Systèmes d'équations linéaires

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1

Résoudre (en discutant en fonction des différents paramètres) les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z=4 \\ -x+my+2z=5 \\ 7x+3y+(m-5)z=7 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{l} 2x+my+z=3m \\ x-(2m+1)y+2z=4 \\ 5x-y+4z=3m-2 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=3 \\ x+my+z-mt=m+2 \\ mx-y-mz-t=-1 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z+mt=m-1 \\ 2x+y+mz+3t=1 \\ 3x+my+z+2t=0 \\ mx+3y+2z+t=0 \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{l} mx+y+z=m+2 \\ -x-y+mz=m-2 \\ -mx+y+mz=-m \\ x-y-mz=m-4 \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=m \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{m} \end{array}\right.$

7) $\left\{\begin{array}{l} (b+c)^2x+b^2y+c^2z=1 \\ a^2x+(c+a)^2y+c^2z=1 \\ a^2x+b^2y+(a+b)^2z=1 \end{array}\right.$

8) $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=p \\ cx+ay+bz=q \\ bx+cy+az=r \end{array}\right.$

9) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=2 \\ a^2x+b^2y+c^2z=3 \end{array}\right.$ (où a, b, et c sont les racines de l'équation $t^3-t+1=0$).

Correction ▼ [005375]

Exercice 2

Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5=0 \end{array}\right. .$$

Correction ▼ [005376]

Exercice 3

Dans le plan, on donne n points A_1, ... , A_n. Existe-t-il n points M_1,..., M_n tels que A_1 soit le milieu de $[M_1,M_2]$, A_2 soit le milieu de $[M_2,M_3]$,..., A_{n-1} soit le milieu de $[M_{n-1},M_n]$ et A_n soit le milieu de $[M_n,M_1]$.

Correction ▼ [005377]

Exercice 4

Résoudre le système : $x_1+x_2=0$, $x_{k-1}+x_k+x_{k+1}=0$ pour $k=2,\dots,n-1$, $x_{n-1}+x_n=0$.

Correction ▼ [005378]

Exercice 5

Soit E un ensemble contenant au moins n éléments et $(f_1, f_2 ..., f_n)$ un n-uplet de fonctions de E dans $\mathbb{C}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre ;
2. il existe n éléments a_1, a_2,..., a_n dans E tels que $\det(f_i(a_j))_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$.

Correction ▼ [005379]

Exercice 6

Déteminer l'inverse de $A = (a_{i,j})$ telle que $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

Correction ▼ [005380]

Exercice 7

Soient a_1,..., a_n, b_1,..., b_n $2n$ nombres complexes deux à deux distincts tels que les sommes $a_i + b_j$ soient toutes non nulles. Résoudre le système $\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{a_i+b_j} = 1$, pour tout $i = 1, \dots, n$ (en utilisant la décomposition en éléments simples de $R = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{X+b_j}$).

Correction ▼ [005381]

Correction de l'exercice 1 ▲

m est un paramètre réel

1. $\det S = 2(m(m-5)-6)+(3(m-5)-3)+7(6-m) = 2m^2-14m+12 = 2(m-1)(m-6)$. Le système est de CRAMER si et seulement si $m \in \{1,6\}$. Si $m \notin \{1,6\}$, les formules de CRAMER fournissent alors :

$$x = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{2(m-6)(2m-9)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2m-9}{m-1}$$
$$y = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{7}{m-1}$$
$$z = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & m7 \end{vmatrix} = \frac{-14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = -\frac{7}{m-1}$$

Si $m \in \{1,6\}$, $\det S = 0$. Un déterminant principal est $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations équivaut à $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3+(m-6)y}{5} \\ z = \frac{14-(2m+3)y}{5} \end{array}\right.$.

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité (les termes en y disparaissent automatiquement pour $m \in \{1,6\}$ et donc pas la peine de les calculer).

$$\begin{aligned} 7x+2y+(m-5)z = 7 &\Leftrightarrow 7\frac{3+(m-6)y}{5}+3y+(m-5)\frac{14-(2m+3)y}{5} = 7 \Leftrightarrow 21+14(m-5)-35 = 0 \\ &\Leftrightarrow 14(m-6) = 0 \Leftrightarrow m = 6. \end{aligned}$$

Si $m = 1$, le système n'a pas de solution et si $m = 6$, l'ensemble des solutions est $\{(\frac{3}{5}, y, -\frac{y}{5}),\ y \in \mathbb{R}\}$.

