Chapitre 22

Intégration sur un segment

Objectifs

- Définir géométriquement l'intégrale d'une fonction en commençant par les fonctions en escalier, puis en étendant cette notion aux fonctions continues par morceaux par une technique d'approximation uniforme.
- Étudier les propriétés de l'intégrale et les différentes techniques de calcul (primitives, intégration par parties et changement de variable).
- Étudier les inégalités de CAUCHY-SCHWARZ, de MINKOWSKI, de la moyenne. Étudier les sommes de RIEMANN et les applications.
- Donner les changements de variable usuels.

Sommaire

I) Définition de l'intégrale

1) Cas des fonctions en escalier

Rappels :

- L'ensemble des fonctions en escalier sur $I = [a; b]$ est noté $\mathscr{E}(I, \mathbb{C})$, pour les lois usuelles sur les fonctions, c'est une $\mathbb{C}$-algèbre.
- Si $f \in \mathscr{E}([a; b], \mathbb{C})$ et si $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision de $[a; b]$, on dit que σ est adaptée à f lorsque $\forall\ i \in [\![0..(n-1)]\!]$, f est constante sur $]x_i; x_{i+1}[$.

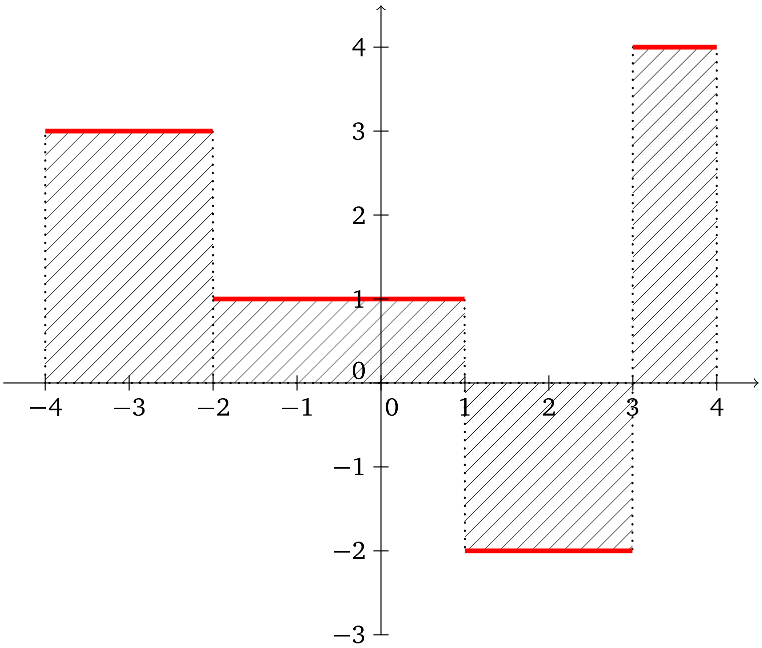

FIGURE 22.1: Interprétation géométrique

- Si σ, σ' sont deux subdivisions de $[a;b]$, on dit que σ' est plus fine que σ lorsque les points de la subdivision σ font partie de la subdivision σ', ce que l'on note $\sigma \subset \sigma'$, si de plus σ est adaptée à $f \in \mathscr{E}([a;b],\mathbb{C})$, alors σ' aussi.
- Si σ, σ' sont deux subdivisions de $[a;b]$, on note $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision obtenue en réunissant les points de σ avec ceux de σ'. Cette nouvelle subdivision est plus fine que les deux précédentes.

THÉORÈME 22.1

Soit $f \in \mathscr{E}([a;b],\mathbb{C})$ et soit $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de $[a;b]$ adaptée à f, alors la quantité :

$$I_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)c_i,$$

où c_i désigne la valeur de f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, est indépendante de la subdivision adaptée à f. Autrement dit, si σ' est une autre subdivision adaptée à f, alors $I_\sigma(f) = I_{\sigma'}(f)$.

Preuve: Si on rajoute un point d à la subdivision σ, on obtient une nouvelle subdivision σ' et il existe un indice $j \in [\![0..(n-1)]\!]$ tel que $d \in]x_j, x_{j+1}[$, mais alors $c_j(x_{j+1}-x_j) = c_j(d-x_j) + x_j(x_{j+1}-d)$, on voit donc que $I_\sigma(f) = I_{\sigma'}(f)$. Par récurrence, on en déduit que si σ' est une subdivision plus fine que σ, alors $I_\sigma(f) = I_{\sigma'}(f)$.

Soit σ' une autre subdivision de $[a;b]$ adaptée à f, la subdivision $\sigma'' = \sigma' \cup \sigma$ est adaptée à f et plus fine que σ et σ', donc $I_{\sigma''}(f) = I_{\sigma'}(f) = I_\sigma(f)$. □

Géométriquement, si $f \in \mathscr{E}([a;b],\mathbb{R})$ et si σ est une subdivision de $[a;b]$ adaptée à f, alors dans un repère orthonormé, la quantité $I_\sigma(f)$ représente l'aire algébrique de la portion de plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation : $x = a$ et $x = b$, c'est une somme d'aires de rectangles.

DÉFINITION 22.1 (intégrale d'une fonction en escalier)

Si $f \in \mathscr{E}([a;b],\mathbb{C})$, on appelle intégrale de f sur $[a;b]$ le nombre (complexe) noté $\int_{[a;b]} f$ et défini par :

$$\int_{[a;b]} f = I_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)c_i,$$

où $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une subdivision adaptée à f.

Remarques:
- L'intégrale de f sur $[a;b]$ ne dépend pas de la valeur de f aux points de la subdivision. Il en découle que si on modifie la valeur de f en un nombre fini de points, la valeur de l'intégrale reste inchangée.
- Si $f, g \in \mathscr{E}([a;b],\mathbb{C})$ et si f et g coïncident sur $[a;b]\setminus\{x_1,\ldots,x_n\}$, alors $\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} g$. Il suffit pour s'en convaincre de changer la valeur de f aux points $x_1,\ldots,x_n$ pour obtenir la fonction g, d'après une remarque précédente, l'intégrale de f reste inchangée.

THÉORÈME 22.2 (Propriétés élémentaires)

Soient $f, g \in \mathscr{E}([a;b],\mathbb{C})$:
- ***linéarité*** *: $\int_{[a;b]} f+g = \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g$ et si $\lambda\in\mathbb{C}$, $\int_{[a,b]} \lambda f = \lambda\int_{[a;b]} f$.*
- ***positivité*** *: si f est à valeurs réelles et si $f\geqslant 0$, alors $\int_{[a;b]} f \geqslant 0$. On en déduit que si f et g sont à valeurs réelles et si $f \leqslant g$, alors $\int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g$.*
- ***majoration*** *: $|\int_{[a;b]} f| \leqslant \int_{[a;b]} |f|$.*
- ***relation de*** *CHASLES[1] : si $a<c<b$, alors $\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$.*

Preuve: Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

2) Cas des fonctions continues par morceaux

Rappels :
- L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$ est noté $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a;b],\mathbb{C})$, pour les opérations usuelles sur les fonctions, c'est une $\mathbb{C}$-algèbre.
- Si $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a;b],\mathbb{C})$, alors il existe une suite de fonctions en escalier sur $[a;b]$, (ϕ_n) qui converge uniformément vers f sur $[a;b]$, *i.e.* : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\phi_n - f\|_\infty = 0$.

