# Chapitre 21

# Développements limités

### Objectifs

- Établir la formule de *Taylor* avec différentes expressions du reste.
- Définir la notion de développement limité d'une fonction au voisinage d'un point (notion de partie régulière et de reste).
- Établir les développements limités en 0 des fonctions usuelles ainsi que les règles de calculs sur les développements limités (somme, produit, composition).
- Étudier des applications des développements limités.

### Sommaire



## I) Formules de Taylor

### 1) Avec reste intégrale

**THÉORÈME 21.1**

*Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $I$, alors on a la formule suivante :*

$$\forall\, a, x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

**Preuve**: Celle-ci est laissée en exercice, il s'agit d'une simple récurrence sur $n$. □

**DÉFINITION 21.1**

*Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction, et soit $a \in I$, si $f$ possède des dérivées jusqu'à l'ordre $n$ en $a$, alors on appelle polynôme de Taylor de $f$ en $a$ à l'ordre $n$, la fonction polynomiale notée $T_{n,f,a}$ et définie par :*

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

*La différence $f(x) - T_{n,f,a}(x)$ est notée $R_{n,f,a}(x)$ est appelée **reste** de $f$ en $a$ à l'ordre $n$.*

**Remarque**: D'après le théorème précédent, si $f$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I$, alors

$$R_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

**THÉORÈME 21.2**

*Si $f$ est $n+1$ fois dérivable en $a$, alors : $\left[T_{n+1,f,a}(x)\right]' = T_{n,f',a}(x)$.*

**Preuve**: Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

**Exemples**:
- $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt$.
- $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$.
- $f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(t)\,dt$.
- $f(x) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\,dt$.

## 2) Majoration du reste

**THÉORÈME 21.3 (inégalité de TAYLOR-LAGRANGE[1])**

*Si $f : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I$ et si $|f^{(n+1)}|$ est majorée par un réel $M$, alors :*

$$\forall\, x, a \in I, \left|f(x) - T_{n,f,a}(x)\right| \leqslant M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Preuve**: Cette inégalité découle de la forme avec reste intégrale. □

**Exemples**:
- Soit $z \in \mathbb{C}$, pour $t \in [0;1]$ on pose $f(t) = e^{tz}$, cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0;1]$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n+1)}(t) = z^{n+1}e^{tz}$, en posant $z = a + ib$, on a $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant |z|^{n+1}e^{ta} \leqslant |z|^{n+1}M$ où $M$ désigne le maximum de la fonction $e^{ta}$ sur $[0;1]$, appliquons l'inégalité de *Taylor-Lagrange* entre 0 et 1 à l'ordre $n$ :

  $$\left|e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant M \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

  On voit que le majorant tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, par conséquent :

  $$\forall\, z \in \mathbb{C}, e^z = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

1. *LAGRANGE Joseph Louis* (1736 – 1813) : mathématicien qui fut un précurseur dans de nombreux domaines scientifiques.

– Avec la fonction sin : toutes ses dérivées sont majorées par 1, on a donc pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, en appliquant l'inégalité de *Taylor-Lagrange* entre 0 et $x$ à l'ordre $2n+1$ :
$$\left|\sin(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$
Là encore, on voit que le majorant tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ on en déduit donc que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

– Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I$. Que peut-on dire de $f$ lorsque $f^{(n+1)} = 0$ ?

### 3) Formule de Taylor-Young

**THÉORÈME 21.4**

*Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur l'intervalle $I$, on a : $R_{n,f,a}(x) = \underset{a}{o}((x-a)^n)$, c'est à dire : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$.*

