Exercices : Barbara Tumpach
Relecture : François Lescure

Espaces $L^p(\mu)$

Définition. Étant donné un espace mesuré (Ω, Σ, μ), on note pour $1 \leq p < +\infty$,

$$\mathscr{L}^p(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \|f\|_p < +\infty\}, \quad \text{avec} \quad \|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et}$$
$$\mathscr{L}^\infty(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \|f\|_\infty < +\infty\}, \text{ avec } \|f\|_\infty := \inf\{M \geq 0, |f| \leq M \ \mu - \text{pp}\}.$$

On définit les espaces $L^p(\mu)$ comme les espaces vectoriels quotients de $\mathscr{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \mu -$ presque partout.

1 Inégalités de Young et de Hölder

Exercice 1

1. Soit $a, b \geq 0$ et soit $p, q \in (1, +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(on dit que p et q sont conjugués au sens de Young)*. Montrer l'inégalité de Young :
$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$
On pourra considérer la fonction $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(a) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q - ab$.
2. Soit de nouveau $p, q \in (1, +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $\lambda > 0$
$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_\Omega |f|^p \, d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_\Omega |g|^q \, d\mu.$$
Optimiser cette inégalité par rapport à λ et montrer l'inégalité de Hölder :
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$
Cette inégalité est-elle vraie pour $p = 1$ et $q = +\infty$?
3. Soient p et p' dans $[1, +\infty[$ (pas nécessairement conjugués). Montrer que si f appartient à $L^p(\mu) \cap L^{p'}(\mu)$, alors f appartient à $L^r(\mu)$ pour tout r compris entre p et p'.
4. Montrer que si μ est une mesure finie alors
$$L^\infty(\mu) \subset \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mu),$$
et, pour tout f,
$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$
5. Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors $f \cdot g \in L^r(\mu)$ et
$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Correction ▼ [005954]

2 Théorème de complétude de Riesz

Exercice 2

Théorème 1.(Théorème de Riesz) Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $L^p(\mu)$ est complet.

Théorème 2. Soit p tel que $1 \leq p \leq +\infty$ et soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$ convergeant vers une fonction $f \in L^p(\mu)$. Alors il existe une sous-suite de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge ponctuellement presque-partout vers f.

Le but de cet exercice est de démontrer les théorèmes 1 et 2.

1. *Cas de $L^\infty(\mu)$.*
   (a) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(\mu)$. Pour $k,m,n \geq 1$, considérons les ensembles
   $$A_k := \{x \in \Omega, |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\} \ ; \quad B_{m,n} := \{x \in \Omega, |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\}.$$
   Montrer que $E := \bigcup_k A_k \bigcup_{n,m} B_{m,n}$ est de mesure nulle.
   (b) Montrer que sur le complémentaire de E, la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.
   (c) En déduire que $L^\infty(\mu)$ est complet.
2. *Cas de $L^p(\mu)$.*
   (a) Soit $1 \leq p < +\infty$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}$.
   (b) Posons
   $$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad \text{et} \quad g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|,$$
   où g est à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $\|g_k\|_p < 1$, puis que $\|g\|_p \leq 1$.
   (c) En déduire que la série
   $$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$$
   est absolument convergente pour presque tout $x \in \Omega$. Notons $f(x)$ sa somme lorsque celle-ci est finie et posons $f(x) = 0$ sinon. Vérifier que f est la limite ponctuelle des $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ pour presque tout $x \in \Omega$.
   (d) Montrer que $f - f_m \in L^p(\mu)$, $f \in L^p(\mu)$ et que $\|f - f_m\|_p \to 0$ quand $m \to +\infty$. Conclure.

Correction ▼ [005955]

3 Différentiabilité des normes $\|\cdot\|_p$

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$ avec $1 < p < +\infty$. Montrer que la fonction $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$N(t) = \int_\Omega |f(x) + t \cdot g(x)|^p \, d\mu$$
est différentiable et que sa dérivée en $t = 0$ est donnée par :
$$\frac{dN}{dt}_{|t=0} = p \int_\Omega |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) \, d\mu,$$
où par convention $|f(x)|^{p-2} f(x) = 0$ lorsque $f = 0$.

Correction ▼ [005956]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $a,b \geq 0$ et soit $p,q \in (1,+\infty)$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. La fonction $\theta\ :\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définit par $\theta(a)=\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q-ab$ est dérivable et :
$$\theta'(a)=a^{p-1}-b.$$
Cette dérivée s'annule lorsque $a=b^{\frac{1}{p-1}}$, est négative pour $a<b^{\frac{1}{p-1}}$ et positive pour $a>b^{\frac{1}{p-1}}$. On a
$$\theta(b^{\frac{1}{p-1}})=\frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}+\frac{1}{q}b^q-b^{1+\frac{1}{p-1}}=0.$$
Ainsi $\theta(a)\geq 0$, i.e.
$$ab\leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

