Chapitre 4

Équations différentielles

Objectifs

– Être capable de reconnaître une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et d'appliquer la méthode de résolution.
– Être capable de reconnaître une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et d'appliquer la méthode de résolution.
– Connaître la méthode d'*Euler* pour une résolution approchée.

Sommaire

I) Fonctions à valeurs complexes

1) Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

Pour $t \in I$, on pose $u(t) = \mathrm{Re}(f(t))$ et $v(t) = \mathrm{Im}(f(t))$, on définit ainsi deux fonctions u et v à **valeurs réelles** telles que $\forall\, t \in I, f(t) = u(t) + iv(t)$.

DÉFINITION 4.1

*La fonction u est appelée **partie réelle** de f et la fonction v est appelée **partie imaginaire** de f.*

Par exemple, pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=e^{it}$, on a $\text{Re}(f)=\cos$ et $\text{Im}(f)=\sin$.

Rappels :

– Une fonction $u: I\to\mathbb{R}$ est continue en $t_0\in I$, lorsque $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=f(t_0)$.

– Une fonction $u: I\to\mathbb{R}$ est dérivable en $t_0\in I$, lorsque le taux d'accroissement $\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0}$ admet une limite **finie** en t_0. Si c'est le cas, cette limite est notée $u'(t_0)$.

– Les fonctions $t\mapsto |t|$ et $t\mapsto t^\alpha$ avec $\alpha\in]0;1[$ ne sont pas dérivables en 0.

2) Dérivée

DÉFINITION 4.2

Soit $f: I\to\mathbb{C}$ une fonction, soit u sa partie réelle et v sa partie imaginaire, on dit que :

– *f est continue en $t_0\in I$ lorsque les fonctions u et v sont continues en t_0.*

– *f est dérivable en t_0 lorsque les fonctions u et v sont dérivables en t_0. Si c'est le cas, alors on pose $f'(t_0)=u'(t_0)+iv'(t_0)$. On remarquera que si f est dérivable sur I, alors $\text{Re}(f')=(\text{Re}(f))'$ et $\text{Im}(f')=(\text{Im}(f))'$.*

On peut vérifier que l'on a les mêmes règles de calcul de dérivation que pour les fonctions à valeurs réelles :

$$(f+g)'=f'+g',\ (f\times g)'=f'g+fg',\ \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2} \text{ et (avec } g \text{ réelle) } (f\circ g)'=g'\times f'\circ g.$$

THÉORÈME 4.1

Soit $f: I\mapsto\mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $t\to e^{f(t)}$ est dérivable sur I et

$$\left(e^{f(t)}\right)'=f'(t)e^{f(t)}$$

Preuve: On pose $f(t)=a(t)+ib(t)$ sous forme algèbrique. $e^{f(t)}=e^{a(t)}\times[\cos(b(t))+i\sin(b(t))]$, la partie réelle est donc $g(t)=e^{a(t)}\cos(b(t))$ et sa partie imaginaire est $h(t)=e^{a(t)}\sin(b(t))$. Ces fonctions sont dérivables sur I, donc e^f est dérivable sur I et sa dérivée est $g'(t)+ih'(t)$, il suffit alors de comparer $g'(t)+ih'(t)$ avec $f'(t)e^{f(t)}$ pour constater l'égalité. □

3) Primitives

DÉFINITION 4.3

Soit $F,f: I\to\mathbb{C}$ deux fonctions, on dit que F est une ***primitive*** *de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F'=f$.*

Exemple: Calculer une primitive de $f(t)=\frac{1}{1+it}$ et de $g(t)=e^t\cos(t)$.

THÉORÈME 4.2

Si F et G sont deux primitives de la fonction f sur l'intervalle I, alors il existe une constante $\alpha\in\mathbb{C}$ telle que : $\forall\ t\in I, F(t)=G(t)+\alpha$.

Preuve: On a $F'=G'=f$, d'où $(F-G)'=0$ la fonction nulle, donc $\text{Re}(F-G)'=\text{Im}(F-G)'=0$ sur I, ce qui entraîne que les fonctions $\text{Re}(F-G)$ et $\text{Im}(F-G)$ sont constantes sur l'intervalle I. Il existe donc a et b deux réels tels que $\forall\ t\in I, \text{Re}(F(t)-G(t))=a$ et $\text{Im}(F(t)-G(t))=b$, on en déduit que $\forall\ t\in I, F(t)=G(t)+\alpha$ avec $\alpha=a+ib$. □

Dans le chapitre sur l'intégration nous établirons que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle. Si U désigne une primitive sur I de la fonction $u: I\to\mathbb{R}$ et V une primitive de $v: I\to\mathbb{R}$, avec u et v continues, alors la fonction $U+iV$ est une primitve de la fonction complexe $u+iv$.

Dans la suite, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II) Équations différentielles linéaires du premier ordre

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ intervenant sous forme dérivée (première ou supérieure). On rencontre ce genre d'équations en mécanique (lois de Newton), en électricité (circuits RLC), ... etc.

