Espaces euclidiens

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 *** I

Montrer que la matrice de HILBERT $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est définie positive.

Correction ▼ [005786]

Exercice 2 *** I

1. Soit A une matrice carrée réelle de format n et $S = {}^tAA$. Montrer que $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S = {}^tAA$. A-t-on l'unicité de A ?
3. Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
4. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S)$.
5. (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit S une matrice symétrique positive.
   Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

Correction ▼ [005787]

Exercice 3 **** I

Soit E un espace euclidien de dimension n non nulle. Soit $(x_1,...,x_p)$ une famille de p vecteurs de E $(p \geqslant 2)$. On dit que la famille $(x_1,...,x_p)$ est une famille obtusangle si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ $(i < j \Rightarrow x_i|x_j < 0)$. Montrer que si la famille $(x_1,...,x_p)$ est une famille obtusangle alors $p \leqslant n+1$.

Correction ▼ [005788]

Exercice 4 **I Inégalité de HADAMARD

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
Montrer que pour tout n-uplet de vecteurs $(x_1,...x_n)$, on a : $|\det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)| \leqslant \|x_1\|...\|x_n\|$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [005789]

Exercice 5 **

Montrer que pour toute matrice carrée A réelle de format n, on a $|\det A| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2\right)}$.

Correction ▼ [005790]

Exercice 6 ***

Soit A une matrice orthogonale. Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n. Cas d'égalité si de plus tous les coefficients de A sont positifs ?

Correction ▼ [005791]

Exercice 7 **

On munit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

1. Déterminer l'orthogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

Correction ▼ [005792]

Exercice 8 **

Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. Matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de $e_1 + e_2$.

Correction ▼ [005793]

Exercice 9 ***

Soit A une matrice carrée réelle symétrique positive de format n. Montrer que $1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$.

Correction ▼ [005794]

Exercice 10 **

Déterminer $\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))$.

Correction ▼ [005795]

Exercice 11

Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-linéaire.

1. Montrer qu'il existe deux complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b\bar{z}$.
2. Calculer $\text{Tr}(f)$ et $\det(f)$ en fonction de a et b.
3. C.N.S. pour que f soit autoadjoint dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Correction ▼ [005796]

Exercice 12 ***

Trouver tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Correction ▼ [005797]

Exercice 13 **

Soit A une matrice carrée réelle. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont orthogonalement semblables.

Correction ▼ [005798]

Exercice 14 *** I

Montrer que le produit de deux matrices symétriques réelles positives est à valeurs propres réelles positives.

Correction ▼ [005799]

Exercice 15 *** I

Soient A et B deux matrices carrées réelles symétriques positives. Montrer que $\det A + \det B \leqslant \det(A + B)$.

Correction ▼ [005800]

Exercice 16 **

Valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = a \wedge (a \wedge x) \text{ où } a \text{ est un vecteur donné.}$$

Correction ▼ [005801]

Exercice 17 *** I

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension n qui conserve l'orthogonalité. Montrer qu'il existe un réel positif k tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|$.

Correction ▼ [005802]

Exercice 18 ** I

Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+y-2z-t=0 \end{array}\right.$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer les matrices dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P.
2. Calculer la distance d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ à P.

Correction ▼ [005803]

Exercice 19 **

La matrice $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? définie ?

Correction ▼ [005804]

Exercice 20 ***

$O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?

Correction ▼ [005805]

Correction de l'exercice 1 ▲

La matrice H_n est symétrique réelle. Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
{}^tXH_nX &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_ix_j}{i+j-1} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j \int_0^1 t^{i+j-2}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_jt^{i+j-2}\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2 dt \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

De plus, si $X \neq 0$, le polynôme $\sum_{i=1}^n x_iY^{i-1}$ n'est pas le polynôme nul et donc, puisqu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines, la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2$ est continue positive et non nulle sur $[0,1]$ et on en déduit que $\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2 dt > 0$. On a montré que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, ${}^tXH_nX > 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la matrice } H_n \text{ est symétrique définie positive.}}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = S$. Donc $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = {}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|_2^2 \geqslant 0$. Donc $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   $$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

2. Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe P dans $O_n(\mathbb{R})$ et D dans $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD{}^tP$.
   Posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$. Puisque S est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, D est dans $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ et on peut poser $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},...,\sqrt{\lambda_n})$ de sorte que $D'^2 = D$. On peut alors écrire
   $$S = PD{}^tP = PD'D'{}^tP = {}^t(D'{}^tP)D'{}^tP,$$
   et la matrice $A = D'tP$ convient.
   $$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) /\ S = {}^tAA.}$$
   On a aussi ${}^t(-A)(-A) = S$ et comme en général $-A \neq A$, on n'a pas l'unicité de la matrice A.
3.
   $$
   \begin{aligned}
   S \text{ définie positive} &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ {}^tXSX > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ \|AX\|_2^2 > 0 \\
   &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ AX \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}A = \{0\} \Leftrightarrow A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}).
   \end{aligned}
   $$
4. Montrons que les matrices A et S ont même noyau. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   $$X \in \mathrm{Ker}A \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow SX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker}S,$$
   et
   $$X \in \mathrm{Ker}S \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX\,{}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)AX = 0 \Rightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker}A.$$
   Ainsi, $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$ et en particulier, grâce au théorème du rang, on a montré que
   $$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A).}$$

5. Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Existence. D'après le théorème spectral, il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D_0 \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S = P_0 D_0 {}^t P_0$. Posons $D_0 = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des réels positifs puis $\Delta_0 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ et enfin $R = P_0 \Delta_0 {}^t P_0$. La matrice R est orthogonalement semblable à une matrice de $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ et est donc un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Puis

$$R^2 = P_0 \Delta_0^2 {}^t P_0 = P_0 D_0 {}^t P_0 = S.$$

Unicité. Soit M un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = S$.

M est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\lambda \in \text{Sp}(M)}{\oplus} E_M(\lambda)$. Mais si λ est une valeur propre de M, $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \text{Ker}(M^2 - \lambda^2 I_n) = \text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$. De plus, les valeurs propres de M étant positive, les λ^2, $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts ou encore les $\text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$, $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts.

Ceci montre que pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(M)$, $\text{Ker}(M - \lambda I_n) = \text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$ et que les λ^2, $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont toutes les valeurs propres de S.

Ainsi, nécessairement la matrice ${}^t P_0 M P_0$ est une matrice diagonale D. L'égalité $M^2 = S$ fournit $D^2 = D_0$ puis $D = \Delta_0$ (car $D \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$) et finalement $M = R$.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists! R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) /\ R^2 = S.}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1 ère solution. Soit $p \geqslant 2$. Montrons que si la famille $(x_1, ..., x_p)$ est obtusangle alors la famille $(x_1, ..., x_{p-1})$ est libre.

Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille obtusangle. Supposons que la famille $(x_1, ..., x_{p-1})$ soit liée.

Il existe donc $(\lambda_1, ..., \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k = 0$.

Quite à multiplier les deux membres de l'égalité par -1, on peut supposer que l'un des λ_i au moins est strictement positif. On pose $I = \{k \in [\![1, p-1]\!] /\ \lambda_k > 0\}$ et $J = \{k \in [\![1, p-1]\!] /\ \lambda_k \leqslant 0\}$ (éventuellement J est vide).

Si J est vide, il reste $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ et si J est non vide,

$$\|\textstyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\|^2 = -\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{j \in J} \lambda_j x_j\right) = -\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i \lambda_j (x_i|x_j) \leqslant 0 \text{ (car } \forall (i,j) \in I \times J,\ (x_i|x_j) < 0 \text{ et } \lambda_i \lambda_j \leqslant 0).$$

Ainsi, dans tous les cas, $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. Mais ceci est impossible car $\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right)|x_p = \sum_{i \in I} \lambda_i (x_i|x_p) < 0$.

