Enoncés et corrections : Sandra Delaunay

Sujets de l'année 2007-2008

1 Partiel

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.
2. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Correction ▼ [002603]

Exercice 2

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de cet endomorphisme ?
2. Démontrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, la matrice A admet une unique valeur propre réelle. Quel est le sous-espace propre associé ? Que se passe-t-il si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$?

Correction ▼ [002604]

Exercice 3

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et -2. Déterminer les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que A est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Correction ▼ [002605]

Exercice 4

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? (Justifier).
2. Calculer $(A-I)^2$. Démontrer que $A^n = nA + (1-n)I$.

Correction ▼ [002606]

---

2 Examen

Exercice 5

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer, sans calculs, des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u}$.
3. Soit $\vec{e}$ tel que $f(\vec{e}) = \vec{e}$. Démontrer que $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f dans cette base.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? (Justifier.)

Correction ▼ [002607]

Exercice 6

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
et trouver une matrice P inversible telle que $AP = PB$ (ou $A = PBP^{-1}$).
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $y' = By$ et $x' = Ax$, où x et y désignent des fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Correction ▼ [002608]

Exercice 7

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
Lorsque A est diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de A.

2. Soit E l'espace vectoriel des solutions du système $x' = Ax$, où x est une fonction de la variable réelle t à valeur dans $\mathbb{R}^3$.
   (a) Lorsque A est diagonalisable, donner une base de E en fonction des vecteurs propres et des valeurs propres de A. Ecrire la solution générale du système.
   (b) Lorsque A n'est pas diagonalisable, intégrer directement le système $x' = Ax$.
3. Soit E_0 l'ensemble des éléments s de E tels que $\lim_{t\to+\infty} s(t) = \vec{0}$. Démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E. (hors barème) Déterminer sa dimension en fonction de a.
4. Soit F l'ensemble des éléments s de E bornés sur $[0,+\infty[$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E. (hors barème) Déterminer sa dimension en fonction de a.

Correction ▼ [002609]

3 Rattrapage

Exercice 8

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

I

1. Factoriser le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.
2. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.
4. Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.

II

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A.

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
2. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\ker(A+I)^2$ est un plan stable par f.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ ($AP = PB$).
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$ et exprimer $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

III

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = -1$, on note $A = A_{-1}$.

1. Vérifier que la matrice A est diagonalisable.
2. Diagonaliser la matrice A.
3. Donner les solutions du système différentiel $X' = A.X$.

IV

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = 1$, on note $A = A_1$.

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
2. Trigonaliser la matrice A.

Correction ▼ [002610]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. *Calculons le déterminant de A et déterminons pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.*
   On développe le déterminant par rapport à la première colonne, on obtient

   $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

   La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

   $$\det A \neq 0 \iff 1 + a^3 \neq 0 \iff a \neq -1.$$

2. *Calculons A^{-1} lorsque A est inversible.*
   On suppose $a \neq -1$, on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} {}^t\tilde{A}$, où $\tilde{A}$ est la comatrice de A et ${}^t\tilde{A}$ la transposée de $\tilde{A}$. On a

   $$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -a^2 & a \\ -a^2 & a & -1 \\ a & -1 & -a^2 \end{pmatrix} = {}^t\tilde{A}.$$

   D'où $A^{-1} = \dfrac{1}{1+a^3} \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -a \\ a^2 & -a & 1 \\ -a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminons la nature géométrique de cet endomorphisme.*
   Notons $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice A est la matrice de la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ d'angle θ. On peut ajouter que les vecteurs colinéaires à $\vec{k}$ sont fixes. Un vecteur de coordonnées (x,y,z) est envoyé sur le vecteur $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$, sa composante dans le plan engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ subit la rotation plane d'angle θ.

