Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 **

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,+\infty[$, on pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction I_n sur $]0,+\infty[$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt$.

Correction ▼ [005765]

Exercice 2 *** I (très long) Intégrale de Poisson

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\,d\theta$.

1. (a) Montrer que F est paire, définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Préciser une expression de $F'(x)$ sous forme intégrale.
   (b) Calculer $F'(x)$.
   (c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty}(F(x) - 4\pi \ln x)$.
   (d) En déduire $F(x)$ pour tout réel x.
2. (a) Quand $x \in]-1,1[$, retrouver ce résultat en écrivant d'abord $\ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$ comme somme d'une série (commencer par dériver la fonction de θ).
   (b) Déterminer une relation entre $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire $F(x)$ pour tout réel x.

Correction ▼ [005766]

Exercice 3 ** I Un calcul de l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser F'.
2. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser G'.
3. Montrer que la fonction $F+G$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
5. En déduire I.

Correction ▼ [005767]

Exercice 4 ***

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt$ (on admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Correction ▼ [005768]

Exercice 5 ***

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, dt$.

Correction ▼ [005769]

Exercice 6 **** I (très long)

Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} \, dt$ et en déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ (indication : trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par ces deux fonctions).

Correction ▼ [005770]

Exercice 7 ** I (Produit de convolution)

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues et T-périodiques (T réel strictement positif). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f * g(x) = \int_0^T f(x-t)g(t) \, dt.$$
Montrer que la fonction $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et T-périodique.
2. $*$ est donc une loi interne sur E, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques. Montrer que cette loi est commutative.

Correction ▼ [005771]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient a et A deux réels tels que $0<a<A$. On considère $F_n : \begin{array}{ccc} [a,A]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{1}{(t^2+x^2)^n} \end{array}$.

   • Pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t\mapsto F_n(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $F_n(x,t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^{2n}}>0$ avec $2n>1$.

   • La fonction F_n est admet sur $[a,A]\times[0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

   $$\forall(x,t)\in[a,A]\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)=\frac{-2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}.$$

   De plus,
   - pour chaque $x\in[a,A]$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,

   -pour chaque $t\in[0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,A]$,
   -pour chaque $(x,t)\in[a,A]\times[0,+\infty[$,

   $$\left|\frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)\right|=\frac{2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}\leqslant\frac{2nA}{(t^2+a^2)^{n+1}}=\varphi(t),$$

   où la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
   D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction I_n est de classe C^1 sur $[a,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0<a<A$, on a montré que la fonction I_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que

   $$\forall x>0,\ I_n'(x)=-2nx\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+x^2)^{n+1}}\,dt=-2nxI_{n+1}(x).$$

   $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n'(x)=-2nxI_{n+1}(x).}$$

2. Pour $x>0$, on a $I_1(x)=\left[\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2x}$. Ensuite, $I_2(x)=-\frac{1}{2x}I_1'(x)=\frac{\pi}{4x^3}$ puis $I_3(x)=-\frac{1}{4x}I_2'(x)=\frac{3\pi}{16x^5}$ et donc $I_3(1)=\frac{3\pi}{16}$.

   $$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt=\frac{3\pi}{16}.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. (a) **Parité de F.** Soit x un réel du domaine de définition de F. En posant $t=\theta+\pi$, on obtient

   $$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\ln(x^2+2x\cos t+1)\,dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2+2x\cos t+1)\,dt\ \text{(par }2\pi\text{-périodicité)}\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\ln((-x)^2-2(-x)\cos t+1)\,dt=F(-x).\end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout réel x, $F(x)$ existe si et seulement si $F(-x)$ existe et de plus $F(x)=F(-x)$.

   $$\boxed{F\text{ est paire.}}$$

   Définition de F. Soit $x\in[0,+\infty[$. Pour tout réel $\theta\in[-\pi,\pi]$,

   $$x^2-2x\cos\theta+1=(x-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=\left|x-e^{i\theta}\right|^2\geqslant 0.$$

