Coniques

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 *IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Eléménts caractéristiques de la conique dont une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ est

- 1. $y^2 = x$,
  2. $y^2 = -x$,
  3. $y = x^2$,
  4. $y = -x^2$.
- 1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$,
  2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$,
  3. $x^2 + 2y^2 = 1$.
- 1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$,
  2. $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,
  3. $x^2 - y^2 = 1$.

Correction ▼ [005540]

Exercice 2 *IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Eléménts caractéristiques de la courbe dont une équation dans $\mathscr{R}$ est

- 1. $y = x^2 + x + 1$,
  2. $y^2 + y - 2x = 0$,
  3. $y = \sqrt{2x+3}$.
- 1. $x^2 + x + 2y^2 + y = 0$,
  2. $y = -2\sqrt{-x^2 + x}$.
- $x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$.

Correction ▼ [005541]

Exercice 3 **IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Nature et éléments caractéristiques de la courbe dont une équation en repère orthonormé est

1. $y = \frac{1}{x}$,
2. $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 106x + 92y + 74 = 0$,
3. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$,
4. $(x - y + 1)^2 + (x + y - 1)^2 = 0$,

5. $x^2+y^2-3x-y+3=0$,
6. $x(x-1)+(y-2)(y-3)=0$,
7. $(x+y+1)(x-y+3)=3$,
8. $(2x+y-1)^2-3(x+y)=0$.

Correction ▼ [005542]

Exercice 4 *IT

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

1. $r=\frac{1}{1+2\cos\theta}$,
2. $r=\frac{1}{1+\cos\theta}$,
3. $r=\frac{1}{2+\cos\theta}$,
4. $r=\frac{1}{1-\sin\theta}$,
5. $r=\frac{1}{2-\cos\theta}$.

Correction ▼ [005543]

Exercice 5 ***

Déterminer l'image du cercle trigonométrique par la fonction $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & \frac{1}{1+z+z^2}\end{array}$.

Correction ▼ [005544]

Exercice 6 **

Déterminer l'orthoptique d'une parabole , c'est-à-dire l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes à la parabole, perpendiculaires l'une à l'autre.

Correction ▼ [005545]

Exercice 7 ***

1. **Droite de** SIMSON. Soit (A,B,C) un triangle et M un point du plan. Montrer que les projetés orthogonaux P, Q et R de M sur les cotés (BC), (CA) et (AB) du triangle (ABC) sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à (ABC). La droite passant par P, Q et R s'appelle la droite de SIMSON du point M relativement au triangle ABC (ou au cercle (ABC)).
2. **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites deux à deux non parallèles. En particulier, fournir la construction des points de contacts.

Correction ▼ [005546]

Exercice 8 **

$(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[A,B]$. (D) est la tangente en A à $(\mathscr{C})$. P est un point variable sur $(\mathscr{C})$ et (T) la tangente en P à $(\mathscr{C})$. (T) recoupe (D) en S. La perpendiculaire à (AB) passant par P coupe (BS) en M. Ensemble des points M ?

Correction ▼ [005547]

Exercice 9 ***

Soit, dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, la courbe (Γ) d'équations $\left\{\begin{array}{l}y=x^2+x+1\\ x+y+z=1\end{array}\right.$.
Montrer que (Γ) est une parabole dont on déterminera le sommet, l'axe, le foyer et la directrice.

Correction ▼ [005548]

Exercice 10 *

Que vaut l'excentricité de l'hyperbole équilatère (une hyperbole est équilatère si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires) ?

Correction ▼ [005549]

Exercice 11 ***

Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que la courbe d'équation $P(x) = P(y)$ dans un certain repère orthonormé, est en général la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

Correction ▼ [005550]

Exercice 12 ***

Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole équilatère de centre O et P et Q deux points de $(\mathscr{H})$ symétriques par rapport à O. Montrer que le cercle de centre P et de rayon PQ recoupe $(\mathscr{H})$ en trois points formant un triangle équilatéral de centre P.

Correction ▼ [005551]

Exercice 13 ***

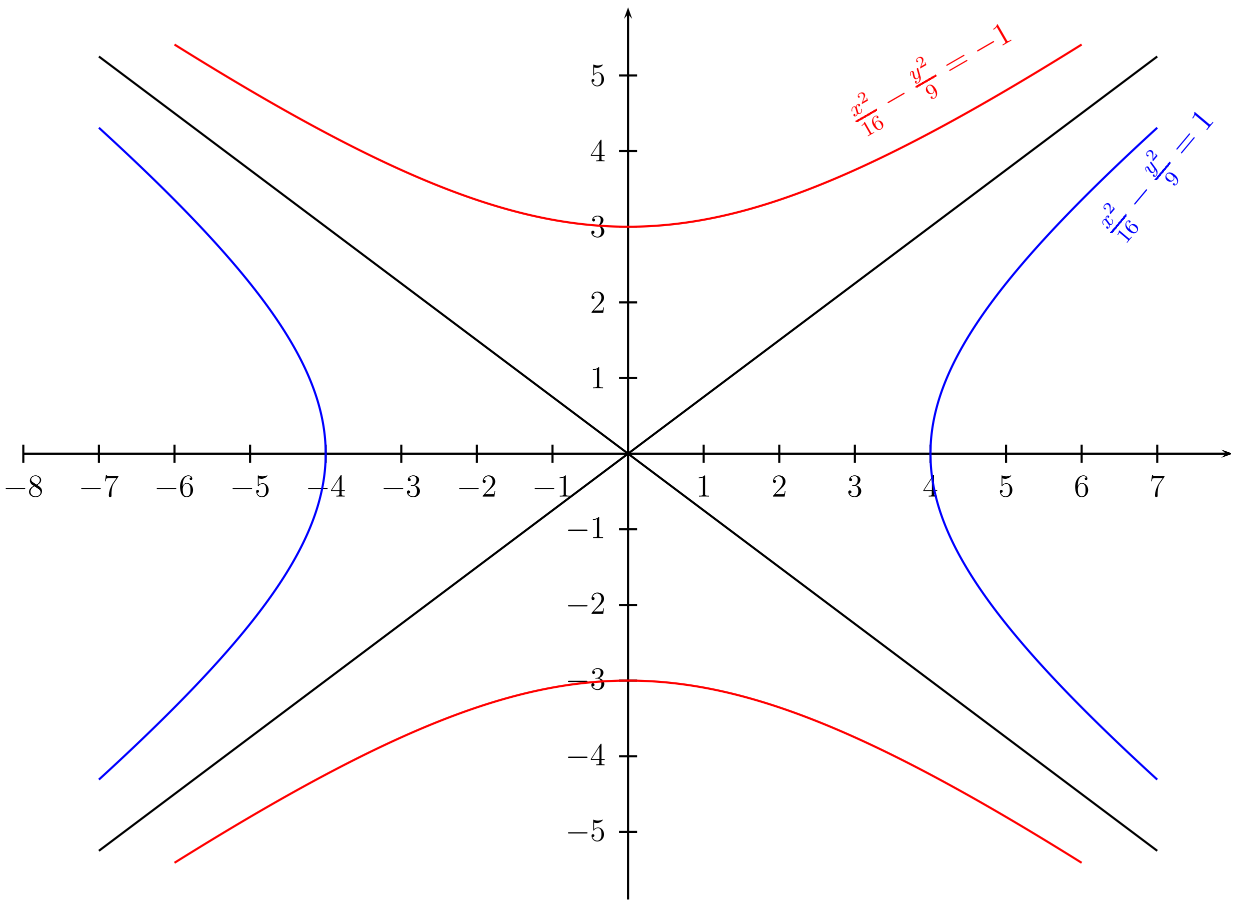
Equation cartésienne de la parabole tangente à $(0x)$ en $(1,0)$ et à $(0y)$ en $(0,2)$.

