# Chapitre 24

# Espaces euclidiens

**Objectifs**

– Définir les notions de produit scalaire, d'orthogonalité, de bases orthonormales.
– Définir les notions d'endomorphismes orthogonaux, de matrices orthogonales, étudier leurs propriétés.
– Étudier les endomorphismes orthogonaux en dimension 1, 2 et 3.

## Sommaire



Dans tout le chapitre, $E$ désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

## I) Produit scalaire

### 1) Définitions

**DÉFINITION 24.1**

*Un produit scalaire sur $E$ est une forme bilinéaire sur $E$, généralement notée $(.|.)$, qui à tout couple de vecteurs $(x, y)$ associe le réel $(x|y)$, et qui vérifie :*
*– $\forall\, x, y \in E, (x|y) = (y|x)$ (symétrie).*
*– $\forall\, x \in E, (x|x) \geqslant 0$ (positive).*
*– $\forall\, x \in E$, si $(x|x) = 0$, alors $x = 0$ (définie).*
*Lorsque $E$ est muni d'un produit scalaire $(.|.)$, on dit que $(E, (.|.))$ est un espace euclidien s'il est de dimension finie, ou un espace pré-hilbertien sinon.*

**Exemples:**

- Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ : $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
- $E = \mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ et $\forall\, f,g \in E, (f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$.
- $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodiques, on définit un produit scalaire sur $E$ en posant :

$$\forall\, f,g \in E, (f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$$

- Pour $x,y \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, mais pas $\psi(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.

**THÉORÈME 24.1 (Inégalité de *Cauchy-Schwarz*)**

$\forall\, x,y \in E, (x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y)$.

**Preuve:** $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, (x+\lambda y|x+\lambda y) \geqslant 0$, ce qui donne en développant : $\lambda^2(y|y) + 2\lambda(x|y) + (x|x) \geqslant 0$. Lorsque $(y|y) \neq 0$, alors le discriminant du trinôme en $\lambda$ doit être négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité.
Lorsque $(y|y) = 0$, alors $y = 0$ et l'inégalité est triviale. □

**THÉORÈME 24.2 (cas d'égalité)**

$\forall\, x,y \in E, (x|y)^2 = (x|x)(y|y) \iff (x,y)$ *est liée.*

**Preuve:** Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

**DÉFINITION 24.2 (norme euclidienne)**

*Soit $x \in (E,(.|.))$, on pose $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$, c'est la norme euclidienne de $x$. Un vecteur de norme égale à 1 est dit **unitaire**.*

*Si $x$ est non nul alors le vecteur $\frac{1}{\|x\|}x$ est unitaire.*

**Propriétés :**

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
- $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

**Exemples:**

- Soient $x,y \in E$ deux vecteurs non nuls, montrer que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists\, \alpha > 0, x = \alpha y$.
- $E = \mathbb{R}^n$, avec le produit scalaire canonique, l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* s'écrit :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- $E = \mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ avec le produit scalaire : $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$, l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* s'écrit : $\left(\int_a^b f(t)f\,g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$ et $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2}$.

**Relations entre le produit scalaire et la norme :**

- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$.
- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (théorème de la médiane ou identité du parallélogramme).
- $4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ (identité de polarisation).

Dans la suite, $(E,(.|.))$ désigne un espace euclidien.

## 2) Orthogonalité

**DÉFINITION 24.3**

*Soient $x, y \in E$, et soient $F, G$ deux s.e.v de $E$, on dit que :*
- *$x$ et $y$ sont orthogonaux lorsque $(x|y) = 0$.*
- *$F$ et $G$ sont orthogonaux lorsque $\forall\ x \in F, \forall\ y \in G, (x|y) = 0$.*

*On appelle* ***orthogonal de*** *$A$ (une partie de $E$), l'ensemble des vecteurs de $E$ orthogonaux à tous les vecteurs de $A$, notation : $A^\perp = \{x \in E\ /\ \forall\ y \in A, (x|y) = 0\}$. On remarquera que dire que $F$ et $G$ sont orthogonaux équivaut à $F \subset G^\perp$, ou encore $G \subset F^\perp$.*

*Le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul, i.e. $E^\perp = \{0\}$, car le produit scalaire est défini.*

**THÉORÈME 24.3 (de *Pythagore*)**

*Deux vecteurs $x$ et $y$ sont orthogonaux ssi $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

**THÉORÈME 24.4**

*Si $F$ est un s.e.v de $E$, alors $F^\perp$ est un s.e.v de $E$ en somme directe avec $F$.*

**Preuve**: Pour $y \in E$, on pose $f_y : E \to \mathbb{R}$ définie par $f_y(x) = (x|y)$, alors $f_y$ est une forme linéaire sur $E$, et il est facile de voir que $F^\perp = \bigcap\limits_{y \in F} \ker(f_y)$, ce qui prouve que $F^\perp$ est un s.e.v de $E$. Si $x \in F \cap F^\perp$, alors on doit avoir $(x|x) = 0$, d'où $x = 0$. □

**Propriétés** :
- Si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$.
- $F \subset (F^\perp)^\perp$.
- $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

**THÉORÈME 24.5**

*Si $\dim(E) = n$ et si $F$ est un s.e.v de $E$ de dimension $p$, alors $\dim(F^\perp) = n - p$, on a donc :*

$$E = F \oplus F^\perp.$$

**Preuve**: On sait que $\dim(F \oplus F^\perp) \leqslant n$, d'où $\dim(F^\perp) \leqslant n - p$.

Soit $f : E \to \mathbb{R}^p$ l'application définie par $f(x) = ((e_1|x), \ldots, (e_p|x))$ où $B = (e_1, \ldots, e_p)$ désigne une base de $F$, alors il est facile de voir que $f$ est linéaire et que $\ker(f) = F^\perp$. D'après le théorème du rang, on a $n = \dim(F^\perp) + \mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F^\perp) + p$, ce qui donne $\dim(F^\perp) \geqslant n - p$, et donc $\dim(F^\perp) = n - p$. □

**Quelques conséquences** :
- $(F^\perp)^\perp = F$.
- $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

**THÉORÈME 24.6**

*Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall\ x \in E, f(x) = (a|x)$.*

**Preuve**: Pour l'existence : si $f$ est nulle alors on peut prendre $a = 0$. Si $f$ est non nulle, alors $\ker(f)$ est un hyperplan de $E$, donc $\ker(f)^\perp = \mathrm{Vect}\,[u]$ est une droite vectorielle. Posons $f(u) = \lambda$ et prenons $a = \frac{\lambda}{\|u\|^2}u$. Il est facile de vérifier que pour tout $x \in E, f(x) = (a|x)$.

