Chapitre 10

Les entiers

Objectifs

- Rappeler le principe de récurrence et ses applications.
- Établir la propriété fondamentale de $\mathbb{Z}$, le principe de la division euclidienne.
- Définir la notion d'ensemble fini et de cardinal. Étudier les propriétés du cardinal.
- Dénombrer les ensembles « classiques ».

Sommaire

I) Les ensembles d'entiers

L'existence des $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{Z}$ est admise. On rappelle que $(\mathbb{N},+)$ n'est pas un groupe, et que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif intègre.

1) La récurrence

THÉORÈME 10.1 (principe de récurrence)

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ vérifiant $0 \in A$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}, n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$, alors nécessairement $A = \mathbb{N}$.

Preuve: Ce théorème est admis. □

THÉORÈME 10.2

Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$ et E une partie de $\mathbb{Z}$ telle que $n_0 \in E$ et $\forall\ n \geqslant n_0$, $n \in E \Longrightarrow n+1 \in E$, alors pour tout entier n, $n \geqslant n_0 \Longrightarrow n \in E$.

Preuve: Soit $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n + n_0 \in E\}$, alors $0 \in A$ et si $n \in A$, alors $n+1 \in A$, d'après le principe de récurrence on a $A = \mathbb{N}$, ce qui signifie que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow n \in E$. □

On démontrerait de la même façon que si E est une partie de $\mathbb{Z}$ qui vérifie $n_0 \in E$ et $\forall\ n \in \mathbb{Z}, n \in E \Longrightarrow n-1 \in E$, alors $\forall\ n \in \mathbb{Z}, n \leqslant n_0 \Longrightarrow n \in E$.

Applications :

a) Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'une variable $n \in \mathbb{Z}$, soit $n_0 \in \mathbb{Z}$, si $P(n_0)$ est vraie et si $\forall\ n \in \mathbb{Z}, P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie, alors $\forall\ n \in \mathbb{Z}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow P(n)$ vraie.

b) Si $P(n_0)$ est vraie et si $\forall\ n \in \mathbb{Z}, (\forall\ k \in [\![n_0..n]\!], P(k)$ vraie$) \Longrightarrow P(n+1)$ vraie, alors $\forall\ n \in \mathbb{Z}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow P(n)$ vraie. Il suffit d'utiliser l'application précédente à la propriété $R(n) = (\forall\ k \in [\![n_0..n]\!], P(k)$ vraie$)$.

Exemples:

– Par récurrence on peut montrer les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

– Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de *Fibonacci*), alors on peut montrer par récurrence que pour tout n :

$$u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

en prenant comme hypothèse de récurrence que la propriété est vraie **jusqu'au rang n** avec $n \geqslant 1$.

2) La propriété fondamentale

THÉORÈME 10.3

Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et minorée admet un plus petit élément.

Preuve: Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et minorée par un entier n_0. Soit M l'ensemble des minorants de A, on a $n_0 \in M$, supposons que $n \in M \Longrightarrow n+1 \in M$, alors d'après le principe de récurrence, $\forall\ n \in \mathbb{Z}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow n \in M$. Soit $p \in A$, $p \geqslant n_0$, donc $p+1 \in M$ ce qui entraîne que $p+1 \leqslant p$: absurde, donc il existe un entier n_1 tel que $n_1 \in M$ et $n_1 + 1 \notin M$, mais alors il existe un élément p_1 de A tel que $p_1 < n_1 + 1$, d'où $n_1 \leqslant p_1 < n_1 + 1$, ce qui entraîne $p_1 = n_1$, et donc $n_1 \in A$, nécessairement n_1 est le plus petit élément de A. □

Conséquences :

a) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément. En effet, si A est non vide majorée, alors $-A = \{-a \ / \ a \in A\}$ est non vide minorée, donc $-A$ admet un plus petit élément $-n_0$, ce qui signifie que n_0 est le plus grand élément de A.

b) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (propriété fondamentale de $\mathbb{N}$). En effet, une partie non vide de $\mathbb{N}$ est une partie non vide de $\mathbb{Z}$ minorée par 0.

3) La division euclidienne

THÉORÈME 10.4

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < |b|$, q est appelé le quotient, et r le reste.

