[0,\pi]$, $|F(r,t)|\leqslant 1 = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur le segment $[0,\pi]$.

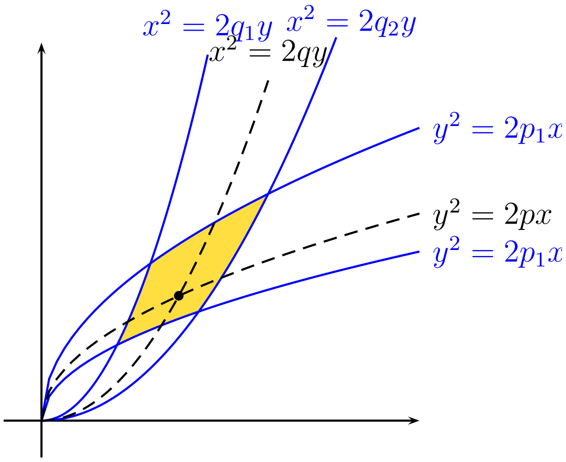
D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $r\mapsto\int_0^{\pi} e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$ est continue sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{\pi} e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt = \int_0^{\pi} e^0\cos(0)\,dt = \pi,$$

et finalement que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲



L'aire du domaine considéré $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x \text{ et } 2q_2y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2x\}$ est

$$\mathscr{A} = \iint_D dxdy.$$

Pour $(x,y) \in D^2$, posons $p = \frac{y^2}{2x}$ et $q = \frac{x^2}{2y}$ ou encore considérons l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} D & \to & [p_1,p_2]\times[q_1,q_2] \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{y^2}{2x}, \frac{x^2}{2y}\right) \end{array}$
et vérifions que φ est un C^1-difféomorphisme.

• Pour chaque $(x,y) \in D^2$, on $2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x$ et $2q_1y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2y$ ou encore $p_1 \leqslant \frac{y^2}{2x} \leqslant p_2$ et $q_1 \leqslant \frac{x^2}{2y} \leqslant q_2$. Donc φ est bien une application.

• Soit $(p,q) \in [p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$. Pour $(x,y) \in (]0,+\infty[)^2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{y^2}{2x} = p \\ \frac{x^2}{2y} = q \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2q} \\ \frac{(x^2/2q)^2}{2x} = p \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{8pq^2} \\ y = \sqrt[3]{8p^2q} \end{array}\right.$$

Donc, l'équation $\varphi(x,y) = (p,q)$ a exactement une solution (x_0,y_0) dans $]0,+\infty[^2$. De plus, puisque $\frac{y_0^2}{2x_0} = p \in [p_1,p_2]$ et $\frac{x_0^2}{2y_0} = q \in [q_1,q_2]$, on a $2p_1x_0 \leqslant y_0^2 \leqslant 2p_2x_0$ et $2q_1y_0 \leqslant x_0^2 \leqslant 2q_2y_0$ et donc $(x_0,y_0) \in D^2$. Donc φ est une bijection.

• φ est de classe C^1 sur D et pour $(x,y) \in D^2$,

$$\frac{D(p,q)}{D(x,y)} = J(\varphi)(x,y) = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{2x^2} & \frac{y}{x} \\ \frac{x}{y} & -\frac{x^2}{2y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \neq 0.$$

Ainsi, φ est une bijection de D sur $[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$, de classe C^1 sur D et son jacobien ne s'annule pas sur D. On sait alors que φ est un C^1-difféomorphisme de D sur $[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$.
Posons alors $(p,q) = \varphi(x,y)$ dans $\displaystyle\iint_D dxdy$. On obtient

$$\mathscr{A} = \iint_D dxdy = \iint_{[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]} \left|\frac{D(x,y)}{D(p,q)}\right| dpdq = \frac{4}{3}\iint_{[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]} dpdq = \frac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1).$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1).}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $R \geqslant 0$, posons $B_n(R) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant R^2\}$ et notons $V_n(R)$ le volume de $B_n(R)$. Par définition,

$$V_n(R)=\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2}dx_1\ldots dx_n.$$

En posant $x_1=Ry_1,\ldots,x_n=Ry_n$, on a $\frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}=R^n$ (quand $R>0$) puis

$$V_n(R)=\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2}dx_1\ldots dx_n=R^n\int\ldots\iint_{y_1^2+\ldots+y_n^2\leqslant 1}dy_1\ldots dy_n=R^nV_n(1).$$

ce qui reste vrai quand $R=0$. Pour $n\geqslant 2$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}V_n(1)&=\int_{-1}^{1}\left(\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant 1-x_n^2}dx_1\ldots dx_{n-1}\right)dx_n=\int_{-1}^{1}V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)dx_n\\&=\int_{-1}^{1}(1-x_n^2)^{(n-1)/2}V_{n-1}(1)\,dx_n=I_nV_{n-1}(1)\end{aligned}$$

où $I_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(n-1)/2}\,dx$. Pour calculer I_n, on pose $x=\cos\theta$. On obtient

$$I_n=\int_{\pi}^{0}(1-\cos^2\theta)^{(n-1)/2}(-\sin\theta)\,d\theta=\int_0^{\pi}\sin^n\theta\,d\theta=2\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta=2W_n\text{ (intégrales de WALLIS).}$$

