Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer, T. Tahani, F. Sarkis
Corrections : F. Sarkis

Préalables, rappels

Exercice 1

1. Montrez que $d(x,y) = |x-y|$ est bien une distance sur l'ensemble des réels.
2. Pour tout couple d'éléments $X = (x_1,\ldots,x_n)$ et $Y = (y_1,\ldots,y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on définit $d(X,Y) = \sup_{i=1..n}|x_i - y_i|$. Montrez que d est bien une distance sur $\mathbb{R}^n$.
3. Faire de même avec $d(X,Y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\ldots+|x_n-y_n|$.

[002494]

Exercice 2

Décrire la boule de centre l'origine et de rayon 1 dans les espaces suivants :

1. $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$.
2. $\mathbb{R}^2$ muni de la distance $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$.
3. $\mathbb{R}^2$ muni de la distance $d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sup(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$.
4. $\mathbb{R}^2$ muni de la distance $d_3((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$.

Montrez que les 3 dernières distances sont équivalentes.

Correction ▼ [002495]

Exercice 3

Soit E l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues. Montrez que l'application $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ est une norme sur E. Montrez que E n'est pas complet.

Correction ▼ [002496]

Exercice 4

Etudiez la continuité des applications suivantes :

1. $f(x) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.
2. $f(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
3. $f(x) = \frac{exp(\frac{-1}{x^2+y^2})}{|x|+|y|}$.

[002497]

Exercice 5

Soient E et F deux espaces normés réels et $f : E \to F$ une application bornée sur la boule unité de E et vérifiant

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \text{ pour tout } x,y \in E.$$

Montrez que f est linéaire continue.

Correction ▼ [002498]

Exercice 6

Soient $||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes sur $\mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. On définit la norme de M (ou de l'application linéaire associée) de la manière suivante :

$$||M|| = \sup_{X \in S_1(0,1)} ||M.X||_2$$

où $S_1(0,1)$ est la sphère unité pour la norme $||.||_1$. Dans chacun des cas suivant, calculez la norme de M.

1. $||(x,y)||_1 = ||(x,y)||_2 = sup(|x|,|y|)$.
2. $||(x,y)||_1 = ||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
3. $||(x,y)||_1 = \sqrt{x^2+y^2}$ et $||(x,y)||_2 = sup(|x|,|y|)$.

Correction ▼ [002499]

Exercice 7

Continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$

[002500]

Exercice 8

Calculez la norme des opérateurs suivants :

1. Le shift sur l^∞ défini par $S(x)_{n+1} = x_n, S(x)_0 = 0$ (sur l^∞ on définit $||(x_n)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$).
2. $X = \mathscr{C}([0,1])$ avec la norme sup et l'opérateur $Tf(x) = f(x)g(x)$ où $g \in X$.
3. $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme sup et $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ où $g \in X$ est une fonction qui s'annule qu'en $x = 1/2$.
4. $X = l^2$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans X.
5. X l'espace des suites convergentes muni de la norme sup et $u : X \to \mathbb{R}$ l'application $u(x) = \lim_{j\to\infty} x_j$.

Correction ▼ [002501]

Exercice 9

Soit $X = \mathscr{C}([0,1])$ avec la norme $||f|| = \int_0^1 |f(t)|dt$. Montrez que la forme linéaire $T : X \to \mathbb{R}$ définie par $T(f) = f(0)$ n'est pas continue en 0. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de X nulles en 0 ? [002502]

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On a par définition $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}; |x-0| = |x| < 1\} = [-1,1]$.
2. C'est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$, $B_1(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$ c'est le disque de centre l'origine et de rayon 1.
3. $B_2(0,1) = \{(x,y); |x| < 1 et |y| < 1\}$. C'est un carré.
4. $B_3(0,1) = \{(x,y); |x|+|y| < 1\}$. Dans le quart de plan $P^{++} = \{(x,y); x \geq 0, y \geq$, on a $B_3(0,1) \cap P^{++} = \{(x,y) \in p^{++}; x+y < 1\}$ c'est le triangle délimité par les droites $x=0, y=0$ et $x+y=1$. En faisant de même pour les 3 autres secteurs du plan, on trouve que $B_3(0,1)$ est un losange (ou carré) dont les sommets sont les points $(0,1),(1,0),(-1,0),(0,-1)$.