Preuve: Supposons $b > 0$: soit $B = \{b(n+1) \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$, alors B est non majoré et non minoré, donc il existe un entier n_1 tel que $a < b(n_1 + 1)$ et il existe un entier n_2 tel que $b(n_2 + 1) < a$. Soit $A = \{n \in \mathbb{Z} \ / \ a < b(n+1)\}$, alors A est non vide $(n_1 \in A)$ et minoré par n_2, donc A admet un plus petit élément q, d'où $bq \leqslant a < b(q+1)$, en posant $r = a - bq$, on a $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b = |b|$.

Supposons $b < 0$: on applique ce qui précède à $-b > 0$, il existe un entier q et un entier r tels que $a = (-b)q + r = b(-q) + r$ avec $0 \leqslant r < -b = |b|$.

Montrons l'unicité : si $a = bq + r = bq' + r'$ avec $0 \leqslant r < |b|$ et $0 \leqslant r' < |b|$, alors $|r - r'| = |bq' - bq| = |b||q' - q| < |b|$, d'où $q' = q$ (ce sont des entiers) et donc $r' = r$. □

DÉFINITION 10.1
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, on dit que b divise a lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$. Notation : $b|a$.

On a ainsi défini une relation dans $\mathbb{Z}$, elle est réflexive, non symétrique, non antisymétrique, et transitive.

THÉORÈME 10.5
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$, alors $b|a$ ssi le reste dans la division euclidienne de a par b est nul.

Preuve: Celle - ci est simple et laissée en exercice. □

DÉFINITION 10.2 (congruences)
Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$, on dit que a et congru à b modulo n lorsque $n \mid a - b$. Notation : $a \equiv b \pmod{n}$.

THÉORÈME 10.6

- *La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence.*
- *Soient $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$ alors :*

$$ac \equiv bd \pmod{n} \text{ et } a + c \equiv b + d \pmod{n}$$

On dit que la relation de congruence est compatible avec les opérations.

Preuve: Laissée en exercice. □

Exemple: Dans $\mathbb{Z}$, si $n = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^p a_p$ (écriture décimale) alors $n \equiv a_0 + \cdots + a_p \pmod{3}$ car $10^k \equiv 1 \pmod{3}$

II) Cardinal d'un ensemble fini

1) Injections, surjections

Rappels :

a) La composée de deux injections (respectivement surjections) est une injection (respectivement surjection).

b) Si $f : E \to F$ est injective, alors f **induit** une bijection de E sur $\mathrm{Im}(f)$.

c) Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

d) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.

e) Si $f : E \to F$ est une application, alors f induit une surjection de E sur $\mathrm{Im}(f)$.

f) Si $f : E \to F$ est surjective, alors il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

DÉFINITION 10.3
Soit E un ensemble, on appelle permutation de E toute bijection de E vers E. L'ensemble des permutations de E est noté $\mathscr{S}(E)$.

THÉORÈME 10.7
Soit E un ensemble non vide, alors $(\mathscr{S}(E), \circ)$ est un groupe (non commutatif en général), appelé groupe des permutations de E.

Preuve: Celle - ci est simple et laissée en exercice. On vérifie que l'élément neutre est l'application identité de E : id_E, et que le symétrique de $f \in \mathscr{S}(E)$ est la bijection réciproque f^{-1}. □

2) Ensembles finis

DÉFINITION 10.4

Soit E un ensemble non vide, on dit que E est fini lorsqu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $\phi : [\![1..n]\!] \to E$. Si c'est le cas, on pose $\operatorname{card}(E) = n$, sinon on dit que E est un ensemble infini. Par convention $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal nul.

Remarques :

a) Dire que E est fini de cardinal $n \geqslant 1$ revient à dire que l'on peut indexer les éléments de E de 1 à n : $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ (les éléments étant distincts deux à deux).

b) Si E est fini de cardinal $n+1$ et si $a \in E$, alors $E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal n.
En effet : soit $\phi : [\![1..n+1]\!] \to E$ une bijection, soit τ la permutation de E qui échange $\phi(n+1)$ et a, alors $\tau \circ \phi$ est une bijection de $[\![1..n+1]\!] \to E$ qui envoie $n+1$ en a, elle induit donc une bijection de $[\![1..n]\!]$ sur $E \setminus \{a\}$.

c) Si E est fini de cardinal n et $b \notin E$, alors $E \cup \{b\}$ est fini de cardinal $n+1$.

