Enoncés : Barbara Tumpach

Structure d'espace vectoriel

Le but de cette feuille d'exercices est de donner des exemples d'espaces vectoriels, et d'apprendre à tester l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs.

Exercice 1

1. En utilisant les opérations d'addition $+$ et de multiplication $\cdot$ de deux nombres, définir, pour chaque ensemble E de la liste ci-dessous :
   – une addition $\oplus\ : E \times E \to E$;
   – une multiplication par un nombre réel $\odot\ : \mathbb{R} \times E \to E$.

   (a) $E = \mathbb{R}^n$;
   (b) $E =$ l'ensemble des trajectoires d'une particule ponctuelle dans l'espace $\mathbb{R}^3$;
   (c) $E =$ l'ensemble des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation $\mathscr{S}_1\ : x - 2y + 3z = 0$;
   (d) $E =$ l'ensemble des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ du système d'équations.
   $$\mathscr{S}_2\ : \begin{cases} 2x + 4y - 6z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} ;$$
   (e) $E =$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 3y = 0$;
   (f) $E =$ l'ensemble des fonctions $y(x)$ telles que
   $$y''(x)\sin x + x^3 y'(x) + y(x)\log x = 0,\ \forall x > 0;$$
   (g) $E =$ l'ensemble des fonctions $\Psi(t,x)$, à valeurs complexes, solutions de l'équation de Schrödinger :
   $$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + x^2\Psi(t,x)$$
   où $\hbar$ et m sont des constantes ;
   (h) $E =$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ;
   (i) $E =$ l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels ;
   (j) $E =$ l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 ;
   (k) $E =$ l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels divisibles par $(x-1)$;
   (l) $E =$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles ;
   (m) $E =$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles et d'intégrale nulle ;
   (n) $E =$ l'ensemble des fonctions dérivables sur l'intervalle $]0,1[$ à valeurs réelles ;
   (o) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui s'annulent en $0 \in \mathbb{R}$.
   (p) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$;

2. Pour les opérations d'addition $\oplus$ construites, montrer que E possède un élément neutre (terme à définir), et que chaque élément de E possède un inverse.

[002778]

Exercice 2

Qu'est -ce qui empêche de définir les mêmes opérations que dans l'exercice précédent sur les ensembles suivants ?

(a) $E =$ l'ensemble des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation $\mathscr{S}_3 : x - 2y + 3z = 3$;

(b) $E =$ l'ensemble des fonctions $y(x)$ telles que $y''(x)\sin x + x^3 y^2(x) + y(x)\log x = 0, \forall x > 0$;

(c) $E = \mathbb{N}$;

(d) $E = \mathbb{Z}$;

(e) $E = \mathbb{R}^+$;

(f) $E = \mathbb{Q}^n$;

(g) $E =$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs ;

(h) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui prennent la valeur 1 en 0 ;

(i) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$;

[002779]

Exercice 3

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1} = (1,1,0)$, $\vec{v_2} = (4,1,4)$ et $\vec{v_3} = (2,-1,4)$.

1. Montrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est-elle libre ?

[002780]

Exercice 4

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1} = (1,0,1)$, $\vec{v_2} = (0,2,2)$ et $\vec{v_3} = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1} = (1,0,0)$, $\vec{v_2} = (0,1,1)$ et $\vec{v_3} = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v_1} = (1,2,1,2,1)$, $\vec{v_2} = (2,1,2,1,2)$, $\vec{v_3} = (1,0,1,1,0)$ et $\vec{v_4} = (0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v_1} = (2,4,3,-1,-2,1)$, $\vec{v_2} = (1,1,2,1,3,1)$ et $\vec{v_3} = (0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v_1} = (2,1,3,-1,4,-1)$, $\vec{v_2} = (-1,1,-2,2,-3,3)$ et $\vec{v_3} = (1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

[002781]

Exercice 5

On suppose que $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \ldots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

[002782]