De plus, $\left|x-e^{i\theta}\right|=0 \Leftrightarrow e^{i\theta}=x \Leftrightarrow x=1$ et $\theta=0$. Par suite,
• si $x\neq 1$, la fonction $\theta\mapsto x^2-2x\cos\theta+1$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
• si $x=1$, pour tout réel $\theta\in[-\pi,\pi]$ on a $x^2-2x\cos\theta+1=2-2\cos\theta=4\sin^2\frac{\theta}{2}$. La fonction $\theta\mapsto\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$
est continue sur $[-\pi,0[\cup]0,\pi]$ et quand θ tend vers 0

$$\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=2\ln 2+2\ln\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\sim 2\ln\left|\frac{\theta}{2}\right|\sim 2\ln|\theta|=o\left(\frac{1}{\sqrt{|\theta|}}\right).$$

On en déduit que la fonction $\theta\mapsto\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$ est intégrable sur $[-\pi,\pi]$ et donc que $F(1)$ existe.
Finalement, F est définie sur $[0,+\infty[$ et par parité

$$\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque. Par parité de la fonction $\theta\mapsto\ln(x^2-2x\cos\theta+1)$, pour tout réel x, on a encore $F(x)=2\int_0^\pi\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta$.
Continuité de F. Soit $A>1$. Soit $\Phi : \begin{array}{ccc}[0,A]\times]0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ (x,\theta) & \mapsto & \ln(x^2-2x\cos\theta+1)\end{array}$.
• Pour chaque $x\in[0,A]$, la fonction $\theta\mapsto\Phi(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $]0,\pi]$.
• Pour chaque $\theta\in]0,\pi]$, la fonction $x\mapsto\Phi(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $[0,A]$.
• Pour chaque $(x,\theta)\in\mathbb{R}^+\times]0,\pi]$, puisque $x^2-2x\cos\theta+1=(x-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2$,

$$\begin{aligned}|\Phi(x,\theta)|&\leqslant \operatorname{Max}\{\left|\ln(0^2-0\cos\theta+1)\right|,\left|\ln(\cos^2\theta-2\cos\theta\cos\theta+1)\right|,\left|\ln(A^2-2A\cos\theta+1)\right|\}\\&=\operatorname{Max}\{2\left|\ln(|\sin\theta|)\right|,\left|\ln(A^2-2A\cos\theta+1)\right|\}=\varphi(\theta).\end{aligned}$$

On a vu que la fonction $f_1 : \theta\mapsto 2\left|\ln(|\sin\theta|)\right|$ est intégrable sur $]0,\pi]$ et d'autre part, la fonction $f_2 : \theta\left|\ln(A^2-2A\cos\theta+1)\right|$ est intégrable sur $[0,\pi]$ et donc sur $]0,\pi]$ car continue sur $[0,\pi]$. Puisque $\varphi=\frac{1}{2}(f_1+f_2+|f_1-f_2|)$, on en déduit que la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,\pi]$.
D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est continue sur $[0,A]$ et ceci pour tout $A>1$. Par suite, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^+$ puis par parité,

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

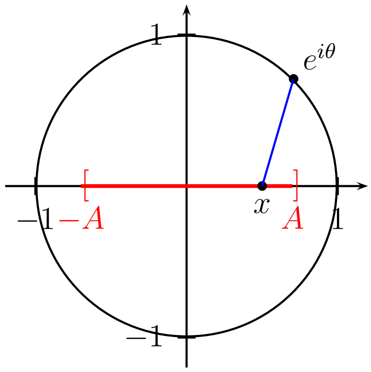
Dérivabilité de F. Soient $A\in]0,1[$ puis $\Phi : \begin{array}{ccc}[-A,A]\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ (x,\theta) & \mapsto & \ln(x^2-2x\cos\theta+1)\end{array}$.
• Pour chaque $x\in[-A,A]$, la fonction $\theta\mapsto\Phi(x,\theta)$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
• La fonction Φ admet sur $[-A,A]\times[0,\pi]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall(x,\theta)\in[-A,A]\times[0,\pi],\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,\theta)=\frac{2x-2\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}.$$