On a montré que la famille $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est libre et on en déduit que $p - 1 \leqslant n$ ou encore $p \leqslant n+1$.

2ème solution. Montrons par récurrence sur $n = \dim E_n \geqslant 1$ que tout famille obtusangle de E_n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$.

• Pour $n = 1$. Soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de E_1. On peut identifier ces vecteurs à des réels. Deux des trois réels x_1, x_2 ou x_3 ont même signe et on ne peut donc avoir $x_1 x_2 < 0$ et $x_1 x_3 < 0$ et $x_2 x_3 < 0$.

Une famille obtusangle de E_1 a donc un cardinal inférieur ou égal à 2.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$. Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille obtusangle de E_{n+1}.

Si $p = 1$ alors $p \leqslant n+2$. Supposons dorénavant $p \geqslant 2$.

On va construire à partir de cette famille une famille obtusangle de cardinal $p-1$ d'un espace euclidien de dimension n.

Soit $F = x_p^{\perp}$. Puisque la famille $(x_1, ..., x_p)$ est obtusangle, le vecteur x_p n'est pas nul et F est un espace euclidien de dimension n.

On note y_1, y_2,..., y_{p-1} les projetés orthogonaux des vecteurs x_1, ... , x_{p-1} sur F. On sait que

$$\forall i \in [\![1, p-1]\!],\ y_i = x_i - \frac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2} x_p.$$

Soit $(i, j) \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $i \neq j$.

$$(y_i|y_j) = (x_i|x_j) - 2\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)\|x_p\|^2}{\|x_p\|^4} = (x_i|x_j) - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Ainsi, la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est une famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n et par hypothèse de récurrence $p-1 \leqslant n+1$ et donc $p \leqslant n+2$. Le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 4 ▲

Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée, l'inégalité est vraie.
Si la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre, on peut considérer $B_0 = (e_1,...,e_n)$ l'orthonormalisée de SCHMIDT de la famille $(x_1,...,x_n)$. Les bases B_0 et B sont des bases orthonormées de E et donc

$$\begin{aligned}|\det_B(x_1,...,x_n)| = |\det_{B_0}(x_1,...,x_n)| &= \text{abs}\left(\begin{vmatrix} (x_1|e_1) & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & (x_n|e_n) \end{vmatrix}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} |(x_k|e_k)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|\|e_k\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n,\ |\det_B(x_1,...,x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\| \text{ (inégalité de HADAMARD).}}$$

Ensuite,
- si la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs x_k est nul
- si la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|(x_k|e_k)| = \|x_k\|\|e_k\|$. Les cas d'égalité
de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ étant connus, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, x_k est colinéaire à e_k
ou encore si et seulement si la famille $(x_1,...,x_n)$ est orthogonale.
En résumé, l'inégalité de HADAMARD est une égalité si et seulement si la famille $(x_1,...,x_n)$ est orthogonale libre ou si l'un des vecteurs est nul.

Correction de l'exercice 5 ▲

C'est l'exercice 4.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale. On pose $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

$$\begin{aligned}\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1\times a_{i,j}\times 1\right| &= \left|{}^tXAX\right| = |(AX|X)| \\ &\leqslant \|AX\|\|X\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \|X\|^2 \text{ (puisque la matrice } A \text{ est orthogonale)} \\ &= n.\end{aligned}$$

On a l'égalité si et seulement si la famille (X,AX) est liée ce qui équivaut à X vecteur propre de A.
On sait que les valeurs propres (réelles) de A ne peuvent être que 1 ou -1. Donc,

$$\text{égalité} \Leftrightarrow AX = X \text{ ou } AX = -X \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}\right| = 1$$

Il paraît difficile d'améliorer ce résultat dans le cas général. Supposons de plus que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Puisque tous les $a_{i,j}$ sont éléments de $[0,1]$,

$$1 = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \geqslant \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = 1.$$

L'inégalité écrite est donc une égalité et on en déduit que chaque inégalité $a_{i,j} \geqslant a_{i,j}^2$, $1 \leqslant j \leqslant n$, est une égalité. Par suite, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \{0,1\}$. Ceci montre que la matrice A est une matrice de permutation qui réciproquement convient.