Toutes ces distances étant invariantes par translation (ce sont des normes), il suffit de montrez que les normes associés $||.||_i = d_i((x,y),0)$ sont équivalentes.
On a

$$\frac{\sqrt{2}}{2}||.||_1 \leq ||.||_2 \leq ||.||_1.$$

En effet,

$$\begin{aligned} ||(x,y)||_1 = \sqrt{(x^2+y^2)} &\leq \sqrt{\sup(x^2,y^2)+\sup(x^2,y^2)} \\ &\leq \sqrt{2}\sqrt{\sup(x^2,y^2)} \\ &\leq \sqrt{2}\sqrt{(\sup(|x|,|y|))^2} \leq \sqrt{2}||(x,y)||_2 \end{aligned}$$

. De plus,

$$\begin{aligned} ||(x,y)||_1 = \sqrt{x^2+y^2} &\geq \sqrt{\sup(x^2,y^2)} \\ &\geq \sqrt{(\sup(|x|,|y|)^2} \geq \sup(|x|,|y|) \geq ||(x,y)||_2. \end{aligned}$$

Les distances d_1 et d_2 sont donc équivalentes.
De même on montre que

$$||.||_2 \leq ||.||_3 \leq 2||.||_2.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Il faut trouver une suite de cauchy de fonctions de E qui ne converge pas dans E. Il suffit, par exemple, de prendre une suites de fonctions $\{f_n\}$ convergeant pour $\|.\|$ vers une fonction non continue. Par exemple, prendre

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } x < 1/2 \\ 1-n(x-1/2) \text{ si } 1/2 \leq x \leq 1/2+1/n \\ 0 \text{ si } x > 1/2+1/n \end{array} \right\}$$

et

$$f_0(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } x < 1/2 \\ 0 \text{ si } x \geq 1/2 \end{array} \right\}$$

On a alors $\|f_n - f_0\|_1 = 1/(2n)$, la suite converge simplement et en norme $\|.\|$ vers la fonction f_0 qui n'est pas continue. Il suffit de montrer alors qu'il n'existe aucune fonction continue g telle que $\|f-g\| = 0$ ce qui interdit l'existence d'une limite à f_n dans E.

Correction de l'exercice 5 ▲

On montre par récurrence que $f(nx) = nx$ si $n \in \mathbb{N}$. Montrer $f(-x) = -f(x)$ pour arriver à $f(nx) = nf(x)$ si $n \in \mathbb{Z}$ puis $f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$ $p,q \in \mathbb{Z}$. Ainsi f est linéaire sur $\mathbb{Q}$. Il reste à montrer qu'elle l'est sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il reste à montrer que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Prenons $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda$. On a alors

$$f(\lambda_x) = f(\lambda_n x + (\lambda - \lambda_n)x) = \lambda_n f(x) + f((\lambda - \lambda_n)x).$$

Soit $c_n \in \mathbb{Q}$ tel que

$$||(\lambda-\lambda_n)x||_E \leq c_n \leq 2||(\lambda-\lambda_n)x||_E.$$

Alors

$$f((\lambda-\lambda_n)x) = f(c_n \frac{\lambda-\lambda_n}{c_n}x) = c_n f(\frac{\lambda-\lambda_n}{c_n}x)$$

et

$$||\frac{\lambda-\lambda_n}{c_n}x|| \leq 1.$$

L'application f étant borné sur la boulle unité par une constante $M>0$, on a

$$||f((\lambda-\lambda_n)x)|| \leq c_n M$$

et donc

$$||f((\lambda-\lambda_n)x)|| \leq c_n M \leq 2M||(\lambda-\lambda_n)x||_E$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} f((\lambda-\lambda_n)x) = 0$$

, en remarquant qu'on a aussi

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n f(x) = \lambda f(x)$$

on obtient

$$f(\lambda x) = \lim_{n\to\infty}[\lambda_n f(x) + f((\lambda-\lambda_n)x)] = \lambda f(x).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $X=(x,y)$, on a $M.X=(ax+by, cx+dy)$ or

$$|ax+by| \leq |ax|+|by| \leq (|a|+|b|)\sup(|x|,|y|) \leq (|a|+|b|)||(x,y)||_1.$$

