Calculs de limites, développements limités, développements asymptotiques

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 IT

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes

1. $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{1/(2x-\pi)}$
2. $\lim_{x\to\pi/2}|\tan x|^{\cos x}$
3. $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$
4. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\ln|x|}$
5. $\lim_{x\to\pi/2}\cos x.e^{1/(1-\sin x)}$
6. $\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cos^2 x-3\cos x+1}$
7. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x}\right)^{1/\sin x}$
8. $\lim_{x\to e,\, x<e}(\ln x)^{\ln(e-x)}$
9. $\lim_{x\to 1,\, x>1}\frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$
10. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(\operatorname{ch} x-1)}{x^2+1}$
11. $\lim_{x\to 0,\, x>0}\frac{(\sin x)^x-x^{\sin x}}{\ln(x-x^2)+x-\ln x}$
12. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$
13. $\lim_{x\to 1/\sqrt{2}}\frac{(\operatorname{Arcsin} x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$
14. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos(a+\frac{1}{x})}{\cos a}\right)^x$ (où $\cos a\neq 0$)

Correction ▼ [005426]

Exercice 2 IT

Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués :

1. $\frac{1}{1-x^2-x^3}$ (ordre 7 en 0)
2. $\frac{1}{\cos x}$ (ordre 7 en 0)
3. $\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{x}{\tan x}}$ (ordre 3 en 0)
4. $\tan x$ (ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$)
5. $(\operatorname{ch} x)^{1/x^2}$ (ordre 2 en 0)
6. $\tan^3 x(\cos(x^2)-1)$ (ordre 8 en 0)
7. $\frac{\ln(1+x)}{x^2}$ (ordre 3 en 1)
8. $\operatorname{Arctan}(\cos x)$ (ordre 5 en 0)

9. $\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ (ordre 2 en 0)
10. $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{Arcsin}^2 x}$ (ordre 5 en 0)
11. $\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$ (ordre 10 en 0)
12. $\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$ (ordre 100 en 0)
13. $\tan\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}$ (ordre 3 en π)

Correction ▼ [005427]

Exercice 3 ***

Soit $0<a<b$. Etude complète de la fonction $f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.

Correction ▼ [005428]

Exercice 4 **

Etude au voisinage de $+\infty$ de $\sqrt{x^2-3}-\sqrt[3]{8x^3+7x^2+1}$.

Correction ▼ [005429]

Exercice 5 **

Soit $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ en moins de 10 secondes puis $f^{(n)}(x)$ pour $|x|\neq 1$ en à peine plus de temps).

Correction ▼ [005430]

Exercice 6 IT

1. Equivalent simple en $+\infty$ et $-\infty$ de $\sqrt{x^2+3x+5}-x+1$.
2. Equivalent simple en 0, 1, 2 et $+\infty$ de $3x^2-6x$
3. Equivalent simple en 0 de $(\sin x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\sin x}$.
4. Equivalent simple en $+\infty$ de $x^{\operatorname{th} x}$.
5. Equivalent simple en 0 de $\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$.

Correction ▼ [005431]

Exercice 7 **IT

Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^3}$ de $u_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k!$.

Correction ▼ [005432]

Exercice 8 **IT

1. Développement asymptotique à la précision x^2 en 0 de $\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}$.
2. Développement asymptotique à la précision $\frac{1}{x^3}$ en $+\infty$ de $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$.

Correction ▼ [005433]

Exercice 9 **

Soient $a>0$ et $b>0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

1. Equivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)$.
2. Même question pour $e^{-a}f_n(a)-1+\frac{a^2}{2n}$.

Correction ▼ [005434]

Exercice 10 ***I

Soit $u_0\in]0,\frac{\pi}{2}]$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_{n+1}=\sin(u_n)$.

1. Montrer brièvement que la suite u est strictement positive et converge vers 0.
2. (a) Déterminer un réel α tel que la suite $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ ait une limite finie non nulle.
   (b) En utilisant le lemme de CESARO, déterminer un équivalent simple de u_n.

Correction ▼ [005435]

Exercice 11 **I

Soit u la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Equivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [005436]

Exercice 12 ***I

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ pour n entier naturel donné. On note x_n cette solution.
2. Trouver un développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Correction ▼ [005437]

Exercice 13

1. Montrer que l'équation $x + \ln x = k$ admet, pour k réel donné, une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée x_k.
2. Montrer que, quand k tend vers $+\infty$, on a : $x_k = ak + b\ln k + c\frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ où a, b et c sont des constantes à déterminer.

Correction ▼ [005438]

Exercice 14 **

Soit $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$.

1. Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f' n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit.

Correction ▼ [005439]

Exercice 15 **IT

Etude au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\text{Arcsin}\,x}$ (existence d'une tangente ?)

Correction ▼ [005440]

Exercice 16 **I

1. La fonction $x \mapsto \text{Arccos}\,x$ admet-elle en 1 (à gauche) un développement limité d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?
2. Equivalent simple de $\text{Arccos}\,x$ en 1.

Correction ▼ [005441]

Exercice 17 ***

1. Développement limité à l'ordre n en 0 de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$.
2. Soit a_k le k-ème coefficient. Montrer que a_k est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $p + 2q = k$.