THÉORÈME 22.3

Soit $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a;b],\mathbb{C})$ et soit (ϕ_n) une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f, alors la suite complexe $(\int_{[a;b]}\phi_n)$ converge vers un complexe ℓ, qui ne dépend pas de la suite (ϕ_n) choisie.

Preuve: Posons $u_n = \int_{[a;b]}\phi_n$, soit $\varepsilon>0$, il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant N \Longrightarrow \|\phi_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, on en déduit que si $p,n\geqslant N$, alors $\|\phi_n-\phi_p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{b-a}$, mais alors $|u_n-u_p| = |\int_{[a;b]}\phi_n-\phi_p| \leqslant \int_{[a;b]}|\phi_n-\phi_p| \leqslant \int_{[a;b]}\|\phi_n-\phi_p\|_\infty < \varepsilon$. La suite (u_n) est donc une suite de CAUCHY, par conséquent elle converge vers un complexe ℓ.

Soit (ψ_n) une autre suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f, posons $v_n = \int_{[a;b]}\psi_n$, d'après ce qui précède, la suite (v_n) converge vers un complexe ℓ'. Soit (g_n) la suite de fonctions en escalier définie par $g_{2n}=\phi_n$ et $g_{2n+1}=\psi_n$, il est facile de voir que (g_n) converge uniformément vers f, donc la suite $(w_n=\int_{[a;b]} g_n)$ converge vers un complexe ℓ'', or $w_{2n}=u_n$ et $w_{2n+1}=v_n$, on en déduit que $\ell''=\ell=\ell'$. □

DÉFINITION 22.2 (intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Soit $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a;b],\mathbb{C})$, on appelle intégrale de f sur $[a;b]$ le nombre (complexe) noté $\int_{[a;b]} f$ et défini par :

$$\int_{[a;b]} f = \lim_{n\to+\infty}\int_{[a;b]}\phi_n,$$

où (ϕ_n) est une suite de fonctions en escalier sur $[a;b]$ qui converge uniformément vers f.
Géométriquement, dans un repère orthonormé, si f est à valeurs réelles, on dit que $\int_{[a;b]} f$ représente l'aire algébrique de la portion de plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites

1. CHASLES MICHEL (1793 – 1880) : mathématicien français, auteur d'importants travaux en géométrie.

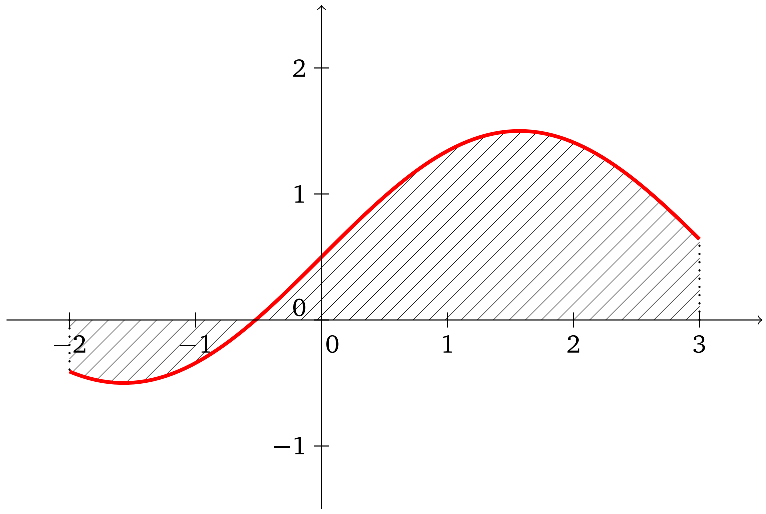

FIGURE 22.2: Cas d'une fonction continue

d'équation $x = a$ et $x = b$.

3) Premières propriétés de l'intégrale

THÉORÈME 22.4 (linéarité de l'intégrale)

Soient $f, g \in \mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a;b],\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors :

$$\int_{[a;b]}(f+g) = \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g \ \text{ et } \int_{[a;b]} \lambda.f = \lambda.\int_{[a;b]} f.$$

Preuve: Soient (ϕ_n) et (ψ_n) deux suites de fonctions en escalier qui convergent uniformément respectivement vers f et g, il est facile de voir que la suite $(\phi_n+\psi_n)$ converge uniformément vers $f+g$. D'après la définition, on a $\int_{[a;b]}(f+g) = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_{[a;b]}(\phi_n+\psi_n)$, la linéarité étant vérifiée pour les fonctions en escalier, on peut écrire que $\int_{[a;b]}(f+g) = \int_{[a;b]}\phi_n + \int_{[a;b]}\psi_n$, le résultat s'obtient alors par passage à la limite. La preuve est du même type pour le second point. □

Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a;b],\mathbb{C})$, posons $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$. La linéarité de l'intégrale permet d'écrire : $\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]}\mathrm{Re}(f) + i\int_{[a;b]}\mathrm{Im}(f)$. On peut donc toujours se ramener à intégrer des fonctions à valeurs réelles (mais ce n'est pas toujours la meilleure solution). D'autre part, on a établi :

$$\mathrm{Re}\Big(\int_{[a;b]} f\Big) = \int_{[a;b]}\mathrm{Re}(f) \ \text{ et } \ \mathrm{Im}\Big(\int_{[a;b]} f\Big) = \int_{[a;b]}\mathrm{Im}(f).$$

THÉORÈME 22.5 (positivité)

Si $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a;b],\mathbb{R})$ est à valeurs positives, alors $0 \leqslant \int_{[a;b]} f$. En particulier si $f, g \in \mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a;b],\mathbb{R})$ et si $f \leqslant g$, alors $\int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g$.

Preuve: Si f est à valeurs positives, on peut construire une suite (ϕ_n) de fonctions en escalier **positives**, qui converge uniformément vers f, comme $\int_{[a;b]} f = \lim\limits_{n\to+\infty}\phi_n$, on a le résultat par passage à la limite.

Si $f \leqslant g$, on applique ce qui précède à la fonction $h = g - f$ et on conclut avec la linéarité. □

THÉORÈME 22.6 (majoration en module)
Si $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a;b],\mathbb{C})$, alors $|\int_{[a;b]} f| \leqslant \int_{[a;b]} |f|$. En particulier si $|f| \leqslant M$ sur $[a;b]$, alors $|\int_{[a;b]} f| \leqslant M(b-a)$.