1) Définitions

DÉFINITION 4.4

Une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1 est une équation différentielle de la forme :

$$(E) : a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \text{ (notée plus simplement : } a(t)y' + b(t)y = c\text{)}$$

*où $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ sont trois fonctions définies continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable inconnue. On suppose de plus que la fonction a n'est pas la fonction nulle. On appelle **équation homogène associée** à (E) l'équation différentielle :*

$$(H) : a(t)y' + b(t)y = 0.$$

*La fonction c est souvent appelée **second membre** de l'équation (E).*

Dans la pratique on a souvent en plus une condition sur la fonction inconnue y du type : $y(t_0) = \alpha$ où t_0 et α sont des données. Cette condition est appelée **condition initiale**, et on appelle **problème de** *Cauchy* [1] le système :

$$\begin{cases} a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}.$$

Exemple: L'équation différentielle : $y' - y = 0$ avec $y(0) = 1$ est utilisée en terminale pour introduire l'exponentielle.

2) Étude de l'équation homogène

THÉORÈME 4.3

Soit $S_I(H)$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H), alors on a les propriétés :
- *$0 \in S_I(H)$ (fonction nulle).*
- *$\forall f, g \in S_I(H), f + g \in S_I(H)$.*
- *$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall f \in S_I(H), \alpha f \in S_I(H)$.*

Preuve: Celle - ci est simple et laissée en exercice. □

Résolution de (H) : on se place sur un intervalle I où la fonction a **ne s'annule pas**, on a alors $\forall t \in I, y' = -\frac{b}{a}y$. Soit F une primitive de la fonction $-\frac{b}{a}$ sur I, on a alors :

$$y \in S_I(H) \iff y' = F'y \iff \frac{d}{dt}\left(ye^{-F}\right) = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{F(t)}.$$

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 4.4

Lorsque la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I alors les solutions de (H) sont les fonctions :

$$y : t \mapsto \lambda e^{F(t)},$$

où F désigne une primitive de la fonction $-\frac{b}{a}$ sur I, et λ un élément quelconque de $\mathbb{K}$.

1. *CAUCHY Augustin-Louis* (1789 – 1857) : un des plus grands mathématiciens français.

Conséquences : si la fonction a ne s'annule pas sur I :
- Le problème de *Cauchy* pour l'équation (H) a une unique solution. Car la condition initiale détermine complètement la constante λ.
- L'unique solution sur I qui s'annule en un point donné est la fonction nulle. Par conséquent toutes les autres solutions ne s'annulent jamais sur I, lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ elles ont toutes un signe constant (car elles sont continues).

Exemples:
- $y'+\omega y=0$ où $\omega\in\mathbb{K}$ est une constante : les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=\lambda e^{-\omega t}$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$ quelconque.
- $ty'=y$ sur $\mathbb{R}$: on se place d'abord sur $I=]0;+\infty[$, sur cet intervalle on a $y'=\frac{1}{t}y$ d'où $y(t)=\alpha t$ ($\alpha\in\mathbb{K}$ quelconque). Puis on se place sur $J=]-\infty;0[$, sur cet intervalle on a encore $y'=\frac{1}{t}y$ d'où $y(t)=\lambda|t|=\beta t$ ($\beta=-\lambda\in\mathbb{K}$ quelconque). Soit maintenant y une solution sur $\mathbb{R}$, alors y est en particulier solution sur I donc il existe α tel que $\forall\ t>0, y(t)=\alpha t$, de même y est solution sur J, donc il existe β tel que $\forall t<0, y(t)=\beta t$, mais y doit être dérivable en 0, ce qui entraîne $\alpha=\beta$, finalement $\forall\in\mathbb{R}, y(t)=\alpha t$. On vérifie pour terminer que cette fonction est bien solution.

3) Étude de l'équation avec second membre

On revient au cas général : $(E): a(t)y'+b(t)y=c(t)$.

THÉORÈME 4.5

Si l'ensemble des solutions de (E) n'est pas vide, et si y_1 est une solution de (E), alors les solutions de (E) sont les fonctions s'écrivant comme somme de y_1 avec une solution de (H), c'est à dire les fonctions de la forme : $y: t\mapsto y_1(t)+y_H(t)$ avec y_H solution quelconque de (H).

Preuve: Soit y une solution de (E), posons $f=y-y_1$, alors $af'+bf=ay'-ay_1'+by-by_1=c-c=0$ donc $f\in S_I(H)$. Réciproquement, soit $f\in S_I(H)$ et soit $y=y_1+f$, alors $ay'+by=ay_1'+af+by_1+bf=0+c=c$, donc $y\in S_I(E)$. □

Pour déterminer toutes les solutions de (E) on est donc ramené à résoudre l'équation homogène puis à trouver une solution particulière de (E).

Recherche d'une solution particulière : on se place de nouveau sur un intervalle I où la fonction a ne s'annule pas et on applique la méthode de **la variation des constantes** :

Soit F une primitive de $-\frac{b}{a}$ sur I, on cherche une solution particulière sous la forme $y=\lambda e^F$ où λ est **une fonction dérivable sur** I. La fonction y est solution de (E) ssi $a[\lambda' e^F+\lambda F' e^F]+b\lambda e^F=c$, ce qui équivaut à $a\lambda' e^F+\lambda[aF'e^F+be^F]=c$ ou encore $\lambda'=\frac{c}{a}e^{-F}$, car e^F est solution de (H). Comme la fonction $\frac{c}{a}e^{-F}$ est continue sur I, elle admet des primitives sur cet intervalle, ce qui prouve l'existence de λ. Une solution de (E) est donc :

$$y_1=\lambda e^F \text{ avec } \lambda(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{c(s)}{a(s)}e^{-F(s)}\,ds \text{ et } F(t)=\int_{t_0}^{t}-\frac{b(s)}{a(s)}\,ds,$$

et les solutions de (E) sont les fonctions :

$$y=y_1+\alpha e^F \text{ avec } \alpha\in\mathbb{K} \text{ quelconque } [\text{et } y(t_0)=\alpha].$$

Lorsque la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I le problème de Cauchy a une unique solution.