**Preuve**: Par récurrence sur $n$ : pour $n = 0$ il s'agit de la définition de continuité en $a$. Supposons le théorème démontré au rang $n$, et supposons $f$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I$, supposons $a < x$ et pour $t \in [a;x]$ posons $h(t) = f(t) - T_{n+1,f,a}(t)$, on a $h$ dérivable et $h'(t) = f'(t) - T_{n,f',a}(t)$. On se donne $\varepsilon > 0$, l'hypothèse de récurrence appliquée à $f'$ permet d'affirmer qu'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $t \in V \cap I \implies |h'(t)| \leqslant \varepsilon(t-a)^n = g'(t)$ avec $g(t) = \varepsilon\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}$, l'inégalité des accroissements finis généralisée nous donne alors pour $x \in V$ : $|h(x) - h(a)| \leqslant g(x) - g(a)$, c'est à dire $x \in V \cap I \implies |f(x) - T_{n+1,f,a}(x)| \leqslant \varepsilon\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \leqslant \varepsilon(x-a)^{n+1}$, ce qu'il fallait démontrer. Le raisonnement est similaire pour $x < a$. □

**Remarques**:

– Sous les mêmes hypothèses, on peut écrire qu'il existe une fonction $\varepsilon$ telle que :
$$f(x) = T_{n,f,a}(x) + (x-a)^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$$

– Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$ alors la formule de *Taylor-Young* s'applique en tout point $a$ de $I$ et à n'importe quel ordre, c'est le cas des fonctions usuelles (avec $a = 0$) :
  - $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{0}{o}(x^n)$.
  - $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{0}{o}(x^n)$.
  - $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$.
  - $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{0}{o}\left(x^{2n}\right)$.

## II) Développements limités

### 1) Définition

**DÉFINITION 21.2**

*Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction et soit $a \in I$ ou une borne réelle de $I$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ en $a$ (ou un $\mathrm{dl}_n(a)$) lorsqu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que :*
$$f(x) = P(x-a) + \underset{a}{o}((x-a)^n).$$
*Si c'est le cas, alors le polynôme $P(x-a)$ est appelé **partie régulière** du $\mathrm{dl}_n(a)$.*

**Remarques:**

- Le polynôme $P(x-a)$ s'écrit $P(x-a)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$, dans la pratique on **ne développe jamais** les termes $(x-a)^k$.
- Le reste du $\mathrm{dl}_n(a)$ , c'est à dire $\underset{a}{o}((x-a)^n)$ peut aussi se mettre sous la forme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ où $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.
- Si $f$ est une fonction polynomiale : $f(x)=\sum_k \alpha_k x^k$, alors d'après la formule de *Taylor* des polynômes, on peut écrire $f(x)=\sum_k \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, en séparant les termes d'indice $k\geqslant n+1$, on obtient : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\underset{a}{o}((x-a)^n)$. D'après la définition, c'est un $\mathrm{dl}_n(a)$ de $f$.

**THÉORÈME 21.5 (unicité du dl)**
*Si $f$ admet un $\mathrm{dl}_n(a)$ alors celui-ci est unique.*

**Preuve:** Si $f(x)=P(x-a)+\underset{a}{o}((x-a)^n)=Q(x-a)+\underset{a}{o}((x-a)^n)$, avec $P,Q\in\mathbb{C}_n[X]$, alors en posant $R(X)=P(X)-Q(X)$, on a que $R(x-a)=\underset{a}{o}((x-a)^n)$, ou encore que $R(u)=\underset{0}{o}(u^n)$, or $\deg(R)\leqslant n$, ce qui entraîne que $R=0$, *i.e.* $P=Q$. □

**Changement de variable** : on peut toujours se ramener en $a=0$ :

- On pose $u=x-a$, on a alors $f(x)=f(u+a)=g(u)$, d'où :

$$\begin{aligned} f \text{ admet un } \mathrm{dl}_n(a) &\iff \exists\, P\in\mathbb{C}_n[X], f(x)=P(x-a)+\underset{a}{o}((x-a)^n)\\ &\iff \exists\, P\in\mathbb{C}_n[X], g(u)=P(u)+\underset{0}{o}(u^n)\\ &\iff g \text{ admet un } \mathrm{dl}_n(0).\end{aligned}$$

- Si $f$ est définie au voisinage de $\pm\infty$ : on pose $u=1/x$, on a alors $f(x)=f(1/u)=g(u)$. Si $g$ admet un $\mathrm{dl}_n(0)$ ; alors il existe un polynôme $P\in\mathbb{C}_n[X]$ tel que $g(u)=P(u)+\underset{0}{o}(u^n)$, ce qui donne $f(x)=P(1/x)+\underset{\pm\infty}{o}(1/x^n)$, on dit alors que $f$ admet un développement asymptotique en $1/x$ d'ordre $n$ en $\pm\infty$, on remarquera que la partie régulière n'est pas un polynôme en $x$ mais en $1/x$.

