Chapitre 12

Continuité

Objectifs

- Définir la notion de continuité et étudier la structure de $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$.
- Étudier la continuité sur un intervalle : théorème des valeurs intermédiaires et ses conséquences.
- Étudier la notion d'uniforme continuité et le théorème de *Heine*.
- Étudier les liens entre la continuité et la monotonie d'une fonction.
- Définir la notion d'approximation par les fonctions en escalier.
- Étendre la notion de continuité aux fonctions à valeurs complexes.

Sommaire

I) Rappels

1) Définitions

DÉFINITION 12.1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$, on dit que f est
- *continue en a lorsque $\lim\limits_{t\to a} f(t) = f(a)$ (sinon on dit que a est un point de discontinuité de f).*
- *continue à gauche en a lorsque $I\cap]-\infty;a[\neq\emptyset$ et $\lim\limits_{t\to a^-} f(t) = f(a)$.*
- *continue à droite en a lorsque $I\cap]a;+\infty[\neq\emptyset$ et $\lim\limits_{t\to a^+} f(t) = f(a)$.*

Si f est continue en tout point de I, alors on dit que f est continue sur I. L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$.

Remarques :

a) *Les fonctions trigonométriques, logarithmes, exponentielles, puissances, polynomiales, rationnelles, ainsi que la fonction valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.*

b) *Une fonction lipschitzienne sur un intervalle I est continue sur I (réciproque fausse, par exemple la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$).*

c) *f est continue en $a \in I$ ssi $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in I, |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

d) *Si f est continue sur I et si $J \subset I$, alors f est continue sur J.*

e) *f est continue en a ssi $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(t) = f(a)$, lorsque a n'est pas une borne de I, ceci équivaut encore à $\lim\limits_{t\to a^+} f(t) = f(a)$ et $\lim\limits_{t\to a^-} f(t) = f(a)$, i.e. f est continue à gauche et à droite en a.*

f) *Si f est continue en a, alors f est bornée au voisinage de a (car f a une limite finie en a).*

g) *f est continue en a ssi pour toute suite (u_n) d'éléments de I, qui tend vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.*

Exercices:
- Étudier la continuité de $x \mapsto \mathrm{E}(x)$ en $a \in \mathbb{R}$, distinguer $a \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, $\chi_{\mathbb{Q}}$, est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Prolongement par continuité : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit a une extrémité de I réelle et n'appartenant pas à I, si f admet une limite finie ℓ en a, alors la fonction $\tilde{f} : I \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue sur $I \cup \{a\}$. Cette fonction est appelée **prolongement de f par continuité en a**.

Exemple: La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

2) Théorèmes généraux

THÉORÈME 12.1

Soient f, g deux fonctions continues sur I, et soit α un réel, alors :
- *$f+g$, $f \times g$ et αf sont continues sur I.*
- *Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.*
- *Si $h : J \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle J et si $\mathrm{Im}(f) \subset J$, alors $h \circ f$ est continue sur I.*

Preuve: Ceci découle des propriétés des limites, par exemple : $\lim\limits_a f = f(a)$ et $\lim\limits_a g = g(a)$, donc $\lim\limits_a (f+g) = f(a) + g(a)$ (somme de limites finies), ce qui prouve que $f+g$ est continue en a. Les autres points se démontrent de la même façon. □

Conséquences :

a) Il découlent des théorèmes généraux que $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre pour les opérations usuelles sur les fonctions.

b) Si f et g sont continues sur I alors $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ le sont (en particulier f^+ et f^- le sont), car : $\sup(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$.

Exercice: Étudier la continuité de la fonction f avec : $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)(x-\pi)}{\sin(x)} & \text{si } 0 < x < \pi \\ e^x - \cos(x) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$, y-a-t'il un prolongement par continuité en π ?

II) Fonctions continues sur un intervalle

1) Théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME 12.2

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a;b]$ ($a < b$), si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors f s'annule au moins une fois, i.e. : $\exists\, \ell \in [a;b], f(\ell) = 0$.

