Chapitre 6

Nombres réels

Objectifs

- Connaître la structure de corps sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
- Connaître les propriétés de la relation d'ordre et celles de la valeur absolue.
- Connaître la notion de borne supérieure, de borne inférieure, ainsi que la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ et quelques conséquences.
- Connaître la droite numérique achevée.

Sommaire

L'existence des ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ est admise.

I) L'ensemble des réels

1) Rappels sur les rationnels

Un rationnel est un réel de la forme pq^{-1} (ou $\frac{p}{q}$) où p et q sont deux entiers avec $q \neq 0$. L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Tout rationnel peut s'écrire de différentes manières sous forme de fractions, par exemple : $\frac{p}{q} = \frac{2p}{2q} = \frac{-p}{-q}$. Mais tout nombre rationnel s'écrit de manière **unique** sous forme de fraction **irréductible**, c'est à dire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et avec p et q **premiers entre eux** (*i.e.* sans autres diviseurs communs que 1 et -1).

Opérations sur les rationnels : On rappelle que : $\frac{p}{q}+\frac{a}{b} = \frac{aq+bp}{bq}$ et $\frac{p}{q}\times\frac{a}{b} = \frac{ap}{bq}$. L'addition et la multiplication sont donc des lois de composition internes dans $\mathbb{Q}$, on vérifie que $(\mathbb{Q},+,\times)$ est un **corps commutatif**. On vérifie également que $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$ et $(\mathbb{Q}^{*+},\times)$ sont des groupes commutatifs.

L'ensemble des rationnels est insuffisant :

En termes d'approximations numériques, $\mathbb{Q}$ peut paraître suffisant en sciences appliquées. Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la **valeur exacte** de certaines grandeurs. Par exemple, peut - on mesurer dans $\mathbb{Q}$ la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? D'après le théorème de *Pythagore*[1], cela revient à se demander s'il existe un rationnel dont le carré est égal à 2, or nous avons déjà établi que la réponse est négative ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Cette lacune de $\mathbb{Q}$ avait été remarquée par les Pythagoriciens, ce qui a conduit les mathématiciens à introduire de nouveaux nombres, les **irrationnels**, en concevant un ensemble plus vaste que $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$.

2) Opérations et ordre sur les réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ et possède une addition et une multiplication (qui prolongent celles de $\mathbb{Q}$) qui font que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif. On admettra également qu'il existe deux parties de $\mathbb{R}$ que l'on note A et B et qui vérifient :

- A et B sont stables pour l'addition.
- $\mathbb{Q}^+ \subset A$ et $\mathbb{Q}^- \subset B$.
- $\mathbb{R} = A \cup B$.
- $A \cap B = \{0\}$.
- Si $x, y \in A$ alors $xy \in A$, si $x, y \in B$ alors $xy \in A$ et si $x \in A$ et $y \in B$, alors $xy \in B$ (règle des signes).

On définit alors une relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff x - y \in B$. Cette relation est :

- Réflexive : $\forall\, x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}x$.
- Antisymétrique : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$.
- Transitive : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.

Le relation $\mathcal{R}$ est donc une relation **d'ordre** sur $\mathbb{R}$. On la notera désormais $\leqslant$, c'est à dire que $x\mathcal{R}y$ sera noté $x \leqslant y$ (*i.e.* $x - y \in B$).

On remarquera que $x \leqslant 0$ signifie que $x \in B$, et que $0 \leqslant x$ signifie que $-x \in B$ et donc $x \in A$ car $x = (-1)(-x)$: produit de deux éléments de B. D'autre part, si $x \in A$ et $y \in B$, alors $x \leqslant y$ car $y - x = y + (-x)$: somme de deux éléments de B.

Si x et y sont deux réels quelconques, on a $x - y \in A$ ou $x - y \in B$, c'est à dire $x - y \in B$ ou $y - x \in B$, c'est à dire encore $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. Deux réels sont donc toujours comparables, l'ordre est **total**.

Notation : On pose $A = \mathbb{R}^+$ et $B = \mathbb{R}^-$.

THÉORÈME 6.1

La relation d'ordre $\leqslant$ est :

- *Compatible avec l'addition, c'est à dire :*

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ \text{si } x \leqslant y \text{ alors } x + z \leqslant y + z.$$

- *Compatible avec la multiplication par un réel positif :*

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ \text{si } 0 \leqslant z \text{ et } x \leqslant y \text{ alors } xz \leqslant yz.$$

Preuve: Si $x \leqslant y$, alors $x - y \in \mathbb{R}^-$, mais $(x + z) - (y + z) = x - y$, donc $(x + z) - (y + z) \in \mathbb{R}^-$ *i.e.* $x + z \leqslant y + z$. Si $0 \leqslant z$ et $x \leqslant y$, alors $x - y \in \mathbb{R}^-$ donc $z(x - y) \in \mathbb{R}^-$, *i.e.* $zx \leqslant zy$. On remarquera que si $z \leqslant 0$ alors $z(x - y) \in \mathbb{R}^+$ donc $zy \leqslant zx$, l'inégalité change de sens. □

Conséquences :

- Si $x \leqslant y$ et $a \leqslant b$, alors $x + a \leqslant y + b$.
- Si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $0 \leqslant ax \leqslant by$.