Correction de l'exercice 7 ▲

Le produit scalaire usuel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est défini par

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2,\ (A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

1. Déterminons l'orthogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $(A,B) \in \mathscr{S}_(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

$$(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) = -\mathrm{Tr}({}^tBA) = -(B|A).$$

et donc $(A|B) = 0$. Donc $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \subset (\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp$ et comme de plus, $\dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R})) = \dim\left(((\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp\right)$, on a montré que

$$\boxed{(\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp = \mathscr{S}_3(\mathbb{R}).}$$

2. Ainsi, la projection orthogonale de M sur $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est exactement la partie antisymétrique $p_a(M)$ de M et la distance cherchée est la norme de $M - p_a(M) = p_s(M)$ avec

$$p_s(M) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$d\left(M, \mathscr{A}_3(R)\right) = \|p_s(M)\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 1.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Posons $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$. On sait que

$$r(u) = (\cos\theta)u + (1-\cos\theta)\,(u|k)\,k + (\sin\theta)k\wedge u = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}(u|(e_1+e_2))(e_1+e_2) + \frac{\sqrt{6}}{4}(e_1+e_2)\wedge u$$

$$\text{« = »}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix} z \\ -z \\ -x+y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{6}}{4}z \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{\sqrt{6}}{4}z \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{\sqrt{6}}{4}y + \frac{1}{2}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et la matrice cherchée est

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

La matrice A est symétrique réelle positive. Donc ses valeurs propres λ_1,..., λ_n sont des réels positifs. De plus,

$$\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = \chi_A(-1) = (1+\lambda_1)\ldots(1+\lambda_n).$$

L'inégalité à démontrer équivaut donc à :

$$\forall(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ 1 + \sqrt[n]{\textstyle\prod_{k=1}^{n} \lambda_k} \leqslant \sqrt[n]{\textstyle\prod_{k=1}^{n}(1+\lambda_k)}.$$

Soit donc $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Si l'un des λ_k est nul, l'inégalité est immédiate.
Supposons dorénavant tous les λ_k strictement positifs. L'inégalité à démontrer s'écrit

$$\ln\left(1+\exp\left(\tfrac{1}{n}\left(\ln(\lambda_1)+\ldots+\ln(\lambda_n)\right)\right)\right) \leqslant \tfrac{1}{n}\left(\ln(1+\exp(\ln(\lambda_1)))+\ldots+\ln(1+\exp(\ln(\lambda_n)))\right) \quad (*)$$

ou encore $f\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right) \leqslant \frac{1}{n}(f(x_1)+\ldots+f(x_n))$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^x)$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \ln(\lambda_k)$.
L'inégalité à démontrer est une inégalité de convexité. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \tfrac{e^x}{e^x+1} = 1 - \tfrac{1}{e^x+1} \text{ puis } f''(x) = \tfrac{e^x}{(e^x+1)^2} \geqslant 0.$$

La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui démontre l'inégalité $(*)$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ 1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n+A)}.}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit A une matrice orthogonale à coefficients entiers. Puisque les colonnes ou les lignes de A sont unitaires, on trouve par ligne ou par colonne un et un seul coefficient de valeur absolue égale à 1, les autres coefficients étant nuls. A est donc obtenue en multipliant chaque coefficient d'une matrice de permutation par 1 ou -1.
Réciproquement, une telle matrice est orthogonale à coefficients entiers.
Il y a $n!$ matrices de permutation et pour chaque matrice de permutation 2^n façons d'attribuer un signe $+$ ou $-$ à chaque coefficient égal à 1. Donc

$$\boxed{\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})) = 2^n n!.}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Pour tout nombre complexe z