Preuve: Méthode dichotomique : on construit deux suites (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a, b_0 = b$, puis pour tout entier n :

$$\text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \text{ et } f(a_n) \text{ ont le même signe, alors } a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n$$

sinon :

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}.$$

On montre ensuite (par récurrence) que $\forall\ n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \in [a;b], b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont de signes contraires. Pour $n = 0$: ceci est évident. Si c'est vrai pour un entier $n \geqslant 0$: alors a_n et b_n sont dans $[a;b]$, donc $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ aussi. Si $f(c_n)$ et $f(a_n)$ ont le même signe, alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$, on voit donc que a_{n+1} et b_{n+1} sont dans $[a,b]$, que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$, et que $f(a_{n+1})$ et $f(b_{n+1})$ sont de signes contraires.

Si $f(c_n)$ et $f(a_n)$ sont de signes contraires, alors $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $a_{n+1} = b_n$, on voit donc que a_{n+1} et b_{n+1} sont dans $[a,b]$, que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$, et que $f(a_{n+1})$ et $f(b_{n+1})$ sont de signes contraires. La propriété est donc vraie pour tout entier n.

On a alors pour tout entier n : $a_{n+1} - a_n = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ \text{ou} \\ \frac{b_n - a_n}{2} \end{array}\right.$, donc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$, la suite (a_n) est croissante. De même on montre que la suite (b_n) est décroissante, comme $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$, les deux suites sont adjacentes. Elles ont donc une limite commune $\ell \in [a;b]$. La fonction f étant continue en ℓ, on a $f(a_n) \to f(\ell)$ et $f(b_n) \to f(\ell)$, donc $f(a_n) \times f(b_n) \to f(\ell)^2$, or pour tout $n, f(a_n) \times f(b_n) \leqslant 0$, donc $f(\ell)^2 \leqslant 0$, et donc $f(\ell) = 0$. □

Cette méthode permet de calculer des valeurs approchées de ℓ.

Conséquences :

a) Il découle de ce théorème que si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur **l'intervalle** I et si f change de signe, alors f s'annule au moins une fois sur I.

b) Une fonction continue sur un intervalle et qui ne s'annule pas, garde **un signe constant**. Ceci est faux si I n'est pas un intervalle, par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice: Montrer que tout polynôme (réel) de degré impair admet au moins une racine réelle.

THÉORÈME 12.3 (des valeurs intermédiaires)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I, alors $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle.

Plus précisément, si $a, b \in I$ et si c est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe α entre a et b tel que $f(\alpha) = c$.

Preuve: Soient a, b deux réels distincts de I, supposons $a < b$, soit c un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, posons $g(t) = f(t) - c$, alors g est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires. D'après le théorème précédent, il existe $\alpha \in [a;b]$ tel que $g(\alpha) = 0$, *i.e.* $f(\alpha) = c$.

Posons $J = \mathrm{Im}(f)$ et soient $u < v$ deux éléments de J, alors il existe $a, b \in I$ (distincts) tels que $f(a) = u$ et $f(b) = v$. Soit $c \in [u, v]$, alors il existe α entre a et b tel que $f(\alpha) = c$ donc $c \in J$, ce qui prouve que J est un intervalle. □

2) Continuité sur un segment

Proposition : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $M = \sup(A)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers M. De même, il existe une suite (b_n) d'éléments de A qui tend vers $m = \inf(A)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve: Pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}$, il suffit de considérer le voisinage :

$$V_n = \begin{cases}]M - \frac{1}{n+1}; M + \frac{1}{n+1}[& \text{si } M \in \mathbb{R} \\ ]n; +\infty[& \text{si } M = +\infty \end{cases}.$$

Comme $M = \sup(A)$, pour chaque valeur de n on peut choisir un élément a_n de A dans V_n. La suite (a_n) ainsi construite est une suite d'éléments de A qui tend vers M. La technique est la même pour m. □

THÉORÈME 12.4

L'image d'un segment $[a; b]$ par une fonction continue est un segment $[m; M]$.

