



## Espaces vectoriels de dimension finie (ou non)

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*IT

$E$  désigne l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  (muni des opérations usuelles). On considère les vecteurs  $e_1 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $e_2 = (1, 1, 1, 3)$ ,  $e_3 = (2, 1, 1, 1)$ ,  $e_4 = (-1, 0, -1, 2)$  et  $e_5 = (2, 3, 0, 1)$ . Soient alors  $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$  et  $G = \text{Vect}(e_4, e_5)$ . Quelles sont les dimensions de  $F$ ,  $G$ ,  $F \cap G$  et  $F + G$  ?

[Correction ▼](#)

[005183]

### Exercice 2 \*\*IT

Soit  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$ . Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux hyperplans de  $E$ . Déterminer  $\dim_{\mathbb{K}}(H_1 \cap H_2)$ . Interprétez le résultat quand  $n = 2$  ou  $n = 3$ .

[Correction ▼](#)

[005184]

### Exercice 3 \*\*

Soit  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  vérifiant  $E = \text{Ker} f + \text{Ker} g = \text{Im} f + \text{Im} g$ . Montrer que ces sommes sont directes.

[Correction ▼](#)

[005185]

### Exercice 4 \*\*\*I

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$  ( $n$  entier naturel donné). Soit  $\varphi$  l'application définie par :  $\forall P \in E, \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ .

1. Vérifier que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer  $\text{Ker} \varphi$  et  $\text{Im} \varphi$ .

[Correction ▼](#)

[005186]

### Exercice 5 \*\*T

Soient  $(e_i)_{1 \leq i \leq 4}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  défini par :  $f(e_1) = 2e_1 + e_3$ ,  $f(e_2) = -e_2 + e_4$ ,  $f(e_3) = e_1 + 2e_3$  et  $f(e_4) = e_2 - e_4$ . Déterminer  $\text{Ker} f$  et  $\text{Im} f$ .

[Correction ▼](#)

[005187]

### Exercice 6 \*\*

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  où  $a$  est un nombre complexe donné non nul. Montrer que  $f$  est un endomorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .  $f$  est-il un endomorphisme du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  ? Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

[Correction ▼](#)

[005188]

### Exercice 7 \*\*

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ . Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $f((x, y)) = (x', y')$ .

1. Rappeler l'écriture générale de  $(x', y')$  en fonction de  $(x, y)$ .
2. Si on pose  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  (où  $i^2 = -1$ ), montrer que :  $\exists(a, b) \in \mathbb{C}^2 / \forall z \in \mathbb{C}, z' = az + b\bar{z}$ .
3. Réciproquement, montrer que l'expression ci-dessus définit un unique endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  (en clair, l'expression complexe d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  est  $z' = az + b\bar{z}$ ).

Correction ▼

[005189]

### Exercice 8 \*\*I

Soient  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies sur  $\mathbb{K}$  et  $u$  et  $v$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . Montrer que :  $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$ .

Correction ▼

[005190]

### Exercice 9 \*\*\*\*

Soient  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

1. Montrer que, pour tout endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$ , on a :

$$(\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg} f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } \exists g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g + g \circ f = \operatorname{Id}_E).$$

2. On suppose  $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ . Montrer qu'il existe une base  $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p)$  de  $E$  telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, f(u_i) = 0 \text{ et } f(v_i) = u_i.$$

Correction ▼

[005191]

### Exercice 10 \*\*\*I Le théorème des noyaux itérés

Soient  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  non injectif. Pour  $k$  entier naturel donné, on pose  $N_k = \operatorname{Ker} f^k$  et  $I_k = \operatorname{Im} f^k$  (avec la convention  $f^0 = \operatorname{Id}_E$ ).

1. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}, (N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k)$ .
2. (a) Montrer que :  $(\forall k \in \mathbb{N}, (N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2}))$ .  
(b) Montrer que :  $\exists p \in \mathbb{N} / \forall k \in \mathbb{N}, (k < p \Rightarrow N_k \neq N_{k+1} \text{ et } k \geq p \Rightarrow N_k = N_{k+1})$ .  
(c) Montrer que  $p \leq n$ .
3. Montrer que si  $k < p, I_k = I_{k+1}$  et si  $k \geq p, I_k = I_{k+1}$ .
4. Montrer que  $E = I_p \oplus N_p$  et que  $f$  induit un automorphisme de  $I_p$ .
5. Soit  $d_k = \dim I_k$ . Montrer que la suite  $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante (en d'autres termes la suite des images itérées  $I_k$  décroît de moins en moins vite).

