



Fonctions de plusieurs variables

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable

Exercice 1 ** I

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
2. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
3. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$
4. $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|+|y|}\sqrt{|x|}}$ en $(0,0)$
5. $\frac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ en $(0,0)$
6. $\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$ en $(0,0)$
7. $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(0,0,0)$
8. $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(2,-2,0)$

[Correction ▼](#)

[005887]

Exercice 2 *** I

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Montrer que f est de classe C^1 (au moins) sur \mathbb{R}^2 .

[Correction ▼](#)

[005888]

Exercice 3 *** I

Soit $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$.

Déterminer le plus grand sous-ensemble de \mathbb{R}^2 sur lequel f est de classe C^1 . Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

[Correction ▼](#)

[005889]

Exercice 4 **

Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur lui-même.

$$(x,y) \mapsto (e^x - e^y, x+y)$$

[Correction ▼](#)

[005890]

Exercice 5 ***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $y^{2n+1} + y - x = 0$ définit implicitement une fonction φ sur \mathbb{R} telle que : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), [y^{2n+1} + y - x = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)]$.

Montrer que φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et calculer $\int_0^2 \varphi(t) dt$.

[Correction ▼](#)

[005891]

Exercice 6 ***

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction implicitement définie sur un voisinage de 0 par l'égalité $e^{x+y} + y - 1 = 0$.

[Correction ▼](#)

[005892]

Exercice 7 *

Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^1 . On dit que f est positivement homogène de degré r (r réel donné) si et seulement si $\forall \lambda \in]0, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}^n, f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$.

Montrer pour une telle fonction l'identité d'EULER :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x).$$

[Correction ▼](#)

[005893]

Exercice 8 ** I

Extremums des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$

2. $f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$.

[Correction ▼](#)

[005894]

Exercice 9 * I**

Soit $f : \begin{matrix} GL_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{matrix}$. Montrer que f est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle.

[Correction ▼](#)

[005895]

Exercice 10 *

Déterminer $\text{Max}\{|\sin z|, z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.

[Correction ▼](#)

[005896]

Exercice 11 **

Les formes différentielles suivantes sont elles exactes ? Si oui, intégrer et si non chercher un facteur intégrant.

1. $\omega = (2x + 2y + e^{x+y})(dx + dy)$ sur \mathbb{R}^2 .

2. $\omega = \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$ sur $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x\}$

3. $\omega = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} - ydy$

4. $\omega = \frac{1}{x^2y}dx - \frac{1}{xy^2}dy$ sur $]0, +\infty[^2$ (trouver un facteur intégrant non nul ne dépendant que de $x^2 + y^2$).

[Correction ▼](#)

[005897]

Exercice 12 * I**

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1. $2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en posant $u = x + y$ et $v = x + 2y$.

2. $x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en passant en polaires.
3. $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ en posant $x = u$ et $y = uv$.

[Correction ▼](#)

[005898]

Exercice 13 **

Déterminer la différentielle en tout point de $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y) \mapsto x \cdot y \qquad (x, y) \mapsto x \wedge y$$

[Correction ▼](#)

[005899]

Exercice 14 **

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $B = \{x \in E / \|x\| < 1\}$. Montrer que $f : E \rightarrow B$ est un homéomorphisme.

$$x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|}$$

[Correction ▼](#)

[005900]

Exercice 15 **

$E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Montrer que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et préciser df . Montrer que f n'est pas différentiable en 0.

$$x \mapsto \|x\|_2$$

[Correction ▼](#)

[005901]

Exercice 16 ***

Maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle.

[Correction ▼](#)

[005902]

Exercice 17 *

Minimum de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, a réel donné.

[Correction ▼](#)

[005903]

Exercice 18 ***

Trouver une application non constante $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que l'application g définie sur \mathbb{R}^2 par $g(x, y) = f\left(\frac{\cos(2x)}{\cosh(2y)}\right)$ ait un laplacien nul sur un ensemble à préciser. (On rappelle que le laplacien de g est $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. Une fonction de laplacien nul est dite harmonique.)

[Correction ▼](#)

[005904]

Exercice 19 *** I

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation. Montrer que f est une rotation affine.

[Correction ▼](#)

[005905]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$. Quand x tend vers 0, le couple $(x,0)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers 0. Donc, si f a une limite réelle en 0, cette limite est nécessairement 0.

Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{1}{2}$. Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $\frac{1}{2} \neq 0$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \times |xy| \leq \frac{1}{2}|xy|$. Comme $\frac{1}{2}|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, il en est de même de f . $f(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

3. f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $y \neq 0$, $f(0,y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y}$. Quand y tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(0,y)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(0,y)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

4. f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{\sqrt{2x^2}}{2|x|\sqrt{|x|}} = \frac{1}{\sqrt{2|x|}}$. Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

5. f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\}$.

Pour $x \neq 0$, $f(x, -x + x^3) = \frac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(x, -x + x^3)$ tend vers $(0,0)$ et $f(x, -x + x^3)$ tend vers $-\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

6. f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$.

$\frac{1 - \cos \sqrt{|xy|}}{|y|} \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\sim} \frac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|} = \frac{|x|}{2}$ et donc f tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

7. f est définie sur \mathbb{R}^3 privé du cône de révolution d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 0$.

