Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer Corrections : A. Bodin

Espaces complets

Théorème de Baire

Exercice 1

À l'aide du théorème de Baire, montrer qu'un fermé dénombrable non vide X de $\mathbb{R}$ a au moins un point isolé.
Indication : on pourra considérer $\omega_x = X \setminus \{x\}$.
Que peut-on dire de l'ensemble de Cantor ?

Indication ▼ Correction ▼ [002392]

Exercice 2

Soit f une application définie sur un espace métrique complet (X,d), à valeurs réelles et semi-continue inférieurement. Montrer qu'il existe un ouvert non vide O sur lequel f est majorée.
Application : soit (f_n) une suite de formes linéaires continues sur un Banach B, vérifiant

$$\forall x \in B,\ \sup_n |f_n(x)| < \infty.$$

En utilisant ce qui précède, montrer que $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [002393]

Exercice 3

On sait que l^1 est inclus dans l^2 (au fait pourquoi ?) mais n'est pas fermé dans l^2 (re-pourquoi ?) ; on va montrer qu'il est de première catégorie dans l^2 c.a.d. réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide (dans l^2).

1. On considère pour chaque $p \geq 1$,

$$F_p = \{(a_n) \in l^2 / \sum |a_n| \leq p\}$$

   Montrer que F_p est fermé dans l^2 et d'intérieur vide.
2. En déduire le résultat.

[002394]

Espaces métriques complets, espaces de Banach

Exercice 4

L'espace $(\mathbb{R},d)$ est-il complet si d est l'une des métriques suivantes ?

1. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$.
2. $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)|$.
3. $d(x,y) = \log(1 + |x-y|)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002395]

Exercice 5

On considère pour $x,y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|f(x) - f(y)\|$, où f est une application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que cette distance est complète si et seulement si f est d'image fermée dans $\mathbb{R}^2$.

Indication ▼ Correction ▼ [002396]

Exercice 6

On considère l'espace des fonctions continues $X = \mathscr{C}([a,b])$.

1. Soit $\omega \in X$ une fonction qui ne s'annule pas sur $[a,b]$. Posons
$$d_\omega(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |\omega(t)(f(t) - g(t))| .$$
L'espace (X, d_ω) est-il complet ?
2. Montrer que l'espace $(X, \|.\|_1)$ n'est pas complet (où $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$).

Indication ▼ Correction ▼ [002397]

Exercice 7

Soit $X = \mathscr{C}^1([a,b])$.

1. Est-ce un espace complet si on le muni de la norme uniforme $\|.\|_\infty$?
2. Considérons maintenant, pour $f \in X$, la norme
$$N(f) = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\| + \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\| .$$
L'espace (X,N) est-il complet ?

Indication ▼ Correction ▼ [002398]

Exercice 8

Soit X l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, et soit
$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \quad \text{pour } x,y \in X .$$

1. Montrer que X n'est pas complet pour la métrique ρ.
2. Trouver un espace de suites Y tel que (Y,ρ) soit complet et tel que X soit dense dans Y.
3. Que donne l'exercice si on remplace ρ par la norme uniforme ?

Indication ▼ Correction ▼ [002399]

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une série $\sum u_k$ est normalement convergente si la série $\sum \|u_k\|$ est convergente. On veut démontrer que E est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

1. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E ; montrer qu'on peut en extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que la série de terme général $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ soit normalement convergente. En déduire que si toute série normalement convergente est convergente, alors E est complet.
2. Soit $\sum u_k$ une série normalement convergente. On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que S_n est une suite de Cauchy. En déduire que si E est complet, alors toute série normalement convergente est convergente.

Indication ▼ Correction ▼ [002400]

Exercice 10

Soient E,F des espaces normés et $A_n, A \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer l'équivalence entre :

1. $A_n \to A$ dans $\mathscr{L}(E,F)$.
2. Pour toute partie bornée $M \subset E$, la suite $A_n x$ converge uniformément vers Ax, $x \in M$.

Correction ▼ [002401]

Exercice 11 Cours

Soit E un espace normé et F un espace de Banach. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi un espace de Banach.