Correction ▼ [005552]

Correction de l'exercice 1 ▲

On note $\mathscr{C}$ la courbe considérée.

1. (a) $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Ox), de paramètre $p=\frac{1}{2}$ tournée vers les x positifs. Son foyer est le point $F\left(\frac{1}{4},0\right)$ et sa directrice est $\mathscr{D}\ :\ x=-\frac{1}{4}$.
   (b) $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Ox), de paramètre $p=\frac{1}{2}$ tournée vers les x négatifs. Son foyer est le point $F\left(-\frac{1}{4},0\right)$ et sa directrice est $\mathscr{D}\ :\ x=\frac{1}{4}$.
   (c) $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Oy), de paramètre $p=\frac{1}{2}$ tournée vers les y positifs. Son foyer est le point $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$ et sa directrice est $\mathscr{D}\ :\ y=-\frac{1}{4}$.
   (d) $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Oy), de paramètre $p=\frac{1}{2}$ tournée vers les y négatifs. Son foyer est le point $F\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ et sa directrice est $\mathscr{D}\ :\ y=\frac{1}{4}$.
2. (a) $\mathscr{C}$ est une ellipse, de centre O avec $a=5>3=b$ et donc d'axe focal (Ox).
   Ses sommets sont $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, $B(0,3)$ et $B'(0,-3)$.
   $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$ et donc les foyers sont $F(4,0)$ et $F'(-4,0)$.
   L'excentricité e vaut $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.
   Les directrices ont pour équations respectives $x=\frac{a}{e}=\frac{25}{4}$ et $x=-\frac{25}{4}$.
   (b) $\mathscr{C}$ est une ellipse, de centre O avec $a=3<5=b$ et donc d'axe focal (Oy).
   Ses sommets sont $A(3,0)$, $A'(-3,0)$, $B(0,5)$ et $B'(0,-5)$.
   $c=\sqrt{b^2-a^2}=4$ et donc les foyers sont $F(0,4)$ et $F'(0,-4)$.
   L'excentricité e vaut $e=\frac{c}{b}=\frac{4}{5}$.
   Les directrices ont pour équations respectives $y=\frac{b}{e}=\frac{25}{4}$ et $y=-\frac{25}{4}$.
   (c) $x^2+2y^2=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$.
   $\mathscr{C}$ est une ellipse, de centre O avec $a=1>\frac{1}{\sqrt{2}}=b$ et donc d'axe focal (Ox).
   Ses sommets sont $A(1,0)$, $A'(-1,0)$, $B\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B'\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
   $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc les foyers sont $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.
   L'excentricité e vaut $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
   Les directrices ont pour équations respectives $x=\frac{a}{e}=\sqrt{2}$ et $x=-\sqrt{2}$.
3. (a) $\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Ox) avec $a=4$ et $b=3$ et donc $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$, puis $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$.
   Les sommets sont $A(4,0)$ et $A'(-4,0)$ et les foyers sont $F(5,0)$ et $F(-5,0)$.
   Les directrices sont les droites d'équations respectives $x=\frac{a}{e}=\frac{16}{5}$ et $x=-\frac{16}{5}$.
   Les asymptotes sont les les droites d'équations respectives $y=\frac{3}{4}x$ et $y=-\frac{3}{4}x$.
   (b) $\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Oy) avec $a=4$ et $b=3$ et donc $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$, puis $e=\frac{c}{b}=\frac{5}{3}$.
   Les sommets sont $B(0,3)$ et $B'(0,-3)$ et les foyers sont $F(0,5)$ et $F(0,-5)$.
   Les directrices sont les droites d'équations respectives $y=\frac{b}{e}=\frac{9}{5}$ et $y=-\frac{9}{5}$.
   Les asymptotes sont les droites d'équations respectives $y=\frac{3}{4}x$ et $y=-\frac{3}{4}x$.



(c) $\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Ox) avec $a=b=1$ et donc $c=\sqrt{2}$, puis $e=\sqrt{2}$.
Les sommets sont $A(1,0)$ et $A'(-1,0)$ et les foyers sont $F(\sqrt{2},0)$ et $F(-\sqrt{2},0)$.
Les directrices sont les droites d'équations respectives $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Les asymptotes sont les les droites d'équations respectives $y=x$ et $y=-x$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. (a) $y=x^2+x+1 \Leftrightarrow y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(y-\frac{3}{4}\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, d'axe focal la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$, de paramètre $p=\frac{1}{2}$ et donc de foyer $F\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2},1\right)$ et de directrice d'équation $y=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

   (b) $y^2+y-2x=0 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2x=0 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2\left(x+\frac{1}{8}\right)$. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{2}\right)$, d'axe focal la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}$, de paramètre $p=1$ et donc de foyer $F\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{8},-\frac{1}{2}\right)$ et de directrice d'équation $x=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{8}$.

   (c) $y=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow y^2=2\left(x+\frac{3}{2}\right)$ et $y\geq 0$. $\mathscr{C}$ est une demi-parabole de sommet $S\left(-\frac{3}{2},0\right)$, d'axe focal (Ox), de paramètre $p=1$ et donc de foyer $F\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2},0\right)=(-1,0)$ et de directrice d'équation $x=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$.

2. (a) $x^2+x+2y^2+y=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=1$. $\mathscr{C}$ est une ellipse. Centre : $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$.
   $a=\sqrt{\frac{3}{8}}>\frac{\sqrt{3}}{4}=b$. Axe focal : $y=-\frac{1}{4}$. Sommets : $A\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}},-\frac{1}{4}\right)$, $A'\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{8}},-\frac{1}{4}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Foyers : $F\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$.
   Directrices : $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) $y=-2\sqrt{-x^2+x} \Leftrightarrow y^2=4(-x^2+x)$ et $y\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2}+y^2=1$ et $y\leq 0$. $\mathscr{C}$ est une demi-ellipse. Centre : $\left(\frac{1}{2},0\right)$. $a=\frac{1}{2}<1=b$. Axe focal : $x=0$. Sommets : $A\left(1,0\right)$, $A'\left(0,0\right)$ et $B'\left(\frac{1}{2},-1\right)$. $c=\sqrt{b^2-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Foyers : $F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F'\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Directrices : $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. $x^2-y^2+x+y+1=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=-1$. $\mathscr{C}$ est une hyperbole de centre $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et d'axe focal la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$. $a=b=1$. Sommets : $B\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$ puis $e=\frac{c}{b}=\sqrt{2}$. Foyers : $F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)$. Directrices : $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Asymptotes : $y=x+1$ et $y=-x$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On note $\mathscr{H}$ l'hyperbole considérée. On tourne de $\frac{\pi}{4}$. Pour cela, on pose $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\end{array}\right.$. On a alors

$$y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow xy=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(X-Y)(X+Y)=1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

Ainsi, si $\mathscr{R}$ est le repère orthonormé initial $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et $\mathscr{R}'$ est le repère $\left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$ où $\overrightarrow{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{J}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$, une équation de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}$ est $xy=1$ et une équation de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}'$ est $\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$. On obtient $a=b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=2$ et $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$. Les formules de changement de repère s'écrivent $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\end{array}\right.$ et les formules inverses s'écrivent $\left\{\begin{array}{l} X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)\end{array}\right.$ (dans ce qui suit, les coordonnées d'un point dans $\mathscr{R}'$ seront notées avec $\mathscr{R}'$ en indice alors que les coordonnées dans $\mathscr{R}$ seront notées sans écrire $\mathscr{R}$ en indice).

