



Calculs sur les matrices

Corrections d'Arnaud Bodin.

1 Opérations sur les matrices

Exercice 1

Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

[Correction ▼](#)

[001040]

Exercice 2

Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A(\theta) \times A(\theta')$ et $(A(\theta))^n$ pour $n \geq 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[001061]

Exercice 3

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[001063]

Exercice 4

Que peut-on dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $\operatorname{tr}(A^t A) = 0$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[001064]

2 Inverse

Exercice 5

Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbb{C}) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1} .

Indication ▼ Correction ▼

[001052]

Exercice 7 M antisymétrique $\Rightarrow I + M$ est inversible

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $I + M$ est inversible (si $(I + M)X = 0$, calculer ${}^t(MX)(MX)$).
2. Soit $A = (I - M)(I + M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Indication ▼ Correction ▼

[003380]

Exercice 8

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Indication ▼ Correction ▼

[001069]

Indication pour l'exercice 2 ▲

Il faut connaître les formules de $\cos(\theta + \theta')$ et $\sin(\theta + \theta')$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Essayer avec X la matrice élémentaire E_{ij} (des zéros partout sauf le coefficient 1 à la i -ème ligne et la j -ème colonne).

Indication pour l'exercice 4 ▲

Appliquer la formule du produit pour calculer les coefficients diagonaux de $A {}^tA$

Indication pour l'exercice 6 ▲

Une fois que l'on a calculé A^2 et A^3 on peut en déduire A^{-1} sans calculs.

Indication pour l'exercice 7 ▲

M antisymétrique signifie ${}^tM = -M$.

1. Si Y est un vecteur alors ${}^tYY = \|Y\|^2$ est un réel positif ou nul.
 2. $I - M$ et $(I + M)^{-1}$ commutent.
-

Indication pour l'exercice 8 ▲

Prendre un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$, considérer le rang i_0 tel $|x_{i_0}| = \max \{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

Si $C = A \times B$ alors on obtient le coefficient c_{ij} (situé à la i -ème ligne et la j -ème colonne de C) en effectuant le produit scalaire du i -ème vecteur-ligne de A avec le j -ème vecteur colonne de B .

On trouve

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

$$\begin{aligned} A(\theta) \times A(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & -\cos \theta \sin \theta' - \sin \theta \cos \theta' \\ \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' & -\sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\ &= A(\theta + \theta') \end{aligned}$$

Bilan : $A(\theta) \times A(\theta') = A(\theta + \theta')$.

Nous allons montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $(A(\theta))^n = A(n\theta)$.

- C'est bien sûr vrai pour $n = 1$.
- Fixons $n \geq 1$ et supposons que $(A(\theta))^n = A(n\theta)$ alors

$$(A(\theta))^{n+1} = (A(\theta))^n \times A(\theta) = A(n\theta) \times A(\theta) = A(n\theta + \theta) = A((n+1)\theta)$$

- C'est donc vrai pour tout $n \geq 1$.

Remarques :

- On aurait aussi la formule $A(\theta') \times A(\theta) = A(\theta + \theta') = A(\theta) \times A(\theta')$. Les matrices $A(\theta)$ et $A(\theta')$ commutent.
- En fait il n'est pas plus difficile de montrer que $(A(\theta))^{-1} = A(-\theta)$. On sait aussi que par définition $(A(\theta))^0 = I$. Et on en déduit que pour $n \in \mathbb{Z}$ on a $(A(\theta))^n = A(n\theta)$.
- En terme géométrique $A(\theta)$ est la matrice de la rotation d'angle θ (centrée à l'origine). On vient de montrer que si l'on compose une rotation d'angle θ avec une rotation d'angle θ' alors on obtient une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Notons E_{ij} la matrice élémentaire (des zéros partout sauf le coefficient 1 à la i -ème ligne et la j -ème colonne). Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$A \times E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ji} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

La seule colonne non nulle est la j -ème colonne.

La trace est la somme des éléments sur la diagonale. Ici le seul élément non nul de la diagonale est a_{ji} , on en déduit donc

$$\text{tr}(A \times E_{ij}) = a_{ji}$$

(attention à l'inversion des indices).

Maintenant prenons deux matrices A, B telles que $\text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$ pour toute matrice X . Alors pour $X = E_{ij}$ on en déduit $a_{ji} = b_{ji}$. On fait ceci pour toutes les matrices élémentaires E_{ij} avec $1 \leq i, j \leq n$ ce qui implique $A = B$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Notons $A = (a_{ij})$, notons $B = {}^tA$ si les coefficients sont $B = (b_{ij})$ alors par définition de la transposée on a $b_{ij} = a_{ji}$.