2. $\det S = 2(-8m-4+2)-(4m+1)+5(2m+2m+1) = 0$. Le système n'est jamais de CRAMER. Un déterminant principal est $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations équivaut à $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{6m-4-(4m+1)y}{3} \\ z = \frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} \end{array}\right.$. La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité.

$$\begin{aligned} 5x-y+4z = 3m-2 &\Leftrightarrow 5\frac{6m-4-(4m+1)y}{3}-y+4\frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} = 3m-2 \\ &\Leftrightarrow 5(6m-4)+4(-3m+8)-3(3m-2) = 0 \Leftrightarrow 9(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = -2. \end{aligned}$$

Si $m \neq -2$, le système n'a pas de solution. Si $m = -2$, l'ensemble des solutions est $\{(\frac{-16+7y}{3}, y, \frac{14-8y}{3}),\ y \in \mathbb{R}\}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & -1 & -m \end{vmatrix} = -2m^2+2m = -2m(m-1)$. Le système est de CRAMER en x, y et z si et seulement si $m \in \{0,1\}$.

Si $m \notin \{0,1\}$, les formules de CRAMER fournissent :

$$x=\frac{1}{-2m(m-1)}\begin{vmatrix}3-t&1&1\\ m+2+mt&m&1\\ -1+t&-1&-m\end{vmatrix}=\frac{(2m^2-2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)}=-t+1$$
$$y=\frac{1}{-2m(m-1)}\begin{vmatrix}1&3-t&1\\ 1&m+2+mt&1\\ m&-1+t&-m\end{vmatrix}=\frac{(-2m^2-2m)+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)}=\frac{m+1}{m-1}t+1$$
$$z=\frac{1}{-2m(m-1)}\begin{vmatrix}1&1&3-t\\ 1&m&m+2+mt\\ m&-1&-1+t\end{vmatrix}=\frac{(2m^2+2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)}=-\frac{m+1}{m-1}t+1.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(-t+1,\frac{m+1}{m-1}t+1,-\frac{m+1}{m-1}t+1,t),\ t\in\mathbb{R}\}$.

Si $m=0$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=3\\ x+z=2\\ y+t=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=2-x\\ t=-1-y\end{array}\right.$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(x,y,2-x,1-y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

Si $m=1$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=3\\ x+y+z-t=3\\ x-y-z-t=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}t=0\\ x+y+z=3\\ x-y-z=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}t=0\\ x=1\\ z=2-y\end{array}\right.$. Dans ce cas, l'ensemble de solutions est $\{(1,y,2-y,0),\ z\in\mathbb{R}\}$.

4.

$$\det(S)=\begin{vmatrix}1&2&3&m\\ 2&1&m&3\\ 3&m&1&2\\ m&3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m+6&2&3&m\\ m+6&1&m&3\\ m+6&m&1&2\\ m+6&3&2&1\end{vmatrix}=(m+6)\begin{vmatrix}1&2&3&m\\ 1&1&m&3\\ 1&m&1&2\\ 1&3&2&1\end{vmatrix}$$
$$=(m+6)\begin{vmatrix}1&2&3&m\\ 0&-1&m-3&3-m\\ 0&m-2&-2&2-m\\ 0&1&-1&1-m\end{vmatrix}=(m+6)\begin{vmatrix}-1&m-3&3-m\\ m-2&-2&2-m\\ 1&-1&1-m\end{vmatrix}$$
$$=(m+6)\begin{vmatrix}-1&m-3&0\\ m-2&-2&-m\\ 1&-1&-m\end{vmatrix}=-m(m+6)\begin{vmatrix}-1&m-3&0\\ m-2&-2&1\\ 1&-1&1\end{vmatrix}$$
$$=-m(m+6)\begin{vmatrix}-1&m-3&0\\ m-3&-1&0\\ 1&-1&1\end{vmatrix}=-m(m+6)\begin{vmatrix}-1&m-3\\ m-3&-1\end{vmatrix}=m(m-2)(m-4)(m+6).$$