Si $b$ est un autre vecteur qui convient, alors $\forall\ x \in E, (a - b|x) = 0$, donc $a - b = 0$. □

## 3) Bases orthonormales

**DÉFINITION 24.4**

*Une famille $(x_1,\dots,x_p)$ de $E$ est dite orthonormale lorsque $\forall\, i,j \in [\![1..p]\!], (e_i|e_j) = \delta_{ij}$. Cette famille est dite orthogonale lorsque $\forall\, i,j \in [\![1..p]\!], i \neq j \Longrightarrow (e_i|e_j) = 0$.*

**THÉORÈME 24.7**

*Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormale est libre.*

**Preuve**: Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul, si $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = 0$, alors soit $i \in [\![1..p]\!]$, on a $(e_i|\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k e_k) = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k (e_i|e_k) = \lambda_i \|e_i\|^2 = 0$, ce qui entraîne $\lambda_i = 0$. □

**Cas particulier** : si $\dim(E) = n$, alors une famille orthonormale de $n$ vecteurs est une base de $E$, on dit que l'on a une **base orthonormale** (b.o.n en abrégé). Par exemple, la base canonique que $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique.

**THÉORÈME 24.8**

*Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une famille orthogonale, alors :* $\|\sum\limits_{k=1}^{p} e_i\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} \|e_i\|^2$.

**Preuve**: En effet, on a $\|\sum\limits_{i=1}^{p} e_i\|^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{p} (e_i|e_j) = \sum\limits_{i=1}^{p} \|e_i\|^2$. □

**THÉORÈME 24.9 (coordonnées dans une b.o.n)**

*Soit $\mathfrak{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une b.o.n de $E$, alors $\forall\, x,y \in E$ :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i \qquad (x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

*avec $x_i = (x|e_i)$ et $y_i = (y|e_i)$.*

**Preuve**: Soit $\text{Coord}_{\mathfrak{B}}(x) = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, on a $(x|e_k) = (\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i|e_k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i|e_k) = \lambda_k$. Pour les deux autres points, il suffit de développer le produit scalaire. □

**THÉORÈME 24.10**

*Il existe toujours des bases orthonormales.*

**Preuve**: Par récurrence sur $n = \dim(E)$ : pour $n = 1$, on a $E = \text{Vect}\left[e_1\right]$, une b.o.n de $E$ est $(e'_1)$ avec $e'_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.

Supposons le théorème vrai au rang $n-1$ ($n \geqslant 1$), et soit $e_1$ un vecteur unitaire de $E$, soit $F = \text{Vect}\left[e_1\right]^{\perp}$, alors $F$ est un s.e.v de dimension $n-1$, soit $(e_2,\dots,e_n)$ une b.o.n de $F$, il est facile de voir que $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une b.o.n de $E$. □

## 4) Projections orthogonales

**DÉFINITION 24.5**
*Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ une projection ($p \circ p = p$), on dit que $p$ est une projection orthogonale lorsque $\ker(p) = \ker(p - \mathrm{id})^{\perp}$. Si $F$ est un s.e.v de $E$, la projection orthogonale sur $F$, notée $p_F$, est la projection sur $F$ parallèlement à $F^{\perp}$.*

*Si $F$ est un s.e.v de $E$, alors la projection orthogonale sur $F^{\perp}$ est $\mathrm{id} - p_F$.*

**THÉORÈME 24.11**
*Si $F$ est un s.e.v de $E$, et si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une b.o.n de $F$, alors : $\forall\ x \in E, p_F(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$.*

**Preuve**: Soit $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une b.o.n de $F^{\perp}$, alors $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n de $E$, donc $x = \sum\limits_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i$, ce qui donne $x = \sum\limits_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i + \sum\limits_{i=p+1}^{n} (x|e_i)e_i$, la première somme désigne un vecteur de $F$, et la seconde un vecteur de $F^{\perp}$, donc $p_F(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$. □

**Exemple**: Si $D = \mathrm{Vect}\left[u\right]$ est une droite vectorielle, alors $(e_1 = \frac{u}{\|u\|})$ est une b.o.n de $D$, donc $\forall\ x \in E, p_D(x) = (x|e_1)e_1$, c'est à dire : $p_D(x) = \frac{(x|u)}{\|u\|^2}.u$.

**THÉORÈME 24.12 (procédé d'orthonormalisation de *Schmidt*[1])**
*Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$, alors il existe une unique b.o.n $(v_1, \ldots, v_n)$ de $E$ telle que :*

$$\forall\ i \in [\![1..n]\!], \begin{cases} \mathrm{Vect}\left[e_1, \ldots, e_i\right] = \mathrm{Vect}\left[v_1, \ldots, v_i\right] \\ (e_i|v_i) > 0 \end{cases}.$$

**Preuve**: On pose $v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, on a bien $\mathrm{Vect}\left[e_1\right] = \mathrm{Vect}\left[v_1\right]$ et $(e_1|v_1) > 0$.
Supposons les vecteurs $v_1, \ldots, v_i$ construits et vérifiant les conditions, on pose $e'_{i+1} = p_{F_i^{\perp}}(e_{i+1})$ où $F_i = \mathrm{Vect}\left[v_1, \ldots, v_i\right] = \mathrm{Vect}\left[e_1, \ldots, e_i\right]$, ce qui donne $e'_{i+1} = e_{i+1} - \sum\limits_{k=1}^{i} (e_{i+1}|v_k)v_k$, ce vecteur $e'_{i+1}$ est non nul et dans $F_{i+1}$, on pose ensuite $v_{i+1} = \frac{e'_{i+1}}{\|e'_{i+1}\|}$, il est facile de voir que $\mathrm{Vect}\left[e_1, \ldots, e_{i+1}\right] = \mathrm{Vect}\left[v_1, \ldots, v_{i+1}\right]$. D'autre part, $(e_{i+1}|v_{i+1}) = (e'_{i+1}|v_{i+1}) = \|e'_{i+1}\| > 0$.

On remarque qu'à chaque étape, il y a deux choix pour $v_i$, mais la condition $(e_i|v_i) > 0$ élimine une des deux possibilités, ce qui entraîne l'unicité, car on doit prendre $e'_{i+1}$ dans $F_{i+1} \cap F_i^{\perp}$ qui est une droite vectorielle. □

**Exercice**: Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, on pose $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (0,1,1)$. Appliquer la méthode de Schmidt à la base $(v_1, v_2, v_3)$.

**Réponse**: On pose $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, puis $e'_2 = v_2 - (v_2 \mid e_1) \cdot e_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ et $e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$. Enfin, $e'_3 = v_3 - (v_3 \mid e_1) \cdot e_1 - (v_3 \mid e_2) \cdot e_2 = \frac{2}{3}(-1,1,1)$ et $e_3 = \frac{e'_3}{\|e'_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$.

