Equations différentielles

Exercice 1

On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0,\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0,\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle
$$(E_1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$
3. Intégrer (E_1) sur $]0,\infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0,\infty[$.

Correction ▼ [000847]

Exercice 2

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Correction ▼ [000863]

Exercice 3

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x.$$

Correction ▼ [000864]

Exercice 4

Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$$

Correction ▼ [000865]

Exercice 5

On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.

4. Soit $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0,\infty[$ et qui vérifie :
$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \log t.$$
   (a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).
   (b) En déduire une expression de f.

Correction ▼ [000866]

Exercice 6

On considère l'équation différentielle suivante :
$$(E.D.) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$
où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à $(E.D.)$.
2. Trouver une solution particulière de $(E.D.)$ lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de $(E.D)$ lorsque
$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

Correction ▼ [000872]

Exercice 7

Résoudre : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2x \cos x \cosh x$.

Correction ▼ [000880]

Exercice 8

Déterminer les $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos x.$$

Correction ▼ [000881]

Exercice 9

En posant $t = \arctan x$, résoudre :
$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2} y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Correction ▼ [000884]

Exercice 10

Résoudre par le changement de fonction $z = \frac{y}{x}$ l'équation différentielle :
$$x''^2(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0.$$

Correction ▼ [000885]

Correction de l'exercice 1 ▲

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2. \tag{E}$$

1. Trouvons $a \in]0,\infty[$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière. Puisque
$$y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} - y_0(x)^2 = -a^2x^2,$$
y_0 est solution si et seulement si $a = \pm 3$. On choisit $a = 3$.
2. Si z est une fonction $\mathscr{C}^1$ ne s'annulant pas, on pose $y(x) = 3x - 1/z(x)$. Alors y est solution si et seulement si
$$\frac{z'(x)}{z(x)^2} + \frac{1}{xz(x)} - \frac{1}{z(x)^2} + \frac{6x}{z(x)} = 0.$$
En multipliant par $z(x)^2$, on obtient que y est solution de (E) ssi z vérifie
$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \tag{E$_1$}$$
3. On résout (E$_1$) sur $]0,\infty[$. Une primitive de $x \mapsto 6x + 1/x$ est $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$, donc les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto A\exp(-3x^2 - \ln(x))$. On cherche une solution particulière de (E$_1$) sous la forme $z_p(x) = \alpha(x)\exp(-3x^2 - \ln(x))$; alors z_p est solution si $\alpha'(x)\exp(-3x^2 - \ln(x)) = 1$, c'est-à-dire si $\alpha'(x) = x\exp(3x^2)$, par exemple si $\alpha(x) = \exp(3x^2)/6$. Les solutions de (E$_1$) sont donc les
$$z(x) = \frac{1 + A\exp(-3x^2)}{6x}, \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$
4. On va maintenant en déduire les solutions de (E) définies sur $]0,\infty[$.
Soit y une solution $\mathscr{C}^1$ définie sur $]0,\infty[$. On suppose dans un premier temps que $y(x) > 3x$ sur l'intervalle ouvert $I \subset]0,\infty[$, pris aussi grand que possible. Alors $y(x) = 3x - 1/z_I(x)$ pour une certaine fonction $z_I < 0$ qui est $\mathscr{C}^1$ sur I. D'après la question précédente, on a nécessairement $z_I(x) = [1 + A_I\exp(-3x^2)]/6x$ pour une certaine constante $A_I \in \mathbb{R}$. Puisque $z_I < 0$, cela impose $A_I < 0$, mais du coup $I \neq]0,+\infty[$ car $1 > A_I\exp(-3x^2)$ si x est assez grand.
Dans tous les cas, il existe donc un intervalle ouvert J tel que $y(x) < 3x$ sur J. On suppose encore que J est aussi grand que possible. Sur J, $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$ pour une certaine fonction $z_J > 0$ qui est $\mathscr{C}^1$ sur J. Encore d'après la question précédente, $z_J(x) = [1 + A_J\exp(-3x^2)]/6x$ pour une certaine constante A_J. Puisque l'intervalle ouvert $J =]a,b[$ a été supposé maximal, et puisque y est supposée définie sur $]0,+\infty[$, si $a > 0$ on a $y(a) = 3a$ et de même si $b < \infty$, $y(b) = 3b$, car sinon par continuité de y on aurait encore $y(x) < 3x$ sur $]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$ pour un petit $\varepsilon > 0$. Cela n'est possible respectivement que si $z_J(x) \to +\infty$ lorsque $x \to a$ ou $z_J(x) \to +\infty$ lorsque $x \to b$. Or on a dit que $z_J = [1 + A_J\exp(-3x^2)]/6x$, cela n'est donc pas possible du tout (sauf précisément si respectivement $a = 0$ et $b = 0$).
Donc soit $y(x) = 3x$ sur $]0,+\infty[$, soit $y(x) < 3x$ sur $]0,+\infty[$. Dans ce dernier cas, $z(x) = 1/(3x - y(x))$ est définie sur $]0,+\infty[$ et s'écrit $z(x) = [1 + A\exp(-3x^2)]/6x$. Puisque $z > 0$, nécessairement $A \geq -1$. Donc si y est solution, alors
$$y(x) = 3x \qquad \text{ou} \qquad y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + A\exp(-3x^2)} \quad \text{avec } A \geq -1.$$
Réciproquement, si y est ainsi définie, alors y est définie et $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$, et on peut vérifier que c'est bien une solution.

