



Etude de fonctions

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1

Etude complète des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \frac{1+x^2}{x^3} (\operatorname{Arctan} x - \frac{x}{1+x^2})$.
2. $f_2(x) = |\tan x| + \cos x$.
3. $f_3(x) = x - \ln \left| \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3} \right|$.
4. $f_4(x) = x e^{\frac{2x}{x^2-1}}$.
5. $f_5(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x-1}{x} \right)$.
6. $f_6(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.
7. $f_7(x) = e^{\ln x}$.
8. $f_8(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.
9. $f_9(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6))$.
10. $f_{10}(x) = E(x) + (x - E(x))^2$.
11. $f_{11}(x) = \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1}{2} - x} + \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1}{2} + x}$.
12. $f_{12}(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{x}$.
13. $f_{13}(x) = e^{1/x} \sqrt{x+4}$.
14. $f_{14}(x) = \operatorname{Arccos}(\frac{1}{\operatorname{ch} x})$.
15. $f_{15}(x) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) - \ln(\frac{1+x}{1-x})$ où $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.
16. $f_{16}(x) = \ln |\operatorname{sh} x - 1|$.
17. $f_{17}(x) = x^{(x^x)}$.
18. $f_{18}(x) = (\cos x + \sin x)^{1/x}$.
19. $f_{19}(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.
20. $f_{20}(x) = \operatorname{Arcsin}(2x - 1) + 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.
21. $f_{21}(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$.
22. $f_{22}(x) = 3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{x-1} - x \ln 3$.
23. $f_{23}(x) = \ln \left| \frac{1}{e^x - 1} \right|$.

Correction ▼

[005443]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. f_1 est définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* en vertu de théorèmes généraux. De plus, f_1 est paire. On étudiera f_1 sur $[0, +\infty[$ (se méfier alors pour la dérivabilité en 0).

Etude en 0 (à gauche et à droite).

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{x^3}(1+x^2)\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) - x(1-x^2+x^4+o(x^4))\right] \\ &= (1+x^2)\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} + o(x^5)\right) = (1+x^2)\left(\frac{2}{3} - \frac{4x^2}{5} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2x^2}{15} + o(x^2). \end{aligned}$$

Par suite, f_1 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_1(0) = \frac{2}{3}$. Puisque f_1 admet en 0 un développement limité d'ordre 1, le prolongement encore noté f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0) = 0$. C_1 admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à $(0x)$ d'équation $y = \frac{2}{3}$. Enfin, puisque $f(x) - \frac{2}{3}$ est, au voisinage de 0, du signe de $-\frac{2x^2}{15}$, la courbe est localement en dessous de sa tangente.

Etude en $+\infty$ (et $-\infty$). $f_1(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, et de même $f_1(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} 0$.

Dérivée, variations.

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\frac{3}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right)\left(\operatorname{Arctan} x - \frac{x}{1+x^2}\right) + \frac{1+x^2}{x^3}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right) \\ &= -\frac{3+x^2}{x^4}\left(\operatorname{Arctan} x - \frac{x}{1+x^2}\right) + \frac{1+x^2}{x^3} \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{3+x^2}{x^4}\left(-\operatorname{Arctan} x + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^4}{3+x^2} \frac{2}{x(1+x^2)}\right) \\ &= \frac{3+x^2}{x^4}\left(-\operatorname{Arctan} x + \frac{x(3+x^2)+2x^3}{(1+x^2)(3+x^2)}\right) = \frac{3+x^2}{x^4} g(x) \end{aligned}$$

où, pour tout réel x , $g(x) = -\operatorname{Arctan} x + \frac{3x}{3+x^2}$.