2. Soit $f\in L^p(\mu)$ et $g\in L^q(\mu)$. D'après la question précédente, pour tout $\lambda>0$ et pour μ-presque tout x :
$$|fg|(x)=|\lambda f(x)\cdot\frac{g(x)}{\lambda}|\leq \frac{\lambda^p}{p}|f(x)|^p+\frac{\lambda^{-q}}{q}|g(x)|^q.$$
Ainsi
$$\int_\Omega |fg|\,d\mu\leq \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p\,d\mu+\frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q\,d\mu.$$
Posons
$$\Phi(\lambda)=\frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p\,d\mu+\frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q\,d\mu.$$
La fonction Φ est dérivable et :
$$\Phi'(\lambda)=\lambda^{p-1}\|f\|_p^p-\lambda^{-q-1}\|g\|_q^q.$$
Cette dérivée s'annule pour $\lambda_1:=\left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p+q}}$, est négative pour $\lambda\leq\lambda_1$ et positive pour $\lambda\geq\lambda_1$. Ainsi le minimum de Φ vaut :
$$\begin{aligned}\Phi(\lambda_1)\ &=\tfrac{1}{p}\left(\tfrac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{p}{p+q}}\|f\|_p^p+\tfrac{1}{q}\left(\tfrac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{-\frac{q}{p+q}}\|g\|_q^q\\ &=\tfrac{1}{p}\|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}}\|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}}+\tfrac{1}{q}\|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}}\|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}}=\|f\|_p\|g\|_q.\end{aligned}$$
On en déduit l'inégalité de Hölder :
$$\|fg\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q.$$
Si $f\in L^1(\mu)$ et $g\in L^\infty(\mu)$, alors $|g(x)|\leq\|g\|_\infty$ pour presque tout $x\in\Omega$ et
$$\int_\Omega |fg|\,d\mu\leq\|g\|_\infty\int_\Omega |f|\,d\mu,$$
i.e. $\|fg\|_1\leq\|g\|_\infty\|f\|_1$.

3. Soient $p,p'\in[1,+\infty)$. On suppose $p<p'$. Soit $p<r<p'$. On a
$$|f|^r=|f|^r\mathbf{1}_{|f|>1}+|f|^r\mathbf{1}_{|f|<1}\ \leq\ |f|^{p'}\mathbf{1}_{|f|>1}+|f|^p\mathbf{1}_{|f|<1}.$$
On en déduit que
$$\int_\Omega |f|^r\,d\mu\ \leq\ \int_\Omega |f|^{p'}\,d\mu+\int_\Omega |f|^p\,d\mu\ <+\infty,$$
donc f appartient à $L^r(\mu)$.

4. Supposons que μ soit une mesure finie et soit $f \in L^\infty(\mu)$. Alors

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

pour presque tout $x \in \Omega$. Ainsi pour tout p

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu \ \leq \ \|f\|_\infty^p \int_\Omega 1 \, d\mu \ = \ \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) \ < \ +\infty,$$

ce qui implique que $f \in L^p(\mu)$. En particulier, f appartient à l'intersection $\bigcap_{p\geq 1} L^p(\mu)$. De plus, pour tout p, on a :

$$\|f\|_p \ \leq \ \|f\|_\infty \, \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui implique que

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \ \leq \ \|f\|_\infty.$$

D'autre part, pour tout $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, on a

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu \ \geq \ \int_{|f|>(\|f\|_\infty-\varepsilon)} |f|^p \, d\mu \ \geq \ (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \, \mu\Big(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\Big).$$

Ainsi pour tout p, il vient

$$\|f\|_p \ \geq \ (\|f\|_\infty - \varepsilon) \, \mu\Big(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Puisque $\lim_{p\to+\infty} \mu\left(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\right)^{\frac{1}{p}} = 1$, il en découle que

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \ \geq \ \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \ \geq \ \|f\|_\infty,$$

donc finalement $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

5. Posons $f_1 := f^r$ et $g_1 := g^r$. On a $f_1 \in L^{\frac{p}{r}}(\mu)$ et $g_1 \in L^{\frac{q}{r}}(\mu)$. Notons que l'identité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ entraîne que $\frac{p}{r}, \frac{q}{r} > 1$ et que les nombres $\frac{p}{r}$ et $\frac{q}{r}$ sont conjugués au sens de Young. Par l'inégalité de Hölder on a donc

$$\int_\Omega (fg)^r d\mu = \int_\Omega f_1 g_1 \, d\mu \leq \left(\int_\Omega f_1^{\frac{p}{r}} d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_\Omega g_1^{\frac{q}{r}} d\mu\right)^{\frac{r}{q}} = \left(\int_\Omega f^p d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_\Omega g^q d\mu\right)^{\frac{r}{q}}.$$