Preuve: Si f est continue par morceaux sur $[a;b]$, alors $|f|$ aussi, et si (ϕ_n) est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f, il est facile de vérifier que la suite $(|\phi_n|)$ est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $|f|$, de plus, on sait que $|\int_{[a;b]} \phi_n| \leqslant \int_{[|a;b]} |\phi_n|$, le résultat s'obtient par passage à la limite. □

THÉORÈME 22.7 (relation de Chasles)
Si $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a;b],\mathbb{C})$ et si $a < c < b$, alors $\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$.

Preuve: Même type de preuve que pour les résultats précédents. □

THÉORÈME 22.8 (cas d'une intégrale nulle)
*Si f est à **valeurs réelles, continue, positive** sur $[a;b]$, et si $\int_{[a;b]} f = 0$, alors f est nulle sur $[a;b]$.*

Preuve: Par l'absurde, supposons $f \neq 0$, alors il existe $t_0 \in [a;b]$ tel que $f(t_0) > 0$, soit $\varepsilon = f(t_0)/2$, f étant continue en t_0, il existe $t_1 < t_2 \in [a;b]$ tels que $\forall\ t \in [t_1;t_2], f(t) > \varepsilon$. Soit g la fonction en escalier définie par $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [t_1;t_2] \\ \varepsilon & \text{si } t \in [t_1;t_2] \end{cases}$, alors on $g \leqslant f$, donc $\int_{[a;b]} g \leqslant \int_{[a;b]} f$, or $\int_{[a;b]} g = \varepsilon(t_2 - t_1) > 0$, ce qui est contradictoire, donc f est nulle sur $[a;b]$. □

Le théorème ci-dessus est faux si f n'est pas continue sur $[a;b]$, on peut considérer par exemple la fonction f définie par $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, cette fonction est positive, non nulle et d'intégrale nulle.

THÉORÈME 22.9 (égalité d'intégrales)
Si $f, g \in \mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a;b],\mathbb{C})$ coïncident sur $[a;b] \setminus \{x_1,\dots,x_n\}$, alors $\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} g$.

Preuve: Posons $h = g - f$, alors h est une fonction en escalier qui coïncide avec la fonction nulle sauf éventuellement aux points $x_1,\dots,x_n$, on sait alors que $\int_{[a;b]} h = 0$, et la linéarité entraîne alors le résultat. □

Convention d'écriture : si f est continue par morceaux sur un intervalle $[a;b]$, pour $x, y \in [a;b]$, on pose :

$$\int_x^y f = \begin{cases} \int_{[x;y]} f & \text{si } x < y \\ 0 & \text{si } x = y \\ -\int_{[y;x]} f & \text{si } y < x \end{cases}.$$

Avec cette convention :

THÉORÈME 22.10
Si $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{M}}([a;b],\mathbb{C})$ alors :
- *$\forall\ x, y \in [a;b], \int_x^y f = -\int_y^x f$.*
- *$\forall\ x, y, z \in [a;b], \int_x^y f = \int_x^z f + \int_z^y f$ (relation de Chasles généralisée).*

Preuve: Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

II) Calcul d'une intégrale

1) Primitives

DÉFINITION 22.3
Soient $f, F : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$. L'ensemble des primitives de f sur I est noté $\mathscr{P}_I(f)$.

Remarque: D'après le théorème de DARBOUX, une dérivée vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires, par conséquent une fonction f qui ne vérifie pas ce théorème (*i.e.* une fonction f telle que $\text{Im}(f)$ n'est pas un intervalle), ne peut pas avoir de primitive sur I.

THÉORÈME 22.11
Si $f : I \to \mathbb{C}$ admet une primitive F sur l'intervalle I, alors $\mathscr{P}_I(f) = \{F + \lambda \ / \ \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Preuve: $G \in \mathscr{P}_I(f) \iff G' = F' \iff (G - F)' = 0 \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C}, G = F + \lambda$ (car I est un intervalle). □

Conséquence : Si $f : I \to \mathbb{C}$ admet une primitive F sur I, alors $\forall\, y_0 \in \mathbb{C}, \forall\, t_0 \in I$, f possède une unique primitive G sur I qui vérifie $G(t_0) = y_0$.

THÉORÈME 22.12 (existence de primitives)
*Si $f : I \to \mathbb{C}$ est **continue**, alors f admet des primitives sur I. Plus précisément, si $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$, alors la fonction F définie sur I par :*

$$F(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f,$$

est l'unique primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en t_0.

Preuve: Soit $t_1 \in I$, on a $|F(t) - F(t_1) - (t - t_1)f(t_1)| = |\int_{t_1}^{t} f - \int_{t_1}^{t} f(t_1)| = |\int_{t_1}^{t} (f - f(t_1))| \leqslant |\int_{t_1}^{t} |f - f(t_1)||$. On se donne $\varepsilon > 0$, f étant continue en t_1, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall\, u \in I, |u - t_1| < \alpha \implies |f(u) - f(t_1)| < \varepsilon$, donc si $|t - t_1| < \alpha$, alors $|\int_{t_1}^{t} |f - f(t_1)|| \leqslant |t - t_1|\varepsilon$, d'où :

$$\left| \frac{F(t) - F(t_1)}{t - t_1} - f(t_1) \right| \leqslant \varepsilon,$$

on en déduit que F est dérivable en t_1 et que $F'(t_1) = f(t_1)$. La fonction F est donc une primitive de f sur I, et il est clair que $F(t_0) = y_0$. □

Remarque: La continuité de f est essentielle pour la démonstration, prenons $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$., alors avec $t_0 = y_0 = 0$, on obtient que $F = 0$, F est bien dérivable mais ce n'est pas une primitive de f sur $[0; 1]$.

THÉORÈME 22.13 (calcul d'une intégrale)
Si $f : I \to \mathbb{C}$ est continue sur l'intervalle I et si F désigne une primitive de f sur I, alors :

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f = [F]_a^b = F(b) - F(a).$$

Preuve: F étant une primitive de f, on a $\forall\ t \in I, F(t) = F(a) + \int_a^t f$, d'où $F(b) - F(a) = \int_a^b f$. □

Cas d'une fonction continue par morceaux : si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux, soit $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f. Sur chacun des morceaux $]x_i;x_{i+1}[$ la fonction f admet un prolongement par continuité f_i sur le segment $[x_i,x_{i+1}]$, les deux fonctions coïncidant sur le segment $[x_i,x_{i+1}]$, sauf peut être en deux points, on a $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i$, mais f_i admet une primitive F_i sur $[x_i;x_{i+1}]$, d'où : $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f = F_i(x_{i+1}) - F_i(x_i)$, la relation de CHASLES donne alors :

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(x_{i+1}) - F_i(x_i).$$

On peut donc toujours se ramener au cas des fonctions continues et donc à une recherche de primitive.

THÉORÈME 22.14 (lien entre une fonction et sa dérivée)

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I, alors $\forall\ t, t_0 \in I, f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t f'$.