THÉORÈME 10.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, toute partie de $[\![1..n]\!]$ est un ensemble fini de cardinal au plus égal à n. De plus, si $F \subset [\![1..n]\!]$ et si $\operatorname{card}(F) = n$ alors $F = [\![1..n]\!]$.

Preuve: Par récurrence sur n : pour n=1 c'est évident. Supposons le théorème établi pour un entier $n \geqslant 1$ et soit F une partie de $[\![1..n+1]\!]$. Si $n+1 \notin F$, alors F est une partie de $[\![1..n]\!]$ donc (hypothèse de récurrence) F est fini et $\operatorname{card}(F) \leqslant n < n+1$. Si $n+1 \in F$, alors $F \setminus \{n+1\}$ est une partie de $[\![1..n]\!]$, donc $F \setminus \{n+1\}$ est un ensemble fini de cardinal $p \leqslant n$, mais alors F est fini de cardinal $p+1 \leqslant n+1$. Supposons maintenant que $\operatorname{card}(F) = n+1$, on a nécessairement $n+1 \in F$, d'où $F \setminus \{n+1\} \subset [\![1..n]\!]$ et $\operatorname{card}(F \setminus \{n+1\}) = n$, donc $F \setminus \{n+1\} = [\![1..n]\!]$ (hypothèse de récurrence) et finalement $F = [\![1..n+1]\!]$. □

THÉORÈME 10.9

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, et soit $f : [\![1..n]\!] \to [\![1..p]\!]$ une application :

- *Si f est injective, alors $n \leqslant p$.*
- *Si f est surjective, alors $n \geqslant p$.*
- *Si f est bijective, alors $n = p$.*

Preuve: On remarque que la troisième propriété découle des deux précédentes. Montrons la première : on a $f : [\![1..n]\!] \to [\![1..p]\!]$ une injection, alors f induit une bijection de $[\![1..n]\!]$ sur $\operatorname{Im}(f)$, donc $\operatorname{Im}(f)$ est fini de cardinal n, or $\operatorname{Im}(f)$ est une partie de $[\![1..p]\!]$, donc $\operatorname{Im}(f)$ est fini de cardinal au plus p, *i.e.* $n \leqslant p$.

Montrons la deuxième : $f : [\![1..n]\!] \to [\![1..p]\!]$ est surjective, alors il existe une application $g : [\![1..p]\!] \to [\![1..n]\!]$ telle que $f \circ g = \operatorname{id}_{[\![1..p]\!]}$, donc g est injective et par conséquent $p \leqslant n$. □

Conséquence : Soit E un ensemble fin non vide, il existe un entier $n \geqslant 1$ et une bijection $\phi : [\![1..n]\!] \to E$, s'il existe un autre entier p et une bijection $\psi : [\![1..p]\!] \to E$, alors l'application $\psi^{-1} \circ \phi$ est une bijection de $[\![1..n]\!]$ sur $[\![1..p]\!]$, donc $n = p$. Ce qui prouve l'unicité du nombre $\operatorname{card}(E)$ et justifie à posteriori la définition.

THÉORÈME 10.10

Soit $n \geqslant 1$, toute application injective (respectivement surjective) de $[\![1..n]\!]$ dans $[\![1..n]\!]$ est bijective.

Preuve: Si $f : [\![1..n]\!] \to [\![1..n]\!]$ est injective, alors f induit une bijection de $[\![1..n]\!]$ sur $\operatorname{Im}(f)$, donc $\operatorname{Im}(f)$ est fini de cardinal n, mais $\operatorname{Im}(f) \subset [\![1..n]\!]$, donc $\operatorname{Im}(f) = [\![1..n]\!]$ *i.e.* f est surjective (et donc bijective).

