Enoncés : Stephan de Bièvre
Corrections : Johannes Huebschmann

Exo7

Dérivées partielles et directionnelles

Exercice 1

Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition D_f. Pour chacune des fonctions, calculer ensuite les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition lorsqu'elles existent :

1. $f(x,y) = x^2 \exp(xy)$,
2. $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$,
3. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$,
4. $f(x,y,z) = x^2 y^2 \sqrt{z}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002622]

Exercice 2

Soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x\cos y + y\exp x$.

1. Calculer ses dérivées partielles.
2. Soit $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $D_v f(0,0)$. Pour quelle(s) valeurs de θ cette dérivée directionnelle de f est-elle maximale/minimale ? Que cela signifie-t-il ?

Indication ▼ Correction ▼ [002623]

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y), \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2), \qquad k(x,y) = f(xy)$$

Indication ▼ Correction ▼ [001801]

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$\begin{array}{lll} f(x,y) = x & \text{si} & |x| > |y| \\ f(x,y) = y & \text{si} & |x| < |y| \\ f(x,y) = 0 & \text{si} & |x| = |y|. \end{array}$$

Étudier la continuité de f, l'existence des dérivées partielles et leur continuité.

Indication ▼ Correction ▼ [001803]

Exercice 5

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0 & \end{array}$$

Étudier la continuité de f. Montrer que f est de classe C^1.

Indication ▼ Correction ▼ [001800]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpéter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles de calcul de la dérivée ordinaires.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Interpréter la dérivée directionnelle à l'aide de l'intersection du graphe de la fonction avec un plan convenable.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpréter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles de calcul de la dérivée ordinaires.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Distinguer tout de suite la partie triviale et la partie non triviale de l'exercice.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Il est évident que, en tout point (x,y) distinct de l'origine, la fonction f est continue et que les dérivées partielles y existent et sont continues. Il suffit de montrer que f est continue en $(0,0)$ et que les dérivées partielles y existent et y sont continues.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\exp(xy) + x^2 y \exp(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \exp(xy)$$

2. $D_f = \{(x,y); x > 0 \text{ ou } y \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2}$$

3. $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin x \cos x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\sin y \cos y$$

4. $D_f = \{(x,y,z); z \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2y^2}{2\sqrt{z}}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y \exp x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y + \exp x$.
2. $D_v f(0,0) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cos\theta + \sin\theta$. Cette dérivée directionnelle de f est maximale quand $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c.a.d. quand $\theta = \frac{\pi}{4}$, et minimale quand $\sin\theta = \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, c.a.d. quand $\theta = \frac{5}{4}\pi$.
   Signification géométrique : Le plan engendré par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ et l'axe des z rencontre le graphe $z = f(x,y)$ en une courbe. Cette courbe est de pente maximale en valeur absolue pour $\cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\theta = \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (même plan). Les deux signes s'expliquent par les deux orientations possibles de cette courbe (sens du paramétrage).

Correction de l'exercice 3 ▲

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f'(x+y)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f'(x+y)$$
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2xf'(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2yf'(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = yf'(xy)$$
$$\frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = xf'(xy)$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Il est évident que, en tout point tel que $|x| < |y|$ ou $|x| > |y|$, la fonction est continue et les dérivées partielles existent.
Soit $x \neq 0$. Alors f n'est ni continue en (x,x) ni en $(x,-x)$. Car

$$\lim_{\substack{(u,v)\to(x,x)\\ |u|>|v|}} f(u,v) = \lim_{u\to x} u = x \neq 0,$$
$$\lim_{(u,u)\to(x,x)} f(u,u) = 0,$$
$$\lim_{\substack{(u,v)\to(x,-x)\\ |u|>|v|}} f(u,v) = \lim_{u\to x} u = x \neq 0,$$
$$\lim_{(u,-u)\to(x,-x)} f(u,u) = 0.$$

Par contre, f est continue en $(0,0)$. Car

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} f(u,v) = 0$$

puisque

$$\begin{array}{lll} f(u,v) = u & \text{si} & |u| > |v|, \\ f(u,v) = v & \text{si} & |u| < |v|, \\ f(u,v) = 0 & \text{si} & |u| = |v|, \end{array}$$

et puisque alors $\lim_{u\to 0} u = 0$ et $\lim_{v\to 0} v = 0$.
Soit (x,y) un point où $|x| = |y|$. Il reste à étudier les dérivées partielles en un tel point (x,y). Soit $x \neq 0$. Alors la fonction h de la variable t définie par

$$h(t) = f(x+t,y) = \begin{cases} x+t, & |x+t| > |y| \\ y, & |x+t| < |y| \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'existe pas. De même, la fonction k de la variable t définie par

$$k(t) = f(x,y+t) = \begin{cases} x, & |x| > |y+t|, \\ y+t, & |x| < |y+t|, \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'existe pas. Enfin soit $x = 0$. Alors la fonction h de la variable t définie par

$$h(t) = f(t,0) = t$$

est dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe. De même, la fonction k de la variable t définie par

$$k(t) = f(0,t) = t$$

est dérivable en $t=0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe.

Correction de l'exercice 5 ▲

Puisque $\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|$ reste borné,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$$

d'où f est continue en $(0,0)$. De même,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

d'où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. En plus, en dehors de l'origine,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x,y)}{x} + xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{f(x,y)}{x} + 4\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x,y)}{y} + xy\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{f(x,y)}{x} + 4\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Puisque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = 0,\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

il s'ensuit que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 0,\ \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0,$$

d'où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.
