



## Dualité

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile    \*\* facile    \*\*\* difficulté moyenne    \*\*\*\* difficile    \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable

Dans les corrigés qui suivent, on ne suppose pas connue la notion d'orthogonalité au sens de la dualité.

### Exercice 1 \*\*I

1. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathbb{C}_n[X]$ . Pour  $a \in \mathbb{C}$ , on définit l'application  $\varphi_a$  par :  $\forall P \in E, \varphi_a(P) = P(a)$ . Montrer que pour tout  $a \in E, \varphi_a \in E^*$ .
2. Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$   $n+1$  nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille  $(\varphi_{a_0}, \dots, \varphi_{a_n})$  est une base de  $E^*$  et déterminer sa préduale.
3. Montrer qu'il existe  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  tel que  $\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \int_0^1 P(t) dt = \lambda_0 P(a_0) + \dots + \lambda_n P(a_n)$  puis donner la valeur des  $\lambda_i$  sous la forme d'une intégrale.

[Correction ▼](#)

[005629]

### Exercice 2 \*\*

Sur  $E = \mathbb{R}_3[X]$ , on pose pour tout  $P \in E, \varphi_1(P) = P(0)$  et  $\varphi_2(P) = P(1)$  puis  $\psi_1(P) = P'(0)$  et  $\psi_2(P) = P'(1)$ . Montrer que  $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$  est une base de  $E^*$  et trouver la base dont elle est la duale.

[Correction ▼](#)

[005630]

### Exercice 3 \*\*

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\varphi$  et  $\psi$  deux formes linéaires sur  $E$ . On suppose que pour tout  $x$  de  $E$ , on a  $\varphi(x)\psi(x) = 0$ . Montrer que  $\varphi = 0$  ou  $\psi = 0$ .

[Correction ▼](#)

[005631]

### Exercice 4 \*\*\*

1. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  puis  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  et  $\varphi$   $n+1$  formes linéaires sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Montrer que : 
$$\left( \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n / \varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} \varphi_i \subset \text{Ker} \varphi \right).$$
2. Signification du résultat précédent : dans  $\mathbb{R}^3$ , équation d'un plan  $P$  contenant  $D : \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$  et le vecteur  $u = (1, 1, 1)$  ?

[Correction ▼](#)

[005632]

### Exercice 5 \*\*\*

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  puis  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$   $n$  formes linéaires sur un  $\mathbb{K}$ -espace  $E$  de dimension  $n$ .

Montrer que la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est liée si et seulement si il existe un vecteur  $x$  non nul tel que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(x) = 0$ .

[Correction ▼](#)

[005633]

**Exercice 6 \*\***

Rang du système de formes linéaires sur  $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}f_1 &= x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \\f_2 &= x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 \\f_3 &= x_1 + x_3 + (m+4)x_4 \\f_4 &= x_2 - 3x_3 - mx_4\end{aligned} \quad ?$$

[Correction ▼](#)

[005634]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  et  $(P, Q) \in E^2$ .

$$\varphi_a(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(a) = \lambda P(a) + \mu Q(a) = \lambda \varphi_a(P) + \mu \varphi_a(Q).$$

Donc,  $\varphi_a$  est une forme linéaire sur  $E$ .

2. On a déjà  $\text{card}(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n} = n+1 = \dim(E) = \dim(E^*) < +\infty$ . Il suffit donc de vérifier que la famille  $(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n}$  est libre.

Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose  $P_k = \prod_{j \neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$ . Chaque  $P_k$  est un élément de  $E$  et de plus

$$\forall (j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \varphi_{a_j}(P_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq k \\ 0 & \text{si } j = k \end{cases} \quad (*).$$

Soit alors  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_j = 0 &\Rightarrow \forall P \in E, \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_j(P) = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_j(P_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{j=0}^n \lambda_j \delta_{j,k} = 0 \\ &\Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que la famille  $(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n}$  est libre et donc une base de  $E^*$ . Les égalités (\*) montrent alors que la préduale de la base  $(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n}$  de  $E^*$  est la famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ .

3. Pour  $P \in E$ , posons  $\varphi(P) = \int_0^1 P(t) dt$ .  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $E$  et donc, puisque la famille  $(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n}$  est une base de  $E^*$ , il existe  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  tel que  $\varphi = \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_{a_j}$  ou encore il existe  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  tel que pour tout  $P \in E$ ,  $\int_0^1 P(t) dt = \lambda_0 P(a_0) + \dots + \lambda_n P(a_n)$  (les  $\lambda_j$  étant indépendants de  $P$ ).

En appliquant cette dernière égalité au polynôme  $P_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , on obtient  $\lambda_k = \int_0^1 P_k(t) dt = \int_0^1 \prod_{j \neq k} \frac{t - a_j}{a_k - a_j} dt$ .