Preuve: Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a; b]$, posons $J = \mathrm{Im}(f)$, on sait que J est un intervalle. Posons $m = \inf(J)$ et $M = \sup(J)$, il existe une suite (y_n) de J qui tend vers m, or $y_n \in \mathrm{Im}(f)$, donc il existe $x_n \in [a; b]$ tel que $f(x_n) = y_n$. La suite (x_n) est une suite de $[a; b]$, elle est donc bornée, d'après le théorème de *Bolzano-Weierstrass* on peut en extraire une suite convergente : $x_{\sigma(n)} \to \ell$, par passage à la limite on a $\ell \in [a; b]$, mais alors $f(x_{\sigma(n)}) \to f(\ell)$ car f est continue, c'est à dire $y_{\sigma(n)} \to f(\ell)$, or $y_{\sigma(n)} \to m$, donc $m = f(\ell)$. Ceci prouve que m est un réel et que $m \in J$, donc $m = \min(J)$. De même on montre que M est un réel que $M \in J$, finalement $J = [m; M]$. □

Il en découle qu'une fonction continue sur un segment possède un maximum (M) et un minimum (m). On dit aussi parfois qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Exercice: Montrer qu'une fonction continue sur un segment strictement positive, est minorée par un réel strictement positif.

3) Uniforme continuité

Dans la définition de « f est continue en a », on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in I, |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Dans cette définition, le réel α **dépend de** a (et de ε bien entendu). On va distinguer dans la suite le cas où α ne dépend que de ε :

DÉFINITION 12.2

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall\, a, x \in I, |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Remarques :

a) Cette définition dépend aussi de l'ensemble I, on dit qu'elle a un caractère global, alors que la définition de la continuité en un point est locale car elle ne dépend que du point (pas de l'ensemble I).

b) La définition d'uniforme continuité est plus forte que la définition de continuité. Autrement dit, une fonction uniformément continue sur I est nécessairement continue sur I. Nous verrons que la réciproque est fausse en général.

c) Une fonction lipschitzienne sur I est nécessairement uniformément continue sur I. En particulier si f est dérivable sur I et si f' est bornée, alors f est uniformément continue sur I. Par contre si f' est non bornée, alors on sait que f n'est pas lipschitzienne sur I mais elle peut très bien être uniformément continue.

Exemples:

- La fonction $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur tout segment $[a;b]$ (car lipschitzienne). Pour la même raison, les fonctions sin et cos sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0;+\infty[$. Car pour $x, y \geqslant 0, |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$, il suffit donc de prendre $\alpha = \varepsilon^2$ dans la définition. Cependant cette même fonction n'est pas lipschitzienne sur $[0;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Si c'était le cas : avec $\varepsilon = 1$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall\ x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \alpha \Longrightarrow |x^2 - y^2| < 1$. Prenons $x_n = \sqrt{n+1}$ et $y_n = \sqrt{n}$ alors $x_n - y_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$, donc pour n assez grand on aura $|x_n - y_n| < \alpha$ d'où $|x_n^2 - y_n^2| < 1$ *i.e.* $1 < 1$ ce qui est absurde.
- Étudier l'uniforme continuité des fonctions $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ et $x \mapsto \cos(x^2)$ sur $[0;+\infty[$.

THÉORÈME 12.5 (de *Heine*[1])

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Preuve: Par l'absurde : on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall\ \alpha > 0, \exists\ x, y \in I, |x-y| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

En prenant $\alpha = \dfrac{1}{n+1}$ pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}$, on construit deux suites (x_n) et (y_n) de I telles que $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$. La suite (x_n) étant bornée (car I est un segment), on peut en extraire une suite convergente : $x_{\sigma(n)} \to \ell$. Par passage à la limite on $\ell \in I$. L'inégalité $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n+1}$ pour tout n entraîne que $y_{\sigma(n)} \to \ell$. La fonction f étant continue en ℓ, on a $f(x_{\sigma(n)}) \to f(\ell)$ et $f(y_{\sigma(n)}) \to f(\ell)$, donc $|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| \to 0$, ce qui donne par passage à la limite, $0 \geqslant \varepsilon$ ce qui est absurde. Donc f est uniformément continue sur I. □