Correction ▼ [005442]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Si $x \in]0,\pi[$, $\sin x > 0$, de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de $\frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ auquel on a enlevé le point $\frac{\pi}{2}$) et de plus $(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)}$. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ tend vers 1 et donc
$$\ln(\sin x) \sim \sin x - 1 = -\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2 = -\frac{(2x-\pi)^2}{8}.$$
Donc, $\frac{\ln(\sin x)}{2x-\pi} \sim -\frac{2x-\pi}{8} \to 0$ et enfin $(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\sin x)/(2x-\pi)} \to e^0 = 1$.
$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{1/(2x-\pi)} = 1.}$$

2. Si $x \in]0,\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $|\tan x| > 0$, de sorte que la fonction proposée est bien définie sur un voisinage pointé de $\frac{\pi}{2}$ et de plus $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x\ln(|\tan x|)}$. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$,
$$\ln|\tan x| = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| \sim -\ln|\cos x|,$$
puis $\cos x\ln|\tan x| \sim -\cos x\ln|\cos x| \to 0$ (car, quand u tend vers 0, $u\ln u \to 0$). Donc, $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x\ln|\tan x|} \to e^0 = 1$.
$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}|\tan x|^{\cos x} = 1.}$$

3. Quand n tend vers $+\infty$, $\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \sin\frac{n\pi}{6n+1} \to \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6} = 1$ (et on est en présence d'une indétermination du type $1^{+\infty}$). Quand n tend vers $+\infty$,
$$\begin{aligned}\cos\frac{n\pi}{3n+1} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{-1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{18n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$
De même,
$$\begin{aligned}\sin\frac{n\pi}{6n+1} &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{-1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{36n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{36n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{36n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{72n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$
Puis,
$$n\ln\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1}+\sin\frac{n\pi}{6n+1}\right) = n\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}\pi}{24n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{24}+o(1),$$
et donc
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1}+\sin\frac{n\pi}{6n+1}\right)^n = e^{\sqrt{3}\pi/24}.}$$

4. Quand x tend vers 0, $\ln(\cos x) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$. Puis, $\ln|x|\ln(\cos x) \sim -\frac{x^2}{2}\ln|x| \to 0$. Donc, $(\cos x)^{\ln|x|} \to e^0 = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\ln|x|} = 1.}$$

5. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{1-\sin x}$ tend vers $+\infty$. Posons $h = x - \frac{\pi}{2}$ puis $\varepsilon = \mathrm{sgn}(h)$, de sorte que

$$(\cos x)e^{1/(1-\sin x)} = -\varepsilon|\sin h|e^{1/(1-\cos h)} = -\varepsilon e^{\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h}}.$$

Or, quand h tend vers 0,

$$\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h} = \frac{(1-\cos h)\ln|\sin h| + 1}{1-\cos h} = \frac{(-\frac{h^2}{2} + o(h^2))(\ln|h| + o(\ln|h|)) + 1}{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} = \frac{1+o(1)}{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} \sim \frac{2}{h^2},$$

et donc, quand h tend vers 0, $\ln|\sin h| + \frac{1}{1-\cos h} \sim \frac{2}{h^2} \to +\infty$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/2,\, x<\pi/2} \cos(x)e^{1/(1-\sin x)} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to\pi/2,\, x>\pi/2} \cos(x)e^{1/(1-\sin x)} = -\infty.}$$

6. Pour $x \in \mathbb{R}$, $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = (2\cos x - 1)(\cos x - 1)$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}.$$

Pour $x \notin \left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \frac{(2\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(2\cos x - 1)(\cos x - 1)} = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1},$$

et donc, $\lim_{x\to\pi/3} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = -3$.

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/3} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = -3.}$$

7. Quand x tend vers 0,

$$\frac{1+\tan x}{1+\mathrm{th}\, x} = \frac{1+x+o(x)}{1+x+o(x)} = (1+x+o(x)(1-x+o(x)) = 1+o(x).$$

Puis, quand x tend vers 0,

$$\frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\mathrm{th}\, x}\right) = \frac{\ln(1+o(x))}{x+o(x)} = \frac{o(x)}{x+o(x)} = \frac{o(1)}{1+o(1)} \to 0.$$

Donc,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\mathrm{th}\, x}\right)^{1/\sin x} = 1.}$$

8. Quand x tend vers e par valeurs inférieures, $\ln(x)$ tend vers 1 et donc

$$\ln(\ln x) \sim \ln x - 1 = \ln\left(\frac{x}{e}\right) \sim \frac{x}{e} - 1 = -\frac{1}{e}(e-x),$$

puis,

$$\ln(e-x)\ln(\ln x) \sim -\frac{1}{e}(e-x)\ln(e-x) \to 0,$$

et donc $(\ln x)^{\ln(e-x)} = e^{\ln(e-x)\ln(\ln x)} \to 1$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to e\\ x<e}} (\ln x)^{\ln(e-x)} = 1.}$$

9. Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $x\ln x \to 0$, et donc

$$x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 \sim x\ln x \sim 1 \times (x-1) = x-1.$$

Ensuite, $\sqrt{x^2-1}$ tend vers 0 et donc

$$\ln(1-\sqrt{x^2-1}) \sim -\sqrt{x^2-1} = -\sqrt{(x-1)(x+1)} \sim -\sqrt{2(x-1)}.$$

Finalement, quand x tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})} \sim \frac{x-1}{-\sqrt{2(x-1)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x-1} \to 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x>e}} \frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})} = 0.}$$

10. Quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln(\operatorname{ch}x - 1) \sim \ln(\operatorname{ch}x) \sim \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) = x - \ln 2 \sim x,$$

et donc

$$\frac{x\ln(\operatorname{ch}x-1)}{x^2+1} \sim \frac{x\times x}{x^2} = 1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(\operatorname{ch}x-1)}{x^2+1} = 1.}$$

11. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\ln(x-x^2) + x - \ln x = x + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Ensuite,

$$(\sin x)^x = e^{x\ln(\sin x)} = e^{x\ln(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))} = e^{x\ln x}e^{x\ln(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))} = x^x e^{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right),$$

et,

$$x^{\sin x} = e^{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\ln x} = e^{x\ln x}e^{-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)} = x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right).$$