$f(x,0,0) = \frac{1}{x}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0,0)$.

8. $f(2+h, -2+k, l) = \frac{h+k}{h^2-k^2+l^2+4h+4k} = g(h,k,l)$. $g(h,0,0)$ tend vers $\frac{1}{4}$ quand h tend vers 0 et $g(0,0,l)$ tend vers 0 $\neq \frac{1}{4}$ quand l tend vers 0. Donc, f n'a pas de limite réelle quand (x,y,z) tend vers $(2,-2,0)$.

Correction de l'exercice 2 ▲

• f est définie sur \mathbb{R}^2 .

• f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

• **Continuité en $(0,0)$.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|xy||x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leq |xy| \times \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = |xy|.$$

Comme $|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, on a donc $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$.

On en déduit que f est continue en $(0,0)$ et finalement f est continue sur \mathbb{R}^2 .

f est de classe C^0 au moins sur \mathbb{R}^2 .

• **Dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.** f est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - (x^3 - xy^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2},$$

D'autre part, pour $(x,y) \neq (0,0)$ $f(x,y) = -f(y,x)$. Donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

- **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

et donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Ainsi, f admet des dérivées partielles premières sur \mathbb{R}^2 définies par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- **Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$.** Pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| = \left| \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq |y| \frac{x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq |y| \frac{2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, on en déduit que $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right|$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$. Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$ et finalement sur \mathbb{R}^2 . Il en est de même de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on a montré que

f est au moins de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Correction de l'exercice 3 ▲

On pose $D = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ puis $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D$.

- f est définie sur \mathbb{R}^2 .
- f est de classe C^1 sur Ω en vertu de théorèmes généraux et pour $(x, y) \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

- Etudions la continuité de f en $(0, 0)$. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \begin{cases} y^2 \left| \sin\left(\frac{x}{y}\right) \right| & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leq \begin{cases} y^2 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leq y^2.$$

Comme y^2 tend vers 0 quand (x, y) tend vers 0, $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \neq (0, 0)}} f(x, y) = f(0, 0)$ et donc f est continue en $(0, 0)$ puis

f est continue sur \mathbb{R}^2 .

- Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$, x_0 réel donné. Pour $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x, 0) - f(x_0, 0)}{x - x_0} = \frac{0 - 0}{x - x_0} = 0.$$

Donc $\frac{f(x, 0) - f(x_0, 0)}{x - x_0}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 . On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = 0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y \cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

- Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$, x_0 réel donné. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0} = \frac{y^2 \sin\left(\frac{x_0}{y}\right)}{y} = y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

On en déduit que $\left| \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0} \right| \leq |y|$ puis que $\frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0}$ tend vers 0 quand y tend vers 0. Par suite, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = 0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

- Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0, 0)$, x_0 réel donné. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) \right| = \begin{cases} |y| \left| \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right| & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leq |y|.$$

Quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, $|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$ quand (x, y) tend vers $(x_0, 0)$. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(x_0, 0)$ et finalement

la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

- Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0, 0)$, x_0 réel donné. Supposons tout d'abord $x_0 = 0$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| = \begin{cases} \left| 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right| & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leq 2|y| + |x|.$$

Quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, $|x| + 2|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$.

Supposons maintenant $x_0 \neq 0$. Pour $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = 2y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right) - x_0 \cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$. Quand y tend vers 0, $2y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right)$ tend vers 0 car $\left| 2y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right) \right|$ et $x_0 \cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$ n'a pas de limite réelle car $x_0 \neq 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$ n'a pas de limite quand y tend vers 0 et la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0, 0)$ si $x_0 \neq 0$. On a montré que

f est de classe C^1 sur $\Omega \cup \{(0, 0)\}$.

- Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$.

- Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = \frac{y \cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y} = 1.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$. On a montré que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et sont différents. D'après le théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\Omega \cup \{(0, 0)\}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = (z, t) &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x - e^y = z \\ x + y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t - x \\ e^x - e^{t-x} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t - x \\ (e^x)^2 - ze^x - e^t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = t - x \\ e^x = z - \sqrt{z^2 + 4e^t} \text{ ou } e^x = z + \sqrt{z^2 + 4e^t} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = z + \sqrt{z^2 + 4e^t} \\ y = t - x \end{cases} \quad (\text{car } z - \sqrt{z^2 + 4e^t} < z - \sqrt{z^2} = z - |z| \leq 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(z + \sqrt{z^2 + 4e^t}) \\ y = t - \ln(z + \sqrt{z^2 + 4e^t}) \end{cases} \quad (\text{car } z + \sqrt{z^2 + 4e^t} > z + \sqrt{z^2} = z + |z| \geq 0).\end{aligned}$$

Ainsi, tout élément $(z, t) \in \mathbb{R}^2$ a un antécédent et un seul dans \mathbb{R}^2 par φ et donc φ est une bijection de \mathbb{R}^2 sur lui-même.

