Systèmes d'équations linéaires

Corrections d'Arnaud Bodin

Exercice 1

1. Résoudre de quatre manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) :
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$$
2. Choisir la méthode qui vous paraît la plus rapide pour résoudre, selon les valeurs de a, les systèmes suivants :
$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2+1)x + 2ay = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases}$$

Correction ▼ [002768]

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Correction ▼ [001163]

Exercice 3

Trouver les solutions de
$$\begin{cases} 3x+2z=0 \\ 3y+z+3t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z-t=0 \end{cases}$$

Correction ▼ [001178]

Exercice 4

Étudier l'existence de solutions du système :
$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1. \end{cases}$$

Correction ▼ [003417]

Exercice 5

Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système :

$$(S)\begin{cases}(1+\lambda)x+y+z+t & = & a\\ x+(1+\lambda)y+z+t & = & b\\ x+y+(1+\lambda)z+t & = & c\\ x+y+z+(1+\lambda)t & = & d\end{cases}$$

Correction ▼ [001169]

Exercice 6 Formule d'intégration numérique

Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré ≤ 3 on ait :

$$\int_2^4 P(x)\,dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$

Indication ▼ Correction ▼ [003424]

Indication pour l'exercice 6 ▲

Écrire les polynômes sous la forme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calculer $\int_2^4 P(x)\,dx$ d'une part et $\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$ d'autre part. L'identification conduit à un système linéaire à quatre équations, d'inconnues α, β, γ.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. (a) **Par substitution.** La première équation s'écrit aussi $y = 1-2x$. On remplace maintenant y dans la deuxième équation

$$3x+7y=-2 \implies 3x+7(1-2x)=-2 \implies 11x=9 \implies x=\frac{9}{11}.$$

On en déduit y : $y=1-2x=1-2\frac{9}{11}=-\frac{7}{11}$. La solution de ce système est donc le couple $(\frac{9}{11},-\frac{7}{11})$. N'oubliez pas de vérifier que votre solution fonctionne !

(b) **Par le pivot de Gauss.** On garde la ligne L_1 et on remplace la ligne L_2 par $2L_2-3L_1$:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 11y = -7 \end{cases}$$

On obtient un système triangulaire : on en déduit $y=-\frac{7}{11}$ et alors la première ligne permet d'obtenir $x=\frac{9}{11}$.

(c) **Par les matrices.** En terme matriciel le système s'écrit

$$AX=Y \quad \text{avec } A=\begin{pmatrix}2&1\\3&7\end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

On trouve la solution du système en inversant la matrice :

$$X=A^{-1}Y.$$

L'inverse d'une matrice 2×2 se calcule ainsi

$$\text{si } A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

Il faut bien sûr que le déterminant $\det A=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$ soit différent de 0.

Ici on trouve

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}7&-1\\-3&2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}9\\-7\end{pmatrix}$$

(d) **Par les formules de Cramer.** Les formules de Cramer pour un système de deux équations sont les suivantes si le déterminant vérifie $ad-bc\neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \implies x=\frac{\begin{vmatrix}e&b\\f&d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y=\frac{\begin{vmatrix}a&e\\c&f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}$$

Ce qui donne ici :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\-2&7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1\\3&7\end{vmatrix}}=\frac{9}{11} \quad \text{et} \quad y=\frac{\begin{vmatrix}2&1\\3&-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1\\3&7\end{vmatrix}}=-\frac{7}{11}$$

2. (a) Avant tout on regarde s'il existe une solution unique, c'est le cas si et seulement si le déterminant est non nul. Pour le premier système le déterminant est $\begin{vmatrix}a&1\\a^2+1&2a\end{vmatrix}=a^2-1$ donc il y a une unique solution si et seulement si $a\neq\pm 1$.

Bien sûr toutes les méthodes conduisent au même résultat ! Par exemple par substitution, en écrivant la première ligne $y=2-ax$, la deuxième ligne devient $(a^2+1)x+2a(2-ax)=1$. On en déduit que si $a\neq\pm1$ alors $x=\frac{4a-1}{a^2-1}$ puis $y=\frac{-2a^2+a-2}{a^2-1}$.

Traitons maintenant les cas particuliers. Si $a=1$ alors le système devient : $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 1 \end{array}\right.$
Mais on ne peut avoir en même temps $x+y=2$ et $x+y=\frac{1}{2}$. Donc il n'y a pas de solution.