1. *PYTHAGORE De Samos* (569 av J.-C. – 500 av J.-C. (environ)) : mathématicien et philosophe grec dont la vie et l'œuvre restent entourées de mystères.

II) Borne inférieure, borne supérieure

1) Propriété fondamentale de l'ensemble des réels

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit a un réel, on dit que :

- I est majorée par a (ou a est un majorant de I), lorsque tout élément de I est inférieur ou égal à a : $\forall\ x \in I, x \leqslant a$.
- I est minorée par a (ou a est un minorant de I), lorsque tout élément de I est supérieur ou égal à a : $\forall\ x \in I, x \geqslant a$.
- I est bornée, lorsque I est à la fois minorée et majorée : $\exists\ m, M \in \mathbb{R}, \forall\ x \in I, m \leqslant x \leqslant M$.

Exemples:

- L'ensemble $I = \{\frac{x^2}{1+x^2}\ /\ x \in \mathbb{R}\}$ est borné (minoré par 0 et majoré par 1).
- L'ensemble $I = \{\frac{x^2}{1+|x|}\ /\ x \in \mathbb{R}\}$ est minoré par 0, mais non majoré.

- *I est non majoré équivaut à : $\forall\ M \in \mathbb{R}, \exists\ x \in I, x > M$.*
- *I est non minoré équivaut à : $\forall\ m \in \mathbb{R}, \exists\ x \in I, x < m$.*
- *I est borné équivaut à : $\exists\ M \in \mathbb{R}, \forall\ x \in I, |x| \leqslant M$.*

DÉFINITION 6.1

*Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de I n'est pas vide et s'il admet un plus petit élément, alors celui-ci est appelé **borne supérieure** de I et noté $\sup(I)$. La borne supérieure (lorsqu'elle existe) est donc **le plus petit des majorants**.*

*Si l'ensemble des minorants de I n'est pas vide et s'il admet un plus grand élément, alors celui-ci est appelé **borne inférieure** de I et noté $\inf(I)$. La borne inférieure (lorsqu'elle existe) est donc **le plus grand des minorants**.*

Exemples:

- $I =]0;1]$, l'ensemble des majorants est $[1;+\infty[$, celui-ci admet un plus petit élément qui est 1, donc $\sup(I) = 1$. L'ensemble des minorants de I est $]-\infty;0]$ qui admet un plus grand élément : 0, donc $\inf(I) = 0$.
- $I =]1;+\infty[$, l'ensemble des majorants est vide donc I **n'a pas de borne supérieure**. L'ensemble des minorants est $]-\infty;1]$, celui-ci admet un plus grand élément : 1, donc $\inf(I) = 1$.

On remarquera qu'une borne inférieure (ou supérieure) d'un ensemble I n'a aucune raison d'appartenir à I.

Voici le lien entre minimum et borne inférieure (ou maximum et borne supérieure) :

THÉORÈME 6.2

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit a un réel :

- *$a = \min(I)$ ssi $a \in I$ et $a = \inf(I)$.*
- *$a = \max(I)$ ssi $a \in I$ et $a = \sup(I)$.*

Preuve: Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Il découle de la définition :

THÉORÈME 6.3

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit m un réel, alors :

$$m = \sup(I) \iff \begin{cases} m \text{ majore } I \\ \forall m' < m, m' \text{ ne majore pas } I\ \ [\text{i.e. } \exists x \in I, m' < x] \end{cases}$$

$$m = \inf(I) \iff \begin{cases} m \text{ minore } I \\ \forall m' > m, m' \text{ ne minore pas } I\ \ [\text{i.e. } \exists x \in I, x < m'] \end{cases}$$

THÉORÈME 6.4 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ (admise))

*Toute partie de $\mathbb{R}$ **non vide et majorée** admet une borne supérieure.*

Conséquence : il en découle que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.
Preuve: Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par un réel m, alors l'ensemble $-A = \{-a \ / \ a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par le réel $-m$. D'après le théorème précédent, $-A$ admet une borne supérieure M et donc l'ensemble des majorants de $-A$ est $[M, +\infty[$, on en déduit que l'ensemble des minorants de A est $]-\infty; -M]$ et donc A admet une borne inférieure qui est $-M$, c'est à dire $\inf(A) = -\sup(-A)$. □

Exemples:
- Soit a un réel positif, on pose $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 \leqslant a\}$. A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ car $0 \in A$, d'autre part A est majoré par $a+1$ car $x > a+1 \Longrightarrow x^2 > a^2 + 2a + 1 > a$. L'ensemble A admet donc une borne supérieure M. En raisonnant par l'absurde on peut montrer que $M^2 = a$, par conséquent $M = \sqrt{a}$, c'est une définition possible de la fonction racine carrée.
- Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées telles que $A \subset B$. Montrer que $\inf(B) \leqslant \inf(A)$ et $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
  Réponse : $\inf(B)$ est un minorant de B donc un minorant de A, par conséquent $\inf(B) \leqslant \inf(A)$ car $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A. De même, $\sup(B)$ majore B , donc majore A également, d'où $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ car $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A.
- Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées, on pose $A + B = \{a + b \ / \ a \in A, b \in B\}$. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
  Réponse : $\sup(A) + \sup(B)$ majore $A+B$, donc $A+B$ admet une borne sup. et $\sup(A+B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$. Soient $a \in A$ et $b \in B$, $a + b \leqslant \sup(A+B)$, donc $a \leqslant \sup(A+B) - b$, ce qui signifie que A est majoré par $\sup(A+B) - b$, d'où $\sup(A) \leqslant \sup(A+B) - b$, mais alors $b \leqslant \sup(A+B) - \sup(A)$, donc B est majoré par $\sup(A+B) - \sup(A)$, d'où $\sup(B) \leqslant \sup(A+B) - \sup(A)$ et finalement $\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(A+B)$ ce qui prouve bien l'égalité.