La fonction φ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 de jacobien $J_\varphi(x, y) = \begin{vmatrix} e^x & -e^y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = e^x + e^y$. Le jacobien de φ ne s'annule pas sur \mathbb{R}^2 . En résumé, φ est une bijection de \mathbb{R}^2 sur lui-même, de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et le jacobien de φ ne s'annule pas sur \mathbb{R}^2 . On sait alors que

φ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur lui-même.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : y \mapsto y^{2n+1} + y - x$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur \mathbb{R} . Donc la fonction f_x réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]\lim_{y \rightarrow -\infty} f_x(y), \lim_{y \rightarrow +\infty} f_x(y)[= \mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y) = 0$ a une et une seule solution dans \mathbb{R} que l'on note $\varphi(x)$.

La fonction $f : (x, y) \mapsto y^{2n+1} + y - x$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 et de plus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (2n+1)y^{2n} + 1 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction φ implicitement définie par l'égalité $f(x, y) = 0$ est dérivable en tout réel x et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi(x))^{2n+1} + \varphi(x) - x = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $(2n+1)\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n} + \varphi'(x) - 1 = 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{(2n+1)(\varphi(x))^{2n+1}}.$$

Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ est p fois dérivable sur \mathbb{R} .

- C'est vrai pour $p = 1$.

- Soit $p \geq 1$. Supposons que la fonction φ soit p fois dérivable sur \mathbb{R} . Alors la fonction $\varphi' = \frac{1}{(2n+1)\varphi^{2n+1}}$ est p fois dérivable sur \mathbb{R} en tant qu'inverse d'une fonction p fois dérivable sur \mathbb{R} ne s'annulant pas sur \mathbb{R} . On en déduit

que la fonction φ est $p+1$ fois dérivable sur \mathbb{R} .

On a montré par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ est p fois dérivable sur \mathbb{R} et donc que

la fonction φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Calculons maintenant $I = \int_0^2 \varphi(t) dt$. On note tout d'abord que, puisque $0^{2n+1} + 0 - 0 = 0$, on a $\varphi(0) = 0$ et puisque $1^{2n+1} + 1 - 2 = 0$, on a $\varphi(2) = 1$.

Maintenant, pour tout réel x de $[0, 2]$, on a $\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1} + \varphi'(x)\varphi(x) - x\varphi'(x) = 0$ (en multipliant par $\varphi'(x)$ les deux membres de l'égalité définissant $\varphi(x)$) et en intégrant sur le segment $[0, 2]$, on obtient

$$\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1} dx + \int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x) dx - \int_0^2 x\varphi'(x) dx = 0 (*).$$

Or, $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1} dx = \left[\frac{(\varphi(x))^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^2 = \frac{1}{2n+2}$. De même, $\int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x) dx = \left[\frac{(\varphi(x))^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2}$ et donc $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1} dx - \int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x) dx = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2n+2}$. D'autre part, puisque les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \varphi(x)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, 2]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$- \int_0^2 x\varphi'(x) dx = [-x\varphi(x)]_0^2 + \int_0^2 \varphi(x) dx = -2 + I.$$

L'égalité (*) s'écrit donc $\frac{n+2}{2n+2} - 2 + I = 0$ et on obtient $I = \frac{3n+2}{2n+2}$.

$$\int_0^2 \varphi(x) dx = \frac{3n+2}{2n+2}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : y \mapsto e^{x+y} + y - 1$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur \mathbb{R} . Donc la fonction f_x réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]\lim_{y \rightarrow -\infty} f_x(y), \lim_{y \rightarrow +\infty} f_x(y)[= \mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y) = 0$ a une et une seule solution dans \mathbb{R} que l'on note $\varphi(x)$.

La fonction $f : (x, y) \mapsto e^{x+y} + y - 1$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 et de plus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} + 1 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction φ implicitement définie par l'égalité $f(x, y) = 0$ est dérivable en tout réel x et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x+\varphi(x)} + \varphi(x) - 1 = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1 + \varphi'(x))e^{x+\varphi(x)} + \varphi'(x) = 0$ ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\frac{e^{x+\varphi(x)}}{e^{x+\varphi(x)}+1} (*).$$

On en déduit par récurrence que φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et en particulier admet en 0 un développement limité d'ordre 3. Déterminons ce développement limité.

1ère solution. Puisque $e^{0+0} + 0 - 1 = 0$, on a $\varphi(0) = 0$. L'égalité (*) fournit alors $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$ et on peut poser $\varphi(x) = -\frac{1}{2}x + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$. On obtient

$$\begin{aligned} e^{x+\varphi(x)} &= e^{\frac{x}{2}+ax^2+bx^3+o(x^3)} \\ &= 1 + \left(\frac{x}{2} + ax^2 + bx^3\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} + ax^2\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \left(a + \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(b + \frac{a}{2} + \frac{1}{48}\right)x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

L'égalité $e^{x+\varphi(x)} + \varphi(x) - 1 = 0$ fournit alors $a + \frac{1}{8} + a = 0$ et $b + \frac{a}{2} + \frac{1}{48} + b = 0$ ou encore $a = -\frac{1}{16}$ et $b = \frac{1}{192}$.