De plus,
- pour chaque $x\in[-A,A]$, la fonction $\theta\mapsto\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$,
- pour chaque $\theta\in[0,\pi]$, la fonction $x\mapsto\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,\theta)$ est continue sur $[-A,A]$,
- pour chaque $(x,\theta)\in[-A,A]\times[0,\pi]$,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,\theta)\right|=\frac{2|x-\cos\theta|}{|x-e^{i\theta}|^2}\leqslant\frac{4}{|A-1|^2}=\varphi(\theta).$$

La dernière inégalité écrite est claire géométriquement :



La plus courte distance d'un point du segment $[-A, A]$ au cercle trigonométrique est la distance de A à 1.

De plus, la fonction constante φ est intégrable sur le segment $[0, \pi]$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction F est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A \in]0, 1[$, F est de classe C^1 sur $]-1, 1[$ et $\forall x \in]-1, 1[$, $F'(x) = 4\int_0^{\pi} \frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\, d\theta$. La démarche est analogue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$ et finalement F est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ F'(x) = 4\int_0^{\pi} \frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\, d\theta.}$$

(b) **Calcul de $F'(x)$.** Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On a donc $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 4\int_0^{\pi} \frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\, d\theta = 8\int_0^{+\infty} \frac{x-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{x^2-2x\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\, \frac{dt}{1+t^2} \\
&= 8\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)x-(1-t^2)}{((1+t^2)x^2-2x(1-t^2)+(1+t^2))(1+t^2)}\, dt \\
&= 8\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}\, dt
\end{aligned}$$

Pour tout réel t,

$$\left(t^2+\left(\tfrac{x-1}{x+1}\right)^2\right)(t^2+1) = \left(t-i\tfrac{x-1}{x+1}\right)\left(t+i\tfrac{x-1}{x+1}\right)(t-i)(t+i).$$

De plus, $\pm\frac{x-1}{x+1} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = -1 \Leftrightarrow x = 0$.

- $F'(0) = 4\int_0^{\pi}(-\cos\theta)\, d\theta = 0$.
- Si $x \neq 0$, les pôles de la fraction rationnelle $\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}$ sont simples et par parité, la décomposition en éléments simples de cette fraction s'écrit

$$\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)} = \frac{a}{t-i\frac{x-1}{x+1}} - \frac{a}{t+i\frac{x-1}{x+1}} + \frac{b}{t-i} - \frac{b}{t+i},$$

avec

$$\begin{aligned}
a &= \frac{-(x+1)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+(x-1)}{(x+1)^2\left(2i\frac{x-1}{x+1}\right)\left(1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)} = \frac{-(x+1)(x-1)^2+(x-1)(x+1)^2}{2i(x+1)(x-1)((x+1)^2-(x-1)^2)} \\
&= \frac{2(x^2-1)}{2i(x^2-1)(4x)} = \frac{1}{4ix},
\end{aligned}$$

et

$$b=\frac{-(x+1)+(x-1)}{2i(-(x+1)^2+(x-1)^2)}=\frac{1}{4ix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}8\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}&=\frac{2}{ix}\left(\frac{1}{t-i\frac{x-1}{x+1}}-\frac{1}{t+i\frac{x-1}{x+1}}+\frac{1}{t-i}-\frac{1}{t+i}\right)\\&=\frac{2}{ix}\left(\frac{2i\frac{x-1}{x+1}}{t^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}+\frac{2i}{t^2+1}\right)=\frac{4}{x}\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2}+\frac{1}{t^2+1}\right)\end{aligned}$$

Ensuite, en notant ε le signe de $\frac{x-1}{x+1}$

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{4}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2}+\frac{1}{t^2+1}\right)\,dt\\&=\frac{4}{x}\left[\frac{x^2-1}{(x+1)^2}\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\frac{x-1}{x+1}}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{4}{x}(\varepsilon+1)\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Par suite, si $x\in]-1,1[$, $F'(x)=0$ et si $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $F'(x)=\frac{4\pi}{x}$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ F'(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\in]-1,1[\\ \frac{4\pi}{x} \text{ si } x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases}.}$$

(c) Soit $x>1$.

