Courbes en polaires

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1

Construire les courbes suivantes :

1. $r=\sqrt{\cos(2\theta)}$,
2. $r=\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$,
3. $r=ae^{b\theta}$, $(a,b)\in]0,+\infty[^2$,
4. $r=2\cos(2\theta)+1$,
5. $r=\tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$.

Correction ▼ [005530]

Exercice 2

Etude complète de la courbe d'équation polaire $r=\frac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta+1}$.

Correction ▼ [005531]

Exercice 3 La cardioïde

Soit la courbe d'équation polaire $r=a(1+\cos\theta)$, $a>0$.

1. Construire la courbe.
2. Longueur et développée.

Correction ▼ [005532]

Exercice 4

Construire la courbe d'équation cartésienne $x^2(x^2+y^2)-(y-x)^2=0$ après être passé en polaires .

Correction ▼ [005533]

Exercice 5

Développée de la spirale logarithmique d'équation polaire $r=ae^{\theta}$ $(a>0)$.

Correction ▼ [005534]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. **(Lemniscate de** BERNOULLI.) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r=\sqrt{\cos(2\theta)}$. **Domaine d'étude.** Notons D le domaine de définition de la fonction $r\ :\ \theta\mapsto\sqrt{\cos(2\theta)}$. • $\theta\in D\Leftrightarrow\theta+2\pi\in D$ et pour $\theta\in D$,

$$M(\theta+2\pi)=[r(\theta+2\pi),\theta+2\pi]=[r(\theta),\theta+2\pi]=[r(\theta),\theta]=M(\theta).$$

On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi,\pi]$. • $\theta\in D\Leftrightarrow-\theta\in D$ et pour $\theta\in D$,

$$M(-\theta)=[r(-\theta),-\theta]=[r(\theta),-\theta]=s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

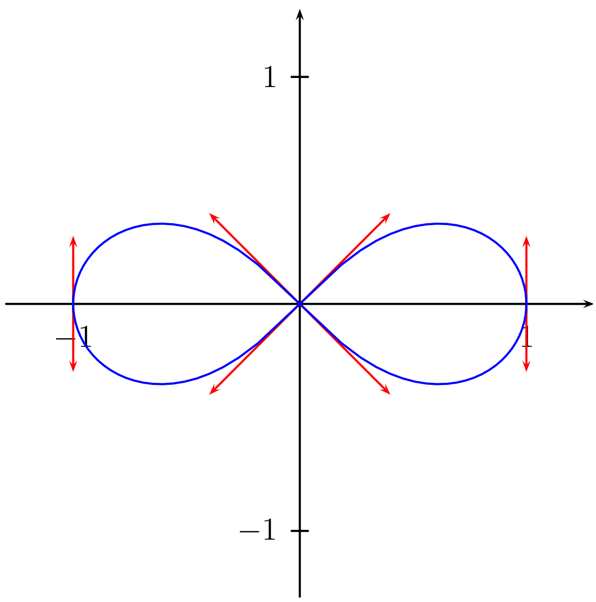
On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta\in[0,\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox). • $\theta\in D\Leftrightarrow\pi-\theta\in D$ et pour $\theta\in D$,

$$M(\pi-\theta)=[r(\pi-\theta),\pi-\theta]=[r(\theta),\pi-\theta]=s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis d'axe (Ox). Pour $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\theta\in D\Leftrightarrow\cos(2\theta)\geqslant0\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. On étudie donc la courbe sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. **Variations et signe de r.** La fonction r est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, strictement positive sur $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ et s'annule en $\frac{\pi}{4}$. **Etude en $\frac{\pi}{4}$.** $M\left(\frac{\pi}{4}\right)=O$ et donc la tangente en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est la droite passant par O et d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$ ou encore la droite d'équation $y=x$.
Etude en 0. $M(0)$ est le point de coordonnées cartésiennes $(1,0)$. Pour $\theta\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta)=-\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\overrightarrow{u}_\theta+\sqrt{\cos(2\theta)}\overrightarrow{v}_\theta\text{ et donc }\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(0)=\overrightarrow{v}_0=\overrightarrow{j}.$$

$M(0)$ est le point de coordonnées cartésiennes $(1,0)$ et la tangente en $M(0)$ est dirigée par $\overrightarrow{j}$



2. Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r=\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$. **Domaine d'étude.** • Pour $\theta\in\mathbb{R}$,

$$M(\theta+6\pi)=[r(\theta+6\pi),\theta+6\pi]=[r(\theta),\theta+6\pi]=[r(\theta),\theta]=M(\theta).$$

On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 6π comme $[-3\pi,3\pi]$. • Pour $\theta\in[-3\pi,3\pi]$,

$$M(-\theta)=[r(-\theta),-\theta]=[-r(\theta),-\theta]=[r(\theta),\pi-\theta]=s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

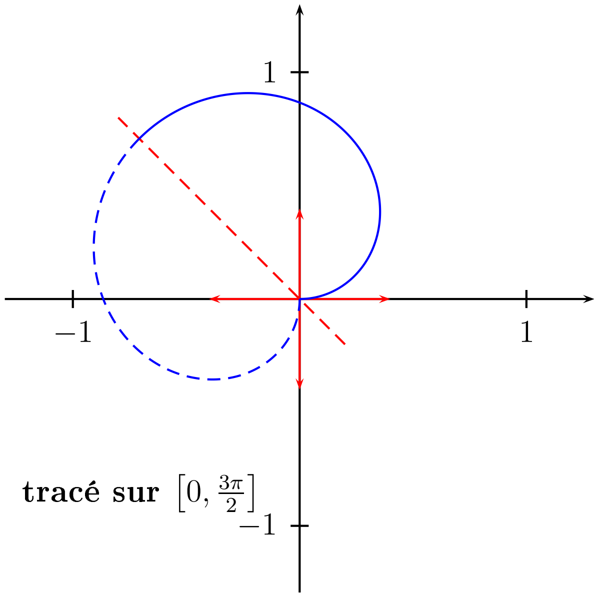
On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta\in[0,3\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy). • Pour $\theta\in[0,3\pi]$, $M(3\pi-\theta)=[r(3\pi-\theta),3\pi-\theta]=[-r(\theta),3\pi-\theta]=[r(\theta),-\theta]=s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) puis d'axe (Oy).

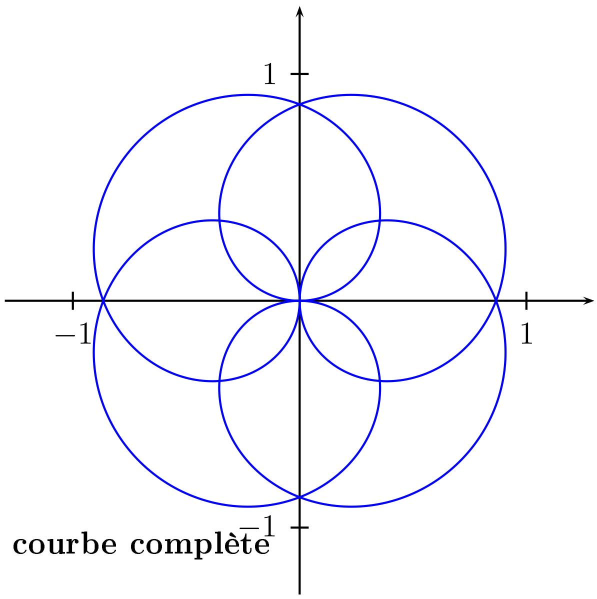
• Pour $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, $M\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \left[r\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right), \frac{3\pi}{2} - \theta\right] = \left[r(\theta), \frac{3\pi}{2} - \theta\right] = s_{y=-x}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axes la droite d'équation $y = -x$, puis d'axe (Ox) et enfin d'axe (Oy).

• **Remarque.** La fonction r admet 3π pour plus petite période strictement positive. Pourtant, on n'obtient pas la courbe complète quand θ décrit $[0, 3\pi]$ car 3π ne fournit pas un nombre entier de tours. Plus précisément,