2. *Démontrons que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, la matrice A admet une unique valeur propre réelle et déterminons son sous-espace propre associé.*
   Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A.

   $$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} \cos\theta - X & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta - X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} &= [(\cos\theta - X)^2 + \sin^2\theta](1-X) \\ &= (1-X)(X^2 - 2X\cos\theta + 1 \end{aligned}$$

   Cherchons les racines du polynôme $X^2 - 2X\cos\theta + 1$, pour cela on calcule son discriminant réduit

   $$\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta < 0,$$

   en effet, si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, alors $\sin\theta \neq 0$, donc le polynôme P_A n'admet qu'une racine réelle $\lambda = 1$. Son sous-espace propre associé est de dimension 1, c'est l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ de la rotation.

Cas où $\theta \in \pi\mathbb{Z}$
On distingue les cas $\theta = n\pi$ avec n pair ou impair :
- Si $\theta = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice de l'identité.
- Si $\theta = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, alors $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$. Elle admet deux valeurs propres, la valeur propre 1 dont le sous-espace propre est l'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ et la valeur propre -1 dont le sous-espace propre est le plan $\mathbb{R}\vec{i} + \mathbb{R}\vec{j}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminons et factorisons le polynôme caractéristique de A.*
Par opérations sur les colonnes puis les lignes, on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -4-X & -2 & -2 \\ 2 & -X & 2 \\ 3 & 3 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-X & 0 & -2 \\ 2 & -X-2 & 2 \\ 3 & 2+X & 1-X \end{vmatrix},$$

d'où

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -4-X & 0 & -2 \\ 2 & -X-2 & 2 \\ 5 & 0 & 3-X \end{vmatrix}$$

et, en développant par rapport à la deuxième colonne

$$P_A(X) = -(X+2)[(-4-X)(3-X)+10] = -(X+2)(X^2+X-2) = -(X+2)^2(X-1).$$

2. *Démontrons que les valeurs propres de A sont 1 et -2 et déterminons les sous-espaces propres associés.*
Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caracteristique, c'est-à-dire, 1, valeur propre simple et, -2, valeur propre double.
Notons E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1,

$$E_1 = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A.\vec{u} = \vec{u}\}.$$

Ainsi

$$\vec{u} = (x,y,z) \in E_1 \iff \begin{cases} -5x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_1 est donc une droite vectorielle dont un vecteur directeur est donné, par exemple, par $\vec{e}_1 = (-2,2,3)$.
Notons E_{-2} le sous-espace propre associé à la valeur propre -2,

$$E_{-2} = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A.\vec{u} = -2\vec{u}\}.$$

Ainsi

$$\vec{u} = (x,y,z) \in E_{-2} \iff \begin{matrix} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{matrix} \iff x + y + z = 0$$

Le sous-espace propre E_{-2} est donc le plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$, dont une base est donnée, par exemple, par $\vec{e}_2 = (1,-1,0)$ et $\vec{e}_3 = (1,0,-1)$.

3. *Démontrons que A est diagonalisable et donnons une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

   Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres sont de dimension la multiplicité de la valeur propre correspondante, ce qui prouve que la matrice A est diagonalisable. Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$la matrice de l'endomorphisme associé à A est diagonale, elle s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. *Trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.*

   La matrice de changement de base qui exprime la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ des vecteurs propres, trouvés ci-dessus, dans la base canonique est la matrice P cherchée

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

   elle est inversible et on a $P^{-1}AP = D$. (Le calcul de P^{-1} n'était pas demandé, ni nécessaire).

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculons les valeurs propres de A et voyons si l'endomorphisme u est diagonalisable.*

   En opérant sur les colonnes et les lignes du déterminant, on obtient

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & -2 \\ -1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1-X & -X \end{vmatrix},$$

   d'où

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 2 & 0 & -X-1 \end{vmatrix}$$

   et, en développant par rapport à la deuxième colonne

$$P_A(X) = (1-X)[(3-X)(-1-X)+4] = (1-X)(X^2-2X+1) = (1-X)^3.$$

   Ainsi, la matrice A admet 1 comme valeur propre triple. Elle n'est donc pas diagonalisable, sinon elle serait égale à $I = I_3$, la matrice identité.

2. *Calculons $(A-I)^2$ et démontrons que $A^n = nA + (1-n)I$.*

   On calcule d'abord la matrice $A - I$,

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   puis la matrice $(A-I)^2$,

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est donc la matrice nulle.