Le système est de CRAMER si et seulement si $m\notin\{0,2,4,-6\}$. Dans ce cas :

$$m(m-2)(m-4)(m+6)x=\begin{vmatrix}m-1&2&3&m\\ 1&1&m&3\\ 0&m&1&2\\ 0&3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2-(m-1)&3-m(m-1)&m-3(m-1)\\ 1&1&m&3\\ 0&m&1&2\\ 0&3&2&1\end{vmatrix}$$
$$=-\begin{vmatrix}3-m&-m^2+m+3&-2m+3\\ m&1&2\\ 3&2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5m-6&-m^2+5m-3&-2m+3\\ m-6&-3&2\\ 0&0&1\end{vmatrix}$$
$$=-[-3(5m-6)-(m-6)(-m^2+5m-3)]$$
$$=-m^3+11m^2-18m=-m(m-2)(m-9).$$

et $x=-\frac{m-9}{(m-4)(m+6)}$.

$$m(m-2)(m-4)(m+6)y = \begin{vmatrix} 1 & m-1 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & 0 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 3 & 1 & 2 \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3m^2-5m-6 & -m^2+m+3 & 2m^2-4m-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ m-6 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -3(3m^2-5m-6) - (m-6)(2m^2-4m-3)$$

$$= -2m^3+7m^2-6m = -m(2m-3)(m-2)$$

et $y = -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}$.

$$m(m-2)(m-4)(m+6)z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m-1 & m \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 & 2 \\ m & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & 0 & -2m+3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 & 2 \\ m & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -2m+3 \\ 3 & m & 2 \\ m & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-2m+3)(m-6) + 3(5m-6) - m(2m^2-5m+6) = -2m^3+7m^2-6m$$

$$= -m(2m-3)(m-2),$$

et $z = -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}$.

$$m(m-2)(m-4)(m+6)t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m-1 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 & 0 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 \\ 3 & m & 1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2m+3)(2m-3) - 3(3m^2-5m-3) + m(m^3-m^2-4m+3)$$

$$= m^4 - m^3 - 17m^2 + 30m = m(m-2)(m^2+m-15)$$

et $t = \frac{m^2+m-15}{(m-4)(m-6)}$.
Si $m = 0$, le système s'écrit

$$\begin{cases} x+2y+3z = -1 \\ 2x+y+3t = 1 \\ 3x+z+2t = 0 \\ 3y+2z+t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t = \ (E_1+E_2) \\ 2x+y+3t = 1 \\ x+y+z+t = 0(E_3+E_4) \\ 3y+2z+t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x-y-z \\ -x-2y-3z = 1 \\ -x+2y+z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x-2y \\ -x-2y-3(x-2y) = 1 \\ t = -x-y-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+\frac{1}{4}\ z = -x-\frac{1}{2} \\ t = -x+\frac{1}{4} \end{cases}$$

D'où l'ensemble de solutions : $\{(x, x+\frac{1}{4}, -x-\frac{1}{4}; -x+\frac{1}{2}),\ x \in \mathbb{R}\}$.
Si $m=2$, on obtient pour ensemble de solutions : $\{(x, -x-\frac{5}{8}, x+\frac{1}{2}; -x-\frac{1}{8}),\ x \in \mathbb{R}\}$.
Si $m=4$ ou $m=-6$, on voit en résolvant que le système est incompatible.

5. $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -1 & -1 & m \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} = m(2m)+(-m+1)+(m+1) = 2(m^2+1) \neq 0$ (m désignant un paramètre réel).
Le système formé des équations 1, 2 et 4 est donc de CRAMER. Les formules de CRAMER fournissent alors :

$$x = \frac{2m^2-m-1}{m^2+1},\ y = 3-m \text{ et } z = \frac{3m-1}{m^2+1}.$$

La troisième équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$\begin{aligned} -m\frac{2m^2-m-1}{m^2+1}+3-m+m\frac{3m-1}{m^2+1} &= -m \\ &\Leftrightarrow -m(2m^2-m-1)+(3-m)(m^2+1)+m(3m-1) = -m(m^2+1) \\ &\Leftrightarrow -2m^3+7m^2+3 = 0 \end{aligned}$$

Le système est compatible si et seulement si m est l'une des trois racines de l'équation $-2X^3+7X^2+3 = 0$.

