



Différentielles et dérivées partielles secondes

Exercice 1

Calculer les différentielles suivantes, sans calculer des dérivées partielles, en utilisant les propriétés des différentielles de sommes, produits et composées :

$$(a) d(\ln(xy)) \quad (b) d(xyz(1 + \sinh(yz))) \quad (c) d(\sin(x^2y)e^{x-y})$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[002635]

Exercice 2

1. Y a-t-il une fonction $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$dg = x^2y^2dx + x^3ydy?$$

2. Trouver les fonctions $b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant à la condition

$$dg = x^2y^2dx + b(x,y)dy.$$

Étant donnée alors la fonction b , déterminer toutes les fonctions g correspondantes.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[002636]

Exercice 3

Soit $g: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $g(1, 1) = 3$ et dont la différentielle vaille

$$dg = (2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy. \quad (1)$$

Soit

$$h: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$$

l'application de classe C^1 définie par

$$h(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x^2y, xy^2) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}.$$

1. Calculer $du + dv$.
2. Déterminer g à partir du calcul précédent et (1), et sans autre calcul.
3. Montrer que h est une bijection. (On pourra calculer explicitement h^{-1} .)
4. Déterminer explicitement $d(g \circ h^{-1})$.
5. Calculer les matrixes jacobiniennes $J_h(x, y)$ et $J_{h^{-1}}(u, v)$ et vérifier par un calcul direct que

$$J_h(x, y)J_{h^{-1}}(h(x, y)) = I_2,$$

où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

Exercice 4

Calculer les matrices hessiennes des fonctions f définies par les expressions suivantes sur leur domaine de définition naturel :

$$\sin(xyz), \quad \sin^2(y/x).$$

Exercice 5

Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soient r et θ les coordonnées polaires standard dans le plan de telle sorte que l'association

$$]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

soit un changement de variables. Soit F la fonction définie par

$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

C'est "l'expression de f en coordonnées polaires". Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta). \quad (2)$$

Cette formule calcule "le Laplacien en coordonnées polaires." L'exercice ne dépend pas de la connaissance du Laplacien cependant.

Exercice 6

Les variables étant notées x et t , trouver la solution générale $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de "l'équation des ondes", à savoir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Trouver ensuite la solution unique de l'équation des ondes qui satisfait aux conditions initiales

$$f(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = -\cos x. \quad (4)$$

Indication pour l'exercice 1 ▲

Utiliser les règles

$$\begin{aligned}d(f+g) &= df+dg, \\d(fg) &= f dg+g df, \\d(f\circ h) &= (f'\circ h)dh.\end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 2 ▲

Soient h, u, v des fonctions des deux variables x et y . Rappel que

$$\begin{aligned}dh &= \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy, \\d(udx+vdy) &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy, \\dxdy &= -dydx.\end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 3 ▲

On va déterminer une primitive d'une forme différentielle de degré 1 par un changement de variables tel que, dans les nouvelles variables, la primitive soit presque évidente.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Rappel que la matrice hessienne est la matrice constituée des dérivées partielles secondes.

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Montrer que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial F}{\partial r}.$$

2. Montrer que

$$r \frac{\partial F}{\partial r} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

3. Montrer que

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}$$

4. Utiliser ces résultats, puis calculer encore un peu pour obtenir le résultat souhaité.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Grace au changement de variables

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \longmapsto (x, y) = \left(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2} \right),$$

la fonction f s'écrit $F(u, v) = f(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2})$. Montrer que pour que f soit solution de (3) il faut et il suffit que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0. \quad (5)$$

2. Montrer que, si F satisfait à (5), il existe deux fonctions $g_1, g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$F(u, v) = g_1(u) + g_2(v).$$

3. Écrire la solution générale de (3) et expliquer la phrase : “En une dimension d’espace, toute solution de l’équation des ondes s’écrit comme somme d’une onde qui se déplace vers la droite et une qui se déplace vers la gauche.”
-

Correction de l'exercice 1 ▲

$$\begin{aligned}d(\ln(xy)) &= \frac{d(xy)}{xy} = \frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x}; \\d(xyz(1 + \sinh(yz))) &= (1 + \sinh(yz))d(xyz) + xyzd(\sinh(yz)) \\&= yz(1 + \sinh(yz))dx + xz(1 + \sinh(yz))dy + xy(1 + \sinh(yz))dz \\&\quad + xyz \cosh(yz)d(yz) \\&= yz(1 + \sinh(yz))dx + xz(1 + \sinh(yz))dy + xy(1 + \sinh(yz))dz \\&\quad + xy z^2 \cosh(yz)dy + xy^2 z \cosh(yz)dz \\&= yz(1 + \sinh(yz))dx \\&\quad + xz(1 + \sinh(yz) + yz \cosh(yz))dy \\&\quad + xy(1 + \sinh(yz) + yz \cosh(yz))dz;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(\sin(x^2y)e^{x-y}) &= (\cos(x^2y)e^{x-y})d(x^2y) + \sin(x^2y)e^{x-y}d(x-y) \\&= x^2 \cos(x^2y)e^{x-y}dy + 2xy \cos(x^2y)e^{x-y}dx \\&\quad + \sin(x^2y)e^{x-y}dx - \sin(x^2y)e^{x-y}dy \\&= (x^2 \cos(x^2y)x - \sin(x^2y))e^{x-y}dy \\&\quad + (2xy \cos(x^2y) + \sin(x^2y))e^{x-y}dx.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. La forme différentielle $x^2y^2dx + x^3ydy$ de degré 1 n'est pas fermée car la forme différentielle de degré 2

$$d(x^2y^2dx + x^3ydy) = 2x^2ydydx + 3x^2ydx dy = x^2ydx dy$$

est non nulle. Par conséquent, une fonction $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ du type cherché ne peut pas exister.