$\boxed{\text{Centre O(0,0)}}$.

Asymptotes : bien sûr, les axes (Ox) et (Oy).
Axe focal : l'axe (OX) ou encore la droite d'équation $y=x$ (dans $\mathscr{R}$).
Sommets : $A(\sqrt{2},0)_{\mathscr{R}'}$, $A'(-\sqrt{2},0)_{\mathscr{R}'}$ et donc $\boxed{\text{Sommets A(1,1) et A'(-1,-1)}}$.
Foyers : $F(2,0)_{\mathscr{R}'}$, $F'(-2,0)_{\mathscr{R}'}$ et donc $\boxed{\text{Foyers } F(\sqrt{2},\sqrt{2}) \text{ et } F'(-\sqrt{2},-\sqrt{2}).}$
Directrices : les droites d'équations $X=\pm\frac{a}{e}=\pm 1$ et donc dans $\mathscr{R}$, les droites d'équations respectives $x+y=\pm\sqrt{2}$.

2. Le discriminant de cette conique vaut $41\times 34-12^2=1250>0$. Il s'agit donc d'une conique du genre ellipse. On pose $\left\{\begin{array}{l} x=\cos(\theta)X-\sin(\theta)Y\\ y=\sin(\theta)X+\cos(\theta)Y\end{array}\right.$ et on détermine θ (ou plutôt $\cos\theta$ et $\sin\theta$) de sorte que le terme en XY disparaisse. Mais, le coefficient de XY dans

$$41x^2-24xy+34y^2=41(\cos(\theta)X-\sin(\theta)Y)^2-24(\cos(\theta)X-\sin(\theta)Y)(\sin(\theta)X+\cos(\theta)Y)+34(\sin(\theta)X+\cos(\theta)Y$$

vaut

$$-82\cos\theta\sin\theta-24(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+68\cos\theta\sin\theta=-24(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-14\cos\theta\sin\theta.$$

Ce coefficient est nul si et seulement si $-12\cos^2\theta+12\sin^2\theta-7\cos\theta\sin\theta=0$ ou encore, après division par $\cos^2\theta$, $12\tan^2\theta-7\tan\theta-12=0$. On peut alors prendre $\tan\theta=\frac{4}{3}$, puis on peut prendre $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{3}{5}$ et $\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\frac{3}{5}\frac{4}{3}=\frac{4}{5}$.

Posons donc $\begin{cases} x = \frac{3X-4Y}{5} \\ y = \frac{4X+3Y}{5} \end{cases}$ $(*)$. On a alors

$$\begin{aligned} 41x^2-24xy+34y^2-106x+92y+74 &= \frac{1}{25}(41(3X-4Y)^2-24(3X-4Y)(4X+3Y)+34(4X+3Y)^2 \\ &\quad -530(3X-4Y)+460(4X+3Y)+1850) \\ &= \frac{1}{25}(625X^2+1250Y^2+250X+3500Y+1850) \\ &= 25\left(X^2+2Y^2+\frac{2}{5}X+\frac{28}{5}Y+\frac{74}{25}\right) \end{aligned}$$

Une équation de la courbe dans le repère défini par $(*)$ est donc $X^2+2Y^2+\frac{2}{5}X+\frac{28}{5}Y+\frac{74}{25}=0$. Ensuite,

$$X^2+2Y^2+\tfrac{2}{5}X+\tfrac{28}{5}Y+\tfrac{74}{25}=0 \Leftrightarrow \left(X+\tfrac{1}{5}\right)^2+2\left(Y+\tfrac{7}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow \left(X+\tfrac{1}{5}\right)^2+\frac{\left(Y+\frac{7}{5}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

$\mathscr{C}$ est une ellipse. On trouve $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=1$ $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ puis Centre $\Omega(1,-1)$. Axe focal : $3x+4y+1=0$ et axe non focal : $-4x+3y+7=0$.
Sommets : $A\left(\frac{8}{5},-\frac{1}{5}\right)$, $A'\left(\frac{2}{5},-\frac{9}{5}\right)$, $B\left(1-\frac{4\sqrt{2}}{5},-1+\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$ et $B'\left(1+\frac{4\sqrt{2}}{5},-1-\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$.
Foyers : $F\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$ et $F'\left(\frac{9}{5},-\frac{8}{5}\right)$. Directrices : $4x-3y+3=0$ et $4x-3y+17=0$.

3. $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$. On pose donc $\begin{cases} X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) \end{cases}$.

$$\begin{aligned} x^2+2xy+y^2+3x-2y+1=0 &\Leftrightarrow 2Y^2+\frac{3}{\sqrt{2}}(X+Y)-\frac{2}{\sqrt{2}}(-X+Y)+1=0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(Y+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2+\frac{5}{\sqrt{2}}X+\frac{15}{16}=0 \Leftrightarrow \left(Y+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2=-\frac{5}{2\sqrt{2}}\left(X+\frac{3}{8\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

$\mathscr{C}$ est une parabole de paramètre $p=\frac{5}{4\sqrt{2}}$.
Sommet : $S\left(-\frac{5}{16},\frac{1}{16}\right)$. Axe focal : $x+y+\frac{1}{4}=0$.
Foyer : $F\left(-\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)$. Directrice : $x-y-\frac{1}{4}=0$.

4. $\mathscr{C}$ est le point d'intersection des droites d'équation $x-y+1=0$ et $x+y-1=0$ c'est-à-dire le point de coordonnées $(0,1)$.

5. $x^2+y^2-3x-y+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$ et donc $\mathscr{C}$ est vide.

6. $x(x-1)+(y-2)(y-3)=0$ est une équation du cercle de diamètre $[AB]$ où $A(0,2)$ et $B(1,3)$.

7. Si on pose $\begin{cases} X=x+y+1 \\ Y=x-y+3 \end{cases}$, on effectue un changement de repère non orthonormé. Dans le nouveau repère, $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne $XY=3$ et donc $\mathscr{C}$ est une hyperbole. Avec le changement de repère effectué, on obtient directement les éléments affines de cette hyperbole mais pas ses éléments métriques : hyperbole d'asymptotes les droites d'équations $x+y+1=0$ et $x-y+3=0$ et donc de centre $(-2,1)$. Pour obtenir l'axe focal, l'excentricité, les foyers et les directrices il faut faire un changement de repère orthonormé.