Exemples:
- $ty'+y=\sin(t)$ sur $\mathbb{R}$: sur l'intervalle $I=]0;+\infty[$ les solutions de (H) sont les fonctions $y=\frac{\lambda}{t}$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$ quelconque. On cherche une solution particulière de la forme $y=\frac{\lambda}{t}$ avec λ dérivable sur I ce qui donne $\lambda'=\sin(t)$, une solution particulière est donc $y_1=-\frac{\cos(t)}{t}$, et les solutions de (E) sur I sont les fonctions $y=\frac{\lambda-\cos(t)}{t}$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$ quelconque. On se place ensuite sur l'intervalle $J=]-\infty;0[$ où le raisonnement est le même. On vérifie ensuite que la seule solution sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

$$y: t\mapsto\frac{1-\cos(t)}{t} \text{ avec } y(0)=0 \text{ et } y'(0)=\frac{1}{2}.$$

– $\cos(t)y' - \sin(t)y = t^2$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y = \frac{\lambda}{\cos(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque. On cherche une solution particulière sous la forme $y = \frac{\lambda}{\cos(t)}$ avec λ dérivable sur I, ce qui donne $\lambda' = t^2$. On peut donc prendre comme solution particulière $y_1 = \frac{t^3}{3\cos(t)}$, et les solutions de (E) sont les fonctions :

$$y : t \mapsto \frac{\lambda + t^3}{3\cos(t)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Résoudre de telles équations différentielles revient donc à calculer des intégrales, d'où les expressions que l'on rencontre parfois comme : « intégrer une équation différentielle », ou « solution intégrale d'une équation différentielle ».

III) Équations différentielles linéaires du second ordre

On s'intéressera uniquement au cas où les coefficients sont des constantes, c'est à dire aux équations différentielles de la forme :$y'' + ay' + by = f$ où $a, b \in \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue (second membre). Pour de telles équations, le problème de *Cauchy* est : $\begin{cases} y'' + ay' + by = f \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$, où t_0, α et β sont des données.

1) Étude de l'équation homogène

THÉORÈME 4.6

Soit $S(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$: $y'' + ay' + by = 0$, il existe deux fonctions ϕ_1, ϕ_2 solutions de (H) telles que : $S(H) = \{\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 / \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$.

Preuve: On cherche les solutions de la forme $y = e^{\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, on obtient alors $y \in S(H) \iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0$, λ doit donc être solution de l'équation $x^2 + ax + b = 0$, que l'on appelle **équation caractéristique** de (H). Il faut donc distinguer plusieurs cas :

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:
  - Si $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$: il y a deux solutions distinctes à l'équation caractéristique : λ_1 et λ_2. On pose $\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $\phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, il est facile de vérifier que $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2$ est solution de (H). Réciproquement, soit $y \in S(H)$, posons $z = \frac{y}{\phi_1}$, on a alors $y = z\phi_1$, en remplaçant dans l'équation on obtient $z'' + (2\lambda_1 + a)z' = 0$, d'où $z'(t) = \gamma e^{-(2\lambda_1 + a)t} = \gamma e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$, on en déduit que $z(t) = \beta e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \alpha$, et donc $y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$, soit $y = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
  - Si $\Delta = a^2 - 4b = 0$: alors il y a une solution double à l'équation caractéristique : λ. Posons $\phi_1(t) = e^{\lambda t}$ et $z = \frac{y}{\phi_1}$ *i.e.* $y = z\phi_1$. Le calcul précédent montre que $y \in S(H) \iff z'' = 0$ c'est à dire il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $z(t) = \beta t + \alpha$, ce qui donne $y(t) = \alpha\phi_1(t) + \beta\phi_2(t)$ en posant $\phi_2(t) = t\phi_1(t) = te^{\lambda t}$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R})$: la démarche est la même, on cherche les solutions de l'équation caractéristique, d'où la discussion :
  - Si $\Delta > 0$: deux racines distinctes λ_1 et λ_2, comme dans le cas complexe, on montre que $S(H) = \{\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ avec $\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $\phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$.
  - Si $\Delta = 0$: une racine double λ, comme dans le cas complexe, on montre que $S(H) = \{\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ avec $\phi_1(t) = e^{\lambda t}$ et $\phi_2(t) = te^{\lambda t}$.
  - Si $\Delta < 0$: deux racines complexes **non réelles** conjuguées $\lambda = r + i\omega$ et $\overline{\lambda}$. Les solutions **complexes** de (H) sont les fonctions $y(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\overline{\lambda} t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, une telle solution est réelle ssi $y(t) = \overline{y}(t) = \overline{\alpha} e^{\overline{\lambda} t} + \overline{\beta} e^{\lambda t}$, ce qui équivaut à $\overline{\alpha} = \beta$. Les solutions réelles sont donc les fonctions $y(t) = \alpha e^{\lambda t} + \overline{\alpha} e^{\overline{\lambda} t} = 2\mathrm{Re}(\alpha e^{\lambda t}) = e^{rt}[u\cos(\omega t) + v\sin(\omega t)]$, avec $u = \mathrm{Re}(\alpha)/2$ et $v = -\mathrm{Im}(\alpha)/2$ réels quelconques (car α est un complexe quelconque). On a encore que les solutions de (H) sont les fonctions $y = u\phi_1 + v\phi_2$ avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $\phi_1(t) = e^{rt}\cos(\omega t)$ et $\phi_2(t) = e^{rt}\sin(\omega t)$.

