Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer, T. Tahani, F. Sarkis
Corrections : F. Sarkis

Exo7

Applications différentiables

Exercice 1

Soit f une application f de E dans F espaces vectoriels normés de dimension finie.
On rappelle les implications suivantes : si $x_0 \in E$, "f de classe C^1 en x_0" $\Rightarrow$ "f différentiable en x_0" $\Rightarrow$ "f continue en x_0". On sait de même que "f différentiable en x_0" $\Rightarrow$ "f admet des dérivées partielles en x_0" montrer que les réciproques sont fausses en général en s'inspirant de :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} + y^2\sin\frac{1}{y} & \text{si } \ xy \neq 0 \\ x^2\sin\frac{1}{1}x & \text{si } \ y = 0 \\ y^2\sin\frac{1}{y} & \text{si } \ x = 0 \\ 0 & \text{en } \ (0,0) \end{cases}$$

ou de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Correction ▼ [002503]

Exercice 2

1. Soit f une application de E dans F espaces vectoriels normés et supposons f différentiable en a ; montrer que pour tout vecteur $u \in E^*$, la dérivée de f en a dans la direction u existe , i.e. $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(a+hu) - f(a)\big)$ et l'exprimer à l'aide de $f'(a)$.
2. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2}$. Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

[002504]

Exercice 3

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y, \ \ F(x,x) = g'(x).$$

Montrer que F est de classe C^1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Correction ▼ [002505]

Exercice 4

Soit E^n l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Etudier la différentiabilité des applications $P \mapsto \int_0^1 (P^3(t) - P^2(t))\, dt$ et $P \mapsto P' - P^2$.

Correction ▼ [002506]

Exercice 5

Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, propre (i.e. $||f(x)||$ tend vers ∞ quand $||x|| \to \infty$), telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ $Df(x)$ soit injective. On va montrer que f est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $g(x) = ||f(x) - a||^2$;

1. Calculer $Dg(x)$.
2. Montrer que g atteint sa borne inférieure en un point x_0 de $\mathbb{R}^2$, et que $Dg(x_0) = 0$; en déduire le résultat.

Correction ▼ [002507]

Exercice 6

Soit, dans $\mathbb{R}^n$, F un sous-espace fermé, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x,F)$. On rappelle que f est 1-lipschitzienne, et que pour chaque x il existe $y \in F$ tel que $f(x) = d(x,y)$.

1. On suppose que f est différentiable en $x \notin F$. Montrer que $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \leq 1$.
2. On considère la fonction $\varphi : t \in [0,1] \to f((1-t)x+ty)$; en calculant $\varphi'(0)$ de deux façons, montrer que $Df(x).\frac{x-y}{||x-y||} = 1$ et $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} = 1$.
3. En déduire que y est unique.

Correction ▼ [002508]

Exercice 7

Soit E un espace de Banach et $\mathscr{L}(E)$ l'espace des endomorphismes linéaires continus de E.

1. Soit $A \in \mathscr{L}(E)$; montrer que l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \to e^{tA}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On suppose que la norme de E est associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $x \in E$. Montrer que l'application $\Phi : t \to \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. On suppose que A est antisymétrique. Montrer que pour tout t, e^{tA} est unitaire.

[002509]

Exercice 8

Soit $\alpha > 0$. Étudier la différientiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}} \quad \text{si} \;\; (x,y) \neq (0,0) \,.$$

[002510]

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

et $f(0,0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, que pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ existe, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. [002511]

Exercice 10

Soit $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme uniforme et soit f une application de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note F l'application $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ de X dans X. Montrer que pour chaque $\varphi \in X$, $DF(\varphi)$ est l'opérateur linéaire de multiplication par $f' \circ \varphi$ dans X :

$$DF(\varphi) \cdot (h) = h f' \circ \varphi \,,$$

et que DF est continue. [002512]

Exercice 11

Soit $\mathscr{F}$ l'algèbre des matrices carrés $p \times p$ munie d'une norme.

1. Soit $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ l'application qui associe à une matrice A son determinant $f(A) = \det(A)$. Montrer qu'elle est différentiable et déterminer Df.

2. Pour $n \geq 1$, on considère l'application $\varphi_n(A) = A^n$ de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$. Montrer qu'elle est différentiable en toute matrice $A \in \mathscr{F}$.
3. On désigne par U l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{F}$. Montrer que U est un ouvert de $\mathscr{F}$ et calculer la différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$ de U dans U.