Si $a=-1$ alors le système devient : $\left\{\begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & 1 \end{array}\right.$ et il n'y a pas de solution.

(b) Ici le déterminant est $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2-(a-1)^2 = 4a$.

Si $a \neq 0$ alors on trouve la solution unique (x,y). Par exemple avec la formule de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a}.$$

Si $a=0$ il n'y a pas de solution.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Remarquons que comme le système est homogène (c'est-à-dire les coefficients du second membre sont nuls) alors $(0,0,0)$ est une solution du système. Voyons s'il y en a d'autres. Nous faisons semblant de ne pas voir que la seconde ligne implique $x=y$ et que le système est en fait très simple à résoudre. Nous allons appliquer le pivot de Gauss en faisant les opérations suivantes sur les lignes $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On fait maintenant $L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

En partant de la dernière ligne on trouve $z=0$, puis en remontant $y=0$, puis $x=0$. Conclusion l'unique solution de ce système est $(0,0,0)$.

2. On applique le pivot de Gauss $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

Puis $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$ pour obtenir un système équivalent qui est triangulaire donc facile à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 3 \\ y & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

On n'oublie pas de vérifier que c'est une solution du système initial.

3. On fait les opérations $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & 7y & + & z & = & 3c-a \end{array}\right.$$

Puis on fait $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, ce qui donne un système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & & & 54z & = & 5(3c-a)-7(3b+a) \end{array}\right.$$

En partant de la fin on en déduit : $z = \frac{1}{54}(-12a-21b+15c)$ puis en remontant cela donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{18}(8a+5b-c) \\ y & = & \frac{1}{18}(-2a+b+7c) \\ z & = & \frac{1}{18}(-4a-7b+5c) \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

On commence par simplifier le système :
- on place la ligne L_3 en première position pour le pivot de Gauss ;
- on réordonne les variables dans l'ordre : y,t,x,z pour profiter des lignes déjà simples.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ 3y & + & 3t & & & + & z & = & 0 \\ -y & - & t & + & 2x & + & z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On commence le pivot de Gauss avec les opération $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ & & & - & 3x & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Les 3 dernières lignes sont identiques, on se ramène donc à un système avec 2 équations et 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous choisissons x et y comme paramètres, alors $z = -\frac{3}{2}x$ et $t = -x-y-z = \frac{1}{2}x - y$. Les solutions du système sont donc les

$$\left\{\left(x, y, z = -\frac{3}{2}x, t = \frac{1}{2}x - y\right) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Pour éviter d'avoir à diviser par a on réordonne nos lignes puis on applique la méthode du pivot :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & + & az & = & 1 \quad {\scriptstyle L_1} \\ x & + & aby & + & z & = & b \quad {\scriptstyle L_2} \\ ax & + & by & + & z & = & 1 \quad {\scriptstyle L_3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & by & + & az & = & 1 & {\scriptstyle L_1} \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - aL_1} \end{array}\right.$$

On fait ensuite $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ pour obtenir un système triangulaire équivalent au système initial :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & + & az & = & 1 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ & & & & (2-a-a^2)z & = & b-a \end{array}\right.$$

2. Nous allons maintenant discuter de l'existence des solutions. Remarquons d'abord que $2-a-a^2 = -(a-1)(a+2)$. Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ alors $2-a-a^2 \neq 0$ donc $z = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$. On a donc trouvé la valeur de z. La deuxième ligne du système triangulaire est $b(a-1)y + (1-a)z = b-1$ on sait déjà $a-1 \neq 0$. Si $b \neq 0$ alors, en reportant la valeur de z obtenue, on trouve la valeur $y = \frac{b-1-(1-a)z}{b(a-1)}$. Puis avec la première ligne on en déduit aussi $x = 1 - by - az$.
   Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$ alors il existe une unique solution (x,y,z).

3. Il faut maintenant s'occuper des cas particuliers.

(a) Si $a = 1$ alors notre système triangulaire devient :

$$\begin{cases} x + by + z = 1 \\ 0 = b-1 \\ 0 = b-1 \end{cases}$$

Si $b \neq 1$ il n'y a pas de solution. Si $a = 1$ et $b = 1$ alors il ne reste plus que l'équation $x+y+z = 1$. On choisit par exemple y,z comme paramètres, l'ensemble des solutions est

$$\{(1-y-z,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Si $a = -2$ alors le système triangulaire devient :

$$\begin{cases} x + by - 2z = 1 \\ -3by + 3z = b-1 \\ 0 = b+2 \end{cases}$$

Donc si $b \neq -2$ il n'y a pas de solution. Si $a = -2$ et $b = -2$ alors le système est

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{cases}$$

Si l'on choisit y comme paramètre alors il y a une infinité de solutions

$$\{(-1-2y,y,-1-2y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Enfin si $b = 0$ alors la deuxième et troisième ligne du système triangulaire sont : $(1-a)z = -1$ et $(2-a-a^2)z = -a$. Donc $z = \frac{-1}{1-a} = \frac{-a}{2-a-a^2}$ (le sous-cas $b = 0$ et $a = 1$ n'a pas de solution). Dans tous les cas il n'y a pas de solution.