Correction ▼ [002402]

Exercice 12

Soit δ la métrique sur $\mathbb{R}$ définie par $\delta(x,y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$. Montrer, à l'aide du théorème de prolongement de fonction uniformément continue, que l'identité $i : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |.|)$ n'est pas uniformément continue. [002403]

Théorème du point fixe

Exercice 13

Soit $\alpha_n > 0$ tel que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge. Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application pour laquelle

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha_n d(x,y) \quad \text{pour tout } x,y \in X \text{ et } \ n \in \mathbb{N}\,.$$

Montrer que, sous ces conditions, f possède un unique point fixe $p \in X$, que pour tout point initial $x_0 \in X$, la suite des itérées $(x_n = f^n(x_0))_{n \geq 0}$ converge vers p et que la vitesse de convergence d'une telle suite est contrôlée par

$$d(p, x_n) \leq \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu \right) d(x_1, x_0)\,.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002404]

Exercice 14

Soit (X,d) un espace métrique complet et soit $f : X \to X$ une application telle que l'une de ces itérées f^n est strictement contractante, i.e. il existe $\rho < 1$ tel que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho d(x,y) \quad \text{pour tout} \quad x,y \in X\,.$$

Montrer que f possède un unique point fixe. Faire le rapprochement avec l'exercice 13.

Indication ▼ Correction ▼ [002405]

Exercice 15

Soit $X = (\mathscr{C}^1([0,1]), N)$ avec $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in X$ qui est point fixe de l'opérateur T donné par

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2)\,dt\,.$$

On pourra commencer par établir que $T \circ T$ est une contraction. Utiliser ceci pour établir l'existence d'une fonction unique $f \in X$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002406]

Exercice 16

Soient $y \in \mathscr{C}([a,b])$ et $k \in \mathscr{C}([a,b] \times [a,b])$ des fonctions continues. On se propose de résoudre l'équation (intégrale de Fredholm) suivante :

$$x(s) - \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt = y(s) \quad \text{pour } s \in [a,b] \tag{1}$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}([a,b])$. Pour ce faire on suppose que le "noyau" k satisfait l'hypothèse suivante :

$$\lambda := \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |k(s,t)|\,dt < 1 \quad \left(\text{ou même} \quad \max_{a \leq s,t \leq b} |k(s,t)| < \frac{1}{b-a}\right).$$

1. Rappeler que $(\mathscr{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$ est un espace complet.
2. Soit $x \in \mathscr{C}([a,b]) \mapsto Ax \in \mathscr{C}([a,b])$ l'application donnée par

   $$(Ax)(s) := \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt + y(s)\ .$$

   Noter que (1) équivaut à $Ax = x$ et qu'on cherche donc un point fixe de $x \mapsto Ax$. Déduire des hypothèses faites sur k qu'un tel point fixe $x \in \mathscr{C}([a,b])$ existe et que toute suite $A^n x_0$, $x_0 \in \mathscr{C}([a,b])$, converge uniformément vers ce point fixe x.
3. *Dépendance continue de la solution $x = x(y)$.*
   Soient $y_1, y_2 \in \mathscr{C}([a,b])$ deux fonctions et $x_1, x_2 \in \mathscr{C}([a,b])$ les deux solutions associées de (1) ou, de façon équivalente, les points fixes des applications associées $x \mapsto A_i x$. Montrer que

   $$\|x_1 - x_2\|_\infty = \|A_1 x_1 - A_2 x_2\|_\infty \leq \|y_1 - y_2\|_\infty + \lambda \|x_1 - x_2\|_\infty\ .$$

   En déduire que

   $$\|x_1 - x_2\|_\infty \leq \frac{1}{1-\lambda} \|y_1 - y_2\|_\infty$$

   et donc que la solution x de (1) dépend continuement de la fonction y.

Correction ▼ [002407]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Raisonner par l'absurde et montrer que ω_x est un ouvert dense.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Une application $f : X \to \mathbb{R}$ est *semi-continue inférieurement* si
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \qquad \text{est un ouvert.}$$
De façon équivalente f est *semi-continue inférieurement* si pour tout $x \in X$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in X \quad (d(x,y) < \delta \Rightarrow f(x) - f(y) < \varepsilon).$$
Attention il n'y a pas de valeur absolue autour de $f(x) - f(y)$.
2. Pour la première question considérer $O_n = \{x \in X \mid f(x) > n\}$ et utiliser le théorème de Baire.
3. Pour l'application utiliser la première question avec la fonction
$$\phi : B \to \mathbb{R}, \text{ définie par } \phi(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. C'est une suite de Cauchy. Essayer de se ramener à une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, |.|)$.
2. Regarder la suite définie par $u_n = -n$.
3. Comme la première question.