2) Intervalles

DÉFINITION 6.2

*Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$, on dit que I est un intervalle lorsque : **tout réel compris entre deux éléments de I est lui-même élément de I**, c'est à dire :*

$$\forall\ x, y \in I, \forall\ z \in \mathbb{R}, x \leqslant z \leqslant y \Longrightarrow z \in I.$$

Par convention, $\emptyset$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 6.5

Si I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ alors on a :
- *soit $I = \mathbb{R}$,*
- *soit $I = [a; +\infty[$ ou $I =]a, +\infty[$,*
- *soit $I =]-\infty; b]$ ou $I =]-\infty; b[$,*
- *soit $I =]a; b[$ ou $I =]a; b]$ ou $I = [a; b[$ ou $I = [a; b]$.*

Preuve: Le premier correspond à I non borné, le deuxième à I minoré et non majoré, le troisième à I non minoré et majoré, le quatrième à I borné. □

Exemple: $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ car $1, 2 \in \mathbb{Z}$ mais pas $\frac{3}{2}$. $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 6.6

On a les propriétés suivantes :
- *L'intersection de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*
- *La réunion de deux intervalles de $\mathbb{R}$ **non disjoints** est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Preuve: Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, posons $K = I \cap J$. Si K est vide, alors c'est un intervalle. Si K n'est pas vide, alors soit $x, y \in K$ et soit z un réel tel que $x \leqslant z \leqslant y$. Comme I est un intervalle contenant x et y, I contient z, de même J contient z, finalement $z \in K$ et donc K est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Supposons I et J non disjoints et soit $K = I \cup J$. K est non vide, soit $x, y \in K$ et soit z un réel tel que $x \leqslant z \leqslant y$. Si x et y sont dans I, alors z est dans I et donc dans K, de même si x et y sont dans J. Si x est dans I et y dans J, soit $t \in I \cap J$, si $z \leqslant t$, alors z est compris entre x et t qui sont éléments de I, donc $z \in I$. Si $t \leqslant z$, alors z est compris entre t et y qui sont éléments de J, donc z est élément de J. Dans les deux cas on a bien $z \in K$ et donc K est un intervalle de $\mathbb{R}$. □

3) La droite numérique achevée

On ajoute à l'ensemble $\mathbb{R}$ deux éléments non réels (par exemple i et $-i$), l'un de ces deux éléments est noté $-\infty$ et l'autre $+\infty$.

DÉFINITION 6.3

*L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est noté $\overline{\mathbb{R}}$ et appelé **droite numérique achevée**.*

On prolonge la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant pour tout réel x : $-\infty < x < +\infty$. L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné, de plus il possède un maximum $(+\infty)$ et un minimum $(-\infty)$.

Pour tout réel x on pose :

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- Si $x > 0$: $x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty$ et $(-\infty)x = x(-\infty) = -\infty$.
- si $x < 0$: $x(+\infty) = (+\infty) = -\infty$ et $(-\infty)x = x(-\infty) = +\infty$.
- $(+\infty)(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)(-\infty) = +\infty$ et $(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$.

On prendra garde au fait que nous n'avons pas défini de loi de composition interne dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque nous n'avons pas défini $0 \times (\pm\infty)$ ni $(-\infty) + (+\infty)$. Les règles de calculs définies ci-dessus auront leur utilité dans le chapitre sur les limites.

THÉORÈME 6.7

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors A admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve: Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée dans $\mathbb{R}$ alors admet une borne supérieure réelle (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$). Si A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, alors dans $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble des majorants est $\{+\infty\}$, donc il y a une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui est $+\infty$ (le plus petit majorant). Le raisonnement est le même pour la borne inférieure. □

4) Voisinages

DÉFINITION 6.4

*Soit $x \in \mathbb{R}$, toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$ est appelé **voisinage** de x .*
Toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]a; +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$) est appelé voisinage de $+\infty$.
Toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]-\infty; a[$ ($a \in \mathbb{R}$) est appelé voisinage de $-\infty$.

THÉORÈME 6.8

Soit V_1, V_2 deux voisinages de $x \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de x. Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, si $a < b$ alors il existe un voisinage V de a et un voisinage V' de b tels que $\forall x \in V$ et $\forall y \in V'$, $x < y$.

