Fractions rationnelles, polynômes, équations algébriques

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1

Décomposer en éléments simples dans $C(X)$ les fractions rationnelles suivantes

1) $\frac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2}$ 2) $\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ 3) $\frac{1}{X(X-1)^2}$
4) $\frac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$ 5) $\frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$ 6) $\frac{X^6}{(X^3-1)^2}$
7/ $\frac{1}{X^6+1}$ 8) $\frac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$ 9) $\frac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$
10) $\frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$ 11) $\frac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$ 12) $\frac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$
13) $\frac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$.

Correction ▼ [005335]

Exercice 2

Décomposer en éléments simples dans $C(X)$ les fractions rationnelles suivantes

1) $\frac{1}{X^n-1}$ 2) $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ 3) $\frac{n!}{(X-1)(X-2)...(X-n)}$
4) $\frac{X^2}{X^4-2X^2\cos(2a)+1}$ 5) $\frac{1}{X^{2n}+1}$.

Correction ▼ [005336]

Exercice 3

Soit U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Ecrire sous forme d'une fraction rationnelle (ou encore réduire au même dénominateur) $F = \sum_{\omega\in U_n} \frac{\omega X+1}{\omega^2X^2+\omega X+1}$.

Correction ▼ [005337]

Exercice 4

Soit $F = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes tous deux non nuls et premiers entre eux. Montrer que F est paire si et seulement si P et Q sont pairs. Etablir un résultat analogue pour F impaire.

Correction ▼ [005338]

Exercice 5

Montrer que $(\frac{1}{X-a})_{a\in\mathbb{C}}$ est libre dans $K(X)$.

Correction ▼ [005339]

Exercice 6

Calculer la dérivée n-ième de $\frac{1}{X^2+1}$.

Correction ▼ [005340]

Exercice 7

On pose $P = a(X-x_1)\dots(X-x_n)$ où les x_i sont des complexes non nécessairement deux à deux distincts et a est un complexe non nul.
Calculer $\frac{P'}{P}$. De manière générale, déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ quand P est un polynôme scindé. Une application : déterminer tous les polynômes divisibles par leur dérivées.

Correction ▼ [005341]

Exercice 8

Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^6 - 2X^3\cos a + 1$ où a est un réel donné dans $[0,\pi]$.

Correction ▼ [005342]

Exercice 9

Soit $P =$ où n est un entier naturel non nul, les a_i sont des entiers relatifs et a_0 et a_n sont non nuls. Soient p un entier relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que $p \wedge q = 1$.
Montrer que, si $r = \frac{p}{q}$ est une racine (rationnelle) de P alors p divise a_0 et q divise a_n.
Application. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $9z^4 - 3z^3 + 16z^2 - 6z - 4 = 0$.

Correction ▼ [005343]

Exercice 10 Equations réciproques

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0$ en posant $Z = z + \frac{1}{z}$ (ou autrement).
2. $z^6 - 5z^5 + 5z^4 - 5z^2 + 5z - 1 = 0$.
3. $z^7 - z^6 - 7z^5 + 7z^4 + 7z^3 - 7z^2 - z + 1 = 0$.

Correction ▼ [005344]

Exercice 11

Former une équation du sixième degré dont les racines sont les $\sin\frac{k\pi}{7}$ où $k \in \{-3,-2,-1,1,2,3\}$ puis montrer que ces six nombres sont irrationnels.

Correction ▼ [005345]

Exercice 12

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 4.
Montrer que les images dans le plan complexe des racines de P forment un parallélogramme si et seulement si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune

Correction ▼ [005346]

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $\left\{\begin{array}{l} y^2+yz+z^2=7\\ z^2+zx+x^2=13\\ x^2+xy+y^2=3 \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005347]

Exercice 14

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$.

1. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{2}{2-\omega_k}\right)$.

2. Montrer que, pour tout réel a, $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega_k^2 - 2\omega_k \cos a + 1) = 2(1-\cos(na))$ (questions indépendantes.)

Correction ▼ [005348]

Exercice 15

Déterminer λ et μ complexes tels que les zéros de $z^4 - 4z^3 - 36z^2 + \lambda z + \mu$ soient en progression arithmétique. Résoudre alors l'équation.

Correction ▼ [005349]

Exercice 16

Soient x_1, x_2, x_3 les zéros de $X^3 + 2X - 1$. Calculer $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

Correction ▼ [005350]

Exercice 17

Soient x_1,..., x_8 les zéros de $X^8 + X^7 - X + 3$. Calculer $\sum \frac{x_1}{x_2 x_3}$ (168 termes).

Correction ▼ [005351]

Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 21z + 8 = 0$ sachant qu'il existe deux des solutions sont inverses l'une de l'autre.

Correction ▼ [005352]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $F = \frac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2} = \frac{X^2+3X+5}{(X-1)(X-2)}$.

   1 et 2 ne sont pas racines du polynôme X^2+3X+5 et donc, F est bien sous forme irréductible. La partie entière de F étant clairement 1, F s'écrit sous la forme :

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2},$$

   où a et b sont deux réels.

   $a = \lim_{x\to 1}(x-1)F(x) = \frac{1+3+5}{1-2} = -9$ et $b = \lim_{x\to 2}(x-2)F(x) = \frac{4+6+5}{2-1} = 15$. Donc,

$$F = 1 - \frac{9}{X-1} + \frac{15}{X-2}.$$

2. Soit $F = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit sous la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3},$$

   où a, b et c sont trois réels.

   $a = \lim_{x\to 1}(x-1)F(x) = \frac{1+1}{(1-2)(1-3)} = 1$, puis $b = \lim_{x\to 2}(x-2)F(x) = \frac{4+1}{(2-1)(2-3)} = -5$ et $c = \lim_{x\to 3}(x-3)F(x) = \frac{9+1}{(3-1)(3-2)} = 5$. Donc,

$$F = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}.$$

3. Soit $F = \frac{1}{X(X-1)^2}$.

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2},$$

   avec

   $a = \lim_{x\to 0} xF(x) = 1$ et $c = \lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = 1$. Enfin, $x=-1$ fournit $-1-\frac{b}{2}+\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ et donc $b=-1$.

   Pour trouver b, on peut aussi écrire (le meilleur) $0 = \lim_{x\to+\infty} xF(x) = a+b$ et donc que $b=-a=-1$.

   On peut encore écrire (le moins bon ici)

$$\frac{1}{X(X-1)^2} - \frac{1}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{1-(X-1)^2-X}{X(X-1)^2} = \frac{-X^2+X}{X(X-1)^2} = -\frac{1}{X-1}.$$

   Donc,

$$F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

   Autre démarche.