2ème solution. On a déjà $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$. En dérivant l'égalité (*), on obtient

$$\varphi''(x) = -\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)}+1) - (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)})}{(e^{x+\varphi(x)}+1)^2} = -\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{(e^{x+\varphi(x)}+1)^2},$$

et donc $\frac{\varphi''(0)}{2} = -\frac{\frac{1}{2}}{2 \times 2^2} = -\frac{1}{16}$. De même,

$$\varphi^{(3)}(x) = -\varphi''(x) \frac{e^{x+\varphi(x)}}{(e^{x+\varphi(x)}+1)^2} - (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)} \frac{(1+\varphi'(x))}{(e^{x+\varphi(x)}+1)^2} + (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)} \frac{2(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{(e^{x+\varphi(x)}+1)^3},$$

et donc $\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1/2}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{192}$. La formule de TAYLOR-YOUNG refournit alors

$$\varphi(x) = -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{384} + o(x^3).$$

Correction de l'exercice 7 ▲

On dérive par rapport à λ les deux membres de l'égalité $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$ et on obtient

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda > 0, \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = r \lambda^{r-1} f(x),$$

et pour $\lambda = 1$, on obtient

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x).$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Donc si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 , (x_0, y_0) est un point critique de f .

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6xy - 15 = 0 \\ 3x^2 - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Réciproquement, $r = 6x + 6y$, $t = 0$ et $s = 6x$ puis $rt - s^2 = -36x^2$. Ainsi, $(rt - s^2)(2, \frac{1}{4}) = (rt - s^2)(-2, -\frac{1}{4}) = -144 < 0$ et f n'admet pas d'extremum local en $(2, \frac{1}{4})$ ou $(-2, -\frac{1}{4})$.

f n'admet pas d'extremum local sur \mathbb{R}^2 .

2. La fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) est un point critique de f . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -4(x-y) + 4x^3 = 0 \\ 4(x-y) + 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ -4(x-y) + 4x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ (0, 0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \right\}. \end{aligned}$$

Réciproquement, f est plus précisément de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et

$$r(x, y)t(x, y) - s^2(x, y) = (-4 + 12x^2)(-4 + 12y^2) - (4)^2 = -48x^2 - 48y^2 + 144x^2y^2 = 48(3x^2y^2 - x^2 - y^2)$$

• $(rt - s^2)(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 48(12 - 2 - 2) > 0$. Donc f admet un extremum local en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Plus précisément, puisque $r(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2 \times 12 - 4 = 20 > 0$, f admet un minimum local en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. De plus, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) &= -2(x-y)^2 + x^4 + y^4 - 8 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8 \\ &\geq x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 2(x^2 + y^2) + 8 = (x^4 - 4x^2 + 4) + (y^4 - 4y^2 + 4) = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

et $f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est un minimum global.

• Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x, -y) = f(x, y)$ et donc f admet aussi un minimum global en $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ égal à 8.

• $f(0, 0) = 0$. Pour $x \neq 0$, $f(x, x) = 2x^4 > 0$ et donc f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0, 0)$ dans tout voisinage de $(0, 0)$. Pour $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\setminus \{0\}$, $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ et f prend des valeurs strictement inférieures à $f(0, 0)$ dans tout voisinage de $(0, 0)$. Finalement, f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

f admet un minimum global égal à 8, atteint en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Correction de l'exercice 9 ▲

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\| \cdot \|$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de norme suffisamment petite, $A + H \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour un tel H

$$(A + H)^{-1} - A^{-1} = (A + H)^{-1}(I_n - (A + H)A^{-1}) = -(A + H)^{-1}HA^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned} (A + H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} &= -(A + H)^{-1}HA^{-1} + A^{-1}HA^{-1} = (A + H)^{-1}(-HA^{-1} + (A + H)A^{-1}HA^{-1}) \\ &= (A + H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}. \end{aligned}$$

Par suite, $\|f(A + H) - f(A) + A^{-1}HA^{-1}\| = \|(A + H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\| \leq \|(A + H)^{-1}\| \|A^{-1}\|^2 \|H\|^2$.
Maintenant, la formule $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t(\text{com}(M))$, valable pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, et la continuité du déterminant montre que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\|(A + H)^{-1}\|$ tend vers $\|A^{-1}\|$ quand H tend vers 0. Par suite,

$$\lim_{H \rightarrow 0} \|(A + H)^{-1}\| \|A^{-1}\|^2 \|H\| = 0 \text{ et donc } \lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{\|H\|} \|(A + H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\| = 0.$$

Comme l'application $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ est linéaire, c'est la différentielle de f en A .

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Pour tout complexe z tel que $|z| \leq 1$,

$$|\sin(z)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sh}(|z|) \leq \text{sh} 1,$$

l'égalité étant obtenue effectivement pour $z = i$ car $|\sin(i)| = \left| \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} \right| = \frac{e - e^{-1}}{2} = \text{sh}(1)$.

$$\text{Max}\{|\sin z|, z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\} = \text{sh}(1).$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $P(x, y) = 2x + 2y + e^{x+y} = Q(x, y)$. Les fonctions P et Q sont de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 qui est un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 . Donc, d'après le théorème de SCHWARZ, ω est exacte sur \mathbb{R}^2 si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et comme $\frac{\partial P}{\partial y} = 2 + e^{x+y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, la forme différentielle ω est une forme différentielle exacte sur \mathbb{R}^2 .