[002513]

Exercice 12

1. Que peut-on dire de la différentiabilité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1,x_2) = \|x\|_\infty = \max(|x_1|,|x_2|)$?
2. Généraliser ceci à $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_\infty$, avec $\mathscr{F} = \mathbb{R}^n$ ou $\mathscr{F}$ l'ensemble des suites convergentes vers zero.

[002514]

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $x = (x_1,x_2) \mapsto \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$. Est-ce qu'elle est différentiable ?
Considérons maintenant l^1 l'espace des suites réelles muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$.

1. Montrer que pour toute forme linéaire continue L sur l^1 il existe une suite bornée $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ telle que
$$L(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j \ .$$
2. Montrer que la norme $\|.\|_1 : l^1 \to \mathbb{R}$ n'est pas différentiable en aucun point de l^1 (raisonner par l'absurde en utilisant (1.)).

[002515]

Exercice 14

Dans un espace normé $(\mathscr{F}, N)$, on considére l'application $x \mapsto N(x)$. Rappeler que, lorsque cette application N est différentiable en $x \in \mathscr{F}$, alors
$$DN(x) \cdot (h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(N(x+th) - N(x) \right) \ .$$
En déduire que N n'est pas différentiable en $0 \in \mathscr{F}$. Supposons N différentiable en $x \in \mathscr{F}$, alors justifier que N l'est aussi en λx, où $\lambda > 0$, et que $DN(x) = DN(\lambda x)$. En considérant la dérivée en $\lambda = 1$ de l'application $\lambda \mapsto N(\lambda x)$, montrer que $DN(x) \cdot (x) = N(x)$ et en déduire $|||DN(x)||| = 1$. [002516]

Exercice 15

Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ et de la norme associée $\|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Soit u un endomorphisme continu de $\mathscr{E}$ que l'on suppose symétrique, i.e.
$$\langle u(x),y \rangle = \langle x,u(y) \rangle \quad \text{pour tout } \ x,y \in \mathscr{E} \ .$$

1. Montrer que l'application $x \in \mathscr{E} \mapsto \langle u(x),x \rangle$ est différentiable sur $\mathscr{E}$ et calculer sa différentielle. L'application $x \mapsto \|x\|^2$ est donc différentiable.
2. On définit une application $\varphi : \mathscr{E} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = \frac{\langle u(x),x \rangle}{\langle x,x \rangle}$. Établir qu'il s'agit d'une application différentiable. Calculer ensuite $D\varphi$. Montrer que, pour un élément non nul $a \in \mathscr{E}$, on a $D\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est vecteur propre de u.

[002517]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. (Etude en 0). $|sin(1/x)| \leq 1$ par conséquent $|x^2 sin(1/x)| \leq x^2$. De même $|y^2 sin(1/y)| \leq y^2$. Par conséquent

$$|f(x,y)| \leq x^2 + y^2 \leq (\sqrt{x^2+y^2})^2 \leq (||(x,y)||_2)^2$$

Et donc

$$\lim_{||(x,y)|| \to 0} |f(x) - f(0)| = 0$$

et donc f est continue à l'origine. En remarquant que $||(x,y)||_2^2 = o(||(x,y)-(0,0)||_2)$ on a $f(x,y) = 0 + o(||(x,y)-(0,0)||_2)$ et donc f est différentiable en 0 et

$$Df(0) = 0.$$

Par conséquent f admet des dérivées partielles dans toutes les directions à l'origine qui sont nulles. La fonction f n'est pas contre par de classe C^1 à l'origine. Il suffit de remarquer que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur la droite $y = 0$ n'est pas continue en 0.

2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, f est continue en (x,y) et même de classe C^∞ en tant que composés sommes, produits et quotient de telles fonctions. Il reste à étudier f à l'origine. Or,

$$|f(x,y)| = \frac{|xy^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \leq |x| \leq ||(x,y)||_2.$$

Ainsi, f est continue à l'origine et y tend vers 0.