Preuve: Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

THÉORÈME 22.15 (inégalité des accroissements finis généralisée)

Si $f, g : I \to \mathbb{C}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I et si $\forall\ t \in I, |f'(t)| \leqslant g'(t)$, alors :

$$\forall\ a, b \in I, |f(b) - f(a)| \leqslant |g(b) - g(a)|.$$

Preuve: Supposons $a < b$, on a $|f(b) - f(a)| = |\int_{[a;b]} f'| \leqslant \int_{[a;b]} |f'| \leqslant \int_{[a;b]} g' = g(b) - g(a) = |g(b) - g(a)|$. □

2) Intégration par parties

THÉORÈME 22.16

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, alors $\forall\ a, b \in I, \int_a^b f' \times g = [f \times g]_a^b - \int_a^b f \times g'$.

Preuve: La fonction $f' \times g + f \times g'$ est continue et admet comme primitive sur I la fonction $f \times g$, d'où $\int_a^b (f' \times g + f \times g') = [f \times g]_a^b$, ce qui donne le résultat par linéarité. □

Quelques cas à connaître :

- Toute fonction de la forme $f(t) = P(t) \times \exp(\alpha t)$ (où $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$) peut s'intégrer par parties en posant $u' = \exp(\alpha t)$.

  Exemple: $\int_0^\pi t\sin(t)\,dt = \mathrm{Im}(\int_0^\pi t\exp(it)\,dt)$, or :

  $$\int_0^\pi t\exp(it)\,dt = [-it\exp(it)]_0^\pi + i\int_0^\pi \exp(it)\,dt = i\pi + [\exp(it)]_0^\pi = -2 + i\pi$$

  on en déduit que :

  $$\int_0^\pi t\sin(t)\,dt = \pi \text{ et } \int_0^\pi t\cos(t)\,dt = -2$$

- Toute fonction de la forme $f(t) = P(t) \times \ln(Q(t))$ (où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$), peut s'intégrer par parties en posant $u' = P(t)$.

  Exemple: Soit $x > 0$; $\int_1^x t^2\ln(t)\,dt = [\ln(t)\frac{t^3}{3}]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{x^3-1}{9}$.

- Toute fonction de la forme $f(t) = P(t)\arctan(Q(t))$ (où P, Q sont des polynômes), peut s'intégrer par parties en posant $u' = P(t)$.
  Exemple: Une primitive de la fonction arctan est :
  $$F(x) = \int_0^x \arctan(t)\,dt = [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$
- Calcul d'intégrales par récurrence : soit $n \geqslant 1$, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$, on a $F_1(x) = \arctan(x)$. En posant $u' = 1$ et en intégrant par parties, on a $F_n(x) = [\frac{t}{(1+t^2)^n}]_0^x + \int_0^x \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt$, en écrivant que $\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}$, on obtient : $F_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nF_n(x) - 2nF_{n+1}(x)$, d'où finalement :
  $$F_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}F_n(x).$$

3) Changement de variable

THÉORÈME 22.17

Soit $\theta : J \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle J, et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur l'intervalle I, alors on a : $\forall\, a, b \in J, \int_a^b f\circ\theta \times \theta' = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} f$.

Preuve: Soit F une primitive de f sur I, la fonction $F\circ\theta$ est dérivable sur J et $(F\circ\theta)' = \theta' \times f\circ\theta$, d'où :
$$\int_a^b \theta' \times f\circ\theta = F\circ\theta(b) - F\circ\theta(a) = F(\theta(b)) - F(\theta(a)) = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} f.$$
□

Dans la pratique : Soit à calculer $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ où $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction continue sur l'intervalle I, avec $\alpha, \beta \in I$. On pose $t = \theta(u)$ où $\theta : J \to I$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle J, on cherche $a, b \in J$ tels que $\theta(a) = \alpha$ et $\theta(b) = \beta$. On écrit alors $\frac{dt}{du} = \theta'(u)$, d'où (calcul symbolique) $dt = \theta'(u)du$, puis on remplace : $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_a^b f(\theta(u))\theta'(u)\,du$ en faisant attention aux bornes de la nouvelle variable. Remarquons que la formule du changement de variable peut se lire dans l'autre sens.

Exemples:
- Soit $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$. On effectue le changement de variable $t = \sin(u)$ avec $u \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on a alors $dt = \cos(u)du$, d'où $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)\,du = \int_0^{\pi/2} \cos(u)^2\,du = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,du = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.
  En particulier on en déduit que la surface du cercle trigonométrique vaut π.
- Soit $I = \int_0^{\pi/3} \ln(\cos(t))\sin(t)\,dt$. On effectue le changement de variable $u = \cos(t)$ avec $\cos : [0; \frac{\pi}{3}] \to [\frac{1}{2}; 1]$ ($\mathscr{C}^1$), on a $du = -\sin(t)dt$ et donc $I = \int_{1/2}^1 \ln(u)\,du = [u\ln(u) - u]_{1/2}^1 = \frac{\ln(2)-1}{2}$.

THÉORÈME 22.18 (applications)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue
- *Si f est impaire alors $\forall\, a > 0, \int_{-a}^a f = 0$.*
- *Si f est paire alors $\forall\, a > 0, \int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.*
- *Si f est T-périodique ($T > 0$) alors :*
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \int_a^b f = \int_{a+T}^{b+T} f \ \text{ et } \int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f.$$

Preuve: Supposons que f est impaire, et soit $I = \int_{-a}^{a} f(t)\,dt$. On effectue le changement de variable $t = -u$, d'où $dt = -du$ et donc $I = -\int_{a}^{-a} f(-u)\,du = -\int_{a}^{-a} f(u)\,du = -I$, ce qui donne le premier résultat.

Si maintenant f est paire : soit $J = \int_{0}^{a} f(t)\,dt$, en reprenant le changement de variable ci-dessus, on obtient $J = -\int_{0}^{-a} f(-u)\,du = \int_{-a}^{0} f(u)\,du$, d'où $I = 2J$ d'après la relation de Chasles.

Si f est T-périodique : soit $I = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$, on effectue le changement de variable $u = t + T$, on a alors $du = dt$ et donc $I = \int_{a+T}^{b+T} f(u-T)\,du = \int_{a+T}^{b+T} f(u)\,du$, ce qui donne la première égalité. Mais d'après la relation de Chasles, $\int_{a}^{b} f = \int_{a}^{a+T} f + \int_{a+T}^{b+T} f + \int_{b+T}^{b} f$, donc d'après ce qui précède, il reste $0 = \int_{a}^{a+T} f + \int_{b+T}^{b} f$, ce qui donne l'autre égalité. □

Remarque: Plus généralement si f présente un élément de symétrie ($f(2a-t) = f(t)$ ou $2b - f(t)$), alors il faut penser au changement de variable $u = 2a - t$ surtout si on intègre sur un intervalle de centre a.

