

# Chapitre 23

## Déterminants

### Objectifs

- Étudier le groupe des permutations de  $\llbracket 1..n \rrbracket$ . Définir les notions : de cycles, de transpositions, de décomposition en produit de cycles, de signature.
- Définir les notions d'applications  $n$ -linéaires et leurs propriétés éventuelles (symétrique, antisymétrique, alternée). Développement suivant une base.
- Définir l'application déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, étudier les propriétés.
- Définir le déterminant d'un endomorphisme, étudier ses propriétés.
- Définir le déterminant d'une matrice carrée, étudier ses propriétés. Notion de comatrice et propriétés.
- Établir les formules de *Cramer*.

### Sommaire

<b>I) Le groupe symétrique</b>	<b>1</b>
1) Décomposition des permutations	1
2) Signature	2
<b>II) Applications <math>n</math>-linéaires</b>	<b>3</b>
1) Définition	3
2) Développement suivant une base	4
<b>III) Déterminant dans une base</b>	<b>5</b>
1) Formes $n$ -linéaires en dimension $n$	5
2) Déterminants de $n$ vecteurs dans une base	5
3) Propriétés du déterminant	6
<b>IV) Déterminant d'un endomorphisme</b>	<b>6</b>
1) Définition	6
2) Propriétés du déterminant	7
<b>V) Déterminant d'une matrice carrée</b>	<b>7</b>
1) Définition	7
2) Propriétés du déterminant d'une matrice carrée	8
3) Développement suivant une ligne ou une colonne	9
4) Comatrice	10
<b>VI) Applications</b>	<b>11</b>
1) Systèmes linéaires	11
2) Orientation d'un espace vectoriel réel	12
<b>VII) Exercices</b>	<b>12</b>

### I) Le groupe symétrique

#### 1) Décomposition des permutations

**DÉFINITION 23.1**

Soit  $E_n = \llbracket 1..n \rrbracket$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathfrak{S}_n$  l'ensemble des permutations de  $E_n$ , c'est à dire l'ensemble des bijections de  $E_n$  vers lui-même. On rappelle que  $(\mathfrak{S}_n, \circ)$  est un groupe de cardinal  $n!$  (non abélien dès que  $n \geq 3$ ), ce groupe est appelé **groupe symétrique de type  $n$** .

**Représentation d'une permutation :**

On adoptera la notation suivante : soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ , la deuxième ligne étant les images de la première par  $\sigma$  (dans le même ordre).

**DÉFINITION 23.2 (notion de cycle)**

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on dit que  $\sigma$  est un **cycle** lorsqu'il existe  $k$  entiers distincts dans  $\llbracket 1..n \rrbracket : i_1, \dots, i_k$  ( $k > 1$ ) tels que  $\sigma(i_1) = i_2, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$ , les autres entiers de  $E_n$  **étant fixes** par  $\sigma$ . Dans ce cas, on notera  $\sigma = (i_1 \ i_2 \dots i_k)$ . Le nombre  $k$  est appelé **longueur du cycle**, et un cycle de longueur 2 est appelé **une transposition**. L'ensemble  $\{i_1, \dots, i_k\}$  est appelé **support du cycle**  $\sigma$ . On convient que l'identité de  $E_n$  est un cycle de longueur nulle et à support vide.

**Exercices:**

- Décrire tous les cycles de  $\mathfrak{S}_3$ .
- Combien y-a-t'il de cycles de longueur  $k$  dans  $\mathfrak{S}_n$  ?
- Si  $\sigma$  est un cycle dans  $\mathfrak{S}_n$ , déterminer  $\sigma^{-1}$ .
- Si  $\sigma$  est un cycle de longueur  $k$  dans  $\mathfrak{S}_n$ , montrer que  $\sigma^k = \text{id}$  et que  $\sigma^i \neq \text{id}$  si  $i < k$ . En déduire que si  $a$  est un élément du support de  $\sigma$ , alors  $\sigma = (a \ \sigma(a) \dots \sigma^{k-1}(a))$ .

**THÉORÈME 23.1 (admis)**

Toute permutation de  $E_n$  est un produit (pour la loi  $\circ$ ) de cycles à **supports disjoints**, cette décomposition est unique à l'ordre près.