D'où, finalement,

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. *Cas de $L^\infty(\mu)$.*

   (a) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(\mu)$. Pour $k, m, n \geq 1$, soient les ensembles

   $$A_k := \{x \in \Omega, |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\} \ ; \quad B_{m,n} := \{x \in \Omega, |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\},$$

   et $E := \bigcup_k A_k \bigcup_{n,m} B_{m,n}$. Par définition de la norme infinie, les ensembles A_k et $B_{n,m}$ sont de mesure nulle. Par σ-sous-additivité de μ, on a

   $$\mu(E) \leq \sum_k \mu(A_k) + \sum_{n,m} \mu(B_{n,m}) = 0.$$

(b) Sur $\Omega \setminus E$, on a :

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty,$$

i.e. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy uniforme sur $\Omega \setminus E$. En particulier, pour tout $x \in \Omega \setminus E$, la suite $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy réelle, donc est convergeante car $\mathbb{R}$ est complet. Notons f la limite ponctuelle de f_n sur $\Omega \setminus E$. Montrons que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le complémentaire de E. On a

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Comme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_ε tel que pour $n,m > N_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Alors pour $n > N_\varepsilon$,

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Il est découle que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\Omega \setminus E$.

(c) Étendons la fonction f à Ω en posant $f = 0$ sur E. Il reste à montrer que la fonction f appartient à $L^\infty(\mu)$. Pour $n > N_\varepsilon$, et $x \in \Omega \setminus E$, on a

$$|f(x)| < |f_n(x)| + \varepsilon \leq \|f_n(x)\|_\infty + \varepsilon$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \leq \|f_n(x)\|_\infty + \varepsilon < +\infty$. Ainsi $L^\infty(\mu)$ est complet.

2. *Cas de* $L^p(\mu)$.

(a) Soit $1 \leq p < +\infty$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. Il existe n_1 tel que pour $n,m \geq n_1$, $\|f_n - f_m\|_p < 2^{-1}$. On prend ensuite $n_2 > n_1$ tel que pour $n,m \geq n_2$, $\|f_n - f_m\|_p < 2^{-2}$, et ainsi de suite, pour tout k, il existe un $n_k > n_{k-1}$ tel que $n,m \geq n_k \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < 2^{-k}$.

(b) Posons

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad \text{et} \quad g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|,$$

où g est à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\|g_k\|_p = \| \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \,\|_p.$$

D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} < 1.$$

D'après le lemme de Fatou, on en déduit que $\|g\|_p \leq 1$.

(c) Comme $\int_\Omega |g|^p \, d\mu < +\infty$, nécessairement $|g| < +\infty$ μ-pp, i.e. pour presque tout $x \in \Omega$ la série

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$$

est absolument convergente. Notons $f(x)$ sa somme lorsque celle-ci est finie et posons $f(x) = 0$ sinon. On a :

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) = f_{n_k}$$

et $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k} \quad \mu-\text{pp}$.

(d) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\mu)$, il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que pour $n,m > N_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. Pour $m > N_\varepsilon$ on a par le lemme de Fatou :

$$\int_\Omega |f - f_m|^p \, d\mu = \int_\Omega |\lim_{k\to+\infty} f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \leq \lim_{k\to+\infty}\inf \int_\Omega |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p.$$

Ainsi $f - f_m \in L^p(\mu)$ et $\|f - f_m\|_p \to 0$ quand $m \to +\infty$. De plus, d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|f\|_p = \|(f - f_m) + f_m\|_p \leq \|(f - f_m)\|_p + \|f_m\|_p < +\infty,$$

c'est-à-dire $f \in L^p(\mu)$. En conclusion $L^p(\mu)$ est complet.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$ avec $1 < p < +\infty$. La fonction $\varphi(t) = |f(x) + \tan(x)|^p$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x) + \tan(x) + hg(x)|^p - |f(x) + \tan(x)|^p}{h} = p|f(x) + \tan(x)|^{p-2}(f(x) + \tan(x))g(x),$$

lorsque $f(x)$ et $g(x)$ ont un sens, c'est-à-dire pour presque tout x. De plus, d'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\frac{|f(x) + \tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t} = \varphi'(t_0) = p|f(x) + t_0 g(x)|^{p-2}(f(x) + t_0 g(x))g(x),$$

pour un certain t_0 compris entre 0 et t. Ainsi pour $|t| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\tfrac{|f(x)+\tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t}\right| &= p|f(x) + t_0 g(x)|^{p-1}|g(x)| \\
&\leq p\,(|f(x)| + |g(x)|)^p \\
&\leq 2^{p-1}\,p\,(|f(x)|^p + |g(x)|^p),
\end{aligned}$$

où la première inégalité découle de l'inégalité triangulaire et de la majoration $|g(x)| \leq (|f(x)| + |g(x)|)$, et où la deuxième inégalité provient de la convexité de la fonction $x \mapsto x^p$ pour $p > 1$ impliquant en particulier : $\left(\frac{u+v}{2}\right)^p \leq \frac{u^p}{2} + \frac{v^p}{2}$. Il en découle que $t \mapsto \frac{|f(x)+\tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t}$ est uniformément bornée par une fonction intégrable. Le théorème de convergence dominée permet alors de dériver sous le signe somme et

$$\frac{dN}{dt}_{t=0} = p\int_\Omega |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) \, d\mu.$$