Preuve: Celle - ci est simple et laissée en exercice. □

DÉFINITION 6.5

Soit $P(x)$ une proposition dépendante de $x \in \mathbb{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que la propriété P est ***vraie au voisinage*** *de a* ***lorsqu'il existe au moins un voisinage*** *V de a tel que :*

$$\forall\ x \in V, P(x) \text{ est vraie.}$$

Exemple: Soit $f(x) = x^2 + x - 1$, alors au voisinage de 0 on a $f(x) < 0$, et au voisinage de $+\infty$, $f(x) > 0$. En effet, le trinôme $x^2 + x - 1$ admet deux racines réelles : $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$, posons $\varepsilon = \min(|x_1|, |x_2|)$, si $x \in]0 - \varepsilon; 0 + \varepsilon[$ alors $x \in]x_1; x_2[$ et donc $x^2 + x - 1 < 0$, $V =]x_1; x_2[$ est donc un voisinage de 0 et sur ce voisinage on a bien $f(x) < 0$. Posons $W =]x_2; +\infty[$, alors W est un voisinage de $+\infty$ et sur ce voisinage on a bien $f(x) > 0$.

III) Approximation d'un réel

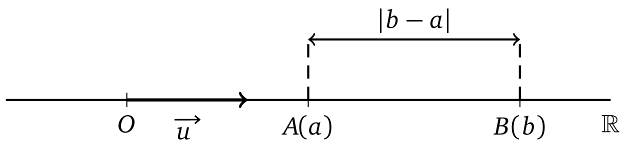
1) Valeur absolue

Soit x un réel, les deux nombres x et $-x$ sont comparables puisque l'ordre est total, ce qui donne un sens à la définition suivante :

DÉFINITION 6.6

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle ***valeur absolue*** *de x le réel noté $|x|$ et défini par : $|x| = \max(x, -x)$. On a donc $|x| = x$ lorsque $0 \leqslant x$, et $|x| = -x$ lorsque $x \leqslant 0$.*

L'ensemble $\mathbb{R}$ peut être assimilé à une droite graduée (*i.e.* munie d'un repère $(O, \overrightarrow{u})$), les réels sont alors les abscisses des points de cette droite. Si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points de cette droite, alors le réel positif $|b - a|$ représente la **distance** de A à B, en particulier $|x|$ représente la distance de l'origine au point d'abscisse x.



THÉORÈME 6.9

Soient x, y des réels :
- $|x| \in \mathbb{R}^+$, $|x| = |-x|$, $x \leqslant |x|$ *et* $-x \leqslant |x|$.
- $|x| = 0 \iff x = 0$.
- $|xy| = |x||y|$ *et si* $x \neq 0$ *alors* $|\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}$.
- $||x| - |y|| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$ *(**inégalité triangulaire**).*

Preuve: Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Valeur absolue et inégalités : soient a, b, x trois réels avec b positif :
- $|a| \leqslant b \iff a \leqslant b$ et $-a \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b$.
- $|a| \geqslant b \iff a \geqslant b$ ou $-a \geqslant b$.
- $|a - x| \leqslant b \iff -b \leqslant a - x \leqslant b \iff a - b \leqslant x \leqslant a + b$.
- $|a - x| \geqslant b \iff x \geqslant a + b$ ou $x \leqslant a - b$.

Ces inégalités sont importantes, et peuvent se retrouver en raisonnant en termes de distance.

DÉFINITION 6.7

Soit a un réel et $\varepsilon > 0$, on appelle intervalle ***ouvert*** *de* ***centre a*** *et de* ***rayon*** *ε, l'intervalle $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$. C'est l'ensemble des réels x tels que $|x - a| < \varepsilon$. On définit de la même façon l'intervalle fermé de centre a et de rayon ε.*

On rappelle qu'un intervalle ouvert est un intervalle de la forme : $]a;b[$ ou $]a;+\infty[$ ou $]-\infty;b[$. L'ensemble vide et $\mathbb{R}$ sont des intervalles ouverts.

THÉORÈME 6.10

Soit I un intervalle ouvert non vide, pour tout élément a de I il existe au moins un voisinage de a inclus dans I : $\forall\ a \in I, \exists\ \varepsilon > 0,\ ]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\subset I$.

Preuve: Il suffit de passer en revue les différents cas pour I. Par exemple, si $I =]\alpha;\beta[$ avec $\alpha < \beta$ (sinon I est vide), on peut prendre $\varepsilon = \min(a-\alpha, \beta-a)$. On remarquera que l'on peut remplacer intervalle ouvert de centre a par intervalle fermé de centre a. □

2) Partie entière

THÉORÈME 6.11

*L'ensemble $\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est à dire : $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^{*+}, \exists\ n \in \mathbb{N}, x \leqslant ny$.*

Preuve: Par l'absurde, supposons que $\forall\ n \in \mathbb{N}, x > ny$. Soit $A = \{ny\ /\ n \in \mathbb{N}\}$, A est non vide (contient y) et majoré par x, donc A admet une borne supérieure. Soit $b = \sup(A)$, on a $b - y < b$ donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $b - y < n_0 y$, d'où $b < (n_0+1)y$ ce qui est absurde car $(n_0+1)y \in A$. □

THÉORÈME 6.12 (et définition)