THÉORÈME 22.19

Soit f une fonction continue et T-périodique ($T > 0$), alors f admet des primitives T-périodiques si et seulement si l'intégrale de f sur une période est nulle.

Preuve: Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, si F est T-périodique, alors $F(T) - F(0) = 0$ *i.e.* $\int_{0}^{T} f = 0$.

Réciproquement, si l'intégrale de f sur une période est nulle, alors la fonction $h : t \to F(t+T) - F(t) = \int_{t}^{t+T} f$, est nulle, et donc F est T-périodique (en fait toutes les primitives de f sont périodiques). □

III) Propriétés de l'intégration

1) Inégalités

THÉORÈME 22.20

*Soit f, g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et **à valeurs réelles**, on a les inégalités suivantes :*
- $\left(\int_{[a;b]} f \times g\right)^2 \leqslant \left(\int_{[a;b]} f^2\right)\left(\int_{[a;b]} g^2\right)$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz).*
- $\sqrt{\int_{[a;b]} (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int_{[a;b]} f^2} + \sqrt{\int_{[a;b]} g^2}$ *(inégalité de Minkowski[2]).*

Preuve: Posons $a = \int_{[a;b]} f^2$, $b = \int_{[a;b]} f \times g$ et $c = \int_{[a;b]} g^2$. Pour tout réel λ on a $0 \leqslant \int_{[a;b]} (\lambda f + g)^2$ (intégrale d'une fonction positive), en développant on obtient par linéarité $a\lambda^2 + 2b\lambda + c \geqslant 0$. Si $a \neq 0$ alors on a un trinôme du second degré qui est toujours positif, donc son discriminant est négatif ou nul, *i.e.* $b^2 - ac \leqslant 0$ ce qui donne exactement l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Si $a = 0$ alors pour tout réel λ on a $2b\lambda + c \geqslant 0$ ce qui entraîne $b = 0$ et donc $b^2 \leqslant ac$.

Pour la seconde inégalité : $\int_{[a;b]} (f+g)^2 = a + 2b + c \leqslant a + 2\sqrt{a}\sqrt{c} + c = (\sqrt{a} + \sqrt{c})^2$, ce qui donne exactement l'inégalité de Minkowski. □

THÉORÈME 22.21 (cas d'égalité de Cauchy-Schwarz[3])

*Si f, g sont **continues** et à valeurs **réelles**, alors :*

$$\left(\int_{[a;b]} f \times g\right)^2 = \left(\int_{[a;b]} f^2\right)\left(\int_{[a;b]} g^2\right) \iff f \text{ et } g \text{ sont colinéaires.}$$

2. MINKOWSKI Hermann (1864 – 1909) : mathématicien allemand qui a travaillé notamment en physique mathématique en donnant une interprétation géométrique de la relativité restreinte.

Preuve: S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda g$, alors :

$$\left(\int_{[a;b]} f \times g\right)^2 = \lambda^2 \left(\int_{[a;b]} f^2\right)^2$$

et de l'autre coté on a :

$$\left(\int_{[a;b]} f^2\right)\left(\int_{[a;b]} g^2\right) = \lambda^2 \left(\int_{[a;b]} f^2\right)^2$$

on a donc bien l'égalité.

Réciproquement, si on a l'égalité, alors avec les notations de la démonstration du théorème précédent, si $a \neq 0$, le discriminant du trinôme $a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ est nul, ce trinôme a donc une racine double λ_0, *i.e.* $\int_{[a;b]}(\lambda_0 f + g)^2 = 0$, or la fonction intégrée est positive et continue, donc elle est nulle, ce qui donne $g = -\lambda_0 f$. Lorsque $a = 0$, alors f^2 étant positive continue et d'intégrale nulle, on a $f = 0$ et donc $f = 0.g$. Dans les deux cas les fonctions f et g sont colinéaires. □

Exemple: Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Pour $t \in [0;1]$ on a $f(t) = \int_0^t f'$, d'où $f(t)^2 = \left(\int_0^t f'\right)^2 \leqslant \left(\int_0^t 1\right)\left(\int_0^t f'^2\right)$, ce qui entraîne $f(t)^2 \leqslant t\int_0^1 f'^2$, il en découle alors que :

$$\int_0^1 f^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2.$$

THÉORÈME 22.22 (Inégalité de la moyenne)

Soient $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ continues par morceaux, à valeurs réelles, avec g positive. Si f est majorée par $M \in \mathbb{R}$ et minorée par $m \in \mathbb{R}$ sur $[a;b]$, alors :

$$m\int_{[a;b]} g \leqslant \int_{[a;b]} fg \leqslant M\int_{[a;b]} g.$$

Preuve: La fonction g étant à valeurs positives, on pour $t \in [a;b], mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$, le résultat en découle en passant à l'intégrale sur $[a;b]$. □

Exemple: Soient $0 < a < b$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème ci-dessus $\cos(\varepsilon b)\ln(\frac{b}{a}) \leqslant \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{\cos(t)}{t}\,dt \leqslant \cos(\varepsilon a)\ln(\frac{b}{a})$. D'où : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{\cos(t)}{t}\,dt = \ln(\frac{b}{a})$.

2) Sommes de Riemann

DÉFINITION 22.4

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, soit $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de $[a;b]$, et soit $\alpha = (\alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ une famille de réels telle que $\forall\, i \in [\![0..(n-1)]\!], \alpha_i \in [x_i; x_{i+1}]$. On appelle somme de Riemann [4] de la fonction f associée à la subdivision σ et à la famille α, la quantité :

$$R_{\sigma,\alpha}(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(\alpha_i).$$

3. SCHWARZ HERMANN (1846 – 1921) : mathématicien allemand.

Remarque: Soit ϕ la fonction en escalier sur $[a;b]$ définie par $\phi(x_i) = f(x_i)$ et $\phi(t) = f(\alpha_i)$ si $t \in]x_i;x_{i+1}[$, alors on a $R_{\sigma,\alpha}(f) = \int_{[a;b]} \phi$.

Dans la suite on ne considère que des subdivisions σ à pas constant, c'est à dire des subdivisions $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ telles que $\forall\, i \in [\![0..(n-1)]\!], x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$, pour une telle subdivision, on a $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, et la quantité $\frac{b-a}{n}$ est appelée **pas de la subdivision**.