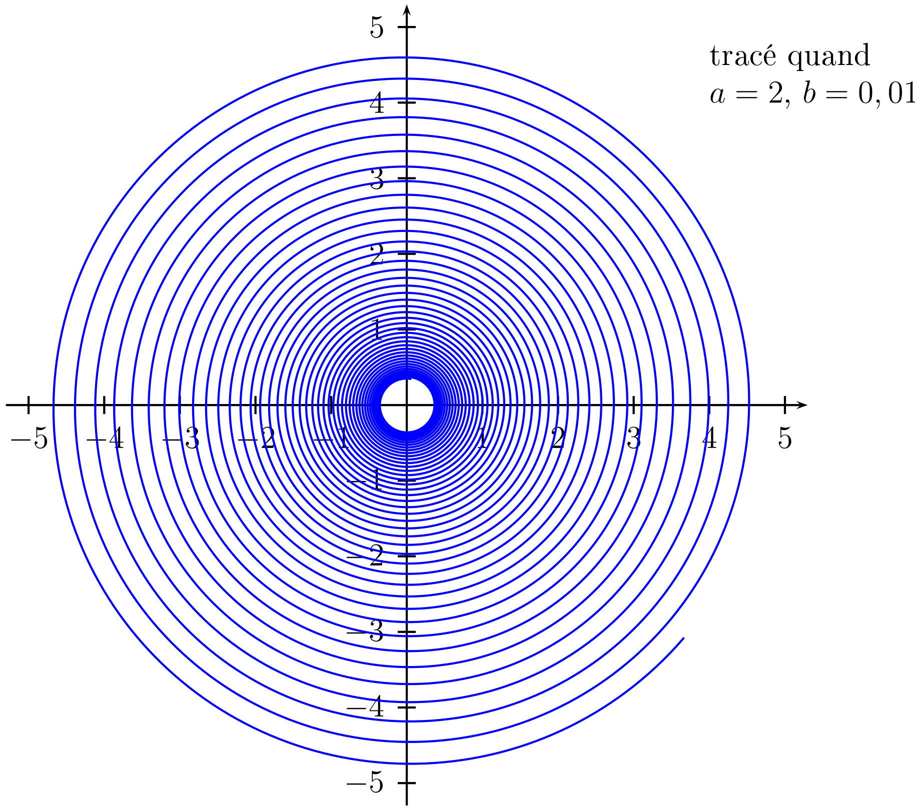
$$M(\theta + 3\pi) = [r(\theta + 3\pi), \theta + 3\pi] = [r(\theta), \theta + \pi] = s_O(M(\theta)).$$

Variations et signe de r. La fonction r est strictement positive sur $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right]$ et s'annule en 0. La fonction r est strictement croissante sur $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$. • $M(0)$ est le point O. La tangente en $M(0)$ est la droite passant par O d'angle polaire 0 c'est-à-dire l'axe (Ox).

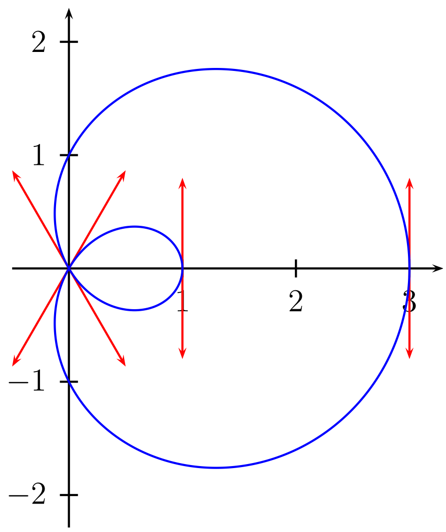




3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = ae^{b\theta}$. L'étude est très brève. La fonction $r : \theta \mapsto ae^{b\theta}$ est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Tout en tournant, on ne cesse de s'écarter de l'origine : la courbe est une spirale.



4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = 2\cos(\theta) + 1$.
   Domaine d'étude. • Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$. • Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, $M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox). **Variations et signe de r.** La fonction r est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. La fonction r est strictement positive sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ et s'annule en $\frac{2\pi}{3}$. Donc la fonction $\theta \mapsto OM(\theta) = |r(\theta)|$ est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$. • $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ est le point O. La tangente en $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ est la droite passant par O d'angle polaire $\frac{2\pi}{3}$ c'est-à-dire la droite d'équation $y = -\sqrt{3}x$. • Par symétrie par rapport à (Ox), les tangentes en $M(0)$ et $M(\pi)$ sont parrallèles à (Oy).



5. Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$. **Domaine d'étude.** Notons D le domaine de définition de la fonction $r\ :\ \theta \mapsto \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$. • $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 6\pi \in D$ et $M(\theta + 6\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 6π comme $[-3\pi, 3\pi]$. • $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$ et

$M(-\theta) = s_{(Oy)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, 3\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy). • $\theta \in D \Leftrightarrow 3\pi - \theta \in D$ et $M(3\pi - \theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) puis par réflexion d'axe (Oy). • $\theta \in D \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \theta \in D$ et

$$M\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \left[-r(\theta), \frac{3\pi}{2} - \theta\right] = \left[r(\theta), \frac{\pi}{2} - \theta\right] = s_{y=x}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axe la droite d'équation $y = x$, puis d'axe (Ox) et enfin d'axe (Oy). • Pour $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $r(\theta)$ existe si et seulement si $\theta \neq \frac{3\pi}{4}$. On étudie donc sur $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right[$.