## 5) Distance d'un vecteur à un s.e.v

Soit $F$ un s.e.v de $E$ et soit $x \in E$, pour tout vecteur $y \in F$, on a $\|x - y\|^2 = \|(p_F(x) - y) + p_{F^{\perp}}(x)\|^2 = \|p_F(x) - y\|^2 + \|p_{F^{\perp}}(x)\|^2$, on voit donc que $\forall\ y \in E, \|x - y\|^2 \geqslant \|p_{F^{\perp}}(x)\|^2$, et que cette valeur est un minimum atteint uniquement pour $y = p_F(x)$, d'où le théorème :

1. *SCHMIDT Erhard* (1876 – 1959) : mathématicien allemand.

**THÉORÈME 24.13**

*Soit $F$ un s.e.v de $E$, pour $x \in E$, l'ensemble $\{\|x-y\| \;/\; y \in F\}$ admet un minimum, celui-ci est atteint uniquement pour $y = p_F(x)$, et vaut $\|p_{F^\perp}(x)\|$. Ce minimum est appelé distance de $x$ à $F$ et noté $\mathrm{d}(x,F)$ : $\mathrm{d}(x,F) = \min_{y\in F}\|x-y\| = \|p_{F^\perp}(x)\| = \|x - p_F(x)\|$.*

**Exemples**:

- Distance d'un vecteur à une droite : Soit $D = \mathrm{Vect}[u]$ une droite vectorielle, on sait que $p_D(x) = \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u$, d'où $\mathrm{d}(x,D) = \sqrt{\|x-p_D(x)\|^2} = \sqrt{\|x\|^2 - \frac{(x|u)^2}{\|u\|^2}}$.
- Distance d'un vecteur à un hyperplan : Soit $H$ un hyperplan de $E$, alors $H^\perp = \mathrm{Vect}[u]$ est une droite vectorielle, d'où $\mathrm{d}(x,H) = \|p_D(x)\| = \frac{|(x|u)|}{\|u\|}$.

# II) Endomorphismes orthogonaux

## 1) definition

**DÉFINITION 24.6**

*Une isométrie vectorielle de $E$ (ou endomorphisme orthogonal de $E$) est une application $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\forall\, x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ (on dit que $f$ conserve la norme), l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de $E$ est noté $\mathrm{O}(E)$.*

**Exemple**: $\mathrm{id}_E, h_{-1}$ sont des endomorphismes orthogonaux de $E$.

**THÉORÈME 24.14**

*Un endomorphisme $f$ de $E$ est une isométrie ssi $f$ conserve le produit scalaire, c'est à dire : $\forall\, x,y \in E, (f(x)|f(y)) = (x|y)$.*

**Preuve**: Si $f$ conserve le produit scalaire, il est clair que $f$ conserve la norme, et donc $f \in \mathrm{O}(E)$.

Réciproquement, si $f \in \mathrm{O}(E)$ : soient $x,y \in E$, $\|f(x)+f(y)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(f(x)|f(y))$, mais on a aussi $\|f(x)+f(y)\|^2 = \|f(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2(x|y)$, d'où $(f(x)|f(y)) = (x|y)$. □

**THÉORÈME 24.15**

*$\mathrm{O}(E)$ est un groupe pour la loi $\circ$, plus précisément c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, on l'appelle : **groupe orthogonal de $E$**.*

**Preuve**: Si $f \in \mathrm{O}(E)$, alors si $x \in \ker(f)$, on a $\|f(x)\| = 0 = \|x\|$, d'où $x = 0$, donc $f$ est injective, comme $E$ est de dimension finie, on a bien $f \in \mathrm{GL}(E)$. D'autre part, $\mathrm{id}_E \in \mathrm{O}(E)$, soient $f,g \in \mathrm{O}(E)$, $\|f(g(x))\| = \|g(x)\| = \|x\|$, donc $f\circ g \in \mathrm{O}(E)$, $\|x\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|f^{-1}(x)\|$, donc $f^{-1} \in \mathrm{O}(E)$. □

**DÉFINITION 24.7 (symétrie orthogonale)**

*Soient $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie ($s^2 = \mathrm{id}_E$), soit $F = \ker(s-\mathrm{id})$ et $G = \ker(s+\mathrm{id})$, alors on sait que $s$ est la symétrie par rapport à $F$ et parallèlement à $G$. On dit que $s$ est une symétrie orthogonale lorsque $F = G^\perp$, on parle alors de la symétrie orthogonale par rapport à $F$ (notée $s_F$).*

**THÉORÈME 24.16**

*Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.*

**Preuve:** Soit $s_F$ la symétrie orthogonale par rapport au s.e.v $F$, soit $p = \frac{1}{2}(s+\mathrm{id})$, alors on sait que $p$ est la projection sur $F$ parallèlement à $\ker(s+\mathrm{id}) = F^\perp$, donc $p$ est une projection orthogonale. Soit $x \in E$, $\|s_F(x)\|^2 = \|p_F(x) - p_{F^\perp}(x)\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2$, or $\|x\|^2 = \|p_F(x) + p_{F^\perp}(x)\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2 = \|s_F(x)\|^2$, d'où $s_F \in \mathrm{O}(E)$. □

*Une projection orthogonale qui n'est pas l'identité, n'est pas une isométrie (elle n'est pas bijective).*

**DÉFINITION 24.8 (réflexion)**
*Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.*

**Exercice:** Soient $u, v \in E$ deux vecteurs non nuls, de même norme et distincts. Montrer qu'il existe une unique réflexion qui échange $u$ et $v$.

**Réponse: Réponse** : soit $w = u - v$, soit $H = \mathrm{Vect}\,[w]^\perp$ et $s = s_H$, on a $(u - v|u + v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$, donc $u + v \in H$, on a donc $s(u - v) = v - u$ et $s(u + v) = u + v$, la résolution de ce système donne $s(u) = v$ et $s(v) = u$. Si $s'$ est une autre réflexion qui convient, alors on doit avoir $s'(u - v) = v - u$, donc $\ker(s' + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,[w]$ et par conséquent, $s' = s$.
Remarque : l'hyperplan $H$ s'appelle **hyperplan médiateur** de $[u; v]$, car si $x \in H$, alors $\|u - x\| = \|s(v) - s(x)\| = \|v - x\|$.

**THÉORÈME 24.17**
*Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $f \in \mathrm{O}(E) \iff f$ transforme une b.o.n en une b.o.n de $E$.*

**Preuve:** Soit $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n de $E$, on a $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$. Si $f \in \mathrm{O}(E)$, alors $(f(e_i)|f(e_k)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$, donc $\mathfrak{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une b.o.n de $E$.

