Suites et séries de matrices

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 **

Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ (a réel strictement positif donné).

Correction ▼ [005864]

Exercice 2 ***

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, $p \geqslant 1$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(1) $\mathrm{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$ (disque unité ouvert).
(2) $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$
(3) La série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge.

Correction ▼ [005865]

Exercice 3 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$. Convergence et somme de la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [005866]

Exercice 4 ** I

On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\ \|$. Soit A un élément de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| < 1$. Montrer que la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I-A)^{-1}$.
En déduire que $\|(I-A)^{-1} - (I+A)\| \leqslant \frac{\|A\|^2}{1-\|A\|}$.

Correction ▼ [005867]

Exercice 5 ** I

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant p_0$, $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{R})$.

Correction ▼ [005868]

Exercice 6 ** I

Calculer $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$, si

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Correction ▼ [005869]

Exercice 7 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Calculer $\ln(I_3 + tA) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} A^n$ en précisant les valeurs de t pour lesquelles la série converge.

Correction ▼ [005870]

Exercice 8 ** I Exponentielle d'un endomorphisme anti-symétrique de $\mathbb{R}^3$

1. (a) Soit $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Pour $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, on pose $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}$. Vérifier que $f_{\overrightarrow{\omega}} \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$.
   (b) Réciproquement, soit $f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{\omega}$ unique tel que $f = f_{\overrightarrow{\omega}}$.
2. Soit $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ est une rotation dont on déterminera l'axe (quand celui-ci est défini) et l'angle.

Correction ▼ [005871]

Exercice 9 **

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, calculer $\lim_{p\to+\infty} \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p$.

Correction ▼ [005872]

Exercice 10 **

Montrer que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A.

Correction ▼ [005873]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire $A_n = \sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} & -\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \\ \frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \end{pmatrix}$. Les sommes des carrés des deux nombres $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ et $\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ est égale à 1. Donc il existe un réel $\theta_n \in]-\pi,\pi]$ tel que $\cos(\theta_n) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ et $\sin(\theta_n) = \frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$. De plus, $\cos(\theta_n) > 0$ et $\sin(\theta_n) > 0$ et donc on peut prendre

$$\theta_n = \text{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$A_n^n = \left(\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\right)^n \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, $\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1+o(1)$.
D'autre part, $n\theta_n = n\,\text{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n \times \frac{a}{n} = a$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} A_n^n = 1.\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall a > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.
(3) $\Rightarrow$ (2). On sait que si la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge, alors $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$.
(2) $\Rightarrow$ (1). Supposons $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Pour tout entier naturel n, $A^nX = \lambda^n X$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$, on a encore $\lim_{n\to+\infty} A^nX = 0$ puis $\lim_{n\to+\infty} \lambda^n X = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$.
Ainsi, si $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$ alors $\text{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$.
(1) $\Rightarrow$ (3). Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\text{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$. On sait (voir exercice **??** : décomposition de DUNFORD) qu'il existe deux matrices D et N telles que
1) $A = D+N$
2) D diagonalisable
3) N nilpotente
4) $DN = ND$.
De plus, les valeurs propres de D sont les valeurs propres de A.
On note k l'indice de nilpotence de N. Puisque les matrices D et N convergent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire pour $n \geqslant k$

$$A^n = (D+N)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^{n-j}N^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} D^{n-j}N^j.$$

Il existe une matrice $P \in \mathscr{GL}_p(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ tel que $D = P\Delta P^{-1}$. Mais alors, $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $\forall n \geqslant j$, $\binom{n}{j} D^{n-j}N^j = P \times \binom{n}{j}\Delta^{n-j} \times PN^j$.

Soit $j \in [\![0,k]\!]$. Vérifions tout d'abord que la série de terme général $\binom{n}{j}\Delta^{n-j}$, $n \geqslant j$ converge. Posons $\Delta = \text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$. Alors $\forall n \geqslant j$, $\binom{n}{j}\Delta^{n-j} = \text{diag}\left(\binom{n}{j}\lambda_1^{n-j},\dots,\binom{n}{j}\lambda_p^{n-j}\right)$. Maintenant, si λ est une valeur propre de Δ (et donc de A), $\binom{n}{j}\lambda^{n-j} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!}\lambda^{n-j} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^j\lambda^{n-j} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $|\lambda| < 1$ et donc la série de terme général $\binom{n}{j}\lambda^{n-j}$, $n \geqslant j$, converge.

Ainsi, la série de terme général $\binom{n}{j}\Delta^{n-j}$ converge. D'autre part, l'application $M \mapsto P \times M \times PN^j$ est continue sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie. On en déduit que la série de terme général $P \times \binom{n}{j}\Delta^{n-j} \times PN^j$ converge.