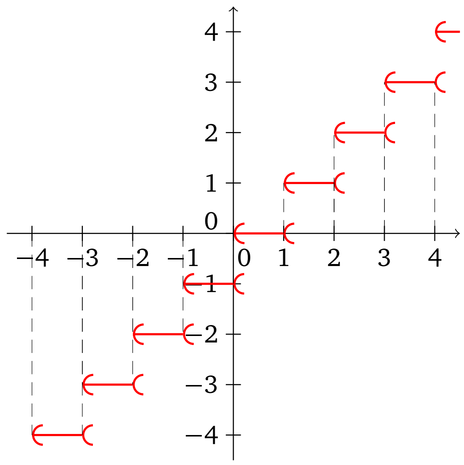
*Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un **unique** entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$, celui-ci est appelé **partie entière** de x, noté $\mathrm{E}(x)$ (ou $[x]$).*

Preuve: Montrons l'existence : si $x = 0$ il suffit de prendre $n = 0$. Si $x > 0$, soit $A = \{n \in \mathbb{N}\ /\ x < n+1\}$, A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide ($\mathbb{R}$ est archimédien), donc A admet un plus petit élément n_0 (propriété fondamentale de $\mathbb{N}$) ; on a $x < n_0+1$, si $n_0 > x$, alors $n_0 > 0$ et $n_0 - 1 \in A$ ce qui est absurde, donc $n_0 \leqslant x$. Si $x < 0$, on pose $B = \{n \in \mathbb{N}\ /\ -x \leqslant n\}$, alors B est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc B admet un plus petit élément n_1 ; on a $-n_1 \leqslant x$ et $n_1 > 0$, le prédécesseur de n_1 n'étant pas dans B, on a $-x > n_1 - 1$ et donc $-n_1 \leqslant x < -n_1 + 1$.

Montrons l'unicité : soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $n \leqslant x < n+1$ et $n' \leqslant x < n'+1$, alors $|n-n'| = |(x-n)-(x-n')| < 1$ car $x-n$ et $x-n'$ sont dans l'intervalle $[0;1[$, comme n et n' sont entiers, on en déduit que $|n-n'| = 0$ *i.e.* $n = n'$. □

Propriétés :

a) La fonction partie entière est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et elle constante sur tout intervalle de la forme $[n;n+1[$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$.



b) La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, elle est continue à droite mais pas à gauche en n.

c) Pour tout réel x et tout entier n, on a $\mathrm{E}(x+n) = \mathrm{E}(x) + n$.

d) La fonction $x \mapsto x - \mathrm{E}(x)$ est une fonction 1-périodique.

e) La partie entière de x est entièrement caractérisée par : $\begin{cases} \mathrm{E}(x) \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1 \end{cases}$.

THÉORÈME 6.13
Tout intervalle de la forme $]a;b[$ où $a<b$ contient au moins un rationnel, et donc $\mathbb{Q}$ est ***dense*** *dans $\mathbb{R}$.*

Preuve: Soit x le milieu de l'intervalle $]a;b[$ et ε sa demi - longueur. $\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe un entier q tel que $1 \leqslant q\varepsilon$. Posons $p = \mathrm{E}(qx)$, on a alors $p \leqslant qx < p+1$, d'où en posant $r = \frac{p}{q}$, r est un rationnel et $r \leqslant x < r + \frac{1}{q} \leqslant r + \varepsilon$, par conséquent, $|x-r| < \varepsilon$ et donc $r \in]a;b[$. □

Ce théorème traduit que aussi près que l'on veut de n'importe quel réel, on peut trouver des rationnels. De plus la démonstration fournit une méthode de construction de $\frac{p}{q}$.

Par exemple, avec $x = \sqrt{2}$ et $\varepsilon = 10^{-3}$, on peut prendre $q = 1000$ et $p = \mathrm{E}(1000\sqrt{2}) = 1414$ (car $1414^2 \leqslant 2.10^6 < 1415^2$), d'où $\frac{p}{q} = 1,414$ et $|\sqrt{2} - 1,414| < 10^{-3}$.

THÉORÈME 6.14
Tout intervalle $]a;b[$ où $a<b$ contient au moins un irrationnel, donc l'ensemble des irrationnels, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve: Comme précédemment on appelle x le milieu de l'intervalle $]a;b[$ et ε la demi - longueur. Si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ alors il n'y a rien à faire. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors il existe un entier n tel que $\sqrt{2} < n\varepsilon$, on pose $y = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$, le réel y est irrationnel et $|x-y| = \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon$ donc $y \in]a;b[$. □

3) Approximations décimales

DÉFINITION 6.8
Soient a, x, ε trois réels avec $\varepsilon > 0$, on dit que a est une ***valeur approchée*** *de x à ε près lorsque la distance entre a et x et inférieure ou égale à ε : $|a-x| \leqslant \varepsilon$. On dit que a est une valeur approchée de x par défaut (respectivement par excès) à ε près lorsque $a \leqslant x \leqslant a+\varepsilon$ (respectivement $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a$).*