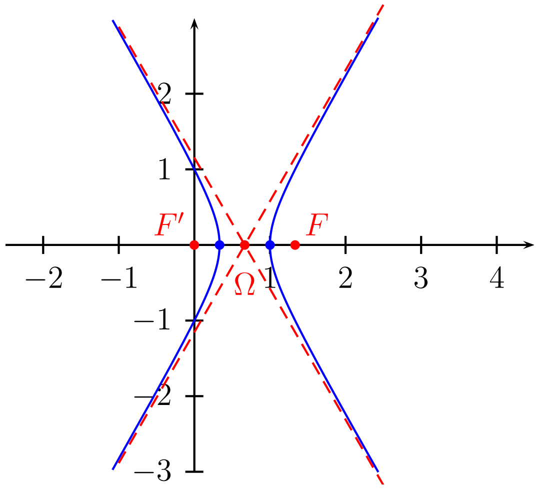
8. Si on pose $\begin{cases} X=2x+y+1 \\ Y=3x+3y \end{cases}$, $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne dans le nouveau repère $Y=X^2$ et donc $\mathscr{C}$ est une parabole. Pour obtenir ces éléments métriques, il faut un changement de repère orthonormé.

Correction de l'exercice 4 ▲

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

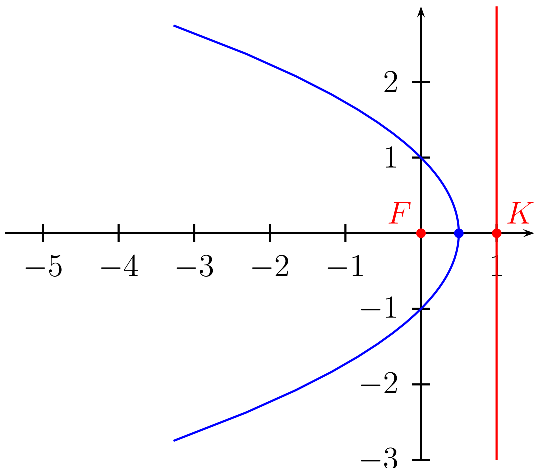
$$1)\ r=\frac{1}{1+2\cos\theta} \quad 2)\ r=\frac{1}{1+\cos\theta} \quad 3)\ r=\frac{1}{2+\cos\theta} \quad 4)\ r=\frac{1}{1-\sin\theta} \quad 5)\ r=\frac{1}{2-\cos\theta}.$$

1. $\mathscr{C}$ est une conique d'excentricité 2 et donc une hyperbole.



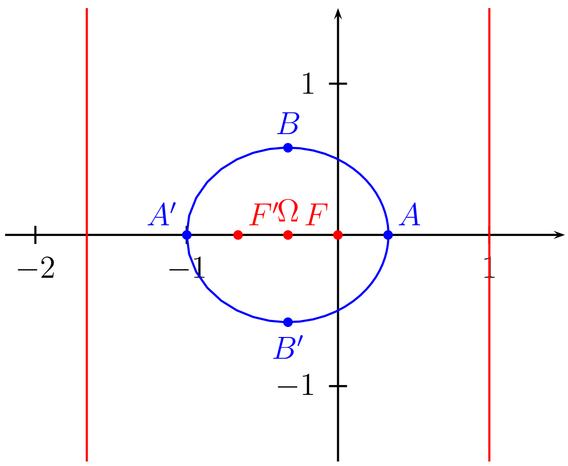
L'axe focal est (Ox). Les sommets sont les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et (Ox) c'est-à-dire les points $M(0)$ et $M(\pi)$ de coordonnées cartésiennes respectives $A'\left(\frac{1}{3},0\right)$ et $A(1,0)$. Le centre Ω est le milieu de $[AA']$ c'est-à-dire $\Omega\left(\frac{2}{3},0\right)$. L'un des foyers est $F' = O$ et l'autre est le symétrique de F' par rapport à Ω : c'est le point $F\left(\frac{4}{3},0\right)$. Puisque $a = \frac{1}{3}$ et $e = 2$, les directrices sont les droites d'équation $x = x_\Omega - \frac{a}{e} = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{5}{6}$. Les branches infinies sont obtenues pour $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$. Les asymptotes sont donc les droites passant par Ω d'angle polaire $\pm\frac{2\pi}{3}$. Ce sont les droites d'équations cartésiennes $y = \pm\sqrt{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

2. $\mathscr{C}$ est une conique d'excentricité 1 et donc une parabole.



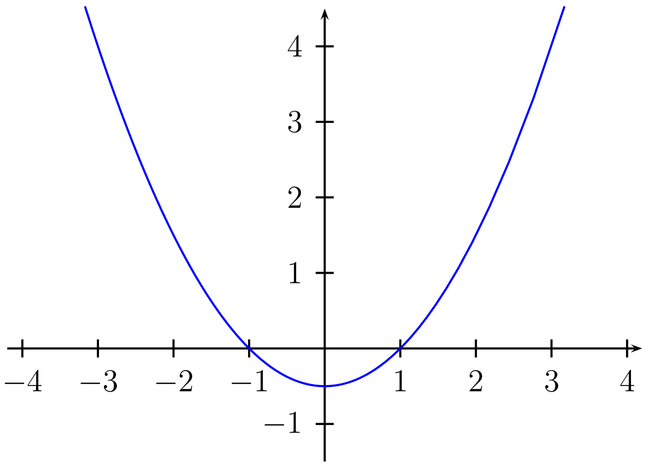
L'axe focal est (Ox). Le sommet est le point $M(0)$ de coordonnées cartésiennes $S\left(\frac{1}{2},0\right)$. Le foyer est $F = O$. Le point K est le symétrique de F par rapport à S et a pour coordonnées $(1,0)$. La directrice a donc pour équation $x = 1$.

3. $\mathscr{C}$ est une conique d'excentricité $e = \frac{1}{2}$ et donc une ellipse.

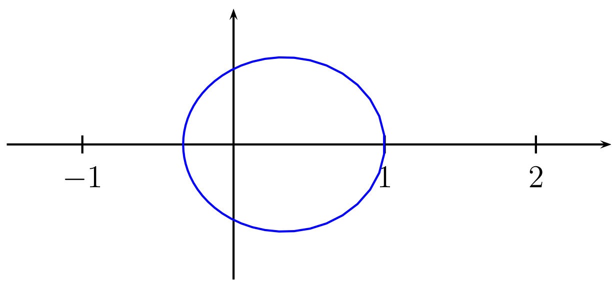


L'axe focal est (Ox). Les sommets sur cet axe sont $A = M(0)$ de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ et $A' = M(\pi)$ de coordonnées $(-1, 0)$. Le centre Ω est le milieu de $[AA']$ et a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$. L'un des foyers est $F = O$. L'autre est le symétrique de F par rapport à Ω : c'est le point F' de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$. Par suite, $c = \frac{1}{3}$ $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. D'où les sommets $B\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Les directrices sont les droites d'équations $x = x_\Omega + \frac{a}{e} = 1$ et $x = -\frac{5}{3}$.