□

À retenir : solutions de l'équation homogène : soit $x^2 + ax + b = 0$ l'équation caractéristique et $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant :

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:
  - Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique à deux solutions distinctes : λ_1 et λ_2, on peut prendre alors $\phi_1 : t \mapsto e^{\lambda_1 t}$ et $\phi_2 : t \mapsto e^{\lambda_2 t}$. Les solutions sont les fonctions :
  $$t \mapsto \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$
  - Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique à une solution double : $\lambda_1 = \lambda_2$, on peut prendre alors $\phi_1 : t \mapsto e^{\lambda_1 t}$ et $\phi_2 : t \mapsto te^{\lambda_1 t}$. Les solutions sont les fonctions :
  $$t \mapsto (\alpha + \beta t)e^{\lambda_1 t} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
  - Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique à deux solutions distinctes : λ_1 et λ_2, on peut prendre alors $\phi_1 : t \mapsto e^{\lambda_1 t}$ et $\phi_2 : t \mapsto e^{\lambda_2 t}$. Les solutions sont les fonctions :
  $$t \mapsto \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
  - Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique à une solution double : $\lambda_1 = \lambda_2$, on peut prendre alors $\phi_1 : t \mapsto e^{\lambda_1 t}$ et $\phi_2 : t \mapsto te^{\lambda_1 t}$. Les solutions sont les fonctions
  $$t \mapsto (\alpha + \beta t)e^{\lambda_1 t} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
  - Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes non réelles et conjuguées : λ et $\overline{\lambda}$, en posant $\lambda = r + i\omega$ (forme algébrique), on peut prendre alors $\phi_1 : t \mapsto \cos(\omega t)e^{rt}$ et $\phi_2 : t \mapsto \sin(\omega t)e^{rt}$. Les solutions sont les fonctions :
  $$t \mapsto (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t))e^{rt} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

THÉORÈME 4.7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, les solutions réelles de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sont les parties réelles des solutions complexes.

Preuve: Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

2) Étude de l'équation avec second membre

THÉORÈME 4.8

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue, alors l'équation $(E) : y'' + ay' + by = f$ admet des solutions sur I. Si y_1 est une solution de (E), alors $S_I(E) = y_1 + S_I(H)$. De plus, le problème de Cauchy a une unique solution.

Preuve: L'existence dans le cas général d'une solution particulière est admise. Soit y_1 une solution de (E), soit $g \in S_I(H)$, il est facile de vérifier que $y_1 + g$ est solution de (E), réciproquement, si g est solution de (E), il est facile de vérifier que $g - y_1$ est solution de (H). Les solutions au problème de *Cauchy* sont les fonctions de la forme $y = y_1 + \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$ vérifiant $y(t_0) = c_1$ et $y'(t_0) = c_2$. Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \alpha\phi_1(t_0) + \beta\phi_2(t_0) & = c_1 - y_1(t_0) \\ \alpha\phi_1'(t_0) + \beta\phi_2'(t_0) & = c_2 - y_1'(t_0) \end{cases}.$$

Lorsque $\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $\phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ avec λ_1 et λ_2 les racines distinctes de l'équation caractéristique, le déterminant du système est $D = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t_0} \neq 0$. Lorsque les deux racines sont confondues, alors $\phi_1(t) = e^{\lambda t}$ et $\phi_2(t) = t\phi_1(t)$, dans ce cas, le déterminant du système est $D = e^{2\lambda t_0} \neq 0$, dans les deux cas, le système a une unique solution. □

Dans le cas réel avec $\Delta < 0$, l'unique solution complexe au problème de Cauchy est une solution réelle.

Dans la suite on s'intéressera seulement au cas où le second membre est de la forme $f(t) = P(t)e^{\lambda t}$ où P est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.

THÉORÈME 4.9

L'équation $y''+ay'+by=P(t)e^{\lambda t}$ admet une solution particulière de la forme $y(t)=Q(t)e^{\lambda t}$ où Q est une fonction polynomiale.

Preuve: On pose $y(t)=Q(t)e^{\lambda t}$, y est solution de l'équation ssi $Q''(t)+(2\lambda+a)Q'(t)+(\lambda^2+a\lambda+b)Q(t)=P(t)$, d'où la discussion :

- Si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique : les théorèmes de l'algèbre linéaire permettent d'affirmer que l'application $\phi:\mathbb{K}[X]\to\mathbb{K}[X]$ définie par $\phi(Q)=Q''+(2\lambda+a)Q'+(\lambda^2+a\lambda+b)Q$ est un automorphisme, et donc il existe un unique polynôme Q (de même degré que P) tel que $\phi(Q)=P$.
- Si λ est solution de l'équation caractéristique : l'application $\phi:\mathbb{K}[X]\to\mathbb{K}[X]$ définie par $\phi(Q)=Q''+(2\lambda+a)Q'$ est surjective (mais non injective), il existe donc au moins un polynôme Q tel que $\phi(Q)=P$ (avec $\deg(Q)=\deg(P)+1$ si $2\lambda+a\neq 0$, et $\deg(Q)=\deg(P)+2$ sinon).