$F(x)-4\pi\ln(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta-\int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2)\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-\frac{2}{x}\cos\theta+\frac{1}{x^2}\right)\,d\theta=F\left(\frac{1}{x}\right)$.

Par suite, $\lim_{x\to+\infty}(F(x)-4\pi\ln(x))=\lim_{x\to+\infty}F\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0}F(y)=F(0)=0$ par continuité de F en 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(F(x)-4\pi\ln(x))=0.}$$

(d) • F est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée nulle sur $]-1,1[$. Donc la fonction F est constante sur l'intervalle $[-1,1]$. Par suite, pour tout réel $x\in[-1,1]$, $F(x)=F(0)=0$.
• F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x>1$, $F'(x)=\frac{4\pi}{x}$. Donc il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x>1$, $F(x)=4\pi\ln x+C$ avec $C=\lim_{x\to+\infty}(F(x)-4\pi\ln x)=0$. Donc $\forall x>1$, $F(x)=4\pi\ln x$.
• Si $x<-1$, $F(x)=F(-x)=4\pi\ln(-x)=4\pi\ln|x|$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_{-\pi}^{\pi}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta=\begin{cases}0 \text{ si } x\in[-1,1]\\ 4\pi\ln(|x|) \text{ si } x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases}.}$$

2. (a) Soit $x\in]-1,1[$. Pour $\theta\in[-\pi,\pi]$, on pose $f(\theta)=\ln(x^2-2x\cos\theta+1)$. Puisque $\forall\theta\in[-\pi,\pi]$, $x^2-2x\cos\theta+1>0$ (voir 1)), f est dérivable sur $[-\pi,\pi]$ et pour $\theta\in[-\pi,\pi]$,

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=\frac{2x\sin\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}=\frac{1}{i}\left(\frac{e^{i\theta}}{x-e^{i\theta}}-\frac{e^{-i\theta}}{x-e^{-i\theta}}\right)=\frac{1}{i}\left(-\frac{1}{1-xe^{-i\theta}}+\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\\&=\frac{1}{i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^ne^{in\theta}-\sum_{n=0}^{+\infty}x^ne^{-in\theta}\right)\ (\text{car } |xe^{i\theta}|=|xe^{-i\theta}|=|x|<1)\\&=2\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\theta)x^n.\end{aligned}$$

Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. I désigne l'intervalle $[0, \theta]$ ou $[\theta, 0]$ suivant que θ soit positif ou négatif.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in I$, posons $g_n(t) = 2\sin(nt)x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in I$, on a $|f_n(t)| \leqslant |x|^n$. Comme $|x|^n$ est le terme général d'une série numérique convergente, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément sur le segment I. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(\theta) &= f(0) + \int_0^\theta f'(t)\,dt = 2\ln(1-x) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2x^n \int_0^\theta \sin(nt)\,dt \\ &= 2\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \forall \theta \in [-\pi,\pi],\ \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n.}$$

Soit $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\left|\frac{\cos(n\theta)}{n} x^n\right| \leqslant |x|^n$. Comme précédemment, on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$F(x) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta)\,d\theta = 0.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,d\theta = 0.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\ln(1 - 2x\cos\theta + x^2) - \ln(x^2))\,d\theta = -4\pi\ln|x| + F(x).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F\left(\tfrac{1}{x}\right) = -4\pi\ln|x| + F(x).}$$

Soit $x > 1$. Puisque $\frac{1}{x} \in]0,1[$, $F(x) = 4\pi\ln x + F\left(\frac{1}{x}\right) = 4\pi\ln x$. On retrouve alors les résultats du 1).

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soit $A > 0$. Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} [-A,A] \times [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{array}$.