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k) \text{ où } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = \int_0^1 \prod_{j \neq k} \frac{t - a_j}{a_k - a_j} dt.$$

## Correction de l'exercice 2 ▲

Les quatre applications  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$  et  $\psi_2$  sont effectivement des formes linéaires sur  $E$ .

Cherchons tout d'abord la future base préduale de la famille  $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ . On note  $(P_0, P_1, P_2, P_3)$  cette future base.

- On doit avoir  $\varphi_1(P_2) = \varphi_2(P_2) = \psi_2(P_2) = 0$  et  $\psi_1(P_2) = 1$ . Ainsi,  $P_2$  s'annule en 0 et en 1 et de plus  $P_2'(1) = 0$ . Donc  $P_2$  admet 0 pour racine d'ordre 1 au moins et 1 pour racine d'ordre 2 au moins. Puisque  $P_2$  est de degré inférieur ou égal à 3, il existe une constante  $a$  telle que  $P_2 = aX(X-1)^2 = aX^3 - 2aX^2 + aX$  puis  $P_2'(0) = 1$  fournit  $a = 1$  puis  $P_2 = X(X-1)^2$ .
- De même, il existe une constante  $a$  telle que  $P_3 = aX^2(X-1) = aX^3 - aX^2$  et  $1 = P_3'(1) = 3a - 2a$  fournit  $P_3 = X^2(X-1)$ .
- $P_0$  admet 1 pour racine double et donc il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que  $P_0 = (aX+b)(X-1)^2$  puis les égalités  $P_0(0) = 1$  et  $P_0'(0) = 0$  fournissent  $b = 1$  et  $a - 2b = 0$ . Par suite,  $P_0 = (2X+1)(X-1)^2$ .
- $P_1$  admet 0 pour racine double et il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que  $P_1 = (aX+b)X^2$  puis les égalités  $P_1(1) = 1$  et  $P_1'(1) = 0$  fournissent  $a+b = 1$  et  $3a+2b = 0$  et donc  $P_1 = (-2X+3)X^2$ .

$$P_0 = (2X+1)(X-1)^2, P_1 = (-2X+3)X^2, P_2 = X(X-1)^2 \text{ et } P_3 = X^2(X-1).$$

Montrons alors que  $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  est une base de  $E^*$ . Cette famille est libre car si  $a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_1 + d\varphi_2 = 0$ , on obtient en appliquant successivement à  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$ ,  $a = b = c = d = 0$ . Mais alors, la famille  $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$  est une famille libre de  $E^*$  de cardinal 4 et donc une base de  $E^*$ . Sa préduale est  $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ .

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

**1 ère solution.** On utilise le fait qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux contient l'autre. Donc

$$\varphi\psi = 0 \Rightarrow \text{Ker}\varphi \cup \text{Ker}\psi = E \Rightarrow \text{Ker}\psi \subset \text{Ker}\varphi = \text{Ker}\varphi \cup \text{Ker}\psi = E \text{ ou } \text{Ker}\varphi \subset \text{Ker}\psi = \text{Ker}\varphi \cup \text{Ker}\psi = E \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \psi = 0.$$

**2ème solution.** Supposons que  $\varphi\psi = 0$  et qu'il existe  $x$  et  $y$  tels que  $\varphi(x) \neq 0$  (et donc  $\psi(x) = 0$ ) et  $\psi(y) \neq 0$  (et donc  $\varphi(y) = 0$ ). Alors  $0 = \varphi(x+y)\psi(x+y) = (\varphi(x) + \varphi(y))(\psi(x) + \psi(y)) = \varphi(x)\psi(y)$  ce qui est une contradiction.

$$\forall (\varphi, \psi) \in (E^*)^2, (\forall x \in E, \varphi(x)\psi(x) = 0) \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \psi = 0.$$

---

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit  $\varphi \in E^*$ .

•  $\Rightarrow$  / Supposons qu'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n$ .

Soit  $x \in \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i$ . Alors  $\varphi(x) = \lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_n \varphi_n(x) = 0 + \dots + 0 = 0$  et donc  $x \in \text{Ker}\varphi$ . On a montré

que  $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \subset \text{Ker}\varphi$ .

•  $\Leftarrow$  / Supposons tout d'abord la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  libre. On complète éventuellement la famille libre  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de  $E^*$  en une base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots, \varphi_p)$  de  $E^*$  et on note  $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_p)$  la préduale de la base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ .

Soit  $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$  un élément de  $E$ .

$$x \in \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_p)$$

(avec la convention usuelle  $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$  dans le cas  $p = n$ ). Donc  $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i = \text{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_p)$ .

Soit alors  $\varphi \in E^*$ . Posons  $\varphi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i$ .

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \subset \text{Ker}\varphi \Rightarrow \text{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_p) \subset \text{Ker}\varphi \Rightarrow \forall j \in \llbracket n+1, p \rrbracket, \varphi(e_j) = 0$$

$$\Rightarrow \forall j \in \llbracket n+1, p \rrbracket, \lambda_j = 0 \Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i.$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est libre.