Nous allons donner deux méthodes pour démontrer que $A^n = nA + (1-n)I$.

Première méthode : En utilisant le binôme de Newton. On écrit $A^n = (A - I + I)^n$, or, les matrices $A - I$ et I commutent, on a donc

$$(A-I+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A-I)^k I^{(n-k)} = C_n^0 I + C_n^1 (A-I) = I + n(A-I) = nA + (1-n)I.$$

Deuxième méthode : Par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Fixons n arbitrairement pour lequel on suppose que $A^n = nA + (1-n)I$, on a alors

$$A^{n+1} = A(nA + (1-n)I) = nA^2 + (1-n)A,$$

sachant que $(A-I)^2 = 0$, on en déduit que $A^2 = 2A - I$ ainsi

$$A^{n+1} = n(2A-I) + (1-n)A = (n+1)A - nI = (n+1)A + (1-(n+1))I.$$

L'égalité est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. *Déterminons les valeurs propres de A.*
   Calculons les racines du polynôme caractéristique $P_A(X)$:
   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)^2(1-X).$$
   Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, valeur propre simple et $\lambda_2 = 2$, valeur propre double.
2. *Déterminons, sans calculs, des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u}$.*
   Si l'on note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la base dans laquelle est exprimée la matrice A de l'endomorphisme f, on remarque que
   $$f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$
   Ainsi, les vecteurs $\vec{u} = \vec{e}_2$ et $\vec{v} = \vec{e}_3$ répondent-ils à la question.
3. *Soit $\vec{e}$ tel que $f(\vec{e}) = \vec{e}$. Démontrons que $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrivons la matrice de f dans cette base.*
   Notons $\vec{e} = (x, y, z)$ alors
   $$f(\vec{e}) = \vec{e} \iff \left\{ \begin{array}{r} x = x \\ -x + 2y + z = y \\ 2z = z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x = y \end{array} \right.$$
   Le vecteur $\vec{e} = (1, 1, 0)$ convient. Les vecteurs $\vec{e}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans cette base s'écrit
   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est l'ensemble des vecteurs (x,y,z) tels que
$$\left\{\begin{array}{r} x=2x \\ -x+2y+z=2y \\ 2z=2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array}\right.$$
C'est une droite vectorielle, sa dimension n'est donc pas égale à la multiplicité de la valeur propre 2 comme racine du polynôme caractéristique, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit A la matrice
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ *associé.*

1. *Déterminons et factorisons le polynôme caractéristique de A.*
On note $P_A(X)$ le polynôme caractéristique, on a
$$P_A(X)=\begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 \\ -1 & 2 & -1-X \end{vmatrix}=(-1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix}=(-1-X)^2(1-X).$$
La matrice A admet deux valeurs propres, 1, valeur propre simple, et -1, valeur propre double.
2. *Déterminons les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de A.*
La valeur propre 1 est simple, le sous-espace propre associé est égal au sous-espace caractéristique, c'est l'ensemble
$$E_1=N_1=\{\vec{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ A\vec{u}=\vec{u}\}.$$
On a
$$\vec{u}\in E_1 \iff \left\{\begin{array}{r} x=x \\ x-y=y \\ -x+2y-z=z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=2y \\ z=0 \end{array}\right.$$
L'espace E_1 est une droite vectorielle dont un vecteur directeur $\vec{e}_1$ est donné, par exemple, par $\vec{e}_1=(2,1,0)$.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est défini par
$$E_{-1}=\{\vec{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ A\vec{u}=-\vec{u}\}.$$
On a
$$\vec{u}\in E_{-1} \iff \left\{\begin{array}{r} x=-x \\ x-y=-y \\ -x+2y-z=-z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right.$$
L'espace E_{-1} est une droite vectorielle dont un vecteur directeur $\vec{e}_2$ est donné, par exemple, par $\vec{e}_2=(0,0,1)$. La dimension de E_{-1} n'est pas égale à la multiplicité de la racine, la matrice n'est pas diagonalisable. Déterminons le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre -1. Pour cela calculons la matrice $(A+I)^2$.
$$(A+I)^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$N_{-1}=\ker(A+I)^2=\{\vec{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x=0\}$$
Le sous-espace caractéristique N_{-1} est le plan vectoriel engendré par les vecteurs
$e_2=(0,0,1)$ et $e_3=(0,1,0)$.