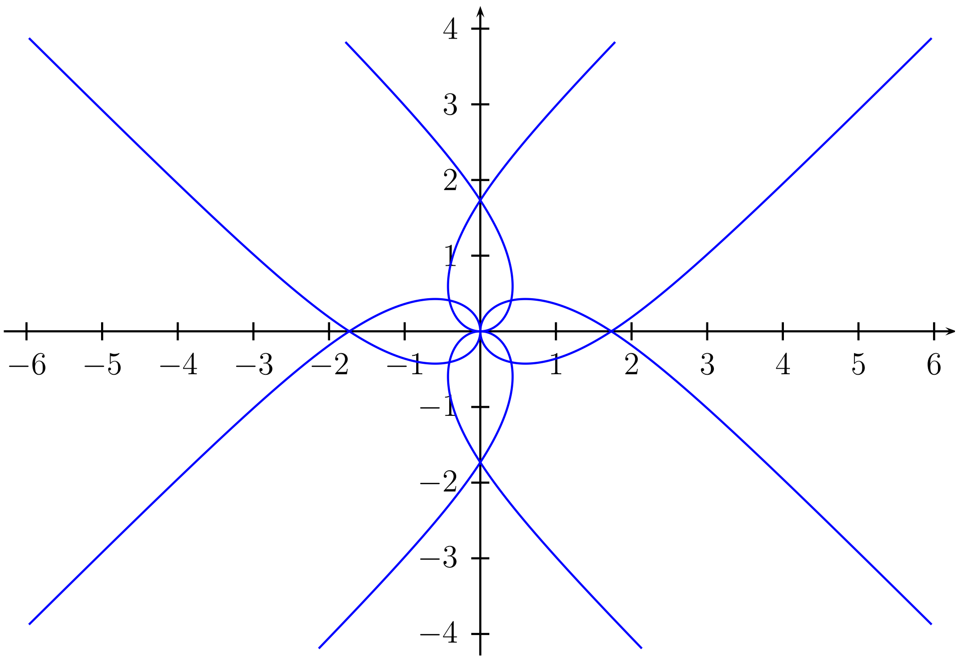
Variations et signe de r. La fonction r est strictement croissante sur $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right[$, strictement positive sur $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right[$ et s'annule en 0.

• La tangente en $M(0) = O$ est la droite passant par O et d'angle polaire 0 c'est-à-dire l'axe (Ox). • **Etude quand θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$.** Quand θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$ par valeurs inférieures, $r(\theta)$ tend vers $+\infty$. la courbe admet donc une direction asymptotique d'angle polaire $\frac{3\pi}{4}$ ou encore d'équation $y = -x$. Recherchons une éventuelle droite asymptote. Pour cela, étudions $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{3\pi}{4} \\ \theta < \frac{3\pi}{4}}} r(\theta) \sin\left(\theta - \dfrac{3\pi}{4}\right)$. Posons $h = \frac{3\pi}{4} - \theta$ ou encore $\theta = \frac{3\pi}{4} - h$.

$$r(\theta) \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2h}{3}\right) \sin(-h) = -\operatorname{cotan} h \sin h = -\cos h \to -1.$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote (D) quand θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$. De plus,

$$M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}_{\frac{3\pi}{4}} = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = -1 \Leftrightarrow y = -x + \sqrt{2}.$$



Correction de l'exercice 2 ▲

Domaine d'étude. Notons D le domaine de définition de la fonction $r : \theta \mapsto \frac{2\cos\theta + 1}{2\sin\theta + 1}$. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 2\pi \in D$ et $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$. Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, $2\sin\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$. On étudie donc la courbe sur $[-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$. **Signe de r.**

θ	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos\theta+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2\sin\theta+1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de r		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Variations de r. La fonction r est dérivable sur $[-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}$ et pour $\theta\in[-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}$

$$r'(\theta)=\frac{-2\sin\theta(2\sin\theta+1)-2\cos\theta(2\cos\theta+1)}{(2\sin\theta+1)^2}=\frac{-4-2\cos\theta-2\sin\theta}{(2\sin\theta+1)^2}=\frac{-4-2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(2\sin\theta+1)^2}<0.$$