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(X-1)^2} &= \frac{X-1-X}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X(X-1)} - \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{X-1-X}{X(X-1)} - \frac{1}{(X-1)^2}\\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.\end{aligned}$$

4. Soit $F = \frac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

$b=\lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x)=\frac{1}{2}$ puis, $x=0$ fournit $-2a+2b=1$ et donc $a=0$.

$$F=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{(X+1)^2}\right).$$

5. Soit $F=\frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F=\frac{a}{X-2}+\frac{b}{(X-2)^2}+\frac{c}{(X-2)^3}-\frac{a}{X+2}+\frac{b}{(X+2)^2}-\frac{c}{(X+2)^3}.$$

$c=\lim_{x\to 2}(x-2)^3F(x)=\frac{1}{64}$ puis,

$$\begin{aligned}F-\frac{1}{64}\left(\frac{1}{(X-2)^3}-\frac{1}{(X+2)^3}\right)&=\frac{64-(X+2)^3+(X-2)^3}{64(X-2)^3(X+2)^3}=\frac{-12X^2+48}{64(X-2)^3(X+2)^3}\\&=-\frac{3}{16}\frac{X^2-4}{(X-2)^3(X+2)^3}=-\frac{3}{16}\frac{1}{(X-2)^2(X+2)^2}\end{aligned}$$

Puis, $b=\lim_{x\to 2}(x-2)^2(F(x)-\frac{1}{64}(\frac{1}{(x-2)^3}-\frac{1}{(x+2)^3})=-\frac{3}{16}\frac{1}{(2+2)^2}=-\frac{3}{256}$. Enfin, $x=0$ fournit $-\frac{1}{64}=-a-\frac{3}{512}-\frac{1}{256}$ et $a=\frac{1}{64}-\frac{5}{512}=\frac{3}{512}$. Donc,

$$F=\frac{1}{512}\left(\frac{3}{X-2}-\frac{6}{(X-2)^2}+\frac{8}{(X-2)^3}-\frac{3}{X+2}-\frac{6}{(X+2)^2}-\frac{8}{(X+2)^3}\right).$$

6. Soit $F=\frac{X^6}{(X^3-1)^2}$. On a déjà $(X^3-1)^2=(X-1)^2(X-j)^2(X-j^2)^2$. Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$F=1+\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X-j}+\frac{d}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c}}{X-j^2}+\frac{\overline{d}}{(X-j^2)^2}.$$

$b=\lim_{z\to 1}(z-1)^2F(z)=\frac{1}{9}$ et

$$\begin{aligned}d&=\lim_{z\to j}(z-j)^2F(z)=\frac{j^6}{(j-1)^2(j-j^2)^2}=\frac{1}{j^2(j-1)^4}=\frac{1}{j^2(j^2-2j+1)^2}\\&=\frac{1}{j^2(-3j)^2}=\frac{j^2}{9}\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{j^2}{(X-j)^2}+\frac{j}{(X-j^2)^2}&=\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{(j+j^2)X^2-2(j+j^2)X+2}{(X-j)^2(X-j^2)}\\&=\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-X^2+2X+2}{(X-j)^2(X-j^2)}=\frac{(X^2+X+1)^2+(X-1)^2(-X^2+2X+2)}{(X^3-1)^2}\\&=\frac{6X^3+3}{(X^3-1)^2}\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}F-1-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{j^2}{(X-j)^2}+\frac{j}{(X-j^2)^2}\right)&=\frac{X^6}{(X^3-1)^2}-1-\frac{2X^3+1}{3(X^3-1)^2}\\&=\frac{3X^6-3(X^3-1)^2-2X^3-1}{3(X^3-1)^2}=\frac{4X^3-4}{3(X^3-1)^2}\\&=\frac{4}{3}\frac{1}{X^3-1}.\end{aligned}$$

Mais alors, $a=\lim_{z\to 1}(z-1)(F(z)-1-\frac{1}{9}(\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{j^2}{(z-j)^2}+\frac{j}{(z-j^2)^2})=\frac{4}{3}\frac{1}{1+1+1}=\frac{4}{9}$. De même,

$$c=\lim_{z\to j}(z-j)(F(z)-1-\frac{1}{9}(\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{j^2}{(z-j)^2}+\frac{j}{(z-j^2)^2})=\frac{4}{3}\frac{1}{(j-1)(j-j^2)}=\frac{4j^2}{9}.$$

Donc,

$$F=1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{4j^2}{X-j}+\frac{j^2}{(X-j)^2}+\frac{4j}{X-j^2}+\frac{j}{(X-j^2)^2}).$$

Si on veut la décomposition sur $\mathbb{R}$, on peut regrouper les conjugués :

$$\begin{aligned}F&=1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{4j^2(X-j^2)+4j(X-j)}{X^2+X+1}+\frac{j^2(X-j^2)^2+j(X-j)^2}{(X^2+X+1)^2})\\&=1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-4X+4}{X^2+X+1}+\frac{-X^2+2X+2}{(X^2+X+1)^2})\\&=1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-4X+4}{X^2+X+1}+\frac{-X^2-X-1+3X+3}{(X^2+X+1)^2})\\&=1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-4X+3}{X^2+X+1}+\frac{3X+3}{(X^2+X+1)^2})\end{aligned}$$

7. Soit $F=\frac{1}{X^6+1}$.

$$F=\sum_{k=0}^{5}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k},$$

où $\omega_k=e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6})}$. Mais,

$$\lambda_k=\frac{1}{6\omega_k^5}=\frac{\omega_k}{6\omega_k^6}=-\frac{\omega_k}{6}.$$

Donc,

$$\frac{1}{X^6+1}=\frac{1}{6}(-\frac{i}{X-i}+\frac{i}{X+i}-\frac{e^{i\pi/6}}{X-e^{i\pi/6}}-\frac{e^{-i\pi/6}}{X-e^{-i\pi/6}}+\frac{e^{i\pi/6}}{X+e^{i\pi/6}}+\frac{e^{-i\pi/6}}{X+e^{-i\pi/6}}).$$

8. Soit $F=\frac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$.

$$\begin{aligned}X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2&=(X-1)(X^4-2X^3+3X^2-4X+2)=(X-1)^2(X^3-X^2+2X-2)\\&=(X-1)^2(X^2(X-1)+2(X-1))=(X-1)^3(X^2+2).\end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples de F est donc de la forme