6. $\det S = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{Van}(a,b,c)}{abc}$.
Si a, b et c sont deux à deux distincts, le système est de CRAMER. On obtient :

$$x = \frac{abc}{mbc}\frac{\mathrm{Van}(m,b,c)}{\mathrm{Van}(a,b,c)} = \frac{a(b-m)(c-m)}{m(b-a)(c-a)},$$

puis, par symétrie des rôles, $y = \frac{b(a-m)(c-m)}{m(a-b)(c-b)}$ et $z = \frac{c(a-m)(b-m)}{m(a-c)(b-c)}$.
Si $a=b\neq c$ (ou $a=c\neq b$ ou $b=c\neq a$), le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1-z \\ ax+ay+cz=m \\ \frac{1}{a}x+\frac{1}{a}y+\frac{1}{c}z=\frac{1}{m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=1-z \\ a(1-z)+cz=m \\ \frac{1}{a}(1-z)+\frac{1}{c}z=\frac{1}{m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=1-z \\ z=\frac{m-a}{c-a} \\ (\frac{1}{c}-\frac{1}{a})\frac{m-a}{c-a}=\frac{1}{m}-\frac{1}{a} \end{array}\right. .$$

Le système est compatible si et seulement si $(m-a)(m-c)=0$ ou encore ($m=a$ ou $m=c$). Dans ce cas, l'ensemble des solutions est : $\{(x, \frac{m-c}{a-c}-x; \frac{m-a}{c-a}),\ x \in \mathbb{R}\}$.
Si $a=b=c$, le système s'écrit : $x+y+z=1=\frac{m}{a}=\frac{a}{m}$. Le système est compatible si et seulement si $m=a=b=c$ et dans ce cas l'ensemble des solutions est : $\{(x,y,1-x-y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

7.

$$\begin{aligned} \det S &= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2-(b+c)^2 & (a+c)^2-b^2 & 0 \\ 0 & b^2-(a+c)^2 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a-b-c & a+c-b & 0 \\ 0 & b-a-c & a+b-c \end{vmatrix} = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2bc & b^2 & c^2 \\ -2c & a+c-b & 0 \\ -2(b-c) & b-a-c & a+b-c \end{vmatrix} \\ &= 2(a+b+c)^2(c^2(-c(b-a-c)+(b-c)(a+c-b))+(a+b-c)(bc(a+c-b)+b^2c)) \\ &= 2(a+b+c)^2(c^2b(a-b+c)+(a+b-c)bc(a+c)) \\ &= 2bc(a+b+c)^2(a^2+ab+ac) = 2abc(a+b+c)^3. \end{aligned}$$

Si $abc(a+b+c)\neq 0$, le système est de CRAMER et on obtient après calcul :

$$x=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)},\ y=\frac{(a-b-c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)}\text{ et }z=\frac{(a-b+c)(a-b-c)}{2abc(a+b+c)}.$$

Si $a=0$ (ou $b=0$ ou $c=0$), le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l}(b+c)^2x+b^2y+c^2z=1\\ c^2(y+z)=1\\ b^2(y+z)=1\end{array}\right..$$

Donc,

Si (($a=0$ et $b^2\neq c^2$) ou ($b=0$ et $a^2\neq c^2$) ou ($c=0$ et $a^2\neq b^2$)), le système n'a pas de solution.

Si $a=0$ et $b=c\neq 0$, l'ensemble des solutions est $\{(0,y,-\frac{y}{b^2}),\ y\in\mathbb{R}\}$ (résultats analogues pour les cas ($b=0$ et $a=c\neq 0$) et ($c=0$ et $a=b\neq 0$)).

Si $a=b=c=0$, il n'y a pas de solution.

Si $a=0$ et $c=-b\neq 0$, l'ensemble des solutions est $\{(x,y-\frac{y}{b^2}),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ (résultats analogues pour ($b=0$ et $c=-a\neq 0$) et ($c=0$ et $b=-a\neq 0$).