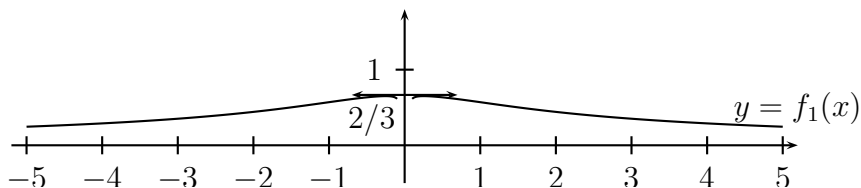
g est dérivable sur \mathbb{R} et pour x réel,

$$g'(x) = 3 \frac{(3+x^2) - 2x^2}{(3+x^2)^2} - \frac{1+x^2}{x^4} \frac{3(3-x^2)(1+x^2) - (3+x^2)^2}{(1+x^2)(3+x^2)^2} = \frac{-4x^4}{(3+x^2)^2(1+x^2)}.$$

g' est donc strictement négative sur $]0, +\infty[$ et par suite, g est donc strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Puisque $g(0) = 0$, pour $x > 0$, $g(x) < 0$. Finalement, f_1' est strictement négative sur $]0, +\infty[$ et f_1 est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Le tableau de variations de f_1 n'apporte rien de plus.

Graph



2. f_2 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, paire et 2π -périodique. f_2 est continue sur D en vertu de théorèmes généraux. On étudie f_2 sur $[0, \frac{\pi}{2}[\cup] \frac{\pi}{2}, \pi]$.

Etude en $\frac{\pi}{2}$.

$f(x) \underset{x \rightarrow \pi/2}{\sim} |\tan x|$ et donc, $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = +\infty$. C_2 admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour droite asymptote.

Dérivabilité et dérivée.

f_2 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $f_2'(x) = \varepsilon \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$ où ε est le signe de $\tan x$.

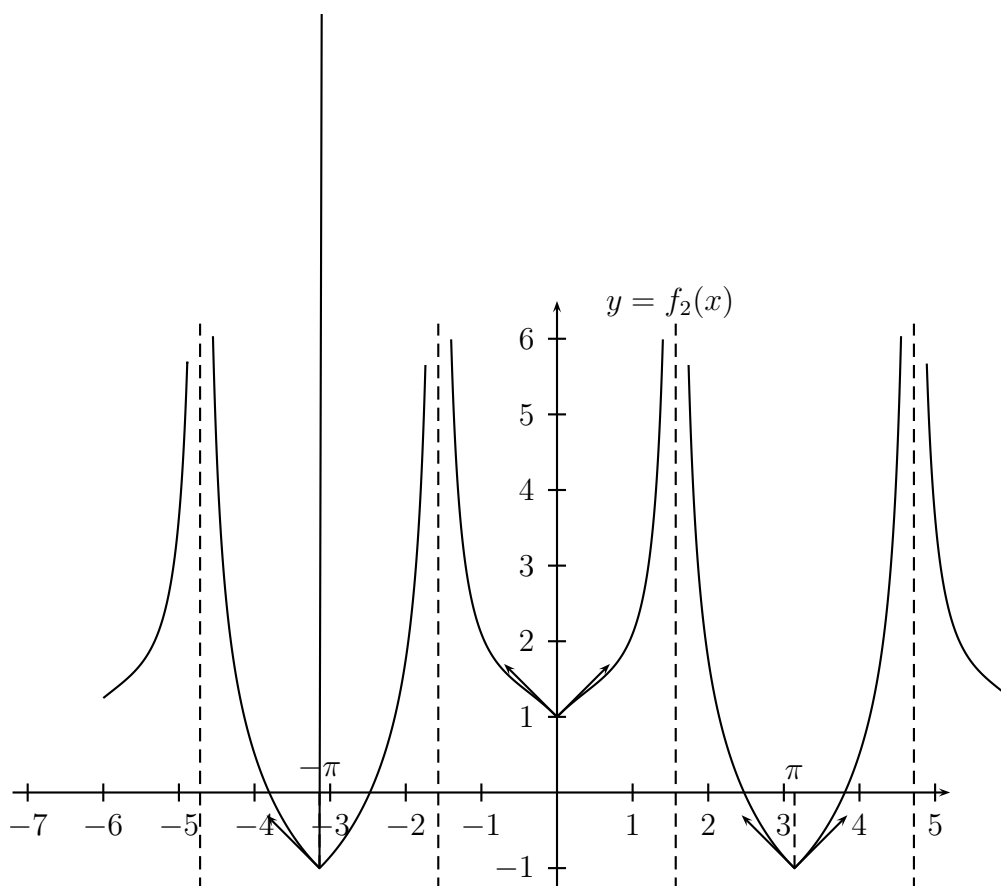
f_2 est aussi dérivable à droite en 0 et $(f_2)'_d(0) = 1$. Par symétrie, f_2 est dérivable à gauche en 0 et $(f_2)'_g(0) = -1$. f_2 n'est pas dérivable en 0.

