Exercices : Barbara Tumpach
Relecture : François Lescure

Théorème de Fubini-Tonelli et convolutions

1 Théorème de Fubini-Tonelli

Exercice 1

Soit $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Montrer que

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx\right)dy \neq \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dy\right)dx.$$

Y a-t-il contradiction avec le théorème de Fubini ? (on pourra calculer l'intégrale de $|f|$ sur l'anneau $S_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \varepsilon \leq x^2+y^2 \leq 1\}$.)

Correction ▼ [005957]

Exercice 2

Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto e^{-y}\sin 2xy$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]\times(0,+\infty)$; en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{y}(\sin y)^2 e^{-y}\, dy.$$

Correction ▼ [005958]

2 Produit de convolution

Exercice 3

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, où $\mathbb{R}^n$ est muni de la mesure de Lebesgue. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et que le *produit de convolution* de f et g défini par

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

vérifie $f*g(x) = g*f(x)$ et

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\,\|g\|_p.$$

Correction ▼ [005959]

Exercice 4

Soient $a,b>0$, et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ et $g(x) = e^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. Calculer $f*g(x)$.

Correction ▼ [005960]

Exercice 5

1. Pour tout $t > 0$, on pose :

$$f_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx = 1$.

   (b) Montrer que, pour tout $\delta > 0$, $\lim_{t\to 0} \int_{\{|x|>\delta\}} f_t(x)\,dx = 0$.

   (On dit que f_t est une *approximation de la distribution de Dirac*.)

2. Soit g une fonction continue bornée. Montrer que $f_t * g$ est bien définie et que

$$\lim_{t\to 0} f_t * g(x) = g(x).$$

Correction ▼ [005961]

Exercice 6

Soient $f, g \in L^1(\mu)$ où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i (y,x)}\, dx,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)\,dx$.
2. $\widehat{f*g} = \hat{f}\,\hat{g}$.

Correction ▼ [005962]

Exercice 7

Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne définie, pour $x \in \mathbb{R}^n$, par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$, où $a > 0$.

Correction ▼ [005963]

Correction de l'exercice 1 ▲

On a

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)}\Big|_{-1}^{1}\right)dy$$
$$=-\int_{-1}^{1}\frac{2}{(1+y^2)}dy=-2\arctan y\Big|_{-1}^{1}=-\pi.$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{y}{(x^2+y^2)}\Big|_{-1}^{1}\right)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\frac{2}{(x^2+1)}dx=2\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\pi.$$

Il n'y a pas de contradiction avec le théorème de Fubini car la fonction f n'appartient pas à $\mathscr{L}^1([-1,1]\times[-1,1])$. En effet, soit $S_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\varepsilon\leq x^2+y^2\leq 1\}$. On a

$$\int_{[-1,1]\times[-1,1]}|f|d\mu\geq\int_{S_\varepsilon}|f|d\mu=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=\varepsilon}^{1}\frac{|\cos 2\theta|}{r}drd\theta=4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=\varepsilon}^{1}\frac{|\cos 2\theta|}{r}drd\theta=-4\log\varepsilon\to\infty$$

lorsque $\varepsilon\to 0$, et donc $f\notin\mathscr{L}^1([-1,1]\times[-1,1])$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Le théorème de Tonelli donne :

$$\int_{[0,1]\times(0,+\infty)}|e^{-y}\sin 2xy|\,dxdy\leq\int_0^{+\infty}e^{-y}\,dy=1<+\infty,$$

ce qui prouve que la fonction $(x,y)\mapsto e^{-y}\sin 2xy$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]\times(0,+\infty)$. Le théorème de Fubini donne alors la valeur I de l'intégrale de cette fonction :

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{+\infty}e^{-y}\sin 2xy\,dy\overset{\text{(IPP)}}{=}\int_0^1(2x)(1+4x^2)^{-1}\,dx=\frac{\log 5}{4}$$
$$I=\int_0^{+\infty}e^{-y}\,dy\int_0^1\sin 2xy\,dx=\int_0^{+\infty}e^{-y}\,\frac{\sin^2 y}{y}\,dy.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Soient $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1\leq p\leq+\infty$, où $\mathbb{R}^n$ est muni de la mesure de Lebesgue. L'identité $f*g(x)=g*f(x)$ s'obtient par changement de variable. En ce qui converne l'inégalité $\|f*g\|_p\leq\|f\|_1\,\|g\|_p$, on distingue les cas en fonction de la valeur de p.