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}+\frac{d}{X-i\sqrt{2}}+\frac{\overline{d}}{X+i\sqrt{2}}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}d&=\lim_{z\to i\sqrt{2}}(z-i\sqrt{2})F(z)=\frac{(i\sqrt{2})^2+3}{(i\sqrt{2}-1)^3(i\sqrt{2}+i\sqrt{2})}=\frac{1}{(2i\sqrt{2})(-2i\sqrt{2}+6+3i\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{-4+10i\sqrt{2}}\\&=-\frac{2+5i\sqrt{2}}{108}.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{d}{X-i\sqrt{2}}+\frac{\overline{d}}{X+i\sqrt{2}}=-\frac{1}{108}\frac{(2+5i\sqrt{2})(X+i\sqrt{2})+(2-5i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})}{X^2+2}=-\frac{1}{108}\frac{4X-20}{X^2+2}=\frac{-X+5}{27(X^2+2)}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}&=\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)}-\frac{-X+5}{27(X^2+2)}\\
&=\frac{27(X^2+3)-(-X+5)(X-1)^3}{27(X-1)^3(X^2+2)}=\frac{X^4-8X^3+45X^2-16X+86}{27(X-1)^3(X^2+2)}\\
&=\frac{(X^2+2)(X^2-8X+43)}{27(X-1)^3(X^2+2)}=\frac{X^2-8X+43}{27(X-1)^3}\\
&=\frac{X^2-2X+1-6X+6+36}{27(X-1)^3}\\
&=\frac{1}{27}(\frac{1}{X-1}-6\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3}).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$F=\frac{1}{27}(\frac{1}{X-1}-6\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3})-\frac{1}{108}(\frac{2+5i\sqrt{2}}{X-i\sqrt{2}}+\frac{2-5i\sqrt{2}}{X+i\sqrt{2}}).$$

9. Soit $F=\frac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$. Puisque F est réelle et impaire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X-i}+\frac{c}{(X-i)^2}+\frac{d}{(X-i)^3}+\frac{\overline{b}}{X+i}+\frac{\overline{c}}{(X+i)^2}+\frac{\overline{d}}{(X+i)^3}.$$

$a=\lim_{x\to1}(x-1)F(x)=\frac{1}{(1+1)^3(1+1)}=\frac{1}{16}$. Puis,

$$\begin{aligned}
F-\frac{1}{16}(\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1})&=\frac{8X-X(X^2+1)^3}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}=\frac{-X^7-3X^5-3X^3+7X}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}\\
&=\frac{X(X^2-1)(-X^4-4X^2-7)}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}=-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}
\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}
d&=\lim_{x\to i}(x-i)^3F(x)=\lim_{x\to i}(x-i)^3(F(x)-\frac{1}{16}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}))\\
&=-\frac{1}{8}\frac{i^4+4i^2+7}{(i+i)^3}=-\frac{i}{16}
\end{aligned}$$

Puis,

$$-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}+\frac{i}{16}\frac{1}{(X-i)^3}-\frac{i}{16}\frac{1}{(X+i)^3}=-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}+\frac{1}{8}\frac{3X^2-1}{(X^2+1)^3}=\frac{X^2+6}{8(X^2+1)^2}.$$

Ensuite, $c=\frac{i^2+6}{8(i+i)^2}=-\frac{5}{32}$. Puis,

$$\frac{X^2+6}{8(X^2+1)^2}+\frac{5}{32}(\frac{1}{(X-i)^2}+\frac{1}{(X+i)^2})=\frac{2(X^2+6)+5(X^2-1)}{16(X^2+1)^2}=\frac{7}{16(X^2+1)}.$$

Enfin, $b=\frac{7}{16(i+i)}=-\frac{7i}{32}$. Finalement,

$$F=\frac{1}{16}(\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1})-\frac{7i}{32}(\frac{1}{X-i}-\frac{1}{X+i})-\frac{5}{32}(\frac{1}{(X-i)^2}+\frac{1}{(X+i)^2})-\frac{i}{16}(\frac{1}{(X-i)^3}-\frac{1}{(X+i)^3}).$$

10. Soit $F=\frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$.

$$\begin{aligned}X^5-X^4+X^3-X^2+X-1&=X^4(X-1)+X^2(X-1)+(X-1)=(X-1)((X^4+2X^2+1)-X^2)\\&=(X-1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)\\&=(X-1)(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2).\end{aligned}$$

Püisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F=aX+b+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X-j}+\frac{\overline{d}}{X-j^2}+\frac{e}{X+j}+\frac{\overline{e}}{X-j^2}.$$

$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=1$, puis $b=\lim_{x\to+\infty}(F(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\ldots}{x^5\ldots}=1$. Puis, $c=\frac{1^6+1}{5-4+3-2+1}=\frac{2}{3}$, $d=\frac{j^6+1}{5j^4-4j^3+3j^2-2j+1}=\frac{2}{3j^2+3j-3}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$ et $e=\frac{(-j)^6+1}{5j^4+4j^3+3j^2+2j+1}=\frac{2}{3j^2+7j+5}=\frac{1}{2j+1}$. Donc,

$$F=X+1+\frac{2}{3}\frac{1}{X-1}-\frac{1}{3}\frac{1}{X-j}-\frac{1}{3}\frac{1}{X-j^2}+\frac{1}{2j+1}\frac{1}{X+j}+\frac{1}{2j^2+1}\frac{1}{X-j^2}.$$

11. Soit $F=\frac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$.
La décomposition sur $\mathbb{R}$ (hors programme) s'obtiendrait de la façon suivante

$$\begin{aligned}X^7+1&=(X^2+X+1)(X^5-X^4+X^2-X)+X+1\\&=(X^2+X+1)[(X^2+X+1)(X^3-2X^2+X+2)-4X-2]+X+1\\&=(X^2+X+1)^2(X^3-2X^2+X+2)-(4X+2)(X^2+X+1)+X+1\\&=(X^2+X+1)^2[(X^2+X+1)(X-3)+3X+5]-(4X+2)(X^2+X+1)+X+1\\&=X+1-(4X+2)(X^2+X+1)+(3X+5)(X^2+X+1)^2+(X-3)(X^2+X+1)^3\end{aligned}$$

Donc,

$$F=X-3+\frac{3X+5}{X^2+X+1}-\frac{4X+2}{(X^2+X+1)^2}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}.$$

12. Soit $F=\frac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$. La décomposition de F en éléments simples est de la forme

$$F=\frac{a}{X}+\frac{b_1}{X-1}+\frac{b_2}{(X-1)^2}+\frac{b_3}{(X-1)^3}+\frac{b_4}{(X-1)^4}+\frac{c_1}{X-\sqrt{2}}+\frac{c_2}{(X-\sqrt{2})^2}+\frac{d_1}{X+\sqrt{2}}+\frac{d_2}{(X+\sqrt{2})^2}.$$

$a=\lim_{x\to0}xF(x)=\frac{1}{4}$. Puis,

$$\begin{aligned}c_2&=\lim_{x\to\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})^2F(x)=\frac{2+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}=\frac{3}{8\sqrt{2}(4-8\sqrt{2}+12-4\sqrt{2}+1)}\\&=\frac{3}{8\sqrt{2}(17-12\sqrt{2})}=\frac{3}{8(-24+17\sqrt{2})}=\frac{3}{16}(24+17\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Un calcul conjugué fournit $d_2 = \frac{3}{16}(24 - 17\sqrt{2})$. On a ensuite

$$\frac{3}{16}\left(\frac{24+17\sqrt{2}}{(X-\sqrt{2})^2} + \frac{24-17\sqrt{2}}{(X+\sqrt{2})^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
F - \frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2} &= \frac{2(X^2+1) - 3(6X^2+17X+12)X(X-1)^4}{2X(X-1)^4(X^2-2)^2} \\
&= \frac{-18X^7+21X^6+60X^5-90X^4-30X^3+95X^2-36X+2}{2X(X-1)^4(X^2-2)^2} \\
&= \frac{-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1}{2X(X-1)^4(X^2-2)}
\end{aligned}$$

