



Théorème des accroissements finis

Exercice 1

1. Soit f une application réelle continue et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f'(x)$ ait une limite quand $x \nearrow b$; alors f se prolonge en une fonction continue et dérivable à gauche au point b .
2. Soit f une application continue et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et de dérivée croissante ; montrer que f est convexe sur I i.e. $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ pour tous $x < y$ de I et $t \in [0, 1]$. (Poser $z = (1-t)x + ty$ et appliquer les AF à $[x, z]$ puis $[z, y]$.)

[Correction ▼](#)

[002518]

Exercice 2

Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x) = e^{ix}$.

[Correction ▼](#)

[002519]

Exercice 3 partiel du 5 décembre 1999

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et $g = f \circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe C^1 .
2. Calculer en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de f notée $Df(x, y)$; calculer la matrice jacobienne de g au point $(0, 0)$ notée $Dg(0, 0)$.
3. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \overline{B_\rho((0, 0))}$ (la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon ρ) on a $\|Dg(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$.
4. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B_\rho((0, 0))}$.

[Correction ▼](#)

[002520]

Exercice 4

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (\cos x - \sin y, \sin x - \cos y)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k -fois

1. Montrer que $\|DF(x, y)\| \leq \sqrt{2}$ pour tout (x, y) .
2. En déduire que la suite récurrente définie par x_0, y_0 et pour $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n), \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \cos y_n)$$

converge pour tout (x_0, y_0) . Donnez l'équation que vérifie sa limite ?

[Correction ▼](#)

[002521]

Exercice 5

Soit f une application différentiable de $]a, b[\subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n ; on suppose qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\|f'(x)\| \leq k\|f(x)\|, \quad \forall x \in]a, b[.$$

Montrer que si f s'annule en un point $x_0 \in]a, b[$, f est identiquement nulle dans $]a, b[$ (montrer que $E = \{x \in]a, b[; f(x) = 0\}$ est ouvert). [002522]

Exercice 6

Soit E un espace de Banach, U un ouvert de E et f une application différentiable de U dans \mathbb{R} telle que l'on ait $\|f'(x)\| \leq k|f(x)|, \forall x \in U$. Montrer que pour x assez voisin de $a \in U$,

$$|f(x)| \leq e^{k\|x-a\|} |f(a)|.$$

Indication : considérer l'application $t \in [0, 1] \rightarrow f(a + t(x - a))$. [002523]

Exercice 7

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (x^2 + y^2, y^2)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k -fois avec elle-même. On considère $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \lim_{k \rightarrow \infty} F^{(k)}(x, y) = (0, 0)\}$.

1. Vérifier que $(x, y) \in \Omega \iff F(x, y) \in \Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|(x, y)\| < \varepsilon \implies \|F'(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$; en déduire que 0 est intérieur à Ω puis que Ω est ouvert.
3. Montrer que Ω est connexe.

[002524]

Exercice 8

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y) = (x^2 + y^2, y^2) .$$

Soit $\Omega = \{p \in \mathbb{R}^2 ; \lim_{k \rightarrow \infty} F^k(p) = (0, 0)\}$.

1. Vérifier que $p \in \Omega$ si et seulement si $F(p) \in \Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|DF(p)\| < \frac{1}{2}$ si $\|p\| < \delta$. En déduire que $(0, 0)$ est dans l'intérieur de Ω puis que Ω est un ouvert.
3. Utiliser l'homogénéité de F pour montrer que Ω est connexe.

[002525]

Exercice 9

Soit Ω un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 qui est injective sur Ω et telle que $Df(x)$ soit injective pour tout $x \in \Omega$. Montrer que, pour tous $a, b \in \Omega$,

$$\|f(b) - f(a) - Df(a)(b - a)\| \leq \|b - a\| \sup_{c \in [a, b]} \|Df(c) - Df(a)\| .$$

Correction ▼

[002526]