Soit f une fonction f de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned} df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y + e^{x+y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y + e^{x+y} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x, y) = x^2 + 2xy + e^{x+y} + g(y) \\ 2x + e^{x+y} + g'(y) = 2x + 2y + e^{x+y} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x, y) = x^2 + 2xy + e^{x+y} + g(y) \\ g(y) = y^2 + \lambda \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (x + y)^2 + e^{x+y} + \lambda. \end{aligned}$$

Les primitives de ω sur \mathbb{R}^2 sont les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto (x+y)^2 + e^{x+y} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque. On pouvait aussi remarquer immédiatement que si $f(x, y) = (x+y)^2 + e^{x+y}$ alors $df = \omega$.

2. La forme différentielle ω est de classe C^1 sur $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x\}$ qui est un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 car convexe. Donc, d'après le théorème de SCHWARZ, ω est exacte sur Ω si et seulement si ω est fermée sur Ω .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x-y)^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x-y} + y \frac{1}{(x-y)^2} \right) = -\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{2y}{(x-y)^3} = -\frac{x+y}{(x-y)^3} = \frac{x+y}{(y-x)^3} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{(x-y)^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{y-x} - x \frac{1}{(y-x)^2} \right) = \frac{1}{(y-x)^2} + \frac{2x}{(y-x)^3} = \frac{x+y}{(y-x)^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x-y)^2} \right).\end{aligned}$$

Donc ω est exacte sur l'ouvert Ω . Soit f une fonction f de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned}df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \Omega, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{(x-y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{(x-y)^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \Omega, \begin{cases} f(x, y) = \frac{y}{x-y} + g(y) \\ \frac{x}{(x-y)^2} + g'(y) = \frac{x}{(x-y)^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \Omega, f(x, y) = \frac{y}{x-y} + \lambda.\end{aligned}$$

Les primitives de ω sur Ω sont les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto \frac{y}{x-y} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 mais n'est pas étoilé. On se place dorénavant sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \in]-\infty, 0]\}$ qui est un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 . Sur Ω , ω est exacte si et seulement si ω est fermée d'après le théorème de SCHWARZ.

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2+y^2} - y \right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)$. Donc ω est exacte sur Ω . Soit f une application de classe C^1 sur Ω .

$$\begin{aligned}df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \Omega, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2} - y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \Omega, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + g(y) \\ \frac{y}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} - y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \Omega, f(x, y) = \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2) - y^2) + \lambda.\end{aligned}$$

Les primitives de ω sur Ω sont les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2) - y^2) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les fonctions précédentes sont encore des primitives de ω sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et donc ω est exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

4. ω est de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$ qui est un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 . Donc ω est exacte sur $]0, +\infty[^2$ si et seulement si ω est fermée sur $]0, +\infty[^2$ d'après le théorème de SCHWARZ.

$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{xy^2} \right) = \frac{1}{x^2y^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2y} \right) = -\frac{1}{x^2y^2}$. Donc $\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{xy^2} \right) \neq \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2y} \right)$ et ω n'est pas exacte sur $]0, +\infty[^2$.

On cherche un facteur intégrant de la forme $h : (x, y) \mapsto g(x^2+y^2)$ où g est une fonction non nulle de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{xy^2} g(x^2+y^2) \right) = \frac{1}{x^2y^2} g(x^2+y^2) - \frac{2}{y^2} g'(x^2+y^2)$ et $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2y} g(x^2+y^2) \right) = -\frac{1}{x^2y^2} g(x^2+y^2) + \frac{2}{x^2} g'(x^2+y^2)$.

$$\begin{aligned}h\omega \text{ est exacte sur }]0, +\infty[^2 &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \frac{1}{x^2y^2} g(x^2+y^2) - \frac{2}{y^2} g'(x^2+y^2) = -\frac{1}{x^2y^2} g(x^2+y^2) + \frac{2}{x^2} g'(x^2+y^2) \\ &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \frac{1}{x^2y^2} g(x^2+y^2) - \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} g'(x^2+y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t > 0, -tg'(t) + g(t) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall t > 0, g(t) = \lambda t.\end{aligned}$$

La forme différentielle $(x^2 + y^2)\omega$ est exacte sur $]0, +\infty[^2$. De plus,

$$d\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right)dy = (x^2 + y^2)\omega.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Soit f une application de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Posons $f(x, y) = g(u, v)$ où $u = x + y$ et $v = x + 2y$. L'application $(x, y) \mapsto (x + y, x + 2y) = (u, v)$ est un automorphisme de \mathbb{R}^2 et en particulier un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur lui-même.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(g(u, v)) = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

De même, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}$ et donc

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} - 2\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u}.$$

Par suite, $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, g(u, v) = h(v) \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = h(x + 2y)$.

Les solutions sont les $(x, y) \mapsto h(x + 2y)$ où $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Par exemple, la fonction $(x, y) \mapsto \cos \sqrt{(x + 2y)^2 + 1}$ est solution.

2. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Posons $f(x, y) = g(r, \theta)$ où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. L'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$ est un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(f(x, y)) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(x, y)) = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}) / \forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times [0, 2\pi[, g(r, \theta) = h_1(r) \\ &\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = h_1\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = h(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Les solutions sont les $(x, y) \mapsto h(x^2 + y^2)$ où $h \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

3. Soit f une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. D'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Soit $\varphi :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Donc si on pose $f(x, y) = g(u, v)$, on a $g = f \circ \varphi$.

$$(u, v) \mapsto (u, uv) = (x, y)$$

Soit $(x, y, u, v) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

$$\varphi(u, v) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ uv = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Ainsi, φ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même et sa réciproque est l'application

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} :]0, +\infty[\times \mathbb{R} &\rightarrow]0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \left(x, \frac{y}{x}\right) = (u, v) \end{aligned}$$

De plus, φ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et son jacobien

$$J_{\varphi}(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

ne s'annule pas sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. On sait alors que φ est un C^2 -difféomorphisme de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ sur lui-même.