de même,

$$|cx+dy| \leq (|c|+|d|)||(x,y)||_1.$$

Par conséquent

$$||M.X||_2 \leq \sup(|a|+|b|,|c|+|d|)||(x,y)||_1$$

et donc

$$||M|| \leq \sup(|a|+|b|,|c|+|d|).$$

Supposons $|a|+|b| \geq |c|+|d|$ (inverser l'ordre sinon) et prenons $X_0=(a/|a|,b/|b|)$ (on suppose $a\neq 0$ et $b\neq 0$ sinon vérification facile). On a alors $||X_0||=1$ et

$$||M.X_0||_2 = \sup(|a|+|b|,|ca/|a|+db/|b||) \geq |a|+|b|.1 \geq (|a|+|b|)||X_0||_1$$

et donc

$$||M|| \geq \sup(|a|+|b|,|c|+|d|)$$

et finalement

$$||M|| = \sup(|a|+|b|,|c|+|d|)$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit x une suite, on a

$$||S(x)||_\infty = Max(\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_{n-1}|,0) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = 1.||x||_\infty.$$

   Donc $||S||=1$.

2. Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$

$$||Tf||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} f(x)g(x) \leq ||f||_\infty ||g||_\infty.$$

Donc

$$||T|| \leq ||g||_\infty.$$

Or

$$||T1||_\infty = ||g||_\infty = ||1||_\infty ||g||_\infty.$$

Donc

$$||T|| \geq ||g||_\infty$$

et finalement on a bien

$$||T|| = ||g||_\infty.$$

3. Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$, on a

$$||u(f)|| = |\int_0^1 f(x)g(x)dx| \leq \int_0^1 |f(x)||g(x)|dx \leq \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| \int_0^1 |f(x)|dx \leq ||g||_\infty.||f||.$$

On a donc

$$||u|| \leq ||g||_\infty.$$

Comme g ne s'annule qu'au point $x = 1/2$, elle ne change de signe qu'une seule fois. Soit

$$f_0 = g/|g|,$$

cette fonction n'est pas continue (ni définie) en $x = 1/2$ mais vérifie $f_0 g = |g|$. Prenons $f_n = g/|g|$ si $|x - 1/2| > 1/n$, pour $|x - 1/2| \leq 1/n$, on relie les deux segments du graphe par une ligne. Alors $1 - 1/(2n) \leq ||f_n|| \leq 1$ et

$$||u(f_n)|| = |\int_{|x-1/2|>1/n} f_n(x)g(x)dx + \int_{|x-1/2|\leq 1/n} f_n(x)g(x)dx| \geq$$

$$|(|\int_{|x-1/2|>1/n} f_n(x)g(x)dx| - |\int_{|x-1/2|\geq 1/n} f_n(x)g(x)dx|)|$$

$$\geq ||g||_\infty \int_{|x-1/2|>1/n} |f_n(x)|dx - 2/n||g||_\infty \geq ||g||_\infty(||f_n|| - 2/n).$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} ||u(\frac{f_n}{||f_n||})|| \geq ||g||_\infty(1 - \frac{1}{2n||f_n||} \geq ||g||_\infty(1 - \frac{1}{2n(1-1/2n))} \geq ||g||_\infty(1 - \frac{1}{2n-1})$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$||u|| \geq ||g||_\infty(1 - \frac{1}{2n-1}),$$

en faisant tend n vers l'infini

$$||u|| \geq ||g||_\infty$$

ce qui montre la deuxième inégalité et on obtient $||u|| = ||g||_\infty$.

4. si on prend $(x_n) = (a_n)$ on obtient

$$u((a_n)) = \sum a_n^2 = ||(a_n)||_2^2 = ||(a_n)||_2.||(a_n)||_2$$

et donc

$$||u|| \geq ||(a_n)||_2.$$

Or D'après Cauchy-Schwartz, on a

$$||u(a_n)|| = |u(a_n)| = |\sum a_n x_n| \leq ||(a_n)||_2||(x_n)||_2$$

et donc $||u|| \leq ||(a_n)||_2$ d'où l'égalité

$$||u|| = ||(a_n)||_2.$$

5. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $|x_j| \leq ||(x_n)||_\infty$ et par conséquent

$$|u((x_n))| = |\lim_{j\to\infty} x_j| \leq ||(x_n)||_\infty$$

et donc

$$||u|| \leq 1.$$

Prenons la suite (x^0) définie par $x_n^0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors

$$|u(x^0)| = |\lim_{j\to\infty} 1| = 1 = ||x^0||_\infty$$

et donc

$$||u|| \geq 1$$

d'où l'égalité $||u|| = 1$.