Propriétés :

a) Si a est une valeur approchée de x par défaut et b une valeur approchée de x par excès, alors $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{b-a}{2}$ près.
b) Si a est une valeur approchée de x par défaut à ε près et b une valeur approchée de x par excès à ε près, alors $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{\varepsilon}{2}$ près.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{E}(x10^n) \leqslant x10^n < 1 + \mathrm{E}(x10^n)$, en multipliant par 10^{-n} on obtient :

$$\frac{\mathrm{E}(x10^n)}{10^n} \leqslant x < \frac{\mathrm{E}(x10^n)}{10^n} + 10^{-n}.$$

Ce qui signifie que $\frac{\mathrm{E}(x10^n)}{10^n}$ est une valeur approchée de x par défaut à 10^{-n} près, et que $\frac{\mathrm{E}(x10^n)}{10^n} + 10^{-n}$ est une valeur approchée de x par excès à 10^{-n} près. Il faut remarquer que ces deux approximations de x sont des **nombres décimaux** (*i.e.* un entier sur une puissance de dix).

DÉFINITION 6.9
On appelle ***approximation décimale*** *de x par défaut à 10^{-n} près, le nombre : $\frac{\mathrm{E}(x10^n)}{10^n}$.*

Exemples:
– Prenons $x = \sqrt{2}$ et posons $a_n = \frac{\mathrm{E}(x10^n)}{10^n}$
  – $1 \leqslant x^2 < 2^2$, donc $1 \leqslant x < 2$ et $a_0 = \mathrm{E}(x) = 1$ (partie entière de x).
  – $(10x)^2 = 200$ et $14^2 = 196 \leqslant (10x)^2 < 15^2 = 225$, donc $14 \leqslant 10x < 15$ et $a_1 = \mathrm{E}(10x)/10 = 14/10 = 1,4$.
  – $(100x)^2 = 20000$ et $141^2 \leqslant (100x)^2 < 142^2$, donc $141 \leqslant 100x < 142$ et $a_2 = \mathrm{E}(100x)/100 = 141/100 = 1,41$...etc

Si on continue le processus, on construit la suite (a_n) des approximations décimales de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près par défaut.

Si on pose pour $n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\mathrm{E}(x10^n)}{10^n}$, alors on a l'inégalité $|x - a_n| \leqslant 10^{-n}$, ce qui prouve que la suite (a_n) converge vers x. On a donc une suite de rationnels qui converge vers x, ce qui est une autre façon de prouver la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On remarquera que la suite $(a_n + 10^{-n})$ (valeurs approchées décimales par excès) converge également vers x.

THÉORÈME 6.15

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a_n = \frac{\mathrm{E}(x10^n)}{10^n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $d_n = 10^n(a_n - a_{n-1})$, alors d_n est un entier compris entre 0 et 9.

Preuve: $10^n a_n = \mathrm{E}(10^n x) \leqslant 10^n x < 1 + \mathrm{E}(10^n x)$, d'autre part $10^n a_{n-1} = 10\mathrm{E}(10^{n-1}x) \leqslant 10^n x < 10 + 10\mathrm{E}(10^{n-1}x)$, d'où $-10 - \mathrm{E}(10^{n-1}x) < -10^n x \leqslant -10^n a_{n-1}$, on en déduit que $d_n - 10 < 0 < d_n + 1$, par conséquent $0 \leqslant d_n < 10$, or d_n est un entier, donc $d_n \leqslant 9$. □

DÉFINITION 6.10

*Pour $n \geqslant 1$, l'entier $d_n = 10^n(a_n - a_{n-1}) = \mathrm{E}(10^n x) - 10\mathrm{E}(10^{n-1}x)$ est appelé **n-ième décimale** de x.*

Remarquons que $d_n 10^{-n} = a_n - a_{n-1}$, ce qui entraîne que $a_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k 10^{-k} = a_n$, or la suite (a_n) converge vers x, on écrit alors :

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k 10^{-k} \text{ (développement décimal de } x\text{)}$$

IV) Annexe

1) Relation

Une relation $\mathscr{R}$ est la donnée de :
- Un ensemble de départ : E.
- Un ensemble d'arrivée : F.
- D'un graphe G, c'est à dire une partie de $E \times F$ ($G \subset E \times F$).

Soient $x \in E$ et $y \in F$, on dira que x est relation avec y (noté $x\mathscr{R}y$) lorsque $(x, y) \in G$. Si c'est le cas, on dira que y est une image de x par $\mathscr{R}$ et que x est un antécédent de y par $\mathscr{R}$.

Lorsque tout élément de E a **au plus une** image par $\mathscr{R}$, on dit que $\mathscr{R}$ est une **fonction**. Lorsque tout élément de E a une et une seule image par $\mathscr{R}$, on dit que $\mathscr{R}$ est une **application**.

Vocabulaire : Soit $\mathscr{R}$ une relation d'un ensemble E **vers lui - même**, on dit que $\mathscr{R}$ est :

a) **réflexive** lorsque tout élément est en relation avec lui - même : $\forall\, x \in E,\ x\mathscr{R}x$.

b) **symétrique** lorsque : $\forall\, x, y \in E$, si $x\mathscr{R}y$ alors $y\mathscr{R}x$ (le graphe de $\mathscr{R}$ est symétrique).

c) **antisymétrique** lorsque : $\forall\, x, y \in E$, si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$ alors $x = y$. On remarquera qu'il ne s'agit pas de la négation de symétrique.

d) **transitive** lorsque : $\forall\, x, y, z \in E$, si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$ alors $x\mathscr{R}z$.