Si $abc\neq 0$ et $a+b+c=0$, le système équivaut à l'équation $a^2x+b^2y+c^2z=1$. L'ensemble des solutions est $\{(x,y,\frac{1-a^2x-b^2y}{c^2}),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

8.

$$\begin{aligned}\det S&=\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&c\\1&a&b\\1&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&c\\0&a-b&b-c\\0&c-b&a-c\end{vmatrix}\\&=(a+b+c)((a-b)(a-c)+(b-c)^2)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\\&=(a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)\end{aligned}$$

Si $\det S\neq 0$, les formules de CRAMER fournissent :

$$x\det S=\begin{vmatrix}p&b&c\\q&a&b\\r&c&a\end{vmatrix}=p(a^2-bc)+q(c^2-ab)+r(b^2-ac).$$

Je n'ai pas envie de finir.

9. Soit $P=X^3-X-1$. P et $P'=3X^2-1$ n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$ car $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas racines de P et donc les racines de P sont simples ou encore, a, b et c sont deux à deux distincts. Ainsi, $\det S=\mathrm{Van}(a,b,c)\neq 0$ et le système est de CRAMER.

$$(b-a)(c-a)(c-b)x=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&b&c\\3&b^2&c^2\end{vmatrix}=-2(c^2-b^2)+3(c-b)=(c-b)(3-2(b+c))=(c-b)(3+2a),$$

(car $a+b+c=0$) et $x=\frac{3+2a}{(b-a)(c-a)}$.

$$(b-a)(c-a)(c-b)y=\begin{vmatrix}1&0&1\\a&2&c\\a^2&3&c^2\end{vmatrix}=2(c^2-a^2)-3(c-a)=(c-a)(2(a+c)-3)=-(c-a)(3+2b),$$

et $y=-\frac{3+2b}{(b-a)(c-a)}$.

$$(b-a)(c-a)(c-b)z=\begin{vmatrix}1&1&0\\a&b&2\\a^2&b^2&3\end{vmatrix}=-2(b^2-a^2)+3(b-a)=(b-a)(3+2c),$$

et $z=\frac{3+2c}{(c-a)(c-b)}$ (difficile d'aller plus loin).

Correction de l'exercice 2 ▲

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2+2(-7) = -12 \neq 0$ et le sytème est de CRAMER en x_1, x_2 et x_4. On note aussi que le système est homogène de rang 3 et donc que l'ensemble des solutions F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ de dimension $5-3=2$.

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_4=x_3-x_5 \\ x_2-2x_4=-x_3-2x_5 \\ 2x_1+x_2=5x_3+4x_5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2=-2x_1+5x_3+4x_5 \\ x_4=\frac{1}{2}((-2x_1+5x_3+4x_5)+x_3+2x_5) \\ x_1+2x_2+3x_4=x_3-x_5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2=-2x_1+5x_3+4x_5 \\ x_4=-x_1+3x_3+3x_5 \\ x_1+2(-2x_1+5x_3+4x_5)+3(-x_1+3x_3+3x_5)=x_3-x_5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=3x_3+3x_5x_2=-x_3-2x_5 \\ x_4=0 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est $F=\{(3x_3+3x_5,-x_3-2x_5,x_3,0,x_5),\ (x_3,x_5)\in\mathbb{R}^2\}=\text{Vect}(e_1,e_2)$ où $e_1=(3,-1,1,0,0)$ et $e_2=(3,-2,0,0,1)$ et, puisque $\dim F=2$, une base de F est (e_1,e_2).

Correction de l'exercice 3 ▲

Si z_k est l'affixe complexe de M_k et a_k est l'affixe complexe de A_k, le problème posé équivaut au système :

$$\forall k\in\{1,...,n-1\},\ z_k+z_{k+1}=2a_k \text{ et } z_n+z_1=2a_n.$$

Le déterminant de ce système vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1^{n-1}+(-1)^{n+1}.1^{n-1} \text{ (en développant suivant la première colonne)}$$

$$=1+(-1)^{n+1}.$$

Si n est impair, $\det S=2\neq 0$ et le système admet une et une seule solution.
On obtient $z_2=2a_1-z_1$, $z_3=2a_2-2a_1+z_1$,..., $z_n=2a_{n-1}-2a_{n-2}+...+2a_2-2a_1+z_1$ et enfin :