□

Exemples:

- $y''+\omega^2y=t^2+1$ avec $\omega\in\mathbb{R}^*$, ici $\lambda=0$, cherchons une solution particulière de la forme $y_1=Q$ (polynôme), on obtient en remplaçant : $Q''+\omega^2Q=t^2+1$, on cherche donc Q sous la forme $Q(t)=at^2+bt+c$, ce qui donne par identification : $a=\frac{1}{\omega^2}$, $b=0$, et $c=\frac{\omega^2-2}{\omega^4}$. Les solutions réelles de l'équation homogène sont les fonctions $y(t)=\alpha\cos(\omega t)+\beta\sin(\omega t)$, ($\alpha,\beta\in\mathbb{R}$), et les solutions de l'équation sont donc les fonctions :
$$y(t)=\frac{t^2}{\omega^2}+\frac{\omega^2-2}{\omega^4}+\alpha\cos(\omega t)+\beta\sin(\omega t).$$
- Lorsque le second membre est de la forme :
$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}P_i(t)e^{\lambda_i t},$$
on cherche une solution particulière y_i à l'équation $y''+ay'+by=P_i(t)e^{\lambda_i t}$ pour i allant de 1 à n, la fonction $y=y_1+\cdots+y_n$ est une solution particulière de $y''+by'+cy=f$, c'est le **principe de superposition**.
- $y''-4y'+4y=3(1+\sin(t)+e^{2t})$ sur $\mathbb{R}$: l'équation caractéristique est $x^2-4x+4=0=(x-2)^2$, il y a une solution double 2, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y(t)=(\alpha+\beta t)e^{2t}$. Cherchons une solution particulière en prenant comme second membre :
  – $f_1(t)=3$: il y a une solution particulière constante $y_1(t)=\frac{3}{4}$.
  – $f_2(t)=3e^{2t}$: on chercher une solution particulière de la forme $y=Q(t)e^{2t}$, ce qui donne $Q''(t)=3$ et donc on peut prendre $y_2(t)=\frac{3}{2}t^2e^{2t}$.
  – $f_3(t)=3\sin(t)$: on prend en fait $f_3(t)=3e^{it}$ puis on prendra la partie imaginaire d'une solution particulière. On cherche y sous la forme $y(t)=Q(t)e^{it}$ ce qui donne $Q''(t)+(2i-4)Q'(t)+(3-4i)Q(t)=3$, d'où $Q(t)=\frac{3}{3-4i}=3\frac{3+4i}{25}$. Une solution particulière est donc $y_3(t)=\mathrm{Im}(3\frac{3+4i}{25}e^{it})=\frac{9}{25}\sin(t)+\frac{12}{25}\cos(t)$. Les solutions sont donc les fonctions :
$$y(t)=\frac{3}{4}+\frac{9}{25}\sin(t)+\frac{12}{25}\cos(t)+(\alpha+\beta t+\frac{3}{2}t^2)e^{2t}.$$

IV) Compléments

1) Équations à variables séparées

DÉFINITION 4.5

Une équation différentielle à variables séparées est une équation de la forme : $y'b(y)=a(t)$ où a,b sont deux fonctions continues données.

Méthode de résolution : Si a est continue sur un intervalle I et b sur un intervalle J, on peut considérer une primitive A de a sur I et une primitive B de b sur J, dans ce cas l'équation équivaut à : $\frac{d}{dt}[B(y)]=A'(t)$, et donc $B(y)=A(t)+\lambda$ où λ désigne une constante. On regarde ensuite si la fonction B est localement ou globalement bijective, auquel cas on pourra écrire $y(t)=B^{-1}(A(t)+\lambda)$.

Exemple: $t^3y'+y^3=0$ avec $y(1)=-1$, y ne doit pas être constamment nulle, si une telle solution existe, il doit exister un intervalle I sur lequel y ne s'annule pas, un tel intervalle ne peut pas contenir 0 et sur I l'équation est équivalente à : $\frac{y'}{y^3}=\frac{-1}{t^3}$, c'est une équation à variable séparée. Elle est équivalente à : $-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{t^2}+\lambda$, ce qui donne

$y^2 = -\frac{t^2}{1+\lambda t^2}$, on voit que la condition initiale donne la constante $\lambda = -2$. Comme y ne s'annule pas sur I, y garde un signe constant et donc $\forall\ t \in I, y(t) = -\sqrt{\frac{t^2}{2t^2-1}}$. Cette solution est définie sur l'intervalle $]\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$.

2) Équation de Bernoulli

DÉFINITION 4.6

Une équation de Bernoulli [2] *est une équation différentielle de la forme* $y' = a(t)y^{\lambda} + b(t)y$ *où* a *et* b *sont deux fonctions continues sur un intervalle* I*, et* $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

Méthode de résolution : La fonction nulle est solution. S'il existe une solution y non constamment nulle, alors il doit exister un intervalle J sur lequel y ne s'annule pas, sur un tel intervalle y est de signe constant, on peut donc faire le changement de fonction $y = \varepsilon z^{\alpha}$ avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant le signe de y, l'équation devient alors : $\alpha z' = b(t)z + a(t)z^{\alpha(\lambda-1)+1}$, en prenant $\alpha = \frac{1}{1-\lambda}$, on a une équation différentielle linéaire du premier ordre, on sait donc la résoudre.