De même, f_2 est dérivable à gauche et à droite en π avec $(f_2)'_g(\pi) = -1$ et $(f_2)'_d(\pi) = 1$, et n'est donc pas dérivable en π .

Variations.

f_2 est strictement décroissante sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$. Puis, pour x élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$, $f_2'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x > 1 - 1 = 0$. f_2 est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc f_2 est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Graphie.



3. Pour x réel, posons $P(x) = x^3 + 12x^2 + 60x + 120$. Pour tout réel x , on a $P'(x) = 3(x^2 + 8x + 20) = 3((x+4)^2 + 4) > 0$. P est une fonction polynôme de degré 3 strictement croissante sur \mathbb{R} et s'annule donc une et une seule fois en un certain réel noté α . De plus, $P(-5)P(-4) < 0$ et $\alpha \in]-5, -4[$.

Enfin, P est strictement négatif sur $] -\infty, \alpha[$ et strictement positif sur $] \alpha, +\infty[$.

f_3 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$, et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$,

$$f_3(x) = x - \ln \left| \frac{P(x)}{P(-x)} \right| = x - \ln |P(x)| + \ln |P(-x)|.$$

Notons que f_3 est impaire.

Dérivabilité et dérivée.

f_3 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$,

$$f_3'(x) = 1 - \frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{P'(-x)}{P(-x)} = \frac{P(x)P(-x) - P'(x)P(-x) - P'(-x)P(x)}{P(-x)P(x)}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
 P(x)P(-x) - P'(x)P(-x) - P'(-x)P(x) \\
 &= ((12x^2 + 120) + (x^3 + 60x))((12x^2 + 120) - (x^3 + 60x)) \\
 &\quad - 3((x^2 + 20) + 8x)((12x^2 + 120) - (x^3 + 60x)) - 3((x^2 + 20) - 8x)((12x^2 + 120) + (x^3 + 60x)) \\
 &= 144(x^2 + 10)^2 - x^2(x^2 + 60)^2 - 6((x^2 + 20)(12x^2 + 120) - (8x)(x^3 + 60x)) \\
 &= (-x^6 + 24x^4 - 720x^2 + 14400) - 6(4x^4 - 120x^2 + 2400) = -x^6,
 \end{aligned}$$

et donc $f'_3(x) = \frac{-x^6}{P(x)P(-x)}$.

Etude en $+\infty$.

$$f_3(x) - x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -\ln\left(1 + \frac{12}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \ln\left(1 - \frac{12}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{24}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit tout d'abord que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = -\infty$, puis que C_3 admet en $+\infty$ (resp. $-\infty$) la droite d'équation $y = x$ pour droite asymptote et que C_3 est au-dessous (resp. au-dessus) de cette droite au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

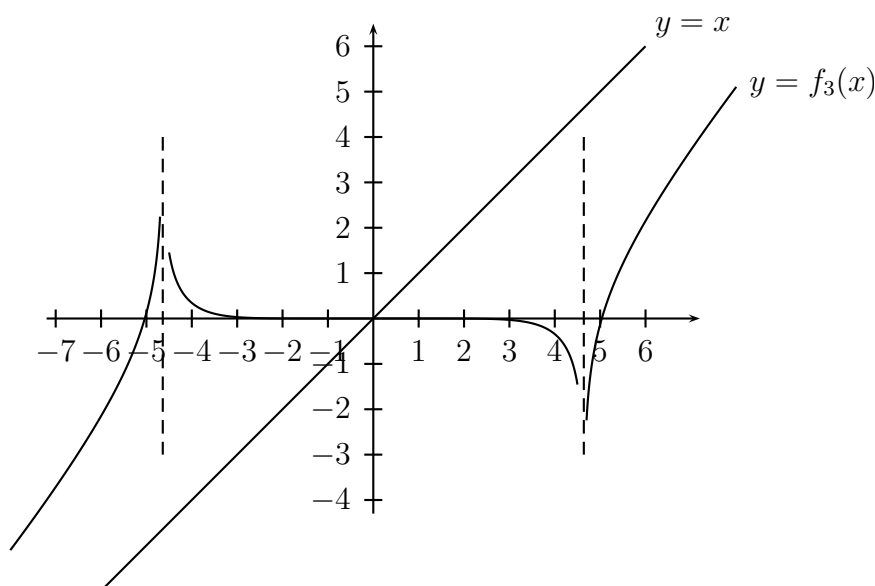
Variations.