Finalement, pour chaque $j \in [\![0,k]\!]$, la série de terme général $P \times \binom{n}{j}\Delta^{n-j} \times PN^j$ converge et donc la série de terme général A^n converge car est somme de $j+1$ séries convergentes.

Correction de l'exercice 3 ▲

$\chi_A = \begin{vmatrix} 4/3-X & -5/6 \\ 5/3 & -7/6-X \end{vmatrix} = X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{6} = \left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X+\frac{1}{3}\right)$. Par suite, $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\textstyle\sum_{k=0}^n A^k = P\left(\sum_{k=0}^n D^k\right)P^{-1} = P\,\text{diag}\left(\sum_{k=0}^n\left(\frac{1}{2}\right)^k, \sum_{k=0}^n\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)P^{-1}.$$

Puisque $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$ sont dans $]-1,1[$, les séries numériques de termes généraux respectifs $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ convergent. Il en est de même de la série de terme général D^k. Maintenant, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, converge est continue car linéaire sur un espace de dimension finie et on en déduit que la série de terme général A^k converge. De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} PD^nP^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} D^n\right)P^{-1} \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto PMP^{-1}\text{)} \\
&= P\,\text{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)P^{-1} = P\,\text{diag}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Remarque. D'après l'exercice suivant, la matrice obtenue est $(I-A)^{-1}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| < 1$. Pour tout entier naturel n, on a $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$. Puisque $\|A\| < 1$, la série numérique de terme général $\|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Il en est de même de la série de terme général $\|A^n\|$ et donc la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument. Puisque $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est complet en tant que $\mathbb{C}$ espace de dimension finie, on en déduit que la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge. De plus,

$$(I-A)\sum_{n=0}^{+\infty}A^n=(I-A)\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}A^k\right)=\lim_{n\to+\infty}\left((I-A)\sum_{k=0}^{n}A^k\right)\text{ (par continuité de l'application } M\mapsto(I-A)M)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}(I-A^{n+1})=I\ (\lim_{n\to+\infty}A^{n+1}=0\text{ car }\forall n\in\mathbb{N},\ \|A^{n+1}\|\leqslant\|A\|^{n+1}).$$

Ainsi, la matrice $I-A$ est inversible à droite et donc inversible et de plus, $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}A^n$. On en déduit encore

$$\|(I-A)^{-1}-(I+A)\|=\left\|\sum_{n=2}^{+\infty}A^n\right\|\leqslant\sum_{n=2}^{+\infty}\|A\|^n=\frac{\|A\|^2}{1-\|A\|}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que d'une part $\det(\exp(A))\neq 0$ et d'autre part $\exp(A)=\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right)$. Par continuité du déterminant, on a donc $\lim_{p\to+\infty}\det\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right)=\det(\exp(A))\neq 0$. Par suite, il existe $p_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall p\geqslant p_0$, $\det\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right)\neq 0$ et donc tel que $\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\in GL_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $\chi_A=\begin{vmatrix}3-X&2&2\\1&-X&1\\-1&1&-X\end{vmatrix}=(3-X)(X^2-1)-(-2X-2)-(2X+2)=-(X+1)(X-1)(X-3).$

   Soit $n\in\mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n=Q_n\times\chi_A+a_nX^2+b_nX+c_n$ où $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ et $(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3$. En évaluant les deux membres de cette égalité en -1, 1 et 3, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l}a_n-b_n+c_n=(-1)^n\\a_n+b_n+c_n=1\\9a_n+3b_n+c_n=3^n\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}b_n=\frac{1}{2}(1-(-1)^n)\\a_n+c_n=\frac{1}{2}(1+(-1)^n)\\8a_n+\frac{3}{2}(1-(-1)^n)+\frac{1}{2}(1+(-1)^n)=3^n\end{array}\right.\Rightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l}a_n=\frac{1}{8}(3^n-2+(-1)^n)\\b_n=\frac{1}{2}(1-(-1)^n)\\c_n=\frac{1}{8}(-3^n+6+3(-1)^n)\end{array}\right..$$

   Le théorème de Cayley-Hamilton fournit alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\frac{1}{8}((3^n-2+(-1)^n)A^2+4(1-(-1)^n)A+(-3^n+6+3(-1)^n)I_3).$$