Exemple: $t^2y' + y + y^2 = 0$ avec $y(1) = 1$: y est une solution non constamment nulle, on pose $z = \frac{1}{y}$ ce qui donne : $z' = \frac{1}{t^2}z + \frac{1}{t^2}$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z(t) = \lambda e^{-\frac{1}{t}}$ et une solution particulière est $z_1(t) = -1$, les solutions générales sont donc les fonctions $z(t) = -1 + \lambda e^{-\frac{1}{t}}$, la condition initiale donne $\lambda = 2e$ d'où $y(t) = \frac{1}{2e^{1-\frac{1}{t}}-1}$. Cette solution est définie sur l'intervalle $]\frac{1}{1+\ln(2)};+\infty[$.

3) Méthode d'Euler

On ne dispose pas de méthode générale pour résoudre n'importe quelle équation différentielle.

Même pour des équations différentielles linéaires il se peut que les solutions ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles, par exemple : $y' = e^{-t^2}y \iff y : t \mapsto \lambda e^{F(t)}$ avec F une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$, on sait qu'une telle primitive existe sur $\mathbb{R}$ mais on peut démontrer qu'il est impossible de l'exprimer avec les fonctions usuelles.

Pour des applications numériques (par exemple dans les sciences appliquées), la formule qui donne les solutions n'est donc pas toujours satisfaisante. On a alors imaginé des méthodes de calculs approchés des solutions d'équations différentielles, la plus simple d'entre elles étant la méthode d'*Euler* :

Considérons l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ où f est une fonction de deux variables. On cherche une solution approchée vérifiant la condition initiale $y(t_0) = \alpha$. On considère un nombre h assez proche de 0 (par exemple $h = 10^{-6}$), ce nombre est appelé **le pas** de la méthode, puis on construit deux suites (t_n) et (y_n) où y_n est censé être une valeur approchée de $y(t_n)$, dans la méthode d'*Euler* on pose :

$$\boxed{y_0 = \alpha,\ \text{et}\ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} t_{n+1} & = t_n + h \\ y_{n+1} & = y_n + h \times f(t_n, y_n) \end{cases}}$$

On peut ensuite représenter dans un repère les points de coordonnées (t_n, y_n) ce qui donnera une approximation de la courbe représentative de la solution y.

Cette méthode repose sur le principe suivant : lorsque h est proche de 0, on peut approcher la fonction y sur l'intervalle $[t_n, t_n+h]$ par la tangente à C_y au point d'abscisse t_n, c'est à dire $y(t) \approx y'(t_n)[t-t_n]+y(t_n)$. Par conséquent $y(t_n + h) \approx y(t_n) + h \times y'(t_n)$, or $y(t_n)$ est approché par y_n et $y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$ donc $y'(t_n)$ peut être approché par $f(t_n, y_n)$ et finalement $y(t_{n+1}) \approx y_n + h \times f(t_n, y_n)$ on pose donc $y_{n+1} = y_n + h \times f(t_n, y_n)$ et c'est une valeur approchée de $y(t_{n+1})$.

La théorie montre que sous certaines hypothèses il existe une constante K telle que :

$$|y_n - y(t_n)| \leqslant K \times |h|$$

2. *BERNOULLI Jakob* (1654 – 1705) : c'est le plus illustre d'une grande famille de mathématiciens suisses.