$$\begin{aligned} f(z) &= f((\text{Re}(z)).1 + (\text{Im}(z)).i) = (\text{Re}(z))f(1) + (\text{Im}(z))f(i) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})f(1) + \frac{1}{2i}(z-\bar{z})f(i) \\ &= \frac{f(1)-if(i)}{2}z + \frac{f(1)+if(i)}{2}\bar{z}, \end{aligned}$$

et on peut prendre $a = \frac{f(1)-if(i)}{2}$ et $b = \frac{f(1)+if(i)}{2}$. (Réciproquement pour a et b complexes donnés, l'application f ainsi définie est $\mathbb{R}$-linéaire et on a donc l'écriture générale complexe d'un endomorphisme du plan).

2. $\mathrm{Tr}(f)=\mathrm{Re}(f(1))+\mathrm{Im}(f(i))=\mathrm{Re}(a+b)+\mathrm{Im}(i(a-b))=\mathrm{Re}(a+b)+\mathrm{Re}(a-b)=2\mathrm{Re}(a)$
et

$$\begin{aligned}\det(f)&=\mathrm{Re}(a+b)\mathrm{Im}(i(a-b))-\mathrm{Im}(a+b)\mathrm{Re}(i(a-b))=\mathrm{Re}(a+b)\mathrm{Re}(a-b)+\mathrm{Im}(a+b)\mathrm{Im}(a-b)\\&=(\mathrm{Re}(a))^2-(\mathrm{Re}(b))^2+(\mathrm{Im}(a))^2-(\mathrm{Im}(b))^2=|a|^2-|b|^2.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}(f)=2\mathrm{Re}(a)\text{ et }\det(f)=|a|^2-|b|^2.}$$

3. Soient z et z' deux nombres complexes. On rappelle que

$$z|z'=(\mathrm{Re}z)(\mathrm{Re}z')+(\mathrm{Im}z)(\mathrm{Im}z')=\frac{1}{4}(z+\bar{z})(z'+\overline{z'})-\frac{1}{4}(z-\bar{z})(z'-\overline{z'})=\frac{1}{2}(\bar{z}z'+z\overline{z'})=\mathrm{Re}(\bar{z}z').$$

et au passage si on oriente le plan de sorte que la base orthonormée $(1,i)$ soit directe,

$$[z,z']=(\mathrm{Re}z)(\mathrm{Im}z')+(\mathrm{Im}z)(\mathrm{Re}z')=\frac{1}{4i}(z+\bar{z})(z'-\overline{z'})-\frac{1}{4i}(z-\bar{z})(z'+\overline{z'})=\frac{1}{2i}(\bar{z}z'-z\overline{z'})=\mathrm{Im}(\bar{z}z').$$

Notons M la matrice de f dans la base $(1,i)$. Puisque la base $(1,i)$ est orthonormée,

$$f=f^*\Leftrightarrow M={}^tM\Leftrightarrow\mathrm{Im}(a+b)=\mathrm{Re}(i(a-b))\Leftrightarrow\mathrm{Im}(a+b)=-\mathrm{Im}(a-b)\Leftrightarrow 2\mathrm{Im}a=0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}.$$