• Pour chaque x de $[-A,A]$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue sur le segment $[0,1]$ et donc intégrable sur ce segment.
• La fonction Φ admet sur $[-A,A] \times [0,1]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x,t) \in [-A,A] \times [0,1],\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

De plus,
- pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$,
- pour chaque $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- pour chaque $(x,t) \in [-A,A] \times [0,1]$, $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2A = \varphi(t)$, la fonction φ étant continue et donc intégrable sur le
segment $[0,1]$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction F est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A > 0$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt.}$$

2. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction G et pour tout réel x,

$$\boxed{G'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En posant $u = xt$, on obtient

$$F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,xdt = -e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du = -G'(x),$$

cette égalité restant vraie quand $x = 0$ par continuité des fonctions F' et G' sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $F' + G' = 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}.}$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|F(x)| = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \leqslant e^{-x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4e^{x^2}},$$

et puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{4e^{x^2}} = 0$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$$

5. Pour $x > 0$, on a $\int_0^x e^{-t^2}\,dt \geqslant 0$ et donc d'après la question 3),

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{G(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - F(x)}.$$

La question 4) permet alors d'affirmer que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx) = \frac{1}{2}(e^{-t^2+tx} + e^{-t^2-tx}) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut poser $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt$.

Calcul de $f(x)$. Soit $A > 0$. On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} [-A,A]\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx) \end{array}$.

• Pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.
• La fonction Φ admet sur $[-A,A]\times[0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall (x,t) \in [-A,A]\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx).$$

De plus,
- pour chaque $x \in [-A,A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
-pour chaque $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[-A,A]$,
- pour chaque $(x,t) \in [-A,A]\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| = te^{-t^2}|\operatorname{sh}(tx)| \leqslant te^{-t^2}\operatorname{sh}(t|A|) = \varphi(t).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction f est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $A>0$, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{sh}(tx)\,dt.$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On effectue maintenant une intégration par parties. Soit $A>0$. Les deux fonctions $t\mapsto te^{-t^2}$ et $t\mapsto \mathrm{sh}(tx)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A te^{-t^2}\,\mathrm{sh}(tx)\,dt=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\,\mathrm{sh}(tx)\right]_0^A+\frac{x}{2}\int_0^A e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(tx)\,dt=-\frac{1}{2}e^{-A^2}\,\mathrm{sh}(tA)+\frac{x}{2}\int_0^A e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(tx)\,dt.$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $f'(x)=\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{sh}(tx)\,dt=\frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(tx)\,dt=\frac{x}{2}f(x)$.
Ensuite, pour tout réel x, $e^{-x^2/4}f'(x)-\frac{x}{2}e^{-x^2/4}f(x)=0$ ou encore $(e^{-x^2/4}f)'(x)=0$. On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x^2/4}f(x)=e^0f(0)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2/4}$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(tx)\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2/4}.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}t^x$ est continue sur $]0,1[$.
Etude en 1. $\frac{t-1}{\ln t}t^x\underset{t\to1}{\sim}1\times1=1$ et donc la fonction $t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}t^x$ se prolonge par continuité en 1. On en déduit que la fonction $t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}t^x$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche.
Etude en 0. $\frac{t-1}{\ln t}t^x\underset{t\to0}{\sim}-\frac{t^x}{\ln t}>0$.
-si $x>-1$, $-\frac{t^x}{\ln t}\underset{t\to0}{=}o(t^x)$ et puisque $x>-1$, la fonction $t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}t^x$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
- si $x\leqslant-1$, la fonction $t\mapsto-\frac{t^x}{\ln t}$ domine la fonction $t\mapsto-\frac{1}{t\ln t}$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures. Puisque la fonction $-\frac{1}{t\ln t}$ est positive et que $\int_x^{1/2}-\frac{1}{t\ln t}\,dt=\ln|\ln(x)|-\ln|\ln(1/2)|\underset{x\to0}{\to}+\infty$, la fonction $t\mapsto-\frac{1}{t\ln t}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de 0. Il en est de même de la fonction $t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}t^x$.
Finalement, la fonction $t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}t^x$ est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $x>-1$. Pour $x>-1$, on peut poser $f(x)=\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}t^x\,dt$.
Calcul de $f(x)$. Soit $a>-1$. On pose $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc}[a,+\infty[\times]0,1[& \to & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & \frac{t-1}{\ln t}t^x\end{array}$.