## 2) Existence et propriétés

**THÉORÈME 21.6**
*Soit $f:I\to\mathbb{C}$ et soit $a\in I$, si $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur l'intervalle $I$, alors $f$ admet un $\mathrm{dl}_n(a)$ et sa partie régulière est $T_{n,f,a}(x)$, c'est à dire son polynôme de Taylor en $a$ à l'ordre $n$.*

**Preuve:** Celle-ci découle directement de la formule de *Taylor-Young*. □

*Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$, alors $f$ admet un dl en tout point de $I$ et à n'importe quel ordre.*

**Application aux fonctions usuelles en** $0$ :

- $\exp(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\underset{0}{o}(x^n)$.
- $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\underset{0}{o}(x^n)$.
- $\sin(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\underset{0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$ (il s'agit du $\mathrm{dl}_{2n+2}(0)$).
- $\cos(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\underset{0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$ (il s'agit d'un $\mathrm{dl}_{2n+1}(0)$).
- $\mathrm{sh}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\underset{0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$ (il s'agit du $\mathrm{dl}_{2n+2}(0)$).

- $\text{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$ (il s'agit d'un $\text{dl}_{2n+1}(0)$).
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \underset{0}{o}(x^n)$, où $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, formule des coefficients du binôme généralisée.

**THÉORÈME 21.7**

*$f$ admet un $\text{dl}_0(a)$ ssi $f$ admet une limite finie en $a$.*
*$f$ admet un $\text{dl}_1(a)$ ssi $f$ admet un prolongement continue dérivable en $a$.*
*Si $f$ admet un $\text{dl}_n(0)$, alors la partie régulière a la même parité que $f$.*

**Preuve**: La preuve des trois points est simple et laissée en exercice. Montrons cependant qu'une fonction peut avoir un $\text{dl}_2(a)$ sans être deux fois dérivable en $a$ : $f(x) = \exp(-1/x^2)\sin(\exp(1/x^2))$, on a pour tout entier $n$, $f(x) = \underset{0}{o}(x^n)$, donc $f$ admet des dl en 0 à n'importe quel ordre et la partie régulière est nulle, en particulier $f$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et ce prolongement est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = 2/x^3 f(x) - 2/x^3 \cos(\exp(1/x^2))$, or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^4}\cos(\exp(1/x^2))$ n'a pas de limite en 0 (considérer par exemple la suite $u_n = \frac{1}{\sqrt{\ln(n\pi)}}$), on en déduit que $\frac{f'(x)}{x}$ n'a pas de limite en 0 et donc que $f$ n'est pas deux fois dérivable en 0. □

**THÉORÈME 21.8 (règles de calculs)**

*Si $f, g$ admettent un $\text{dl}_n(0)$, $f(x) = P(x) + \underset{0}{o}(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + \underset{0}{o}(x^n)$, avec $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$.*
- *$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda f + g$ admet un $\text{dl}_n(0)$ dont la partie régulière en $\lambda P(x) + Q(x)$.*
- *$f(x) \times g(x)$ admet un $\text{dl}_n(0)$ dont la partie régulière est $[P(x)Q(x)]_n$ (polynôme $P(x) \times Q(x)$ tronqué au degré $n$).*
- *Si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $f(g(x))$ admet un $\text{dl}_n(0)$ dont la partie régulière est $[P(Q(x))]_n$.*
- *Si $f'$ admet un $\text{dl}_n(0)$ dont la partie régulière est $P(x)$, alors $f$ admet un $\text{dl}_{n+1}(0)$ dont la partie régulière est : $f(0) + \int_0^x P(t)\,dt$.*