III) Continuité et fonctions monotones

1) Rappels

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone sur l'intervalle I, alors en tout point intérieur à I f admet une limite finie à gauche et à droite (théorème de la limite monotone). Plus précisément, si f est croissante et si x_0 est intérieur à I, alors :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x).$$

Proposition : Si f est strictement croissante et continue sur l'intervalle I, alors :
- lorsque $I = [a;b]$, on a $\text{Im}(f) = [f(a); f(b)]$,
- lorsque $I = [a;b[$, on a $\text{Im}(f) = [f(a); \lim\limits_{b} f[$,
- lorsque $I =]a;b]$, on a $\text{Im}(f) =]\lim\limits_{a} f; f(b)]$,
- lorsque $I =]a;b[$, on a $\text{Im}(f) =]\lim\limits_{a} f; \lim\limits_{b} f[$.

Preuve: Montrons par exemple le cas où $I = [a;b[$, on sait que $\text{Im}(f)$ est un intervalle car f est continue sur I. Soit $J = \text{Im}(f)$, alors $\sup(J) = \sup f = \lim\limits_{b} f$ (limite non atteinte car la monotonie est stricte), $\inf(J) = \inf f = f(a)$, donc $\text{Im}(f) = [f(a); \lim\limits_{b} f[$. Les autres cas se traitent de la même façon, on a évidemment un énoncé analogue lorsque f est strictement décroissante. □

2) Monotonie et continuité

THÉORÈME 12.6

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone sur l'intervalle I et si $\text{Im}(f)$ *est un intervalle, alors f est nécessairement continue sur I.*

1. *HEINE Heinrich Eduard* (1821 – 1881) : mathématicien allemand qui travailla sur la théorie des fonctions.

Preuve: Quitte à changer f en $-f$, on peut supposons f croissante sur I. Soit $a \in I$ un élément de I qui n'est pas la borne inférieure de I. Si $x \in I$ avec $x < a$, alors $f(x) \leqslant \lim_{a^-} f \leqslant f(a)$, ce qui entraîne que $\lim_{a^-} f \in \operatorname{Im}(f)$. D'autre part, si $x \geqslant a$, alors $f(x) \geqslant f(a)$. On en déduit que l'intervalle $]\lim_{a^-} f, f(a)[$ est inclus dans $\operatorname{Im}(f)$ mais il ne contient aucun élément de $\operatorname{Im}(f)$, cet intervalle est donc vide, *i.e.* $\lim_{a^-} f = f(a)$, ce qui prouve que f est continue à gauche en a. Le raisonnement est analogue pour montrer la continuité à droite en a (pour $a \neq \sup(I)$). □

Ce théorème énonce une réciproque du théorème des valeurs intermédiaires, mais elle n'est valable que pour les fonctions monotones.

THÉORÈME 12.7

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I et injective, alors f est strictement monotone.

Preuve: Soient $a < b$ deux éléments de I, f étant injective, $f(a) \neq f(b)$, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f(a) < f(b)$, montrons alors que f est strictement croissante sur I :

- Étape 1 : soit $x \in]a; b[$, si $f(x) > f(b)$, alors un réel $c \in]f(b); f(x)[$ aura un antécédent dans $]x; b[$ (théorème des valeurs intermédiaires), et un antécédent dans $]a; x[$ car on a aussi $c \in]f(a); f(x)[$, ce qui contredit l'injectivité de f, donc $f(x) < f(b)$. De la même façon, on montre que $f(x) > f(a)$. En conclusion, si $x \in]a; b[$, alors $f(a) < f(x) < f(b)$.
- Étape 2 : soit $x \in I$ avec $x < a$, si $f(x) > f(b)$ alors d'après l'étape 1 (appliquée à $-f$), on devrait avoir $f(x) > f(a) > f(b)$ ce qui est absurde, donc $f(x) < f(b)$, mais alors l'étape 1 (en échangeant a et x) nous dit que $f(x) < f(a) < f(b)$. En conclusion, si $x < a$ alors $f(x) < f(a)$.
- Étape 3 : soit $x \in I$ avec $x > b$, comme ci-dessus, on montre que $f(x) > f(b)$.
- Étape 4 : soient $x < y$ deux éléments de I :
  - Si $x < y \leqslant a$: on sait que $f(x) < f(a)$, mais alors l'étape 1 entraîne que $f(x) < f(y)$.
  - Si $x \leqslant a < y$: on sait alors que $f(x) \leqslant f(a) < f(y)$, donc $f(x) < f(y)$.
  - Si $a < x < y$: alors on sait que $f(a) < f(y)$, mais alors l'étape 1 entraîne que $f(x) < f(y)$.