Donc,

$$(\sin x)^x - x^{\sin x} = x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) - x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right) = x^x\left(\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right) \sim \frac{x^3\ln x}{6},$$

et enfin

$$\frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x2^) + x - \ln x} \sim \frac{x^3\ln x/6}{-x^2/2} = -\frac{x\ln x}{3} \to 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x2^) + x - \ln x} = 0.}$$

12. Quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln(x+1)=\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

puis

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right).$$

Ensuite,

$$x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)=x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)=\frac{1}{\ln x}+o\left(\frac{1}{\ln x}\right)\to 0.$$

Donc, $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x=\exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right)\to e^0=1$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x=1.}$$

13. Quand x tend vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\frac{(\text{Arcsin}\,x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{\text{Arcsin}\,x+\frac{\pi}{4}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\frac{\text{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sim\frac{1}{2}\times\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\frac{\text{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{\text{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\to\frac{\pi}{4\sqrt{2}}(\text{Arcsin})'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}=\frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to1/\sqrt{2}}\frac{(\text{Arcsin}\,x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}=\frac{\pi}{4}.}$$

14. Quand x tend vers $+\infty$,

$$x\ln\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)=x\ln\left(\cos\frac{1}{x}-\tan a\sin\frac{1}{x}\right)=x\ln\left(1-\frac{\tan a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x\left(-\frac{\tan a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$=-\tan a+o(1),$$

et donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)^x=e^{-\tan a}$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)^x=e^{-\tan a}.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1.

$$\frac{1}{1-x^2-x^3}\underset{x\to0}{=}1+(x^2+x^3)+(x^2+x^3)^2+(x^2+x^3)^3+o(x^7)=1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+o(x^7).$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2-x^3}\underset{x\to0}{=}1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+o(x^7).}$$

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7)\right)^{-1} = 1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+\left(\frac{x^2}{2}\right)^3+o(x^7)$$
$$= 1+\frac{x^2}{2}+x^4\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\right)+x^6\left(\frac{1}{720}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)+o(x^7) = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^7).$$

2. $$\boxed{\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^7).}$$

3. **Remarques.**

   (a) Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, on a $0 < \frac{x}{\tan x} < 1$ et donc la fonction $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{\tan x}\right)$ est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ (qui est un voisinage pointé de 0).

   (b) Quand x tend vers 0, $\frac{x}{\tan x} \to 1$ et donc $\text{Arccos}\left(\frac{x}{\tan x}\right) = o(1)$ (développement limité à l'ordre 0).

   (c) La fonction $x \mapsto \text{Arccos}\,x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (donc à priori, c'est mal parti).

   (d) La fonction proposée est paire et, si elle admet en 0 un développement limité d'ordre 3, sa partie régulière ne contient que des exposants pairs.

• Recherche d'un équivalent simple de $\text{Arccos}\,x$ en 1 à gauche. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $\text{Arccos}\,x \to 0$ et donc,

$$\text{Arccos}\,x \sim \sin(\text{Arccos}\,x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

• Déterminons un équivalent simple de $\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ en 0. D'après ce qui précède,

$$\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \sim \sin\left(\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) = \sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \sim \sqrt{\frac{x^3/3}{x}} = \frac{|x|}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ n'est pas dérivable en 0 (mais est dérivable à droite et à gauche) et n'admet donc pas de développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 (mais admet éventuellement des développements limités à gauche et à droite pour lesquels la remarque initiale sur la parité des exposants ne tient plus). • Déterminons un équivalent simple de $f(x) = \text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

$$\begin{aligned}
\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}} &\sim \sin\left(\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)\\
&= \sin\left(\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right)\\
&= \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{\frac{x}{\tan x}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = g(x)
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} &= \left(\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^{-1}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\right)^{1/2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{45}+o(x^5)\right)^{1/2} = \frac{x}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{x^2}{15}+o(x^2)\right)^{1/2}\\
&= \frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{30\sqrt{3}}+o(x^3),
\end{aligned}$$

et donc,

$$\sqrt{\frac{\tan x-x}{\tan x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{30\sqrt{3}}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{15\sqrt{3}}+o(x^3).$$

Ensuite,

$$\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)=\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^{-1/2}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x^3}{18\sqrt{3}}+o(x^3)\right)=\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x^3}{18\sqrt{3}}+o(x^3)\right)$$
$$=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{9\sqrt{3}}+o(x^3),$$

et finalement,

$$g(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{15\sqrt{3}}+o(x^3)\right)-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{9\sqrt{3}}+o(x^3)\right)=\frac{4x^3}{45\sqrt{3}}+o(x^3)\sim\frac{4x^3}{45\sqrt{3}}.$$

Ainsi, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)-\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{4x^3}{45\sqrt{3}}+o(x^3).$$

f étant paire, on en déduit que

$$\boxed{\text{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\underset{x\to 0}{=}\frac{|x|}{\sqrt{3}}+\frac{4|x|^3}{45\sqrt{3}}+o(x^3).}$$

(Ce n'est pas un développement limité).

4. La fonction $x\mapsto\tan x$ est trois fois dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et admet donc en $\frac{\pi}{4}$ un développement limité d'ordre 3 à savoir son développement de TAYLOR-YOUNG. $\tan\frac{\pi}{4}=1$ puis $(\tan)'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\tan^2\frac{\pi}{4}=2$. Ensuite, $(\tan)''(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)$ et $(\tan)''(\frac{\pi}{4})=4$. Enfin,

$$(\tan)^{(3)}(x)=2(1+\tan^2 x)^2+4\tan^2 x(1+\tan^2 x),$$

et $(\tan)^{(3)}(\frac{\pi}{4})=16$. Finalement,

$$\boxed{\tan x\underset{x\to\pi/4}{=}1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right).}$$

$$\frac{1}{x^2}\ln(\text{ch}x)\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right)=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2),$$

et donc

$$(\text{ch}x)^{1/x^2}=e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}=e^{1/2}e^{-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}=\sqrt{e}-\frac{\sqrt{e}}{12}x^2+o(x^2).$$