3. *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouvons une matrice P inversible telle que $AP = PB$ (ou $A = PBP^{-1}$).

On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = (2,1,0)$ et $\vec{e}_2 = (0,0,1)$ et on cherche un vecteur $\vec{e} \in N_{-1}$ tel que $f(\vec{e}) = 2\vec{e}_2 - \vec{e}$. Notons $\vec{e} = (0,y,z)$,

$$f(\vec{e}) = 2\vec{e}_2 - \vec{e} \iff y = 1,$$

le vecteur $\vec{e} = \vec{e}_3 = (0,1,0)$ convient, on pouvait le voir directement sur la deuxième colonne de la matrice A. Ainsi, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_1 = (2,1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,0,1)$ et $\vec{e}_3 = (0,1,0)$, la matrice de f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P cherchée est la matrice de passage qui exprime la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $AP = PB$ ou $A = PBP^{-1}$. On peut calculer P^{-1}, c'est la matrice qui exprime les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. *Ecrivons la décomposition de Dunford de B.*

On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}.$$

Il est clair que la matrice D est diagonalisable puisque diagonale, on vérifie facilement que $N^2 = 0$, c'est-à-dire que la matrice N est nilpotente et que les deux matrices commutent, $DN = ND$. Ainsi la décomposition $B = D + N$ est bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

5. *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons* $\exp tB$.

On utilise la décomposition de Dunford de la matrice tB, $tB = tD + tN$, on a donc

$$\exp(tB) = \exp(tD + tN) = \exp(tD).\exp(tN)$$

car les matrices commutent, par ailleurs, comme D est diagonale, on a

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

et comme $N^2 = 0$, on a

$$\exp(tN) = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\exp(tB) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

6. *Donnons les solutions des systèmes différentiels $y' = By$ et $x' = Ax$, où x et y désignent des fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.*
   Les solutions du système différentiel $y'(t) = B.y(t)$ sont les fonctions $y(t) = \exp(tB).V$ où V est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Donc
$$y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix},$$
   $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
   Pour trouver les solutions du système différentiel $x'(t) = A.x(t)$, on utilise le fait suivant
$$P.y \quad \text{est solution de} \quad x' = A.x \iff y \quad \text{est solution de} \quad y' = (P^{-1}AP).y = B.y.$$
   Ainsi, les solutions du système $x' = A.x$ s'écrivent
$$x(t) = P.\exp(tB).V$$
   où V est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. On remarque qu'il n'est pas utile de calculer la martrice P^{-1}. C'est-à-dire
$$x(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ae^t \\ ae^t + ce^{-t} \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \end{pmatrix},$$
   $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?*
   Déterminons le polynôme caractéristique de la matrice A.
$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & a-X & 0 \\ 0 & a-2 & 2-X \end{vmatrix} = -X(a-X)(2-X).$$
   Ce polynôme admet trois racines $0, a$ et 2. Ainsi, si $a \notin \{0,2\}$ la matrice est diagonalisable. Examinons les cas $a = 0$ et $a = 2$.
   Si $a = 0$, la valeur propre 0 est valeur propre double, on a
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Le sous-espace propre associé à 0 est égal à $\ker A = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A\vec{u} = \vec{0}\}$,
$$\vec{u} \in \ker A \iff \begin{cases} y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0.$$
   Le sous-espace propre associé à la valeur propre double 0 est une droite vectorielle, la droite engendrée par $(1,0,0)$, la matrice n'est donc pas diagonalisable.
   Si $a = 2$, la valeur propre 2 est double, on a
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé à 2 est égal à $E_2 = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A\vec{u} = 2\vec{u}\}$,

$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff y = 2x.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est un plan vectoriel, le plan d'équation $y = 2x$, la matrice est donc diagonalisable.