D'une part, $f'_3(0) = 0$. D'autre part, pour $x > 0$, $P(x) > 0$. f'_3 est donc du signe de $-P(-x)$ sur $]0, +\infty[\setminus \{\alpha\}$. Ainsi, f'_3 est strictement négative sur $]0, \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$.

On en déduit le tableau de variations de f_3 .

x	0	α	$+\infty$
$f'_3(x)$	0	-	+
f_3	0	$-\infty$	$+\infty$

Graphie.



4. f_4 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. De plus, pour $x \neq 0$,

$$f_4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} e^{\frac{2/x}{1/x^2-1}} = \frac{1}{x} e^{-\frac{2x}{x^2-1}} = \frac{1}{f_4(x)}.$$

Ce genre de constatation peut servir à calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x)$ si l'on connaît $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f_4(x)$, obtenir les variations de f_4 sur $]0, 1[$ si on les connaît sur $]1, +\infty[$...

On peut aussi noter que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f_4(-x)f_4(x) = -x^2$ et donc, pour $x \neq 0$, $f_4(-x) = \frac{-x^2}{f_4(x)}$. Cette constatation pourra être utile pour déduire l'étude de f_4 en -1 de l'étude en 1 .

Etude en $+\infty$ et $-\infty$.

Puisque $\frac{2x}{x^2-1} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, on a $f_4(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x$ ce qui montre déjà que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x) = -\infty$ et que C_4 admet en $+\infty$ et $-\infty$, une direction asymptotique d'équation $y = x$. Plus précisément,

$$\frac{2x}{x^2-1} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \frac{2}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-1} = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

puis,

$$e^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} 1 + \left(\frac{2}{x}\right) + \left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On en déduit que

$$f_4(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x + 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par suite, C_4 admet la droite d'équation $y = x + 2$ pour droite asymptote en $+\infty$ et $-\infty$. De plus, le signe de $f_4(x) - (x + 2)$ étant localement le signe de $\frac{2}{x}$, C_4 est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et au-dessous au voisinage de $-\infty$.

Etude en 1 (et -1).

Clairement, $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f_4(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1, x > -1} f_4(x) = -\infty$. Ensuite, $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f_4(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -1, x < -1} f_4(x) = 0$.

On prolonge f_4 par continuité à gauche en 1 en posant $f_4(1) = 0$, et de même en -1 et on étudie la dérivabilité du prolongement encore noté f_4 .

f_4 est continue sur $] -1, 1]$, de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et pour $x \in] -1, 1[$ (voir dérivée-variations),

$$f_4'(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{(x^2 - 1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1, x < 1} 0.$$

D'après un théorème classique d'analyse, f_4 est de classe C^1 sur $] -1, 1]$ et en particulier dérivable à gauche en 1 et $f_4'(1) = 0$.

De même, f_4 est dérivable à gauche en -1 et $f_4'(-1) = 0$. C_4 admet en ces points des demi-tangentes parallèles à l'axe (Ox) .