**Exemples:**

- Soit  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ , alors  $\sigma = (1 \ 3) \circ (4 \ 6 \ 5)$ .
- Montrer que deux cycles à supports disjoints commutent. Et si les supports sont non disjoints ?

**THÉORÈME 23.2**

Toute permutation est un produit de transpositions.

**Preuve:** Il suffit de le prouver pour un cycle, soit  $\sigma = (i_1 \dots i_k)$ , il est facile de vérifier que  $\sigma = (i_1 \ i_2)(i_2 \ i_3) \cdots (i_{k-1} \ i_k)$ . On remarquera que les supports des transpositions ne sont pas disjoints deux à deux, et que le nombre de transpositions dans la décomposition est égal à  $k - 1$ .  $\square$

**2) Signature****DÉFINITION 23.3 (inversion)**

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on appelle **inversion** de  $\sigma$  tout couple d'entiers  $(i, j) \in \llbracket 1..n \rrbracket^2$  tel que  $i < j$  et  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Le nombre d'inversions de  $\sigma$  est noté  $I_\sigma$ .

**THÉORÈME 23.3 (Nombre d'inversions d'une transposition)**

Soit  $\sigma = (a \ b)$  une transposition de  $\mathfrak{S}_n$  avec  $a < b$  : alors  $I_\sigma = 2(b - a) - 1$ .

**Preuve:** En effet, soit  $i < j$  deux entiers de  $E_n$  :

- Si  $i, j \notin \{a, b\}$ , alors  $i$  et  $j$  sont fixes, donc  $(i, j)$  n'est pas une inversion de  $\sigma$ .
- Si  $i = a$  et  $j = b$ , alors  $(i, j)$  est une inversion.
- Si  $i = a$  et  $j \neq b$ , alors  $(i, j)$  est une inversion ssi  $j \in \llbracket a + 1..b - 1 \rrbracket$ .
- Si  $i \neq a$  et  $j = b$ , alors  $(i, j)$  est une inversion ssi  $i \in \llbracket a + 1..b - 1 \rrbracket$ .

Ce qui nous fait au total  $2(b - a) - 1$  inversions pour la transposition  $(a\ b)$ .  $\square$



#### DÉFINITION 23.4 (signature d'une permutation)

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on appelle **signature** de  $\sigma$  le nombre noté  $\varepsilon(\sigma)$  et défini par  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I_\sigma}$ .

**Exemple:** Signature d'une transposition, si  $\sigma = (a\ b)$  avec  $a < b \in E_n$ , alors  $I_\sigma = 2(b - a) - 1$ , donc  $\varepsilon(\sigma) = -1$ .



#### THÉORÈME 23.4 (admis)

L'application signature  $\varepsilon : (\mathfrak{S}_n, \circ) \rightarrow (\{\pm 1\}, \times)$ , est un morphisme de groupes, c'est à dire :

$$\forall \sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n, \varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma').$$

**Application:** Calcul de la signature d'une permutation. Pour calculer la signature d'une permutation  $\sigma$ , il suffit de connaître sa décomposition en produit de transpositions :  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ , on a alors  $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1) \times \dots \times \varepsilon(\tau_k) = (-1)^k$ .

**Exemples:**

- Calculer la signature d'un cycle de longueur  $p \geq 1$ .
- Calculer la signature de  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ .



#### DÉFINITION 23.5 (le groupe alterné)

L'application signature étant un morphisme de groupe, son noyau est un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ . Par définition, ce sous-groupe est appelé **groupe alterné de type  $n$**  et noté  $\mathcal{A}_n$ . On a donc :

$$\mathcal{A}_n = \ker(\varepsilon) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n / \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

$\mathcal{A}_n$  est parfois appelé **groupe des permutations paires** car c'est l'ensemble des permutations qui s'écrivent comme produit d'un nombre pair de transpositions.



#### THÉORÈME 23.5

Le groupe alterné  $\mathcal{A}_n$  est de cardinal  $\frac{n!}{2}$ .