   Maintenant,

$$A^2=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&2\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&8&8\\2&3&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$$

   et donc, pour tout réel t,

$$\exp(tA)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}A^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}.\frac{1}{8}((3^n-2+(-1)^n)A^2+4(1-(-1)^n)A+(-3^n+6+3(-1)^n)I_3)$$
$$=\frac{e^{3t}-2e^t+e^{-t}}{8}\begin{pmatrix}9&8&8\\2&3&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}+\frac{4(e^t-e^{-t})}{8}\begin{pmatrix}3&2&2\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}+\frac{-e^{3t}+6e^t+3e^{-t}}{8}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8e^{3t}&8e^{3t}-8e^t&8e^{3t}-8e^t\\2e^{3t}-2e^{-t}&2e^{3t}+6e^{-t}&2e^{3t}-2e^{-t}\\-2e^{3t}+2e^{-t}&-2e^{3t}+8e^t-6e^{-t}&2e^{3t}+8e^t+2e^{-t}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4e^{3t}&4e^{3t}-4e^t&4e^{3t}-4e^t\\e^{3t}-e^{-t}&e^{3t}+3e^{-t}&e^{3t}-e^{-t}\\-e^{3t}+e^{-t}&-e^{3t}+4e^t-3e^{-t}&e^{3t}+4e^t+e^{-t}\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(tA)=\frac{1}{4}\left(\begin{array}{ccc}4e^{3t}&4e^{3t}-4e^{t}&4e^{3t}-4e^{t}\\e^{3t}-e^{-t}&e^{3t}+3e^{-t}&e^{3t}-e^{-t}\\-e^{3t}+e^{-t}&-e^{3t}+4e^{t}-3e^{-t}&e^{3t}+4e^{t}+e^{-t}\end{array}\right).}$$

2. $\chi_A=\left|\begin{array}{ccc}4-X&1&1\\6&4-X&2\\-10&-4&-2-X\end{array}\right|=(4-X)(X^2-2X)-6(-X+2)-10(X-2)=(X-2)[-X(X-4)+6-10]=-(X-2)(X^2-4X+4)=-(X-2)^3$. On est dans la situation où A a une unique valeur propre. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $(A-2I_3)^3=0$ et donc pour tout réel t,

$$\begin{aligned}\exp(tA)&=\exp(t(A-2I_3)+2tI_3)=\exp(t(A-2I_3))\times\exp(2tI_3)\ (\text{car les matrices } t(A-2I_3) \text{ et } 2tI_3 \text{ commutent})\\&=\left(I_3+t(A-2I_3)+\frac{t^2}{2}(A-2I_3)^2\right)\times e^{2t}I_3\\&=e^{2t}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)+te^{2t}\left(\begin{array}{ccc}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{array}\right)+\frac{t^2e^{2t}}{2}\left(\begin{array}{ccc}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{array}\right)\\&=e^{2t}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)+te^{2t}\left(\begin{array}{ccc}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{array}\right)+\frac{t^2e^{2t}}{2}\left(\begin{array}{ccc}0&0&0\\4&2&2\\-4&-2&-2\end{array}\right)\\&=\left(\begin{array}{ccc}(2t+1)e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\(2t^2+6t)e^{2t}&(t^2+2t+1)e^{2t}&(t^2+2t)e^{2t}\\(-2t^2-10t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}\end{array}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(tA)=\left(\begin{array}{ccc}(2t+1)e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\(2t^2+6t)e^{2t}&(t^2+2t+1)e^{2t}&(t^2+2t)e^{2t}\\(-2t^2-10t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}\end{array}\right).}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

$\chi_A=\left|\begin{array}{ccc}-X&1/2&-2\\1/2&-X&0\\0&0&-1/2-X\end{array}\right|=-X\left(X^2+\frac{1}{2}X\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}\right)=-X^2\left(X+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(X+\frac{1}{2}\right)=-\left(X+\frac{1}{2}\right)^2\left(X-\frac{1}{2}\right)$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n=Q_n\chi_A+a_nX^2+b_nX+c_n$ où $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ et $(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3$.

On évalue les deux membres de cette égalité en $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ et on obtient $\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}+c_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}+c_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Puis en dérivant les deux membres de l'égalité et en évaluant en $-\frac{1}{2}$, on obtient $-a_n+b_n=n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Maintenant,