Ainsi la matrice A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 0$.

Lorsque A est diagonalisable, déterminons une base de vecteurs propres de A.

On a $a \neq 0$ et on distingue les cas $a \neq 2$ et $a = 2$.

Si $a \neq 2$, les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 2 sont lisibles sur la matrice, on a

$$E_0 = \ker A = \mathbb{R}.(1,0,0) \quad \text{et} \quad E_2 = \mathbb{R}.(0,0,1),$$

On détermine $E_a = \{\vec{u} = (x,y,z),\ A\vec{u} = a\vec{u}\}$.

$$\vec{u} \in E_a \iff \begin{cases} y = ax \\ ay = ay \\ (a-2)y + 2z = az \end{cases} \iff \begin{cases} y = ax \\ (a-2)y = (a-2)z \end{cases} \iff \begin{cases} y = ax \\ y = z \end{cases}$$

C'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e} = (1,a,a)$. Ainsi, une base de vecteurs propres est donnée par les vecteurs $(1,0,0), (0,0,1)$ et $(1,a,a)$.

Si $a = 2$, nous avons vu que le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est le plan d'équation $y = 2x$. Ainsi, une base de vecteurs propres est donnée par les vecteurs $(1,0,0), (0,0,1)$ et $(1,2,0)$.

2. *Soit E l'espace vectoriel des solutions du système $x' = Ax$, où x est une fonction de la variable réelle t à valeur dans $\mathbb{R}^3$.*

   (a) *Lorsque A est diagonalisable, donnons une base de E en fonction des vecteurs propres et des valeurs propres de A et écrivons la solution générale du système.*

   Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de A et $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ les vecteurs propres associés, on sait qu'une base de l'espace des solutions du système différentiel $x' = Ax$ est donnée par

$$e^{\lambda_1 t}\vec{e}_1,\ e^{\lambda_2 t}\vec{e}_2,\ e^{\lambda_3 t}\vec{e}_3.$$

   Ainsi, si $a \neq 2$ cette base est donnée par

$$(1,0,0),\ e^{2t}(0,0,1),\ e^{at}(1,a,a)$$

   et si $a = 2$, elle est donnée par

$$(1,0,0),\ e^{2t}(0,0,1),\ e^{2t}(1,2,0).$$

   (b) *Lorsque A n'est pas diagonalisable, intégrons directement le système $X' = AX$.*

   Lorsque A n'est pas diagonalisable, $a = 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Le système $X' = AX$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \\ z' = -2y + 2z \end{cases}$$

Si $y' = 0$, alors $y(t) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, si $x' = \alpha$, $x(t) = \alpha t + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ et la troisième équation devient

$$z' = 2z - 2\alpha$$

et sa solution s'écrit $z(t) = \gamma e^{2t} + \alpha$, $\gamma \in \mathbb{R}$. D'où la solution générale du système

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \alpha \\ \gamma e^{2t} + \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