**Preuve:** L'ensemble  $\mathfrak{S}_n$  est la réunion de  $\mathcal{A}_n$  et de son complémentaire que l'on note  $B_n$ . Soit  $\tau$  une transposition, alors il est facile de vérifier que l'application  $f : \mathcal{A}_n \rightarrow B_n$  définie par  $\forall \sigma \in \mathcal{A}_n, f(\sigma) = \tau \circ \sigma$  est bijective, donc  $\text{card}(\mathcal{A}_n) = \text{card}(B_n)$  ce qui donne le résultat.  $\square$

**Exercices:**

- Décrire tous les éléments de  $\mathcal{A}_4$ .
- Montrer que pour  $n \geq 3$ , tout élément de  $\mathcal{A}_n$  est un produit de cycles de longueur 3

**Réponse:** On a  $(a\ b)(c\ d) = (b\ d\ c)(a\ c\ d)(b\ d\ c)$  et  $(a\ b)(b\ c) = (a\ b\ c)$ .

## II) Applications n-linéaires

### 1) Définition

**DÉFINITION 23.6**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E^n \rightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est  $n$ -linéaire lorsque  $f$  est **linéaire par rapport à chacune de ses variables** (les autres étant fixes), c'est à dire :

$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \forall i \in \llbracket 1..n \rrbracket$ , l'application  $f_i : E \rightarrow F$  définie par :

$$f_i(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ est linéaire.}$$

**Exemples:**

- L'application  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2$  (avec  $u = (u_1, u_2)$  et  $v = (v_1, v_2)$ ), est bilinéaire, plus précisément, c'est une forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^2$ .
- L'application  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$  (avec  $u = (u_1, u_2)$  et  $v = (v_1, v_2)$ ), est une forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , l'application  $f : E^3 \rightarrow E$  définie par  $f(A, B, C) = A \times B \times C$ , est trilinéaire.
- Soit  $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ . L'application  $f : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(u, v) = \int_a^b u(t)v(t) dt$ , est une forme bilinéaire sur  $E$ .

**DÉFINITION 23.7**

Soit  $f : E^n \rightarrow F$  une application  $n$ -linéaire, on dit que  $f$  est :

- **symétrique** : lorsque  $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall x_1, \dots, x_n \in E : f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$ , autrement dit, changer l'ordre des vecteurs ne change pas le résultat.
- **antisymétrique** : lorsque  $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall x_1, \dots, x_n \in E : f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma).f(x_1, \dots, x_n)$ , autrement dit, échanger deux vecteurs change le signe du résultat.
- **alternée** : lorsque  $\forall x_1, \dots, x_n \in E$ , s'il existe  $i, j \in \llbracket 1..n \rrbracket$  tels que  $i \neq j$  et  $x_i = x_j$ , alors  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ , autrement dit, si deux des vecteurs sont égaux alors le résultat est nul.

**Notation :** Soit  $f : E^n \rightarrow F$  une application  $n$ -linéaire, pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  on pose :  $f_\sigma : E^n \rightarrow F$  définie par  $f_\sigma(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ . On remarquera que  $f_\sigma$  est également  $n$ -linéaire.

**Exemple:** En reprenant les exemples ci-dessus, la première application et la quatrième sont symétriques, la deuxième est antisymétrique et alternée, la troisième est ni symétrique, ni antisymétrique, ni alternée.

**THÉORÈME 23.6**

♦ Il y a équivalence entre antisymétrique et alternée.

**Preuve:** Si  $f : E^n \rightarrow F$  est  $n$ -linéaire alternée, soient  $x_1, \dots, x_n \in E$ , soit  $\tau = (i j)$  avec  $i, j \in \llbracket 1..n \rrbracket$ , posons  $x'_i = x'_j = x_i + x_j$ , et  $S = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x'_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ , comme  $f$  est alternée,  $S = 0$ , mais  $S = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$  (en développant par rapport à la  $i$ -ième variable puis par rapport à la  $j$ -ième), ce qui donne  $f_\tau = -f = \varepsilon(\tau).f$ , mais comme toute permutation est un produit de transpositions, on en déduit que  $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, f_\sigma = \varepsilon(\sigma).f$  c'est à dire  $f$  est antisymétrique.