Supposons maintenant que f est surjective, alors il existe $g : [\![1..n]\!] \to [\![1..n]\!]$ telle que $f \circ g = \operatorname{id}_{[\![1..n]\!]}$, mais alors g est injective, donc bijective d'après ce qui précède et $f = (f \circ g) \circ g^{-1}$ composée de bijections, donc f est bijective. □

3) Propriétés du cardinal

THÉORÈME 10.11

Soient E et F deux ensembles finis non vides, avec $n = \text{card}(E)$ et $p = \text{card}(F)$ et soit $f : E \to F$ une application ;

- *Si f est injective alors $n \leqslant p$.*
- *Si f est surjective alors $n \geqslant p$.*
- *Si f est bijective alors $n = p$.*

Preuve: Soient $\phi_1 : [\![1..n]\!] \to E$ et $\phi_2 : [\![1..p]\!] \to F$ deux bijections. Si f est injective alors $\phi_2 \circ f \circ \phi_1$ est une injection de $[\![1..n]\!]$ vers $[\![1..p]\!]$, donc $n \leqslant p$. Le raisonnement est le même pour les deux autres points. □

Il en découle que si F est en bijection avec E et si E est fini, alors F est fini de même cardinal de E.

THÉORÈME 10.12

Soient E et F deux ensembles finis non vides ***de même cardinal*** *et soit $f : E \to F$ une application, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) f est injective.

b) f est surjective.

c) f est bijective.

Preuve: Soient $\phi : [\![1..n]\!] \to E$ et $\psi : [\![1..n]\!] \to F$ deux bijections, alors $g = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ est une application de $[\![1..n]\!]$ vers lui - même, avec $f = \psi \circ g \circ \phi^{-1}$. Si f est injective, alors g aussi, donc g est bijective et f aussi. Si f est surjective, alors g aussi et donc g est bijective et f aussi. □

Exemple: Soit A un anneau intègre fini, alors A est nécessairement un corps. En effet, soit a un élément non nul de A, l'application $f : A \to A$ définie par $f(x) = a \times x$ est injective (car A est intègre), or A est fini, donc f est bijective, par conséquent il existe $a' \in A$ tel que $f(a') = 1$ *i.e.* $a \times a' = 1$. De même il existe $a'' \in A$ tel que $a'' \times a = 1$, mais alors $a'' = a'' \times (a \times a') = (a'' \times a) \times a' = a'$. Finalement, tout élément non nul de A possède un inverse et donc A est un corps.

THÉORÈME 10.13

Si E est un ensemble fini et si F est une partie de E, alors F est fini. De plus, si $\text{card}(F) = \text{card}(E)$, alors $F = E$.

Preuve: On écarte le cas évident où $E = \emptyset$. Soit $n = \text{card}(E)$ et $\phi : [\![1..n]\!] \to E$ une bijection. Notons $i : F \to E$ définie par $i(x) = x$, i est une injection donc $g = \phi^{-1} \circ i$ est une injection de F vers $[\![1..n]\!]$ qui induit donc une bijection de F sur $\text{Im}(g)$, or $\text{Im}(g)$ est une partie de $[\![1..n]\!]$, donc $\text{Im}(g)$ est un ensemble fini de cardinal $p \leqslant n$, par conséquent F est fini de cardinal p. Si $n = p$, alors $\text{Im}(g) = [\![1..n]\!]$ donc g est une bijection ce qui entraîne que i est une bijection, donc $\text{Im}(i) = E$, c'est à dire $F = E$. □

THÉORÈME 10.14

Soient E et F deux ensembles finis, l'ensemble $E \cup F$ est fini et :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$$

Preuve: Si l'un des deux est vide, il n'y a rien à démontrer. Supposons E et F non vides, dans un premier temps on envisage le cas où $E \cap F = \emptyset$, soit $f : [\![1..n]\!] \to E$ et $g : [\![1..p]\!] \to F$ deux bijections, on considère l'application $\phi : [\![1..n+p]\!] \to E \cup F$ définie par $\phi(k) = f(k)$ si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\phi(k) = g(k-n)$ si $n+1 \leqslant k \leqslant n+p$, comme $E \cap F = \emptyset$ on voit que ϕ est injective, d'autre part la surjectivité est évidente, donc ϕ est bijective, ce qui montre que $E \cup F$ est fini de cardinal $n+p$.