5. $$\boxed{(\text{ch}x)^{1/x^2}\underset{x\to 0}{=}\sqrt{e}-\frac{\sqrt{e}}{12}x^2+o(x^2).}$$

6. $\tan^3 x(\cos(x^2)-1)=\tan x\times\tan^2 x(\cos(x^2)-1)$ et un équivalent de $\tan^2 x(\cos(x^2)-1)$ en 0 est $-\frac{x^6}{2}$. On écrit donc $\tan x$ à l'ordre 2. De même, un équivalent de $\tan^3 x$ est x^3 et on écrit donc $\cos(x^2)-1$ à l'ordre 5.

$$\tan^3 x(\cos(x^2)-1)\underset{x\to 0}{=}(x+o(x^2))^3\left(-\frac{x^4}{2}+o(x^5)\right)=(x^3+o(x^4))\left(-\frac{x^4}{2}+o(x^5)\right)=-\frac{x^7}{2}+o(x^8).$$

$$\boxed{\tan^3 x(\cos(x^2)-1) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^7}{2}+o(x^8).}$$

7. On pose $h = x-1$ ou encore $x = 1+h$, de sorte que x tend vers 1 si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{x^2} &= \ln(2+h)(1+h)^{-2} \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\ln 2+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)\left(1-2h+\frac{(-2)(-3)}{2}h^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{6}h^3+o(h^3)\right) \\
&= \left(\ln 2+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+\frac{h^3}{24}+o(h^3)\right)(1-2h+3h^2-4h^3+o(h^3)) \\
&= \ln 2+\left(\frac{1}{2}-2\ln 2\right)h+\left(3\ln 2-\frac{9}{8}\right)h^2+\left(-4\ln 2+\frac{43}{24}\right)h^3+o(h^3).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to 1}{=} \ln 2+\left(\frac{1}{2}-2\ln 2\right)(x-1)+\left(3\ln 2-\frac{9}{8}\right)(x-1)^2+\left(-4\ln 2+\frac{43}{24}\right)(x-1)^3+o((x-1)^3).}$$

8. Pour x réel, posons $f(x) = \mathrm{Arctan}(\cos x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour x réel, $f'(x) = -\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Puis,

$$\begin{aligned}
f'(x) &\underset{x\to 0}{=} -\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2\right)^{-1} \\
&= -\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)(2-x^2+o(x^3))^{-1} = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^{-1} \\
&= -\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = -\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4).
\end{aligned}$$

Donc, f' admet un développement limité d'ordre 4 en 0 et on sait que f admet en 0 un développement limité d'ordre 5 obtenu par intégration.

$$\mathrm{Arctan}(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{Arctan}(\cos 0)-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5) = \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5).$$

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5).}$$

9. Pour $x > -1$, posons $f(x) = \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$. f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $x > -1$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(x+2)^2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}\frac{1}{1+\frac{x+1}{x+2}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{(2x+3)\sqrt{(1+x)(2+x)}} \\
&= \frac{1}{2\times 3\times\sqrt{2}}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-1}(1+x)^{-1/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\frac{2x}{3}+o(x)\right)\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)\left(1-\frac{x}{4}+o(x)\right) \\
&= \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x+o(x)\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\frac{17x}{12}+o(x)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, f' admet donc en 0 un développement limité d'ordre 1 et on sait alors que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2 obtenu par intégration.

$$\boxed{\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}x-\frac{17}{144\sqrt{2}}x^2+o(x^2).}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}(-x^2)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}(-x^2)^3+o(x^7)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+o(x^7).$$

Donc, $\text{Arcsin}\,x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+o(x^8)$. Ensuite,

$$\frac{1}{\text{Arcsin}^2 x} = (\text{Arcsin}\,x)^{-2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}+o(x^7)\right)^{-2}$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1-2\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}\right)+3\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}\right)^2-4\left(\frac{x^2}{6}\right)^3+o(x^7)\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}+\left(-\frac{3}{20}+\frac{1}{12}\right)x^2+\left(-\frac{5}{56}+\frac{3}{40}-\frac{1}{54}\right)x^4+o(x^5)$$
$$= \frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}-\frac{x^2}{15}-\frac{31x^4}{945}+o(x^5).$$

Finalement,

10. $$\boxed{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\text{Arcsin}^2 x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}+\frac{x^2}{15}+\frac{31x^4}{945}+o(x^5).}$$

11. Pour x réel, posons $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 puis, pour x réel, soit $g(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$. g est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour x réel $g(x)=F(x^2)-F(x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$g'(x)=2xF'(x^2)-F'(x)=2xf(x^2)-f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Puis,

$$g'(x) \underset{x\to 0}{=} 2x\left(1-\frac{1}{2}x^8+o(x^8)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{8}x^8+o(x^9)\right)=-1+2x+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{8}x^8-x^9+o(x^9).$$

Ainsi g' admet un développement limité d'ordre 9 en 0 et on sait que g admet un développement limité d'ordre 10 en 0 obtenu par intégration. En tenant compte de $g(0)=0$, on obtient

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} -x+x^2+\frac{x^5}{10}-\frac{x^9}{24}-\frac{x^{10}}{10}+o(x^{10}).}$$

12.