Exemples:
- Dans $\mathbb{R}$, la relation $\mathscr{R}$ définie par : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x\mathscr{R}y \iff x \leqslant y$, est une relation réflexive, antisymétrique et transitive.
- Dans $\mathbb{Z}$, la relation $\mathscr{S}$ définie par : $\forall\, x, y \in \mathbb{Z},\ x\mathscr{S}y \iff x - y \in 2\mathbb{Z}$, est une relation réflexive, symétrique et transitive.
- Soit E un ensemble, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On définit dans $\mathscr{P}(E)$ la relation $\mathscr{T}$ en posant : $\forall\, A, B \in \mathscr{P}(E),\ A\mathscr{T}B \iff A \subset B$. Cette relation $\mathscr{T}$ est réflexive antisymétrique et transitive.

2) Relation d'ordre

Soit $\mathscr{R}$ une relation dans un ensemble E, on dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre lorsque cette relation est :

réflexive, antisymétrique et transitive.

Lorsque c'est le cas, on dit que $(E, \mathscr{R})$ est un ensemble ordonné. Deux éléments x et y de E sont dits **comparables** pour l'ordre $\mathscr{R}$ lorsque l'on a $x\mathscr{R}y$ ou bien $y\mathscr{R}x$. Lorsque tous les éléments de E sont comparables deux à deux, on dit que l'ordre $\mathscr{R}$ est **total** et que $(E, \mathscr{R})$ est un ensemble totalement ordonné, sinon on dit que l'ordre est partiel et que $(E, \mathscr{R})$ est partiellement ordonné. Une relation d'ordre est en général notée $\leqslant$, c'est à dire que $x\mathscr{R}y$ est plutôt noté $x \leqslant y$.

Exemples:
- L'ordre naturel sur les réels est une relation d'ordre total.
- Soit E un ensemble, $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est un ensemble partiellement ordonné (dès que $\operatorname{card}(E) \geqslant 2$).
- Soit I un ensemble non vide, on pose $E = \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles. On définit dans E la relation $\mathscr{R}$: pour $f, g \in E$, $f\mathscr{R}g \iff \forall\, x \in I, f(x) \leqslant g(x)$. On vérifie que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre **partiel** (dès que $\operatorname{card}(I) > 1$), cette relation est appelée ordre fonctionnel et notée $\leqslant$.
- Pour (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$(x,y)\mathscr{R}(x',y') \iff \begin{cases} x < x' \\ \text{ou} \\ x = x' \text{ et } y \leqslant y' \end{cases}$$

On vérifie que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$ (appelée ordre lexicographique et notée $\leqslant$).

On prendra garde au fait que lorsque l'ordre est partiel, la négation de $x \leqslant y$ est :

$$\begin{cases} x \text{ et } y \text{ ne sont pas comparables} \\ \text{ou} \\ x \text{ et } y \text{ sont comparables et } x > y \end{cases}$$

3) Parties denses dans l'ensemble des réels

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de A, ce qui équivaut à :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, a \in A, |x - a| < \varepsilon.$$

Ce qui signifie qu'aussi près que l'on veut de tout réel x, on peut trouver des éléments de A. Voici une autre définition équivalente (et très utile) :

A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi pour tout réel x il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x.

Exemples:
- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ puisque l'intervalle $]0;1[$ ne contient aucun entier.

V) Exercices

★Exercice 6.1

Soient u et k deux réels tels que $|u| \leqslant k < 1$, montrer que $0 < 1 - k \leqslant |1 + u| \leqslant 1 + k$.

★Exercice 6.2

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, \varepsilon > 0, |x| \leqslant \varepsilon$, montrer que x est nul.

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, montrer que $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a - b|}$.

c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que $|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}| \leqslant \sqrt{|a - b|}$.

d) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $|x| + |y| \leqslant |x - y| + |x + y|$.

e) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $1 + |xy - 1| \leqslant (1 + |x - 1|)\left(1 + |y - 1|\right)$.

★Exercice 6.3

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \leqslant 1-x$; b) $|1-x| \geqslant 2|x|-1$; c) $|x+2| \geqslant \frac{1-x}{1+x}$.

★Exercice 6.4

Démontrer les assertions suivantes :

a) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \mathrm{E}(x+y) = \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y) + \varepsilon$ avec $\varepsilon = 0$ ou 1.

b) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \mathrm{E}(x-y) = \mathrm{E}(x) - \mathrm{E}(y) - \varepsilon$ avec $\varepsilon = 0$ ou 1.

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{E}(\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}) = \mathrm{E}(x)$.

d) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \mathrm{E}(nx) - n\mathrm{E}(x) \leqslant n-1$.

e) $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}^*, \mathrm{E}(\frac{n+m}{2}) + \mathrm{E}(\frac{n-m+1}{2}) = n$.

★Exercice 6.5

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f est nulle sur $[0;1[$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+n) = f(x)+n$. Montrer que f est la partie entière.

b) Montrer que pour tout réel x, $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{E}(\frac{x+k}{n}) = \mathrm{E}(x)$.