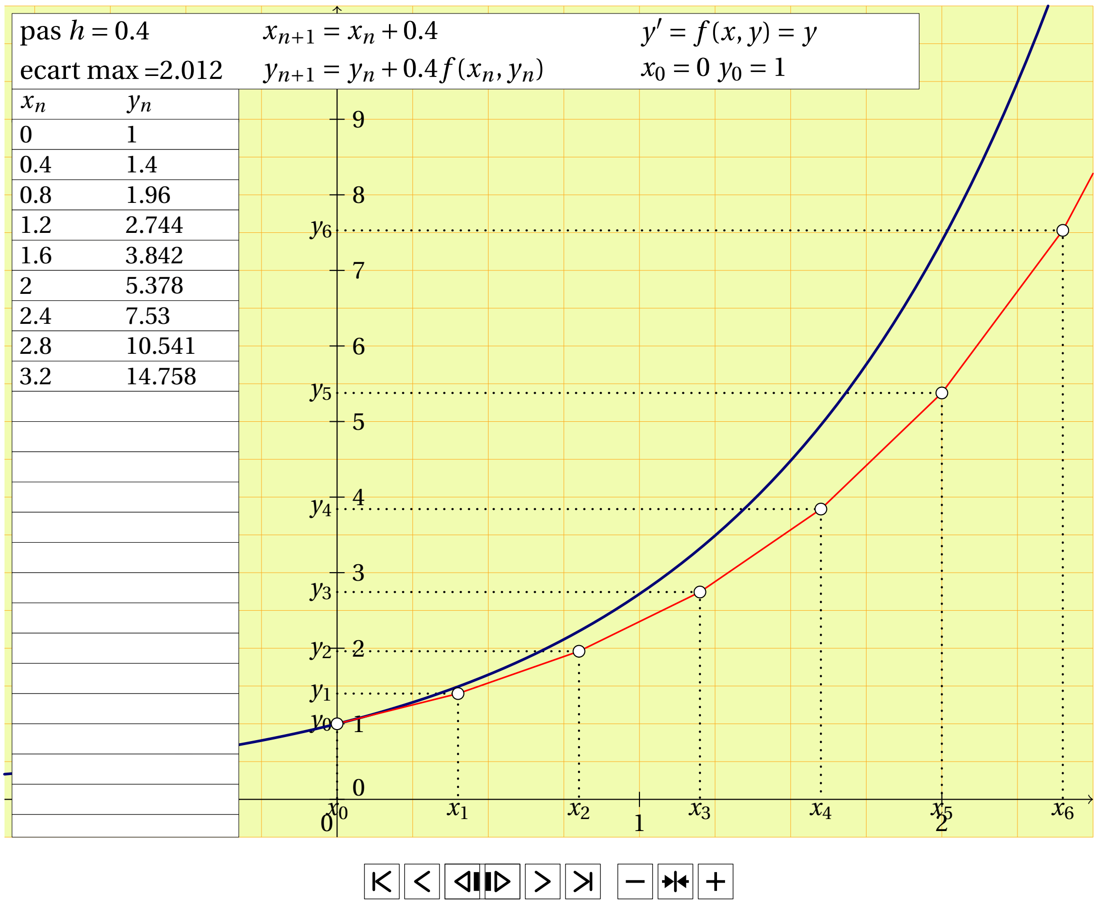

FIGURE 4.1: Méthode d'Euler

V) Primitives

Le théorème clé que nous établirons dans le chapitre sur l'intégration dit la chose suivante : *toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.*

1) Intégrale

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle I, si a et b sont deux éléments de I et si F désigne une primitive de f sur I alors l'intégrale de f de a à b est : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

On rappelle les propriétés :

a) $\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$.

b) $\displaystyle\int_b^a [\alpha f(t) + \beta g(t)]\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt$, c'est la **linéarité** de l'intégrale.

c) Si $0 \leqslant f$ sur $[a; b]$ (avec $a \leqslant b$), alors $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, c'est la **positivité** de l'intégrale. On en déduit que si $f \leqslant g$ sur $[a; b]$ (avec $a \leqslant b$) alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

d) Si a, b, c sont dans I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$, c'est la **relation de Chasles** pour l'intégrale.

e) Si $a \leqslant b$: $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$, c'est la **majoration en valeur absolue** de l'intégrale.

f) Si f et g sont dérivables sur I avec leur dérivée continue, alors on a la formule **d'intégration par parties** (IPP) : $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$.

2) Primitives usuelles

Fonction	Primitive
$u'u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, $\ln(\|u\|)$ sinon
$u'e^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$u'(1+tan^2(u)) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$
$u'\mathrm{ch}(u)$	$\mathrm{sh}(u)$
$u'\mathrm{sh}(u)$	$\mathrm{ch}(u)$
$u'(1-th^2(u)) = \frac{u'}{\mathrm{ch}^2(u)}$	$\mathrm{th}(u)$
$u'\tan(u)$	$-\ln(\|\cos(u)\|)$
$u'\tan(u)^2$	$\tan(u) - u$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$\mathrm{argsh}(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$\mathrm{argch}(u)$
$\frac{u'}{1-u^2}$	$\ln(\sqrt{\left\|\frac{1+u}{1-u}\right\|})$ [$=\mathrm{argth}(u)$ si $\|u\| < 1$]

3) Calculs de primitives

Il découle de ce qui précède que si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors pour tous réels x et a de I, on a :

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$$

En particulier la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule pour $x = a$. Ainsi, calculer une intégrale peut permettre de trouver des primitives.

Les deux outils fondamentaux pour le calcul d'intégrales, sont : le théorème de l'intégration par parties (rappelé plus haut), et le théorème du changement de variable dont voici l'énoncé :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $u : [a;b] \to I$ une fonction dérivable à dérivée continue, on a :

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$$

Dans la pratique on rédige ainsi :

posons $x = u(t)$ alors $\frac{dx}{dt} = u'(t)$ d'où $dx = u'(t)dt$ et $f(u(t)) = f(x)$. Pour les bornes : lorsque $t = a$ on a $x = u(a)$ et pour $t = b$ on a $x = u(b)$, puis on remplace dans l'intégrale, ce qui donne : $\displaystyle\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$

Exemple : calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. On pose $x = \sin(t)$ avec $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, alors $dx = \cos(t)dt$, pour $t = 0$ on a $x = 0$ et pour $t = \frac{\pi}{2}$ on a $x = 1$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Exemple : calculer une primitive de la fonction ln sur $]0; +\infty[$. Une primitive est (par exemple) $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \ln(t)\,dt$ pour $x > 0$, cette intégrale se calcule par parties en posant $f'(t) = 1$ et $g(t) = \ln(t)$:

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t)\,dt &= [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1\,dt \\ &= x\ln(x) - (x-1) = x\ln(x) - x - 1\end{aligned}$$

donc une primitive de la fonction ln sur $]0; +\infty[$ est la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ (on peut évidemment ajouter n'importe quelle constante).

VI) Annexe : espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K}$ un corps (dans la pratique $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit E un ensemble. On dit que E est un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel (ou $\mathbb{K}$-e.v.) lorsque E possède une addition et un produit par les scalaires (loi de composition externe, notée « . », c'est une application : $\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x\end{array}$), avec les propriétés suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe abélien (l'élément neutre est noté 0_E ou $\overrightarrow{0}_E$ et appelé **vecteur nul** de E).
- La loi . (ou produit par les scalaires) doit vérifier : $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall\ x, y \in E$:
  - $1.x = x$
  - $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
  - $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
  - $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$ - e.v., les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **les scalaires**, et les éléments de E sont appelés **vecteurs** (parfois notés avec une flèche).