- Pour chaque $x\in[a,+\infty[$, la fonction $t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}t^x$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$.
- La fonction Φ admet sur $[a,+\infty[\times]0,1[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,1[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)=(t-1)t^x=t^{x+1}-t^x.$$

De plus,
- pour chaque $x\in[a,+\infty[$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$,
-pour chaque $t\in]0,1[$, la fonction $x\mapsto\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$,
- pour chaque $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,1[$,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right|=(1-t)t^a=\varphi(t).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0,1[$ et intégrable sur $]0,1[$ car $a>-1$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $a>-1$, la fonction f est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x > -1,\ f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x\, dt = \left[\frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > -1,\ f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + C \quad (*)$. Pour déterminer la constante C, on peut utiliser le résultat de l'exercice **??** : $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \ln 2$. On peut aussi obtenir directement la constante C sans aucun calcul d'intégrale. Pour cela, déterminons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
La fonction $g\ :\ t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur le segment $]0,1[$, prolongeable par continuité en 0 et en 1 en posant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. On en déduit que cette fonction est bornée sur l'intervalle $]0,1[$ (car son prolongement est une fonction continue sur un segment).
Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0,1[$. Pour $x > -1$, on a

$$|g(x)| \leqslant M \int_0^1 t^x\, dt = \frac{M}{x+1}.$$

Ceci montre que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et en passant à la limite quand x tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on obtient $C = 0$. On a donc montré que

$$\boxed{\forall x > -1,\ \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\, dt = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).}$$

On retrouve en particulier $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \ln 2$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$. Soit $x \geqslant 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$ existe pour tout réel positif x et on pose $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$.
Continuité de f sur $[0,+\infty[$. Soit $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \end{array}$.
• Pour chaque $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
• Pour chaque $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
• Pour chaque $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$|\Phi(x,t)| = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi_0(t).$$

De plus, la fonction φ_0 est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ car équivalente à $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, f est continue sur $[0,+\infty[$.
Dérivée seconde de f. Soit $a > 0$. On pose $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times[a,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \end{array}$.
En plus de ce qui précède, Φ admet sur $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 définies par

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}.$$

• Pour chaque $x \in [a,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
• Pour chaque $t \in [0,+\infty[$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[a,+\infty[$.
• Pour chaque $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{te^{-tx}}{1+t^2} \leqslant \frac{te^{-at}}{1+t^2} = \varphi_1(t) \text{ et } \left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2} \leqslant \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2} = \varphi_2(t).$$

De plus, les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,+\infty[$ car négligeables devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.
D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$ et ses dérivées premières et secondes s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x>0,\ f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{te^{-tx}}{1+t^2}\,dt \text{ et } f''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.}$$

Equation différentielle vérifiée par f. Pour $x>0$,

$$f''(x)+f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,dt=\left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{x}.$$

$$\boxed{\forall x>0,\ f(x)+f''(x)=\frac{1}{x}.}$$

Existence de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,dt$. Si $x=0$, l'exercice **??**, 1) montre que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ est une intégrale convergente.
Si $x>0$, une intégration par parties fournit pour $A>0$

$$\int_0^A\frac{\sin t}{t+x}\,dt=-\frac{\cos A}{A+x}+\frac{1}{x}-\int_0^A\frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt.$$

La fonction $t\mapsto\frac{\cos t}{(t+x)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que la fonction $A\mapsto\int_0^A\frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt$ a une limite réelle quand A tend vers $+\infty$ et il en est de même de la fonction $A\mapsto\int_0^A\frac{\sin t}{t+x}\,dt$. Ainsi, pour chaque $x\in[0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$ est une intégrale convergente. Pour $x\geqslant 0$, on peut donc poser $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$.
Equation différentielle vérifiée par g. Pour $x>0$, on pose $u=x+t$. on obtient

$$g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}\,du=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du.$$