Passons maintenant au cas général : posons $I = E \cap F$, on a $E \cup F = E \cup (F \setminus E)$ et ces deux ensembles sont disjoints et finis, donc $E \cup F$ est fini et $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F \setminus E)$, d'autre part $F = I \cup (F \setminus E)$ et ces deux ensembles sont disjoints et finis, donc $\text{card}(F) = \text{card}(I) + \text{card}(F \setminus E)$, on a donc $\text{card}(F \setminus E) = \text{card}(F) - \text{card}(I)$, ce qui donne la formule. □

THÉORÈME 10.15

Si E et F sont deux ensembles finis, alors l'ensemble $E \times F$ est fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Preuve: Si l'un des deux est vide, alors $E \times F$ est vide et le résultat est évident. Soit $n = \text{card}(E)$, si $n = 1$ alors $E = \{e\}$ et l'application $f : F \to E \times F$ définie par $f(x) = (e, x)$ est une bijection, donc $E \times F$ est fini de même cardinal que F, le théorème est donc vrai pour $n = 1$.

Supposons le théorème démontré pour un entier $n \geqslant 1$ et supposons $\text{card}(E) = n+1$, on fixe un élément $e \in E$ et on pose $E' = E \setminus \{e\}$. On a $E \times F = (\{e\} \times F) \cup (E' \times F)$, ces deux ensembles sont disjoints et finis (hypothèse de récurrence), donc $E \times F$ est fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(\{e\} \times F) + \text{card}(E' \times F) = \text{card}(F) + \text{card}(E') \times \text{card}(F) = (n+1) \times \text{card}(F)$. Le théorème est démontré au rang $n + 1$. □

Conséquence : Si $p \in \mathbb{N}^*$, et si E est fini de cardinal $n \geqslant 1$, alors E^p (ensemble des p - uplets d'éléments de E) est fini et $\text{card}(E^p) = [\text{card}(E)]^p$.

III) Dénombrement

1) Préliminaires

Définition 10.5
Dénombrer un ensemble fini E c'est calculer son cardinal. Dans la pratique, c'est le mettre en bijection avec un ensemble F dont on connaît le cardinal.

La fonction factorielle : Elle est définie sur $\mathbb{N}$ par : $n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 \times \cdots \times n & \text{si } n > 0 \end{cases}$. On peut également en donner une définition récurrente : $0! = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!$.

Théorème 10.16 (diviser pour mieux compter)
Soient E un ensemble fini et soient $A_1, \ldots, A_n$ n parties de E deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à E, alors : $\text{card}(E) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(A_k)$.

Preuve: Celle - ci est simple, c'est un raisonnement par récurrence sur n, sachant que la formule est vraie pour $n = 2$. □

2) Le nombre d'applications

Théorème 10.17
Soit E et F deux ensembles finis avec $p = \text{card}(E)$ et $n = \text{card}(F)$, l'ensemble des applications de E vers F, $\mathscr{F}(E, F)$ (ou F^E), est fini de cardinal n^p.

Preuve: Posons $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, on vérifie que l'application $\phi : F^E \to F^p$ définie par $\phi(f) = (f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une bijection. Or F^p est un ensemble fini de cardinal n^p ce qui donne le résultat. □

Remarques :

a) Le théorème justifie le raisonnement suivant : pour construire une application de E vers F on compte pour chaque élément de E le nombre de choix possibles pour son image (soit n choix), puis on fait le produit, soit n^p constructions possibles.

b) Le nombre de façons de tirer avec remise p boules parmi n est n^p.

c) Le nombre de façons de ranger p boules dans n boites est n^p.

3) Le nombre de parties d'un ensemble

Définition 10.6
Soit E un ensemble et A une partie de E, on appelle **fonction caractéristique** *de A l'application $\chi_A : E \to \{0; 1\}$ définie par* $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

THÉORÈME 10.18

Si E est fini de cardinal n, alors $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, est fini de cardinal 2^n.

Preuve: Il est facile de vérifier que l'application de $\mathscr{P}(E)$ vers $\mathscr{F}(E,\{0;1\})$ qui à toute partie de E associe sa fonction caractéristique, est une bijection. Or l'ensemble $\mathscr{F}(E,\{0;1\})$ est fini de cardinal 2^n ce qui donne le résultat. □

Remarque : Le théorème justifie le raisonnement suivant : pour construire une partie de E il y a deux choix possibles pour chaque élément de E (on le prend ou on ne le prend pas), comme il y a n éléments dans E cela fait 2^n constructions possibles, soit 2^n parties.