Réciproquement, si $\mathfrak{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une b.o.n de $E$, alors pour $x \in E$, $\|f(x)\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$, donc $f \in \mathrm{O}(E)$. □

## 2) Matrices orthogonales

**THÉORÈME 24.18**
*Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, soit $\mathfrak{B}$ une base orthonornale de $E$ et soit $A = \underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors :*

$$f \in \mathrm{O}(E) \iff {}^t\!A \times A = I_n.$$

**Preuve:** Soit $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a $[{}^t\!A \times A]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = (f(e_i)|f(e_j)) = \delta_{i,j}$, donc ${}^t\!A \times A = I_n$. □

**DÉFINITION 24.9**
*Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que $A$ est une matrice orthogonale lorsque ${}^t\!A \times A = I_n$, l'ensemble des matrices orthogonales de taille $n$ est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.*

**THÉORÈME 24.19 (Caractérisations des matrices orthogonales)**
*Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *$A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.*
- *$A$ est inversible et $A^{-1} = {}^t\!A$.*
- *Les vecteurs colonnes de $A$ forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$.*

**Preuve:** On sait que $[{}^tA \times A]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = (c_i(A)|c_j(A))$ (produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$). Donc le troisième point équivaut $[{}^tA \times A]_{i,j} = \delta_{i,j}$. □

**Conséquences** $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, c'est en fait un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$, que l'on appelle **groupe orthogonal de type** $n$ sur $\mathbb{R}$.

**THÉORÈME 24.20**
*Si $f \in \mathrm{O}(E)$, alors $\det(f) = \pm 1$. Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\det(A) = \pm 1$.*

**Preuve:** Si $A$ est la matrice de $f$ dans une base orthonormale, alors $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tA \times A = I_n$, on en déduit que $\det({}^tA \times A) = 1 = \det(A)^2$, et donc $\det(A) = \pm 1$. □

**DÉFINITION 24.10**
*L'application $\det : (\mathrm{O}(E), \circ) \to (\{\pm 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes. Son noyau est donc un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$ que l'on appelle **groupe des rotations** et que l'on note $\mathrm{SO}(E)$ : **groupe spécial orthogonal de** $E$ (parfois noté $\mathrm{O}^+(E)$). On a donc :*

$$\mathrm{SO}(E) = \{f \in \mathrm{O}(E) \ / \ \det(f) = 1\}.$$

*L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ que l'on note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ : groupe spécial orthogonal de type $n$ sur $\mathbb{R}$.*

**Exemples:**

- Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, les vecteurs colonnes de $A$ sont unitaires et deux à deux orthogonaux, donc $A \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$, on a $\det(A) = 1$, donc $A$ est la matrice d'une rotation.
- Une réflexion n'est pas dans $\mathrm{SO}(E)$, en effet, soit $s$ la réflexion par rapport à un hyperplan $H$, soit $e_n$ un vecteur unitaire de la droite $H^\perp$, et soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une b.o.n de $H$, alors $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n de $E$ et $\underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on voit donc que $\det(s) = -1$.

**Composée d'endomorphismes orthogonaux** : en raisonnant sur le déterminant, on obtient :
- La composée de deux rotations est une rotation.
- La composée d'une rotation et d'une isométrie négative ($\det = -1$) est une isométrie négative.
- La composée de deux isométries négatives est une rotation.

it $f \in \mathrm{O}(E)$, soit $F$ un s.e.v de $E$, montrer que si $F$ est stable par $f$, alors $F^\perp$ aussi.

## 3) Espace vectoriel euclidien orienté

Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien orienté.

**THÉORÈME 24.21 (caractérisation des rotations)**
*Un endomorphisme $f$ de $E$ est une rotation ssi $f$ transforme une b.o.n.d en une b.o.n.d (on dit que $f$ conserve l'orientation).*

**Preuve**: Si $f \in \mathrm{SO}(E)$ : soit $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n.d de $E$, on sait que $f$ transforme $\mathfrak{B}$ en une b.o.n de $E$, $\mathfrak{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$, le déterminant de la matrice de passage est le déterminant de $f$ qui vaut 1, donc $\mathfrak{B}'$ est une base directe.

Réciproquement : si $f$ transforme une b.o.n.d $\mathfrak{B}$ en une b.o.n.d $\mathfrak{B}'$, alors on sait que $f \in \mathrm{O}(E)$, le déterminant de $f$ vaut $\pm 1$, or le déterminant de $f$ est le déterminant de la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$ et celui-ci est strictement positif, donc $\det(f) = 1$, *i.e.* $f$ est une rotation. □

## 4) Produit mixte

**THÉORÈME 24.22**

*Soit $\mathfrak{B}$ une b.o.n.d de $E$, soit $\mathfrak{B}'$ une autre base orthonormale de $E$, alors :*
- *Si $\mathfrak{B}'$ est directe, alors $\det_{\mathfrak{B}'} = \det_{\mathfrak{B}}$.*
- *Si $\mathfrak{B}'$ est indirecte, alors $\det_{\mathfrak{B}'} = -\det_{\mathfrak{B}}$.*

**Preuve**: Si $\mathfrak{B}'$ est indirecte, alors la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$ a un déterminant strictement négatif, mais cette matrice est une matrice orthogonale, donc son déterminant vaut $-1$. Or on a la relation $\det_{\mathfrak{B}} = \det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}')\det_{\mathfrak{B}'}$, et donc $\det_{\mathfrak{B}} = -\det_{\mathfrak{B}'}$. □

L'espace vectoriel $E$ est euclidien, orienté et de dimension $n$.