THÉORÈME 22.23 (limite d'une somme de Riemann)

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, pour chaque entier $n \geqslant 1$, on pose pour $i \in [\![0..n]\!], x_{n,i} = a + i\frac{b-a}{n}$, on a ainsi une subdivision $\sigma_n = (x_{n,i})_{0\leqslant i\leqslant n}$ à pas constant, on se donne également une famille de réels $\alpha_n = (\alpha_{n,i})_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ telle que pour $i \in [\![0..(n-1)]\!], \alpha_{n,i} \in [x_{n,i}, x_{n,i+1}]$. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} R_{\sigma_n,\alpha_n}(f) = \int_{[a;b]} f\text{, c'est à dire : } \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_{n,i}) = \int_{[a;b]} f.$$

Preuve: On se donne $\varepsilon > 0$, la fonction f étant continue sur le segment $[a;b]$, elle est uniformément continue (théorème de HEINE), il existe donc $\eta > 0$ tel que $\forall\, x, y \in [a;b], |x-y| < \eta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Il existe un entier N tel que $n \geqslant N \implies \frac{b-a}{n} < \eta$, donc si $n \geqslant N$ on a :

$$\begin{aligned}
\left|R_{\sigma_n,\alpha_n}(f) - \int_{[a;b]} f\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}} f(\alpha_{n,i}) - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}} f\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}} \big(f(\alpha_{n,i}) - f(t)\big)\,dt\right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}} \big(f(\alpha_{n,i}) - f(t)\big)\,dt\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}} \big|f(\alpha_{n,i}) - f(t)\big|\,dt \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}} \varepsilon\,dt \text{ (car ci-dessus on a } |\alpha_{n,i} - t| < \eta) \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon\frac{b-a}{n} \leqslant (b-a)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve le théorème. □

Applications:

- Méthode des rectangles pour le calcul approché d'une intégrale (l'estimation de l'erreur fait l'objet du théorème suivant), pour les réels $\alpha_{n,i}$ on peut prendre :
  - $\alpha_{n,i} = a + i\frac{b-a}{n}$: c'est la méthode des rectangles de gauche, on a alors (si f est continue sur $[a;b]$) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \int_{[a;b]} f.$$

  - $\alpha_{n,i} = a + (i+1)\frac{b-a}{n}$: c'est la méthode des rectangles de droite, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \int_{[a;b]} f.$$

  - $\alpha_{n,i} = a + (i+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}$ (milieu de $[x_{n,i};x_{n,i+1}]$) : c'est la méthode du point médian, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + (i+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}) = \int_{[a;b]} f.$$

- Étude de certaines suites. **Exemple** : Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, on a alors $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}$, c'est la méthode des rectangles de droite appliquée à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur l'intervalle $[0;1]$, la fonction étant continue sur cet intervalle, on a $\lim u_n = \int_{[0;1]} f = \ln(2)$.

4. RIEMANN GEORG FRIEDRICH BERNHARD (1826 – 1866) : mathématicien allemand dont l'œuvre est colossale.

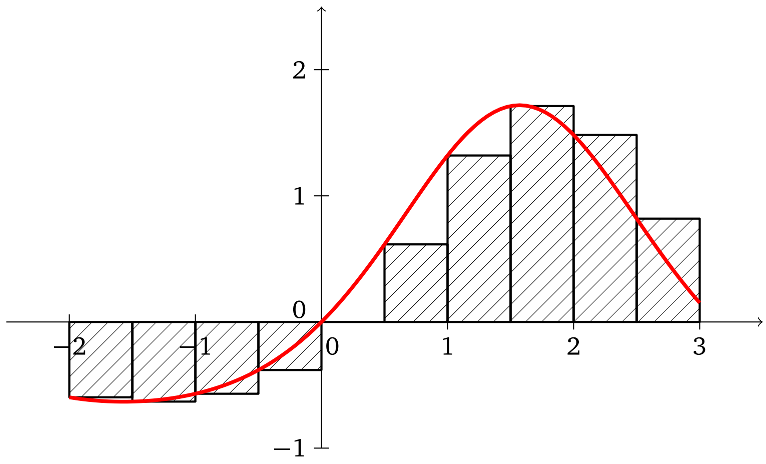

FIGURE 22.3: Méthode des rectangles de gauche

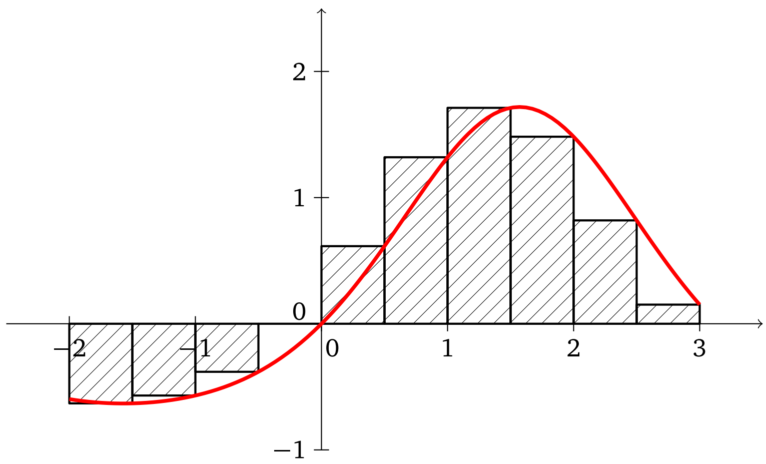

FIGURE 22.4: Méthode des rectangles de droite

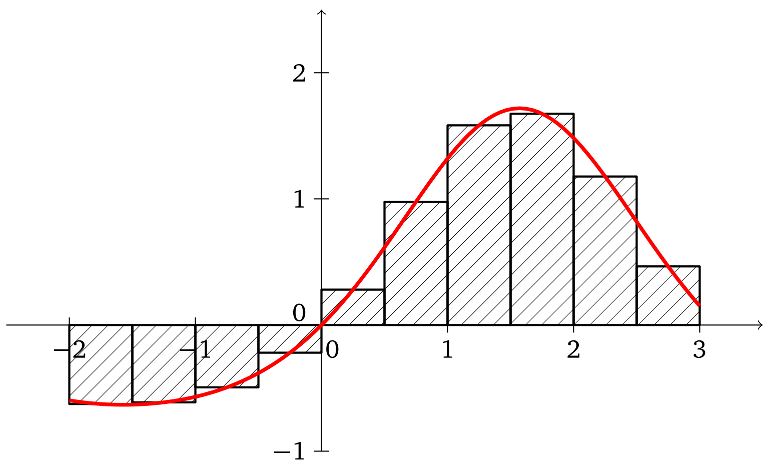

FIGURE 22.5: Méthode du point médian

– Calcul de certaines intégrales comme : $\int_0^{2\pi} \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,dt$ pour $|x| \neq 1$ (cf. exercice).

THÉORÈME 22.24 (estimation de l'erreur)

Si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ est continue et k-lipschitzienne, alors, avec les notations précédentes :

$$\left| R_{\sigma_n,\alpha_n}(f) - \int_{[a;b]} f \right| \leqslant k\frac{(b-a)^2}{n}.$$

Preuve: En reprenant la démonstration précédente, on a :

$$\begin{aligned}\left| R_{\sigma_n,\alpha_n}(f) - \int_{[a;b]} f \right| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}} \left| f(\alpha_{n,i}) - f(t) \right| dt \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}} k\left|\alpha_{n,i} - t\right| dt \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}} k\frac{b-a}{n}\,dt \leqslant k\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}} dt \leqslant k\frac{(b-a)^2}{n}.\end{aligned}$$

□

IV) Recherche de primitives

Convention : soit f une fonction continue sur un intervalle I, une primitive de f sur I est la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ où $a \in I$ est quelconque, ce qui fait que l'on notera simplement $F(x) = \int^x f(t)\,dt$.