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}+c_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\\\frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}+c_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\-a_n+b_n=-2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\\frac{a_n}{2}+2c_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\-a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+(2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\c_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right.$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $A^n=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+(2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)A^2+\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)A+\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I_3$ avec $A^2=\left(\begin{array}{ccc}0&1/2&-2\\1/2&0&0\\0&0&-1/2\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}0&1/2&-2\\1/2&0&0\\0&0&-1/2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}1/4&0&1\\0&1/4&-1\\0&0&1/4\end{array}\right)$. On en déduit que pour $|t|<2$,

$$\begin{aligned}\ln(I_3+tA) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}A^n\\ &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+(2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)A^2+\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)A\\ &+\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I_3.\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\ln(I_3+tA) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n}-2\sum_{n=1}^{+\infty}(t/2)^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)A^2\\ &+\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)A\\ &+\frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n}+2\sum_{n=1}^{+\infty}(t/2)^n+3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)I_3\\ &= \left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)-2\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}}-1\right)-\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)A^2+\left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)A\\ &+\frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)+2\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}}-1\right)+3\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)I_3\\ &= \left(\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)-\frac{2t}{2-t}\right)\begin{pmatrix}1/4&0&1\\0&1/4&-1\\0&0&1/4\end{pmatrix}+\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)\begin{pmatrix}0&1/2&-2\\1/2&0&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}\\ &+\frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)+\frac{2t}{2-t}+3\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right)&\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)&-\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)-\frac{2t}{2-t}\\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)&\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right)&-\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)+\frac{2t}{2-t}\\ 0&0&\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in]-2,2[,\ \ln(I_3+tA)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right)&\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)&-\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)-\frac{2t}{2-t}\\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)&\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right)&-\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)+\frac{2t}{2-t}\\ 0&0&\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. (a) Soit $\overrightarrow{\omega}\in\mathbb{R}^3$. $f_{\overrightarrow{\omega}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ par bilinéarité du produit vectoriel. De plus, pour $(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in(\mathbb{R}^3)^2$,

$$f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{x}).\overrightarrow{y}=(\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{x}).\overrightarrow{y}=[\overrightarrow{\omega},\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}]=-[\overrightarrow{\omega},\overrightarrow{y},\overrightarrow{x}]=-(\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{y}).\overrightarrow{x}=-\overrightarrow{x}.f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{y}).$$

Donc,

$$\boxed{\forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^3,\ f_{\overrightarrow{\omega}}\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^3).}$$

(b) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathscr{A}(\mathbb{R}^3) \\ \overrightarrow{\omega} & \mapsto & f_{\overrightarrow{\omega}} \end{array}$.

• Vérifions que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathscr{A}(\mathbb{R}^3))$. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\overrightarrow{\omega}_1, \overrightarrow{\omega}_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\left(\varphi(\lambda_1 \overrightarrow{\omega}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\omega}_2)\right)(\overrightarrow{x}) &= f_{\lambda_1 \overrightarrow{\omega}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\omega}_2}(\overrightarrow{x}) = \left(\lambda_1 \overrightarrow{\omega}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\omega}_2\right) \wedge = \lambda_1 \left(\overrightarrow{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{x}\right) + \lambda_2 \left(\overrightarrow{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{x}\right) \\ &= \lambda_1 f_{\overrightarrow{\omega}_1}(\overrightarrow{x}) + \lambda_2 f_{\overrightarrow{\omega}_2}(\overrightarrow{x}) = \left((\lambda_1 \varphi(\overrightarrow{\omega}_1) + \lambda_2 \varphi(\overrightarrow{\omega}_2)\right)(\overrightarrow{x})\end{aligned}$$

et donc $\varphi(\lambda_1 \overrightarrow{\omega}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\omega}_2) = \lambda_1 \varphi(\overrightarrow{\omega}_1) + \lambda_2 \varphi(\overrightarrow{\omega}_2)$. On a montré que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathscr{A}(\mathbb{R}^3))$.

• Vérifions que φ est injective. Soit $\omega \in \mathbb{R}^3$.

$$\overrightarrow{\omega} \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Rightarrow f_{\overrightarrow{\omega}} = 0 \Rightarrow \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

On applique alors ce dernier résultat à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On obtient $\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. On a montré que φ est injective.

• Enfin, $\dim(\mathscr{A}_3(\mathbb{R})) = \frac{3\times(3-1)}{2} = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) < +\infty$. On en déduit que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$. En particulier,

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3),\ \exists \overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3 /\ f = f_{\overrightarrow{\omega}}.}$$

2. Soit $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Si $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$, alors $f_{\overrightarrow{\omega}} = 0$ et donc $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}}) = Id_{\mathbb{R}^3}$.
On suppose dorénavant $\overrightarrow{\omega} \neq \overrightarrow{0}$. On pose $\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{\|\overrightarrow{\omega}\|}\overrightarrow{\omega}$ puis on complète la famille orthonormale $(\overrightarrow{e_3})$ en une base orthonormale directe $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ (en particulier $\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}$).
• Puisque $\overrightarrow{e_3}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\omega}$, $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{0}$. On en déduit que

$$\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})(\overrightarrow{e_3}) = Id(\overrightarrow{e_3}) + f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_3}) + \frac{1}{2} f_{\overrightarrow{\omega}}^2(\overrightarrow{e_3}) + \frac{1}{6} f_{\overrightarrow{\omega}}^3(\overrightarrow{e_3}) + \ldots = \overrightarrow{e_3}.$$