**Preuve**: Donnons un exemple pour la composition avec $n = 2$ : $f(x) = a + bx + cx^2 + x^2u(x)$ et $g(x) = \alpha x + \beta x^2 + x^2 v(x)$, avec $u$ et $v$ de limite nulle en 0, on en déduit en composant : $f(g(x)) = a + b(\alpha x + \beta x^2 + x^2 v(x)) + c(\alpha x + \beta x^2 + v(x))^2 + (\alpha x + \beta x^2 + x^2 v(x))^2 u(g(x))$, ce qui donne après avoir développer et regrouper les puissances de $x$ strictement supérieures à 2 : $f(g(x)) = a + b\alpha x + [b\beta + c\alpha^2]x^2 + \underset{0}{o}\left(x^2\right)$, on peut vérifier que la partie régulière est la troncature au degré 2 de $P(Q(x))$.

Pour le dernier point : on a $f'(t) = P(t) + t^n u(t)$ avec $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$. On se donne $\varepsilon > 0$, au voisinage de 0 on aura $|f'(t) - P(t)| \leqslant |t|^n \varepsilon$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis généralisée, on obtient pour $x$ au voisinage de 0, $|f(x) - f(0) - \int_0^x P(t)\,dt| \leqslant \varepsilon |x|^{n+1}$, ce qui prouve le résultat. □

## 3) Développements usuels (compléments)

Pour $x \neq 1$, on a $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, on en déduit :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{0}{o}(x^n).$$

En substituant $-x$ à $x$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{0}{o}(x^n).$$

En intégrant ce dernier développement, on obtient :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \underset{0}{o}\left(x^{n+1}\right).$$

En substituant $x^2$ à $x$ dans l'avant dernier, on obtient :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \underset{0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \text{ c'est un } \mathrm{dl}_{2n+1}(0).$$

En intégrant ce dernier développement, on obtient :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} x^k + \underset{0}{o}(x^n).$$

Or $\binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{1\times 3\times \ldots \times (2k-1)}{k! 2^k} = (-1)^k \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$, on a finalement :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k + \underset{0}{o}(x^n).$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^{2k} + \underset{0}{o}\left(x^{2n+1}\right).$$

En intégrant, obtient :

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k(2k+1)} x^{2k+1} + \underset{0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

et :

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k(2k+1)} x^{2k+1} + \underset{0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

**Exemples**:

- Calculer un $\mathrm{dl}_3(0)$ de $\exp(\sin(x))$.
  On a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$ et $\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \underset{0}{o}\left(u^3\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$, on peut appliquer le théorème de composition, et composer les parties régulières jusqu'à l'ordre 3, ce qui donne :

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{0}{o}\left(x^3\right).$$

- Calculer un $\mathrm{dl}_4(0)$ de $(1+\sin(x))^x$.
  L'expression est égale à $\exp[x\ln(1+\sin(x))]$. Un $\mathrm{dl}_3(0)$ de $\sin(x)$ est $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$, et $\ln(1+u) = u - \frac{u}{2} + \frac{u^3}{3} + \underset{0}{o}\left(u^3\right)$, on obtient par composition, $\ln(1+\sin(x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$ et donc $x\ln(1+\sin(x)) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \underset{0}{o}\left(x^4\right)$. On a également $\exp(v) = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \underset{0}{o}\left(v^2\right)$, d'où par composition :

$$\exp[x\ln(1+\sin(x))] = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + 2\frac{x^4}{3} + \underset{0}{o}\left(x^4\right).$$

- Calculer un $\mathrm{dl}_5(0)$ de $\tan(x)$ :
  On a $\tan(x) = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)}$. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{0}{o}\left(x^5\right)$. D'autre part $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+u}$ avec $u = \cos(x) - 1$, comme $u \to 0$, on pourra donc composer, $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{0}{o}\left(x^5\right)$ et $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \underset{0}{o}\left(u^2\right)$, ce qui donne : $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + 5\frac{x^4}{24} + \underset{0}{o}\left(x^5\right)$. On effectue ensuite le produit avec le dl de $\sin(x)$, ce qui donne :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{0}{o}\left(x^5\right).$$