Indication pour l'exercice 5 ▲

f est injective uniquement afin que d soit bien une distance. Raisonner par double implication. Utiliser la caractérisation d'un fermé par les suites.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. (X, d_ω) est complet. La démonstration est presque la même que pour montrer que $(\mathscr{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$ est complet.
2. Prendre par exemple, la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(t) = 1$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_n(t) = (1 - n(t - \frac{1}{2}))$ pour $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et $f(t) = 0$ si $t \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

1. Intégrer l'exemple de l'exercice 6.
2. Oui cet espace est complet, montrer-le !

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Prendre la suite (x^p) définie par $x^p = (1, 1, \ldots, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$. $((x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de suite).
2. Prendre Y l'espace de toutes les suites.
3. Considérer $x^p = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p}, 0, 0, \ldots)$.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Écrire ce que donne la définition de “(x_n) est une suite de Cauchy” pour $\varepsilon = 1$, puis $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ..., puis $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$. Faire la somme. Remarquer que si $T_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$ alors $T_N = x_{n_{N+1}} - x_{n_0}$.
2. ...

Indication pour l'exercice 13 ▲

C'est à peu prés la même démonstration que pour le théorème du point fixe d'une fonction contractante.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Montrer que l'unique point fixe x de f^n, est un point fixe de f. Pour cela écrire l'égalité $f^n(x) = x$ et composée habilement cette égalité. Pour conclure utiliser l'unicité du point fixe de f^n.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Faire soigneusement le calcul : $(T \circ Tf)(x) = 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)dudt$. Se souvenir que X est complet et utiliser l'exercice 14.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Par l'absurde supposons que X n'a aucun point isolé. Comme $\{x\}$ est un fermé alors $\omega_x = X \setminus \{x\}$ est un ouvert (de X). De plus comme le point x n'est pas isolé alors ω_x est dense dans X.

   Maintenant on peut appliquer le théorème de Baire à X qui est un fermé de l'espace complet $\mathbb{R}$. Donc une intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est encore dense. Mais ici nous obtenons une contradiction car les ω_x sont des ouverts denses, X est dénombrable mais
$$\bigcap_{x \in X} \omega_x = \varnothing.$$
   Et l'ensemble vide n'est pas dense dans X ! !

2. Pour l'ensemble de Cantor aucun point n'est isolé, donc par la question précédente l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Par l'absurde supposons que sur aucun ouvert f n'est majorée. $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement donc
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad O_\lambda := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \qquad \text{est un ouvert.}$$
   De plus O_λ est dense, en effet pour $x \in X$ et pour V_x un voisinage ouvert de x, alors par hypothèse f n'est pas majorée sur V_x donc en particulier il existe $y \in V_x$ tel que $f(y) > \lambda$ donc $y \in V_x \cap O_\lambda$. Ceci prouve que O_λ est dense dans X (V_x étant aussi petit que l'on veut).

   Maintenant pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, les O_n sont un ensemble dénombrable d'ouverts denses. Comme X est complet il vérifie le théorème de Baire donc l'intersection des O_n est encore un ensemble dense. Mais il est facile de voir par la définition des O_n que
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = \varnothing.$$
   Ce qui donne la contradiction cherchée.

2. On note $\phi : B \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\phi(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$
   Il n'est pas difficile de montrer que ϕ est semi-continue inférieurement : en effet soit $F_\lambda := \{x \in X \mid \phi(x) \leq \lambda\}$. Soit λ fixé et soit (x_k) une suite d'éléments de F_λ. Pour n fixé et pour tout k on a $f_n(x_k) \leq k$, donc par continuité de f_n, on a $f_n(x) \leq k$, ceci étant vrai pour tout n on a $x \in F_\lambda$. Donc F_λ est un fermé donc $O_\lambda := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\}$ est un ouvert. Donc ϕ est semi-continue inférieurement.

