Enoncés : Barbara Tumpach

Déterminants

Le but de cette feuille d'exercices est d'apprendre à calculer le déterminant d'une matrice de taille quelconque, et d'apprendre à utiliser les déterminants dans l'inversion de matrices et la résolutions de systèmes linéaires.

Exercice 1

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.

Correction ▼ [002753]

Exercice 2

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[002754]

Exercice 3

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

[002755]

Exercice 4

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & \alpha & \beta \\ -a & -b & c & \gamma \\ -a & -b & -c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[002756]

Exercice 5

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & 0 \\ h & k & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & k \\ 0 & 0 & 0 & l \end{pmatrix}.$$

[002757]

Exercice 6

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice carrée de taille n. On construit à partir de M la matrice $N = (n_{ij})$ de la manière suivante : pour tout couple d'indices i, j, on appelle M_{ij} la matrice obtenue à partir de M en rayant la ligne i et la colonne j ; alors $n_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ji})$. Démontrer que $MN = NM = \det(M)I$, où I désigne la matrice identité. En déduire une méthode d'inversion de matrices passant par le calcul de déterminants, et l'appliquer à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002758]

Exercice 7

Calculer les inverses des matrices suivantes de deux manières différentes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[002759]

Exercice 8

En utilisant le déterminant montrer que chacun des systèmes suivants admet une solution unique. Résoudre chacun de ces système en inversant la matrice de ses coefficients :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y - z - t = 0 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y + z - t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x + y - 3z = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

[002760]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. L'aire $\mathscr{A}$ du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ est la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ donc $\mathscr{A} = |ad - bc|$. Ici on trouve $\mathscr{A} = \text{abs} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +5$ où abs désigne la fonction valeur absolue.
2. Le volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice formée des trois vecteurs. Ici
$$\mathscr{V} = \text{abs} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \text{abs}\left(+1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) = 4$$
où l'on a développé par rapport à la première ligne.
3. Si un parallélépipède est construit sur trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coefficients sont des entiers alors le volume correspond au déterminant d'une matrice à coefficients entiers. C'est donc un entier.