Correction de l'exercice 2 ▲

$y'' - 3y' + 2y = e^x$. Le polynôme caractéristique est $f(r) = (r-1)(r-2)$ et les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^x$, on est dans la situation $(\imath\imath)$ la condition $(*)$ sur P est : $P'' - P' = 1$, et $P(x) = -x$ convient. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x$. Ici $f(r) = (r-1)(r+1)$ et l'équation homogène a pour solutions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On remarque que la fonction $3\cos x$ vérifie l'équation : $y'' - y = -6\cos x$, il nous reste donc à chercher une solution y_1 de l'équation $y'' - y = 2x\sin x$, car $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$ sera une solution de l'équation considérée. Pour cela, on remarque que $2x\sin x = \mathrm{Im}(2xe^{ix})$ et on utilise la méthode décrite plus haut pour trouver une solution z_1 de l'équation : $y'' - y = 2xe^{ix}$. On cherche z_1 sous la forme $P(x)e^{ix}$ où P est un polynôme de degré 1 car $f(i) = -2 \neq 0$. On a $f'(i) = 2i$, la condition $(*)$ sur P est donc : $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$ ce qui donne après identification $P(x) = -x - i$. Alors $y_1(x) = \mathrm{Im}((-x+i)e^{ix}) = -x\sin x - \cos x$. Les solutions sont par conséquent les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2\cos x - x\sin x \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Autre méthode pour trouver une solution de $y'' - y = 2x\sin x$: On la cherche de la forme $y_1(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$ où A, B sont des polynômes de degré 1 car i n'est pas racine de l'équation caractéristique (*danger* : pour un second membre du type $Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ la discussion porte sur $\alpha + i\beta$ et non sur α ou β...). On calcule y_1', y_1'' et on applique l'équation étudiée à y_1 ...on obtient la condition :

$$(A'' - A - 2B')\sin x + (B'' - B - 2A') = 2x\sin x$$

qui sera réalisée si : $\begin{cases} A'' - A - 2B' = 2x \\ B'' - B - 2A' = 0 \end{cases}$.

On écrit : $A(x) = ax + b$ et $B(x) = cx + d$, après identification on obtient : $a = d = -1$, $b = c = 0$, ce qui détermine y_1.