4. $M\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \left[r\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \theta - \frac{\pi}{2}\right] = \left[\frac{1}{1+\cos\theta}, \theta - \frac{\pi}{2}\right] = \text{rot}_{O,-\pi/2}\left(\left[\frac{1}{1+\cos\theta}, \theta\right]\right)$. Donc $\mathscr{C}$ est l'image de la parabole d'équation polaire $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$ par le quart de tour indirect de centre O.



5. $M(\theta + \pi) = [r(\theta + \pi), \theta + \pi] = \left[\frac{1}{2+\cos\theta}, \theta + \pi\right] = s_O\left(\left[\frac{1}{2+\cos\theta}, \theta\right]\right)$. Donc $\mathscr{C}$ est l'image de l'ellipse d'équation polaire $r = \frac{1}{2+\cos\theta}$ par la symétrie centrale de centre O.



Correction de l'exercice 5 ▲

Un point du plan est sur le cercle de centre O et de rayon 1 si et seulement si son affixe z est de module 1 ou encore si et seulement si il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$. Or, pour θ réel,

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+1+e^{-i\theta}} = \overline{\left(\frac{e^{i\theta}}{1+2\cos\theta}\right)}.$$

L'ensemble cherché est donc la symétrique par rapport à (Ox) de la courbe d'équation polaire $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$. Cette dernière est une ellipse, symétrique par rapport à $(0x)$. Donc l'ensemble cherché est l'ellipse d'équation polaire $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$ (voir l'exercice 4, 1)).

Correction de l'exercice 6 ▲

Dans un certain repère orthonormé, la parabole $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $x^2 = 2py$. D'après la règle de dédoublement des termes, une équation de la tangente $\mathscr{T}_{x_0}$ en un point $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{x_0^2}{2p}\right)$ de $\mathscr{P}$ est

$$xx_0 = p(y+y_0).$$

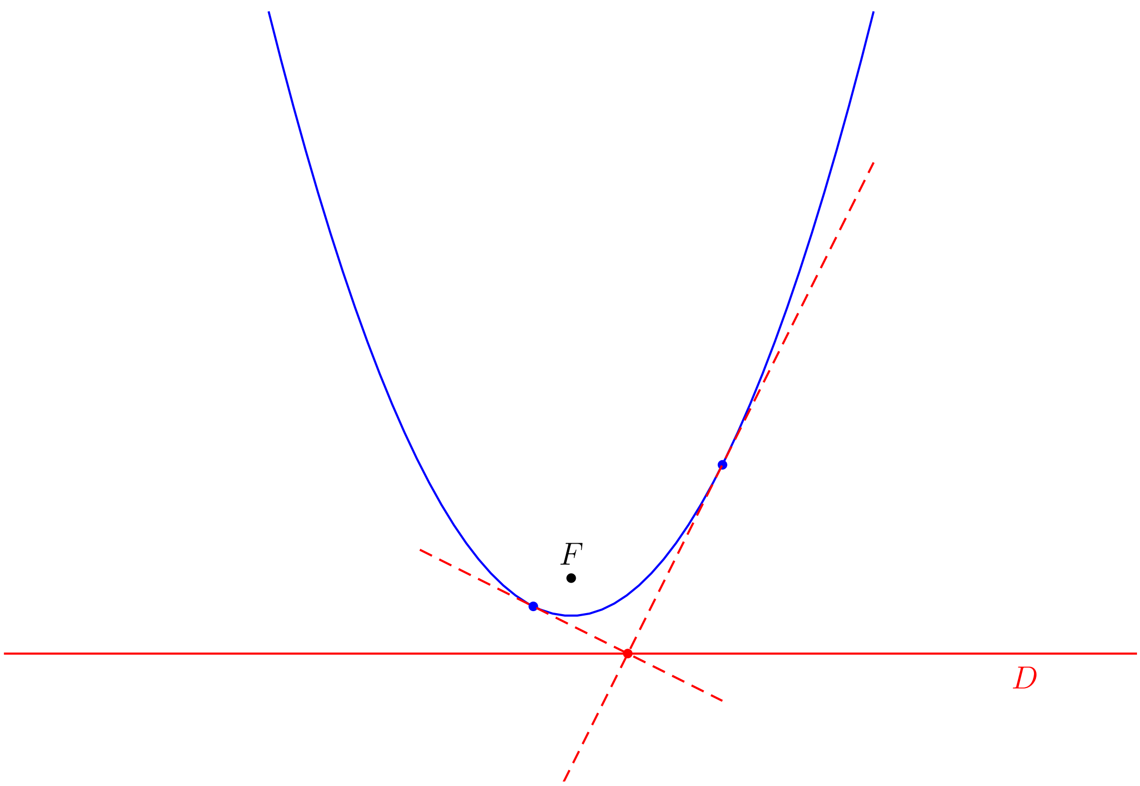
Les tangentes en $M_0(x_0,y_0)$ et $M_1(x_1,y_1)$ sont perpendiculaires si et seulement si $x_0x_1 + p^2 = 0$. L'orthoptique $\mathscr{C}$ est donc l'ensemble des points d'intersection de $\mathscr{T}_{x_0}$ et $\mathscr{T}_{-p^2/x_0}$ où x_0 décrit $\mathbb{R}^*$.

$$M(x,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}^* / \left\{\begin{array}{l} xx_0 = p\left(y + \frac{x_0^2}{2p}\right) \\ -x\frac{p^2}{x_0} = p\left(y + \frac{p^3}{2x_0^2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \left\{\begin{array}{l} tx - py = \frac{t^2}{2} \\ px + ty = -\frac{p^3}{2t} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{t^2+p^2}\left(\frac{t^3}{2} - \frac{p^4}{2t}\right) \\ y = \frac{1}{t^2+p^2}\left(-\frac{p^3}{2} - \frac{pt^2}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^2-p^2}{2t} \\ y = -\frac{p}{2} \end{array}\right. .$$

Maintenant, $\lim_{t\to 0^+} \frac{t^2-p^2}{2t} = -\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2-p^2}{2t} = +\infty$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{t^2-p^2}{2t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, quand t décrit $]0,+\infty[$, $x = \frac{t^2-p^2}{2t}$ décrit $\mathbb{R}$. Finalement, l'orthoptique $\mathscr{C}$ est la droite d'équation $y = -\frac{p}{2}$ ou encore

l'orthoptique d'une parabole est sa directrice.