$$2a_{n-1}-2a_{n-2}+...+2a_2-2a_1+z_1+z_1=2a_n,$$

et donc $z_1=a_1-a_2+...-a_{n-1}+a_n$ puis $z_2=a_1+a_2-a_3+...+a_{n-1}-a_n$ puis $z_3=-a_1+a_2+a_3-a_4...+a_n$ ... puis $z_n=-a_1+a_2-a_3+...+a_{n-1}+a_n$.
Si n est pair, $\det S=0$ mais le mineur formé des $n-1$ premières lignes et $n-1$ dernières colonnes est non nul. Donc, le système est de rang $n-1$, les $n-1$ premières équations et $n-1$ dernières inconnues peuvent être choisies pour équations et inconnues principales.
On résout les $n-1$ premières équations constituant un sytème de CRAMER en z_2,...,z_n. On obtient

$$z_2=2a_1-z1,\ z_3=2a_2-2a_1+z_1,...,\ z_n=2a_{n-1}-2a_{n-2}+...-2a_2+2a_1-z_1.$$

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$2a_{n-1}-2a_{n-2}+...-2a_2+2a_1-z_1+z_1=2a_n \Leftrightarrow a_1+a_3...=a_2+a_4+...$$

Cette dernière condition se traduit géométriquement par le fait que les systèmes de points $(A_1,A_3,...)$ et $(A_2,A_4,...)$ ont même isobarycentre.
En résumé, si n est pair et si les systèmes de points $(A_1,A_3,...)$ et $(A_2,A_4,...)$ n'ont pas même isobarycentre, le problème n'a pas de solutions.
Si n est pair et si les systèmes de points $(A_1,A_3,...)$ et $(A_2,A_4,...)$ ont même isobarycentre, le problème a une infinité de solutions : M_1 est un point quelconque puis on construit les symétriques successifs par rapport aux points A_1, A_2 ...

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit D_n le déterminant du système pour $n \geq 3$.
En développant ce déterminant suivant sa première colonne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 5,\ D_n = D_{n-1} - D_{n-2},$$

ce qui fournit aisément par récurrence, en tenant compte de $D_3 = D_4 = -1$:

$$\forall k \geq 1,\ D_{3k} = D_{3k+1} = (-1)^k \text{ et } D_{3k+2} = 0.$$

Pour n élément de $3\mathbb{N}^* \cup (1+3\mathbb{N}^*)$, le système est de CRAMER et homogène et admet donc une et une seule solution à savoir la solution nulle.
Pour $n = 3k+2$, puisque $D_n = 0$ mais que le mineur de format $n-1$ constitué des $n-1$ premières lignes et colonnes est D_{n-1} et est donc non nul, le système est homogène de rang $n-1$ et l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1. On trouve aisément $\mathscr{S} = \{\lambda(1,-1,0,1,-1,0...,1,-1),\ ;\lambda \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

$(1) \Rightarrow (2)$. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que : $(\forall (a_1,...,a_n) \in E^n /\ (\det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq n} = 0) \Rightarrow ((f_1,...,f_n)$ liée$)$.
Pour $n = 1$,

$$(\forall a_1 \in E/ \det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq 1} = 0) \Rightarrow (\forall a_1/\ f_1(a_1) = 0) \Rightarrow (f_1 = 0) \Rightarrow (f_1) \text{ liée.}$$

Soit $n \geq 2$. Supposons que $(\forall (a_1,...,a_{n-1}) \in E^{n-1}/ \det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq n-1} = 0) \Rightarrow (f_1,...,f_{n-1})$ liée.
Soient f_1,..., f_n n fonctions telles que $\forall (a_1,...,a_n) \in E^n/ \det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq n} = 0$.
Si $(f_1,...,f_{n-1})$ est liée alors $(f_1,...,f_n)$ est liée en tant que sur famille d'une famille liée. Si $(f_1,...,f_{n-1})$ est libre, par hypothèse de récurrence, il existe a_1,...,a_{n-1} $n-1$ éléments de E tels que $\det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq n-1} \neq 0$.
Mais, par hypothèse, on a :

$$\forall x \in E,\ \det(f_i(a_1),...,f_i(a_{n-1}),f_i(x))_{1\leq i\leq n} = 0.$$