$$\boxed{f=f^*\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit (i,j,k) une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté. Posons $u=f(i)$, $v=f(j)$ et $w=f(k)$. Nécessairement, $u\wedge v=f(i)\wedge f(j)=f(i\wedge j)=f(k)=w$ et de même $v\wedge w=u$ et $w\wedge u=v$.
1er cas. Si l'un des vecteurs u ou v ou w est nul alors $u=v=w=0$ et donc $f=0$. Réciproquement, l'application nulle convient.
2ème cas. • Si les trois vecteurs u, v et w sont non nuls alors $u\wedge v\neq 0$ et donc la famille (u,v) est libre. Mais alors la famille (u,v,w) est une base directe de $\mathbb{R}^3$.
Ensuite $w=u\wedge v$ est orthogonal à u et v et $v=w\wedge u$ est orthogonal à u. On en déduit que la famille (u,v,w) est une base orthogonale directe de $\mathbb{R}^3$.
Enfin, puisque u et v sont orthogonaux, $\|w\|=\|u\wedge v\|=\|u\|\|v\|$ et de même $\|u\|=\|v\|\|w\|$ et $\|v\|=\|u\|\|w\|$. Puis $\|u\|\|v\|\|w\|=(\|u\|\|v\|\|w\|)^2$ et donc, puisque les vecteurs u, v et w sont non nuls, $\|u\|\|v\|\|w\|=1$. Les égalités $\|u\|\|v\|\|w\|=1$ et $\|u\|=\|v\|\|w\|$ fournissent $\|u\|^2=1$ et de même $\|v\|^2=\|w\|^2=1$.
Finalement, la famille (u,v,w) est une base orthonormée directe.
En résumé, l'image par f d'une certaine base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ et on sait que f est un automorphisme orthogonal positif de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire une rotation de $\mathbb{R}^3$.
• Réciproquement, si f est la rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire e_3. On considère e_1 et e_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que la famille (e_1,e_2,e_3) soit une base orthonormée directe.
Pour vérifier que f est solution, par linéarité, il suffit de vérifier les 9 égalités : $\forall(i,j)\in\{1,2,3\}^2$, $f(e_i\wedge e_j)=f(e_i)\wedge f(e_j)$. Pour vérifier ces 9 égalités, il suffit se réduisent en fin de compte d'en vérifier 2 :

$$f(e_1)\wedge f(e_2)=e_3=f(e_3)=f(e_1\wedge e_2)\text{ et }f(e3)\wedge f(e1)=e_3\wedge f(e_1)=f(e_2)=f(e_3\wedge e_1).$$

Les endomorphismes cherchés sont donc l'application nulle et les rotations de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 13 ▲

Puisque les matrices $S_1={}^tAA$ et $S_2=A^tA$ sont symétriques réelles, ces deux matrices sont à valeurs propres réelles. On sait d'autre part que si M et N sont deux matrices quelconques alors les matrices MN et NM ont même polynôme caractéristique.
Notons alors $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la famille des valeurs propres des matrices S_1 et S_2 et posons $D=\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots\lambda_n)$. D'après le théorème spectral, il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que $S_1=P_1D^tP_1$ et $S_2=P_2D^tP_2$. Mais alors

$$S_2 = P_2({}^tP_1S_1P_1)^tP_2 = (P_2{}^tP_1)S_1{}^t(P_2{}^tP_1).$$

Comme la matrice $P_2{}^tP_1$ est orthogonale, on a montré que les matrices S_1 et S_2 sont orthogonalement semblables.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\text{ les matrices } {}^tAA \text{ et } A^tA \text{ sont orthogonalement semblables.}}$$

Correction de l'exercice 14 ▲

Remarque. Il faut prendre garde au fait que le produit de deux matrices symétriques n'est pas nécessairement symétrique. Plus précisément, si A et B sont deux matrices symétriques alors

$$AB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t(AB) = AB \Leftrightarrow {}^tB^tA = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

et le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si ces deux matrices commutent. Donc au départ, rien n'impose que les valeurs propres de AB soient toutes réelles .
Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. D'après l'exercice 2, il existe deux matrices carrées M et N telles que $A = {}^tMM$ et $B = {}^tNN$. On a alors $AB = {}^tMM^tNN$. La matrice AB a même polynôme caractéristique que la matrice $N({}^tMM^tN = {}^t(M^tN)M^tN$. D'après l'exercice 2, cette dernière matrice est symétrique positive et a donc des valeurs propres réelles positives. On a montré que les valeurs propres de la matrice AB sont réelles et positives.