   Par la première question il existe un ouvert non vide O et une constante $M > 0$ tel que ϕ soit majorée par M sur O. C'est-à-dire
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in O \quad |f_n(x)| \leq M.$$
   Par translation on peut supposer que l'origine o est inclus dans O. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\bar{B}(o, \varepsilon) \subset O$. Donc
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \bar{B}(o, \varepsilon) \quad |f_n(x)| \leq M$$
   ce qui est équivalent à
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \bar{B}(o, 1) \quad |f_n(x)| \leq \frac{M}{\varepsilon}$$
   Donc
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\| \leq \frac{M}{\varepsilon}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit (u_n) une suite de Cauchy pour d. Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geq N \quad d(u_p,u_q) = |u_p^3 - u_q^3| \leq \varepsilon.$$

Donc la suite (u_n^3) est une suite de Cauchy pour la distance usuelle $|.|$. Comme $(\mathbb{R},|.|)$ est complet alors (u_n^3) converge pour la valeur absolue, notons v la limite, nous avons $|u_n^3 - v|$ qui tend vers 0. Donc pour $u = v^{\frac{1}{3}}$ nous avons $d(u_n,u) = |u_n^3 - u^3| = |u_n^3 - v|$ qui tend vers 0, donc u_n converge vers u pour la distance d. Donc $\mathbb{R}$ est complet pour d.

2. Montrons que d ne définit pas une distance complète. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $d(u_p,u_q) = |e^{-p} - e^{-q}|$. Donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit N tel que $e^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$, alors pour $p,q \geq N$ on a $d(u_p,u_q) = |e^{-p} - e^{-q}| \leq e^{-p} + e^{-q} \leq 2e^{-N} \leq \varepsilon$. Donc (u_n) est de Cauchy. Supposons que (u_n) converge, notons $u \in \mathbb{R}$ sa limite. Alors $d(u_n,u) = |e^{-n} - e^u|$ tend vers 0 d'une part et vers e^u d'autre part. Donc $e^u = 0$ ce qui est absurde pour $u \in \mathbb{R}$.

3. La fonction $\ln(1+u)$ est continue et ne s'annule qu'en $u = 0$. Donc pour $\ln(1+u)$ suffisamment petit nous avons u suffisamment petit et donc (par la relation $\ln(1+u) = u + o(u)$) nous avons

$$\frac{1}{2}u \leq \ln(1+u) \leq 2u.$$

Donc pour (u_n) une suite de Cauchy pour d, la première inégalité prouve que (u_n) est une suite de Cauchy pour $|.|$. Donc elle converge pour $|.|$ La deuxième inégalité montre que (u_n) converge pour d. Donc d définit une distance complète.

Correction de l'exercice 5 ▲

f est injective afin que d soit bien une distance. On pose $F = f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$.

1. $\Rightarrow$ Supposons que la distance d soit complète. Soit (y_n) une suite de F qui converge vers $y \in \mathbb{R}^2$. Il faut montrer que $y \in F$. Il existe $x_n \in \mathbb{R}$, tel que $y_n = f(x_n)$. Comme (y_n) est une suite convergente, c'est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^2$, or $d(x_p,x_q) = \|f(x_p) - f(x_q)\| = \|y_p - y_q\|$. Donc (x_n) est une suite de Cauchy pour d. Comme d est complète alors (x_n) converge x, comme $x_n \to x$ (pour d) alors $f(x_n) \to f(x)$ (pour $\|.\|$). (Remarquons que par définition de d, l'application $f : (\mathbb{R},d) \longrightarrow (\mathbb{R}^2,\|.\|)$ est continue.) Donc (y_n) converge vers $f(x)$ et par unicité de la limite $f(x) = y$. Donc $y \in f(\mathbb{R}) = F$. Donc F est fermé.

2. $\Leftarrow$ On suppose que F est fermé. Soit (u_n) une suite de Cauchy pour $(\mathbb{R},d)$. Notons $y_n = f(x_n)$. Comme $d(u_p,u_q) = \|f(u_p) - f(u_q)\| = \|y_p - y_q\|$. Donc (y_n) est une suite de Cauchy pour $(\mathbb{R}^2,\|.\|)$. Comme cet espace est complet alors (y_n) converge vers y. Comme $y_n \in F$ et F est fermé alors $y \in F$, donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. Il reste à montrer que (x_n) tend vers x. En effet $d(x_n,x) = \|f(x_n) - f(x)\| = \|y_n - y\|$ tend vers 0. Donc (x_n) tend vers x pour d. Donc d est complète.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. (a) Montrons que (X,d_ω) est complet. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy pour cet distance. Alors pour chaque $t \in [a,b]$, $(f_n(t))_n$ est une suite de Cauchy pour $(\mathbb{R},|.|)$. Comme $\mathbb{R}$ est complet alors cette suite converge, notons $f(t)$ sa limite.

   Il faut montrer deux choses : premièrement que (f_n) converge vers f pour la distance considérée, deuxièmement que f est bien dans l'espace X.