Montrons par l'absurde que f n'est pas dérivable à l'origine. Notons $Df(0)$ la (supposée) différentielle de f à l'origine. L'application linéaire $Df(0)$ s'obtient par la calcul de l'image de vecteurs de la base de $\mathbb{R}^2$. Calculons pour 'les dérivées directionnelles de f à l'origine :

$$D_{(1,0)}f(0) = [Df(0)]((1,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h(1,0)) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$$D_{(0,1)}f(0) = [Df(0)]((0,1)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h(0,1)) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Par conséquent, on a nécessairement

$$Df(0) = 0$$

Or,

$$D_{(1,1)}f(0) = [Df(0)]((1,1)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h(1,1)) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{2h^2}}{h} = \frac{1}{2} \neq 0$$

ce qui donne la contradiction recherchée.

Correction de l'exercice 3 ▲

En tout point (x_0, y_0) avec $x_0 \neq y_0$, f est continue et même de classe C^2 car composée (projections sur (0x) et (Oy)), différence et quotient de fonctions de classe C^2 dont le dénominateur ne s'annule pas. Dans ces points, la différentielle de f est donnée par la matrice jacobienne :

$$Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & , & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{g'(x_0)(x_0-y_0)-(g(x_0)-g(y_0))}{(x_0-y_0)^2} & , & \frac{-g'(y_0)(x_0-y_0)+(g(x_0)-g(y_0))}{(x_0-y_0)^2} \end{pmatrix}$$

qui est bien de classe C^1 (g étant de classe C^2, g' est de classe C^1). Montrons que F est continue aux points de la forme (a,a). Le DL de g à l'ordre 2 entre x et y donne $g(y) = g(x) + (y-x)g'(c_{x,y})$ avec $c \in [x,y]$ d'où

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{g(x)-g(y)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(a,a)} g'(c_{x,y}) = g'(a) = F(a,a)$$

car comme (x,y) tend vers (a,a), x et y tendent tous les deux vers a et donc $c_{x,y}$ aussi (et g' est continue). Pour montrer que F est C^1 (sachant que F est continue), il suffit de montrer que la différentielle de F se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}^2$. Le DL de g à l'ordre 2 entre x_0 et y_0 est :

$$g(x_0) = g(y_0) + (x_0 - y_0)g'(y_0) + \frac{(x_0 - y_0)^2}{2} g^{(2)}(c_1) \text{ avec } c_1 \in [x_0, y_0].$$

$$g(y_0) = g(x_0) + (y_0 - x_0)g'(x_0) + \frac{(y_0 - x_0)^2}{2} g^{(2)}(c_2) \text{ avec } c_2 \in [x_0, y_0].$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{(x_0 - y_0)^2 g^{(2)}(c_2)}{2(x_0 - y_0)^2} = \frac{g^{(2)}(c_2)}{2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{(x_0 - y_0)^2 g^{(2)}(c_1)}{2(x_0 - y_0)^2} = \frac{g^{(2)}(c_1)}{2}$$

La fonction g étant de classe C^2, on a

$$\lim_{(x_0,y_0)\to(a,a)} Df(x_0,y_0) = \left(\quad g^{(2)}(a)/2 \quad , \quad g^{(2)}(a)/2 \quad \right)$$

et donc Df se prolonge par continuité sur tout $\mathbb{R}^2$. F est donc bien de classe C^1.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $F_1(P) = \int_0^1 P^3 - P^2 dt$, et soit h un polynôme de degré n alors

$$F_1(P+h) - F_1(P) = \int_0^1 [(P^3 + 3P^2h + 3Ph^2 + h^3) + (P^2 + 2Ph + h^2) - P^3 - P^2] dt =$$

$$\int_0^1 h(3P^2 + 2P)dt + \int_0^1 3Ph^2 + h^3 + h^2 dt$$

Or $|\int_0^1 3Ph^2 + h^3 + h^2 dt| = o(||h||_\infty)$ donc

$$DF_1(h) = \int_0^1 (3P^2 + 2P)h dt.$$

Soit $F_2(P) = P' - P^2$ et soit h un polynôme de degré n alors

$$F_2(P+h) - F_2(P) = (P+h)' - (P+h)^2 - P' + P^2 = h' - 2Ph - h^2$$

Or $h^2 = o(||h||)$ (pour toute norme a choisir). On a donc

$$DF_2(h) = h' - 2Ph.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. On a $g(x,y) = < f(x,y) - a, f(x,y) - a >$ où $< .,. >$ est le produit scalaire Euclidien sur $\mathbb{R}^2$. L'application g est différentiable en tant que composée et produit de fonctions différentiables. La différentielle Df est donné par la matrice Jacobienne
$$(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y})$$
et Dg par la matrice
$$(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial g(x,y)}{\partial y})$$