3. *Soit E_0 l'ensemble des éléments s de E tels que $\lim_{t\to+\infty} s(t) = \vec{0}$. Démontrons que E_0 est un sous-espace vectoriel de E.*
   Pour démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de démontrer que $0_E \in E_0$ et que E_0 est stable par combinaison linéaire. La fonction nulle est clairement dans E_0, par ailleurs, si s_1 et s_2 sont dans E_0 et si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on a
   $$\lim_{t\to+\infty} a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) = \vec{0}$$
   ce qui prouve que $a_1 s_1 + a_2 s_2 \in E_0$.
   Déterminons sa dimension en fonction de a.
   Nous avons, dans tous les cas, une base de l'espace des solutions, donc l'écriture de la solution générale, on regarde alors les solutions de E qui sont dans E_0.
   1er cas : $a \neq 2$ et $a \neq 0$, la solution générale s'écrit
   $$s(t) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,e^{2t}) + \gamma(e^{at}, ae^{at}, ae^{at}),\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3.$$
   Ainsi, si $a > 0$, $s(t) \in E_0 \iff s = \vec{0}$, $\dim E_0 = 0$,
   et si $a < 0$, $s(t) \in E_0 \iff \alpha = \beta = 0$, $\dim E_0 = 1$.
   2ème cas : $a = 2$, la solution générale s'écrit
   $$s(t) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,e^{2t}) + \gamma(e^{2t}, 2e^{2t}, 0),\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3.$$
   Ainsi, $s(t) \in E_0 \iff s = \vec{0}$, $\dim E_0 = 0$.
   3ème cas : $a = 0$, la solution générale s'écrit
   $$s(t) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,e^{2t}) + \gamma(t,1,1),\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3.$$
   Ainsi, $s(t) \in E_0 \iff s = \vec{0}$, $\dim E_0 = 0$.
4. *Soit F l'ensemble des éléments s de E bornés sur $[0,+\infty[$. Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de E.*
   Pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de démontrer que $0_E \in F$ et que F est stable par combinaison linéaire. La fonction nulle est clairement dans F, par ailleurs, si s_1 et s_2 sont dans E_0 et si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)$ est bornée sur $[0,+\infty[$, donc dans F.
   Déterminons sa dimension en fonction de a.
   Comme dans le cas précédent, suivant la forme de la solution générale, on a
   si $a \geq 0$, les seules solutions bornées sur $[0,+\infty[$ sont de la forme
   $s(t) = \alpha(1,0,0),\ \alpha \in R$, ainsi $\dim F = 1$.
   si $a < 0$, les seules solutions bornées sur $[0,+\infty[$ sont de la forme
   $s(t) = \alpha(1,0,0) + \gamma(e^{at}, ae^{at}, ae^{at}),\ (\alpha,\gamma) \in \mathbb{R}^2$, $\dim F = 2$.

Correction de l'exercice 8 ▲

I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. *Factorisons le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.*
   On a

$$\begin{aligned}
P_{A_\alpha}(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 0 & -2-X & -\alpha-1 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\
&= (-1-X)[(-2-X)(\alpha-X)+\alpha+1] \\
&= -(X+1)[X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha].
\end{aligned}$$

   Factorisons le polynôme $X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha$, son discriminant est égal à

$$\Delta = (2-\alpha)^2-4(1-\alpha) = \alpha^2.$$

   On a donc $\sqrt{\Delta} = |\alpha|$, ce qui nous donne les deux racines

$$\lambda_1 = \frac{\alpha-2-\alpha}{2} = -1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{\alpha-2+\alpha}{2} = \alpha-1.$$

   Le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ se factorise donc en

$$P_{A_\alpha}(X) = -(X+1)^2(X-\alpha+1).$$

2. *Déterminons selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.*
   Les valeurs propres de A_α sont les racines du polynôme caractéristique P_{A_α}, ainsi,
   - si $\alpha = 0$, la matrice A_α admet une valeur propre triple $\lambda = -1$,
   - si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ valeur propre double et $\lambda_2 = \alpha-1$, valeur propre simple.

3. *Déterminons les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.*
   Il est clair que dans le cas $\alpha = 0$, la matrice n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait une matrice inversible P telle que $A_\alpha = P(-I)P^{-1} = -I$, ce qui n'est pas le cas.
   Si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α est diagonalisable si le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 2. Déterminons ce sous-espace propre.

$$E_{-1} = \ker(A_\alpha+I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right\}$$

   ainsi,

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+(\alpha+1)z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y+\alpha z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

   Il faut distinguer les cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$.
   - Si $\alpha = -1$, le sous-espace E_{-1} est le plan vectoriel d'équation $x = y$, dans ce cas la matrice A_α est diagonalisable.
   - Si $\alpha \neq -1$, le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$, dans ce cas la matrice A_α n'est pas diagonalisable.