Si  $f$  est antisymétrique : supposons  $x_i = x_j$  avec  $i \neq j$ , alors soit  $\tau = (i j)$ , on a  $f(x_1, \dots, x_n) = f_\tau(x_1, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_n)$ , donc  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ , i.e.  $f$  est alternée.  $\square$

**2) Développement suivant une base**

Soit  $E$  de dimension  $p$ , soit  $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ , soit  $S = (x_1, \dots, x_n)$  un système de  $n$  vecteurs de  $E$  et soit  $A = \mathcal{P}_{\mathfrak{B}, S} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  la matrice de passage de  $\mathfrak{B}$  à  $S$ . Soit  $u = f(x_1, \dots, x_n)$ , en développant par rapport à la première variable, on obtient :

$$u = \sum_{1 \leq j_1 \leq p} a_{j_1, 1} f(e_{j_1}, x_2, \dots, x_n)$$

Puis on développe chacun de ces termes par rapport à la deuxième variable  $x_2$ , ce qui donne

$$u = \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq p} a_{j_1, 1} a_{j_2, 2} f(e_{j_1}, e_{j_2}, x_3, \dots, x_n)$$

etc..., ce qui donne à la fin :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq p} a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

C'est le développement de  $f(x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $\mathfrak{B}$ , on voit ainsi qu'une application  $n$ -linéaire  $f : E^n \rightarrow F$  est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs  $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$ .

Supposons maintenant que  $f$  soit en plus alternée, alors  $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$  est nul dès que deux des indices sont égaux, par conséquent on obtient la formule :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq p} \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{j_{\sigma(1)},1} \cdots a_{j_{\sigma(n)},n} f(e_{j_{\sigma(1)}}, \dots, e_{j_{\sigma(n)}}) \right).$$

Or,  $f(e_{j_{\sigma(1)}}, \dots, e_{j_{\sigma(n)}}) = \varepsilon(\sigma) \cdot f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$ , finalement on a la formule :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq p} \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{j_{\sigma(1)},1} \cdots a_{j_{\sigma(n)},n} \right) f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

### III) Déterminant dans une base

#### 1) Formes $n$ -linéaires en dimension $n$

Avec les notations du paragraphe précédent, supposons que la dimension de  $E$  soit égale à  $n$  et soit  $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , alors il existe une seule famille d'indices  $j_1, \dots, j_n$  telle que  $1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq n$ , c'est la famille  $j_1 = 1, \dots, j_n = n$ , donc si  $f$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ , alors il existe un unique scalaire  $\alpha$  tel que :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, f(x_1, \dots, x_n) = \alpha \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Avec  $\alpha = f(e_1, \dots, e_n)$  (ce qui détermine entièrement  $f$ ), et les scalaires  $a_{i,j}$  étant les coefficients de la matrice du système  $(x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $\mathfrak{B}$ .

Si  $\sigma$  parcourt  $\mathfrak{S}_n$ , alors  $\sigma^{-1}$  aussi, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \forall x_1, \dots, x_n \in E, f(x_1, \dots, x_n) &= \alpha \sum_{\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \alpha \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Posons  $\forall x_1, \dots, x_n \in E, f_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ , alors on vérifie que  $f_1$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  et que  $f_1(e_1, \dots, e_n) = 1$  (en particulier  $f_1$  est non nulle). De plus, le raisonnement précédent montre que toute forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  est de la forme  $f = \alpha f_1$  avec  $\alpha \in \mathbb{K}$ , on peut donc énoncer :



#### THÉORÈME 23.7



Si  $\dim(E) = n$ , alors l'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1 (droite vectorielle), c'est en fait un s.e.v de l'ensemble des applications de  $E^n$  vers  $\mathbb{K}$ .

#### 2) Déterminants de $n$ vecteurs dans une base

**DÉFINITION 23.8**

L'application  $f_1$  définie ci-dessus est appelée **déterminant dans la base  $\mathfrak{B}$** , elle est notée  $\det_{\mathfrak{B}}$ . C'est donc une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ , qui constitue une base de l'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$ , plus précisément, c'est l'unique forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  qui vérifie :  $\det_{\mathfrak{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