Correction ▼

[005192]

### Exercice 11 \*\*\*I

Soient  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie notée  $n$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On dit que  $u$  est nilpotent si et seulement si  $\exists k \in \mathbb{N}^* / u^k = 0$  et on appelle alors indice de nilpotence de  $u$  le plus petit de ces entiers  $k$  (par exemple, le seul endomorphisme  $u$ , nilpotent d'indice 1 est 0).

1. Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent d'indice  $p$ . Montrer qu'il existe un vecteur  $x$  de  $E$  tel que la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  soit libre.
2. Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent. Montrer que  $u^n = 0$ .
3. On suppose dans cette question que  $u$  est nilpotent d'indice  $n$ . Déterminer  $\operatorname{rg} u$ .

Correction ▼

[005193]

### Exercice 12 \*\*\*I

Soient  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension quelconque sur  $\mathbb{K}$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $f^2 - 5f + 6\operatorname{Id}_E = 0$ . Montrer que  $E = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id})$ .



### Correction de l'exercice 1 ▲

•  $e_4$  et  $e_5$  ne sont clairement pas colinéaires. Donc  $(e_4, e_5)$  est une famille libre et  $\dim G = \text{rg}(e_4, e_5) = 2$ . Ensuite, puisque  $e_1$  et  $e_2$  ne sont pas colinéaires, on a  $2 \leq \dim F \leq 3$ . Soit alors  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = 0 & (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = 0 & (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 0 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & ((3) - (2)) \\ \nu - \lambda = 0 & ((1) - (2)) \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 & (1) \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

On a montré que :  $\forall (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, (\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0)$ .  $(e_1, e_2, e_3)$  est donc libre et  $\dim F = \text{rg}(e_1, e_2, e_3) = 3$ . • Comme  $F \subset F + G$ ,  $\dim(F + G) \geq 3$  ou encore  $\dim(F + G) = 3$  ou  $4$ . De plus :

$$\dim(F + G) = 3 \Leftrightarrow F = F + G \Leftrightarrow G \subset F \Leftrightarrow \{e_4, e_5\} \subset F.$$

On cherche alors  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $e_4 = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$  ce qui fournit le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = -1 & (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = -1 & (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 2 & (4) \end{cases}.$$

$(3) - (2)$  fournit  $\lambda = -1$  puis  $(1) - (2)$  fournit  $\nu = -2$  puis  $(2)$  fournit  $\mu = 4$ . Maintenant,  $(4)$  n'est pas vérifiée car  $4 \times (-1) + 3 \times 4 - 2 = 6 \neq 2$ . Le système proposé n'admet pas de solution et donc  $e_4 \notin \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$ . Par suite,  $\dim(F + G) = 4$ . Enfin,

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

$$\boxed{\dim(F) = 3, \dim(G) = 2, \dim(F + G) = 4 \text{ et } \dim(F \cap G) = 1.}$$

### Correction de l'exercice 2 ▲

On a  $H_1 \subset H_1 + H_2$  et donc  $\dim(H_1 + H_2) \geq n - 1$  ou encore  $\dim(H_1 + H_2) \in \{n - 1, n\}$ . Donc

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = \begin{cases} (n - 1) + (n - 1) - (n - 1) = n - 1 \\ \text{ou} \\ (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2 \end{cases}.$$

Maintenant, si  $\dim(H_1 + H_2) = n - 1 = \dim H_1 = \dim H_2$ , alors  $H_1 = H_1 + H_2 = H_2$  et donc en particulier,  $H_1 = H_2$ . Réciproquement, si  $H_1 = H_2$  alors  $H_1 + H_2 = H_1$  et  $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$ . En résumé, si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux hyperplans distincts,  $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$  et bien sûr, si  $H_1 = H_2$ , alors  $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$ . Si  $n = 2$ , les hyperplans sont des droites vectorielles et l'intersection de deux droites vectorielles distinctes du plan vectoriel est de dimension 0, c'est-à-dire réduite au vecteur nul. Si  $n = 3$ , les hyperplans sont des plans vectoriels et l'intersection de deux plans vectoriels distincts de l'espace de dimension 3 est une droite vectorielle.