Puisque $g = f \circ \varphi$ et que φ est un C^2 -difféomorphisme de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ sur lui-même, f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ si et seulement si g est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \right) + \left(\frac{2y}{x^3} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \frac{1}{x} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2y \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x} \frac{\partial g}{\partial v} + 2y \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} - \frac{2y}{x} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{2y^2}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ &= x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 0 \Leftrightarrow \forall (u, v) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (u, v) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = h(v) \\ &\Leftrightarrow \exists (h, k) \in (C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2 / \forall (u, v) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, g(u, v) = uh(v) + k(v) \\ &\Leftrightarrow \exists (h, k) \in (C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2 / \forall (x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, f(x, y) = xh(xy) + k(xy). \end{aligned}$$

Les fonctions solutions sont les $(x, y) \mapsto xh(xy) + k(xy)$ où h et k sont deux fonctions de classe C^2 sur \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 13 ▲

On munit $(\mathbb{R}^3)^2$ de la norme définie par $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \|(x, y)\| = \text{Max}\{\|h\|_2, \|k\|_2\}$.

- Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Pour $(h, k) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$f((a, b) + (h, h)) = (a + h) \cdot (b + k) = a \cdot b + a \cdot h + b \cdot k + h \cdot k,$$

et donc $f((a, b) + (h, h)) - f((a, b)) = (a \cdot h + b \cdot k) + h \cdot k$. Maintenant l'application $L : (h, k) \mapsto a \cdot h + b \cdot k$ est linéaire et de plus, pour $(h, k) \neq (0, 0)$,

$$|f((a, b) + (h, h)) - f((a, b)) - L((h, k))| = |h \cdot k| \leq \|h\|_2 \|k\|_2 \leq \|(h, k)\|^2,$$

et donc $\frac{1}{\|(h, k)\|} |f((a, b) + (h, h)) - f((a, b)) - L((h, k))| \leq \|(h, k)\|$ puis

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{\|(h, k)\|} |f((a, b) + (h, h)) - f((a, b)) - L((h, k))| = 0.$$

Puisque l'application $(h, k) \mapsto a \cdot h + b \cdot k$ est linéaire, on en déduit que f est différentiable en (a, b) et que $\forall (h, k) \in (\mathbb{R}^3)^2, df_{(a, b)}(h, k) = a \cdot h + b \cdot k$.

La démarche est analogue pour le produit vectoriel :

$$\frac{1}{\|(h, k)\|} \|(a + h) \wedge (b + k) - a \wedge b - a \wedge h - b \wedge k\|_2 = \frac{\|h \wedge k\|_2}{\|(h, k)\|} \leq \frac{\|h\|_2 \|k\|_2}{\|(h, k)\|} \leq \|(h, k)\|.$$

Puisque l'application $(h, k) \mapsto a \wedge h + b \wedge k$ est linéaire, on en déduit que g est différentiable en (a, b) et que $\forall (h, k) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $dg_{(a,b)}(h, k) = a \wedge h + b \wedge k$.

Correction de l'exercice 14 ▲

• Pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < \frac{\|x\|+1}{\|x\|+1} = 1$. Donc f est bien une application de E dans B .

• Si $y = 0$, pour $x \in E$, $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+\|x\|}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Soit alors $y \in B \setminus \{0\}$. Pour $x \in E$,

$$f(x) = y \Rightarrow x = (1 + \|x\|)y \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} / x = \lambda y.$$

Donc un éventuel antécédent de y est nécessairement de la forme λy , $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda y) = \frac{\lambda}{1+|\lambda||y|}y$ et donc

$$\begin{aligned} f(\lambda y) = y &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{1+|\lambda||y|} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 + |\lambda||y| \\ &\Leftrightarrow (\lambda \geq 0 \text{ et } (1 - \|y\|)\lambda = 1) \text{ ou } (\lambda < 0 \text{ et } (1 + \|y\|)\lambda = 1) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1 - \|y\|} \text{ (car } \|y\| < 1). \end{aligned}$$

Dans tous les cas, y admet un antécédent par f et un seul à savoir $x = \frac{1}{1-\|y\|}y$. Ainsi,

$$f \text{ est bijective et } \forall x \in B, f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|}x.$$

• On sait que l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur \mathbb{R}^2 . Donc l'application $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|}$ est continue sur \mathbb{R}^2 en tant qu'inverse d'une fonction continue sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} , ne s'annulant pas sur \mathbb{R}^2 . L'application $x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|}$ est continue sur B pour les mêmes raisons. Donc les applications f et f^{-1} sont continues sur \mathbb{R}^2 et B respectivement et on a montré que

l'application $f : E \rightarrow B$ est un homéomorphisme. $x \mapsto \frac{x}{1+\ x\ }$