   (b) Comme (f_n) est une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon > 0$. Il existe $n \geq 0$ tel que pour tout $p \geq 0$: $d_\omega(f_n, f_{n+p}) < \varepsilon$. Donc

   $$\sup_{t\in[a,b]} |\omega(t)(f_n(t) - f_{n+p}(t))| < \varepsilon.$$

   On fait tendre p vers $+\infty$ et on obtient : $\sup_{t\in[a,b]} |\omega(t)(f_n(t) - f(t))| < \varepsilon$. Donc (f_n) converge vers f pour la distance d_ω.

(c) ω est une fonction non nulle sur le compact $[a,b]$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\omega(t) > \alpha$ pour tout $t \in [a,b]$. On en déduit que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha} d_\omega(f_n, f).$$

Comme $d_\omega(f_n, f)$ tend vers 0 alors f_n converge vers f pour la norme infini. Donc f est continue. Conclusion : (X, d_ω) est complet.

2. On définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n(t) = 1$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_n(t) = (1 - n(t - \frac{1}{2}))$ pour $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et $f(t) = 0$ si $t \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$. Alors (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_1$. Par contre (f_n) ne converge pas dans X. Donc X n'est pas complet. En effet (f_n) converge vers la fonction f où f est définie par $f(t) = 1$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $f(t) = 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1]$. Mais cette fonction n'est pas dans l'espace X car f n'est pas continue.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. On reprend l'exemple de l'exercice 6. Et on définit g_n sur $[0,1]$ par $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$. Alors g_n est $\mathscr{C}^1$, et converge (donc en particulier (g_n) est de Cauchy). Elle converge vers g qui n'est pas une fonction $\mathscr{C}^1$. Donc ce n'est pas un espace complet.
2. Soit (f_n) une suite de Cauchy pour la norme N. Pour chaque $t \in [a,b]$, $(f_n(t))_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc converge. Notons $f(t)$ sa limite. De même $(f_n'(t))_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc converge vers $g(t)$. Nous allons montrer que f est dans X et que f_n converge vers f pour N et que $f' = g$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que Pour tout $p \geq 0$,

$$N(f_n - f_{n+p}) < \varepsilon.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, f_{n+p} converge (simplement) vers f. On obtient que $\|f_n - f\|_\infty$ et que $\|f_n' - g\|_\infty$ tendent vers 0. Donc f_n converge uniformément vers f. Comme les f_n sont continues alors f est continue. De même f_n' converge uniformément vers g donc g est continue. De plus cela implique que $g = f'$.(Rappel : si (f_n) est une suite de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ qui converge simplement vers f, et tel que (f_n') converge uniformément vers g, alors f est $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est $f' = g$.) Nous avons donc montrer que $N(f_n - f)$ tend vers 0 et que f est dans X. Donc (X, N) est complet.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Notons x^p la suite

$$x^p = (1, 1, \ldots, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots).$$

(des 0 à partir de la $p+1$-ième place et de 1 avant. Si Y est l'espace de toute les suite, notons

$$x^\infty = (1, 1, 1, 1, \ldots).$$

La suite x^∞ n'est pas dans X. Par contre $x^p \to x^\infty$ pour la distance ρ. En effet

$$\rho(x^p, x) = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{p+1}} \to 0.$$

La suite (x^p) est de Cauchy, mais ne converge pas dans X, donc X n'est pas complet.

2. (a) Soit Y l'espace de toutes les suites. Alors X est dense dans dans Y (pour la topologie définie par ρ), car toute suite $y = (y_1, y_2, \ldots)$ de Y s'approche par une suite de suite (x^p) obtenue en tronquant la suite y : $x^1 = (y(1), 0, 0, \ldots)$, $x^2 = (y(1), y(2), 0, 0, \ldots)$,... En effet

$$\rho(x^p, y) = \sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^p}$$

qui tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

(b) Soit $(x^n)_n$ une suite de Cauchy de Y. Montrons que pour k fixé alors $(x^n_k)_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Prenons $\varepsilon > 0$, alors il existe N tel que pour $p,q \geq N$ on ait $\rho(x^p,x^q) \leq \varepsilon$.

$$\frac{1}{2^k}\frac{|x^p_k - x^q_k|}{1+|x^p_k - x^q_k|} \leq \rho(x^p,x^q) \leq \varepsilon.$$

Posons la fonction $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, f est inversible pour $\alpha \geq 0$, d'inverse $f^{-1}(\beta) = \frac{\beta}{1-\beta}$. Une étude de f et de son inverse montre que si $f(\alpha) \leq \varepsilon' \leq 1$ alors $\alpha \leq 2\varepsilon'$. Comme k est fixé, posons $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2^k}$ et $\alpha = |x^p_k - x^q_k|$ on a montrer : $f(\alpha) \leq \varepsilon'$. Donc $\alpha \leq 2\varepsilon'$. Récapitulons :

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geq N \quad |x^p_k - x^q_k| < 2\varepsilon',$$

donc la suite $(x^n_k)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge, nous notons x^∞_k sa limite.