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(e^x-\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right)=\ln(e^x)+\ln\left(1-e^{-x}\left(\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right)\right)$$
$$=x+\ln\left(1-(1+o(1))\left(\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100})\right)\right)=x+\ln\left(1-\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100})\right)=x-\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100})$$

$$\boxed{\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100}).}$$

13. Posons $h=x-\pi$ ou encore $x=\pi+h$ de sorte que x tend vers π si et seulement si h tend vers 0.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)} &= \sqrt[3]{4(\pi^3+(\pi+h)^3)} = \sqrt[3]{8\pi^3+12\pi^2h+12\pi h^2+4h^3}\\ &\underset{h\to 0}{=} 2\pi\left(1+\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}+\frac{h^3}{2\pi^3}\right)^{1/3}\\ &= 2\pi\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}+\frac{h^3}{2\pi^3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{3h}{2\pi}\right)^3+o(h^3)\right)\\ &= 2\pi+h+h^2\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2\pi}\right)+h^3\left(\frac{1}{3\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}+\frac{5}{12\pi^2}\right)+o(h^3)\\ &= 2\pi+h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}+o(h^3).\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}) &= \tan\left(h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}+o(h^3)\right)\\ &= \left(h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}\right)+\frac{1}{3}h^3+o(h^3) = h+\frac{h^2}{2\pi}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4\pi^2}\right)h^3+o(h^3).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}) \underset{x\to\pi}{=} (x-1)+\tfrac{1}{2\pi}(x-1)^2+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4\pi^2}\right)(x-1)^3+o((x-1)^3).}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Puisque $a>0$, $b>0$ et que pour tout réel x, $\frac{a^x+b^x}{2}>0$, f est définie sur $\mathbb{R}^*$, et pour

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\exp\left(\tfrac{1}{x}\ln\left(\tfrac{a^x+b^x}{2}\right)\right).$$

Etude en 0.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) &= \ln\left(\frac{e^{x\ln a}+e^{x\ln b}}{2}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x\left(\frac{1}{2}\ln a+\frac{1}{2}\ln b\right)+x^2\left(\frac{1}{4}\ln^2 a+\frac{1}{4}\ln^2 b\right)+o(x^2)\right)\\ &= \ln\left(1+x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+x^2\frac{\ln^2 a+\ln^2 b}{4}+o(x^2)\right) = x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+x^2\frac{\ln^2 a+\ln^2 b}{4}-\frac{1}{2}(x\ln\sqrt{ab})^2+o(x^2)\\ &= x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+\frac{1}{8}(\ln^2 a-2\ln a\ln b+\ln^2 b)x^2+o(x^2) = x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+x^2\frac{1}{8}\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)+o(x^2).\end{aligned}$$

Enfin,

$$f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = \exp(\ln(\sqrt{ab})+\frac{1}{8}\ln^2\frac{a}{b}x+o(x)) = \sqrt{ab}(1+\frac{1}{8}x\ln^2\frac{a}{b}+o(x)).$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=\sqrt{ab}$. Le prolongement obtenu est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{\sqrt{ab}}{8}\ln^2\frac{a}{b}(>0)$. **Etude en** $+\infty$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}(a^x+b^x)\right) &= \frac{1}{x}\left(\ln(b^x)-\ln 2+\ln\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)\right) = \frac{1}{x}(x\ln b+o(x)) \quad (\text{car } 0<\frac{a}{b}<1)\\ &= \ln b+o(1).\end{aligned}$$

et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b(=\text{Max}\{a,b\})$. **Etude en** $-\infty$. Pour tout réel x,

$$f(-x) = \left(\frac{a^{-x}+b^{-x}}{2}\right)^{-1/x} = \left(\frac{a^x+b^x}{2a^xb^x}\right)^{-1/x} = \frac{ab}{f(x)},$$

et donc,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} f(-X) = \lim_{X\to+\infty} \frac{ab}{f(X)} = \frac{ab}{b} = a \quad (= \mathrm{Min}\{a,b\}).$$

Dérivée et variations. f est dérivable sur $]-\infty,0\cup]0,+\infty[$ en vertu de théorèmes généraux (et aussi en 0 d'après l'étude faite plus haut), et pour $x \neq 0$ (puisque $f > 0$ sur $\mathbb{R}^*$),

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f)'(x) = \left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) + \frac{1}{x}\frac{a^x\ln a + b^x \ln b}{a^x+b^x}.$$

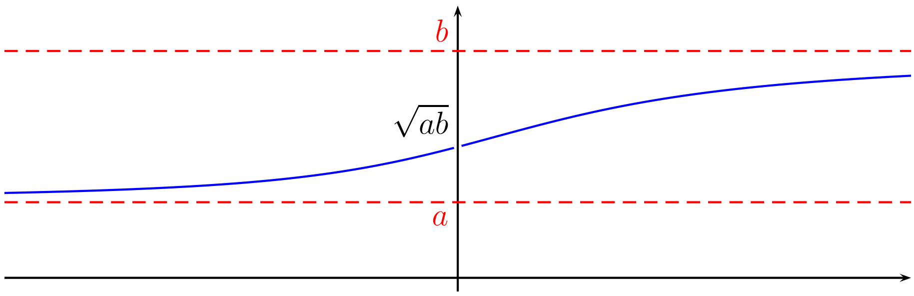
f' a le même signe que $(\ln f)'$ qui, elle-même, a le même signe que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) + x\frac{a^x\ln a + b^x\ln b}{a^x+b^x}.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour x réel,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x} + \frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x} + x\frac{(a^x\ln^2 a + b^x\ln^2 b)(a^x+b^x)-(a^x\ln a+b^x\ln b)^2}{(a^x+b^x)^2} \\ &= x\frac{(ab)^x(\ln a-\ln b)^2}{(a^x+b^x)^2}. \end{aligned}$$

g' est donc strictement négative sur $]-\infty,0[$ et strictement positive sur $]0,+\infty[$. Par suite, g est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. g' admet donc un minimum global strict en 0 et puisque $g(0)=0$, on en déduit que g est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. De même, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. En tant compte de l'étude en 0, on a montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le **graphe de** f a l'allure suivante :



On peut noter que les inégalités $\lim_{x\to-\infty} f < f(-1) < f(0) < f(1) < \lim_{x\to+\infty} f$ fournissent :

$$a < \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Quand x tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{x^2-3} = x\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{1/2} = x\left(1-\frac{3}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right) = x - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et,

$$\sqrt[3]{8x^3+7x^2+1} = 2x\left(1+\frac{7}{8x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/3} = 2x\left(1+\frac{7}{24x}-\frac{49}{576x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x+\frac{7}{12}-\frac{49}{288x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} -x - \frac{7}{12} - \frac{383}{288x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe représentative de f admet donc en $+\infty$ une droite asymptote d'équation $y = -x - \frac{7}{12}$. De plus, le signe de $f(x) - \left(-x - \frac{7}{12}\right)$ est, au voisinage de $+\infty$, le signe de $-\frac{383}{288x}$. Donc la courbe représentative de f est au-dessous de la droite d'équation $y = -x - \frac{7}{12}$ au voisinage de $+\infty$.