Ensuite notons $C = A \times B$ alors par définition du produit de matrices le coefficients c_{ij} de C s'obtient par la formule :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Appliquons ceci avec $B = {}^tA$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}.$$

Et pour un coefficient de la diagonale on a $i = j$ donc

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^2.$$

La trace étant la somme des coefficients sur la diagonale on a :

$$\text{tr}(A {}^tA) = \text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{ik}^2.$$

Si on change l'indice k en j on obtient

$$\text{tr}(A {}^tA) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2.$$

Donc cette trace vaut la somme des carrés de tous les coefficients.

Conséquence : si $\text{tr}(A {}^tA) = 0$ alors la somme des carrés $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2$ est nulle donc chaque carré a_{ij}^2 est nul. Ainsi $a_{ij} = 0$ (pour tout i, j) autrement dit A est la matrice nulle.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. si le déterminant $ad - bc$ est non nul l'inverse est $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2. $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3. si $|\alpha| \neq 1$ alors l'inverse est $\frac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha\bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$

4. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ & & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & (0) & & 1 & -2 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

On trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Un calcul donne $A^3 - A = 4I$. En factorisant par A on obtient $A \times (A^2 - I) = 4I$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I$, ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Avant de commencer la résolution nous allons faire une remarque importante : pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur (considéré comme une matrice à une seule colonne) alors nous allons calculer tXX :

$${}^tXX = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

On note $\|X\|^2 = {}^tXX$: $\|X\|$ est la *norme* ou la *longueur* du vecteur X . De ce calcul on déduit d'une part que ${}^tXX \geq 0$. Et aussi que ${}^tXX \geq 0$ si et seulement si X est le vecteur nul.

1. Nous allons montrer que $I + M$ est inversible en montrant que si un vecteur X vérifie $(I + M)X = 0$ alors $X = 0$.

Nous allons estimer ${}^t(MX)(MX)$ de deux façons. D'une part c'est un produit de la forme ${}^tYY = \|Y\|^2$ et donc ${}^t(MX)(MX) \geq 0$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
{}^t(MX)(MX) &= {}^t(MX)(-X) \quad \text{car } (I+M)X = 0 \text{ donc } MX = -X \\
&= {}^tX^tM(-X) \quad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB^tA \\
&= {}^tX(-M)(-X) \quad \text{car } {}^tM = -M \\
&= {}^tXMX \\
&= {}^tX(-X) \\
&= -{}^tXX \\
&= -\|X\|^2
\end{aligned}$$

Qui est donc négatif.

Seule possibilité $\|X\|^2 = 0$ donc $X = 0$ (= le vecteur nul) et donc $I+M$ inversible.

2. (a) Calculons A^{-1} .

$$A^{-1} = ((I-M) \times (I+M)^{-1})^{-1} = ((I+M)^{-1})^{-1} \times (I-M)^{-1} = (I+M) \times (I-M)^{-1}$$

(n'oubliez pas que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$).

(b) Calculons tA .

$$\begin{aligned}
{}^tA &= {}^t((I-M) \times (I+M)^{-1}) \\
&= {}^t((I+M)^{-1}) \times {}^t(I-M) \quad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB^tA \\
&= ((I+M))^{-1} \times {}^t(I-M) \quad \text{car } {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} \\
&= (I+{}^tM)^{-1} \times (I-{}^tM) \quad \text{car } {}^t(A+B) = {}^tA+{}^tB \\
&= (I-M)^{-1} \times (I+M) \quad \text{car ici } {}^tM = -M
\end{aligned}$$

(c) Montrons que $I+M$ et $(I-M)^{-1}$ commutent.

Tout d'abord $I+M$ et $I-M$ commutent car $(I+M)(I-M) = I-M^2 = (I-M)(I+M)$. Maintenant nous avons le petit résultat suivant :

Lemme. Si $AB = BA$ alors $AB^{-1} = B^{-1}A$.

Pour la preuve on écrit :

$$AB = BA \Rightarrow B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1} \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}.$$

En appliquant ceci à $I+M$ et $I-M$ on trouve $(I+M) \times (I-M)^{-1} = (I-M)^{-1} \times (I+M)$ et donc $A^{-1} = {}^tA$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur tel que $AX = 0$. Nous allons montrer qu'alors X est le vecteur nul ce qui entraîne que A est inversible.

Par l'absurde supposons $X \neq 0$. Alors, si i_0 est un indice tel que $|x_{i_0}| = \max \{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$, on a $|x_{i_0}| > 0$. Mais alors comme $AX = 0$ on a pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = 0$$

donc

$$|a_{i_0,i_0}x_{i_0}| = \left| - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \cdot |x_j| \leq |x_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$$

et, puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient $|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$ contredisant les hypothèses de l'énoncé. Ainsi $X = 0$. On a donc prouvé « $AX = 0 \Rightarrow X = 0$ » ce qui équivaut à A inversible.