2. Une fonction b du type cherché doit satisfaire à l'équation différentielle partielle

$$2x^2y - \frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

d'où $b(x, y) = \frac{2}{3}x^3y + k(y)$ où k est une fonction de la variable y . Une fonction g correspondante doit alors satisfaire aux équations différentielles partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x^2y^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2}{3}x^3y + k(y).$$

Il s'ensuit que g est de la forme $g(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^2 + K(y)$ où K est une fonction de la variable y .

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Un calcul immédiat donne $du + dv = dg$.
2. Par conséquent, $g = u + v + c$ où la constante c est déterminée par la condition

$$3 = g(1, 1) = u(1, 1) + v(1, 1) + c = 1 + 1 + c$$

d'où $c = 1$.

3. Un calcul direct montre que l'application réciproque

$$k: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$$

de h est donnée par la formule

$$k(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = \left(\left(\frac{u^2}{v} \right)^{1/3}, \left(\frac{v^2}{u} \right)^{1/3} \right).$$

4. $d(g \circ k) = d(u \circ k) + d(v \circ k) = du + dv$ car $u(k(u, v)) = u$ et $v(k(u, v)) = v$.

5. Un calcul immédiat donne

$$J_h = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}, \quad J_k = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(uv)^{-1/3} & -\frac{u^{2/3}}{3v^{4/3}} \\ -\frac{v^{2/3}}{3u^{4/3}} & \frac{2}{3}(uv)^{-1/3} \end{bmatrix}$$

d'où $J_h(x, y)J_k(h(x, y)) = I_2$.

Correction de l'exercice 4 ▲

$$d \sin(xyz) = yz \cos(xyz)dx + zx \cos(xyz)dy + xy \cos(xyz)dz$$

d'où la matrice hessienne

$$\begin{bmatrix} -y^2z^2 \sin(xyz) & z \cos(xyz) - xyz^2 \sin(xyz) & y \cos(xyz) - xy^2z \sin(xyz) \\ z \cos(xyz) - xyz^2 \sin(xyz) & -x^2z^2 \sin(xyz) & x \cos(xyz) - x^2yz \sin(xyz) \\ y \cos(xyz) - xy^2z \sin(xyz) & y \cos(xyz) - x^2yz \sin(xyz) & -x^2y^2 \sin(xyz) \end{bmatrix}.$$

De même

$$\begin{aligned} d(\sin^2(y/x)) &= -2yx^{-2} \sin(y/x) \cos(y/x)dx + 2x^{-1} \sin(y/x) \cos(y/x)dy \\ &= \sin(2y/x) \left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy \right) \end{aligned}$$

d'où la matrice hessienne

$$\begin{bmatrix} 2yx^{-3} \sin(2y/x) + 2y^2x^{-4} \cos(2y/x) & -x^{-2} \sin(2y/x) - 2yx^{-3} \cos(2y/x) \\ -x^{-2} \sin(2y/x) - 2yx^{-3} \cos(2y/x) & 2x^{-2} \cos(2y/x) \end{bmatrix}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

$$1. \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) = \frac{\partial F}{\partial r} + r \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

$$2. \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{x}{r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{y}{r}$$

$$3. \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}$$

4. En prenant la somme des trois équations suivantes

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} &= x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ r \frac{\partial F}{\partial r} &= x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} &= x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

on trouve le résultat cherché.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Avec $\frac{\partial}{\partial u} = 1/2(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})$ et $\frac{\partial}{\partial v} = 1/2(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})$ nous obtenons les identités

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\end{aligned}$$

d'où pour que f satisfasse à l'équation (3) il faut et il suffit que F satisfasse à l'équation (5).

2. Supposons que F satisfasse à l'équation (5). Alors la fonction $\frac{\partial F}{\partial u}$ est une fonction disons h_1 seulement de la variable u et la fonction $\frac{\partial F}{\partial v}$ est une fonction disons h_2 seulement de la variable v . Par conséquent, $F(u, v) = g_1(u) + g_2(v)$ où $g'_1 = h_1$ et $g'_2 = h_2$.
3. La solution générale de (3) s'écrit alors

$$f(x, t) = g_1(u) + g_2(v) = g_1(x+t) + g_2(t-x).$$

La fonction g_1 décrit une onde qui se déplace vers la droite et la fonction g_2 décrit une onde qui se déplace vers la gauche.

Enfin, pour trouver la solution unique satisfaisant aux conditions initiales (4) nous constatons que les conditions initiales entraînent les identités

$$\begin{aligned}f(x, 0) &= g_1(x) + g_2(-x) = \sin x \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) &= g'_1(x) - g'_2(-x) = \cos x \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) &= g'_1(x) + g'_2(-x) = -\cos x\end{aligned}$$

d'où $g'_1 = 0$ et $g'_2(-x) = -\cos x$, c.a.d. $g_2(x) = \sin(-x)$. Par conséquent, la solution unique cherchée f s'écrit

$$f(x, t) = \sin(x-t).$$