Mais alors,

$$c_1 = \frac{-18.4\sqrt{2}+21.4+24.2\sqrt{2}-48.2+18\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{-13-6\sqrt{2}}{8(17-12\sqrt{2})} = -\frac{1}{8}(365+258\sqrt{2}),$$

et par un calcul conjugué, $d_1 = -\frac{1}{8}(365 - 258\sqrt{2})$. Ensuite,

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{365+258\sqrt{2}}{X-\sqrt{2}} + \frac{365-258\sqrt{2}}{X+\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
F - \frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2} + \frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2} &= \frac{-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1}{2X(X-1)^4(X^2-2)} + \frac{365X+516}{4(X^2-2)} \\
&= \frac{2(-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1)+(365X+516)X(X-1)^4}{4X(X-1)^4(X^2-2)} \\
&= \frac{365X^6-980X^5+168X^4+1684X^3-1795X^2+552X-2}{4X(X-1)^4(X^2-2)} \\
&= \frac{365X^4-980X^3+898X^2-276X+1}{4X(X-1)^4}
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
F - \frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2} + \frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2} - \frac{1}{4X} &= \frac{365X^4-980X^3+898X^2-276X+1}{4X(X-1)^4} - \frac{1}{4X} \\
= \frac{(365X^4-980X^3+898X^2-276X+1)-(X-1)^4}{4X(X-1)^4} &= \frac{364X^4-976X^3+892X^2-272X}{4X(X-1)^4} \\
= \frac{182X^3-488X^2+446X-136}{2(X-1)^4}
\end{aligned}$$

Enfin, $b_4 = \lim_{x\to 1}(x-1)^4\frac{182x^3-488x^2+446x-136}{2(x-1)^4} = 2$, puis

$$\frac{182X^3-488X^2+446X-136}{2(X-1)^4} - \frac{2}{(X-1)^4} = \frac{91X^3-244X^2+223X-70}{(X-1)^4} = \frac{91X^2-153X+70}{(X-1)^3}.$$

Puis, $b_3 = \lim_{x\to 1}(x-1)^3\frac{91x^2-153x+70}{(x-1)^3} = 8$, puis

$$\frac{91X^2-153X+70}{(X-1)^3}-\frac{8}{(X-1)^3}=\frac{91X^2-153X+62}{(X-1)^3}=\frac{91X-62}{(X-1)^2}$$
$$=\frac{91X-91+29}{(X-1)^2}=\frac{91}{X-1}+\frac{29}{(X-1)^2}$$

ce qui fournit $b_2=29$ et $b_1=91$.

$$F=\frac{1}{4X}+\frac{91}{X-1}+\frac{29}{(X-1)^2}+\frac{8}{(X-1)^3}+\frac{2}{(X-1)^4}-\frac{365+258\sqrt{2}}{8}\frac{1}{X-\sqrt{2}}+\frac{3(24+17\sqrt{2})}{16}\frac{1}{(X-\sqrt{2})^2}$$
$$-\frac{365-258\sqrt{2}}{8}\frac{1}{X+\sqrt{2}}+\frac{3(24-17\sqrt{2})}{16}\frac{1}{(X+\sqrt{2})^2}.$$

13. Soit $F=\frac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$.

$$(X+1)^7-X^7-1=7X^6+21X^5+35X^4+35X^3+21X^2+7X=7X(X^5+3X^4+5X^3+5X^2+3X+1)$$
$$=7X(X+1)(X^4+2X^3+3X^2+2X+1)=7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

Si on n'a pas deviné que $X^4+2X^3+3X^2+2X+1=(X^2+X+1)^2$ (par exemple, en repérant que j est racine ou encore en manipulant l'identité $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$), on peut pratiquer comme suit

$$X^4+2X^3+3X^2+2X+1=X^2(X^2+\frac{1}{X^2}+2(X+\frac{1}{X})+3)=X^2((X+\frac{1}{X})^2+2(X+\frac{1}{X})+1)$$
$$=X^2(X+\frac{1}{X}+1)^2=(X^2+X+1)^2$$

La déccomposition en éléments simples de $7F$ est donc de la forme

$$7F=\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X-j}+\frac{d}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c}}{X-j^2}+\frac{\overline{d}}{(X-j^2)^2}.$$

$a=\frac{1}{(0+1)(0^2+0+1)^2}=1$ et $b=\frac{1}{(-1)(1-1+1)^2}=-1$. Puis,

$$d=\frac{1}{j(j+1)(j-j^2)^2}=\frac{1}{j(-j^2)j^2(1-2j+j^2)}=\frac{1}{-j^2(-3j)}=\frac{1}{3}.$$

Ensuite,

$$\frac{1}{3}(\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2})=\frac{(X-j^2)^2+(X-j)^2}{3(X^2+X+1)^2}=\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2}.$$

Puis,

$$7F-\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2}=\frac{3-X(X+1)(2X^2+2X-1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}=\frac{-2X^4-4X^3-4X^2+X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}$$
$$=\frac{-2X^2-2X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)}.$$

Mais alors,

$$c=\frac{-2j^2-2j+3}{3j(j+1)(j-j^2)}=\frac{5}{-3(j-j^2)}=\frac{5i}{3\sqrt{3}}.$$

Finalement,

$$F = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{5i}{3\sqrt{3}(X-j)} + \frac{3}{3(X-j)^2} - \frac{5i}{3\sqrt{3}(X-j^2)} + \frac{1}{3(X-j^2)^2}\right).$$

Correction de **l'exercice 2 ▲**

1. Soit $P = X^n - 1$ et $F = \frac{1}{P}$. La partie entière de F est nulle et les pôles de F sont simples (car $P = X^n - 1$ et $P' = nX^{n-1}$ n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$). De plus, $P = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k)$ où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Donc, $F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$ où

$$\lambda_k = \frac{1}{P'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n} = \frac{\omega_k}{n}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2ik\pi/n}}{X - e^{2ik\pi/n}}.$$

2. Soit $P = (X-1)(X^n - 1) = (X-1)^2 \prod_{k=1}^{n-1} \omega_k$ où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Soit $F = \frac{1}{P}$. La partie entière de F est nulle. D'autre part, F admet un pôle double, à savoir 1 et $n-1$ pôles simples à savoir les $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, $\leq k \leq n-1$. Donc,

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k}.$$

$\lambda_k = \frac{1}{(n+1)\omega_k^n - n\omega_k^{n-1} - 1} = \frac{1}{n(1-\omega_k^{n-1})} = \frac{\omega_k}{n(\omega_k - 1)}$. Ensuite,

$$b = \lim_{x\to 1}(x-1)^2 F(x) = \frac{1}{1^{n-1} + \ldots + 1^1 + 1} = \frac{1}{n}.$$