Dérivée. Variations.

f_4 est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f_4'(x)}{f_4(x)} &= (\ln|f_4|)'(x) = (\ln|x| + \frac{2x}{x^2-1})'(x) = \frac{1}{x} + 2 \frac{(x^2-1) - x(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{(x^2-1)^2 - 2x(x^2+1)}{x(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x(x^2-1)^2}, \end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \neq 0, f_4'(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}},$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité de f_4' en 0.

f_4' est donc du signe de $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$. Or, pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 P(x) &= x^2 \left((x^2 + \frac{1}{x^2}) - 2(x + \frac{1}{x}) - 2 \right) = x^2 \left((x + \frac{1}{x})^2 - 2(x + \frac{1}{x}) - 4 \right) = \\
 &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} - (1 - \sqrt{5}) \right) \left(x + \frac{1}{x} - (1 + \sqrt{5}) \right) = (x^2 - (1 - \sqrt{5})x + 1)(x^2 - (1 + \sqrt{5})x + 1),
 \end{aligned}$$

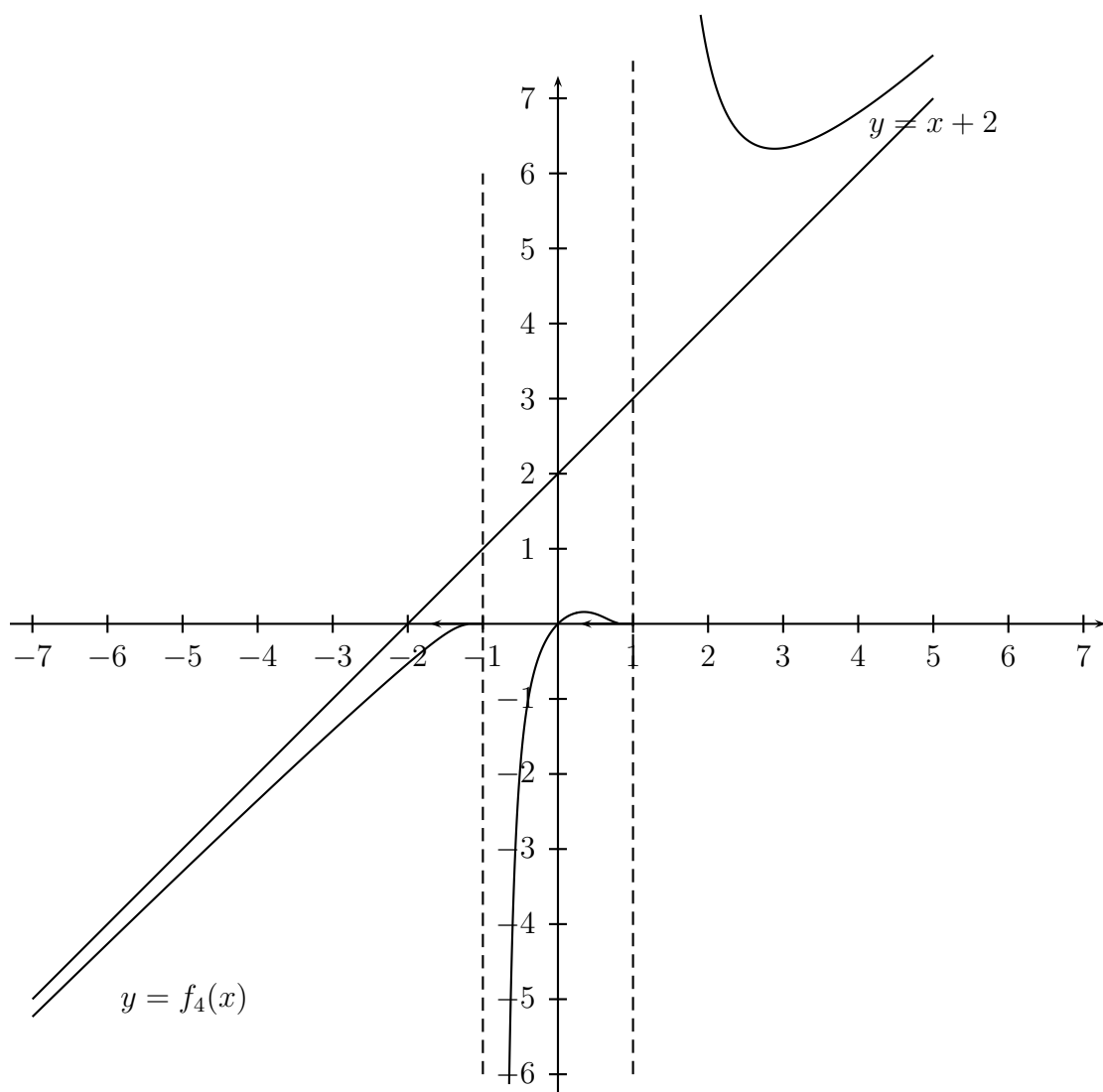
ce qui reste vrai pour $x = 0$.