4) Le nombre de bijections

THÉORÈME 10.19

*Si E et de F sont deux ensembles finis **de même cardinal** $n > 0$, il y a $n!$ bijections de E vers F. En particulier, $\operatorname{card}(\mathscr{S}(E)) = n!$.*

Preuve: Lorsque $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F) = n$ l'ensemble des bijections de E vers F est inclus dans l'ensemble des applications, c'est donc un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à n^n. Soit S_n l'ensemble des permutations de $[\![1..n]\!]$ et D_k l'ensemble des permutations f de $[\![1..n]\!]$ telles que $f(1) = k$, alors il est clair que $S_n = D_1 \cup \ldots \cup D_n$ et que $\operatorname{card}(D_k) = \operatorname{card}(S_{n-1})$, on obtient ainsi que $\operatorname{card}(S_n) = n \times \operatorname{card}(S_{n-1})$ avec $\operatorname{card}(S_1) = 1$. □

5) Le nombre de p-parties (ou p-combinaisons)

DÉFINITION 10.7

Soit E un ensemble de cardinal $n > 0$ et soit $p \in \mathbb{N}$, on appelle p - combinaison d'éléments de E (ou p - partie) toute partie de E de cardinal p. L'ensemble des p - parties de E est noté $\mathscr{P}_p(E)$, c'est un ensemble fini (car inclus dans $\mathscr{P}(E)$) et son cardinal est noté $\binom{n}{p}$ ou encore C_n^p.

Cas particuliers :

a) Si $p = 0$ la seule partie de E à 0 élément est $\emptyset$, donc $\binom{n}{0} = 1$.

b) Si $p = n$, la seule partie de E à n éléments est E, donc $\binom{n}{n} = 1$.

c) Si $p > n$ il n'y a aucune partie de E à p éléments donc dans ce cas, $\binom{n}{p} = 0$.

THÉORÈME 10.20

Si $n \geqslant 1$ et $p \in \mathbb{N}$, alors : $\binom{n}{p} = \dfrac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!}$. En particulier lorsque $p \leqslant n$, on a $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Preuve: Par récurrence sur n : pour $n = 1$ la vérification est simple. Supposons le théorème vrai pour un entier $n \geqslant 1$ (pour tout p) et supposons $\operatorname{card}(E) = n+1$, si $p = 0$ on sait que la formule est vraie, supposons $p \geqslant 1$, on fixe un élément $a \in E$, soit A l'ensemble des p - parties de E contenant a et B l'ensemble des p - parties de E ne contenant pas a, alors $\mathscr{P}_p(E) = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$, donc $\binom{n+1}{p} = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$, or $\operatorname{card}(B) = \binom{n}{p}$ (car B est en bijection avec $\mathscr{P}_p(E \setminus \{a\})$) et $\operatorname{card}(A) = \binom{n}{p-1}$ (car A est en bijection avec $\mathscr{P}_{p-1}(E \setminus \{a\})$), d'où $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \dfrac{n \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} + \dfrac{n \times \cdots \times (n-p+2)}{(p-1)!}$, ce qui donne $\dfrac{n \times \cdots (n-p+2)[n-p+1+p]}{p!}$, la formule est donc vraie au rang $n+1$. □

Propriétés :

a) Si $p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

b) Si $1 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

c) **Triangle de *Pascal*** [1] : $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$.

d) Binôme de *Newton* : $\forall\ n\in\mathbb{N}, \forall\ x,y\in\mathbb{C}, (x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$.

IV) Exercices

★Exercice 10.1

a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que si la somme des chiffres dans l'écriture décimale de n est un multiple de 9, alors n est un multiple de 9.

b) Si deux nombres sont écrits en base 10 avec les mêmes chiffres mais dans un ordre différent, montrer que leur différence est divisible par 9.

★Exercice 10.2

Soit E un ensemble non vide, et f une application de E vers $\mathscr{P}(E)$. En considérant la partie $A=\{x\in E\ /\ x\notin f(x)\}$, montrer que f ne peut pas être surjective.