1) Fonctions usuelles

Fonction	Primitive
$u'u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, $\ln(\|u\|)$ sinon
$u'e^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$u'(1+tan^2(u)) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$
$u'\mathrm{ch}(u)$	$\mathrm{sh}(u)$
$u'\mathrm{sh}(u)$	$\mathrm{ch}(u)$
$u'(1-th^2(u)) = \frac{u'}{\mathrm{ch}^2(u)}$	$\mathrm{th}(u)$
$u'\tan(u)$	$-\ln(\|\cos(u)\|)$
$u'\tan(u)^2$	$\tan(u)-u$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$\mathrm{argsh}(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$\mathrm{argch}(u)$
$\frac{u'}{1-u^2}$	$\mathrm{argth}(u) = \ln(\sqrt{\left\|\frac{1+u}{1-u}\right\|})$

2) Fractions rationnelles en sinus et cosinus

Soit $f(t)$ une fraction rationnelle en $\sin(t)$ et $\cos(t)$: $f(t) = \frac{\sum_{p,q} a_{p,q}\sin(t)^p\cos(t)^q}{\sum_{p,q} b_{p,q}\sin(t)^p\cos(t)^q}$.

Pour intégrer ce type de fonction on peut appliquer la **règle de** Bioche :

– Si $f(-t)d(-t) = f(t)dt$, alors on peut poser $u = \cos(t)$.

- Si $f(\pi-t)d(\pi-t)=f(t)dt$, alors on peut poser $u=\sin(t)$.
- Si $f(\pi+t)d(\pi+t)=f(t)dt$, alors on peut poser $u=\tan(t)$.
- Sinon on peut poser $u=\tan(t/2)$. Rappelons que $\sin(t)=\frac{2u}{1+u^2}$ et $\cos(t)=\frac{1-u^2}{1+u^2}$.

Dans tous les cas, on est ramené à une fraction rationnelle en u.

Exemples:
- Calculer une primitive de $f(t)=\frac{1}{\sin(t)^2+3\cos(t)^2}$ sur $]-\pi/2;\pi/2[$.

  Réponse: Il s'agit de calculer $F(x)=\int^x f(t)dt=\int^x\frac{dt}{1+2\cos(t)^2}$, d'après la règle de Bioche, on peut poser $u=\tan(t)$, ce qui donne $du=(1+u^2)dt$, et donc $F(x)=\int^{\tan(x)}\frac{du}{u^2+3}$, ce qui donne :

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\tan(x)}{\sqrt{3}})+\text{cte}.$$

- Calculer une primitive de $f(x)=\frac{1}{\sin(x)}$ sur $]0;\pi[$.

  Réponse: Une primitive est $F(x)=\int^x\frac{dt}{\sin(t)}$, posons $u=\tan(t/2)$, on a alors $2du=(1+u^2)dt$, d'où $F(x)=\int^{\tan(x/2)}\frac{2(1+u^2)}{2u(1+u^2)}du=\int^{\tan(x/2)}\frac{1}{u}du=\ln(|\tan(x/2)|)+$ cte.

3) Fractions rationnelles en ch et sh

Soit $F(X,Y)$ une fraction rationnelle à deux indéterminées X et Y, la fonction $f(t)=F(\text{ch}(t),\text{sh}(t))$ est une fraction rationnelle en ch et sh. Pour intégrer ce type de fonction, on peut appliquer la règle de Bioche à la fonction $g(t)=F(\cos(t),\sin(t))$, c'est à dire en remplaçant $\text{ch}(t)$ par $\cos(t)$ et $\text{sh}(t)$ par $\sin(t)$:
- Si $g(-t)d(-t)=g(t)dt$, alors on peut poser $u=\text{ch}(t)$.
- Si $g(\pi-t)d(\pi-t)=g(t)dt$, alors on peut poser $u=\text{sh}(t)$.
- Si $g(\pi+t)d(\pi+t)=g(t)dt$, alors on peut poser $u=\text{th}(t)$.
- Sinon on peut poser $u=\exp(t)$.

Dans tous les cas, on est ramené à une fraction rationnelle en u.

Exemple: Calculons $F(x)=\int^x\frac{dt}{\text{ch}(t)}$ sur $\mathbb{R}$, d'après la règle de Bioche, on peut poser $u=\text{sh}(t)$, d'où $du=\text{ch}(t)dt$ et $F(x)=\int^{\text{sh}(x)}\frac{du}{1+u^2}$, et donc : $F(x)=\arctan(\text{sh}(x))+\text{cte}$.

4) Fonctions se ramenant aux types précédents

- Une fraction rationnelle en t et $\sqrt{a^2-t^2}$ peut s'intégrer en posant $t=a\sin(u)$, ce qui donne une fraction rationnelle en $\sin(u)$ et $\cos(u)$.

  Exemple: Une primitive de $f(x)=\sqrt{1+x-x^2}$ sur $[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ est $F(x)=\int^x\sqrt{1+t-t^2}\,dt$.

  On a $f(t)=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\right)^2}$, donc $F(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}\int^x\sqrt{1-\left(\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\right)^2}\,dt$, on pose $\sin(u)=\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\in[-1;1]$, on peut donc prendre $u\in[-\pi/2;\pi/2]$, on a $dt=\frac{\sqrt{5}}{2}\cos(u)du$, et donc :

$$F(x)=\frac{5}{4}\int^{\arcsin(\frac{2x-1}{\sqrt{5}})}\cos(u)^2\,du$$

  ce qui donne :

$$F(x)=\frac{5}{8}\arcsin(\frac{2x-1}{\sqrt{5}})+\frac{2x-1}{4}\sqrt{1+x-x^2}+\text{cte}.$$

- Une fraction rationnelle en t et $\sqrt{t^2-a^2}$ peut s'intégrer en posant $t=a\text{ch}(u)$, on obtient alors une fraction rationnelle en $\text{ch}(u)$ et $\text{sh}(u)$.

Exemple: Une primitive de $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ sur $[1;+\infty[$ est la fonction $F(x)=\int^x \sqrt{t^2-1}\,dt$, on pose $t=\mathrm{ch}(u)$ avec $u\in[0;+\infty[$, on a $dt=\mathrm{sh}(u)du$, et donc $F(x)=\int^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\mathrm{sh}(u)^2\,du$, or $\mathrm{sh}(u)=\frac{e^{2u}+e^{-2u}-2}{4}$, donc $F(x)=\left[\frac{e^{2u}-e^{-2u}-4u}{8}\right]^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}$, ce qui donne après simplifications :

$$F(x)=\frac{x\sqrt{x^2-1}-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{2}+\text{cte}.$$

– Une fraction rationnelle en t et $\sqrt{t^2+a^2}$ peut s'intégrer en posant $t=a\mathrm{sh}(u)$, on obtient alors une fraction rationnelle en $\mathrm{ch}(u)$ et $\mathrm{sh}(u)$.
Exemple: Une primitive de la fonction $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F(x)=\int^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$, on pose $t=\mathrm{sh}(u)$, on a $dt=\mathrm{ch}(u)du$ et donc $F(x)=\int^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}du=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\text{cte}$.