**DÉFINITION 24.11**

*Soit $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n.d de $E$, soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de $E$. On appelle **produit mixe des vecteurs** $x_1, \dots, x_n$, le réel noté $[x_1, \dots, x_n]$ et défini par : $[x_1, \dots, x_n] = \det_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_n)$. D'après le théorème précédent, ce nombre ne dépend pas de la b.o.n.d choisie.*

*Le produit mixte étant un déterminant, il hérite des propriétés de ce dernier.*

**Exemple**: En dimension deux : soit $\mathfrak{B} = (u, v)$ une b.o.n.d de $E$, $E$ peut être identifié à $\mathbb{C}$. Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$, alors $x = \|x\|(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v)$, et $y = \|y\|(\cos(\theta')u + \sin(\theta')v)$, d'où $(x|y) = \|x\|\|y\|\cos(\theta' - \theta)$, ou encore $(x|y) = \|x\|\|y\|\cos(\alpha)$ où $\alpha = (x, y) \pmod{2\pi}$. De même, $[x, y] = \|x\|\|y\|\sin(\alpha)$, donc l'angle $\alpha$ entre les vecteurs $x$ et $y$ dans le plan orienté est défini par :

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{[x, y]}{\|x\|\|y\|}.}$$

## 5) Produit vectoriel en dimension 3

$(E, (.|.))$ est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

**DÉFINITION 24.12**

*Soit $u, v \in E$, l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = [u, v, x]$ est une forme linéaire sur $E$, donc il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall\, x \in E, [u, v, x] = (a|x)$. Par définition, ce vecteur $a$ est appelé **produit vectoriel de** $u$ **et** $v$, on le note $u \wedge v$.*

### Propriétés du produit vectoriel

- $u \wedge v = 0$ ssi $(u, v)$ est liée.
  **Preuve**: Si $(u, v)$ est liée, alors $\forall\, x \in E, (u, v, x)$ est liée, donc $[u, v, x] = 0$, et par conséquent, $u \wedge v = 0$.
  Si $(u, v)$ est libre, alors il existe $x \in E$ tel que $(u, v, x)$ est une base de $E$, donc $[u, v, x] \neq 0$, ce qui entraîne $u \wedge v \neq 0$. □
- $u \wedge v$ est orthogonal à $u$ et $v$.
  **Preuve**: $(u|u \wedge v) = [u, v, u] = 0$ et $(u \wedge v|v) = [u, v, v] = 0$. □

- Si $(u,v)$ est libre, alors $(u,v,u\wedge v)$ est une base directe de $E$.
  **Preuve**: Soit $P=\mathrm{Vect}[u,v]$, alors $(u\wedge v)$ est une base de la droite $P^\perp$, donc $(u,v,u\wedge v)$ est une base de $E$. Soit $\mathfrak{B}$ une b.o.n.d de $E$, alors le déterminant de la famille $(u,v,u\wedge v)$ dans la base $\mathfrak{B}$ est le produit mixte $[u,v,u\wedge v]=\|u\wedge v\|^2>0$, cette famille est donc bien une base directe. □
- Le produit vectoriel est bilinéaire et antisymétrique.
- $\|u\wedge v\|^2=\|u\|^2\|v\|^2-(u|v)^2$.
  **Preuve**: Soit $\mathfrak{B}=(i,j,k)$ une b.o.n.d de $E$, $[u,v,u\wedge v]=\det(\begin{pmatrix}(u|i)&(v|i)&(u\wedge v|i)\\(u|j)&(v|j)&(u\wedge v|j)\\(u|k)&(v|k)&(u\wedge v|k)\end{pmatrix})$, soit $A$ cette matrice, le calcul de ${}^tA\times A$ donne ${}^tA\times A=\begin{pmatrix}\|u\|^2&(u|v)&0\\(u|v)&\|v\|^2&0\\0&0&\|u\wedge v\|^2\end{pmatrix}$, on obtient alors $\det({}^tA\times A)=\det(A)^2=\|u\wedge v\|^2\left(\|u\|^2\|v\|^2-(u|v)^2\right)$, mais ceci est égal à $[u,v,u\wedge v]^2=\|u\wedge v\|^4$. Si la famille $(u,v)$ est liée alors la formule est évidente, sinon on peut simplifier par $\|u\wedge v\|^2$ dans l'expression ci-dessus, ce qui donne la formule. On remarquera que si $u$ et $v$ sont unitaires orthogonaux, alors $(u,v,u\wedge v)$ est une b.o.n.d de $E$. □
  Lorsque $(u,v)$ est libre, alors d'après l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* $\frac{(u|v)}{\|u\|\|v\|}\in[-1;1]$, donc il existe un unique réel $\theta\in[0;\pi]$ tel que $(u|v)=\|u\|\|v\|\cos(\theta)$, on obtient alors $\|u\wedge v\|=\|u\|\|v\|\sin(\theta)$. Ce réel $\theta$ est appelé **mesure de l'angle** $(u,v)$, c'est un élément de $[0;\pi]$.
- Coordonnées de $u\wedge v$ dans une b.o.n.d : soit $(i,j,k)$ une b.o.n.d de $E$, alors :
  $$u\wedge v=\begin{vmatrix}u_2&v_2\\u_3&v_3\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix}u_1&v_1\\u_3&v_3\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}u_1&v_1\\u_2&v_2\end{vmatrix}k.$$
  **Preuve**: La coordonnée sur $i$ de $u\wedge v$ est $(i|u\wedge v)=[i,u,v]=\begin{vmatrix}u_2&v_2\\u_3&v_3\end{vmatrix}$. Le raisonnement est le même pour les deux autres. On retient ceci en disant c'est le développement suivant la troisième colonne du « déterminant » $\begin{vmatrix}u_1&v_1&i\\u_2&v_2&j\\u_3&v_3&k\end{vmatrix}$. On remarquera que $i\wedge j=k$, $i\wedge k=-j$ et $j\wedge k=i$. □
- Formule du double produit vectoriel : $\forall\ x,y,z\in E, x\wedge(y\wedge z)=(x|z)y-(x|y)z$.
  **Preuve**: On choisit $(i,j,k)$ une b.o.n telle que $x=\alpha i$, $y=\beta i+\gamma j$ et $z=ai+bj+ck$, on a alors : $y\wedge z=b\beta k-c\beta j-a\gamma k+c\gamma i$ d'où $x\wedge(y\wedge z)=-b\alpha\beta j-c\alpha\beta k+a\alpha\gamma j=[a\alpha\gamma-b\alpha\beta]j-c\alpha\beta k$. D'autre part, $(x|z)=a\alpha$ et $(x|y)=\alpha\beta$, donc on a $(x|z)y-(x|y)z=a\alpha\beta i+a\alpha\gamma j-a\alpha\beta i-\alpha\beta bj-\alpha\beta ck$ ce qui donne $[a\alpha\gamma-b\beta\alpha]j-c\alpha\beta k$, ce qui donne l'égalité. □

**Exercice**: Soit $u$ un vecteur unitaire de $E$, montrer que pour $x\in E,(u\wedge x)\wedge u$ est le projeté orthogonal de $x$ sur le plan $P=\mathrm{Vect}[u]^\perp$.

**Réponse**: Le projeté orthogonal de $x$ sur la droite $\mathrm{Vect}[u]$ est $(x|u)u$, donc le projeté orthogonal de $x$ sur $P$ est $x-(x|u)u$ qui est égal à $(u\wedge x)\wedge u$ d'après la formule du double produit vectoriel.