Correction de l'exercice 7 ▲

1. Soit M un point du plan. **1er cas.** Supposons que $M \notin (AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

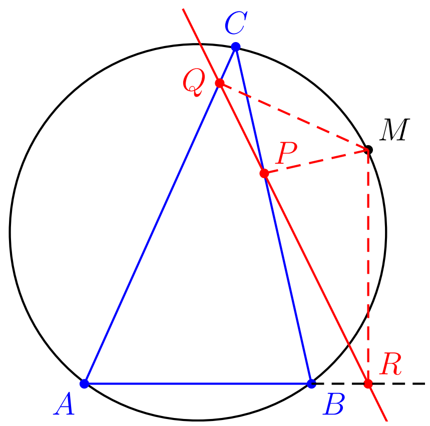
$$P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PM}\right)\ [\pi].$$

Maintenant, puisque les triangles MPC et MQC sont rectangles en P et Q respectivement, les points P et Q sont sur le cercle de diamètre $[MC]$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}\right)\ [\pi]$. De même, $\left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{BR},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$. Par suite,

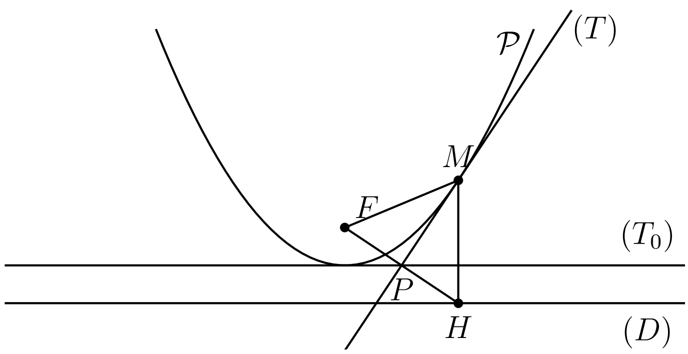
$$\begin{aligned}
P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BR},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]\\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]\\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ (privé des points } A,\ B \text{ et } C\text{)}.
\end{aligned}$$

2ème cas. Supposons par exemple que $M \in (AB)$. Dans ce cas, $M = R$. Si de plus M n'est ni A, ni B, alors $M \neq P$ et $M \neq Q$ puis les droites (MP) et (MQ) sont perpendiculaires aux droites (BC) et (AC) respectivement. Si par l'absurde, les points P, Q et R sont alignés, on a $(MP) = (MQ)$ et donc $(AB)//(AC)$. Ceci est une contradiction. Donc, si les points P, Q et R sont alignés, M est l'un des trois points A, B ou C. La réciproque est immédiate. En résumant les deux cas,

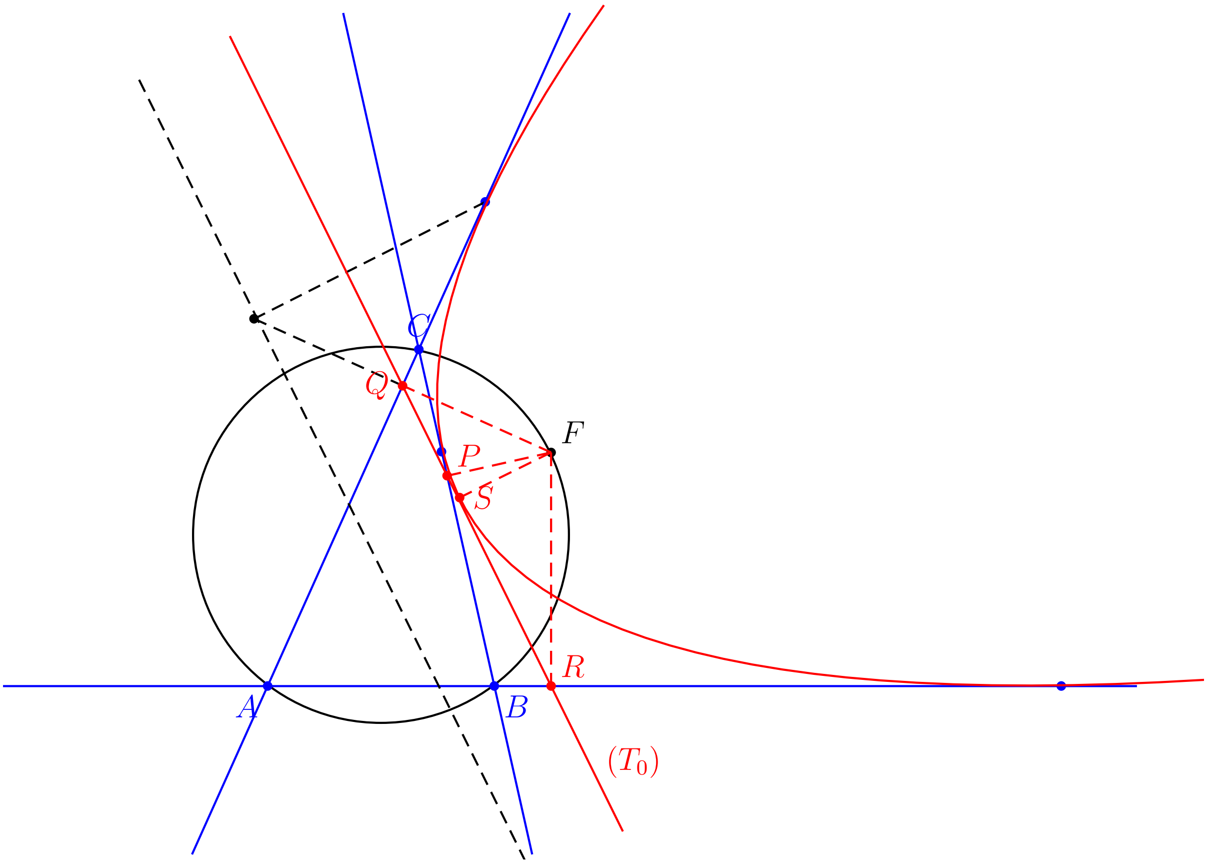
$$\boxed{P,\ Q \text{ et } R \text{ sont alignés si et seulement si } M \text{ est sur le cercle circonscrit au triangle } ABC.}$$



2. **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Commençons par rappeler une construction usuelle de la tangente en un point d'une parabole : le triangle FMH est isocèle en M et la tangente en M à $\mathscr{P}$ est la médiatrice du segment $[FH]$. Par suite, le projeté orthogonal P de F sur la tangente (T) est sur $5T_0)$ la tangente au sommet de la parabole $\mathscr{P}$.



Soient A, B et C trois points non alignés. Si $\mathscr{P}$ est une parabole tangente aux droites (BC), (CA) et (AB), les projetés orthogonaux P, Q et R de son foyer F sur les droites (BC), (CA) et (AB) sont alignés sur la tangente au sommet de la parabole $\mathscr{P}$. D'après 1), le point F est nécessairement sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Réciproquement, si F est l'un des trois points A, B ou C, F n'est pas solution car une tangente à une parabole ne passe jamais par son foyer. Soit donc F un point du cercle circonscrit au triangle ABC et distinct des points A, B et C. Montrons alors qu'il existe une parabole de foyer F, tangente aux droites (BC), (CA) et (AB). On construit les projetés orthogonaux P, Q et R de F sur les droites (BC), (CA) et (AB). Ils sont alignés sur la droite de SIMSON (T_0) de F relativement au triangle ABC. La parabole de foyer F et de tangente au sommet (T_0) est solution du problème posé. La construction des points de contact est fournie par le graphique de la page précédente : on construit les symétriques de F par rapport aux points P, Q et R (ces symétriques sont sur la directrice) puis on remonte perpendiculairement à (T_0) jusqu'à la parabole.