(car toutes les intégrales considérées sont convergentes). Maintenant, les fonctions $c\ :\ u\mapsto\frac{\cos u}{u}$ et $s\ :\ u\mapsto\frac{\sin u}{u}$ sont continues sur $]0,+\infty[$ et admettent donc des primitives sur $]0,+\infty[$. On note C (respectivement S) une primitive de la fonction c (respectivement s) sur $]0,+\infty[$). Pour tout réel $x>0$, $\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du=\lim_{t\to+\infty}C(t)-C(x)$. On en déduit que la fonction $x\mapsto\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, de dérivée $-c$. De même, la fonction $x\mapsto\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, de dérivée $-s$. Mais alors la fonction g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du-\frac{\sin x\cos x}{x}-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\frac{\cos x\sin x}{x}\\&=-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du.\end{aligned}$$

La fonction g' est encore de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\frac{\cos^2 x}{x}-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du+\frac{\sin^2 x}{x}\\&=\frac{1}{x}-g(x).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ g''(x)+g(x)=\frac{1}{x}.}$$

Egalité de f et g sur $]0,+\infty[$. Pour tout réel $x>0$, $(f-g)''(x)+(f-g)(x)=0$. Donc il existe deux réels λ et μ tels que $\forall x>0$, $(f-g)(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x=A\cos(x+\varphi)$ pour $A=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ et pour un certain φ.
Maintenant, pour $x>0$, $|f(x)|=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,dt=\frac{1}{x}$ et on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.
Ensuite, $|g(x)\leqslant\left|\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du\right|+\left|\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du\right|$. Puisque les intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ sont des intégrales convergentes, on a $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du=0$ et donc aussi $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$.
Finalement, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$ ce qui impose $A=0$ et donc $\forall x>0$, $f(x)=g(x)$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt.}$$

Continuité de g en 0 et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du \\ &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + \sin x \int_x^1 \frac{1-\cos u}{u}\,du - \sin x \ln x. \end{aligned}$$

Quand x tend vers 0, $\sin x \ln x \sim x \ln x$ et donc $\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = 0$. Ensuite, la fonction $u \mapsto \frac{1-\cos u}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$ car continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0. On en déduit que $\lim_{x\to 0} \sin x \int_x^1 \frac{1-\cos u}{u}\,du = 0 \times \int_0^1 \frac{1-\cos u}{u}\,du = 0$. Il reste

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = g(0).$$

La fonction g est donc continue en 0. Puisque la fonction f est également continue en 0, on en déduit que

$$g(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt \text{ et en particulier, } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. • Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue sur le segment $[0,T]$ et donc intégrable sur ce segment. Par suite, $f * g(x)$ existe.

   • Soit $x \in \mathbb{R}$. $f * g(x+T) = \int_0^T f(x+T-t)g(t)\,dt = \int_0^T f(x-t)g(t)\,dt = f * g(x)$. Donc la fonction $f * g$ est T-périodique.

   • Les fonction f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques. Ces fonctions sont en particulier bornées sur $\mathbb{R}$. On note M_1 et M_2 des majorants sur $\mathbb{R}$ des fonctions $|f|$ et $|g|$ respectivement.

   Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0,T] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(x-t)g(t) \end{array}$.

   - Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,T]$.
   - Pour chaque $t \in [0,T]$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   - Pour chaque $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$, $|\Phi(x,t)| \leqslant M_1 M_2 = \varphi(t)$. De plus, la fonction φ est continue et donc intégrable sur le segment $[0,T]$.

   D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soient f et g deux éléments de E. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = x - t$, on obtient

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_0^T f(x-t)g(t)\,dt = \int_x^{x-T} f(u)g(u-t)\,(-du) = \int_{x-T}^x g(u-t)f(u)\,du \\ &= \int_0^T g(u-t)f(u)\,du \text{ (car la fonction } u \mapsto g(u-t)f(u) \text{ est } T\text{-périodique)} \\ &= g * f(x). \end{aligned}$$