### Correction de l'exercice 3 ▲

On a

$$n = \dim E = \dim(\text{Ker } f + \text{Ker } g) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Ker } g) - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g),$$

mais aussi,

$$n = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Im } g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 2n - \dim \text{Ker } f - \dim(\text{Ker } g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g).$$

Par suite,

$$n + \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = \dim(\text{Ker } f) + \dim \text{Ker } g = n - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$$

puis  $n + \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = n - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) \Rightarrow \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) + \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$  ou encore  $\dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$ , et finalement,  $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$ . Ceci montre que les sommes proposées sont directes.

---

#### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Si  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ , alors  $P(X+1) - P(X)$  est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ . Par suite,  $\varphi$  est bien une application de  $E$  dans lui-même. Soient alors  $(P, Q) \in E^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q).\end{aligned}$$

$\varphi$  est linéaire de  $E$  vers lui-même et donc un endomorphisme de  $E$ .

2. Soit  $P \in E$ .  $P \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) = P(x)$ . Montrons alors que  $P$  est constant. Soit  $Q = P - P(0)$ .  $Q$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  s'annulant en les entiers naturels  $0, 1, 2, \dots$  (car  $P(0) = P(1) = P(2) = \dots$ ) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes.  $Q$  est donc le polynôme nul ou encore  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(0)$ . Par suite,  $P$  est un polynôme constant. Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans  $\text{Ker } \varphi$  et donc

$$\text{Ker } \varphi = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[X].$$

Pour déterminer  $\text{Im } \varphi$ , on note tout d'abord que si  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ , alors  $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n-1$ . En effet, si  $P = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$  (avec  $a_n$  quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_n((X+1)^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1 \\ &= a_n(X^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1 \\ &= \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1.\end{aligned}$$

Donc,  $\text{Im } (\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } (\varphi) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Ker } (\varphi) = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] < +\infty,$$

et donc  $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . (On peut noter que le problème difficile « soit  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Existe-t-il  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P(X+1) - P(X) = Q$  ? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

---

#### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit  $u = (x, y, z, t) = x e_1 + y e_2 + z e_3 + t e_4 \in \mathbb{R}^4$ . Alors,

$$\begin{aligned}f(u) &= x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) + t f(e_4) = x(2e_1 + e_3) + y(-e_2 + e_4) + z(e_1 + 2e_3) + t(e_2 - e_4) \\ &= (2x + z)e_1 + (-y + t)e_2 + (x + 2z)e_3 + (y - t)e_4.\end{aligned}$$

Par suite,

$$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ -y + t = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = t \end{cases}.$$

Donc,  $\text{Ker } f = \{(0, y, 0, y), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1, 0, 1))$ .

$$\text{Ker } f = \text{Vect}((0, 1, 0, 1)).$$

Soit  $u' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$ .

$$u' = (x', y', z', t') \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} 2x + z = x' \\ -y + t = y' \\ x + 2z = z' \\ y - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x' - z') \\ z = \frac{1}{3}(-x' + 2z') \\ t = y + y' \\ y' + t' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y' = -t'$$

(si  $y' \neq -t'$ , le système ci-dessus, d'inconnues  $x, y, z$  et  $t$ , n'a pas de solution et si  $y' = -t'$ , le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple  $(x, y, z, t) = (\frac{1}{3}(2x' - z'), 0, \frac{1}{3}(-x' + 2z'), y')$ ). Donc,  $\text{Im } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y + t = 0\} = \{(x, y, z, -y) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1 + y(e_2 - e_4) + ze_3, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3)$ .

$$\text{Im } f = \{(x, y, z, -y) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3).$$