En développant ce déterminant suivant sa dernière colonne, on obtient une égalité du type $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0$ où les λ_i sont indépendants de x ou encore une égalité du type $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ avec $\lambda_n = \det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq n-1} \neq 0$ ce qui montre encore que $(f_1,...,f_n)$ est liée.
$(2) \Rightarrow (1)$. On suppose que $\exists (a_1,...,a_n) \in E^n/ \det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq n} \neq 0)$. Montrons que $(f_1,...,f_n)$ est libre.
Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. En particulier : $\forall j \in \{1,...,n\},\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(a_j) = 0$. Les n égalités précédentes fournissent un système d'équations linéaires en les λ_i à n inconnues, n équations, de déterminant non nul et homogène ou encore un système de CRAMER homogène dont on sait qu'il admet pour unique solution $(\lambda_1,...,\lambda_n) = (0,...,0)$. On a montré que $(f_1,...,f_n)$ est libre.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit A_n la matrice de l'énoncé.
En développant $\det A_n$ suivant sa première colonne puis en développant le déterminant de format $n-1$ obtenu suivant sa première ligne, on obtient $\det A_n = -\det A_{n-2}$ pour $n \geq 3$.
Par suite, pour $p \geq 1$, $\det A_{2p} = (-1)^{p-1}\det A_2 = (-1)^p \neq 0$ et pour $p \geq 1$, A_{2p} est inversible.

On a aussi, pour $p \geq 1$, $\det A_{2p+1} = (-1)^{p-1}\det A_3 = 0$ et, pour $p \geq 1$, A_{2p+1} n'est pas inversible. Finalement, A_n est inversible si et seulement si n est pair.
Dorénavant, on pose $n = 2p$ ($p \geq 1$).
Pour $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $Y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$ vecteurs colonnes donnés, on a :

$$AX = Y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = y_1 \\ \forall i \in \{2,...,2p-1\},\ x_{i-1} + x_{i+1} = y_i \\ x_{2p-1} = y_{2p} \end{array}\right. .$$

Ce système se résoud en $x_2 = y_1$ puis, par récurrence, pour $k \leq p$, $x_{2k} = y_{2k-1} - y_{2k-3} + ... + (-1)^{k-1}y_1$ et aussi $x_{2p-1} = y_{2p}$, puis, par récurrence, pour $k \leq p$, $x_{2k-1} = y_{2k} - y_{2k+2} + ... + (-1)^{p-k}y_{2p}$. D'où l'inverse de A quand $n = 8$ par exemple :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $F = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{X+b_k}$.
La fraction rationnelle F s'écrit, après réduction au même dénominateur :

$$F = \frac{P}{Q} \text{ où } Q = \prod_{k=1}^n (X+b_k) \text{ et } P \text{est un polynôme de degré infèrieur ou égal à } n-1.$$

Maintenant,

$$(x_1,...,x_n) \text{ solution de } (S) \Leftrightarrow \forall k \in \{1,...,n\},\ F(a_k) = 1 \Leftrightarrow \forall k \in \{1,...,n\},\ (Q-P)(a_k) = 0.$$

Par suite, puisque les a_k sont deux à deux distincts, $Q-P$ est divisible par $\prod_{k=1}^n (X-a_k)$. Mais, Q est unitaire de degré n et P est de degré infèrieur ou égal à $n-1$, et donc $Q-P$ est unitaire de degré n ce qui montre que $Q-P = \prod_{k=1}^n (X-a_k)$ ou encore que

$$P = \prod_{k=1}^n (X+b_k) - \prod_{k=1}^n (X-a_k).$$

Réciproquement, si $F = \frac{\prod_{k=1}^n (X+b_k) - \prod_{k=1}^n (X-a_k)}{\prod_{k=1}^n (X+b_k)}$, alors $\forall k \in \{1,...,n\},\ F(a_k) = 1$.
En résumé,

$$\begin{aligned} (x_1,...,x_n) \text{ solution de } (S) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{X+b_k} = \frac{\prod_{k=1}^n (X+b_k) - \prod_{k=1}^n (X-a_k)}{\prod_{k=1}^n (X+b_k)} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ x_i = \lim_{x\to -b_i} (x+b_i)\frac{\prod_{k=1}^n (x+b_k) - \prod_{k=1}^n (x-a_k)}{\prod_{k=1}^n (x+b_k)} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ x_i = \frac{\prod_{k=1}^n (b_i+a_k)}{\prod_{k=1}^n (b_k-b_i)} \end{aligned}$$