(c) Nous avons construit une suite $x^\infty = (x^\infty_1, x^\infty_2, \ldots)$. Comme (x^n) est de Cauchy alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geq N \quad \rho(x^p,x^q) < \varepsilon,$$

Lorsque l'on fixe p et que l'on fait tendre q vers $+\infty$ on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N \quad \rho(x^p,x^\infty) < \varepsilon,$$

donc (x^n) converge vers x^∞ pour la distance ρ.

(d) Bien évidemment $x^\infty \in Y$ donc (x^n) converge vers $x^\infty \in Y$ pour ρ. Donc (Y,ρ) est un espace complet.

3. $(X, \|.\|_\infty)$ n'est pas un espace complet. Par exemple regardez la suite $x^p = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p}, 0, 0, \ldots)$ alors (x^p) est une suite de Cauchy, qui ne converge pas dans X, mais dans Y sa limite est $x^\infty = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$.
Notons Z l'espace des suites qui tendent vers 0. L'adhérence de X pour la topologie définie par $\|.\|_\infty$ est Z. Et $(Z, \|.\|_\infty)$ est complet.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall q \geq n_0 \qquad \|x_{n_0} - x_q\| < 1.$$

Puis pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe $n_1 > n_0$ tel que

$$\forall q \geq n_1 \qquad \|x_{n_1} - x_q\| < \frac{1}{2}.$$

Puis par récurrence pour $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, on pose $n_k > n_{k-1}$ tel que

$$\forall q \geq n_k \qquad \|x_{n_k} - x_q\| < \frac{1}{2^k}.$$

Donc en particulier à chaque étape on a

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Posons $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ Alors $\|u_k\| \leq \frac{1}{2^k}$ donc

$$\sum_{k\geq 0} \|u_k\| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Donc la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ est normalement convergente. Si cette série converge notons $T = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa somme, C'est-à-dire la limite de $T_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$. Mais alors $T_N = x_{n_{N+1}} - x_{n_0}$ converge vers T. Donc la suite extraite $(x_{n_k})_k$ converge (vers $T + x_{n_0}$). Conséquence : si toute série normalement convergente est convergente, alors on peut extraire de toute suite de Cauchy une sous-suite convergente donc E est complet.

2. Soit $p \leq q$.
$$\|S_q - S_p\| = \|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\|$$
Or la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ est normalement convergente donc le reste $\sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\|$ tend vers 0 quand $p \to +\infty$. Fixons $\varepsilon > 0$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \geq N$ on a $\sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\| \leq \varepsilon$, donc pour tout $p, q \geq N$ on a aussi $\|S_q - S_p\| \leq \varepsilon$. Donc la suite (S_n) est de Cauchy. Si E est complet alors (S_n) converge, notons S sa limite. Donc $\|S_n - S\|$ tend vers 0. Dons la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ est convergente (de somme S).

Correction de l'exercice 10 ▲

1. (1) ⇒ (2). Supposons que A_n converge vers A dans $\mathscr{L}(E,F)$. Soit $M \subset E$ une partie bornée, notons M sa borne (c'est-à-dire pour tout $x \in M$, $\|x\| \leq B$). Alors
$$\begin{array}{lllllll} & \forall \varepsilon > 0 & \exists N \in \mathbb{N} & \forall n \geq N & \|A_n - A\| \leq \dfrac{\varepsilon}{B} & & \\ \Rightarrow & \forall \varepsilon > 0 & \exists N \in \mathbb{N} & \forall n \geq N & \forall x \in M & \|A_n(x) - A(x)\| \leq \dfrac{\varepsilon\|x\|}{B} \\ \Rightarrow & \forall \varepsilon > 0 & \exists N \in \mathbb{N} & \forall n \geq N & \forall x \in M & \|A_n(x) - A(x)\| \leq \varepsilon \end{array}$$
Ce qui exactement la confergence uniforme de A_n vers A sur M.
2. (2) ⇒ (1). Par définition de la norme d'un opérateur nous avons $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n(x) - A(x)\|$. Prenons comme partie bornée la sphère unité : $M = S(0,1) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$. Alors :
$$\begin{array}{llllll} & \forall \varepsilon > 0 & \exists N \in \mathbb{N} & \forall n \geq N & \forall x \in S(0,1) \in \|A_n(x) - A(x)\| \leq \varepsilon \\ \Rightarrow & \forall \varepsilon > 0 & \exists N \in \mathbb{N} & \forall n \geq N & \|A_n - A\| \leq \varepsilon \end{array}$$
Donc $\|A_n - A\|$ tend vers 0.