  Dans tous les cas, $f(x) < f(y)$, f est strictement croissante.

□

3) Théorème des bijections

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone, alors f est injective, donc f induit une bijection de I sur $\operatorname{Im}(f)$, la bijection réciproque est :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \operatorname{Im}(f) & \to & I \\ x & \mapsto & y \text{ défini par } y \in I \text{ et } f(y) = x \end{array}.$$

De plus, la bijection a le même sens de variation que f, en effet, supposons f croissante et soient $y < y'$ deux éléments de $\operatorname{Im}(f)$, alors il existe $x, x' \in I$, tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$; si on avait $x \geqslant x'$ alors on aurait $y \geqslant y'$ ce qui est contradictoire, donc $x < x'$ *i.e.* $\phi(y) < \phi(y')$.

D'autre part, dans un repère orthonormé du plan, on a :

$$M(x, y) \in \mathscr{C}_\phi \iff \left\{ \begin{array}{l} x \in \operatorname{Im}(f) \\ y = \phi(x) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y \in I \\ f(y) = x \end{array} \right. \iff M'(y, x) \in \mathscr{C}_f.$$

On en déduit que les courbes représentatives des fonctions f et ϕ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Le théorème suivant apporte une précision sur la continuité de la réciproque :

THÉORÈME 12.8

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone sur l'intervalle I, alors f induit une bijection de I sur $J = \operatorname{Im}(f)$. Si de plus f est continue sur I, alors la bijection réciproque est continue sur J.

Preuve: I étant un intervalle et f continue, l'ensemble $J = \mathrm{Im}(f)$ est un intervalle, donc la bijection réciproque ϕ est monotone et transforme l'intervalle J en l'intervalle I, d'après un des théorèmes précédents, ϕ est continue sur J. □

IV) Approximation

1) Fonctions en escalier

DÉFINITION 12.3

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est en escalier sur $[a;b]$ lorsqu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, des réels $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$, et des réels $c_0, \ldots, c_{n-1}$ tels que sur chacun des intervalles ouverts : $]x_k; x_{k+1}[$ la fonction f est constante égale à c_k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. On dit aussi parfois que f est constante par morceaux. L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;b]$ est noté $\mathscr{E}([a;b], \mathbb{R})$.

Remarques :

a) La courbe représentative d'une fonction en escalier (par exemple $f(x) = \mathrm{E}(x)$ sur $[0;a]$ où a est un réel positif) a la forme d'un escalier !

b) Les réels $x_0 = a < \cdots < x_n = b$ de la définition constituent ce que l'on appelle une **subdivision** de l'intervalle $[a;b]$. Une telle subdivision est dite **adaptée** à la fonction en escalier f lorsque f est constante sur chacun des morceaux (ouverts) de la subdivision. Il est facile de voir qu'il y a une infinité de subdivisions adaptées à f (lorsque f est en escalier).

c) La définition ne fait pas intervenir la valeur de f aux points de la subdivision.

$\mathscr{E}([a;b], \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles sur les fonctions.