La fonction r est strictement décroissante sur $\left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right[$, sur $\left]-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right[$ et sur $\left]-\frac{\pi}{6},\pi\right]$. **Etude quand θ tend vers $-\frac{5\pi}{6}$.** $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{5\pi}{6}\\ x<-\frac{5\pi}{6}}} r(\theta)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{5\pi}{6}\\ x>-\frac{5\pi}{6}}} r(\theta)=+\infty$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une direction asymptotique d'angle polaire $-\frac{5\pi}{6}$ ou encore d'équation $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$. Etudions maintenant l'existence d'une éventuelle droite asymptote et pour cela étudions $\lim_{\theta\to-\frac{5\pi}{6}} r(\theta)\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)$. On pose $h=\theta+\frac{5\pi}{6}$ ou encore $\theta=-\frac{5\pi}{6}+h$ de sorte que θ tend vers $-\frac{5\pi}{6}$ si et seulement si h tend vers 0. Quand h tend vers 0

$$r(\theta)\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}+h\right)+1}{2\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+h\right)+1}\sin h=\frac{(1-\sqrt{3}\cos h)+\sin h}{-\sqrt{3}\sin h+(1-\cos h)}\sin h\sim\frac{1-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}h}\times h=1-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote (D_1) quand θ tend vers $-\frac{5\pi}{6}$. De plus

$$M(x,y)\in(D_1)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}_{-\frac{5\pi}{6}}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Etude quand θ tend vers $-\frac{\pi}{6}$. $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{6}\\ x<-\frac{\pi}{6}}} r(\theta)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{6}\\ x>-\frac{\pi}{6}}} r(\theta)=+\infty$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une direction asymptotique d'angle polaire $-\frac{\pi}{6}$ ou encore d'équation $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$. On pose ensuite $h=\theta+\frac{\pi}{6}$. Quand h tend vers 0

$$r(\theta)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\cos\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)+1}{2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)+1}\sin h=\frac{(1+\sqrt{3}\cos h)+\sin h}{\sqrt{3}\sin h+(1-\cos h)}\sin h\sim\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}h}\times h=1+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote (D_2) quand θ tend vers $-\frac{\pi}{6}$. De plus

$$M(x,y)\in(D_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}_{-\frac{\pi}{6}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Tableau de variation de r.

θ	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$r'(\theta)$		$-$	$\|\|$		$-$		$\|\|$		$-$		
r	-1	$\searrow$	$-\infty\ \|\|\ +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty\ \|\|\ +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

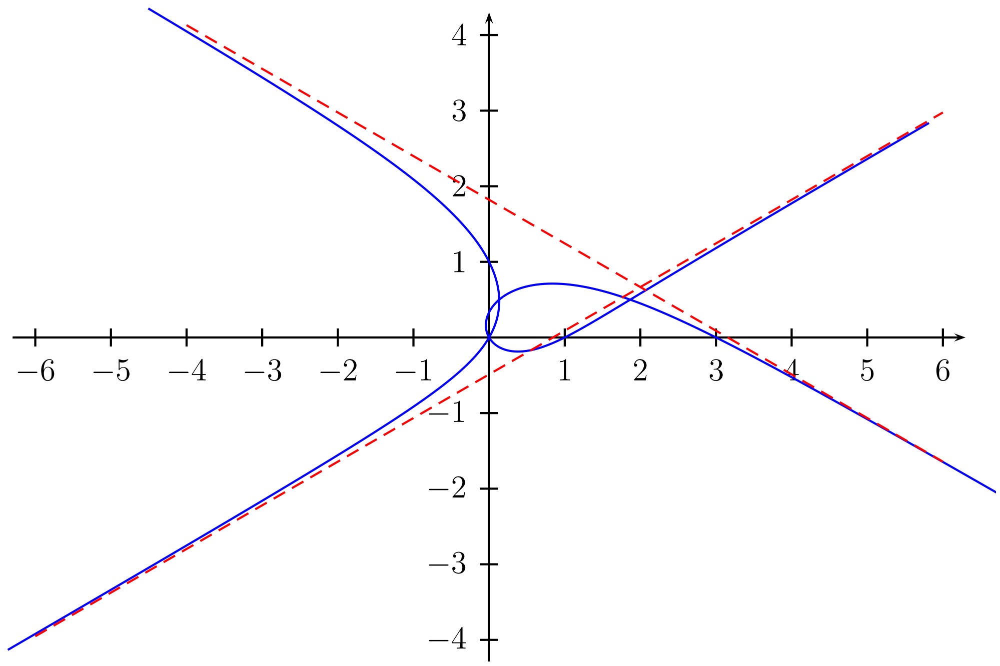
Recherche des points multiples. Soit $(\theta_1,\theta_2)\in\left([-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}\right)^2$ tel que $\theta_1<\theta_2$. On suppose de plus que $\theta_1\notin\left\{\pm\frac{2\pi}{3}\right\}$ et $\theta_1\notin\left\{\pm\frac{2\pi}{3}\right\}$ de sorte que $M(\theta_1)\neq O$ et $M(\theta_2)\neq O$.

