



Continuité (étude globale). Diverses fonctions

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **I

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . Pour x réel, on pose $f(x) = d(x, A) = \inf\{|y - x|, y \in A\}$. Montrer que f est Lipschitzienne.

[Correction ▼](#)

[005392]

Exercice 2 **I

Soit f continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que f a un point fixe.

[Correction ▼](#)

[005393]

Exercice 3 **I

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\frac{f(x)}{x}$ a une limite réelle $\ell \in [0, 1[$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f a un point fixe.

[Correction ▼](#)

[005394]

Exercice 4 ***

Soit f croissante de $[a, b]$ dans lui-même. Montrer que f a un point fixe.

[Correction ▼](#)

[005395]

Exercice 5 *****

Soit f croissante sur $[a, b]$ telle que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

[Correction ▼](#)

[005396]

Exercice 6 ***

Soit f continue sur \mathbb{R}^+ telle que, pour tout réel positif x , on ait $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante sur \mathbb{R}^+ . Trouver un exemple où f n'est pas constante.

[Correction ▼](#)

[005397]

Exercice 7 ***IT

Soit f continue sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans \mathbb{R} admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R}^+ .

[Correction ▼](#)

[005398]

Exercice 8 ***I

Trouver tous les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$.

[Correction ▼](#)

[005399]

Exercice 9 ***

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que $\bigcup_{k \geq 1}]ka, kb[$ contient un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ puis déterminer la plus petite valeur possible de A .

[Correction ▼](#)

[005400]

Exercice 10 ***

Soit f périodique et continue sur \mathbb{R} . Montrer que f est bornée et uniformément continue sur \mathbb{R} .

[Correction ▼](#)

[005401]

Exercice 11 * Théorème d'homéomorphie**

Soit f une application continue sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Montrer que f est injective si et seulement si f est strictement monotone et que dans ce cas $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, semi-ouvert, fermé).

[Correction ▼](#)

[005402]

Exercice 12 ***

Trouver un exemple de fonction périodique dont le groupe des périodes est dense dans \mathbb{R} mais pas \mathbb{R} .

[Correction ▼](#)

[005403]

Exercice 13 **

Soit f de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $\forall (x, y) \in ([0, 1])^2, |f(y) - f(x)| \geq |x - y|$. Montrer que $f = Id$ ou $f = 1 - Id$.

[Correction ▼](#)

[005404]

Exercice 14 ***

Trouver les fonctions bijectives de $[0, 1]$ sur lui-même vérifiant $\forall x \in [0, 1], f(2x - f(x)) = x$.

[Correction ▼](#)

[005405]

Exercice 15 *I**

Soit f une application de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , continue sur $[0, 1]$ et vérifiant $f(0) = f(1)$.

1. Soit n un entier naturel non nul et soit $a = \frac{1}{n}$. Montrer que l'équation $f(x + a) = f(x)$ admet au moins une solution.
2. Montrer (en fournissant une fonction précise) que, si a est un réel de $]0, 1[$ qui n'est pas de la forme précédente, il est possible que l'équation $f(x + a) = f(x)$ n'ait pas de solution.
3. Application. Un cycliste parcourt 20 km en une heure.
 - (a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
 - (b) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.
 - (c) Montrer qu'il n'existe pas nécessairement un intervalle de temps de durée 45 min pendant lequel il a parcouru 15 km.

[Correction ▼](#)

[005406]

Correction de l'exercice 1 ▲

Voir la correction de l'exercice ??.

Correction de l'exercice 2 ▲

Pour $x \in [a, b]$, posons $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[a, b]$ puisque f l'est. De plus, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins une fois sur $[a, b]$ ou encore, l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Puisque $\frac{f(x)}{x}$ tend vers $\ell \in [0, 1[$, il existe $A > 0$ tel que pour $x \geq A$, $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{\ell+1}{2} < 1$. Mais alors, $f(A) < A$ (et $f(0) \geq 0$) ce qui ramène à la situation de l'exercice 2 : pour $x \in [0, A]$, soit $g(x) = f(x) - x$...

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $E = \{x \in [a, b] / f(x) \geq x\}$. E est une partie non vide de \mathbb{R} (car a est dans E) et majorée (par b). Donc, E admet une borne supérieure c vérifiant $a \leq c \leq b$.

Montrons que $f(c) = c$.

Si $c = b$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E / b - \frac{1}{n} < x_n \leq b$. Puisque f est à valeurs dans $[a, b]$ et que les x_n sont dans E , pour tout entier naturel non nul n , on a

$$x_n \leq f(x_n) \leq b (*).$$

Quand n tend vers $+\infty$, la suite (x_n) tend vers b (théorème des gendarmes) et donc, f étant croissante sur $[a, b]$, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(b^-) \leq f(b)$. Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient alors $b \leq f(b^-) \leq f(b) \leq b$ et donc $f(b) = b$. Finalement, dans ce cas, b est un point fixe de f .