Finalement,

$$V_1(1)=2\text{ et }\forall n\geqslant 2,\ V_n(1)=2W_nV_{n-1}(1).$$

On en déduit que pour $n\geqslant 2$,

$$V_n(1)=(2W_n)(2W_{n-1})\ldots(2W_2)V_1(1)=2^n\prod_{k=2}^{n}W_k=2^n\prod_{k=1}^{n}W_k,$$

ce qui reste vrai pour $n=1$. Maintenant, il est bien connu que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et plus précisément que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n=W_1W_0=\frac{\pi}{2}$. Donc, pour $p\in\mathbb{N}^*$,

$$V_{2p}(1)=2^{2p}\prod_{k=1}^{2p}W_k=2^{2p}\prod_{k=1}^{p}(W_{2k-1}W_{2k})=2^{2p}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k)}=\frac{\pi^p}{p!},$$

et de même

$$\begin{aligned}V_{2p+1}(1)&=2^{2p+1}\prod_{k=2}^{2p+1}W_k=2^{2p+1}\prod_{k=1}^{p}(W_{2k}W_{2k+1})=2^{2p+1}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k+1)}\\&=\frac{\pi^p2^{p+1}}{3\times5\times\ldots\times(2p+1)}=\frac{\pi^p2^{p+1}(2p)\times(2p-2)\times\ldots\times 2}{(2p+1)!}=\frac{\pi^p2^{2p+1}p!}{(2p+1)!}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall R>0,\ V_{2p}(R)=\frac{\pi^pR^{2p}}{p!}\text{ et }V_{2p-1}(R)=\frac{\pi^p2^{2p+1}p!R^{2p+1}}{(2p+1)!}.}$$

En particulier, $V_1(R)=2R$, $V_2(R)=\pi R^2$ et $V_3(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1ère solution. $V=\iiint_{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz\leqslant 1}dxdydz$. Or $x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz=\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}$. On pose donc $u=x+\frac{z}{2}$, $v=\frac{y}{\sqrt{2}}$ et $w=\frac{z}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = 2$ puis que

$$V = \iiint_{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz\leqslant 1} dxdydz = \iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw = 2\times\frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

2ème solution. Supposons savoir que le volume délimité par l'ellipsoïde d'équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ est $\frac{4}{3}\pi abc$. La matrice de la forme quadratique $(x,y,z)\mapsto x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$. On sait que cette matrice a 3 valeurs propres strictement positives $\lambda=\frac{1}{a^2}$, $\mu=\frac{1}{b^2}$ et $\nu=\frac{1}{c^2}$ puis qu'il existe une base orthonormée dans laquelle l'ellipsoïde a pour équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$. Le volume de l'ellipsoïde est alors

$$V=\frac{4}{3}\pi abc=\frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu\nu}}=\frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}}=\frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{8\pi}{3}$$

$$\boxed{V=\frac{8\pi}{3}.}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Supposons tout d'abord que le support de l'arc γ est de longueur $L=2\pi$. Puisque γ est un arc de classe C^1 régulier, on peut choisir pour γ une paramétrisation normale c'est-à-dire une paramétrisation de classe C^1 $t\mapsto(x(t),y(t))$, $t\in[0,2\pi]$, telle que $\forall t\in[0,2\pi]$, $x'^2(t)+y'^2(t)=1$. L'arc étant fermé, on a de plus $\gamma(0)=\gamma(2\pi)$. Cette dernière condition permet de prolonger les fonctions x et y en des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 par morceaux et 2π-périodiques.
Puisque les fonctions x' et y' sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, la formule de PARSEVAL permet d'écrire

$$\begin{aligned}
L=2\pi &= \int_0^{2\pi} 1\,dt = \int_0^{2\pi}(x'^2(t)+y'^2(t))\,dt = \int_0^{2\pi} x'^2(t)\,dt+\int_0^{2\pi} y'^2(t)\,dt\\
&= \pi\left(\frac{a_0^2(x')}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(x')+b_n^2(x'))+\frac{a_0^2(y')}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(y')+b_n^2(y'))\right)\\
&= \pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(x')+b_n^2(x')+a_n^2(y')+b_n^2(y'))\right)\ (a_0(x')=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x'(t)\,dt=\frac{1}{\pi}(x(2\pi)-x(0))=0=a_0(y'))\\
&\pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n^2(a_n^2(x)+b_n^2(x)+a_n^2(y)+b_n^2(y))\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la formule de GREEN-RIEMANN