Correction de l'exercice 5 ▲

f est de classe C^∞ sur son domaine $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ en tant que fraction rationelle et en particulier admet un développement limité à tout ordre en 0. Pour tout entier naturel n, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^3 + \ldots + x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité et d'après la formule de TAYLOR-YOUNG, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!.}$$

Ensuite, pour $x \notin \{-1,1\}$, et n entier naturel donné,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $$\sqrt{x^2+3x+5} - x + 1 \underset{x\to-\infty}{\sim} -x - x = -2x,$$

   et,

   $$\sqrt{x^2+3x+5} - x + 1 = \frac{(x^2+3x+5) - (x-1)^2}{\sqrt{x^2+3x+5} + x - 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3x+2x}{x+x} = \frac{5}{2}.$$

2. $3x^2 - 6x \underset{x\to 0}{\sim} -6x$ et $3x^2 - 6x \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2$. Ensuite, quand x tend vers 1, $3x^2 - 6x$ tend vers $-3 \neq 0$ et donc, $3x^2 - 6x \underset{x\to 1}{\sim} -3$. Enfin, $3x^2 - 6x = 3x(x-2) \underset{x\to 2}{\sim} 6(x-2)$.

   $$\boxed{3x^2 - 6x \underset{x\to 0}{\sim} -6x \qquad 3x^2 - 6x \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2 \qquad 3x^2 - 6x \underset{x\to 0}{\sim} -3 \qquad 3x^2 - 6x \underset{x\to 2}{\sim} 6(x-2).}$$

3. $$(x-x^2)\ln(\sin x) \underset{x\to 0}{=} (x-x^2)\ln x + (x-x^2)\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = x\ln x - x^2\ln x + o(x^2\ln x).$$

   Ensuite,

   $$\sin x \ln(x-x^2) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)(\ln x + \ln(1-x)) = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(\ln x - x + o(x)) = x\ln x + o(x^2\ln x).$$

   Donc,

   $$\begin{aligned}(\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x} &= e^{x\ln x}(e^{-x^2\ln x + o(x^2\ln x)} - e^{o(x^2\ln x)}) = e^{x\ln x}(1 - x^2\ln x - 1 + o(x^2\ln x)) \\ &= (1+o(1))(-x^2\ln x + o(x^2\ln x)) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2\ln x.\end{aligned}$$

$$\boxed{(\sin x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\sin x}\underset{x\to 0}{\sim}-x^2\ln x.}$$

4. $\text{th}\,x=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\underset{x\to+\infty}{=}(1-e^{-2x})(1-e^{-2x}+o(e^{-2x}))=1-2e^{-2x}+o(e^{-2x})$, et donc $\text{th}\,x\ln x=(1-2e^{-2x}+o(e^{-2x}))\ln x=\ln x+o(1)$. Par suite,

$$x^{\text{th}x}\underset{x\to+\infty}{\sim}e^{\ln x}=x.$$

5. **Tentative à l'ordre 3.**
$\tan(\sin x)\underset{x\to 0}{=}\tan\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{3}(x)^3+o(x^3)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, et,
$\sin(\tan x)\underset{x\to 0}{=}\sin\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=\left(x+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{6}(x)^3+o(x^3)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. Donc, $\tan(\sin x)-\sin(\tan x)\underset{x\to 0}{=}o(x^3)$. L'ordre 3 est insuffisant pour obtenir un équivalent. **Tentative à l'ordre 5.**

$$\begin{aligned}\tan(\sin x)&\underset{x\to 0}{=}\tan\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+\frac{2}{15}(x)^5+o(x^5)\\&=x+\frac{x^3}{6}+x^5\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{6}+\frac{2}{15}\right)+o(x^5)=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+o(x^5),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\sin(\tan x)&\underset{x\to 0}{=}\sin\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right)=\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3+\frac{1}{120}(x)^5+o(x^5)\\&=x+\frac{x^3}{6}+\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}\right)x^5+o(x^5)=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+o(x^5).\end{aligned}$$

Donc, $\tan(\sin x)-\sin(\tan x)\underset{x\to 0}{=}o(x^5)$. L'ordre 5 est insuffisant pour obtenir un équivalent. Le contact entre les courbes représentatives des fonctions $x\mapsto\sin(\tan x)$ et $x\mapsto\tan(\sin x)$ est très fort. **Tentative à l'ordre 7.**