Il reste à calculer a.

$$F - \frac{1}{n(X-1)^2} = \frac{n - (X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1)}{n(X-1)^2(X^{n-1} + \ldots + X + 1)} = \frac{-X^{n-2} - 2X^{n-3} - \ldots - (n-2)X - (n-1))}{n(X-1)(X^{n-1} + \ldots + X + 1)}.$$

Donc, $a = \lim_{x\to 1}(x-1)(F(x) - \frac{1}{n(x-1)^2}) = \frac{-[(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1]}{n(1+1\ldots+1)} = -\frac{n-1}{2n}$.
Finalement,

$$F = \frac{1}{n}\left(-\frac{n-1}{2n(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{\omega_k - 1}\frac{1}{X-\omega_k}\right).$$

3. $\frac{n!}{(X-1)\ldots(X-n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X-k}$ avec

$$\lambda_k = \lim_{x\to k}(x-k)F(x) = \frac{n!}{\prod_{j\neq k}(j-k)} = \frac{n!}{(-1)^{n-k}(k-1)!(n-k)!} = n(-1)^{n-k}C_{n-1}^{k-1}.$$

Donc,

$$\frac{n!}{(X-1)\ldots(X-n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n C_{n-1}^{k-1}}{X-k}.$$

4. Posons $P = X^4 - 2X^2\cos(2a) + 1$.

$$X^4 - 2X^2\cos(2a) + 1 = (X^2 - e^{2ia})(X^2 - e^{-2ia}) = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})(X + e^{ia})(X + e^{-ia})$$
$$(= (X^2 - 2X\cos a + 1)(X^2 + 2X\cos a + 1)).$$

P est à racines simples si et seulement si $e^{ia} \neq \pm e^{-ia}$ ce qui équivaut à $a \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.
1er cas. Si $a \in \pi\mathbb{Z}$,

$$F = \frac{X^2}{(X^2-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

$b = \lim_{x\to 1}(x-1)^2 F(x) = \frac{1}{4}$ puis $x = 0$ fournit $0 = -2a + 2b$ et donc $a = b = \frac{1}{4}$.

$$F = \frac{X^2}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{4}(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}).$$

2ème cas. Si $a \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$,

$$F = \frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{(X-i)^2} - \frac{a}{X+i} + \frac{b}{(X+i)^2}.$$

$b = \lim_{x\to i}(x-i)^2 F(x) = \frac{i^2}{(i+i)^2} = \frac{1}{4}$ puis $x = 0$ fournit $0 = 2ia - 2b$ et donc $a = -ib = -\frac{i}{4}$.

$$F = \frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{4}(-\frac{i}{X-i} + \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{i}{X+i} + \frac{1}{(X+i)^2}).$$

3ème cas. Si $a \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, puisque F est réelle et paire,

$$F = \frac{A}{X-e^{ia}} + \frac{\overline{A}}{X-e^{-ia}} - \frac{A}{X+e^{ia}} - \frac{\overline{A}}{X+e^{-ia}},$$

avec

$$A = \frac{e^{2ia}}{(e^{ia}-e^{-ia})(e^{ia}+e^{ia})(e^{ia}+e^{-ia})} = \frac{e^{2ia}}{8i\sin a\cos a e^{ia}} = \frac{-ie^{ia}}{4\sin(2a)}.$$

Donc,

$$F = \frac{1}{4\sin(2a)}(-\frac{ie^{ia}}{X-e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{X-e^{-ia}} + \frac{ie^{ia}}{X+e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{X+e^{-ia}}).$$

5. Le polynôme $X^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{2n-1}(X - e^{i(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n})})$ est à racines simples car n'a pas de racine commune avec sa dérivée. En posant $\omega_k = e^{i(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n})}$, on a

$$\frac{1}{X^{2n}+1} = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k},$$

où

$$\lambda_k = \frac{1}{2n\omega_k^{2n-1}} = \frac{\omega_k}{2n\omega_k^{2n}} = -\frac{\omega_k}{2n}.$$

Finalement,

$$\frac{1}{X^{2n}+1} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Pour k élément de $\{0,...,n-1\}$, posons $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Décomposons F en éléments simples (sur $\mathbb{C}$).

$$\frac{\omega X+1}{\omega^2X+\omega X+1} = \frac{\omega X+1}{(\omega X)^2+\omega X+1} = \frac{\omega X+1}{(\omega X-j)(\omega X-j^2)} = \frac{a}{\omega X-j}+\frac{b}{\omega X-j^2},$$

avec $a = \frac{\omega\frac{j}{\omega}}{\omega\frac{j}{\omega}-j^2} = \frac{j+1}{j-j^2} = -\frac{-j^2}{j-j^2} = \frac{j}{j-1}$ et de même $b = \frac{j^2+1}{j^2-j} = -\frac{1}{j-1}$. Donc,

$$F = \frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{j}{\omega_kX-j}-\frac{1}{\omega_kX-j^2}\right) = \frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{j\omega_{-k}}{X-j\omega_{-k}}-\frac{\omega_{-k}}{X-j^2\omega_{-k}}\right) = \frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k}-\frac{\omega_k}{X-j^2\omega_k}\right)$$

Maintenant les n nombres $j\omega_k$ sont deux à deux distincts et vérifient $(j\omega_k)^n = j^n$ et donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1}(X-j\omega_k) = X^n-j^n.$$

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k}$ est donc la décomposition en éléments simples d'une fraction du type $\frac{P}{X^n-j^n}$ avec $\deg P \leq n-1$. De plus, on sait que $j\omega_k = \frac{P(j\omega_k)}{n(j\omega_k)^{n-1}}$ et donc, $\forall k \in \{0,...,n-1\}$, $P(j\omega_k) = nj^n$. Le polynôme $P-nj^n$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$, admet les n racines deux à deux distinctes $j\omega_k$ et est donc le polynôme nul. Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k} = \frac{nj^n}{X^n-j^n}.$$

De même, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-j^2\omega_k} = \frac{nj^{2n-2}}{X^n-j^{2n}}$, puis

$$F = \frac{n}{j-1}\left(\frac{j^n}{X^n-j^n}-\frac{j^{2n-2}}{X^n-j^{2n}}\right).$$

Si $n \in 3\mathbb{Z}$, posons $n = 3p$, $p \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas,

$$F = \frac{3p}{j-1}\left(\frac{1}{X^{3p}-1}-\frac{j}{X^{3p}-1}\right) = \frac{3p}{1-X^{3p}}.$$

Si $n \in 3\mathbb{Z}+1$, posons $n = 3p+1$, $p \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas,

$$F = \frac{3p+1}{j-1}\left(\frac{j}{X^{3p+1}-j}-\frac{1}{X^{3p+1}-j^2}\right) = \frac{(3p+1)(X^{3p+1}+1)}{X^{6p+2}+X^{3p+1}+1}.$$

Si $n \in 3\mathbb{Z}+2$, posons $n = 3p+2$, $p \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas,

$$F = \frac{3p+2}{j-1}\left(\frac{j^2}{X^{3p+2}-j^2}-\frac{j^2}{X^{3p+2}-j}\right) = \frac{3p+2}{X^{6p+4}+X^{3p+2}+1}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soient P et Q deux polynômes non nuls et premiers entre eux, puis soit $F = \frac{P}{Q}$. Si F est paire, alors $\frac{P(-X)}{Q(-X)} = \frac{P(X)}{Q(X)}$, ou encore $P(-X)Q(X) = P(X)Q(-X)$ $(*)$.