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_\gamma xdy=\int_0^{2\pi}x(t)y'(t)\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}((x(t)+y'(t))^2-(x(t)-y'(t))^2)\,dt\\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{a_0^2(x+y')}{2}-\frac{a_0^2(x-y')}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(x+y')-a_n^2(x-y')+b_n^2(x+y')-b_n^2(x-y'))\right)\\
&= \pi\left(\frac{a_0(x)a_0(y')}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(x)a_n(y')+b_n(x)b_n(y'))\right)\ \text{(par linéarité des coefficients de FOURIER)}\\
&= \frac{L}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}n(a_n(x)b_n(y)-b_n(x)a_n(y))\\
&\leqslant \frac{L}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2}(a_n^2(x)+b_n^2(y)+b_n^2(x)+a_n^2(y))=\frac{\mathscr{L}}{2}\times\frac{\mathscr{L}}{\pi}=\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}.
\end{aligned}$$

Si on a l'égalité, alors les inégalités valables pour $n\geqslant 1$,

$$n(a_n(x)b_n(y)-b_n(x)a_n(y)) \leqslant n\times\tfrac{1}{2}(a_n^2(x)+b_n^2(y)+b_n^2(x)+a_n^2(y)) \leqslant \tfrac{n^2}{2}(a_n^2(x)+b_n^2(y)+b_n^2(x)+a_n^2(y)),$$

sont des égalités. En particulier, pour $n\geqslant 2$, on a $a_n(x)=a_n(y)=b_n(x)=b_n(y)=0$. D'autre part, quand $n=1$, $a_1(x)b_1(y)-b_1(x)a_1(y)=\frac{1}{2}(a_1^2(x)+b_1^2(y)+b_1^2(x)+a_1^2(y))$ impose $(a_1(x)-b_1(y))^2+(b_1(x)+a_1(y))^2=0$ et donc $a_1(y)=-b_1(x)$ et $b_1(y)=a_1(x)$.
D'après le théorème de DIRICHLET, en posant $\alpha=\frac{a_0(x)}{2}$, $\beta=\frac{a_0(y)}{2}$, $a=a_1(x)$ et $b=b_1(x)$,

$$\forall t\in[0,2\pi],\ \begin{cases} x(t)=\alpha+a\cos t+b\sin t=\alpha+\sqrt{a^2+b^2}\cos(t-t_0)\\ y(t)=\beta-b\cos t+a\sin t=\beta+\sqrt{a^2+b^2}\sin(t-t_0)\end{cases}$$

où $\cos(t_0)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(t_0)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Le support de l'arc γ est donc un cercle. La réciproque est claire.
L'inégalité isopérimétrique est donc démontrée dans le cas où $L=2\pi$ et on a l'égalité si et seulement si le support de l'arc γ est un cercle. Dans le cas où la longueur de la courbe C est un réel strictement positif $\mathscr{L}$ quelconque, l'homothétique (C') de (C) dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2\pi}{\mathscr{L}}$ a une longueur $\mathscr{L}'$ égale à 2π et délimite une aire $\mathscr{A}'=\left(\frac{2\pi}{\mathscr{L}}\right)\times\mathscr{A}$.
L'inégalité $\mathscr{A}'\leqslant\frac{\mathscr{L}'^2}{2\pi}=2\pi$ s'écrit encore $\mathscr{A}\leqslant 2\pi\times\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi^2}=\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}$. De plus on a l'égalité si et seulement si la courbe (C) est un cercle (dans ce cas, $\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}=\frac{4\pi^2R^2}{4\pi}=\pi R^2=\mathscr{A}$).

$$\boxed{\mathscr{A}\leqslant\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}\text{ avec égalité si et seulement si la courbe }(C)\text{ est un cercle.}}$$

(A périmètre donné, le cercle est la courbe fermée délimitant la plus grande aire)

Correction de l'exercice 9 ▲

On pose déjà $u=xa$ et $v=yb$ de sorte que $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=ab$. On obtient

$$I=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}(x^2-y^2)\,dxdy=ab\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}(a^2u^2-b^2v^2)\,dudv.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}u^2\,dudv&=\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}v^2\,dudv=\frac{1}{2}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}(u^2+v^2)\,dudv=\frac{1}{2}\int_{r=0}^{r=1}\int_{\theta=0}^{2\pi}r^2\times rdrd\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 2\pi=\frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{I=\frac{\pi ab(a^2-b^2)}{4}.}$$