$$\begin{aligned}\tan(\sin x)&\underset{x\to 0}{=}\tan\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o(x^7)\right)\\&=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^3+\frac{2}{15}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\\&=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(-\frac{1}{5040}+\frac{1}{3}\left(3\times\frac{1}{120}+3\times\frac{1}{36}\right)+\frac{2}{15}\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{17}{315}\right)x^7+o(x^7)\\&=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(-\frac{1}{5040}+\frac{1}{120}+\frac{1}{36}-\frac{1}{9}+\frac{17}{315}\right)x^7+o(x^7),\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\sin(\tan x)&\underset{x\to 0}{=}\sin\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17}{x^7}315+o(x^7)\right)\\&=\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)^3+\frac{1}{120}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^5-\frac{1}{5040}(x)^7+o(x^7)\\&=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(\frac{17}{315}-\frac{1}{6}\left(3\times\frac{2}{15}+3\times\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{120}\times\frac{5}{3}-\frac{1}{5040}\right)x^7+o(x^7)\\&=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(\frac{17}{315}-\frac{1}{15}-\frac{1}{18}+\frac{1}{72}-\frac{1}{5040}\right)x^7+o(x^7).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\tan(\sin x)-\sin(\tan x)\underset{x\to0}{=}\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{36}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}-\frac{1}{72}\right)x^7+o(x^7)=\frac{x^7}{30}+o(x^7),$$

et donc

$$\boxed{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{x^7}{30}.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour $n\geq5$, on a

$$u_n=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)}.$$

Ensuite,

$$0\leq n^3\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)}\leq n^3(n-4)\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\to}0.$$

Donc, $\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\dots(k+1)}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et de même $\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Il reste

$$\begin{aligned}u_n&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\&=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k!\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}&\underset{x\to0}{=}\frac{1}{x\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)^{-1}-1\right)\\&=\frac{1}{x^2}\left(-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+o(x^4)\right)\\&=\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x}{2}+x^2\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)+x^3\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+x^4\left(-\frac{1}{120}+\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{24}\right)-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+o(x^4)\right)\\&=-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^2}{720}+o(x^2).\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}\underset{x\to0}{=}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^2}{720}+o(x^2).}$$

$$\begin{aligned}x\ln(x+1)-(x+1)\ln x&=x\left(\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)-(x+1)\ln x\underset{x\to+\infty}{=}-\ln x+x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\\&=-\ln x+1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

2. $$\boxed{x\ln(x+1)-(x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{=} -\ln x+1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. $$f_n(a)=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left(a-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^a\left(1-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

   En remplaçant a par b ou $a+b$, on obtient

   $$\begin{aligned}f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)&\underset{n\to+\infty}{=}e^{a+b}\left(1-\frac{(a+b)^2}{2n}\right)-e^a\left(1-\frac{a^2}{2n}\right)e^b\left(1-\frac{b^2}{2n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\\&=e^{a+b}\frac{-(a+b)^2+a^2+b^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{ab\,e^{a+b}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

   Donc, si $ab\neq 0$, $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{ab\,e^{a+b}}{n}$. Si $ab=0$, il est clair que $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)=0$.

2. $e^{-a}f_n(a)\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left(-a+\left(a-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1+\left(-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{a^2}{2n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et donc

   $$e^{-a}f_n(a)-1+\frac{a^2}{2n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^4}{8}\right)\frac{1}{n^2}.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, posons $f(x)=\sin x$. On a $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=]0,1]\subset\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. Donc, puisque $u_0\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. Il est connu que $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x<x$ et de plus, pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x=x\Leftrightarrow x=0$. La suite u est à valeurs dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sin(u_n)<u_n$. La suite u est donc strictement décroissante et, étant minorée par 0, converge vers un réel ℓ de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ qui vérifie (f étant continue sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$) $f(\ell)=\ell$ ou encore $\ell=0$. En résumé,

   $$\boxed{\text{la suite } u \text{ est strictement positive, strictement décroissante et converge vers } 0.}$$

2. Soit α un réel quelconque. Puisque la suite u tend vers 0 , on a

   $$\begin{aligned}u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha=(\sin u_n)^\alpha-u_n^\alpha&\underset{n\to+\infty}{=}\left(u_n-\frac{u_n^3}{6}+o(u_n^3)\right)^\alpha-u_n^\alpha\\&=u_n^\alpha\left(\left(1-\frac{u_n^2}{6}+o(u_n^2)\right)^\alpha-1\right)=u_n^\alpha\left(-\alpha\frac{u_n^2}{6}+o(u_n^2)\right)\\&=-\alpha\frac{u_n^{\alpha+2}}{6}+o(u_n^{\alpha+2})\end{aligned}$$

   Pour $\alpha=-2$ on a donc

   $$\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}=\frac{1}{3}+o(1).$$

   D'après le lemme de CESARO, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2}-\frac{1}{u_k^2}\right)=\frac{1}{3}+o(1)$ ou encore $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{u_0^2}\right)=\frac{1}{3}+o(1)$ ou enfin,

   $$\frac{1}{u_n^2}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{n}{3}+\frac{1}{u_0^2}+o(n)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{n}{3}+o(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{3}.$$

Par suite, puisque la suite u est strictement positive,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Il est immédiat par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$ et donc, puisque la suite u est stritement positive, $u_{n+1} < u_n$. La suite u est strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers un réel ℓ vérifiant $\ell = \ell e^{-\ell}$ ou encore $\ell(1-e^{-\ell}) = 0$ ou encore $\ell = 0$.

$$\boxed{u \text{ est strictement positive, strictement décroissante et converge vers } 0.}$$

Soit α un réel quelconque. Puisque la suite u tend vers 0,

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha(e^{-\alpha u_n} - 1) = u_n^\alpha(-\alpha u_n + o(u_n)) = -\alpha u_n^{\alpha+1} + o(u_n^{\alpha+1}).$$

Pour $\alpha = -1$, on obtient en particulier $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + o(1)$. Puis, comme au numéro précédent, $\frac{1}{u_n} = n + \frac{1}{u_0} + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Pour n entier naturel donné, posons $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$. • Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in I_n$, posons $f(x) = \tan x - x$. f est dérivable sur I_n et pour x dans I_n, $f'(x) = \tan^2 x$. Ainsi, f est dérivable sur I_n et f' est strictement positive sur $I_n \setminus \{n\pi\}$. Donc f est strictement croissante sur I_n.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. f est continue et strictement croissante sur I_n et réalise donc une bijection de I_n sur $f(I_n) = \mathbb{R}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! x_n \in I_n/\ f(x_n) = 0$ (ou encore tel que $\tan x_n = x_n$. • On a $x_0 = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n\pi) = -n\pi < 0$ et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. En particulier,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + O(1).}$$