Correction de l'exercice 15 ▲

1ère solution. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

On en déduit que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $h \in \mathbb{R}^n$

$$df_x(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \frac{1}{\|x\|_2} \sum_{i=1}^n x_i h_i = \frac{x|h}{\|x\|_2^2}.$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall h \in \mathbb{R}^n, df_x(h) = \frac{x h}{\ x\ _2^2}.$
--

2ème solution. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x+h\|_2 - \|x\|_2 = \frac{(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2} = \frac{2(x|h) + \|h\|_2^2}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2},$$

puis

$$\|x+h\|_2 - \|x\|_2 - \frac{x|h}{\|x\|_2} = \frac{2(x|h) + \|h\|_2^2}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2} - \frac{x|h}{\|x\|_2} = \frac{-(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) + \|x\|_2 \|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2}.$$

Maintenant, on sait que l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est continue sur \mathbb{R}^n . On en déduit que $\frac{1}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\|x\|_2^2}$ et aussi que $\|x+h\|_2 - \|x\|_2$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Ensuite, puisque $|(x|h)| \leq \|x\|_2 \|h\|_2$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ), on a $x|h \underset{h \rightarrow 0}{=} O(\|h\|_2)$ puis $(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(\|h\|_2)$.

Finalement, $\frac{-(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) + \|x\|_2 \|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2} \underset{h \rightarrow 0}{=} o(\|h\|_2)$ et donc

$$\|x+h\|_2 \underset{h \rightarrow 0}{=} \|x\|_2 + \frac{x|h}{\|x\|_2} + o(\|h\|_2).$$

Puisque l'application $h \mapsto \frac{x|h}{\|x\|_2}$ est linéaire, on a redémontré que f est différentiable en tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall h \in \mathbb{R}^n, df_x(h) = \frac{x|h}{\|x\|_2}$.
Soit L une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} c'est-à-dire une forme linéaire.

$$\frac{1}{\|h\|_2} (\|0+h\|_2 - \|0\|_2 - L(h)) = 1 - L\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right).$$

Supposons que cette expression tende vers 0 quand h tend vers 0. Pour u vecteur non nul donné et t réel non nul, l'expression $1 - L\left(\frac{tu}{\|tu\|_2}\right) = 1 - \frac{t}{|t|} L\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right)$ tend donc vers 0 quand t tend vers 0. Mais si t tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient $L(u) = \|u\|_2$ et si t tend vers 0 par valeurs inférieures, on obtient $L(u) = -\|u\|_2$ ce qui est impossible car $u \neq 0$. Donc f n'est pas différentiable en 0.

Correction de l'exercice 16 ▲

On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ et on note \mathcal{A} l'aire du triangle ABC . Soit M un point intérieur au triangle ABC . On note I, J et K les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC) , (CA) et (AB) respectivement. On pose $u = \text{aire de } MBC$, $v = \text{aire de } MCA$ et $w = \text{aire de } MAB$. On a

$$d(M, (BC)) \times d(M, (CA)) \times d(M, (AB)) = MI \times MJ \times MK = \frac{2u}{a} \times \frac{2v}{b} \times \frac{2w}{c} = \frac{8}{abc} uv(\mathcal{A} - u - v).$$

Il s'agit alors de trouver le maximum de la fonction $f : (u, v) \mapsto uv(\mathcal{A} - u - v)$ sur le domaine

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0, v \geq 0 \text{ et } u + v \leq \mathcal{A}\}.$$

T est un compact de \mathbb{R}^2 . En effet :

- $\forall (u, v) \in T^2, \|(u, v)\|_1 = u + v \leq \mathcal{A}$ et donc T est bornée.

- Les applications $\varphi_1 : (u, v) \mapsto u$, $\varphi_2 : (u, v) \mapsto v$ et $\varphi_3 : (u, v) \mapsto u + v$ sont continues sur \mathbb{R}^2 en tant que formes

linéaires sur un espace de dimension finie. Donc les ensembles $P_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0\} = \varphi_1^{-1}([0, +\infty[)$,

$P_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / v \geq 0\} = \varphi_2^{-1}([0, +\infty[)$ et $P_3 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u + v \leq \mathcal{A}\} = \varphi_3^{-1}([-\infty, \mathcal{A}])$ sont des fermés de \mathbb{R}^2

en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. On en déduit que $T = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est un

fermé de \mathbb{R}^2 en tant qu'intersection de fermés de \mathbb{R}^2 .

Puisque T est un fermé borné de \mathbb{R}^2 , T est un compact de \mathbb{R}^2 puisque \mathbb{R}^2 est de dimension finie et d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

f est continue sur le compact T à valeurs dans \mathbb{R} en tant que polynôme à plusieurs variables et donc f admet un maximum sur T .