Correction de l'exercice 4 ▲

$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}$. L'équation caractéristique a 2 racines complexes $r_1 = -1/2 + i$ et $r_2 = \overline{r_1}$ et les solutions de l'équation homogène sont :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1\cos x + c_2\sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

On a $\sin x e^{-x/2} = \mathrm{Im}(e^{(-1/2+i)x})$, on commence donc par chercher une solution z_p de l'équation avec le nouveau second membre $e^{(-1/2+i)x}$.Comme $-1/2 + i$ est racine de l'équation caractéristique, on cherchera $z_p(x) = P(x)e^{(-1/2+i)x}$ avec P de degré 1. Par conséquent la condition $(*)$ sur P :

$$4P'' + f'(-1/2+i)P' + f(-1/2+i)P = 1$$

s'écrit ici : $8iP' = 1$ ($P'' = 0$, $f(-1/2+i) = 0$ et $f'(-1/2+i) = 8i$), on peut donc prendre $P(x) = -i/8x$ et $z_p(x) = -i/8xe^{(-1/2+i)x}$, par conséquent sa partie imaginaire $y_p(x) = \mathrm{Im}(-i/8xe^{(-1/2+i)x}) = 1/8x\sin xe^{-x/2}$ est une solution de notre équation. Les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1\cos x + (c_2 + 1/8x)\sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Le polynôme caractéristique associé à E est : $p(x) = x^2 + 2x + 4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :
$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x)$$
obtenues lorsque a, b décrivent $\mathbb{R}$.
2. Le second membre est de la forme $e^{\lambda x}Q(x)$ avec $\lambda = 1$ et $Q(x) = x$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x) = R(x)e^x$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1) \neq 0$. On pose donc $R(x) = ax + b$. On a
$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$
Donc y_p est solution si et seulement si $7ax + 7a + 4b = x$. On trouve après identification des coefficients :
$$a = \frac{1}{7} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{-4}{49}.$$
La fonction $y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est :
$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x) + \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x \ ; \ a, b \in \mathbb{R}.$$
3. Soit h une solution de E. Les conditions $h(0) = 1$, $h(1) = 0$ sont réalisées ssi
$$a = \frac{53}{49} \qquad \text{et} \qquad b = -\frac{53\cos\sqrt{3} + 3e^2}{49\sin\sqrt{3}}.$$
4. (a) On a : $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \log e^x = xe^x$$
donc g est solution de E.
   (b) Réciproquement pour $f(t) = g(\log t)$ où g est une solution de E on montre que f est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 4. Donc les fonctions f recherchées sont de la forme :
$$\frac{1}{t}(a\cos(\sqrt{3}\log t) + b\sin(\sqrt{3}\log t)) + \frac{t}{7}(\log t - \frac{4}{7}) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ a une racine (double) $r = 2$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :
$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
2. Pour $d(x) = e^{-2x}$ on peut chercher une solution particulière de la forme : $y_1(x) = ae^{-2x}$ car -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $y_1'(x) = -2e^{-2x}$ et $y_1''(x) = 4ae^{-2x}$. Par conséquent y_1 est solution si et seulement si :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4a - 4(-2a) + 4a)e^{-2x} = e^{-2x}$$
donc si et seulement si $a = \frac{1}{16}$.
Pour $d(x) = e^{2x}$ on cherche une solution de la forme $y_2(x) = ax^2 e^{2x}$, car 2 est racine double de l'équation caractéristique. On a $y_2'(x) = (2ax + 2ax^2)e^{2x}$ et $y_2''(x) = (2a + 4ax + 4ax + 4ax^2)e^{2x} = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x}$. Alors y_2 est solution si et seulement si
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4ax^2 + 8ax + 2a - 4(2ax + 2ax^2) + 4ax^2)e^{2x} = e^{2x}$$
donc si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

3. On déduit du principe de superposition que la fonction

$$y_p(x) = \frac{1}{4}(y_1(x) + y_2(x)) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2 e^{2x}$$

est solution de l'équation pour le second membre donné dans cette question, et la forme générale des solutions est alors :

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{2x} + \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2 e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Réponse : $(\lambda x + \mu)\, e^{-x} + \frac{e^x}{25}\, [(3x-4)\cos x - (4x-2)\sin x] + (\sin x - x\cos x)\, e^{-x}$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Réponse : $\frac{1}{2}\,(-x\cos x + \sin x) + \lambda\, \cos x + \mu\, \sinh x$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Réponse : $x \to \frac{\lambda x + \mu}{\sqrt{1+x^2}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Réponse : $x \to \lambda x \sinh x + \mu x \cosh x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