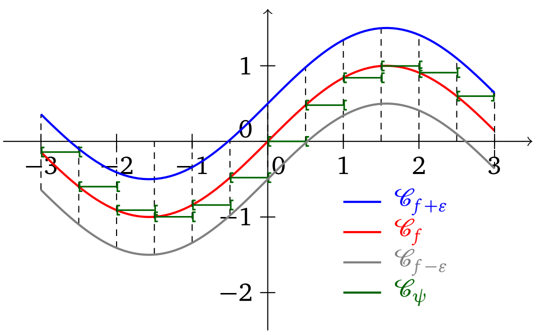
THÉORÈME 12.9

Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a;b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction ψ en escalier sur $[a;b]$ telle que $\forall t \in [a;b], |f(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon$.

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe une fonction g en escalier sur $[a;b]$ telle que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. La fonction f est uniformément continue sur $[a;b]$ (théorème de *Heine*), il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b], |x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Soit $n = 1 + \mathrm{E}(\frac{b-a}{\alpha})$, on a alors $\frac{b-a}{n} < \alpha$. Découpons l'intervalle $[a;b]$ en n morceaux de longueur $\frac{b-a}{n}$, on obtient ainsi une subdivision dont les points sont les réels $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0..n]\!]$. On définit maintenant la fonction g en posant :

$$g(t) = \begin{cases} f(b) & \text{si } t = b \\ f(x_k) & \text{si } t \in [x_k; x_{k+1}[\end{cases}$$

il est alors facile de vérifier que pour tout réel t de $[a;b]$, on a $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$ en distinguant les cas $t = b$ et $t \in [x_k; x_{k+1}[$, on a donc $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. □



Remarques :

a) C'est l'uniforme continuité de f qui fait aboutir la démonstration.

b) L'approximation par des fonctions en escalier sera utilisée pour définir la notion d'intégrale (méthode des rectangles).

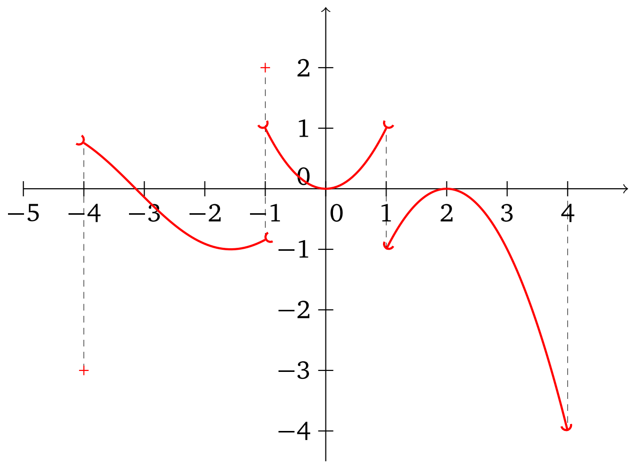
c) Si f est continue sur $[a, b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions en escalier ϕ et ψ telle que $\forall\ t \in [a; b], \psi(t) \leqslant f(t) \leqslant \phi(t)$ avec $\phi(t) - \psi(t) < \varepsilon$. En effet, on sait qu'il existe une fonction en escalier g telle que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon/2$, on a donc pour $t \in [a; b], g(t) - \varepsilon/2 \leqslant f(t) \leqslant g(t) + \varepsilon/2$, il suffit donc de prendre $\psi = g - \varepsilon/2$ et $\phi = g + \varepsilon/2$.

2) Fonctions continues par morceaux

DÉFINITION 12.4

Une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur le segment $[a; b]$, lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (a = x_0, \dots, x_n = b)$ de $[a; b]$ telle que sur chaque morceau $]x_k; x_{k+1}[$ la fonction f est continue et prolongeable par continuité sur $[x_k; x_{k+1}]$.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$ est noté $\mathscr{C}^0_M([a; b], \mathbb{R})$.