**Autre solution** pour la détermination de  $\text{Im } f$ .  $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, -e_2 + e_4, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$ . Mais d'autre part, d'après le théorème du rang,  $\dim(\text{Im } f) = 4 - 1 = 3$ . Donc,  $(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$  est une base de  $\text{Im } f$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soient  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda(z + a\bar{z}) + \mu(z' + a\bar{z}') = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

$f$  est donc  $\mathbb{R}$ -linéaire. On note que  $f(ia) = i(a - |a|^2)$  et que  $if(a) = i(a + |a|^2)$ . Comme  $a \neq 0$ , on a  $f(ia) \neq if(a)$ .  $f$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -linéaire. Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Posons  $z = re^{i\theta}$  où  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$z \in \text{Ker } f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

**1er cas.** Si  $|a| \neq 1$ , alors, pour tout réel  $\theta$ ,  $e^{2i\theta} \neq -a$ . Dans ce cas,  $\text{Ker } f = \{0\}$  et d'après le théorème du rang,  $\text{Im } f = \mathbb{C}$ . **2ème cas.** Si  $|a| = 1$ , posons  $a = e^{i\alpha}$ .

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha + \pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas,  $\text{Ker } f = \text{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$ . D'après le théorème du rang,  $\text{Im } f$  est une droite vectorielle et pour déterminer  $\text{Im } f$ , il suffit d'en fournir un vecteur non nul, comme par exemple  $f(1) = 1 + a$ . Donc, si  $a \neq -1$ ,  $\text{Im } f = \text{Vect}(1 + a)$ . Si  $a = -1$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$  et  $\text{Im } f = i\mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

1. Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , posons  $f((x, y)) = (x', y')$ .

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x' = \alpha x + \gamma y \\ y' = \beta x + \delta y \end{cases}.$$

2. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} z' &= x' + iy' = (\alpha x + \gamma y) + i(\beta x + \delta y) = \left(\alpha \frac{z + \bar{z}}{2} + \gamma \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + i\left(\beta \frac{z + \bar{z}}{2} + \delta \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2}\right)z + \left(\frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}\right)\bar{z} = az + b\bar{z} \end{aligned}$$

$$\text{où } a = \frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2} \text{ et } b = \frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}.$$

3. Réciproquement, si  $z' = az + b\bar{z}$ , en posant  $a = a_1 + ia_2$  et  $b = b_1 + ib_2$  où  $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$ , on obtient :

$$x' + iy' = (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) = (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y + i((a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y)$$

et donc,

$$\begin{cases} x' = (a_1 + b_1)x + (b_2 - a_2)y \\ y' = (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y \end{cases}.$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

Par définition,  $\text{rg}(u + v) = \dim(\text{Im}(u + v))$ .

$$\text{Im}(u + v) = \{u(x) + v(x), x \in E\} \subset \{u(x) + v(y), (x, y) \in E^2\} = \text{Im } u + \text{Im } v.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \text{rg}(u + v) &= \dim(\text{Im}(u + v)) \\ &\leq \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) = \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Im } v) - \dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v) \\ &\leq \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Im } v) = \text{rg } u + \text{rg } v. \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, \text{rg}(u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v.$$

Ensuite,

$$\text{rg } u = \text{rg}(u + v - v) \leq \text{rg}(u + v) + \text{rg}(-v) = \text{rg}(u + v) + \text{rg } v,$$

(il est clair que  $\text{Im}(-v) = \text{Im } v$ ) et donc  $\text{rg } u - \text{rg } v \leq \text{rg}(u + v)$ . En échangeant les rôles de  $u$  et  $v$ , on a aussi  $\text{rg } v - \text{rg } u \leq \text{rg}(u + v)$  et finalement

$$\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, |\text{rg } u - \text{rg } v| \leq \text{rg}(u + v).$$

### Correction de l'exercice 9 ▲

1. • **(1)⇒(2).** Si  $\text{Ker } f = \text{Im } f$ , alors pour tout élément  $x$  de  $E$ ,  $f(x)$  est dans  $\text{Im } f = \text{Ker } f$  et donc  $f(f(x)) = 0$ . Par suite,  $f^2 = 0$ . De plus, d'après le théorème du rang,  $n = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f = 2 \text{rg } f$  ce qui montre que  $n$  est nécessairement pair et que  $\text{rg } f = \frac{n}{2}$ . • **(2)⇒(3).** Si  $f^2 = 0$  et  $n = 2 \text{rg } f$  ( $\in 2\mathbb{N}$ ), cherchons un endomorphisme  $g$  de  $E$  tel que  $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$ . Posons  $r = \text{rg } f$  et donc  $n = 2r$ , puis  $F = \text{Ker } f = \text{Im } f$  ( $\dim F = r$ ).