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathrm{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+.}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives.
1er cas. Supposons qu'aucune des deux matrices A ou B n'est inversible, alors $\det A + \det B = 0$.
D'autre part, la matrice $A+B$ est symétrique car $(\mathscr{S}_n(R),+,.)$ est un espace vectoriel et ses valeurs propres sont donc réelles. De plus, pour X vecteur colonne donné, ${}^tX(A+B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geqslant 0$.
La matrice $A+B$ est donc symétrique réelle positive. Par suite, les valeurs propres de la matrice $A+B$ sont des réels positifs et puisque $\det(A+B)$ est le produit de ces valeurs propres, on a $\det(A+B) \geqslant 0 = \det A + \det B$.
2ème cas. Sinon, une des deux matrices A ou B est inversible (et donc automatiquement définie positive). Supposons par exemple A définie positive.
D'après l'exercice 2, il existe une matrice inversible M telle que $A = {}^tMM$. On peut alors écrire $A + B = {}^tMM + B = {}^tM(I_n + {}^t(M^{-1}BM^{-1})M$ et donc

$$\det(A+B) = (\det M)^2\det(I_n + {}^t(M^{-1})BM^{-1} = (\det M)^2\det(I_n + C)$$

où $C = {}^tM^{-1}BM^{-1}$. La matrice C est symétrique, positive car pour tout vecteur colonne X,

$${}^tXCX = {}^tX^t(M^{-1})BM^{-1}X = {}^t(M^{-1}X)B(M^{-1}X) \geqslant 0$$

et ses valeurs propres λ_1,..., λ_n sont des réels positifs. Les valeurs propres de la matrice $I_n + C$ sont les réels $1+\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et donc

$$\det(I_n + C) = (1+\lambda_1)...(1+\lambda_n) \geqslant 1 + \lambda_1 ... \lambda_n = 1 + \det C.$$

Maintenant, $\det A = (\det M)^2$ puis $\det B = (\det M)^2 \det C$ et donc

$$\det A + \det B = (\det M)^2(1+\det C) \leqslant (\det M)^2\det(I_n + C) = \det(A+B).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \det A + \det B \leqslant \det(A+B).}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

Si $a = 0$, $f = 0$ et il n'y a plus rien à dire.
Si $a \neq 0$, puisque $f(a) = 0$, 0 est valeur propre de f et $\mathrm{Vect}(a) \subset E_0(f)$. D'autre part, si x est orthogonal à a, d'après la formule du double produit vectoriel

$$f(x) = (a.x)a - \|a\|^2 x = -\|a\|^2 x.$$

Donc le réel non nul $-\|a\|^2$ est valeur propre de f et $a^\perp \subset E_{-\|a\|^2}$. Maintenant, $\dim \mathrm{Vect}(a) + \dim a^\perp = 3$ et donc $\mathrm{Sp}(f) = (0, -\|a\|^2, -\|a\|^2)$ puis $E_0(f) = \mathrm{Vect}(a)$ et $E_{-\|a\|^2} = a^\perp$. On en déduit aussi que f est diagonalisable.
On peut noter que, puisque f est diagonalisable et que les sous-espaces propres sont orthogonaux, f est un endomorphisme symétrique.

Correction de l'exercice 17 ▲

Il s'agit de montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien E qui conserve l'orthogonalité est une similitude.
On peut raisonner sur une base orthonormée de E que l'on note $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Par hypothèse, la famille $(f(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthogonale. De plus, pour $i \neq j$, $(e_i + e_j)|(e_i - e_j) = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$ et donc $f(e_i + e_j)|f(e_i - e_j) = 0$ ce qui fournit $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Soit k la valeur commune des normes des $f(e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
Si $k = 0$, tous les $f(e_i)$ sont nuls et donc f est nulle.
Si $k \neq 0$, l'image par l'endomorphisme $\frac{1}{k} f$ de la base othonormée $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. Donc l'endomorphisme $\frac{1}{k} f$ est un automorphisme orthogonal de E et donc l'endomorphisme $\frac{1}{k} f$ conserve la norme.
Dans tous les cas, on a trouvé un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Correction de l'exercice 18 ▲

Les deux formes linéaires considérées sont indépendantes et donc P est un plan. Une base de P est par exemple $(i,j) = ((1,-1,0,0)(1,0,2,-3))$. On orthonormalise la base (i,j).
On prend $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$ puis $e'_2 = j - (j|e_1)e_1 = (1,0,2,-3) - \frac{1}{2}(1,-1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1,4,-6)$ puis $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1,1,4,-6)$.