$$\begin{aligned}M(\theta_1)=M(\theta_2)&\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z}/\ \theta_2=\theta_1+2k\pi\text{ et }r(\theta_2)=r(\theta_1))\text{ ou }(\exists k\in\mathbb{Z}/\ \theta_2=\theta_1+\pi+2k\pi\text{ et }r(\theta_2)=-r(\theta_1))\\&\Leftrightarrow\theta_1\in[-\pi,0],\ \theta_2=\theta_1+\pi\text{ et }r(\theta_2)=-r(\theta_1)\\&\Leftrightarrow\theta_1\in[-\pi,0],\ \theta_2=\theta_1+\pi\text{ et }\frac{-2\cos(\theta_1)+1}{-2\sin(\theta_1)+1}=-\frac{2\cos(\theta_1)+1}{2\sin(\theta_1)+1}.\end{aligned}$$

Maintenant, pour $\theta \in [-\pi, 0] \setminus \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right\}$

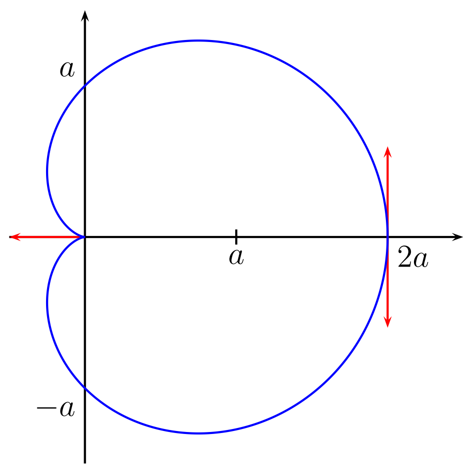
$$\begin{aligned}\frac{-2\cos(\theta)+1}{-2\sin(\theta)+1} = -\frac{2\cos(\theta)+1}{2\sin(\theta)+1} &\Leftrightarrow -4\cos(\theta)\sin(\theta)+1 = 4\cos(\theta)\sin(\theta)-1 \Leftrightarrow \sin(2\theta) = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow 2\theta \in \frac{\pi}{6}+2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } 2\theta \in \frac{5\pi}{6}+2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{12}+\pi\mathbb{Z} \text{ ou } \theta \in \frac{5\pi}{12}+\pi\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \theta \in \left\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, les points doubles distincts de l'origine sont $M\left(-\frac{11\pi}{12}\right) = M\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $M\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = M\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. Sinon, $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = M\left(\frac{2\pi}{3}\right) = O$.



Correction de l'exercice 3 ▲

1. **Domaine d'étude.** La fonction r est 2π-périodique et paire. Donc on étudie et on construit la courbe quand θ décrit $[0, \pi]$ et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox). **Variations et signe de r.** La fonction r est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, strictement positive sur $]0, \pi]$ et s'annule en π. **Etude pour $\theta = \pi$.** La tangente en $M(\pi) = O$ est la droite passant par O d'angle polaire π c'est-à-dire l'axe (Ox). Par symétrie par rapport à (Ox), le point $M(\pi)$ est un point de rebroussement de première espèce.



2. Soient $\theta \in [-\pi, \pi]$ puis $M = O + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta$ le point de $\mathscr{C}$ de paramètre θ.