Soit  $G$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$  ( $\dim G = r$ ). Soit  $(e'_1, \dots, e'_r)$  une base de  $G$ . Pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on pose  $e_i = f(e'_i)$ . Montrons que la famille  $(e_1, \dots, e_r)$  est libre. Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ .

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i e'_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i e'_i \in \text{Ker } f \cap G = \{0\} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, r\}, \lambda_i = 0,$$

car la famille  $(e'_i)_{1 \leq i \leq r}$  est libre.  $(e_1, \dots, e_r)$  est une famille libre de  $F = \text{Im } f$  de cardinal  $r$  et donc une base de  $F = \text{Ker } f = \text{Im } f$ . Au passage, puisque  $E = F \oplus G$ ,  $(e_1, \dots, e_r, e'_1, \dots, e'_r)$  est une base de  $E$ . Soit alors  $g$  l'endomorphisme de  $E$  défini par les égalités :  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, g(e_i) = e'_i$  et  $g(e'_i) = e_i$  ( $g$  est entièrement déterminé par les images des vecteurs d'une base de  $E$ ). Pour  $i$  élément de  $\llbracket 1, r \rrbracket$ , on a alors :

$$(f \circ g + g \circ f)(e_i) = f(e'_i) + g(0) = e_i + 0 = e_i,$$

et

$$(f \circ g + g \circ f)(e'_i) = f(e_i) + g(e_i) = 0 + e'_i = e'_i.$$

Ainsi, les endomorphismes  $f \circ g + g \circ f$  et  $Id_E$  coïncident sur une base de  $E$  et donc  $f \circ g + g \circ f = Id_E$ .

• (3)  $\Rightarrow$  (1). Supposons que  $f^2 = 0$  et qu'il existe  $g \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f \circ g + g \circ f = Id_E$ . Comme  $f^2 = 0$ , on a déjà  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ . D'autre part, si  $x$  est un élément de  $\text{Ker } f$ , alors  $x = f(g(x)) + g(f(x)) = f(g(x)) \in \text{Im } f$  et on a aussi  $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$ . Finalement,  $\text{Ker } f = \text{Im } f$ .

2. L'existence d'une base  $(e_1, \dots, e_p, e'_1, \dots, e'_p)$  de  $E$  vérifiant les conditions de l'énoncé a été établie au passage (avec  $p = r = \text{rg } f$ ).

### Correction de l'exercice 10 ▲

1. Soient  $k$  un entier naturel et  $x$  un élément de  $E$ .

$$x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}.$$

On a montré que :  $\forall k \in \mathbb{N}, N_k \subset N_{k+1}$ . Ensuite,

$$x \in I_{k+1} \Rightarrow \exists y \in E / x = f^{k+1}(y) \Rightarrow \exists z (= f(y)) \in E / x = f^k(z) \Rightarrow x \in I_k.$$

On a montré que :  $\forall k \in \mathbb{N}, I_{k+1} \subset I_k$ .

2. (a) Soit  $k$  un entier naturel. Supposons que  $N_k = N_{k+1}$ .

On a déjà  $N_{k+1} \subset N_{k+2}$ . Montrons que  $N_{k+2} \subset N_{k+1}$ .

Soit  $x$  un élément de  $E$ .

$$\begin{aligned} x \in N_{k+2} &\Rightarrow f^{k+2}(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in N_{k+1} = N_k \Rightarrow f^k(f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}. \end{aligned}$$

- (b) On a  $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \dots$ . Supposons que chacune de ces inclusions soient strictes. Alors,  $0 = \dim N_0 < \dim N_1 < \dim N_2 \dots$ . Donc  $\dim N_1 \geq 1$ ,  $\dim N_2 \geq 2$  et par une récurrence facile,  $\forall k \in \mathbb{N}, \dim N_k \geq k$ . En particulier,  $\dim N_{n+1} \geq n+1 > n = \dim E$ , ce qui est impossible. Donc, il existe  $k$  entier naturel tel que  $N_k = N_{k+1}$ .