Par suite, $P(X)$ divise $P(X)Q(-X) = Q(X)P(-X)$ et $P(X)$ est premier à $Q(X)$. D'après le théorème de GAUSS, $P(X)$ divise $P(-X)$. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $P(-X) = \lambda P(X)$ (car $\deg(P(-X)) = \deg(P)$). L'analyse des coefficients dominants des deux membres fournit $\lambda = (-1)^n$ où $n = \deg P$. Ceci s'écrit $P(-X) = (-1)^nP(X)$. En reportant dans $(*)$, on obtient encore $Q(-X) = (-1)^n = Q(X)$. Ainsi, si F est paire, alors P et Q sont ou bien tous deux pairs, ou bien tous deux impairs. Ce dernier cas est exclu, car alors P et Q admettraient tous deux 0 pour racine contredisant le fait qu'ils sont premiers entre eux. Finalement, si F est paire, alors P et Q sont pairs. La réciproque est claire.

$$F \text{ paire} \Leftrightarrow (P \text{ et } Q \text{ sont pairs.})$$

Je vous laisse établir que

$$F \text{ impaire} \Leftrightarrow (P \text{ est impair et } Q \text{ est pair}) \text{ ou}(P \text{ est pair et } Q \text{ est impair.})$$

Correction de l'exercice 5 ▲

C'est du cours (unicité de la décomposition en éléments simples).

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{X^2+1} = \frac{1}{2i}(\frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i})$. Donc,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{X^2+1}\right)^{(n)} &= \frac{1}{2i}(\left(\frac{1}{X-i}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{X+i}\right)^{(n)}) = \frac{1}{2i}(\frac{(-1)(-2)...(-n)}{(X-i)^{n+1}} - \frac{(-1)(-2)...(-n)}{(X+i)^{n+1}})\\ &= (-1)^n.n!\mathrm{Im}(\frac{1}{(X-i)^{n+1}}) = (-1)^n.n!\mathrm{Im}(\frac{(X+i)^{n+1}}{(X^2+1)^{n+1}}) = \frac{(-1)^n.n!\sum C_{n+1}^{2k+1}(-1)^k X^{2n-2k}}{(X^2+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

$P' = a\sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}(X-x_j) = \sum_{k=1}^{n}\frac{P}{X-x_k}$, et donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-x_k}.$$

Regroupons maintenant les pôles identiques, ou encore posons $P = a(X-z_1)^{\alpha_1}...(X-z_k)^{\alpha_k}$ où cette fois-ci les z_j sont deux à deux distincts. La formule ci-dessus s'écrit alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j}{X-z_j} \quad (*).$$

Déterminons les polynômes divisibles par leur dérivée. Soit P un tel polynôme. Nécessairement $\deg P \geq 1$ puis, il existe deux complexes a et b, $a \neq 0$ tel que $P = (aX+b)P'$ ou encore $\frac{P'}{P} = \frac{1}{aX+b}$. $(*)$ montre que P a une et une seule racine. Par suite, P est de la forme $\lambda(X-a)^n$, $\lambda \neq 0$, $n \geq 1$ et a quelconque.
Réciproquement, on a dans ce cas $P = \frac{1}{n}(X-a)n(X-a)^{n-1} = (\frac{1}{n}X - \frac{a}{n})P'$ et P' divise effectivement P.
Les polynômes divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme $\lambda(X-a)^n$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 8 ▲

$$\begin{aligned}P &= X^6 - 2X^3\cos a + 1 = (X^3 - e^{ia})(X^3 - e^{-ia})\\ &= (X - e^{ia/3})(X - je^{ia/3})(X - j^2e^{ia/3})(X - e^{-ia/3})(X - je^{-ia/3})(X - j^2e^{-ia/3})\\ &= (X^2 - 2X\cos\frac{a}{3} + 1)(X^2 - 2X\cos(\frac{a}{3} + \frac{2\pi}{3}) + 1)(X^2 - 2X\cos(\frac{a}{3} - \frac{2\pi}{3}) + 1)\end{aligned}$$

Il reste à se demander 1) si les facteurs précédents sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ et 2) si ces facteurs sont deux à deux distincts.
Les trois facteurs de degré 2 ont un discriminant réduit du type $\Delta' = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$ et Δ' est nul si et seulement si α est dans $\pi\mathbb{Z}$.
Les cas particuliers sont donc ($\frac{a}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $a = 0$) et ($\frac{a+2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $a = \pi$) et ($\frac{a-2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ ce qui n'a pas de solution dans $[0,\pi]$).

1er cas. Si $a = 0$.

$$P = (X^2 - 2X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 + X + 1) = (X-1)^2(X^2 + X + 1)^2.$$

2ème cas. Si $a = \pi$, en remplaçant X par $-X$ on obtient :

$$P = (X+1)^2(X^2 - X + 1)^2.$$

3ème cas. Si a est dans $]0, \pi[$, les trois facteurs de degré 2 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ et clairement deux à deux distincts. Donc

$$P = (X^2 - 2X\cos\frac{a}{3} + 1)(X^2 - 2X\cos\frac{a+2\pi}{3} + 1)(X^2 - 2X\cos\frac{a-2\pi}{3} + 1).$$

Correction de l'exercice 9 ▲

On suppose $a_0 \neq 0$ de sorte que 0 n'est pas racine de P. Soient p un relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que p et q soient premiers entre eux.
Si $r = \frac{p}{q}$ est racine de P alors $a_n(\frac{p}{q})^n + ... + a_0 = 0$ et donc

$$a_n p^n = -q(a_0 q^{n-1} + ... + a_{n-1} p^{n-1}) \text{ et } a_0 q^n = -p(a^n p^{n-1} + ... + a_1 q^{n-1}).$$

