Exercices : Martine Quinio

Loi normale et approximations

Exercice 1

Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obeit à une loi normale les paramètres étant : moyenne : 0mm, écart-type : 0.02mm. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7.97mm et 8.03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Correction ▼ [006014]

Exercice 2

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.

1. Soit X la variable aléatoire «épaisseur de la plaque en mm» ; on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$ et $\sigma = 0.1$. Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm et la probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm.
2. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard : soit X_i la variable aléatoire «épaisseur de la plaque numéro i en mm» et Z la variable aléatoire «épaisseur des n plaques en mm». Pour $n = 20$, quelle est la loi de Z, son espérance et sa variance ?

Correction ▼ [006015]

Exercice 3

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées ; on estime à 0.1% la proportion de plaques inutilisables. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard. Pour $n = 2000$, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N «nombre de plaques inutilisables parmi les 2000» ? (on utilisera une loi de probabilité adaptée) ; quelle est la probabilité pour que N soit inférieure ou égal à 3 ? Quelle est la probabilité pour que N soit strictement inférieure à 3 ?

Correction ▼ [006016]

Exercice 4

Des machines fabriquent des crêpes destinées à être empilées dans des paquets de 10. Chaque crêpe a une épaisseur qui suit une loi normale de paramètres $m = 0.6$mm et $\sigma = 0.1$. Soit X la variable aléatoire «épaisseur du paquet en mm». Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 6.3mm et 6.6mm.

Correction ▼ [006017]

Exercice 5

Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants :
- 56% ont un taux inférieur à 165 cg ;
- 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg ;
- 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10 000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ?

Correction ▼ [006018]

Exercice 6

Pour chacune des variables aléatoires qui sont décrites ci-dessous, indiquez quelle est la loi exacte avec les paramètres éventuels (espérance, variance) et indiquez éventuellement une loi approchée.

1. Nombre annuel d'accidents à un carrefour donné où la probabilité d'accident par jour est estimée à $\frac{4}{365}$.
2. Nombre de garçons dans une famille de 6 enfants ; nombre de filles par jour dans une maternité où naissent en moyenne 30 enfants par jour.
3. Dans un groupe de 21 personnes dont 7 femmes, le nombre de femmes dans une délégation de 6 personnes tirées au hasard.

Correction ▼ [006019]

Correction de l'exercice 1 ▲

La probabilité qu'une bille soit rejetée est, en notant D la variable aléatoire «diamètre», $p = 1 - P[7.97 \leq D \leq 8.03]$. Or $P[7.97 \leq D \leq 8.03] = P[-\frac{0.03}{0.02} \leq \frac{D-8}{0.02} \leq \frac{0.03}{0.02}] = F(1.5) - F(-1.5) = 0.8664$. La proportion de billes rejetées est donc $p = 13.4\%$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. La probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm est : $P[X \leq 0.36] = P[\frac{X-0.3}{0.1} \leq 0.6] = 0.726$, soit 72.6%.

   La probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm est $P[0.25 \leq X \leq 0.35] = 2F(0.5) - 1 = 0.383$, soit 38.3%.
2. Pour $n = 20$, la loi de $Z = \sum X_i$ est une loi normale de paramètres : d'espérance $E(Z) = 20m = 6$ et de variance $\operatorname{Var} Z = 20\sigma = 0.2$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Pour $n = 2000$, la loi suivie par la variable aléatoire N «nombre de plaques inutilisables parmi les 2000» est une loi de Poisson de paramètre 2 : alors $P[N \leq 3] = 0.86$.
Remarquons qu'en faisant l'approximation par une loi normale et en employant le théorème central limite, on obtient : $P[N \leq 3] \simeq 0.76$, et avec correction de continuité on obtient $P[N \leq 3] \simeq 0.85$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Par des méthodes analogues on trouve que la probabilité pour que X soit compris entre 6.3mm et 6.6 mm est 14.3.

Correction de l'exercice 5 ▲

Si X est de moyenne m et d'écart-type σ alors $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi centrée réduite. Donc si $P[X \leq 165]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{165-m}{\sigma}] = 0,56$. Or on peut lire dans la table de Gauss $F(0.15) = 0.5596$.
De même, si $P[X \geq 180]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{180-m}{\sigma}] = 0.1$. Donc $P[\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{180-m}{\sigma}] = 0.9$ et l'on peut lire de même $F(1.28) = 0.8997$.
Pour trouver m et σ il suffit de résoudre le système d'équations : $\frac{165-m}{\sigma} = 0.15$ et $\frac{180-m}{\sigma} = 1.28$ d'où $\sigma \simeq 13.27$, $m \simeq 163$ cg. Alors, $P[X \geq 182] = P[\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{182-m}{\sigma}] = 1 - F(1.43) = 0.0764$.
Sur 10 000 personnes on estime le nombre de personnes à soigner de l'ordre de 764 personnes ; en fait la théorie de l'estimation donnera une fourchette.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Loi binomiale $B(365; \frac{4}{365})$, approchée par la loi de Poisson de paramètre 4, d'espérance et variance 4.
2. Loi binomiale $B(6; \frac{1}{2})$, d'espérance 3 et variance $\frac{3}{2}$.
3. Loi hypergéométrique.