(d) Conclusion :
- Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$, c'est un système de Cramer : il admet une unique solution.
- Si $a = 1$ et $b \neq 1$ il n'y a pas de solution (le système n'est pas compatible).
- Si $a = 1$ et $b = 1$ il y a une infinité de solutions (qui forment un plan dans $\mathbb{R}^3$).
- Si $a = -2$ et $b \neq -2$ il n'y a pas de solution.
- Si $a = -2$ et $b = -2$ il y a une infinité de solutions (qui forment une droite dans $\mathbb{R}^3$).
- Si $b = 0$ il n'y a pas de solution.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. On commence par simplifier le système en effectuant les opérations suivantes sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$:

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x - \lambda t = a-d \\ \lambda y - \lambda t = b-d \\ \lambda z - \lambda t = c-d \\ x + y + z + (1+\lambda)t = d \end{cases}$$

2. Traitons le cas particulier $\lambda = 0$. Si $\lambda = 0$ alors le système n'a des solutions que si $a = b = c = d$. Les solutions sont alors les (x,y,z,t) qui vérifie $x+y+z+t = d$. (C'est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.)

3. Si $\lambda \neq 0$ alors on peut faire l'opération suivante sur la dernière ligne : $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{\lambda}L_1 - \frac{1}{\lambda}L_2 - \frac{1}{\lambda}L_3$ pour obtenir :

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x - \lambda t = a-d \\ \lambda y - \lambda t = b-d \\ \lambda z - \lambda t = c-d \\ (\lambda+4)t = d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d) \end{cases}$$

4. Cas particulier $\lambda = -4$. La dernière ligne devient $0 = a+b+c+d$. Donc si $a+b+c+d \neq 0$ alors il n'y a pas de solutions.
   Si $\lambda = -4$ et $a+b+c+d = 0$ alors existe une infinité de solutions :
$$\left\{ \left(t - \frac{a-d}{4}, t - \frac{b-d}{4}, t - \frac{c-d}{4}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. Cas général : $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$. On calcule d'abord $t = \frac{1}{\lambda+4}\left(d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d)\right)$ et en remplaçant par la valeur de t obtenue on en déduit les valeurs pour $x = t + \frac{1}{\lambda}(a-d), y = t + \frac{1}{\lambda}(b-d), z = t + \frac{1}{\lambda}(c-d)$. Il existe donc une solution unique :
$$\left(\frac{(\lambda+3)a-b-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)b-a-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)c-a-b-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)d-a-b-c}{\lambda(\lambda+4)} \right).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Notons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme de degré ≤ 3.

1. Tout d'abord calculons l'intégrale :
$$\int_2^4 P(x)\,dx = \left[a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + dx \right]_2^4 = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d.$$

2. D'autre part
$$\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) = \alpha\big(8a+4b+2c+d\big) + \beta\big(27a+9b+3c+d\big) + \gamma\big(64a+16b+4c+d\big).$$
   Donc
$$\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) = (8\alpha+27\beta+64\gamma)a + (4\alpha+9\beta+16\gamma)b + (2\alpha+3\beta+4\gamma)c + (\alpha+\beta+\gamma)d.$$

3. Pour avoir l'égalité $\int_2^4 P(x)\,dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$ quelque soit les coefficients a,b,c,d il faut et il suffit que
$$(8\alpha+27\beta+64\gamma)a + (4\alpha+9\beta+16\gamma)b + (2\alpha+3\beta+4\gamma)c + (\alpha+\beta+\gamma)d = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d$$
   ce qui équivaut à
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 6 \\ 4\alpha + 9\beta + 16\gamma = \frac{56}{3} \\ 8\alpha + 27\beta + 64\gamma = 60 \end{cases}$$
   De façon surprenante ce système à 3 inconnues et 4 équations a une solution unique :
$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{4}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}.$$