1. Pour $p=+\infty$, c'est clair.
2. Supposons que $p=1$ et posons $F(x,y)=f(x-y)\,g(y)$. Pour presque tout $y\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|\,dx=|g(y)|\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,dx=|g(y)|\cdot\|f\|_1,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n}dy\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|\,dx=\|f\|_1\,\|g\|_1.$$

D'après le théorème de Tonelli, $F\in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|\,dy<+\infty\qquad\text{pour presque tout }\ x\in\mathbb{R}^n,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\,dy \le \|f\|_1\,\|g\|_1.$$

Ainsi,

$$\|f*g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} dx |f*g(x)| = \int_{\mathbb{R}^n} dx \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)\,dy \right| \le \|f\|_1\,\|g\|_1.$$

3. Supposons que $1 < p < +\infty$. Utilisons le cas précédent, en faisant jouer ici à g^p le rôle alors joué par g. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, la fonction $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, i.e. la fonction $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$. Soit p' tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. La fonction $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}$ appartient à $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ car $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et la mesure de Lebesgue est invariante par translation. D'après l'inégalité de Hölder,

$$|f(x-y)|\,|g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)| \cdot |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)| \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_1^{\frac{1}{p'}},$$

ainsi

$$|(f*g)(x)|^p \le (|f| * |g|^p)(x) \cdot \|f\|_1^{\frac{p}{p'}}.$$

D'après le cas précédent, on voit que

$$f*g \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f*g\|_p^p \le \|f\|_1 \|g\|_p^p \cdot \|f\|_1^{\frac{p}{p'}},$$

c'est-à-dire

$$\|f*g\|_p \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_p.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soient $a,b>0$, et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ et $g(x) = e^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. On a

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{a|x-y|^2+b|y|^2}{2}\right)}\,dy$$

Or

$$\begin{aligned}
a|x-y|^2+b|y|^2 &= \sum_{i=1}^n ax_i^2 + (a+b)y_i^2 - 2ax_iy_i \\
&= \sum_{i=1}^n ax_i^2 + (a+b)\left(y_i - \frac{a}{a+b}x_i\right)^2 - (a+b)\left(\frac{ax_i}{a+b}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left(a - \frac{a^2}{a+b}\right)x_i^2 + (a+b)\left(y_i - \frac{a}{a+b}x_i\right)^2 \\
&= \frac{ab}{a+b}|x|^2 + (a+b)\left|y - \frac{a}{a+b}x\right|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f*g(x) \;=\; e^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(a+b)}{2}\left|y-\frac{a}{a+b}x\right|^2}\,dy = e^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(a+b)}{2}|z|^2}\,dz$$

car la mesure de Lebesgue est invariante par translation. En utilisant $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, on obtient alors :

$$f*g(x) = \left(\frac{2\pi}{a+b}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Pour tout $t > 0$, on pose :

$$f_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

   (a) On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}}\,dx_i. \end{aligned}$$

   Sachant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx = 1.$$

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f_1 est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, il existe un $R > 0$ tel que

$$\int_{\mathscr{B}(0,R)^c} f_1(x)\,dx < \varepsilon.$$

   On remarque que $f_t(x) = t^{-\frac{n}{2}} f_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. On a alors,

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(x)\,dx &= \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} t^{-\frac{n}{2}} f_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathscr{B}\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{t}}\right)^c} f_1(z)\, t^{\frac{n}{2}}\,dz \\ &= \int_{\mathscr{B}\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{t}}\right)^c} f_1(z)\,dz \le \varepsilon, \end{aligned}$$

   dès que $t < \frac{\delta^2}{R^2}$.