Si tous les  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont nuls alors  $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i = E$  puis  $\text{Ker}\varphi = E$  et donc  $\varphi = 0$ . Dans ce cas aussi,  $\varphi$  est combinaison linéaire des  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Si les  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ne sont pas tous nuls et si la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est liée, on extrait de la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  génératrice de  $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  une base  $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$  de  $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ .

On a  $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \subset \bigcap_{k=1}^m \text{Ker}\varphi_{i_k}$  mais d'autre part, tout  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , étant combinaison linéaire des  $\varphi_{i_k}$ ,

$1 \leq k \leq m$ , chaque  $\text{Ker}\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , contient  $\bigcap_{k=1}^m \text{Ker}\varphi_{i_k}$  et donc  $\bigcap_{k=1}^m \text{Ker}\varphi_{i_k} \subset \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i$ . Finalement,

$\bigcap_{k=1}^m \text{Ker} \varphi_{i_k} = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} \varphi_i \subset \text{Ker} \varphi$ . D'après l'étude du cas où la famille est libre,  $\varphi$  est combinaison linéaire des  $\varphi_{i_k}$ ,  $1 \leq k \leq m$  et donc des  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . La réciproque est démontrée dans tous les cas.

2. Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^3$  telle que  $P = \text{Ker} \varphi$  (en particulier  $\varphi$  n'est pas nulle). Soient  $\varphi_1$  la forme linéaire  $(x, y, z) \mapsto x + y + z$  et  $\varphi_2$  la forme linéaire  $(x, y, z) \mapsto 2x + 3z$ . Alors la famille  $(\varphi_1, \varphi_2)$  est une famille libre du dual de  $\mathbb{R}^3$  et  $D = \text{Ker} \varphi_1 \cap \text{Ker} \varphi_2$ . D'après 1)

$$D \subset P \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2 \text{ (théorie des faisceaux),}$$

puis

$$u \in P \Leftrightarrow a\varphi_1(u) + b\varphi_2(u) = 0 \Leftrightarrow 3a + 5b = 0.$$

Une équation de  $P$  est donc  $5(x + y + z) - 3(2x + 3z) = 0$  ou encore  $-x + 5y - 4z = 0$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Il s'agit de démontrer que la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est liée si et seulement si  $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$ .

• Si la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est libre, c'est une base de  $E^*$  (car  $\dim(E^*) = n$ ). Notons  $(u_1, \dots, u_n)$  sa préduale et notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . Pour  $1 \leq i \leq n$ , on a  $f(u_i) = e_i$ . Ainsi, l'image par  $f$  d'une base de  $E$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  et on sait alors que  $f$  est un isomorphisme. En particulier,  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ .

• Si les  $\varphi_i$  sont tous nuls, tout vecteur non nul  $x$  annule chaque  $\varphi_i$ . Supposons alors que la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est liée et que les  $\varphi_i$  ne sont pas tous nuls. On extrait de la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  une base  $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$  (avec  $1 \leq m < n$ ) de  $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ . On complète la famille libre  $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$  en une base  $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}, \psi_1, \dots, \psi_{n-m})$  de  $E^*$ . On note  $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$  sa préduale. Les formes linéaires  $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}$  s'annulent toutes en  $e_n$  et donc chaque  $\varphi_i$  s'annule en  $e_n$  puisque chaque  $\varphi_i$  est combinaison linéaire des  $\varphi_{i_k}$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Le vecteur  $e_n$  est donc un vecteur non nul  $x$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varphi_i(x) = 0$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

La matrice de la famille  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  dans la base canonique du dual de  $\mathbb{R}^4$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & m & 1 & -3 \\ -2 & 1 & m+4 & -m \end{pmatrix}$ .

La matrice  $A$  a même rang que la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & m+1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & m+6 & -m \end{pmatrix}$  (pour  $2 \leq j \leq 3$ ,  $C_j \leftarrow C_j - C_1$ ) puis

que la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2m & m-2 \\ -2 & 3 & m & -m+3 \end{pmatrix}$  ( $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$  et  $C_4 \leftarrow C_4 + C_2$ )

• Si  $m = 0$ ,  $A$  a même rang que la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  et donc  $\text{rg}(A) = 3$ .

• Si  $m \neq 0$ ,  $A$  a même rang que la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & m-2 \\ -2 & 3 & 1 & -m+3 \end{pmatrix}$  ( $C_3 \leftarrow \frac{1}{m}C_3$ ) puis que la matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -m+4 \end{pmatrix}$  ( $C_4 \leftarrow 2C_4 + (m-2)C_3$ )

Donc, si  $m = 4$ ,  $\text{rg}(A) = 3$  et si  $m$  n'est ni 0 ni 4,  $\text{rg}(A) = 4$ .

Si  $m \notin \{0, 4\}$ ,  $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = 4$  et si  $m \in \{0, 4\}$ ,  $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = 3$ .

---