Exemples:
- Un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-e.v..
- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-e.v., $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Q}$-e.v., $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. Plus généralement si $\mathbb{K}$ est corps inclus dans un autre corps $\mathbb{L}$, alors $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-e.v..
- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni des opérations suivantes :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \text{ et } \lambda.(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul est le n-uplet : $(0,\dots,0)$.
- Si I est un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-e.v., alors l'ensemble des applications de I vers E : $\mathscr{F}(I,E)$, pour les opérations usuelles (addition de deux fonctions et produit par un scalaire) est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul étant l'application nulle.
- D'après le cours sur les équations différentielles, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 eest un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

THÉORÈME 4.10 (Règles de calculs)

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v.
- $\forall\ \vec{x} \in E, 0.\vec{x} = \vec{0}$, *et* $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.\vec{0} = \vec{0}$.
- $\forall\ \vec{x} \in E, \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, -(\lambda.\vec{x}) = (-\lambda).\vec{x} = \lambda.(-\vec{x})$.
- $\forall\ \vec{x} \in E, \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.\vec{x} = \vec{0} \implies \lambda = 0$ *ou* $\vec{x} = \vec{0}$.

Preuve: Pour le premier point : $1.\vec{x} = (1+0).\vec{x} = 1.\vec{x} + 0.\vec{x}$, donc $0.\vec{x} = \vec{0}$. De même, $\lambda.(\vec{x} + \vec{0}) = \lambda.\vec{x} = \lambda.\vec{x} + \lambda.\vec{0}$, donc $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$.

Pour le second point : $(\lambda+(-\lambda)).\vec{x} = 0.\vec{x} = \vec{0}$, or $(\lambda+(-\lambda)).\vec{x} = \lambda.\vec{x}+(-\lambda).\vec{x}$ et donc $(-\lambda).\vec{x} = -(\lambda.\vec{x})$. De même $\lambda.(\vec{x} + (-\vec{x})) = \vec{0}$, ce qui entraîne $\lambda.(-\vec{x}) = -(\lambda.\vec{x})$.

Pour le troisième point : si $\lambda.\vec{x} = \vec{0}$, supposons $\lambda \neq 0$, $\lambda^{-1}(\lambda.\vec{x}) = \vec{0} = 1.\vec{x}$ et donc $\vec{x} = \vec{0}$. □

VII) Exercices

★Exercice 4.1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $|x|y' + (x-1)y = x^2$

b) $y'\sin(x) - 2y\cos(x) = 1 + \cos(x)^2$

c) $x^3y' - (3x^2+2)y = x^3$

d) $x(x-1)y' + 2y = x$

e) $xy' - (x+1)y + e^x(1+x^2) = 0$

f) $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$

★Exercice 4.2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - y' - 6y = e^{-x}$

b) $y'' - y' - 6y = 10e^{3x} + xe^{-2x}$

c) $y'' + y = 2(\cos(x) - \sin(x))$

d) $y'' + 4y' + 4y = \sin(x)e^{-2x}$

e) $y'' - 2y' + 2y = 2(\cos(x) - \sin(x))e^x$

f) $y'' - 2y' + y = \mathrm{sh}(x) + e^x\cos(x)$

★Exercice 4.3

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $2xyy' = x^2 + y^2$ avec $y(1) = -2$

b) $y'' = \sqrt{y'^2 + 1}$

c) $y' = xe^{-y}$

d) $y' = x(1-y^2)$ avec $y(0) = \frac{1}{2}$

e) $y' = xy^2 + y$ avec $y(0) = 1$

f) $2x^2y' + y^2 = 1$ avec $y(1) = 2$ $(z = y-1)$

g) $x^2y'' + xy' + y = \ln(x)$, poser $g(x) = y(e^x)$.

★Exercice 4.4

Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\forall\ x > 0, f(\frac{1}{4x}) = f'(x)$.

a) Montrer que f est deux fois dérivable.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.

c) On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(e^t)$, montrer que g est solution d'une équation différentielle. Résoudre cette équation et en déduire f.

★Exercice 4.5

On considère l'équation différentielle $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$.

a) En posant pour $t \in \mathbb{R}, g(t) = y(t^2)$, résoudre l'équation (E) sur $]0;+\infty[$.

b) En faisant une démarche analogue, résoudre (E) sur $]-\infty;0[$.

★Exercice 4.6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(1-x) = f'(x)$.

a) Montrer que f est deux fois dérivable.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.

c) En déduire f. Quelles sont les solutions réelles ?

★Exercice 4.7

Une masse ponctuelle de 1kg est lancée le long d'un axe vertical $(O, \overrightarrow{\imath})$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V}_0 = v_0\overrightarrow{\imath}$, et en partant de l'origine O à l'instant $t = 0$. Écrire l'équation différentielle qui régit le mouvement et la résoudre dans les cas suivants (on posera $\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{\imath}$) :

a) On néglige la résistance de l'air, seule la gravitation agit.

b) La résistance de l'air oppose une force $\overrightarrow{R} = -k\overrightarrow{V}$ où k est une constante strictement positive, et $\overrightarrow{V}$ le vecteur vitesse.

c) La résistance de l'air oppose une force $\overrightarrow{R} = -kV^2\overrightarrow{\imath}$ où k est une constante strictement positive, et V^2 la norme au carré du vecteur vitesse.