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} &= -a\sin\theta\,\overrightarrow{u}_\theta + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{v}_\theta = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right)\\ &= 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right) = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_{\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Longueur ℓ de la cardioïde. On a $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| = \left|2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (pour $\theta \in [-\pi, \pi]$) et donc

$$\ell = \int_{-\pi}^{\pi}\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| d\theta = 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\theta/2)\,d\theta = 4a\left[\sin(\theta/2)\right]_{-\pi}^{\pi} = 8a.$$

$$\boxed{\text{La cardioïde d'équation polaire } r = a(1+\cos\theta),\ a>0, \text{ a pour longueur } 8a.}$$

Développée. Le point $M(\theta)$ est régulier si et seulement si $\theta \neq \pm\pi$. Dans ce cas,

$$\frac{ds}{d\theta} = \left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et aussi } \overrightarrow{\tau}(\theta) = \overrightarrow{u}_{\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}$$

En notant $\alpha(\theta)$ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\tau}(\theta)\right)$, on peut prendre $\alpha(\theta) = \frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}$. En notant $R(\theta)$ le rayon de courbure au point $M(\theta)$,

$$R(\theta) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{4}{3}a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

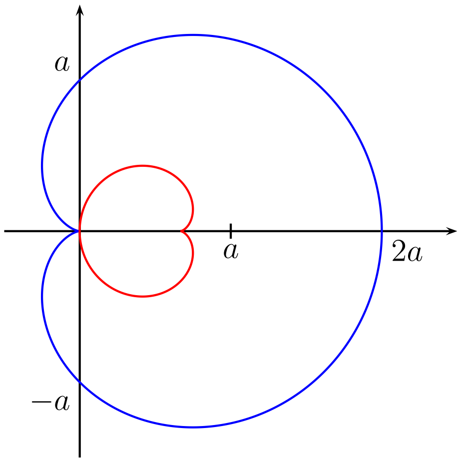
Ensuite, $\overrightarrow{n}(\theta) = r_{\pi/2}\left(\overrightarrow{\tau}(\theta)\right) = -\overrightarrow{u}_{3\theta/2}$ et donc, en notant $\Omega(\theta)$ le centre de courbure au point $M(\theta)$,

$$\begin{aligned}\Omega(\theta) &= M(\theta) + R(\theta)\overrightarrow{n}(\theta)\\ &= O + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta - \frac{4}{3}a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_{3\theta/2}\\ &= O + a(1+\cos\theta)\left(\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}\right) - \frac{4}{3}a\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\overrightarrow{i} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\overrightarrow{j}\right)\\ &= O + a\Bigg[\left(\cos(\theta)+\cos^2(\theta) - \frac{2}{3}(\cos(\theta)+\cos(2\theta))\right)\overrightarrow{i} + \left(\sin(\theta)+\sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{2}{3}(\sin(\theta)+\sin(2\theta))\right)\overrightarrow{j}\\ &= O + a\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos(\theta) - \frac{1}{3}\cos^2(\theta)\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{1}{3}\sin(\theta) - \frac{1}{3}\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\overrightarrow{j}\right]\\ &= O + \frac{2a}{3}\overrightarrow{i} + \frac{a}{3}(1-\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta\end{aligned}$$

Notons Γ la développée cherchée. On a $\Gamma = t \circ h(\mathscr{C}_1)$ où t est la translation de vecteur $\frac{2a}{3}\overrightarrow{i}$, h est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$ et $\mathscr{C}_1$ la courbe d'équation polaire $r = a(1-\cos\theta)$. Maintenant, en notant r la fonction $\theta \mapsto a(1+\cos\theta)$ et r_1 la fonction $\theta \mapsto a(1-\cos\theta)$,

$$[r_1(\theta+\pi), \theta+\pi)] = [a(1+\cos\theta), \theta+\pi] = s_O([r(\theta), \theta)]).$$

La courbe $\mathscr{C}_1$ est donc la symétrique par rapport à O de la courbe $\mathscr{C}$. En résumé, la développée de $\mathscr{C}$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la transformation $t \circ h \circ s_O$: c'est encore une cardioïde.