# III) Endomorphismes orthogonaux en dimension 1, 2 et 3

## 1) En dimension 1

Si $\dim(E)=1$ et si $f\in\mathrm{O}(E)$, alors $f$ est une homothétie de rapport $\lambda\in\mathbb{R}$, mais $f$ conserve la norme donc $\forall\ x\in E,\|\lambda x\|=\|x\|$, ce qui donne en prenant $x\neq 0$, $|\lambda|=1$, d'où $\mathrm{O}(E)=\{\pm\mathrm{id}_E\}$.

## 2) Dans le plan

Soit $E$ un plan euclidien orienté et soit $f\in\mathrm{O}(E)$, on effectue la classification suivant les invariants de $f$ : $F=\ker(f-\mathrm{id}_E)$.

- $\dim(F)=2$ : alors $f=\mathrm{id}\in\mathrm{SO}(E)$.
- $\dim(F)=1$ : alors $F=\mathrm{Vect}[u]$ est une droite vectorielle (avec $u$ unitaire) stable par $f$, donc $F^\perp$ est une droite vectorielle stable par $f$ également et sur laquelle le seul vecteur invariant est 0, donc la

restriction de $f$ à $F^\perp$ est $-\mathrm{id}_{F^\perp}$. Soit $v$ un vecteur unitaire de $F^\perp$, alors $\mathfrak{B}=(u,v)$ est une b.o.n de $E$ et on a $\underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, donc $f$ est **la réflexion d'axe** $F$.

Soit $\mathfrak{B}'=(i,j)$ une b.o.n.d, il existe un réel $\theta$ tel que $u=\cos(\theta/2)i+\sin(\theta/2)j$, on prend alors $v=-\sin(\theta/2)i+\cos(\theta/2)j$, la matrice de passage de $\mathfrak{B}'$ à $\mathfrak{B}$ est $P=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)&-\sin(\theta/2)\\\sin(\theta/2)&\cos(\theta/2)\end{pmatrix}$, et la matrice de $f$ dans la base $\mathfrak{B}'$ est $\underset{\mathfrak{B}'}{\mathrm{mat}}(f)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&\sin(\theta)\\\sin(\theta)&-\cos(\theta)\end{pmatrix}$.

– $\dim(F)=0$, seul le vecteur nul est invariant par $f$, soit $\mathfrak{B}=(i,j)$ une b.o.n.d de $E$, alors $\underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f)=A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, avec $\begin{cases}a^2+c^2&=1\\b^2+d^2&=1\\ab+cd&=0\end{cases}$, avec les complexes $z=a+ic$ et $z'=b+id$, on a $|z|=|z'|=1$, donc $z=e^{i\theta}$, $z'=e^{i\theta'}$, avec $\mathrm{Re}(z\overline{z'})=ab+cd=0$, donc $\cos(\theta-\theta')=0$, d'où $\theta'=\theta+\pi/2+k\pi$, ce qui donne $\begin{cases}b=\cos(\theta')=-\sin(\theta)\\d=\sin(\theta')=\cos(\theta)\end{cases}$, ou bien $\begin{cases}b=\cos(\theta')=\sin(\theta)\\d=\sin(\theta')=-\cos(\theta)\end{cases}$, mais le second cas correspond à une réflexion d'après l'étude précédente, il reste donc : $\underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$, cette matrice est notée $R(\theta)$, c'est la matrice **d'une rotation**.

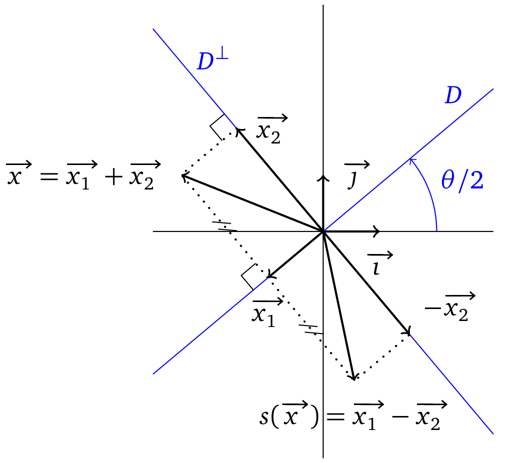
Soit $u$ un vecteur non nul, et soit $v=f(u)$, notons $X=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ les coordonnées de $x$ dans la base $\mathfrak{B}$, alors les coordonnées de $v$ sont $X'=\begin{pmatrix}a\cos(\theta)-b\sin(\theta)\\a\sin(\theta)+b\cos(\theta)\end{pmatrix}$, d'où $(u|v)=(a^2+b^2)\cos(\theta)=\|u\|\|f(u)\|\cos(\theta)$, et d'autre part $[u,v]=(a^2+b^2)\sin(\theta)=\|u\|\|f(u)\|\sin(\theta)$, donc $\theta$ est l'angle orienté des deux vecteurs $u$ et $v$. On dit que $f$ est la rotation d'angle $\theta$. On remarquera que la matrice de $f$ est la même dans toutes les b.o.n.d de $E$.

En résumé :

→ $\mathrm{SO}(E)=\{f\in\mathrm{O}(E)\ /\ \exists\ \theta\in\mathbb{R}, \underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f)=R(\theta)\}$, où $\mathfrak{B}$ est une b.o.n.d quelconque de $E$

→ $\mathrm{O}^-(E)=\{f\in\mathrm{O}(E)\ /\ \exists\ \theta\in\mathbb{R}, \underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&\sin(\theta)\\\sin(\theta)&-\cos(\theta)\end{pmatrix}\}$,
où $\mathfrak{B}$ est une b.o.n.d quelconque de $E$. Ce sont des réflexions d'axe $\mathrm{Vect}[u]$
où $u=\cos(\theta/2)i+\sin(\theta/2)j$.

→ $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})=\{R(\theta)\ /\ \theta\in\mathbb{R}\}$ et $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})=\{\begin{pmatrix}\cos(\theta)&\sin(\theta)\\\sin(\theta)&-\cos(\theta)\end{pmatrix}\ /\ \theta\in\mathbb{R}\}$



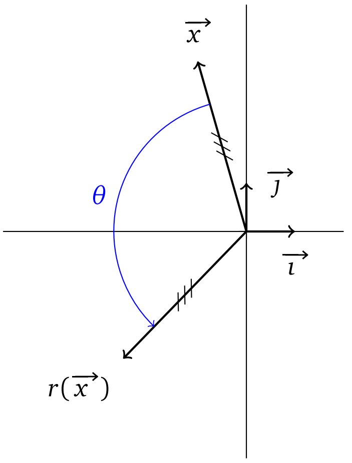



FIGURE 24.1: Réflexion et rotation

**Propriété** : L'application $R : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ définie par $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est un morphisme de groupes surjectif. En particulier, on a $R(0) = I_2$ et $\forall\ \theta, \theta' \in \mathbb{R}, R(\theta + \theta') = R(\theta) \times R(\theta')$, d'où $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.