Si $c \in [a, b[$, par définition de c , pour x dans $]c, b]$, $f(x) < x$ (car x n'est pas dans E) et par passage à la limite quand x tend vers c par valeurs supérieures et d'après les propriétés usuelles des fonctions croissantes, on obtient : $f(c) (\leq f(c+)) \leq c$.

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E / c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$. x_n étant dans E , on a $f(x_n) \geq x_n$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient : $f(c) \geq f(c^-) \geq c$. Finalement, $f(c) = c$ et dans tous les cas, f admet au moins un point fixe.

Correction de l'exercice 5 ▲

Puisque f est croissante sur $[a, b]$, on sait que f admet en tout point x_0 de $]a, b[$ une limite à gauche et une limite à droite réelles vérifiant $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$ puis une limite à droite en a élément de $[f(a), +\infty[$ et une limite à gauche en b élément de $] -\infty, f(b)]$.

Si f est discontinue en un x_0 de $]a, b[$, alors on a $f(x_0^-) < f(x_0)$ ou $f(x_0) < f(x_0^+)$. Mais, si par exemple $f(x_0^-) < f(x_0)$ alors, $\forall x \in [a, x_0[$ ($\neq \emptyset$), $f(x) \leq f(x_0^-)$ et $\forall x \in [x_0, b]$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Donc $]f(x_0^-), f(x_0)[\cap f([a, b]) = \emptyset$ ce qui est exclu puisque d'autre part $]f(x_0^-), f(x_0)[\neq \emptyset$ et $]f(x_0^-), f(x_0)[\subset [f(a), f(b)]$ (la démarche est identique si $f(x_0^+) > f(x_0)$). Donc, f est continue sur $]a, b[$. Par une démarche analogue, f est aussi continue en a ou b et donc sur $[a, b]$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $x > 0$. Pour tout naturel n , $f(x) = f(\sqrt{x}) = f(x^{1/4}) = \dots = f(x^{1/2^n})$. Or, à x fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{1/2^n} = 1$ et, f étant continue en 1, on a :

$$\forall x > 0, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x^{1/2^n}) = f(1).$$

f est donc constante sur $]0, +\infty[$, puis sur $[0, +\infty[$ par continuité de f en 0.

Pour $x \geq 0$, posons $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(x) = 1$ si $x = 1$. Pour $x \geq 0$, on a $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. f vérifie donc : $\forall x \geq 0, f(x^2) = f(x)$, mais f n'est pas constante sur \mathbb{R}^+ .

Correction de l'exercice 7 ▲

Posons $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists A > 0 / \forall x \in \mathbb{R}^+, (x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3})$.

Soit $(x, y) \in [A, +\infty]^2$. Alors, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0, A]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de HEINE. Donc, $\exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in [0, A]^2, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$.

Résumons. $\alpha > 0$ étant ainsi fourni, soient x et y deux réels de $[0, +\infty[$ vérifiant $|x - y| < \alpha$.

Si $(x, y) \in [0, A]^2$, on a $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Si $(x, y) \in [A, +\infty]^2$, on a $|f(x) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Si enfin on a $x \leq A \leq y$, alors, puisque $|A - x| \leq |x - y| < \alpha$, on a $|f(x) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et puisque A et y sont dans $[A, +\infty[$, on a $|f(y) - f(A)| < \frac{2\varepsilon}{3}$. Mais alors,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(y) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in [0, +\infty]^2, (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$. f est donc uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit f un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$, c'est-à-dire que f est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On sait déjà $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ et donc $f(0) = 0$. Puis, pour x réel donné, $f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(0) = 0$ et donc, pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$ (f est donc impaire). On a aussi $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = f(x) + \dots + f(x) = nf(x)$. De ce qui précède, on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x).$$

Soit $a = f(1)$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = f(n.1) = nf(1) = an$.

Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $nf(\frac{1}{n}) = f(n\frac{1}{n}) = f(1) = a$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\frac{1}{n}) = a\frac{1}{n}$.

Puis, pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{p}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = pa\frac{1}{q} = a\frac{p}{q}$.

Finalement,

$$\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar.$$

Maintenant, si l'on n'a pas l'hypothèse de continuité, on ne peut aller plus loin. Supposons de plus que f soit continue sur \mathbb{R} .

Soit x un réel. Puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels, convergente de limite x . f étant continue en x , on a :

$$f(x) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ar_n = ax.$$

Donc, si f est un morphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$, f est une application linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Réciproquement, les applications linéaires conviennent.