★Exercice 10.3

Soient E,F,G trois ensembles et soient $f:E\to F$, $g:F\to G$ et $h:G\to E$ trois applications, montrer que :

a) Si $h\circ g\circ f$ et $g\circ f\circ h$ sont surjectives et $f\circ h\circ g$ est injective, alors f,g,h sont bijectives.

b) Si $h\circ g\circ f$ et $g\circ f\circ h$ sont injectives et $f\circ h\circ g$ est surjective, alors f,g,h sont bijectives.

★Exercice 10.4

Démontrer l'inégalité suivante : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}<\dfrac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$.

★Exercice 10.5

Démontrer l'inégalité suivante : $\forall n\in\mathbb{N}^*, (n!)^{1/n}\geqslant\frac{n+1}{e}$.

★Exercice 10.6

Démontrer les assertions suivantes :

a) $\forall n\in\mathbb{N}, 2n\leqslant 2^n$.

b) $\forall\ n\in\mathbb{N}^*, (n+1)!=1+\sum_{k=1}^{n}k(k!)$.

c) $\forall\ n\geqslant 24, \exists\ a,b\in\mathbb{N}, n=5a+7b$.

d) $\forall\ n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}k(k-1)=\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3}$.

e) Soit (F_n) une suite qui vérifie : $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Montrer que : $F_{m+2n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{m+k}$.

f) Pour tout entier n et p de $\mathbb{N}$, montrer que $a_{n,p}=\frac{(2n)!(2p)!}{n!p!(n+p)!}$ est un entier. On commencera par vérifier que $a_{n+1,p}=4a_{n,p}-a_{n,p+1}$.

★Exercice 10.7

a) Soit E un ensemble, montrer que E est infini ssi il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E.

b) Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$, montrer qu'il existe une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur A.

c) Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une application, montrer que f ne peut pas être strictement décroissante.

1. *PASCAL Blaise* (1623 – 1662) : mathématicien, physicien et philosophe de génie qui se tourna vers la théologie en 1654.

★Exercice 10.8

Démontrer les relations suivantes :

a) $C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$. Retrouver ainsi les sommes : $\sum_{k=1}^{n} k^p$ pour $p = 1, 2, 3$.

b) $\forall\, n, m, p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p} C_n^k\, C_m^{p-k} = C_{n+m}^p$ (formule de *Vandermonde*).

c) $\forall\, n, p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p} C_{n+k-1}^k = C_{n+p}^p$.

★Exercice 10.9

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que pour tout n on a $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$. Montrer que pour tout n on a $b_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k$.

★Exercice 10.10

Simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k;\ \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\, C_n^k;\ \sum_{k=1}^{n} k^2\, C_n^k;\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k\, C_n^k;\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\, C_n^k;\ \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2.$$

★Exercice 10.11

Soient $n \geqslant 1$, E un ensemble de cardinal $n+3$ et F un ensemble de cardinal n. Dénombrer l'ensemble des surjections de E vers F.

★Exercice 10.12

Soit E un ensemble de cardinal n, dénombrer l'ensemble des couples (A, B) de parties de E qui vérifient :

a) $A \cup B = E$ b) $A \cap B = \emptyset$ c) $\mathrm{card}(A \cap B) = p$.

★Exercice 10.13

Soient $n, p \in \mathbb{N}$, on note Γ_n^p le nombre d'applications $u : [\![1..n]\!] \to [\![0..p]\!]$ telles que la somme des images est égale à p, *i.e.* $\sum_{k=1}^{n} u(k) = p$.

a) Montrer que $\Gamma_n^0 + \Gamma_n^1 + \cdots + \Gamma_n^p = \Gamma_{n+1}^p$. En déduire que $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$.

b) Dénombrer l'ensemble des n -uplets d'entiers positifs $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant :

$$x_1 + \cdots + x_n = p.$$

c) Dénombrer l'ensemble des n -uplets d'entiers positifs $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant :

$$x_1 + \cdots + x_n \leqslant p.$$

★Exercice 10.14

Soit E un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$. Dénombrer l'ensemble des :

a) relations de E dans E.

b) relations réflexives.

c) relations symétriques.

d) relations antisymétriques.

e) relations réflexives et symétriques.

f) relations réflexives et antisymétriques.

g) relations d'ordre total.