Autre méthode : on a $\tan(x) = 0 + \underset{0}{o}(1)$, d'où $1+\tan(x)^2 = 1+\underset{0}{o}(1)$, en intégrant, on obtient $\tan(x) = x + \underset{0}{o}(x)$. Puis on recommence : $1+\tan(x)^2 = 1+x^2+\underset{0}{o}\left(x^2\right)$ et donc $\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+\underset{0}{o}\left(x^3\right)$, mais alors $1+\tan(x)^2 = 1+x^2+\frac{2x^4}{3}+\underset{0}{o}\left(x^4\right)$, et donc $\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\underset{0}{o}\left(x^5\right)$... etc

# III) Applications

## 1) Recherche d'une limite

– Soit $f(x) = \frac{x^2-1-2x\ln(x)}{x(x-1)\ln(x)}$, calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
Il s'agit bien d'une forme indéterminée, on ramène le problème en 0 en posant $u = x-1$, ce qui donne $f(x) = \frac{u^2+2u-2(1-u)\ln(1+u)}{u(1+u)\ln(1+u)} \underset{0}{\sim} \frac{u^2+2u-2(1+u)\ln(1+u)}{u^2}$. On cherche alors un $dl_2(0)$ du numérateur, ce qui donne $\underset{0}{o}\left(u^2\right)$, on a donc $f(x) = f(1+u) \underset{0}{\sim} \underset{0}{o}(1)$ et donc la limite cherchée est nulle.
– Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(\frac{x}{1+x})+x-1$.
Il s'agit bien d'une forme indéterminée, on se ramène en 0 en posant $u = 1/x$, on a alors $f(x) = f(1/u) = \frac{-1}{u^2}\ln(1+u)+\frac{1}{u}-1$, ce qui donne $f(1/u) = \frac{-1}{2}+\underset{0}{o}(1)$, et donc la limite cherchée est $\frac{-1}{2}$.

## 2) Étude locale d'une fonction au voisinage d'un point

Si $f$ a un $dl_2(a)$, $f(x) = a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\underset{a}{o}\left((x-a)^2\right)$, alors on voit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a_0$, on peut donc prolonger $f$ par continuité en $a$, en posant $f(a) = a_0$ (si ce n'est pas déjà fait !). Le taux d'accroissement en $a$ s'écrit : $\frac{f(x)-a_0}{x-a} = a_1+\underset{a}{o}(1)$, donc ce prolongement est dérivable en $a$ et $f'(a) = a_1$. L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a$ est $y = a_1(x-a)+a_0$, et l'étude de la position courbe-tangente se fait en étudiant le signe de $f(x)-[a_0+a_1(x-a)] = (x-a)^2[a_2+\underset{a}{o}(1)]$, d'où la discussion :

– si $a_2 > 0$ : alors au voisinage de $a$ on a $[a_2+\underset{a}{o}(1)] > 0$ et donc $f(x) > a_0+a_1(x-a)$, *i.e.* la courbe est au-dessus de sa tangente **au voisinage** de $a$.
– si $a_2 < 0$ : c'est la situation inverse.
– si $a_2 = 0$ : on ne peut rien dire, il faut aller plus loin dans le développement limité. Dans la pratique on s'arrête au premier terme non nul de degré supérieur ou égal à 2.

**Exemple**: Soit $f(x) = \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$, effectuons une étude locale en $a = 1$ : on pose $u = x-1$ d'où $f(x) = f(1+u) = \frac{\ln(1+u)}{u}(1+u)\frac{1}{2[1+u/2]}$, le calcul donne $f(x) = f(1+u) = \frac{1}{2}-\frac{u^2}{12}+\underset{0}{o}\left(u^2\right)$. On en déduit que $f$ se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = \frac{1}{2}$, ce prolongement est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$, de plus, au voisinage de 1, la courbe est en-dessous de la tangente.