Correction de l'exercice 9 ▲

Soient a et b deux réels fixés tels que $0 < a < b$. Trouvons les entiers naturels non nuls k tels que $]ka, kb[\cap](k+1)a, (k+1)b[\neq \emptyset$. Pour k dans \mathbb{N}^* , posons $I_k =]ka, kb[$.

$$I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset \Leftrightarrow ka < (k+1)a < kb < (k+1)b \Leftrightarrow k > \frac{a}{b-a} \Leftrightarrow k \geq E(\frac{a}{b-a}) + 1.$$

Posons $k_0 = E(\frac{a}{b-a}) + 1$. Pour $k \geq k_0$, on a donc $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$ et donc $\bigcup_{k \geq k_0}]ka, kb[=]k_0a, +\infty[$.

Maintenant, si $k_0 = 1$, $\bigcup_{k \geq k_0}]ka, kb[=]a, +\infty[$ et si $k_0 > 1$, $\bigcup_{k \geq k_0}]ka, kb[= (\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka, kb[) \cup]k_0a, +\infty[$. Mais, si x est dans $\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka, kb[$, alors $x < (k_0 - 1)b < k_0a$ et donc, $(\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka, kb[) \cap]k_0a, +\infty[= \emptyset$. La plus petite valeur de A est donc $(E(\frac{a}{b-a}) + 1)a$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit T une période strictement positive de f . f est continue sur le segment $[0, T]$ et donc est bornée sur ce segment. f est par suite bornée sur \mathbb{R} par T -périodicité.

Soit $\varepsilon > 0$.

f est continue sur le segment $[0, T]$ et donc, d'après le théorème de HEINE, f est uniformément continue sur ce segment. Donc,

$$\exists \alpha \in]0, T[\forall (x, y) \in [0, T], (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Soient x et y deux réels tels que $|x - y| < \alpha$. Si il existe un entier naturel k tel que $(x, y) \in [kT, (k+1)T]$, alors $x - kT \in [0, T]$, $y - kT \in [0, T]$, puis $|(x - kT) - (y - kT)| = |y - x| < \alpha$ et donc $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Sinon, en supposant par exemple que $x \leq y$, puisque l'on a choisi $\alpha < T$,

$$\exists k \in \mathbb{Z} / (k-1)T \leq x \leq kT \leq y \leq (k+1)T.$$

Mais alors, $|x - kT| = |y - x| < \alpha$ et $|y - kT| \leq |y - x| < \alpha$. Par suite,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(kT)| + |f(y) - f(kT)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dans tous les cas, si $|x - y| < \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

f est donc uniformément continue sur \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 11 ▲

Si f est strictement monotone sur I , on sait que f est injective.

Réciproquement, supposons f injective et continue sur I et montrons que f est strictement monotone.

Supposons par l'absurde que f n'est pas strictement monotone. On peut alors trouver trois réels a, b et c dans l'intervalle I tels que

$$a < b < c \text{ et } ((f(b) \geq f(a) \text{ et } f(b) \geq f(c)) \text{ ou } (f(b) \leq f(a) \text{ et } f(b) \leq f(c))).$$

Quitte à remplacer f par $-f$, on supposera que $a < b < c$ et $f(b) \geq f(a)$ et $f(b) \geq f(c)$.

Puisque f est injective, on a même $a < b < c$ et $f(b) > f(a)$ et $f(b) > f(c)$. Soit $M = \max\{f(a), f(c)\}$. On a $M < f(b)$. M est élément de $[f(a), f(b)]$ et, puisque f est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = M$. De plus, on ne peut avoir $\alpha = b$ car $f(\alpha) = M \neq f(b)$ (et f injective). Donc,

$$\exists \alpha \in [a, b[/ f(\alpha) = M.$$

De même, puisque M est élément de $[f(c), f(b)]$, $\exists \beta \in]b, c] / f(\beta) = M$. Ainsi, on a trouvé dans I deux réels α et β vérifiant $\alpha \neq \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta)$ ce qui contredit l'injectivité de f .

Donc, f est strictement monotone sur I .

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit f la fonction caractéristique de Q . Le groupe des périodes de f est \mathbb{Q} . En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}, x+r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q},$$

et donc

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}, f(x+r) = f(x)$. Mais on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), x+r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Q},$$

et donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), f(x+r) \neq f(x)$.

Correction de l'exercice 13 ▲

On a $0 \leq f(0) \leq 1$ et $0 \leq f(1) \leq 1$. Donc $|f(1) - f(0)| \leq 1$. Mais, par hypothèse, $|f(1) - f(0)| \geq 1$. Par suite, $|f(1) - f(0)| = 1$ et nécessairement, $(f(0), f(1)) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$.

Supposons que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et montrons que $\forall x \in [0, 1], f(x) = x$.