Correction de l'exercice 11 ▲

C'est du cours, mais il est important de savoir rédiger ceci correctement. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathscr{L}(E,F)$.

1. Trouvons d'abord le candidat à la limite. Par définition d'une suite de Cauchy, nous avons :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \geq N \quad \|f_p - f_q\| < \varepsilon.$$
Fixons $x \in E$, alors
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \geq N \quad \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \varepsilon \|x\|_E.$$
Quitte à poser $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\|x\|}$ (x est fixé !, si $x = 0$ c'est trivial) alors on a montrer :
$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \geq N \quad \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \varepsilon'.$$
Donc la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy de F. Comme F est complet alors cette suite converge, notons $f(x)$ sa limite.
2. Nous avons construit une fonction $f : E \longrightarrow F$. Montrons que f est dans l'espace $\mathscr{L}(E,F)$, c'est-à-dire que f est linéaire. Comme pour tout n, f_n est linéaire alors, pour tout $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a
$$f_n(\lambda x + \mu y) = \lambda f_n(x) + \mu f_n(y).$$
À la limite ($n \to +\infty$) nous avons
$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$
donc f est dans $\mathscr{L}(E,F)$.

3. Il reste à montrer que (f_n) converge bien vers f (ce qui à priori n'est pas évident). Revenons à la définition d'une suite de Cauchy (écrit d'une façon un peu différente) :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N \quad \forall k \geq 0 \quad \|f_p - f_{p+k}\| < \varepsilon.$$
Lorsque l'on fixe p et que l'on fait tendre k vers $+\infty$ alors $f_p - f_{p+k}$ tend vers $f_p - f$. Donc en passant à la limite nous avons :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N \quad \|f_p - f\| < \varepsilon.$$
Donc (f_n) converge vers f pour la norme $\|.\|$ sur $\mathscr{L}(E,F)$.

Remarque : dans certains exercices il peut être utile de d'abord montrer le troisième point avant le deuxième.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Commençons par l'unicité, si x,y sont deux points fixes alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$ donc la relation pour f s'écrit
$$d(x,y) \leq \alpha_n d(x,y) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Comme $\sum_{n\geq 1} \alpha_n$ converge alors (α_n) tend vers 0, donc il existe n_0 assez grand avec $\alpha_{n_0} < 1$, la relation devient
$$d(x,y) \leq \alpha_{n_0} d(x,y) < d(x,y),$$
ce qui est contradictoire.
2. Soit $x_0 \in X$, notons $x_n = f^n(x_0)$. Alors
$$d(x_{n+1},x_n) \leq \alpha_n d(x_1,x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
On va montrer que (x_n) est une suite de Cauchy, c'est-à-dire
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall p \geq 0 \qquad d(x_{n+p},x_n) \leq \varepsilon.$$
Pour n,p fixés, évaluons $d(x_{n+p},x_n)$.
$$\begin{aligned} d(x_{n+p},x_n) &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} d(x_{k+1},x_k) \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k d(x_1,x_0) \\ &= d(x_1,x_0) \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k \end{aligned}$$
De plus la série $\sum_{n\geq 1} \alpha_n$ converge donc la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ est de Cauchy et donc il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$ on a
$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k = S_{n+p-1} - S_{n-1} \leq \varepsilon.$$
Donc pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$ on $d(x_{n+p},x_n) \leq d(x_1,x_0)\varepsilon$. Quitte à poser $\varepsilon' = d(x_1,x_0)\varepsilon$, ceci prouve que (x_n) est une suite de Cauchy. Comme l'espace est complet alors cette suite converge, notons x sa limite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons
$$x_{n+1} = f(x_n).$$
À la limite, la suite (x_{n+1}) tend vers x, et comme f est continue (elle est α_1-lipschitziènne : $d(f(x),f(y)) \leq \alpha_1 d(x,y)$) alors $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Par unicité de la limite nous obtenons
$$x = f(x).$$
Donc f possède un point fixe, qui est unique et est obtenu en partant d'un point quelconque $x_0 \in X$ comme limite de $(f^n(x_0))_n$.