• Posons alors $y_n = x_n - n\pi$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $\tan(y_n) = \tan(x_n) = n\pi + y_n$ et donc, puisque $y_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\pi}{2} > y_n = \text{Arctan}(y_n + n\pi) \geq \text{Arctan}(n\pi).$$

Puisque $\text{Arctan}(n\pi)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$, on a $y_n = \frac{\pi}{2} + o(1)$ ou encore

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).}$$

• Posons maintenant $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et d'autre part $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Ensuite, $\tan\left(z_n + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n$ et donc $-\text{cotan}(z_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$. Puisque z_n tend vers 0, on en déduit que

$$-\frac{1}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\text{cotan}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi,$$

ou encore $z_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

• Posons enfin $t_n = z_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. On sait que $t_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que

$$-\operatorname{cotan}\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) = -\operatorname{cotan}(z_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n}).$$

Par suite,

$$-\tan\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{n\pi}\left(1+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)^{-1} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis,

$$\frac{1}{n\pi} - t_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc $t_n = \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Finalement,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{2n^2\pi}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Pour $x > 0$, posons $f(x) = x + \ln x$. f est continue sur $]0,+\infty[$, strictement croissante sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $]0,+\infty[$. f réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[) =]\lim_{x\to 0,\, x>0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$. En particulier,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{R},\ \exists! x_k \in]0,+\infty[/ f(x_k) = k.}$$

2. $f\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2} + \ln\frac{k}{2} < k$ pour k suffisamment grand (car $k - (\frac{k}{2} + \ln\frac{k}{2}) = \frac{k}{2} - \ln\frac{k}{2} \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ d'après les théorèmes de croissances comparées). Donc, pour k suffisamment grand, $f\left(\frac{k}{2}\right) < f(x_k)$. Puisque f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $x_k > \frac{k}{2}$ pour k suffisamment grand et donc que $\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty$. Mais alors, $k = x_k + \ln x_k \sim x_k$ et donc, quand k tend vers $+\infty$,

$$\boxed{x_k \underset{k\to+\infty}{=} k + o(k).}$$

Posons $y_k = x_k - k$. On a $y_k = o(k)$ et de plus $y_k + \ln(y_k + k) = 0$ ce qui s'écrit :

$$y_k = -\ln(k + y_k) = -\ln(k + o(k)) = -\ln k + \ln(1 + o(1)) = -\ln k + o(1).$$

Donc,

$$\boxed{x_k \underset{k\to+\infty}{=} k - \ln k + o(1).}$$

Posons $z_k = y_k + \ln k = x_k - k + \ln k$. Alors, $z_k = o(1)$ et $-\ln k + z_k = -\ln(k - \ln k + z_k)$. Par suite,

$$z_k = \ln k - \ln(k - \ln k + o(1)) = -\ln\left(1 - \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right) = \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Finalement,

$$\boxed{x_k \underset{k\to+\infty}{=} k - \ln k + \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).}$$

Correction de l'exercice 14 ▲

1. $x^3 \sin \frac{1}{x^2} \underset{x \to 0}{=} O(x^3)$ et en particulier $x^3 \sin \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$. Donc, en tenant compte de $f(0) = 1$,
$$f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2).$$
f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.
2. $f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + o(x)$. Donc, f admet en 0 un développement limité d'ordre 1. On en déduit que f est continue et dérivable en 0 avec $f(0) = f'(0) = 1$. f est d'autre part dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux (et donc sur $\mathbb{R}$) et pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$.
3. f' est définie sur $\mathbb{R}$ mais n'a pas de limite en 0. f' n'admet donc même pas un développement limité d'ordre 0 en 0.

Correction de l'exercice 15 ▲

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$, et donc
$$\text{Arcsin}\, x \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$
Puis,
$$\frac{1}{\text{Arcsin}\, x} \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + o(x^4)\right)^{-1} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} - \frac{3x^4}{40} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} - \frac{17x^3}{360} + o(x^3),$$
et donc,
$$\boxed{\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{Arcsin}\, x} \underset{x \to 0}{=} \frac{x}{6} + \frac{17x^3}{360} + o(x^3).}$$
La fonction f proposée se prolonge donc par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Le prolongement est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{6}$. La courbe représentative de f admet à l'origine une tangente d'équation $y = \frac{x}{6}$. Le signe de la différence $f(x) - \frac{x}{6}$ est, au voisinage de 0, le signe de $\frac{17x^3}{360}$. La courbe représentative de f admet donc à l'origine une tangente d'inflexion d'équation $y = \frac{x}{6}$.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. $\text{Arccos}\, x \underset{x \to 1^-}{=} o(1)$ (développement limité à l'ordre 0). Mais la fonction $x \mapsto \text{Arccos}\, x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 un développemement limité d'ordre 1.
2) Puisque $\text{Arccos}\, x \underset{x \to 1^-}{=} o(1)$,
$$\text{Arccos}\, x \underset{x \to 1^-}{\sim} \sin(\text{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \underset{x \to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$
$$\boxed{\text{Arccos}\, x \underset{x \to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.}$$

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Quand x tend vers 0,

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k + 2\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right) + o(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3+(-1)^k}{4} x^k + o(x^n).$$

2. On a aussi,

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} x^p\right)\left(\sum_{k=0}^{n} x^{2q}\right) + o(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+2q=k} 1\right) x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{2k+3+(-1)^k}{4}.}$$

(a_k est le nombre de façons de payer k euros en pièces de 1 et 2 euros).