Le premier trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5} - 1)^2 - 4 = 2 - 2\sqrt{5} < 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - (1 - \sqrt{5})x + 1 > 0$.

Le deuxième trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5} + 1)^2 - 4 = 2 + 2\sqrt{5} > 0$ et admet donc deux racines réelles $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + \sqrt{5}})2,89... > 1$ et $\beta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5} - \sqrt{2 + \sqrt{5}}) = \frac{1}{\alpha}0,34... \in]0, 1[$. On en déduit le tableau de variation de f_4 .

x	$-\infty$	-1	0	β	1	α	$+\infty$	
$f'_4(x)$	+		+	0	-	-	0	+
f_4	$-\infty \nearrow 0$		$-\infty \nearrow 0, 15 \dots$		$\searrow 0$	$+\infty \searrow 6, 34 \dots$		$\nearrow +\infty$

Graphie.



5. Si $x > 0$, $e^x - 1 > 0$ et si $x < 0$, $e^x - 1 < 0$. Donc, pour $x \neq 0$, > 0 et f_5 est définie sur \mathbb{R}^* . Pour $x \neq 0$,

$$f_5(-x) = -\frac{1}{x} \ln \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -\frac{1}{x} \ln(e^{-x}) - \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} = 1 - f(x).$$

Donc, pour tout réel non nul x , $f(x) + f(-x) = 1$. Le point de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de C_5 .

Etude en 0.

$$f_5(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)) = \frac{1}{x} ((\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}) - \frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2 + o(x^2)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}x + o(x).$$

Ainsi, f_5 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_5(0) = \frac{1}{2}$. Le prolongement, encore noté f_5 , admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et est donc dérivable en 0 avec $f_5'(0) = \frac{1}{24}$. Une équation de la tangente à C_5 en le point d'abscisse 0 est $y = \frac{1}{24}x + \frac{1}{2}$. Par symétrie, ce point est un point d'inflexion.

Etude en $+\infty$.

$$f_5(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} (\ln(e^x) + \ln(1 - e^{-x}) - \ln x) = 1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1 - e^{-x})}{x} = 1 + o(1).$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x) = 1$. Par symétrie, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - f_5(-x)) = 1 - 1 = 0$.

Dérivée. Variations.

f_5 est dérivable sur \mathbb{R}^* en vertu de théorèmes généraux (et donc sur \mathbb{R}) et pour $x \neq 0$, (puisque $\ln \frac{e^x - 1}{x} = \ln | \frac{e^x - 1}{x} | = \ln |e^x - 1| - \ln |x|$),

$$f_5'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln \frac{e^x - 1}{x} + \frac{1}{x} (\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} (-\ln \frac{e^x - 1}{x} + \frac{xe^x}{e^x - 1} - 1).$$

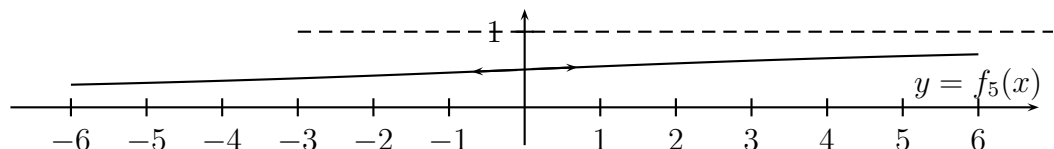
f_5' est, sur \mathbb{R}^* , du signe de $g(x) = -\ln \frac{e^x - 1}{x} + \frac{xe^x}{e^x - 1} - 1$. g est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour x réel non nul,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{1}{x} + \frac{(e^x + xe^x)(e^x - 1) - xe^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-xe^x(e^x - 1) + (e^x - 1)^2 + xe^x(e^x - x - 1)}{x(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{(e^x - 1)^2 - x^2 e^x}{x(e^x - 1)^2} = \frac{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2 - x^2}{x(e^{x/2} - e^{-x/2})^2} \\ &= \frac{(2 \operatorname{sh} \frac{x}{2})^2 - x^2}{x(2 \operatorname{sh} \frac{x}{2})^2} = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} - (\frac{x}{2})^2}{x \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