3. Il reste à estimer la vitesse de convergence, nous avons vu

$$d(x_{n+p},x_n) \leq d(x_1,x_0) \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k,$$

On fait tendre p vers $+\infty$ dans cette inégalité alors

$$d(x,x_n) \leq d(x_1,x_0) \sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_k.$$

Ce qui était l'estimation recherchée.

Correction de l'exercice 14 ▲

Notons $g = f^n$. Alors g est une application strictement contractante dans X complet donc g possède un unique point fixe que nous notons x. Montrons l'unicité d'un point fixe pour f. Soit $y \in X$ tel que $f(y) = y$ alors $g(y) = f^n(y) = y$. Donc y est aussi un point fixe pour g, donc $y = x$.
Il reste à montrer que f possède effectivement bien un tel point fixe. Nous avons

$$\begin{aligned}
& f^n(x) = x \\
\Rightarrow \quad & f(f^n(x)) = f(x) \\
\Rightarrow \quad & f^n(f(x)) = f(x) \\
\Rightarrow \quad & g(f(x)) = f(x)
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $f(x)$ est un point fixe de g. Comme g possède un unique point fixe x alors $f(x) = x$! ! Donc x est bien un point fixe pour f.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. $(T \circ Tf)(x) = 1 + \int_0^x Tf(t-t^2)dt = 1 + \int_0^x (1 + \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)du)dt = 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)dudt$. De plus $(T \circ Tf)'(x) = 1 + \int_0^{x-x^2} f(u-u^2)du$. En remarquant que pour $t \in [0,1]$, $t - t^2 \leq \frac{1}{4}$, on montre que $|T \circ Tf(x) - T \circ Tg(x)| \leq \frac{1}{4}\|f-g\|_\infty$ et que $|(T \circ Tf)'(x) - (T \circ Tg)'(x)| \leq \frac{1}{4}\|f-g\|_\infty$ Donc $N(T \circ Tf - T \circ Tg) \leq \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \leq \frac{1}{2}N(f-g)$. Donc $T \circ T$ est une contraction et X est complet donc $T \circ T$ admet un unique point fixe, par l'exercice 14, T admet un unique point fixe.
2. Remarquons que $Tf = f$ est équivalent à $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x-x^2)$. Donc l'existence et l'unicité du point fixe pour T donne l'existence et l'unicité de la solution au problème posé.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. ! !
2. $$\begin{aligned}
\|Ax_1 - Ax_2\|_\infty &= \| \int_a^b k(s,t)(x_1(t) - x_2(t))dt\|_\infty \\
&\leq \int_a^b \|k(s,t)\|_\infty \|x_1(t) - x_2(t)\|_\infty dt \\
&\leq \|x_1(t) - x_2(t)\|_\infty \times \lambda \\
&< \|x_1(t) - x_2(t)\|_\infty.
\end{aligned}$$

   Donc A est contractante et l'espace ambiant $\mathscr{C}([a,b])$ est complet, par le théorème du point fixe, A admet un unique point fixe, x. De plus, pour tout fonction $x_0 \in \mathscr{C}([a,b])$, la suite $(A^n x_0)$ converge vers x, mais ici la norme est la norme uniforme donc $\|A^n x_0 - x\|_\infty$ tend vers 0. Donc $(A^n x_0)$ converge uniformément vers x.

3.

$$
\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\|_\infty &= \|A_1x_1 - A_2x_2\|_\infty \quad \text{car } A_ix_i = x_1, \\
&= \| \int_a^b k_1(s,t)x_1(t)dt + y_1(s) + \int_a^b k_2(s,t)x_2(t)\,dt + y_2(s)\|_\infty \\
&\leq \| \int_a^b k(s,t)(x_1(t) - x_2(t))dt\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty \\
&\leq \lambda\|x_1 - x_2\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty
\end{aligned}
$$

Donc

$$\|x_1 - x_2\|_\infty \leq \frac{1}{1-\lambda}\|y_1 - y_2\|_\infty,$$

ce qui exprime la dépendance continue de la solution par rapport à la fonction y.