– Une fraction rationnelle en t et $\sqrt{\frac{at+b}{ct+d}}$ peut s'intégrer en posant $u=\sqrt{\frac{at+b}{ct+d}}$, on obtient alors une fraction rationnelle en u.
Exemple: Une primitive de $f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{x-1}}$ sur $[1;+\infty[$ est la fonction $F(x)=\int^x\frac{dt}{t-\sqrt{t-1}}\,dt$, on pose $u=\sqrt{t-1}$, d'où $t=u^2+1$, donc $dt=2udu$ et $F(x)=\int^{\sqrt{x-1}}\frac{2udu}{u^2-u+1}$. Or $\frac{2u}{u^2-u+1}=\frac{2u-1}{u^2-u+1}+\frac{1}{(u-1/2)^2+3/4}$, d'où $F(x)=\ln(x-\sqrt{x-1})+\frac{4}{3}\int^{\sqrt{x-1}}\frac{du}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$, ce qui donne finalement :

$$F(x)=\ln(x-\sqrt{x-1})+2\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{3}})+\text{cte}.$$

5) Polynômes trigonométriques

Il s'agit des sommes finies du type $\sum\limits_{p,q}a_{i,j}\cos(x)^p\sin(x)^q$. Une telle fonction est un cas particulier de fraction rationnelle en cos et sin, la règle de Bioche peut s'appliquer, mais il y a parfois plus simple, on est en fait ramené à chercher une primitive de $\cos(x)^p\sin(x)^q$:

– Linéarisation : on écrit que $\cos(t)^p=\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^p$ et $\sin(t)^q=\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^q$, puis on développe.
Exemple: $\int^x\cos(t)^4\sin(t)^2\,dt$, on a :

$$\cos(t)^4\sin(t)^2=\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2=\frac{-\cos(6t)-2\cos(4t)+\cos(2t)+2}{32}.$$

Ce qui donne finalement :

$$\int^x\cos(t)^4\sin(t)^2\,dt=-\frac{\sin(6x)}{192}-\frac{\sin(4x)}{64}+\frac{\sin(2x)}{64}+\frac{x}{16}+\text{cte}.$$

– Changement de variable : lorsque l'un des exposants est impair, par exemple $p=2k+1$, on a $F(x)=\int^x\cos(t)^p\sin(t)^q\,dt=\int^x\cos(t)^{2k}\sin(t)^q\cos(t)\,dt$, on pose alors $u=\sin(t)$, d'où $du=\cos(t)dt$ et donc $F(x)=\int^{\sin(x)}(1-u^2)^ku^q\,du$, c'est un polynôme en u.
Exemple: Soit à calculer $F(x)=\int^x\sin(t)^5\,dt$, on pose $u=\cos(t)$, d'où $du=-\sin(t)dt$ et

$$F(x)=-\int^{\cos(x)}(1-u^2)^2\,du=-\frac{\cos(x)^5}{5}+\frac{2\cos(x)^3}{3}-\cos(x)+\text{cte}$$

V) Exercices

★Exercice 22.1
Calculer la limite éventuelle de la suite (u_n) dans les cas suivants :

$$u_n=\frac{1^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p\in\mathbb{N})\qquad u_n=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}\qquad u_n=n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+k)^2}.$$

★Exercice 22.2

À l'aide d'une somme de Riemann, calculer pour $|x| \neq 1$:

$$\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1)\,dt.$$

★Exercice 22.3

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et telle que $\forall \ \in [a;b], f(a+b-t) = f(t)$.

a) Montrer que : $\displaystyle\int_a^b t f(t)\,dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,dt = (a+b)\int_a^{(a+b)/2} f(t)\,dt$.

b) Applications : calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos(t)^2}\,dt \qquad \int_0^{\pi} \frac{t}{1+\sin(t)}\,dt$.

c) En s'inspirant d'une même démarche, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t))\,dt$.

★Exercice 22.4

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$.

a) Montrer que $B(p,q) = B(q,p)$.

b) Montrer que pour $q \geqslant 1, B(p,q) = \dfrac{q}{p+1}B(p+1,q-1)$.

c) En déduire l'expression de $B(p,q)$.

★Exercice 22.5

Soit f une fonction $\mathscr{C}^2$ sur $[a;b]$, on pose pour $n \geqslant 1$:

$$M_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k+1/2)\frac{b-a}{n}).$$

a) Montrer que $\forall\ t, x \in [a;b], \exists\ c_{x,t} \in [a;b]$ tel que :

$$f(t) - f(x) = (t-x)f'(x) + \frac{(t-x)^2}{2}f''(c_{x,t}).$$

b) En déduire que $\displaystyle |M_n(f) - \int_a^b f| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$, où $\displaystyle M_2 = \sup_{t\in[a;b]} |f''(t)|$.

★Exercice 22.6

Étudier les fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$.

b) $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

★Exercice 22.7

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \, dt$ (intégrales de Wallis).

a) Calculer I_0 et I_1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)^n \, dt$.

b) Établir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c) Étudier le sens de variation de la suite (I_n), en déduire que $I_{n+1} \sim I_n$.

d) Montrer que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})$ est constante, en déduire un équivalent simple de I_n.

★Exercice 22.8

Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5+2\cos(t)^2} \, dt$.

★Exercice 22.9

Calculer une primitive des fonctions suivantes :

$$\cos(t)^4 \quad \cos(t)^2\sin(t)^3 \quad \frac{t^2}{(t^2-1)^3} \quad \frac{t}{\cos(t)^2} \quad \tan(t)^7$$

$$\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \quad t\arcsin(t) \quad \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}} \quad t^n e^t \quad \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}.$$

★Exercice 22.10

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$.

a) Montrer que si f est dérivable sur $]0;1[$ et si $f(1) = \displaystyle\int_0^1 f$, alors il existe $c \in]0;1[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f = 1/2$, alors f possède au moins un point fixe.

c) Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ et si $f(0) = f(1) = 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(f+f'') \leqslant 0$ (exprimer f en fonction de f').

d) Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(\frac{t}{n}) \, dt$.

e) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 t^n f(t) \, dt = f(1)$.

★Exercice 22.11

Calculer de deux façons $\displaystyle\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n \, dt$, en déduire une simplification de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\mathrm{C}_n^k}{k+1}$.

★Exercice 22.12

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que $f \times g \geqslant 1$. Montrer que :

$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right).$$

Quand a-t-on l'égalité ?