L'inégalité $\operatorname{sh} x > x$, valable pour $x > 0$, est classique (par exemple, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 1 fournit pour $x > 0$, $\operatorname{sh} x = x + \int_0^x (x-t) \operatorname{sh} t \, dt > x$.) Par suite, g' est strictement positive sur $]0, +\infty[$, et donc g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. En tenant compte de $g(0^+) = 0$, g est donc strictement positive sur $]0, +\infty[$. Il en est de même de f_5' et f_5 est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Par symétrie et continuité en 0, f_5 est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Graphie.



6. f_6 est définie et continue sur \mathbb{R} , dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ en vertu de théorèmes généraux.

Etude en 1.

$f_6(x) - f_6(1) = x - 1 + \sqrt{|x^2 - 1|} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \sqrt{2} \sqrt{|x - 1|}$, ce qui montre que f_6 n'est pas dérivable en 1 mais que C_6 admet au point d'abscisse 1 deux demi-tangentes parallèles à (Oy) .

Etude en -1.

$f_6(x) - f_6(-1) = x + 1 + \sqrt{|x^2 - 1|} \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{|x + 1|}$, ce qui montre que f_6 n'est pas dérivable en -1 mais que C_6 admet au point d'abscisse -1 deux demi-tangentes parallèles à (Oy) .

Etude en $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$f_6(x) = x + x(1 - \frac{1}{x^2})^{1/2} = x + x(1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = 2x - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}),$$

ce qui montre tout à la fois que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x) = +\infty$, puis que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à C_6 en $+\infty$ et que C_6 est au-dessous de cette droite au voisinage de $+\infty$.

Etude en $-\infty$.

Au voisinage de $-\infty$, on a, $f_6(x) = x - x(1 + o(\frac{1}{x})) = o(1)$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_6(x) = 0$.

Dérivée. Variations.

Soit ε le signe de $x^2 - 1$. Pour $x \neq \pm 1$,

$$f'_6(x) = 1 + \frac{2\varepsilon x}{2\sqrt{\varepsilon(x^2 - 1)}} = \frac{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 1)} + \varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 1)}}.$$

Si $-1 < x \leq 0$, (de sorte que $\varepsilon x > 0$) ou $x > 1$, $f'_6(x) > 0$.

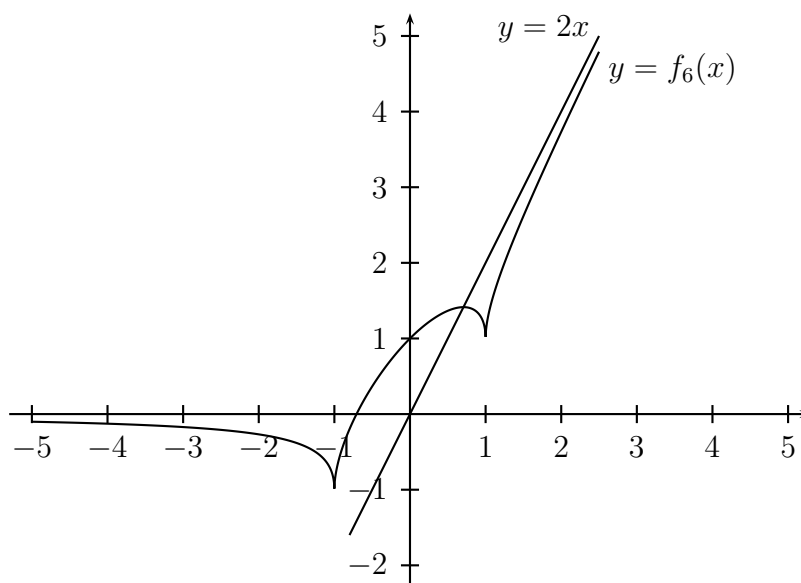
Si $x < -1$, $\text{sgn}(f'_6(x)) = \text{sgn}(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \text{sgn}(\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}) = -$ et $f'_6(x) < 0$.