Une base orthonormée de P est (e_1, e_2) où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$ et $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1,1,4,-6)$.

1. Le projeté orthogonal de $u = (x,y,z,t)$ sur P est

$$\begin{aligned} p_P(u) &= (u|e_1)e_1 + (u|e_2)e_2 = \frac{1}{2}(x-y)(1,-1,0,0) + \frac{1}{54}(x+y+4z-6t)(1,1,4,-6) \\ &= \frac{1}{27}(14x-13y+2z-3t, -13x+14y+2z-3t, 2x+2y+8z-12t, -3x-3y-12z+18t). \end{aligned}$$

La matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P est

$$\boxed{M = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 & -3 \\ -13 & 14 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & -12 \\ -3 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}.}$$

La matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P est

$$\boxed{S = 2M - I_4 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 1 & -26 & 4 & -6 \\ -26 & 1 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -11 & -24 \\ -6 & -6 & -24 & 9 \end{pmatrix}.}$$

2. La distance de u = (x,y,z,t) à P est

$$\begin{aligned}\|u - p_P(u)\| &= \frac{1}{27}\|(14x+13y-2z+3t, 13x+14y-2z+3t, -2x-2y+19z+12t, 3x+3y+12z+9t)\| \\ &= \frac{1}{27}\sqrt{(14x+13y-2z+3t)^2+(13x+14y-2z+3t)^2+(-2x-2y+19z+12t)^2+(3x+3y+12z+9t}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

1ère solution. (n'utilisant pas les valeurs propres) Soient A la matrice de l'énoncé puis $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}{}^tXAX &= (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i\neq j} x_ix_j = \sum_{i\neq j}(x_i^2 - x_ix_j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i\neq j} x_i^2 - 2x_ix_j + x_j^2\right) \\ &= \sum_{i\neq j}(x_i - x_j)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

et donc la matrice A est positive. De plus, si $X = (1)_{1\leqslant i\leqslant n} \neq 0$, ${}^tXAX = 0$ et donc la matrice A n'est pas définie.
2ème solution. La matrice A est symétrique réelle. Donc ses valeurs propres sont réelles et A est diagonalisable. Par suite, la dimension de chacun de des sous-espaces propres de A est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.
On note alors que $\text{rg}(A - nI_n) = 1$ et donc n est valeur propre de A d'ordre $n-1$. Soit λ la valeur propre manquante.

$$(n-1)n + \lambda = \text{Tr}A = n(n-1).$$

Donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et donc la matrice A est positive mais 0 est valeur propre de A et donc la matrice A n'est pas définie.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est positive et non définie.}}$$

Correction de l'exercice 20 ▲

Soient A et B deux matrices orthogonales distinctes. Montrons que pour tout réel $\lambda \in]0,1[$, la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ n'est pas orthogonale.
Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale.
Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on note respectivement A_j, B_j et C_j la j-ème colonne de matrice A, de la matrice B et de la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$. Ces trois matrices étant orthogonales, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$1 = \|C_j\| \leqslant (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\| = (1-\lambda) + \lambda = 1,$$

et donc $\|C_j\| = (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité de MINKOWSKI. Puisque $\lambda \in]0,1[$, les colonnes $(-\lambda)A_j$ et λB_j ne sont pas nulles et donc sont colinéaires et de même sens. Puisque les réels $1-\lambda$ et λ sont strictement positifs, il en est de même des colonnes A_j et B_j et puisque ces colonnes sont des vecteurs unitaires, ces colonnes sont en fin de compte égales. En résumé, si il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale, alors $A = B$. Ceci est une contradiction et on a montré que

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas convexe.}}$$