**THÉORÈME 24.23**
*Le groupe des rotations, $(\mathrm{SO}(E), \circ)$, est commutatif.*

**Composée de deux réflexions** : Soit $\mathfrak{B} = (i, j)$ une b.o.n.d de $E$, soit $s$ la réflexion d'axe Vect $[u]$ et $s'$ la réflexion d'axe Vect $[u']$ avec $u = \cos(\theta/2)i + \sin(\theta/2)j$ et $u' = \cos(\theta'/2)i + \sin(\theta'/2)j$. La matrice de $s \circ s'$ dans la base $\mathfrak{B}$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta') & \sin(\theta') \\ \sin(\theta') & -\cos(\theta') \end{pmatrix} = R(\theta - \theta')$, donc $s \circ s'$ est la rotation d'angle $\theta - \theta' = 2(u', u) \pmod{2\pi}$. Ce calcul montre en même temps, qu'une rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions dont une est arbitraire.

## 3) En dimension 3

Soit $E$ une espace euclidien orienté de dimension 3, et soit $f \in \mathrm{O}(E)$, la classification se fait suivant la dimension de $F = \ker(f - \mathrm{id}_E)$.

- $\dim(F) = 3$ : alors $f = \mathrm{id}_E$, c'est une rotation.
- $\dim(F) = 2$, alors $F$ est un plan stable par $f$, donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\,[u]$ (avec $u$ unitaire) est une droite stable par $f$ sur laquelle le seul vecteur invariant est 0, donc la restriction de $f$ à $F^{\perp}$ est $-\mathrm{id}_{F^{\perp}}$, d'où $f(u) = -u$, $f$ est donc la réflexion par rapport au plan $F$, et $f \in \mathrm{O}^{-}(E)$.
  Soit $x \in E$, le projeté orthogonal de $x$ sur $F$ est $(u \wedge x) \wedge u$ et son projeté sur $F^{\perp}$ est $(x|u)u$, donc $x = (x|u)u + (u \wedge x) \wedge u$, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in E, f(x) = -(x|u)u + (u \wedge x) \wedge u).}$$

  C'est l'expression vectorielle de la réflexion par rapport au plan Vect $[u]^{\perp}$.
- $\dim(F) = 1$ : alors $F = \mathrm{Vect}\,[u]$ est une droite vectorielle stable par $f$ (avec $u$ unitaire), donc $F^{\perp}$ est un plan stable par $f$ sur lequel le seul vecteur invariant est 0, donc la restriction de $f$ à $F^{\perp}$ est une rotation. Soit $(v, w)$ une b.o.n.d de $F^{\perp}$ orienté par $u$, alors $\mathfrak{B} = (u, v, w)$ est une b.o.n.d de $E$, et la matrice de $f$ dans la base $\mathfrak{B}$ est : $\underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice vaut 1, donc $f$ est une rotation, on dit que $f$ est la rotation d'axe Vect $[u]$ et d'angle $\theta$ dans le plan Vect $[u]^{\perp}$ orienté par $u$. Soit $x \in E$, le projeté orthogonal de $x$ sur $F$ est $(x|u)u$ et son projeté sur $F^{\perp}$ est $(u \wedge x) \wedge u = (x|v)v + (x|w)w$, l'image de ce dernier vecteur dans le plan $F^{\perp}$ par la rotation est : $(x|v)[\cos(\theta)v + \sin(\theta)w] + (x|w)[-\sin(\theta)v + \cos(\theta)w]$, c'est à dire $\cos(\theta)[(x|v)v + (x|w)w] + \sin(\theta)[(x|v)w - (x|w)v]$, ce qui donne $\cos(\theta)(u \wedge x) \wedge u + \sin(\theta) x \wedge (w \wedge v)$, ou encore : $\cos(\theta)(u \wedge x) \wedge u + \sin(\theta) u \wedge x$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in E, f(x) = (x|u)u + \cos(\theta)(u \wedge x) \wedge u + \sin(\theta) u \wedge x.}$$

  C'est l'expression vectorielle de la rotation $f$. On remarquera que $\mathrm{tr}(f) = 1 + 2\cos(\theta)$, et si $x$ est un vecteur unitaire orthogonal à $u$, alors $x \wedge f(x) = \sin(\theta)u$, ce qui permet de déterminer l'angle de la rotation.
- $\dim(F) = 0$ : alors (on admet que) $f^2$ est une rotation d'axe Vect $[y]$, soit $x = f(y) - y$ on a $x \neq 0$ et $f(x) = -x$, donc il existe un vecteur unitaire $u$ tel que $f(u) = -u$, soit $D = \mathrm{Vect}\,[u]$, alors $D^{\perp}$ est

un plan stable par $f$ sur lequel seul le vecteur nul est invariant, donc la restriction de $f$ à $D^\perp$ est une rotation, soit $(v,w)$ une b.o.n.d de $D^\perp$ orienté par $u$, alors $\mathfrak{B} = (u,v,w)$ est une b.o.n.d de $E$ et :

$$\underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

le déterminant de cette matrice vaut $-1$ donc $f \in \mathrm{O}^-(E)$. Soit $s$ la réflexion par rapport au plan $D^\perp$ et $r$ la rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}\,[u]$ et d'angle $\theta$, il est facile de vérifier que $f = s \circ r = r \circ s$. D'autre part, pour tout vecteur $x \in E$ :

$$\boxed{f(x) = -(x|u)u + \cos(\theta)(u \wedge x) \wedge u + \sin(\theta) u \wedge x.}$$

C'est l'expression vectorielle de $f$. On remarquera que $\mathrm{tr}(f) = -1 + 2\cos(\theta)$, et que si $x$ est un vecteur unitaire orthogonal à $u$, alors $x \wedge f(x) = \sin(\theta)u$, ce qui permet de déterminer l'angle $\theta$.

En résumé :

$\longrightarrow$ $\mathrm{SO}(E) = \{f \in \mathrm{O}(E) \ / \ \exists\, \mathfrak{B},$ b.o.n.d, $\exists\, \theta \in \mathbb{R}, \underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\}$
(les invariants forment une droite vectorielle si $f \neq \mathrm{id}_E$)

$\longrightarrow$ Si $\det(f) = -1$, alors soit $f$ est une réflexion (un plan invariant), soit $f$ est la composée commutative entre une rotation d'axe $\mathrm{Vect}\,[u]$ et une réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}\,[u]^\perp$.