2. Soit g une fonction continue bornée. Alors il existe $M > 0$ tel que $|g| < M$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_t(x-y)\,g(y)|\,dy \le M \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x-y)\,dy = M < +\infty,$$

   ainsi $y \mapsto f_t(x-y)\,g(y)$ est intégrable et $f_t * g$ est bien définie. Puisque $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx = 1$, on a

$$\begin{aligned} |f_t * g(x) - g(x)| &= |\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} f_t(y) g(x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y) g(x)\,dy| \\ &\le \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)\,|g(x-y) - g(x)|\,dy. \end{aligned}$$

   Soit $\varepsilon > 0$. Puisque g est continue en $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $\delta > 0$ tel que $|y| < \delta \Rightarrow |g(x-y) - g(x)| < \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned} |f_t * g(x) - g(x)| &\le \int_{\mathscr{B}(0,\delta)} f_t(y)\,|g(x-y) - g(x)|\,dy \\ &\quad + \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,|g(x-y) - g(x)|\,dy \\ &\le \varepsilon \int_{\mathscr{B}(0,\delta)} f_t(y)\,dy + 2M \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy \\ &\le \varepsilon + 2M \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy. \end{aligned}$$

   D'après la question 1.(b), il existe $t_0 > 0$ tel que pour $t < t_0$, $\int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy \le \frac{\varepsilon}{2M}$. Ainsi pour $t < t_0$,

$$|f_t * g(x) - g(x)| < 2\varepsilon,$$

   i.e.

$$\lim_{t \to 0} f_t * g(x) = g(x).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soient $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e^{-2\pi i(y,x)}\,dx,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

1. On a $\|\hat{g}\|_\infty \le \|g\|_1$, ce qui implique que $f\hat{g}$ est intégrable. De même $\hat{f}g$ est intégrable. De plus $F(x,y)=f(x)g(y)e^{-2\pi i(x,y)}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} dx\, f(x)\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i(x,y)}\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy\, g(y)\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(x,y)}\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(y)g(y)\,dx.\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f*g(y)\,e^{-2\pi i(x,y)}\,dy=\int_{\mathbb{R}^n} dy\,e^{-2\pi i(x,y)}\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\,g(z)\,dz\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,y-z)}e^{-2\pi i(x,z)}f(y-z)\,g(z)\,dz\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,u)}f(u)\,du\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,z)}\,g(z)\,dz\\ &= \hat{f}(x)\,\hat{g}(x).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Supposons tout d'abord $n=1$. Soit la gaussienne définie pour $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-\frac{ax^2}{2}}$, où $a>0$. Posons

$$h(t)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi itx}\,dx=\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-2\pi itx}\,dx.$$

D'après le théorème de convergence dominée, h est dérivable et

$$\begin{aligned}h'(t) &= -2\pi i\int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-2\pi itx}\,dx=\left[2\pi i\frac{1}{a}e^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-2\pi itx}\right]_{-\infty}^{+\infty}+(2\pi i)^2t\frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-2\pi itx}\,dx\\ &= -(2\pi)^2\frac{1}{a}t\cdot h(t).\end{aligned}$$

De plus,

$$h(0)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}}\,dx=\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,du\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}.$$

La solution de l'équation différentielle $h'(t)=-(2\pi)^2\frac{1}{a}t\cdot h(t)$ avec condition initiale $h(0)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}$ est

$$h(t)=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{(2\pi)^2}{a}\frac{t^2}{2}}.$$

Pour $n>1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(t,x)}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{a|x|^2}{2}}e^{-2\pi i(t,x)}\,dx\\ &= \prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax_i^2}{2}}e^{-2\pi it_ix_i}\,dx_i=\prod_{i=1}^n h(t_i)=\left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right)^n e^{-\frac{(2\pi)^2}{a}\frac{|t|^2}{2}}\end{aligned}$$