Soit $x \in [0, 1]$. On a $|f(x) - f(0)| \geq |x - 0|$ ce qui fournit $f(x) \geq x$. On a aussi $|f(x) - f(1)| = |x - 1|$ ce qui fournit $1 - f(x) \geq 1 - x$ et donc $f(x) \leq x$. Finalement, $\forall x \in [0, 1], f(x) = x$ et $f = Id$.

Si $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, posons pour $x \in [0, 1], g(x) = 1 - f(x)$. Alors, $g(0) = 0, g(1) = 1$ puis, pour $x \in [0, 1], g(x) \in [0, 1]$. Enfin,

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |g(y) - g(x)| = |f(y) - f(x)| \geq |y - x|.$$

D'après l'étude du premier cas, $g = Id$ et donc $f = 1 - Id$. Réciproquement, Id et $1 - Id$ sont bien solutions du problème.

Correction de l'exercice 14 ▲

Id est solution.

Réciproquement, soit f une bijection de $[0, 1]$ sur lui-même vérifiant $\forall x \in [0, 1], f(2x - f(x)) = x$. Nécessairement, $\forall x \in [0, 1], 0 \leq 2x - f(x) \leq 1$ et donc $\forall x \in [0, 1], 2x - 1 \leq f(x) \leq 2x$.

Soit f^{-1} la réciproque de f .

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], f(2x - f(x)) = x &\Leftrightarrow \forall x \in [0, 1], 2x - f(x) = f^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in [0, 1], f(f(y)) - 2f(y) + y = 0 \text{ (car } \forall x \in [0, 1], \exists ! y \in [0, 1] / x = f(y)) \end{aligned}$$

Soit $y \in [0, 1]$ et $u_0 = y$. En posant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, on définit une suite de réels de $[0, 1]$ (car $[0, 1]$ est stable par f). La condition $\forall y \in [0, 1], f(f(y)) - 2f(y) + y = 0$ fournit $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$, ou encore $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$. La suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante ou encore u est arithmétique. Mais, u est également bornée et donc u est constante.

En particulier, $u_1 = u_0$ ce qui fournit $f(y) = y$. On a montré que $\forall y \in [0, 1], f(y) = y$ et donc $f = Id$.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Soit n un entier naturel non nul donné. Pour x élément de $[0, 1 - \frac{1}{n}]$, posons $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$. g est définie et continue sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$. De plus,

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})) = f(1) - f(0) = 0.$$

Maintenant, s'il existe un entier k élément de $\{0, \dots, n-1\}$ tel que $g(\frac{k}{n}) = 0$, on a trouvé un réel x de $[0, 1]$ tel que $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ (à savoir $x = \frac{k}{n}$).

Sinon, tous les $g(\frac{k}{n})$ sont non nuls et, étant de somme nulle, il existe deux valeurs de la variable en lesquels g prend des valeurs de signes contraires. Puisque g est continue sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que g s'annule au moins une fois dans cet intervalle ce qui fournit de nouveau une solution à l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

2. Soit $a \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{a} \notin \mathbb{N}^*$. Soit, pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = |\sin \frac{\pi x}{a}| - x |\sin \frac{\pi}{a}|$. f est continue sur $[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ mais,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x) = (|\sin \frac{\pi(x+a)}{a}| - |\sin \frac{\pi x}{a}|) - ((x+a) - x) |\sin \frac{\pi}{a}| = -a |\sin \frac{\pi}{a}| \neq 0.$$

3. (a) et b)) Soit $g(t)$ la distance, exprimée en kilomètres, parcourue par le cycliste à l'instant t exprimé en heures, $0 \leq t \leq 1$, puis, pour $t \in [0, 1]$, $f(t) = g(t) - 20t$. f est continue sur $[0, 1]$ (si le cycliste reste un tant soit peu cohérent) et vérifie $f(0) = f(1) = 0$.

D'après 1), $\exists t_1 \in [0, \frac{1}{2}]$, $\exists t_2 \in [0, \frac{19}{20}]$ tels que $f(t_1 + \frac{1}{2}) = f(t_1)$ et $f(t_2 + \frac{1}{20}) = f(t_2)$ ce qui s'écrit encore $g(t_1 + \frac{1}{2}) - g(t_1) = 10$ et $g(t_2 + \frac{1}{20}) - g(t_2) = 1$.

c) Posons pour $0 \leq t \leq 1$, $f(t) = |\sin \frac{4\pi t}{3}| - \frac{t\sqrt{3}}{2}$ et donc, $g(t) = |\sin \frac{4\pi t}{3}| + (20 - \frac{\sqrt{3}}{2})t$. $\forall t \in [0, \frac{1}{4}]$, $f(t + \frac{3}{4}) - f(t) \neq 0$ ou encore $g(t + \frac{3}{4}) - g(t) \neq 15$.