4. *Déterminons selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.*
   Notons Q_A le polynôme minimal de A_α. On sait que la matrice A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son polynôme minimal a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$ et que celles-ci sont simples. Or, nous venons de démontrer que A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement $\alpha = -1$, on a donc

- Si $\alpha = -1$, A_α est diagonalisable, donc $Q_A(X) = (X+1)(X-\alpha+1) = (X+1)(X+2)$.
- Si $\alpha \neq -1$, on doit distinguer les cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$, en effet,
- si $\alpha \neq 0$, A_α n'est pas diagonalisable donc les racines de Q_A ne sont pas toutes les deux simples, et P_A admet deux racines distinctes, donc

$$Q_A(X) = -P_A(X) = (X+1)^2(X-\alpha+1).$$

- si $\alpha = 0$, on a $P_A(X) = -(X+1)^3$ et A_0 n'est pas diagonalisable, le polynôme minimal peut donc être égal à $(X+1)^2$ ou à $(X+1)^3$, or

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

donc le polynôme minimal Q_A est égal à $(X+1)^3$.

II

On suppose désormais que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A. On a donc

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_A(X) = -(X+1)^3$.

1. *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*
   La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = -1$ de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace $E_{-1} = \ker(A+I)$, et on a

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

   Le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$.
   Le sous-espace caractéristique de A, associé à l'unique valeur propre $\lambda = -1$, est le sous-espace $N_{-1} = \ker(A+I)^3$, or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que $P_A(A) = 0$, ainsi, la matrice $(A+I)^3$ est la matrice nulle, ce qui implique $N_{-1} = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.
2. *Démontrons que le sous-espace vectoriel $\ker(A+I)^2$ est un plan stable par f.*
   On a $E_{-1} = \ker(A+I) \subset \ker(A+I)^2 \subset \ker(A+I)^3 = \mathbb{R}^3$, le sous-espace $\ker(A+I)^2$ est clairement stable par A car pour tout $v \in \ker(A+I)^2$, $Av \in \ker(A+I)^2$, en effet

$$(A+I)^2 Av = A(A+I)^2 v = 0.$$

   Démontrons que ce sous-espace est un plan. On a

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   donc $\ker(A+I)^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+y+z = 0\}$, c'est bien un plan vectoriel.
3. *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   et trouvons une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Nous cherchons des vecteurs e_1, e_2, e_3 tels que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 - e_2$ et $Ae_3 = e_2 - e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1 = \ker(A+I)$, et $\ker(A+I)$ est la droite d'équations :
$\{z = 0, x-y = 0\}$; nous choisirons $e_2 \in \ker(A+I)^2$ tel que (e_1, e_2) soit une base de $\ker(A+I)^2$. Remarquons que si l'on cherche $e_2 = (x,y,z)$ tel que $Ae_2 = e_1 - e_2$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = 1-y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

ce qui nous donne bien un vecteur de $\ker(A+I)^2$. Ainsi, les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (1,0,1)$ conviennent. Il nous reste à chercher un vecteur e_3 tel que $Ae_3 = e_2 - e_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ 1-z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = -y \\ -x+y = 1-z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases}$$

Le vecteur $e_3 = (0,0,1)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. *Décomposition de Dunford de B*
On a
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à $-I$. Or, il existe un unique couple de matrices D et N, D diagonalisable et N nilpotente, telles que $B = D+N$ et $DN = ND$. Or si
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
On a
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et $N^3 = 0$. La décomposition $B = D+N$ est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

5. *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons* $\exp tB$ *et exprimons* $\exp tA$ *à l'aide de P et* $\exp tB$*.*
On a $N^3 = 0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(tN)^3 = 0$ et l'exponentielle est égale à
$$\exp(tN) = I + tN + (t^2/2)N^2,$$
par ailleurs $ND = DN$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices tN et tD commutent également, $(tN)(tD) = (tD)(tN)$, on a donc
$$\exp(tB) = \exp(tD+tN) = \exp(tD)\exp(tN) = \exp(-tI)\exp(tN) = e^{-t}I\left(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right)$$
D'où
$$\exp(tB) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Pour déterminer l'exponentielle de la matrice tA, on écrit
$$\exp(tA) = \exp(t(PBP^{-1})) = \exp(P(tA)P^{-1}) = P\exp(tB)P^{-1}.$$