Pour tout (u, v) appartenant à la frontière de T , on a $f(u, v) = 0$. Comme f est strictement positive sur $\overset{\circ}{T} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u > 0, v > 0 \text{ et } u + v < \mathcal{A}\}$, f admet son maximum dans $\overset{\circ}{T}$. Puisque f est de classe C^1 sur $\overset{\circ}{T}$ qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 , si f admet un maximum en $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{T}$, (u_0, v_0) est nécessairement un point critique de f . Soit $(u, v) \in \overset{\circ}{T}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(\mathcal{A} - 2u - v) = 0 \\ u(\mathcal{A} - u - 2v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + v = \mathcal{A} \\ u + 2v = \mathcal{A} \end{cases} \Leftrightarrow u = v = \frac{\mathcal{A}}{3}.$$

Puisque f admet un point critique et un seul à savoir $(u_0, v_0) = (\frac{\mathcal{A}}{3}, \frac{\mathcal{A}}{3})$, f admet son maximum en ce point et ce maximum vaut $f(u_0, v_0) = \frac{\mathcal{A}^3}{27}$. Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur au triangle ABC aux cotés de ce triangle est donc $\frac{8\mathcal{A}^3}{27abc}$.

Remarque. On peut démontrer que pour tout point M intérieur au triangle ABC , on a $M = \text{bar}((A, \text{aire de } MBC), (B, \text{aire de } MAC), (C, \text{aire de } MAB))$. Si maintenant M est le point en lequel on réalise le maximum, les trois aires sont égales et donc le maximum est atteint en G l'isobarycentre du triangle ABC .

Correction de l'exercice 17 ▲

Soient A et B les points du plan de coordonnées respectives $(0, a)$ et $(a, 0)$ dans un certain repère \mathcal{R} orthonormé. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} . Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \|\overrightarrow{MA}\|_2 + \|\overrightarrow{MB}\|_2 = MA + MB \geq AB \text{ avec égalité si et seulement si } M \in [AB].$$

Donc f admet un minimum global égal à $AB = a\sqrt{2}$ atteint en tout couple (x, y) de la forme $(\lambda a, (1 - \lambda)a)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Correction de l'exercice 18 ▲

Puisque la fonction ch ne s'annule pas sur \mathbb{R} , g est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -2 \frac{\sin(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right)$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= -4 \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) + 4 \frac{\sin^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} f'' \left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) \\ &= -4 \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) + 4 \frac{1 - \cos^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} f'' \left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right). \end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -2 \frac{\cos(2x) \text{sh}(2y)}{\text{ch}^2(2y)} f' \left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right)$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= -2 \cos(2x) \frac{2 \text{ch}^3(2y) - 4 \text{sh}^2(2y) \text{ch}(2y)}{\text{ch}^4(2y)} f' \left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) + 4 \frac{\cos^2(2x) \text{sh}^2(2y)}{\text{ch}^4(2y)} f'' \left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) \\ &= -4 \frac{\cos(2x)}{\text{ch}^3(2y)} (-\text{ch}^2(2y) + 2) f' \left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) + 4 \frac{\cos^2(2x) (\text{ch}^2(2y) - 1)}{\text{ch}^4(2y)} f'' \left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\text{ch}^2(2y)}{4} \Delta g(x, y) = -2 \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} \right) f'' \left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right).$$

Maintenant, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $-1 \leq \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \leq 1$ et d'autre part, l'expression $\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} = \cos(2x)$ décrit $[-1, 1]$ quand x décrit \mathbb{R} . Donc $\left\{ \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = [-1, 1]$. Par suite,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \Delta g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1, 1], (1 - t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0.$$

On cherche une application f de classe C^2 sur $] -1, 1[$. Or $\left| \frac{\cos(2x)}{\cosh(2y)} \right| = 1 \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \cosh(2y) \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \cosh(2y) = 1 \Leftrightarrow y = 0$ et $x \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left(\frac{k\pi}{2}, 0 \right), k \in \mathbb{Z} \right\}, \Delta g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in] -1, 1[, (1 - t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in] -1, 1[, ((1 - t^2)f'(t))' = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall t \in] -1, 1[, f'(t) = \frac{\lambda}{1 - t^2}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in] -1, 1[, f(t) = \lambda \operatorname{Arctanh} t + \mu.$$

De plus, f n'est pas constante si et seulement si $\mu = 0$.

L'application $t \mapsto \operatorname{Arctanh} t$ convient.

Correction de l'exercice 19 ▲

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de f en (x, y) s'écrit $\begin{pmatrix} c(x, y) & -s(x, y) \\ s(x, y) & c(x, y) \end{pmatrix}$ où c et s sont deux fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 telle que $c^2 + s^2 = 1$ (*). Il s'agit dans un premier temps de vérifier que les fonctions c et s sont constantes sur \mathbb{R}^2 .

Puisque f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , d'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Ceci s'écrit encore $\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$ ou enfin

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial s}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial c}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix} (**).$$

En dérivant (*) par rapport à x ou à y , on obtient les égalités $c \frac{\partial c}{\partial x} + s \frac{\partial s}{\partial x} = 0$ et $c \frac{\partial c}{\partial y} + s \frac{\partial s}{\partial y} = 0$. Ceci montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux au vecteur non nul $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ et sont donc colinéaires.

Mais l'égalité (**) montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont aussi orthogonaux l'un à l'autre.

Finalement, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial s}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$ sont nuls. On en déduit que les deux applications c et s sont constantes sur \mathbb{R}^2 et donc, il existe θ dans \mathbb{R} tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de f en (x, y) est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Soit g la rotation d'angle θ prenant la même valeur que f en $(0, 0)$. f et g ont mêmes différentielles en tout point et coïncident en un point. Donc $f = g$ et f est une rotation affine.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation.
Alors f est une rotation affine.