Soit  $p$  le plus petit de ces entiers  $k$  (l'existence de  $p$  est démontrée proprement de la façon suivante : si  $K = \{k \in \mathbb{N} / N_k = N_{k+1}\}$ ,  $K$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$  et admet donc un plus petit élément). On note que puisque  $f$  est non injectif,  $\{0\} = N_0 \subset N_1$  et donc  $p \in \mathbb{N}^*$ . Par définition de  $p$ , pour  $k < p$ ,  $N_k \subset N_{k+1}$  et, d'après le a) et puisque  $N_p = N_{p+1}$ , on montre par récurrence que pour  $k = p$ , on a  $N_k = N_p$ .

- (c)  $0 < \dim N_1 < \dots < \dim N_p$  montre que pour  $k \leq p$ , on a  $\dim N_k = k$  et en particulier  $p \leq \dim N_p = n$ .

3. Puisque  $N_k \subset N_{k+1}$ ,  $I_{k+1} \subset I_k$  et que  $\dim E < +\infty$ , on a :

$$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1} \Leftrightarrow n - \text{rg}(f^k) = n - \text{rg}(f^{k+1}) \Leftrightarrow \dim(I_k) = \dim(I_{k+1}) \Leftrightarrow I_k = I_{k+1}.$$

Donc, pour  $k < p$ ,  $I_k \subsetneq I_{k+1}$  et pour  $k = p$ ,  $I_k = I_{k+1}$ .



4. Soit  $x \in I_p \cap N_p$ . Alors,  $f^p(x) = 0$  et  $\exists y \in E / x = f^p(y)$ . D'où,  $f^{2p}(y) = 0$  et  $y \in N_{2p} = N_p$  (puisque  $2p \geq p$ ) et donc  $x = f^p(y) = 0$ . On a montré que  $I_p \cap N_p = \{0\}$ . Maintenant, le théorème du rang montre que  $E = \dim(I_p) + \dim(N_p)$  et donc  $E = I_p \oplus N_p$ .

Posons  $f|_{I_p} = f'$ .  $f'$  est déjà un endomorphisme de  $I_p$  car  $f'(I_p) = f(I_p) = I_{p+1} = I_p$ .

Soit alors  $x \in I_p$ .  $\exists y \in E / x = f^p(y)$ .

$$x \in \text{Ker } f' \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(f^p(y)) = 0 \Rightarrow y \in N_{p+1} = N_p \Rightarrow x = f_p(y) = 0.$$

Donc  $\text{Ker } f' = \{0\}$  et donc, puisque  $\dim I_p < +\infty$ ,  $f' \in \mathcal{GL}(I_p)$ .

5. Soient  $k$  un entier naturel et  $g_k$  la restriction de  $f$  à  $I_k$ .

D'après le théorème du rang,  $d_k = \dim(I_k) = \dim(\text{Ker } g_k) + \dim(\text{Im } g_k)$ . Maintenant,  $\text{Im } g_k = g_k(I_k) = f(I_k) = I_{k+1}$  et donc  $\dim(\text{Im } g_k) = d_{k+1}$ . D'autre part,  $\text{Ker } g_k = \text{Ker } f|_{I_k} = \text{Ker } f \cap I_k$ .

Ainsi, pour tout entier naturel  $k$ ,  $d_k - d_{k+1} = \dim(\text{Ker } f \cap I_k)$ . Puisque la suite  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante pour l'inclusion, la suite d'entiers naturels  $(\dim(\text{Ker } f \cap I_k))_{k \in \mathbb{N}} = (d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

### Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit  $p(\in \mathbb{N}^*)$  l'indice de nilpotence de  $u$ .

Par définition,  $u^{p-1} \neq 0$  et plus généralement, pour  $1 \leq k \leq p-1$ ,  $u^k \neq 0$  car si  $u^k = 0$  alors  $u^{p-1} = u^k \circ u^{p-1-k} = 0$  ce qui n'est pas.