## 3) Étude locale au voisinage de l'infini

Si $f$ est définie au voisinage de $\infty$ et admet une limite infinie, alors on peut étudier la branche infinie de $f$ de la manière suivante : on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, on se ramène en 0 en posant $u = 1/x$, ce qui donne $g(x) = g(1/u) = uf(1/u)$, et on cherche un $dl_2(0)$ de cette expression : $uf(1/u) = a_0+a_1u+a_2u^2+\underset{0}{o}\left(u^2\right)$, ce qui donne en revenant à $x$, $f(x) = a_0x+a_1+a_2\frac{1}{x}+\underset{\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$, d'où $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-[a_0x+a_1] = 0$, donc la droite d'équation $y = a_0x+a_1$ est asymptote à $C_f$ au voisinage de $\infty$. Pour la position courbe-asymptote, on étudie la différence : $f(x)-[a_0x+a_1] = \frac{1}{x}[a_2+\underset{\infty}{o}(1)]$, l'étude du signe se fait comme dans le paragraphe précédent si $a_2 \neq 0$. Lorsque $a_2 = 0$ il faut aller plus loin dans le développement pour avoir le signe.

**Exemple**: $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x-3}}$ au voisinage de $+\infty$.

On voit que $f$ est définie au voisinage de $+\infty$ et que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$, il y a donc une branche infinie de direction asymptotique $y = x$. Posons $u = 1/x$, on a alors $f(x)/x = uf(1/u) = 1+u+2u^2+\underset{0}{o}\left(u^2\right)$, d'où

$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$, et au voisinage de $+\infty$ la courbe de $f$ est au-dessus.

### 4) Recherche d'un équivalent

**THÉORÈME 21.9**

*Si $f$ admet un $\mathrm{dl}_n(a)$, alors $f(x)$ est équivalente en $a$ au terme **non nul de plus bas degré** de la partie régulière, s'il existe.*

**Preuve**: Soit $a_p(x-a)^p$ le premier terme non nul, on a alors $f(x) = a_p(x-a)^p + \underset{a}{o}((x-a)^p) = (x-a)^p[1+\underset{a}{o}(1)]$, ce qui prouve l'équivalence annoncée. □

**Remarques**:
- En se ramenant en 0, on peut également trouver un équivalent d'une fonction en $\pm\infty$.
- Avec ce théorème, on retrouve tous les équivalents dits « classiques ».

**Exercice**: Équivalent en 0 de la fonction $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x}{3-2x^2}$.

**Réponse**: On a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \underset{0}{o}(x^5)$, en intégrant on obtient $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \underset{0}{o}(x^5)$, en effectuant le produit, il vient que : $\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{8x^5}{15} + \underset{0}{o}(x^5)$.

D'un autre côté, on a $\frac{3x}{3-2x^2} = x\frac{1}{1-2x^2/3} = x[1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^4}{9} + \underset{0}{o}(x^4)] = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{9} + \underset{0}{o}(x^5)$. Finalement, on a $f(x) = \frac{4x^5}{45} + \underset{0}{o}(x^5)$, et donc :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{4x^5}{45}.$$

## IV) Étude locale en un point d'une courbe paramétrée

### 1) Tangente en un point

Soit $C = (I, f, \Gamma)$ une courbe de classe $\mathscr{C}^n$ ($n \geqslant 1$), on suppose que $\forall\ t \in I, \exists\ k \in [\![1..n]\!]$, tel que $f^{(k)}(t) \neq 0$.

**DÉFINITION 21.3**

*Soit $t \in I$, on appelle **premier entier caractéristique au point** $M(t)$ le plus petit entier $p \in [\![1..n]\!]$, tel que $f^{(p)}(t) \neq 0$. On remarquera que $M(t)$ est régulier $\iff p = 1$.*

Soit $t_0 \in I$, effectuons un développement limité de $f(t)$ en $t_0$ à l'ordre $p$ :

$$f(t_0+h) - f(t_0) = \frac{h^p}{p!}f^{(p)}(t_0) + h^p\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

On en déduit que $\frac{p!}{h^p}\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = f^{(p)}(t_0) + \underset{0}{o}(1)$, or le vecteur $\frac{p!}{h^p}\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$ est un vecteur directeur de la droite $(M(t_0)M(t_0+h))$, donc lorsque $h$ tend vers 0, cette droite « tend » vers la droite qui passe par $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $f^{(p)}(t_0)$.