• D'autre part, $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{e_1} = \|\overrightarrow{\omega}\|\, \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = \|\overrightarrow{\omega}\|\, \overrightarrow{e_2}$ et de même $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_2}) = -\|\overrightarrow{\omega}\|\, \overrightarrow{e_1}$.
On en déduit que $f_{\overrightarrow{\omega}}^2(\overrightarrow{e_1}) = -\|\overrightarrow{\omega}\|^2 \overrightarrow{e_1}$ et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_{\overrightarrow{\omega}}^{2n}(\overrightarrow{e_1}) = (-1)^n \|\overrightarrow{\omega}\|^{2n} \overrightarrow{e_1} \quad \text{puis} \quad f_{\overrightarrow{\omega}}^{2n+1}(\overrightarrow{e_1}) = (-1)^n \|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1} \overrightarrow{e_2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})(\overrightarrow{e_1}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f_{\overrightarrow{\omega}}^n(\overrightarrow{e_1}) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}}{(2n)!}\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\overrightarrow{e_2} \text{ (somme de deux séries convergentes)} \\ &= \cos(\|\overrightarrow{\omega}\|)\,\overrightarrow{e_1} + \sin(\|\overrightarrow{\omega}\|)\,\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

De même,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_{\overrightarrow{\omega}}^{2n}(\overrightarrow{e_2}) = (-1)^n \|\overrightarrow{\omega}\|^{2n} \overrightarrow{e_2} \quad \text{puis} \quad f_{\overrightarrow{\omega}}^{2n+1}(\overrightarrow{e_2}) = -(-1)^n \|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1} \overrightarrow{e_1}.$$

et donc

$$\begin{aligned}\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})(\overrightarrow{e_2}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f_{\overrightarrow{\omega}}^n(\overrightarrow{e_2}) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}}{(2n)!}\right)\overrightarrow{e_2} - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\overrightarrow{e_1} \\ &= -\sin(\|\overrightarrow{\omega}\|)\,\overrightarrow{e_1} + \cos(\|\overrightarrow{\omega}\|)\,\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est $\begin{pmatrix} \cos(\|\overrightarrow{\omega}\|) & -\sin(\|\overrightarrow{\omega}\|) & 0 \\ \sin(\|\overrightarrow{\omega}\|) & \cos(\|\overrightarrow{\omega}\|) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ est la rotation d'angle $\|\overrightarrow{\omega}\|$ autour de $\overrightarrow{\omega}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\| \ \|$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\left\|\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} - \left(I + \frac{A}{p}\right)^p\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{p} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k}\right) A^k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \left|\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k}\right| \|A\|^k.$$

Maintenant, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{\overbrace{p \times (p-1) \times \ldots \times (p-k+1)}^{k}}{\underbrace{p \times p \times \ldots \times p}_{k}}\right) \geqslant 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{p} \left|\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k}\right| \|A\|^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{\|A\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|A\|^p}{p}\right)^p \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} e^{\|A\|} - e^{\|A\|} = 0.$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} - \left(I + \frac{A}{p}\right)^p$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ et puisque $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}$ tend vers $\exp(A)$ quand p tend vers $+\infty$, il en est de même de $\left(I + \frac{A}{p}\right)^p$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A) = \lim_{p \to +\infty} \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p.}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque χ_A est de degré n, la division euclidienne de X^k par χ_A s'écrit

$$X^k = Q_k \times \chi_A + a_{n-1}^{(k)} X^{n-1} + \ldots + a_1^{(k)} X + a_0^{(k)} \text{ où } Q_k \in \mathbb{R}[\mathbb{C}] \text{ et } (a_0^{(k)}, \ldots, a_{n-1}^{(k)}) \in \mathbb{C}^n.$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre alors que $A^k = a_{n-1}^{(k)} A^{n-1} + \ldots + a_1^{(k)} A + a_0^{(k)} I_n$.
Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \text{Vect}(A^{n-1}, \ldots, A, I_n)$ puis $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in \text{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$. Enfin, puisque $\text{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, $\exp(A) = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in \text{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$.
On a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A) \in \mathbb{C}_{n-1}[A].}$$