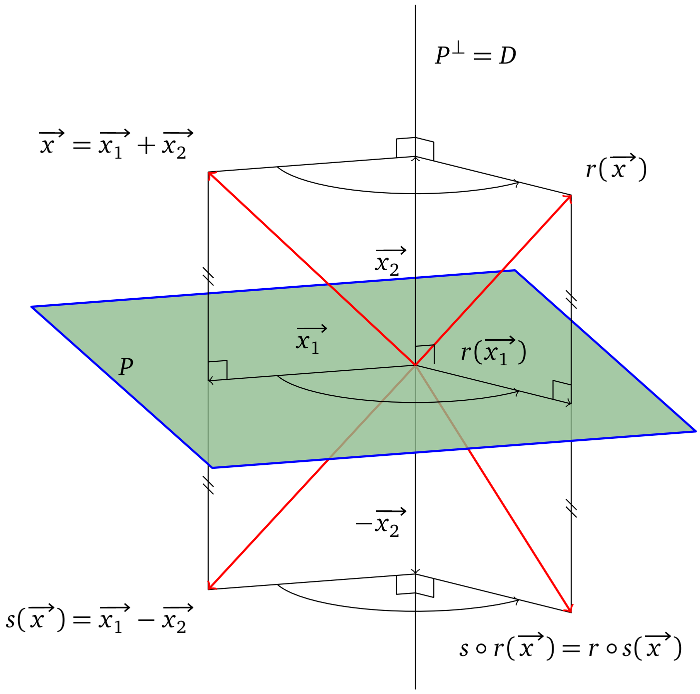



FIGURE 24.2: réflexion, rotation, et composée commutative

**THÉORÈME 24.24**

*Toute rotation peut s'écrire comme produit de deux réflexions.*

**Preuve**: Si $f$ est une rotation d'axe $D = \text{Vect}[u]$, alors la restriction de $f$ au plan $D^\perp$ est une rotation (plane) qui peut donc s'écrire comme composée de deux réflexions du plan $D^\perp$, le résultat en découle. □

## IV) Exercices

**★Exercice 24.1**
Soit $\mathfrak{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, dans les cas suivants, dire si $\varphi$ est un produit scalaire, et si c'est le cas, appliquer la méthode de *Schmidt* à $\mathfrak{B}$ :

a) $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{3}(x_i^2 + y_i^2)$.

b) $\varphi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$.

c) $\varphi(x, y) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$.

**★Exercice 24.2**
Soit $\mathfrak{B} = (i, j, k)$ une b.o.n de $E$, soient $v_1(1, 1, 2), v_2(1, 2, -2)$ et $v_3(5, -4, 0)$ trois vecteurs de $E$. Montrer que $\mathfrak{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $E$, et appliquer à $\mathfrak{B}'$ la méthode de *Schmidt*.

**★Exercice 24.3**
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose pour $A, B \in E, \varphi(A, B) = \text{tr}({}^t\!A \times B)$.

a) Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$. La base canonique de $E$ est -elle orthonormale ? Comment s'écrit l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* ? Le cas d'égalité ?

b) Soit $D = \text{Vect}\left[I_n\right]$, pour $A \in E$, calculer la distance de $A$ à $D$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in D$ à l'aide de la trace.

**★Exercice 24.4**
Soit $E$ un espace euclidien de dimension 5, soit $\mathfrak{B}$ une b.o.n de $E$ et soient $v_1(1, 0, 0, 1, -2)$, $v_2(2, 0, 1, 0, 2)$ et $v_3(0, 1, 2, 0, 1)$ trois vecteurs de $E$. On pose $F = \text{Vect}\left[v_1, v_2, v_3\right]$, déterminer une b.o.n de $F^\perp$.

**★Exercice 24.5**
Soit $E$ un espace euclidien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall\ x \in E, (x|f(x)) = 0$. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

**★Exercice 24.6**
Soit $f$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$, tel que $\forall\ x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|$. Montrer que $\ker(f - \text{id}_E)$ et $\text{Im}(f - \text{id}_E)$ ont supplémentaires.
Application : soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection, montrer que $p$ est une projection orthogonale ssi $\forall\ x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

**★Exercice 24.7**
Soit $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de $p$ vecteurs dans un espace euclidien $E$, on suppose que $\forall\ x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p}(x|e_i)^2$.

a) Montrer que $\text{Vect}\left[e_1, \dots, e_p\right]^\perp = \{0\}$, en déduire que $\mathfrak{B}$ est une base de $E$.

b) Soient $x, y \in E$, montrer que $(x|y) = \sum_{i=1}^{p}(x|e_i)(y|e_i)$.

c) Soit $x \in E$ et soit $y = \sum_{i=1}^{p}(x|e_i)e_i$. Montrer que $\|x\|^2 = \|y\|^2 = (x|y)$. En déduire que $x = y$, puis que $\mathfrak{B}$ est orthonormale.

**★Exercice 24.8**
Soit $E$ un espace euclidien, pour tout s.e.v $F$ de $E$, on note $p_F$ la projection orthogonale sur $F$.

a) Soient $F$ et $G$ deux s.e.v de $E$, montrer que $p_F \circ p_G = 0$ ssi $F$ et $G$ sont orthogonaux.

b) Montrer que $p_{F+G} = p_F + p_G$ ssi $F$ et $G$ sont orthogonaux.

c) Montrer que $p_F$ et $p_G$ commutent ssi $F$ et $F^\perp$ sont stables par $p_G$, déterminer alors $p_G \circ p_F$.

**★Exercice 24.9**

Soit $\mathfrak{B}$ une b.o.n.d d'un plan euclidien $E$, déterminer la nature de l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathfrak{B}$ est :

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

**★Exercice 24.10**

Soit $\mathfrak{B}$ une b.o.n.d d'un espace euclidien $E$ de dimension 3, déterminer la nature de l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathfrak{B}$ est :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & -3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**★Exercice 24.11**

Soit $E$ un espace euclidien de dimension 3, soit $\mathfrak{B} = (i, j, k)$ une b.o.n.d de $E$, déterminer la matrice dans la base $\mathfrak{B}$ de :

a) $p$, la projection orthogonale sur le plan $P$ d'équation $x + y + z = 0$.

b) $s$, la réflexion par rapport au plan $P$ d'équation $2x + 3y + z = 0$.

c) $s$, le demi-tour d'axe $\mathrm{Vect}[u]$ avec $u(1, 1, 1)$.

d) $r$, la rotation d'axe $\mathrm{Vect}[u]$ et d'angle $\pi/2$, avec $u(0, 1, 1)$.

e) $r$, la rotation d'axe $\mathrm{Vect}[u]$ qui transforme $i$ en $j$, avec $u = i + j + k$.