Correction de **l'exercice 4 ▲**

Soient $(R,\theta)\in\mathbb{R}^2$ puis M le point du plan dont un couple de coordonnées polaires est $[r,\theta]$.

$$M\in\mathscr{C}\Leftrightarrow x^2(x^2+y^2)-(y-x)^2=0\Leftrightarrow r^2\cos^2\theta\times r^2-(r\sin\theta-r\cos\theta)^2=0$$
$$\Leftrightarrow r^2[r^2\cos^2\theta-(\sin\theta-\cos\theta)^2]=0\Leftrightarrow r=0 \text{ ou } r^2=\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 \text{ (}\cos\theta=0\text{ ne fournit pas de solution)}$$
$$\Leftrightarrow r=0 \text{ ou } r=\tan\theta-1 \text{ ou } r=1-\tan\theta.$$

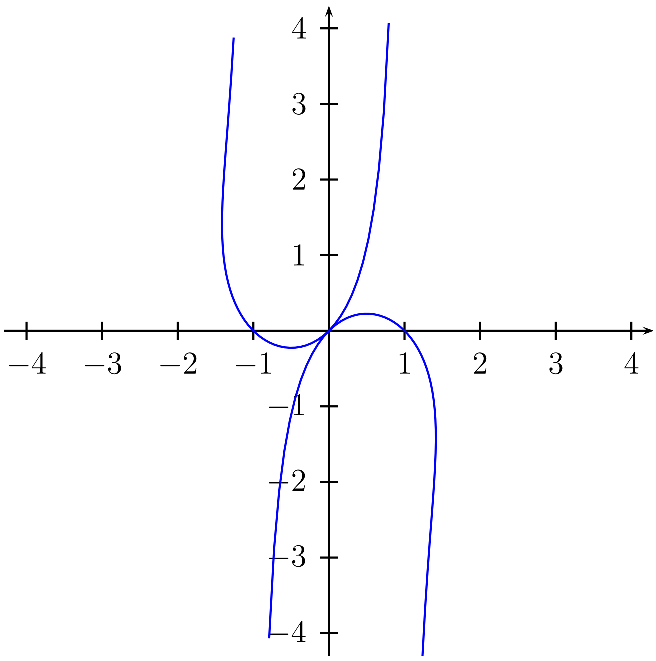
$\mathscr{C}$ est donc la réunion de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ d'équation polaire $r=\tan\theta-1$, $(\mathscr{C}_2)$ d'équation polaire $r=1-\tan\theta$ et $\{O\}$. On note que le point O appartient à $(\mathscr{C}_1)$ car $\theta=\frac{\pi}{4}$ fournit $r=0$. Donc $\mathscr{C}=\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2\cup\{O\}=\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2$. Ensuite, on notant r_1 et r_2 respectivement la fonction $\theta\mapsto\tan\theta-1$ et $r_2=-r_1$,

$$M[\theta+\pi,r_2(\theta+\pi)]=M[\theta+\pi,r_2(\theta)]=M[\theta+\pi,-r_1(\theta)]=M[\theta,r_1(\theta)],$$

et comme $\theta+\pi$ décrit $\mathbb{R}$ si et seulement si θ décrit $\mathbb{R}$, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont une seule et même courbe.

$$\boxed{\mathscr{C}\text{ est la courbe d'équation polaire } r=\tan\theta-1.}$$

Construction de $\mathscr{C}$.



Correction de l'exercice 5 ▲

Développée. $M(\theta)=O+ae^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta}$ puis

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}=ae^{\theta}(\overrightarrow{u}_{\theta}+\overrightarrow{v}_{\theta})=a\sqrt{2}e^{\theta}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{u}_{\theta}+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{v}_{\theta}\right)=a\sqrt{2}e^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{4}}.$$

On en déduit $\frac{ds}{d\theta}=a\sqrt{2}e^{\theta}$ et $\overrightarrow{\tau}(\theta)=\overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{4}}$. On peut alors prendre $\alpha(\theta)=\theta+\frac{\pi}{4}$ et donc $\frac{d\alpha}{d\theta}=1$. Par suite

$$R(\theta)=\frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta}=\frac{a\sqrt{2}e^{\theta}}{1}=a\sqrt{2}e^{\theta}.$$

D'autre part, $\overrightarrow{n}(\theta)=\overrightarrow{\tau}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\overrightarrow{u}_{\theta+\frac{3\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{u}_{\theta}+\overrightarrow{v}_{\theta})$ et donc

$$\Omega(\theta)=M(\theta)+R(\theta)\overrightarrow{n}(\theta)=O+ae^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta}+a\sqrt{2}e^{\theta}.\frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{u}_{\theta}+\overrightarrow{v}_{\theta})=O+ae^{\theta}\overrightarrow{v}_{\theta}=r_{O,\frac{\pi}{2}}(M(\theta)).$$

La développée de la spirale logarithmique d'équation polaire $r=ae^{\theta}$ est l'image de cette spirale par le quart de tour direct de centre O.