Correction de l'exercice 1 ▲

Montrons que f se prolonge par continuité au point b , on montrera alors que f est dérivable à gauche au point b est que cette dérivée est $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$. Pour cela montrons qu'il existe un réel k tel que toute suite $\{x_n\}$ tendant vers b vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = k$. Remarquons que la dérivée $f'(x)$ admettant une limite au point b , elle est bornée sur un petit voisinage (à gauche) de b (notons M ce majorant). Soit y_n une suite convergent vers b . Alors la suite $f(y_n)$ est de Cauchy. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$. La suite $\{y_n\}$ étant de Cauchy,

$$\exists N \in \mathbb{N}, p, q \geq N \Rightarrow |y_p - y_q| \leq \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Or d'après les accroissements finis :

$$f(y_p) - f(y_q) = (y_p - y_q)f'(c_{p,q}) \text{ où } c_{p,q} \in]y_p, y_q[.$$

Par conséquent,

$$|f(y_p) - f(y_q)| \leq |y_p - y_q| \cdot |f'(c_{p,q})| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

et donc la suite $\{f(y_n)\}$ est de Cauchy et converge vers un réel que nous noterons l . Montrons que c'est le cas pour toute autre suite $\{x_n\}$ qui tend vers b . On a

$$f(x_n) = f(x_n) - f(y_n) + f(y_n).$$

D'après les accroissements finis, $|f(x_n) - f(y_n)| \leq M \cdot |x_n - y_n|$ et donc tend vers zéro car les suites x_n et y_n tendent vers b . De plus, comme on l'a vu, $f(y_n)$ tend vers k et donc $f(x_n)$ aussi. Prolongeons f par continuité au point b en posant $f(b) = k$. On a alors le taux d'accroissement

$$T_x f = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{(b - x)f'(c_x)}{b - x} = f'(c_x) \text{ où } c_x \in]x, b[.$$

Quand x tend vers b , c_x aussi et donc $T_x f$ tend vers l .

Correction de l'exercice 2 ▲

On a $f'(x) = ie^{ix}$ (on peut le vérifier en coordonnées). Si l'égalité des accroissements finis était vérifiée il existerait

$$c \in]0, \pi[\text{ tel que } f(\pi) - f(0) = (\pi - 0)ie^{ic}$$

ce qui est impossible car en prenant les modules on trouverait $2 = \pi$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. f est de classe C^∞ car ses coordonnées le sont (polynômes). g l'est car c'est la composée de deux fonctions C^∞ .
2. La matrice jacobienne de f est :

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

D'après la formule de différentielle d'une composée, on a

$$Dg(x, y) = Df(f(x, y)) \circ Df(x, y).$$

Or $f(0, 0) = 0$ et

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$Dg(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

3. Par continuité de $Dg(x, y)$ à l'origine et en prenant $\varepsilon = 1/2$ on a :

$$\exists \rho > 0, \|(x, y) - (0, 0)\| \leq \rho \Rightarrow \|Dg(x, y) - Dg(0, 0)\| \leq 1/2$$

d'où le résultat demandé.

4. D'après les accroissements finis, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|g(X) - g(Y)\| \leq \sup_{Z \in \bar{B}_\rho((0,0))} \|Dg(Z)\| \cdot \|X - Y\| \leq 1/2 \|X - Y\|$$

et donc g est contractante. Le Boule $\bar{B}_\rho((0,0))$ la boule $\bar{B}_\rho((0,0))$ étant compacte et complète, le théorème du point fixe permet de conclure.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On a

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos y \\ \cos x & \sin y \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} \|Df(x, y)\| &= \sup_{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{\|Df(x, y) \cdot (a, b)\|}{\|(a, b)\|} = \\ &= \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 y + 2ab \sin x \cos x + a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 y + 2ab \cos x \sin y}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \sin(x+y)}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \sqrt{1 + \frac{2|a||b|}{a^2 + b^2}} \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

car

$$(|a| - |b|)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2|a||b|.$$

2. Soient $U_n = (x_n, y_n)$ et $G(x, y) = 1/2 F(x, y)$, alors $\|G\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $U_{n+1} = G(U_n)$. D'après les accroissements finis, G est contractante et donc le théorème du point fixe donne le résultat demandé.

Correction de l'exercice 9 ▲

Appliquer le théorème des accroissements finis à $g(x) = f(x) - Df(a)x$ en remarquant que la matrice jacobienne de $Df(a)x$ est la matrice $Df(a)$.