Puisque  $u^{p-1} \neq 0$ , il existe au moins un vecteur  $x$  non nul tel que  $u^{p-1}(x) \neq 0$ .

Montrons que la famille  $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$  est libre.

Soit  $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq p-1} \in \mathbb{K}^p$  tel que  $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$ . Supposons qu'au moins un des coefficients  $\lambda_k$  ne soit pas nul. Soit  $i = \min \{k \in \{0, \dots, p-1\} / \lambda_k \neq 0\}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 &\Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow u^{p-1-i} \left( \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) \right) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_i u^{p-1}(x) = 0 \quad (\text{car pour } k \geq i+1, p-1-i+k \geq p \text{ et donc } u^{p-1-i+k} = 0) \\ &\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{car } u^{p-1}(x) \neq 0) \end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de  $i$ .

Donc tous les coefficients  $\lambda_k$  sont nuls et on a montré que la famille  $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$  est libre.

2. Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et donc  $p \leq n$ . Par suite,  $u^n = u^p \circ u^{n-p} = 0$ .

3. On applique l'exercice 10.

Puisque  $u^{n-1} \neq 0$ , on a  $N_{n-1} \subsetneq N_n$ . Par suite (d'après l'exercice 12, 2), c)), les inclusions  $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n = E$  sont toutes strictes et donc

$$0 < \dim N_1 < \dim N_2 \dots < \dim N_n = n.$$

Pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ , notons  $d_k$  est la dimension de  $N_k$ . Pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , on a  $d_{k+1} \geq d_k$  et une récurrence facile montre que, pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on a  $d_k \geq k$ .

Mais si de plus, pour un certain indice  $i$  élément de  $\{1, \dots, n-1\}$ , on a  $d_i = \dim N_i > i$ , alors, par une récurrence facile, pour  $i \leq k \leq n$ , on a  $d_k > k$  et en particulier  $d_n > n$  ce qui n'est pas. Donc,

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \dim(N_k) = k,$$

ou encore, d'après le théorème du rang,

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \text{rg}(u^k) = n - k, \text{ et en particulier } \text{rg}(u) = n - 1.$$

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

---

Soit  $x \in E$ .

$$x \in \text{Ker}(f - 2Id) \cap \text{Ker}(f - 3Id) \Rightarrow f(x) = 2x \text{ et } f(x) = 3x \Rightarrow 3x - 2x = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc,  $\text{Ker}(f - 2Id) \cap \text{Ker}(f - 3Id) = \{0\}$  (même si  $f^2 - 5f + 6Id \neq 0$ ).

Soit  $x \in E$ . On cherche  $y$  et  $z$  tels que  $y \in \text{Ker}(f - 2Id)$ ,  $z \in \text{Ker}(f - 3Id)$  et  $x = y + z$ .

Si  $y$  et  $z$  existent,  $y$  et  $z$  sont solution du système  $\begin{cases} y + z = x \\ 2y + 3z = f(x) \end{cases}$  et donc  $\begin{cases} y = 3x - f(x) \\ z = f(x) - 2x \end{cases}$ .

Réciproquement. Soient  $x \in E$  puis  $y = 3x - f(x)$  et  $z = f(x) - 2x$ .

On a bien  $y + z = x$  puis

$$\begin{aligned} f(y) &= 3f(x) - f^2(x) = 3f(x) - (5f(x) - 6x) \quad (\text{car } f^2 = 5f - 6Id) \\ &= 6x - 2f(x) = 2(3x - f(x)) = 2y \end{aligned}$$

et  $y \in \text{Ker}(f - 2Id)$ . De même,

$$f(z) = f^2(x) - 2f(x) = (5f(x) - 6x) - 2f(x) = 3(f(x) - 2x) = 3z,$$

et  $z \in \text{Ker}(f - 3Id)$ . On a montré que  $E = \text{Ker}(f - 2Id) + \text{Ker}(f - 3Id)$ , et finalement que

$$E = \text{Ker}(f - 2Id) \oplus \text{Ker}(f - 3Id).$$

---