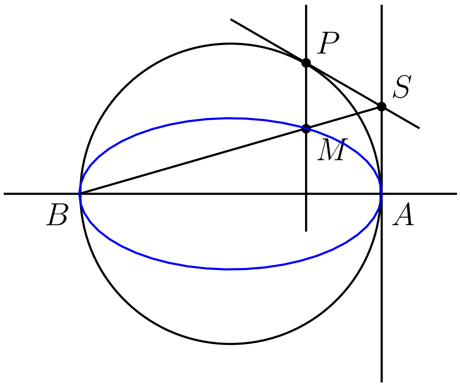


Correction de l'exercice 8 ▲

On choisit un repère orthonormé dans lequel A a pour coordonnées $(R,0)$ et $(\mathscr{C})$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. Soit $P(R\cos t, R\sin t)$ un point de $(\mathscr{C})$. La tangente (D) à $(\mathscr{C})$ en A est la droite d'équation $x = R$ et la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en P est la droite d'équation $x\cos t + y\sin t = R$. Quand $t \notin \pi\mathbb{Z}$, (T) recoupe (D) en le point S de coordonnées $\left(R, R\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)$ ou encore $\left(R, R\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.
Une équation de la droite (BS) est $-\tan\left(\frac{t}{2}\right)(x+R)+2y=0$. L'abscisse de M est $R\cos t$ et donc

$$y_M = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)(x_M+R) = \frac{1}{2}R\tan\left(\frac{t}{2}\right)(\cos t+1) = R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}R\sin t.$$

L'ensemble des points M est donc le support de l'arc $\left\{\begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = \frac{1}{2}R\sin t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. C'est l'image du cercle $\mathscr{C}$ dans l'affinité de base (AB), de direction (D) et de rapport $\frac{1}{2}$ et donc une ellipse de grand axe $[AB]$.



Correction de l'exercice 9 ▲

On choisit un repère orthonormé $\mathscr{R}_1 = \left(O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ tel que le plan d'équation $x+y+z=1$ dans $\mathscr{R}$ soit le plan d'équation $Z=0$ dans $\mathscr{R}_1$. On prend $O'=(1,0,0)$ puis $\overrightarrow{K} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et enfin $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Les formules de changement de repère s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1 \\ y = -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \\ z = -\frac{2Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Ensuite, soit M un point de l'espace dont les coordonnées dans $\mathscr{R}$ sont notées (x,y,z) et les coordonnées dans $\mathscr{R}_1$ sont notées (X,Y,Z).

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x^2+x+1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} = \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1\right) + 1 \\ Z=0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Z=0 \\ -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} = \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + 1\right)^2 + \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + 2 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Z=0 \\ \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

On travaille maintenant en dimension 2 et on note encore $\mathscr{R}_1$ le repère $\left(O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$. Une équation de (Γ) dans $\mathscr{R}_1$ est $\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0$ ou encore $\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0$. On pose $\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2} \\ y' = -\frac{X}{2} + \frac{\sqrt{3}Y}{2} \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} X = \frac{\sqrt{3}x'}{2} - \frac{y'}{2} \\ Y = \frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2} \end{array}\right.$ et on note $\mathscr{R}' = \left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$ le nouveau repère défini par ces formules.

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}x'}{2} - \frac{y'}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2 + \frac{7x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(x' + \frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(x' + \frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(y' + \frac{1}{8\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

(Γ) est une parabole de paramètre $p = \frac{3}{4\sqrt{2}}$. Eléments de (Γ) dans $\mathscr{R}'$: sommet $S\left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$, axe : $x' = -\frac{21}{4\sqrt{6}}$, foyer $F\left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$, directrice : $y' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Eléments de (Γ) dans $\mathscr{R}_1$ en repassant à trois coordonnées : sommet $S\left(-\frac{41}{16\sqrt{2}}, -\frac{45}{16\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathscr{R}_1}$, axe : $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{3}X + Y = -\frac{21}{2\sqrt{6}} \\ Z=0 \end{array}\right.$, foyer $F\left(-\frac{11}{4\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathscr{R}_1}$, directrice :

$\begin{cases} -X+\sqrt{3}Y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ Z=0 \end{cases}$. Eléments de (Γ) dans $\mathscr{R}$: sommet $S\left(-\frac{3}{4},\frac{13}{16},\frac{15}{16}\right)_{\mathscr{R}}$, axe : $\begin{cases} 8x-4y-4z+21=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$, foyer $F\left(-\frac{7}{8},\frac{7}{8},10\right)_{\mathscr{R}}$, directrice : $\begin{cases} 2y-2z+1=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole. Il existe un repère orthonormé dans lequel $\mathscr{H}$ admet une équation catésienne de la forme $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $(a>0,\ b>0)$. Dans ce repère, les asymptotes ont pour équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$. Elles sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^2=-1$ ou encore si et seulement si $a=b$. L'excentricité de $\mathscr{H}$ est alors

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}.$$

$$\boxed{\text{L'excentricité de l'hyperbole équilatère vaut } \sqrt{2}.}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Notons $\mathscr{C}$ l'ensemble des points considérés. Pour x réel, posons $P(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$.

$$\begin{aligned} P(x)=P(y) &\Leftrightarrow (x^3-y^3)+A(x^2-y^2)+B(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)((x^2+xy+y^2)+A(x+y)+B)=0 \\ &\Leftrightarrow y=x \text{ ou } x^2+xy+y^2+A(x+y)+B=0. \end{aligned}$$

$\mathscr{C}$ est donc la réunion de la droite d'équation $y=x$ et de la courbe $\mathscr{E}$ d'équation $x^2+xy+y^2+A(x+y)+B=0$. Pour déterminer la nature de $\mathscr{E}$, on fait un changement de repère orthonormé en posant

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2+A(x+y)+B=0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}((X-Y)^2+(X-Y)(X+Y)+(X+Y)^2)+\frac{A}{\sqrt{2}}X+B=0 \\ &\Leftrightarrow 3X^2+Y^2+\sqrt{2}AX+2B=0 \Leftrightarrow 3\left(X+\frac{A\sqrt{2}}{6}\right)^2+Y^2=\frac{A^2-12B}{6}\ (*) \end{aligned}$$

$\mathscr{E}$ est une ellipse si et seulement si $A^2-12B>0$ (sinon $\mathscr{E}$ est un point ou est vide). Dans ce cas, puisque $a=\frac{1}{\sqrt{3}}<1=b$,