Remarques :

a) Cela revient à dire que f est continue sur chaque morceau $]x_k; x_{k+1}[$ et que f admet une limite finie à gauche en $x_1, \dots, x_n$ et une limite finie à droite en $x_0, \dots, x_{n-1}$. En particulier, f est bornée sur $[a; b]$, *i.e.* $\mathscr{C}^0_M([a; b], \mathbb{R}) \subset \mathscr{B}([a; b], \mathbb{R})$.

b) Toute fonction en escalier sur $[a; b]$ est continue par morceaux, on a donc :

$$\mathscr{E}([a; b], \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0_M([a; b], \mathbb{R})$$

c) Toute fonction continue sur $[a; b]$ est continue par morceaux sur $[a; b]$, on a donc aussi :

$$\mathscr{C}^0([a; b], \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0_M([a; b], \mathbb{R})$$

THÉORÈME 12.10

Si $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur le segment $[a; b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction ψ en escalier sur $[a; b]$ telle que $\forall t \in [a; b], |f(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon$.

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$, sur chaque morceau $]x_k; x_{k+1}[$ la fonction f est prolongeable par continuité sur $[x_k; x_{k+1}]$ en une fonction f_k. On sait alors qu'il existe une fonction g_k en escalier sur $[x_k; x_{k+1}]$ telle que $\forall\ t \in [x_k; x_{k+1}], |f_k(t) - g_k(t)| < \varepsilon$, en particulier $\forall\ t \in]x_k; x_{k+1}[, |f(t) - g_k(t)| < \varepsilon$.

On construit la fonction g en posant : $g(x_k) = f(x_k)$ et pour $t \in]x_k; x_{k+1}[, g(t) = g_k(t)$. Il est clair que g est en escalier sur $[a; b]$ et que $\forall\ t \in [a; b], |f(t) - g(t)| < \varepsilon$, donc $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. En procédant comme dans le théorème précédent, on peut alors construire une suite (g_n) de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f. □

V) Extension aux fonctions à valeurs complexes

1) Continuité

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes, on pose $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$.

DÉFINITION 12.5

On dira que f est continue sur I lorsque les fonctions u et v sont elles - mêmes continues sur I. L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$.

Exemple: La fonction $t \mapsto e^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+it}$ aussi.

f est continue en $t_0 \in I$ ssi $\lim\limits_{t_0} u = u(t_0)$ et $\lim\limits_{t_0} v = v(t_0)$, ce qui équivaut à $\lim\limits_{t_0} f = f(t_0)$. On retrouve ainsi une définition identique à celle donnée pour les fonctions à valeurs réelles.

2) Propriétés

Compte tenu de la définition, on retrouve des propriétés analogues au cas réel, à une exception près.

– On retrouve les mêmes théorèmes généraux, en particulier $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.
– Si f est continue sur I, alors les fonctions $\overline{f}$ et $|f|$ aussi.
– **Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai**, par exemple, la fonction $f(t) = e^{it}$ est continue sur $[0;2\pi]$, 0 est compris entre $f(\pi) = -1$ et $f(0) = 1$, mais $0 \notin \mathrm{Im}(f)$ car f ne s'annule pas (ici $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas un intervalle, mais un cercle !).
– Si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ est continue sur le segment $[a;b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes, c'est à dire, il existe $t_0, t_1 \in [a;b]$ tels que :

$$|f(t_0)| = \sup_{t\in[a;b]} |f(t)| \quad \text{et} \quad |f(t_1)| = \inf_{t\in[a;b]} |f(t)|.$$

En effet : la fonction $|f|$ est continue sur $[a;b]$ et à valeurs réelles, on sait donc qu'elle admet un minimum et un maximum.

– Si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$, est continue sur le segment $[a;b]$, alors f est uniformément continue (théorème de *Heine*).
En effet : cela découle de l'égalité : $|f(t)-f(t_0)| = \sqrt{|u(t)-u(t_0)|^2 + |v(t)-v(t_0)|^2}$, et du théorème de *Heine* pour les fonctions à valeurs réelles.

VI) Exercices

★Exercice 12.1
Un moine quitte son monastère à 7h du matin pour se rendre sur la montagne à son lieu de prière habituel où il arrive à 7h du soir. Le lendemain matin il quitte la montagne à 7h et par le même chemin que la veille il rentre au monastère où il arrive à 7h du soir. Démontrer qu'il y a un endroit sur ce chemin où le moine se trouvait à la même heure les deux jours.