★Exercice 6.6

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}^+$, on pose $AB = \{ab \;/\; a \in A, b \in B\}$. Montrer que l'ensemble AB admet une borne supérieure et que $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$.

★Exercice 6.7

a) Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, montrer que :

$$\sup(\{|x-y| \;/\; x, y \in A\}) = \sup(A) - \inf(A)$$

b) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ avec $A \subset [a;b]$ où $0 < a < b$. Calculer les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble $B = \{\frac{x}{y} \;/\; x, y \in A\}$.

★Exercice 6.8

Déterminer les bornes inférieure et supérieure (si elles existent) des ensembles suivants :

$$\{\frac{1}{n} + (-1)^n \;/\; n \in \mathbb{N}^*\} \quad ; \quad \{\frac{x^2}{1+x^2} \;/\; x \in \mathbb{R}\} \quad ; \quad \{\frac{xy}{x^2+y^2} \;/\; x, y \in \mathbb{R}^{*+}\}.$$

★Exercice 6.9

Soient x_0 un réel strictement positif, et p un entier strictement supérieur à 1, **fixés**. On établit dans cet exercice, l'existence de la fonction racine p-ième. On pourra utiliser que si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ et si pour tout n on a $u_n > \alpha$, où α désigne un réel, alors on a $\ell \geqslant \alpha$. On note $\mathscr{A}_0 = \{y \in \mathbb{R} \;/\; y^p \leqslant x_0\}$.

a) Montrer que $\mathscr{A}_0$ est non vide.

b) Montrer que $(1+x_0)^p \geqslant 1 + px_0$. En déduire que $\mathscr{A}_0$ est majoré par $1+x_0$. Que peut-on en conclure ?

On note $c = \sup(\mathscr{A}_0)$, $u_n = c(1-\frac{1}{n})$ et $v_n = c(1+\frac{1}{n})$ (pour $n > 0$).

c) i) Montrer qu'on a toujours $x_0 \in \mathscr{A}_0$ ou bien $\frac{1}{x_0} \in \mathscr{A}_0$ (on distinguera $x_0 \leqslant 1$ et $x_0 > 1$). En déduire que $0 < c$.

ii) Justifier l'existence d'un réel $a \in \mathscr{A}_0$ tel que $u_n < a \leqslant c$. En déduire que $u_n \in \mathscr{A}_0$ puis que $c^p \leqslant x_0$.

d) Justifier que $v_n^p > x_0$. En déduire que $c^p = x_0$. Par définition, le réel c est appelé racine p-ième de x_0.

e) Montrer que la fonction racine p-ième est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

★Exercice 6.10

Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a;b] \to [a;b]$ une fonction croissante, et $A = \{x \in [a;b] \;/\; x \leqslant f(x)\}$.

a) Montrer que A admet une borne supérieure, celle - ci sera notée c.

b) Montrer que $c \in A$.

c) En déduire que $f(c) = c$ (on dit que c est un point fixe de f).

d) Si on suppose que f est décroissante, f admet - elle nécessairement un point fixe ?

★Exercice 6.11

Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels strictement positifs, montrer que :

$$\inf(\frac{a_1}{b_1}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}) \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} \leqslant \sup(\frac{a_1}{b_1}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}).$$

On raisonnera par récurrence en commençant par le cas $n = 2$.

★Exercice 6.12

a) L'ensemble des irrationnels est - il : stable pour l'addition ? stable pour la multiplication ?

b) Montrer que $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ et $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ sont irrationnels.

★Exercice 6.13

a) Soit $E = \{\frac{p}{2^n} \;/\; p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, montrer que E est dense dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $A = \{r^3 \;/\; r \in \mathbb{Q}\}$, montrer que $A \neq \mathbb{Q}$ et que A est dense dans $\mathbb{R}$.

c) Même question avec $A = \{\frac{r^9}{1+r^6} \;/\; r \in \mathbb{Q}\}$.

★Exercice 6.14

Démontrer les inégalités suivantes :

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} : |\frac{1-x^{n+1}}{1-x}| \leqslant \frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|} \quad ; \quad |\frac{1-x^{n+1}}{1-x}| \leqslant \frac{1+|x|^{n+1}}{|1-|x||}$.

b) $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : x + y \leqslant \frac{1}{2} + x^2 + y^2 \quad ; \quad x + y \leqslant (1 + x^2)(1 + y^2) \quad ; \quad |xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$.

c) Soient $x_1, \ldots, x_n \in [0;1] : 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \quad ; \quad \prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant 2^{-n}$ ou $\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \leqslant 2^{-n}$.

d) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \frac{2n}{3}\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

★Exercice 6.15

a) Soient E et F deux ensembles, soit $f : E \times F \to \mathbb{R}$ une application minorée, montrer que :

$$\inf_{(x,y) \in E \times F} f(x,y) = \inf_{x \in E}(\inf_{y \in F} f(x,y)) = \inf_{y \in F}(\inf_{x \in E} f(x,y))$$

b) Application : à quelle condition un parallélogramme de surface S donnée a - t'il un périmètre minimal ?