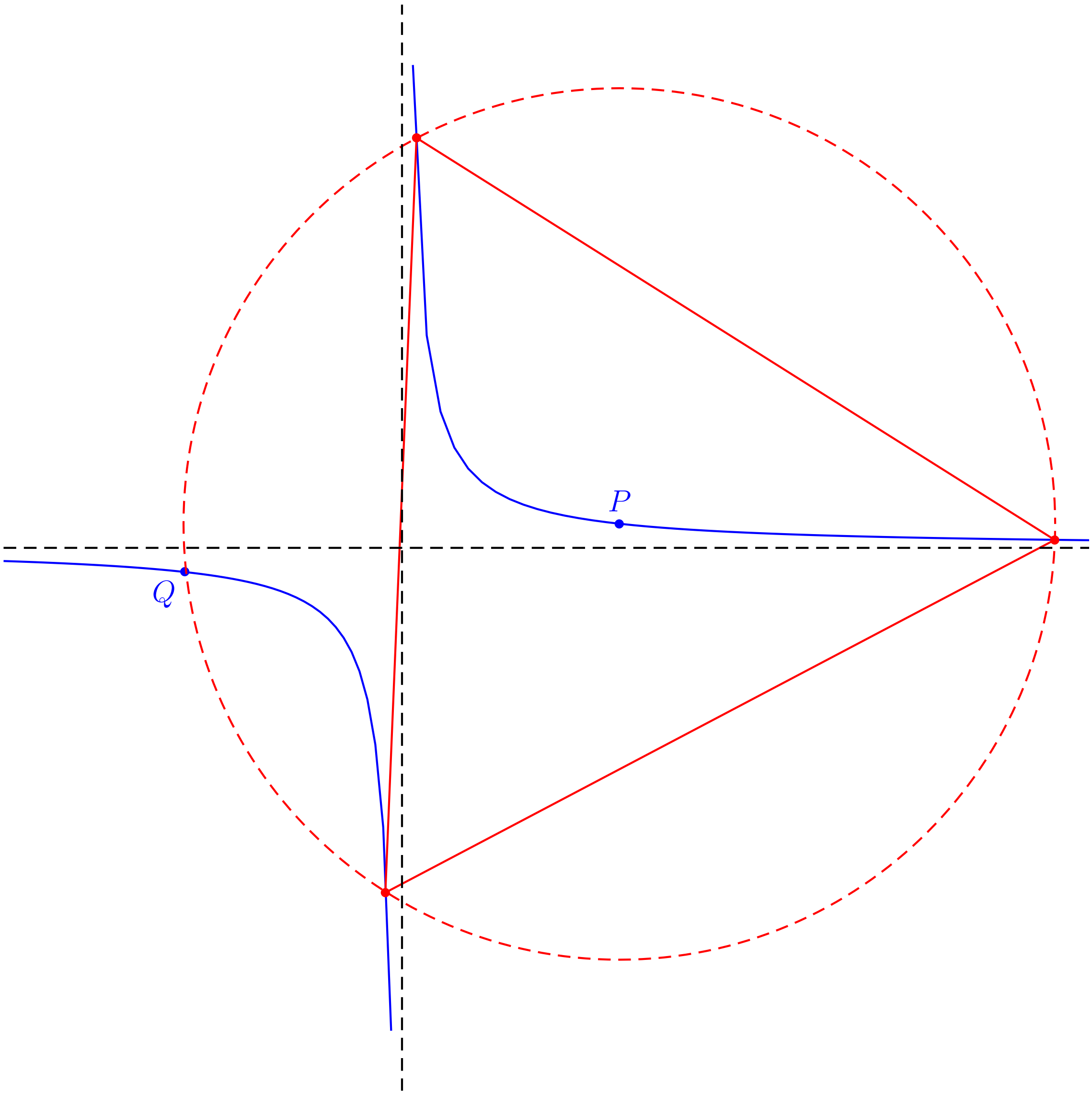
$$e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

On choisit un repère orthonormé dans lequel P a pour coordonnées (a,b), $a>0$, $b>0$ et l'hyperbole $\mathscr{H}$ a pour équation $xy=ab$. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre P et de rayon PQ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos t \\ y=b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. Soit donc $M\left(a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos t, b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin t\right)$ un point de $\mathscr{C}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow (a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos t)(b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin t) = ab \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2}(b\cos t + a\sin t) + 4(a^2+b^2)\cos t\sin t = 0 \\
&\Leftrightarrow 2(a^2+b^2)\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t + \sin(2t) = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \sin(2t) + \sin(t+t_0) + 0 \text{ où } \cos(t_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(t_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2t = -t - t_0 + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2t = \pi + t + t_0 + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ t = -\frac{t_0}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ t = \pi + t_0 + 2k\pi.
\end{aligned}$$

$t = \pi + t_0 + 2k\pi$ fournit le point de coordonnées $(-a,-b)$ c'est-à-dire le point Q. Sinon, on obtient trois autres points les points $M\left(-\frac{t_0}{3}\right)$, $M\left(-\frac{t_0}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$ et $M\left(-\frac{t_0}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$. On note A, B et C ces trois points. Puisque ces trois points sont sur un cercle de centre P et que $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\right) = \left(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\right) = \left(\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PA}\right) = \frac{2\pi}{3}$, le triangle ABC est équilatéral.



Correction de l'exercice 13 ▲

On cherche l'équation d'une telle parabole $\mathscr{P}$ sous la forme $(ax+by)^2+2cx+2dy+e=0$, $a^2+b^2=1$, $a>0$.

$$(1,0) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \boxed{a^2+2c+e=0} \text{ et } (0,2) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \boxed{4b^2+4d+e=0}.$$

D'après la règle de dédoublement des termes, une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{P}$ en $(1,0)$ est $a^2x + aby + c(x+1) + dy + e = 0$ ou encore $(a^2+c)x + (ab+d)y + c + e = 0$. Cette tangente est l'axe (Ox) si et seulement si $\boxed{a^2+c = c+e = 0 \text{ et } ab+d \neq 0.}$ Une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{P}$ en $(0,2)$ est $2abx + 2b^2y + cx + d(y+2) + e = 0$ ou encore $(2ab+c)x + (2b^2+d)y + 2d + e = 0$. Cette tangente est l'axe (Oy) si et seulement si $\boxed{2b^2+d = 2d+e = 0 \text{ et } 2ab+c \neq 0.}$ En résumé, $\mathscr{P}$ est solution si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} c = -a^2 \\ d = -2b^2 \\ e = a^2 = 4b^2 \\ a^2+b^2 = 1 \\ ab+d \neq 0 \\ 2ab+c \neq 0 \\ a > 0 \end{array}\right. .$$

Maintenant, $\left(a^2 = 4b^2,\ a^2+b^2 = 1 \text{ et } a > 0\right) \Leftrightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Le cas $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ fournit $d = -\frac{2}{5}$ puis $ab + d = 0$ ce qui est exclu. Donc, nécessairement $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ puis $c = -\frac{4}{5}$, $d = -\frac{2}{5}$ et $e = \frac{4}{5}$ qui sont effectivement solution du système. On obtient ainsi une et une seule courbe du second degré solution, à savoir la courbe d'équation cartésienne

$$\boxed{(2x-y)^2 - 8x - 4y + 4 = 0.}$$

Il reste à vérifier que cette courbe est effectivement une parabole. On pose $\left\{\begin{array}{l} X = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x-2y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y) \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X+2Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X-Y) \end{array}\right.$.

$$(2x-y)^2 - 8x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow 5Y^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}(-X+2Y) - \frac{4}{\sqrt{5}}(-2X-Y) + 4 = 0 \Leftrightarrow 5Y^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}Y + \frac{16}{\sqrt{5}}X + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(Y - \frac{6}{5\sqrt{5}}\right)^2 = -\frac{16}{\sqrt{5}}\left(X + \frac{4}{5\sqrt{5}}\right).$$

$\mathscr{C}$ est donc effectivement une parabole.