Donc p divise $a_0 q^n$, mais p est premier à q^n et d'après le théorème de GAUSS, p divise a_0. De même q divise a_n.
Application. Soit $P = 9X^4 - 3X^3 + 16X^2 - 6X - 4$ et soit p un entier relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que $p \wedge q = 1$. Si $\frac{p}{q}$ est racine de P, p divise -4 et q divise 9 de sorte que p est élément de $\{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$ et q est élément de $\{1, 3, 9\}$ puis $\frac{p}{q}$ est élément de $\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{2}{9}, \pm\frac{4}{9}\}$.
On trouve $P(\frac{2}{3}) = P(-\frac{1}{3}) = 0$ et P est divisible par $(3X-2)(3X+1) = 9X^2 - 3X - 2$. Plus précisément $P = 9X^4 - 3X^3 + 16X^2 - 6X - 4 = (9X^2 - 3X - 2)(X^2 + 2)$ et les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1.

$$\begin{aligned}P &= X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = X^2(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2(X + \frac{1}{X}) + 3) = X^2((X + \frac{1}{X})^2 + 2(X + \frac{1}{X}) + 1) \\ &= X^2(X + \frac{1}{X} + 1)^2 = (X^2 + X + 1)^2 = (X-j)^2(X-j^2)^2.\end{aligned}$$

2. 1 et -1 sont racines de P. On écrit donc $P = (X^2 - 1)(X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1)$ puis

$$\begin{aligned}X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1 &= X^2((X^2 + \frac{1}{X^2}) - 5(X + \frac{1}{X}) + 6) = X^2((X + \frac{1}{X})^2 - 5(X + \frac{1}{X}) + 4) \\ &= X^2(X + \frac{1}{X} - 1)(X + \frac{1}{X} - 4) = (X^2 - X + 1)(X^2 - 4X + 1)\end{aligned}$$

et donc, $P = (X-1)(X+1)(X+j)(X+j^2)(X - 2 + \sqrt{3})(X - 2 - \sqrt{3})$.

3.

$$\begin{aligned}P &= X^7 - X^6 - 7X^5 + 7X^4 + 7X^3 - 7X^2 - X + 1 = (X^2 - 1)(X^5 - X^4 - 6X^3 + 6X^2 + X - 1) \\ &= (X-1)^2(X+1)(X^4 - 6X^2 + 1) \\ &= (X-1)^2(X+1)(X^2(3 + 2\sqrt{2}))(X^2 - (3 - 2\sqrt{2}))\end{aligned}$$

Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont 1, -1, $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$,$-\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$, $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ et $-\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Pour k élément de $\{-3,-2,-1,1,2,3\}$, posons $x_k = \sin\frac{k\pi}{7}$ (les x_k sont deux à deux opposés). Il faut calculer les coefficients du polynôme

$$\begin{aligned}P &= (X-\sin\frac{\pi}{7})(X-\sin\frac{2\pi}{7})(X-\sin\frac{3\pi}{7})(X+\sin\frac{\pi}{7})(X+\sin\frac{2\pi}{7})(X+\sin\frac{3\pi}{7})\\ &= (X^2-\sin^2\frac{\pi}{7})(X^2-\sin^2\frac{2\pi}{7})(X^2-\sin^2\frac{3\pi}{7})\\ &= (X^2-\frac{1}{2}(1-cos\frac{2\pi}{7}))(X^2-\frac{1}{2}(1-cos\frac{4\pi}{7}))(X^2-\frac{1}{2}(1-cos\frac{6\pi}{7}))\\ &= \frac{1}{8}Q(-2X^2+1)\end{aligned}$$

où $Q(Y) = (\cos\frac{2\pi}{7}-Y)(\cos\frac{4\pi}{7}-Y)(\cos\frac{8\pi}{7}-Y)$.
Posons $\omega = e^{2i\pi/7}$.

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8}(\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)(\omega^3+\omega^4) = \frac{1}{8}(6+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^{12}+\omega^{14}+\omega^{15})\\ &= \frac{1}{8}(\omega^6+\omega^7+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+1+\omega) = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{4}((\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)+(\omega+\omega^6)(\omega^3+\omega^4)+(\omega^3+\omega^4)(\omega^2+\omega^5))\\ &= \frac{1}{4}(2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5+2\omega^6) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Enfin,

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6) = -\frac{1}{2}$$

Donc, $Q = \frac{1}{8}-(-\frac{1}{2})Y+(-\frac{1}{2})Y^2-Y^3 = \frac{1}{8}(-8Y^3-4Y^2+4Y+1)$ puis,

$$P = \frac{1}{64}(-8(-2X^2+1)^3-4(-2X^2+1)^2+4(-2X^2+1)+1) = \frac{1}{64}(64X^6-112X^4+54X^2-7).$$

Une équation du 6ème degré dont les solutions sont les sin est $64x^6-112x^4+54x^2-7=0$.
Maintenant, si $r =$ (p entier relatif non nul, q entier naturel non nul, p et q premiers entre eux) est une racine rationnelle de cette équation, alors, d'après l'exercice 9, p divise -7 et q divise 64 et donc p est élément de $\{1,-1,7,-7\}$ et q est élément de $\{1,2,4,8,16,32,64\}$. On vérifie aisément qu'aucun des rationnels r obtenu n'est racine de P et donc les racines de P sont irrationnelles.

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 4. On suppose P unitaire sans perte de généralité. On note z_1, z_2, z_3 et z_4 les racines de P dans $\mathbb{C}$.
Si z_1, z_2, z_3 et z_4 forment un parallélogramme, notons a le centre de ce parallélogramme. Les racines de P s'écrivent alors z_1, z_2, 2_a-z_1, $2a-z_2$ et si $Q = P(X+a)$ alors $Q(-a+z_1) = Q(a-z_1) = Q(-a+z_2) = Q(a-z_2) = 0$. Les racines du polynôme Q sont deux à deux opposées, ce qui équivaut à dire que le polynôme Q est bicarré ou encore de la forme $X^4+\alpha X^2+\beta$ ou enfin que

$$P = (X-a)^4+\alpha(X-a)^2+\beta.$$

Mais alors a est racine de $P' = 4(X-a)^3 + 2\alpha(X-a)$ et de $P^{(3)} = 24(X-a)$.
Réciproquement, si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune a. $P^{(3)}$ est de degré 1 et de coefficient dominant 24 et donc $P^{(3)} = 24(X-a)$ puis en intégrant $P'' = 12(X-a)^2 + \lambda$ puis $P' = 4(X-a)^3 + \lambda(X-a) + \mu$. La condition a est racine de P' fournit $\mu = 0$ et donc $P = (X-a)^4 + \alpha(X-a)^2 + \beta$. Donc, le polynôme $Q = P(X+a)$ est bicarré et ses racines sont deux à deux opposées et donc de la forme $Z_1 = a - z_1$, $Z_2 = z1 - a$, $Z_3 = a - z_2$, $Z_4 = z_2 - a$ et on a bien $Z_1 - Z_3 = Z_4 - Z_2$.