Si $0 \leq x < 1$, $\text{sgn}(f'_6(x)) = \text{sgn}(-x + \sqrt{x^2 - 1}) = \text{sgn}(-x^2 - (x^2 - 1)) = \text{sgn}(\frac{1}{\sqrt{2}} - x)$.

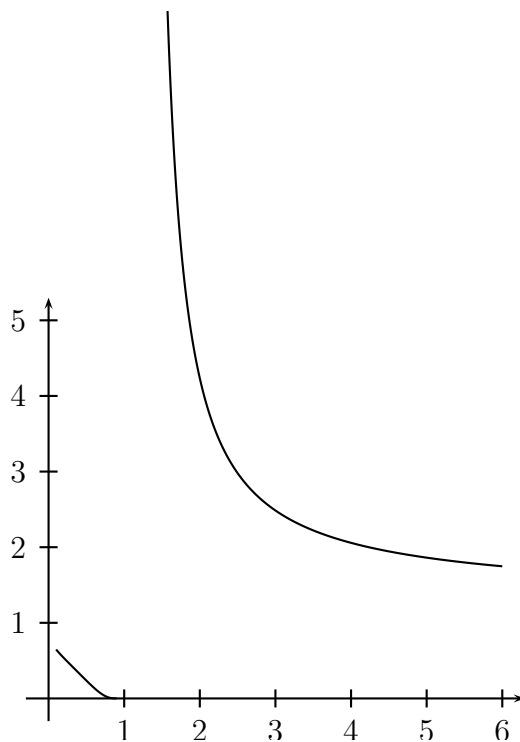
D'où le tableau de variations de f_6 :

x	$-\infty$	-1	$1/\sqrt{2}$	1	$+\infty$				
$f'_6(x)$		$-$	\parallel	$+$	0	$-$	\parallel	$+$	
f_6	0		\nearrow	$\sqrt{2}$	\searrow	1		\nearrow	$-\infty$

Graphe.



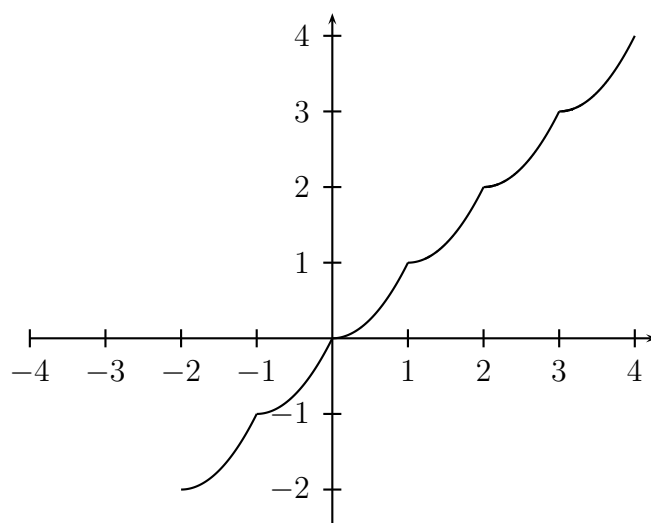
7.



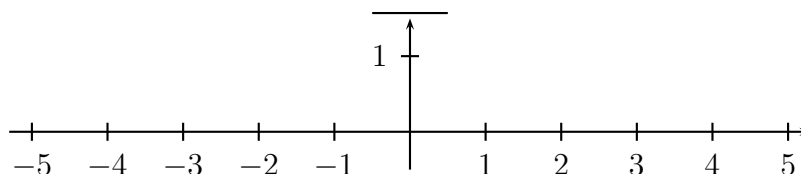
8.

9.

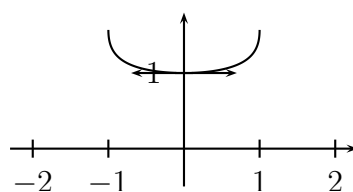
10.



11.



12.



13.

- 14.
- 15.
- 16.
- 17.
- 18.
- 19.
- 20.
- 21.
- 22.
- 23.