**DÉFINITION 21.4**

*La droite qui passe par $M(t_0)$ et dirigée par $f^{(p)}(t_0)$ est appelée **tangente à la courbe au point** $M(t_0)$.*

*En un point régulier la tangente est portée par le vecteur vitesse, car $p = 1$.*

## 2) Classification des points

Soit $C = (I, f, \Gamma)$ une courbe de classe $\mathscr{C}^n$ $(n \geqslant 2)$, on suppose que $\forall\ t \in I, \exists\ k \in [\![p+1..n]\!]$ tel que $f^{(k)}(t_0)$ soit non colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$, *i.e.* $\det_{\mathfrak{B}}(f^{(p)}(t_0), f^{(k)}(t_0)) \neq 0$.

**DÉFINITION 21.5**
*On appelle* ***deuxième entier caractéristique au point*** *$M(t)$ le plus petit des entiers $k \in [\![p+1..n]\!]$ tel que $\det_{\mathfrak{B}}(f^{(p)}(t_0), f^{(k)}(t_0)) \neq 0$, cet entier est noté $q$. On remarquera que $M(t)$ est birégulier $\iff p = 1$ et $q = 2$.*

Le développement de *Taylor* de $f$ en $t_0$ à l'ordre $q$ donne :

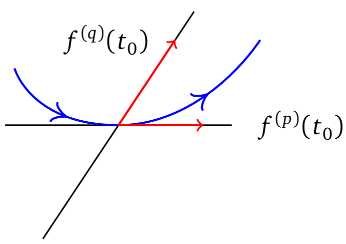
$$f(t_0+h) - f(t_0) = \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + \ldots + \frac{h^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + \underset{0}{o}(h^q).$$

Tous les vecteurs figurant dans les points de suspension sont colinéaires à $f^{(p)}(t_0)$, d'autre part le vecteur $\underset{0}{o}(h^q)$ est combinaison linéaire des vecteurs $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$, on peut donc écrire :

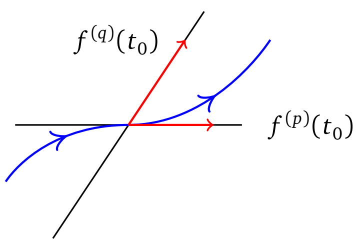
$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = f(t_0+h) - f(t_0) = \frac{h^p}{p!}[1 + \underset{0}{o}(1)] f^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!}[1 + \underset{0}{o}(1)] f^{(q)}(t_0).$$

Posons $V_1 = f^{(p)}(t_0)$ et $V_2 = f^{(q)}(t_0)$, lorsque $h$ est voisin de 0, la coordonnée de $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$ sur $V_1$ est du signe de $h^p$, et celle sur $V_2$ est du signe de $h^q$. Ce qui permet de faire la classification suivante :

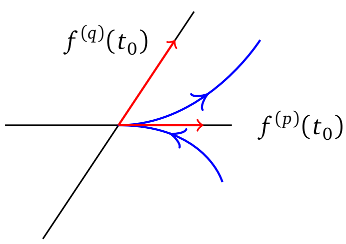
| | $p$ impair | $p$ pair |
|---|---|---|
| $q$ pair | point ordinaire | rebroussement de 2ième espèce |
| $q$ impair | point d'inflexion | rebroussement de 1ière espèce |



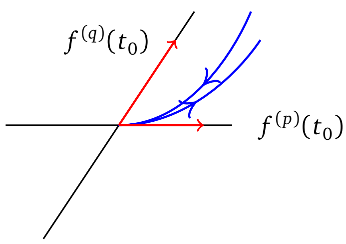

Point ordinaire




Point d'inflexion




Rebroussement 1ère espèce




Rebroussement 2ème espèce

*La tangente est portée par le vecteur $f^{(p)}(t_0)$ et un point birégulier est un point ordinaire.*