6. *Solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.*
La solution générale du système $Y' = BY$ s'écrit
$$S(t) = \exp(tB)v$$
où $v = (a,b,c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. La solution $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ s'écrit donc
$$S(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a + bt + c\frac{t^2}{2} \\ b + ct \\ c \end{pmatrix}$$
Pour obtenir la solution du système $X' = AX$, on écrit
$$X' = AX \iff X' = (PBP^{-1})X \iff P^{-1}X' = (BP^{-1})X \iff (P^{-1}X)' = B(P^{-1}X)$$
ainsi, en notant $Y = P^{-1}X$ ou encore $X = PY$, les solutions du système $X' = AX$ sont les $PS(t)$ où P est la matrice vérifiant $A = PBP^{-1}$ et S une solution du système $Y' = BY$.
La solution générale du système $X' = AX$ s'écrit donc
$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t}(a + bt + c\frac{t^2}{2}) \\ e^{-t}(b + ct) \\ e^{-t}c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} (a+b) + (c+b)t + c\frac{t^2}{2} \\ a + bt + c\frac{t^2}{2} \\ (b+c) + ct \end{pmatrix}$$
où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

III

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = -1$, on note $A = A_{-1}$.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Vérifions que la matrice A est diagonalisable.*
Nous avons vu dans la partie $I)3)$ que lorsque $\alpha = -1$, la matrice est diagonalisable, en effet, dans ce cas, elle admet deux valeurs propres : -1, valeur propre double et -2, valeur propre simple. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 étant le plan d'équation $x = y$.
2. *Diagonalisons la matrice A.*
Pour cela déterminons une base de vecteurs propres. Le plan $x = y$ est engendré par les vecteurs $u(1,1,0)$ et $v(0,0,1)$, déterminons un vecteur directeur de la droite E_{-2} :
$$E_{-2} = \ker(A_\alpha + 2I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \right\}$$
ainsi,
$$(x,y,z) \in E_{-2} \iff \begin{cases} -x = -2x \\ x - 2y = -2y \\ -x + y - z = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$
Le sous-espace propre E_{-2} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $w(0,1,-1)$. Ainsi, dans la base (u,v,w) la matrice est diagonale et s'écrit
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
on a $A = PDP^{-1}$, où
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. *Donnons les solutions du système différentiel $X' = A.X$.*

   Si on note $X = PY$, les solutions du système $X' = AX$ sont les $PS(t)$ où S une solution du système $Y' = DY$. Ainsi, la solution générale du système $X' = A.X$ s'écrit

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{-t} \\ ce^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ ae^{-t} + be^{-t} \\ be^{-t} + ce^{-2t} \end{pmatrix}$$

   où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

IV

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = 1$, on note $A = A_1$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*

   La matrice A admet deux valeurs propres : -1, valeur propre double et 0, valeur propre simple. Le sous-espace propre E_{-1}, associé à la valeur propre -1, est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$. Déterminons le sous-espace E_0 :

$$E_0 = \ker(A) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   ainsi,

$$(x,y,z) \in E_0 \iff \left\{ \begin{array}{r} -x + 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array} \right. \iff \begin{cases} x = 2z \\ x = 2y \end{cases}$$

   Le sous-espace propre E_0 est la droite vectorielle engendrée par $(2,1,1)$. Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 0 est le sous-espace propre E_0. Déterminons le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre double -1 c'est l'espace vectoriel $\ker(A+I)^2$. On a

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, $\ker(A+I)^2$ est le plan vectoriel d'équation $-x + y + 2z = 0$, engendré par les vecteurs $(1,1,0) \in E_{-1}$ et $(2,0,1)$.

2. *Trigonalisons la matrice A.*

   Dans la base (u,v,w) où $u(2,1,1)$, $v(1,1,0)$ et $w(2,0,1)$ la matrice est triangulaire, il existe λ tel que $A.w = \lambda v - w$.

$$A.w = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Ainsi $A = PTP^{-1}$ où

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