On a alors
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} < f(x,y)-a, f(x,y)-a >=$$
$$< \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)-a), f(x,y)-a > + < f(x,y)-a, \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)-a) >=$$
$$2 < \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, f(x)-a > .$$
De même,
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2 < \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, f(x)-a > .$$

2. L'application f est continue (car différentiable) et tend vers l'infini quand (x,y) tend vers l'infini. Ainsi
$$\forall A > 0, \exists B > 0, ||(x,y)|| \geq B \Rightarrow ||f(x,y)|| \geq A.$$
Soit $m = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y)$, pour $A = m+1$, il existe $B > 0$ tel que
$$||(x,y)|| \geq B \Rightarrow g(x,y) = ||f(x,y)||^2 \geq A^2 \geq (m+1)^2 \geq m+1.$$
On a donc
$$m = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y) = \inf_{||(x,y)||\leq B} g(x,y).$$
Or la boule $\overline{B}(0,B)$ étant compacte et g continue, l'inf y est ateint en un point $X_0 = (x_0,y_0) \in B(0,B) \subset \mathbb{R}^2$. Comme X_0 est un minimum global de g, c'est aussi un minimum de la restriction de g sur toute droite passant par X_0. Comme la dérivé d'une fonction réelle en un minimum est nulle, toute les dérivées partielles de g sont nulles et donc $Dg(X_0) = 0$ et par conséquent la matrice jacobienne de g est nulle. On a donc
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = 2 < \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), f(x)-a >= 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 2 < \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), f(x)-a >= 0.$$
Comme Df est injective, ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent les projections de $f(x)-a$ sur la base $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0); \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0))$ sont nulles et donc
$$f(x_0,y_0) - a = 0 \Leftrightarrow f(x_0,y_0) = a$$
et donc a admet bien un antécédent. Ceci étant valable pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, on a montré que f est surjective.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Pour montrer que $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \leq 1$, il faut montrer que si $h \in \mathbb{R}^n$, on a $|Df(x).h| \leq ||h||$. On a
$$|Df(x).h| = |D_h f(x)| = |\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}|.$$
Or f est 1-lipschitzienne et donc $|f(x+th)-f(x)| \leq ||th|| = t||h||$. Par conséquent pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $|Df(x).h| \leq ||h||$ ce qui donne l'inégalité demandée.

2. $$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{f((1-t)x+ty)-f(x)}{t} =$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t} = Df(x).(y-x).$$
Ou encore, soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ l'application $\psi(t) = (1-t)x+ty$, on a alors $\varphi(t) = f\circ\psi$ et d'après la formule de différentielle d'une composition :
$$\varphi'(0) = Df(\psi(0)).D\psi(0) = Df(x).(y-x).$$

Or,
$$d(x,F) = d(x,y) = ||x-y|| = \frac{1}{1-t}||(1-t)(x-y)|| =$$
$$\frac{1}{1-t}||[(1-t)x+ty]-[ty+(1-t)y]|| = \frac{1}{1-t}d((1-t)x+ty,y).$$
Notons $x_t = (1-t)x+ty$, on a alors
$$d(x_t,y) = (1-t)d(x,F).$$
Or, $\varphi(t) = d(x_t,F) \leq d(x_t,y) \leq (1-t)d(x,y) \leq \varphi(0)$ et donc
$$|\varphi'(0)| = \lim_{t\to 0}\frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(0)-\varphi(t)}{t} \geq$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{d(x,y)-(1-t)d(x,y)}{t} \geq d(x,y) = ||x-y||.$$
Donc
$$|Df(x)(x-y)| \geq ||x-y||$$
d'où la deuxième inégalité.

3. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux point y_1 et y_2 tels que $d(x,F) = d(x,y_1) = d(x,y_2)$. Alors, de la même manière que précédement, on a $Df(x).(x-y_1) = Df(x).(x-y_2) = d(x,F)$ et donc $Df(x).(x-y_1+x-y_2) = 2d(x,F)$. Or, $||x-y_1+x-y_2|| < 2d(x,F)$ car les vecteurs $x-y_1$ et $x-y_2$ ne sont pas alignés. Mais alors cela contredit le fait que $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^\backslash,\mathbb{R})} = 1$.