# V) Exercices

**★Exercice 21.1**
Calculer les développements limités suivants en 0, à l'ordre indiqué :

*a)* $\dfrac{\tan(x)}{2+\cos(x)}$ (5) *b)* $\dfrac{\exp(x)}{\sqrt{1+2x}}$ (3) *c)* $\exp(\mathrm{ch}(x))$ (4) *d)* $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^n$ (4) *e)* $(1+\sin(x))^{1/x}$ (2).

**★Exercice 21.2**
Calculer les développements limités suivants :

a) $\mathrm{dl}_3(\pi/4)$ de $\tan(x)$.
b) $\mathrm{dl}_2(\pi/4)$ de $\arctan(x)$.
c) $\mathrm{dl}_3(1)$ de $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.
d) $\mathrm{dl}_3(\pi/4)$ de $\sqrt{\tan(x)}$.
e) $\mathrm{dl}_2(\pi/3)$ de $\sin(\pi\cos(x))$.

**★Exercice 21.3**
Calculer les limites suivantes :

a) $x\tan(x) - \dfrac{\pi}{2\cos(x)}$ en $\pi/2$.
b) $x^2\left(e^{1/x} - e^{1/(1+x)}\right)$ en $\infty$.
c) $\dfrac{2}{\sin(x)^2} - \dfrac{1}{1-\cos(x)}$ en 0.
d) $\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\tan(\frac{\pi x}{2a})}$ en $a$.
e) $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+ax^2+1}$ en $+\infty$.

**★Exercice 21.4**

a) Étude locale au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$.
b) Étude locale au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}\arctan(x)$.
c) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \ln(\dfrac{1+e^{1/x}}{2}) - \dfrac{4x+1}{8x^2}$.
d) Déterminer un équivalent en 1 de la fonction $f(x) = \arccos(x)$.

**★Exercice 21.5**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, soit $f : I \to J$ une bijection de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$ ($n \geqslant 1$) telle que $f(0) = 0$ et telle que $f'$ ne s'annule pas.

a) Montrer que $f^{-1}$ admet un $\mathrm{dl}_n(0)$.
b) Montrer qu'à partir de la relation $f^{-1}\circ f(x) = x$, et à partir du $\mathrm{dl}_n(0)$ de $f$, on peut obtenir le $\mathrm{dl}_n(0)$ de $f^{-1}$.
c) Exemple : montrer que la fonction $f(x) = e^x - x^2 - 1$ induit une bijection au voisinage de 0, et calculer un $\mathrm{dl}_4(0)$ de la réciproque.

**★Exercice 21.6**
Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant 1$ et $\|f''\|_\infty \leqslant 1$. Montrer que $\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2}$. On pourra appliquer *Taylor-Lagrange* entre $x+h$ et $x$, puis entre $x-h$ et $x$.

**★Exercice 21.7**
Soient $f$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x-y)f(x+y) \leqslant f^2(x)$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f''(x) \leqslant f'^2(x)$.

**★Exercice 21.8**

Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$.

**★Exercice 21.9**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls, pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = e^{at}\sin(bt)$. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ un $\mathrm{dl}_n(0)$ de $f$. Plus généralement, pour $t_0 \in \mathbb{R}$, calculer un $\mathrm{dl}_n(t_0)$ de $f$.

**★Exercice 21.10**

a) Étudier la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t) & = & \cos(t) \\ y(t) & = & \sin(t)[1+\cos(t)] \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi]$.

b) Déterminer les points d'inflexions.

**★Exercice 21.11**

On considère la courbe paramétrée par $x(t) = 2\cos(2t)$ et $y(t) = \sin(3t)$.

a) Montrer que l'on peut réduire le domaine d'étude à $[0; \frac{\pi}{2}]$.

b) Déterminer la tangente au point de paramètre $\frac{\pi}{2}$.

c) Étudier et représenter cette courbe.