★Exercice 12.2
Soit $f : [a;b] \to [a;b]$ une fonction continue, montrer que f admet un point fixe. Donner un exemple d'une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans I et sans point fixe.

★Exercice 12.3
Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un réel $\alpha \in [0;1]$ tel que $f(\alpha + \frac{1}{n}) = f(\alpha)$.

★Exercice 12.4
a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ avec $\ell < 1$. Montrer que f admet un point fixe.
b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer que f admet un point fixe.

★Exercice 12.5

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée telle que $g : x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$ est croissante. Montrer que f est constante.

b) Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f et g sont continues.

c) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Soient m, M deux réels tels que $\forall\ x \in [a;b], m \leqslant f(x) \leqslant M$. Montrer qu'il existe un réel $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = \frac{m(b-x)+M(x-a)}{b-a}$. Interprétation graphique ?

★Exercice 12.6

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on suppose que $\lim\limits_{\pm\infty} f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) Montrer que si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f possède un maximum ou un minimum.

b) Montrer que si $\ell = +\infty$, alors f possède un minimum et que si $\ell = -\infty$, alors f possède un maximum.

★Exercice 12.7

Étudier la continuité (et les prolongements éventuels) des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}$$

$$h(x) = x + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)} \qquad k(x) = \mathrm{E}(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$$

$$u(x) = x - \mathrm{E}(x) - (x - \mathrm{E}(x))^2 \qquad v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

★Exercice 12.8

Soit f une fonction continue sur $[0;+\infty[$:

a) On suppose que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est uniformément continue sur $[0;+\infty[$.

b) On suppose que f admet une asymptote d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $[0;+\infty[$.

c) On suppose que f est uniformément continue sur $[0;+\infty[$, montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall\ x \in [0;+\infty[, |f(x)| \leqslant ax + b$.

★Exercice 12.9

a) Montrer qu'il est impossible de trouver une bijection continue de $[0;1[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe des surjections continues sur $[0;1[$ sur $\mathbb{R}$.

★Exercice 12.10

Questions diverses : on demande soit de montrer la propriété si elle semble vraie, soit de donner un exemple et un contre - exemple dans le cas contraire. I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$.

a) Si $|f|$ est continue, alors f aussi.

b) Si f est continue et si $\mathrm{Im}(f)$ est un segment, alors I est un segment. Et si on suppose en plus f strictement monotone ?

c) Si f est continue sur I, alors f est bornée. Si f est continue et bornée, alors f atteint ses bornes.

d) Si $x_0 \in I$ et si f est continue en x_0, alors f est nécessairement monotone au voisinage de x_0.

e) Si f est strictement monotone sur I alors f induit une bijection de I sur $\mathrm{Im}(f)$, et la bijection réciproque est continue.

★Exercice 12.11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. On pose $a = f(1)$.

a) Montrer que $f(0) = 0$ et que pour tout x, $f(-x) = -f(x)$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$, puis que c'est vrai pour $n \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer que $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}^*, f(\frac{p}{q}) = a\frac{p}{q}$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $r_n = \frac{\mathrm{E}(nx)}{n}$, montrer que (r_n) converge vers x. En déduire que $f(x) = ax$.

★Exercice 12.12

Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

a) Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\sigma(r) = r$.

b) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\sigma(a) \geqslant 0$. En déduire que σ est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, en écrivant pour $n \in \mathbb{N}^*$ que $\frac{\mathrm{E}(nx)}{n} \leqslant x < \frac{\mathrm{E}(nx)+1}{n}$, démontrer que $\sigma(x) = x$.

★Exercice 12.13

Soit f une application croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$, et soit $g(x) = f(x) - f(0)$.

a) Vérifier que g est impaire.

b) Montrer que $g(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^n}g(1)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

c) Déduire que f est continue en 0.

d) Montrer que $g(2x) = 2g(x)$, en déduire que $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Que dire alors de $g(x)$? de $f(x)$?