Correction de l'exercice 13 ▲

Si (x,y,z) est solution du système proposé noté (S), alors x, y et z sont deux à deux distincts. En effet, si par exemple $x = y$ alors $7 = y^2 + yz + z^2 = x^2 + xz + z^2 = 13$ ce qui est impossible. Donc,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^3 - z^3 = 7(y-z) \\ z^3 - x^3 = 13(z-x) \\ x^3 - y^3 = 3(x-y) \end{array}\right. .$$

En additionnant les trois équations, on obtient $-10x + 4y + 6z = 0$ ou encore $-5x + 2y + 3z = 0$. Donc,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(5x-3z) \\ (\frac{1}{2}(5x-3z))^2 + \frac{1}{2}(5x-3z)z + z^2 = 7 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ x^2 + \frac{1}{2}(5x-3z)x + (\frac{1}{2}(5x-3z))^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(5x-3z) \\ 25x^2 - 20xz + 7z^2 = 28 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ 39x^2 - 36xz + 9z^2 = 12 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(5x-3z) \\ xz = 13 - x^2 - z^2 \\ 25x^2 - 20(13 - x^2 - z^2) + 7z^2 = 28 \\ 39x^2 - 36(13 - x^2 - z^2) + 9z^2 = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(5x-3z) \\ xz = 13 - x^2 - z^2 \\ 5x^2 + 3z^2 = 32 \end{array}\right.$$

Soit (S') le système formé des deux dernières équations. On note que $x = 0$ ne fournit pas de solution et donc

$$(S') \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z^2 = \frac{1}{3}(32 - 5x^2) \\ xz = 13 - x^2 - \frac{1}{3}(32 - 5x^2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \frac{2x^2+7}{3x} \\ \frac{(2x^2+7)^2}{9x^2} = \frac{1}{3}(32 - 5x^2) \end{array}\right.$$

La deuxième équation s'écrit $(2x^2+7)^2 = 3x^2(32 - 5x^2)$ puis $19x^4 - 68x^2 + 49 = 0$ puis $x^2 = \frac{34 \pm 15}{19}$ D'où les solutions $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = \sqrt{\frac{49}{19}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{49}{19}}$. Puis, les quatre triplets solutions du système : $(1,-2,3)$, $(-1,2,-3)$, $(\frac{7}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{11}{\sqrt{19}})$ et $(-\frac{7}{\sqrt{19}}, -\frac{1}{\sqrt{19}}, -\frac{11}{\sqrt{19}})$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit $P = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k) = X^n - 1$ (où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$)

1. $\prod_{k=0}^{n-1}(1 + \frac{2}{2-\omega_k}) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4-\omega_k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2-\omega_k)} = \frac{P(4)}{P(2)} = \frac{4^n-1}{2^n-1} = 2^n + 1$.
2. $$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}(\omega_k^2 - 2\omega_k \cos a + 1) &= \prod_{k=0}^{n-1}(e^{ia} - \omega_k)(e^{-ia} - \omega_k) = P(e^{ia})P(e^{-ia}) = (e^{ina} - 1)(e^{-ina} - 1) \\ &= 2 - e^{ina} - e^{-ina} = 2(1 - \cos na).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

Posons $P = X^4 - 4X^3 - 36X^2 + \lambda X + \mu$.

$$
\begin{aligned}
(\lambda,\mu) \text{ solution} &\Leftrightarrow \exists (z,r)\in\mathbb{C}^2/ \text{ les racines de } P \text{ soient } z, z+r, z+2r, z+3r\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}\sigma_1=4\\ \sigma_2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}4z+6r=4\\ z(3z+6r)+(z+r)(2z+5r)+(z+2r)(z+3r)=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}2z+3r=2\\ 6z^2+18rz+11r^2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}z=1-\frac{3}{2}r\\ 6(1-\frac{3}{2}r)^2+18(1-\frac{3}{2}r)r+11r^2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}-\frac{5}{2}r^2+42=0\\ z=1-\frac{3}{2}r\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

D'où la solution (les deux valeurs opposées de r fournissent évidemment la même progression arithmétique) $r=2\sqrt{\frac{21}{5}}$ puis $z=1-3\sqrt{\frac{21}{5}}$ puis les racines $z_1=1-3\sqrt{\frac{21}{5}}$, $z_2=1-\sqrt{\frac{21}{5}}$, $z_3=1+\sqrt{\frac{21}{5}}$ et $z_4=1+3\sqrt{\frac{21}{5}}$, obtenues pour

$$\lambda=z_1z_2z_3z_4=(1-3\sqrt{\frac{21}{5}})(1-\sqrt{\frac{21}{5}})(1+\sqrt{\frac{21}{5}})(1+3\sqrt{\frac{21}{5}})=(1-9\frac{21}{5})(1-\frac{21}{5})=\frac{2994}{25},$$

et

$$
\begin{aligned}
\mu&=(1-3\sqrt{\frac{21}{5}})(1-\frac{21}{5})+(1-9\frac{21}{5})(1-\sqrt{\frac{21}{5}})+(1-9\frac{21}{5})(1+\sqrt{\frac{21}{5}})+(1-\frac{21}{5})(1+3\sqrt{\frac{21}{5}})\\
&=2(1-\frac{21}{5})+2(1-9\frac{21}{5})=2(2-10\frac{21}{5})=-80
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 16 ▲

Pour $i\in\{1,2,3\}$, on a $x_i^3+2x_i-1=0$ et donc $x_i^4+2x_i^2-x_i=0$. En additionnant ces trois égalités, on obtient $S_4+2S_2-S_1=0$ et donc

$$S_4=-2((\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_1=(-2)(-2.2)=8.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

Pour chacun des 8 numérateurs possibles, il y a $C_7^2=21$ dénominateurs et donc au total, $8\times 21=168$ termes.

$$\sum\frac{x_1}{x_2x_3}=\sum\frac{x_1^2x_4x_5x_6x_7x_8}{x_1x_2\dots x_8}=\frac{1}{\sigma_8}\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6=\frac{1}{3}\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6.$$

Ensuite,

$$\sigma_1\sigma_6 = (\sum x_1)(\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6) = \sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 + \sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7,$$

et donc,

$$\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 = \sigma_1\sigma_6 - \sigma_7 = (-1)(0) - 1 = -1.$$

Donc, $\sum \frac{x_1}{x_2x_3} = -\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 18 ▲

L'équation proposée admet deux solutions inverses l'une de l'autre si et seulement si il existe deux complexes a et b tels que

$$X^4 - 21X + 8 = (X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 8) = X^4 + (a+b)X^3 + (9+ab)X^2 + (8a+b)X + 8 \ (*)$$

$(*) \Leftrightarrow b = -a$ et $ab = -9$ et $8a + b = -21 \Leftrightarrow a = 3$ et $b = -3$. Ainsi,

$$X^4 - 21X + 8 = (X^2 + 3X + 1)(X^2 - 3X + 8) = (X - \frac{-3+\sqrt{5}}{2})(X - \frac{-3-\sqrt{5}}{2})(X - \frac{3+i\sqrt{15}}{2})(X - \frac{3-i\sqrt{15}}{2}).$$