**Expression du déterminant :** Soit  $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ , et soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  la matrice de cette famille dans la base  $\mathfrak{B}$ , on a l'expression suivante :

$$\det_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

**Exemples:**

- Soit  $E = \mathbb{K}^2$ ,  $\mathfrak{B} = (i, j)$ , la base canonique, soient  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2) \in E$ , alors  $\det_{\mathfrak{B}}(u, v) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = u_1v_2 - u_2v_1$ .
- Soit  $E = \mathbb{K}^3$ ,  $\mathfrak{B} = (i, j, k)$ , la base canonique, soient  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)$  et  $w = (w_1, w_2, w_3) \in E$ , alors  $\det_{\mathfrak{B}}(u, v, w) = u_1v_2w_3 - u_2v_1w_3 - u_3v_2w_1 - u_1v_3w_2 + u_3v_1w_2 + u_2v_3w_1$ .
- Si  $\dim(E) = n$ ,  $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $E$  telle que la matrice  $A$  du système dans la base  $\mathfrak{B}$  soit triangulaire supérieure, alors :  $\det_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_n) = a_{1,1} \dots a_{n,n}$ , produit des coefficients diagonaux de la matrice.

**Réponse:** Pour que  $a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$  ait une chance d'être non nul, il faut que  $1 \leq \sigma(1), \dots, n \leq \sigma(n)$ , ce qui ne donne qu'une seule possibilité :  $\sigma = \text{id}$ .

**3) Propriétés du déterminant**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

- L'application  $\det_{\mathfrak{B}}$  est une forme  $n$ -linéaire alternée, donc :
  - elle est linéaire par rapport à chaque variable, par exemple :  $\det_{\mathfrak{B}}(\alpha x_1 + \beta x'_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha \det_{\mathfrak{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta \det_{\mathfrak{B}}(x'_1, x_2, \dots, x_n)$ .
  - si on échange deux vecteurs dans le déterminant, alors le résultat change de signe. Par exemple :  $\det_{\mathfrak{B}}(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n) = -\det_{\mathfrak{B}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . Plus généralement :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \det_{\mathfrak{B}}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

- Si deux des vecteurs de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  sont égaux, alors  $\det_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$ . On en déduit si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres (*i.e.* la famille est liée), alors le déterminant est nul, on en déduit également qu'ajouter à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres, ne change pas le déterminant, par conséquent on peut calculer un déterminant avec la méthode de Gauss (pour obtenir un système de vecteurs dont la matrice dans la base  $\mathfrak{B}$  est triangulaire supérieure).
- $\det_{\mathfrak{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ , ce que l'on note  $\det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}) = 1$ , c'est l'unique forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  qui vérifie cette égalité.
- Si  $\mathfrak{B}'$  est une autre base de  $E$ , alors  $\det_{\mathfrak{B}'} = \det_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B}) \cdot \det_{\mathfrak{B}}$   
**Preuve:** L'ensemble des forme  $n$ -linéaires alternées est une droite vectorielle engendrée par  $\det_{\mathfrak{B}}$ , donc il existe un scalaire  $\alpha$  tel que  $\det_{\mathfrak{B}'} = \alpha \cdot \det_{\mathfrak{B}}$ , pour obtenir  $\alpha$ , il suffit d'appliquer cette égalité sur les vecteurs de  $\mathfrak{B}$ .  $\square$
- La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $E$  ssi  $\det_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .  
**Preuve:** Soit  $\mathfrak{B}' = (x_1, \dots, x_n)$ , si  $\mathfrak{B}'$  est une base de  $E$ , alors l'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  est une droite engendrée par  $\det_{\mathfrak{B}'}$  et  $\det_{\mathfrak{B}} = \det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}') \cdot \det_{\mathfrak{B}'}$ , or  $\det_{\mathfrak{B}}$  n'est pas l'application nulle, donc  $\det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}') \neq 0$ .

Réciproquement, si  $\det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}') \neq 0$  : alors la famille  $\mathfrak{B}'$  est libre, car si elle était liée, l'un de ses vecteurs serait combinaison linéaire des autres et donc le déterminant dans la base  $\mathfrak{B}$  serait nul, ce qui est absurde. Donc  $\mathfrak{B}'$  est une famille libre de  $n$  vecteurs en dimension  $n$ , c'est donc une base de  $E$ .  $\square$

## IV) Déterminant d'un endomorphisme

### 1) Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soient  $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathfrak{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ , et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on note  $f$  et  $g$  les deux formes  $n$ -linéaires alternées définies par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathfrak{B}'}(u(x_1), \dots, u(x_n)),$$

$$g(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathfrak{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)).$$

On sait qu'il existe un scalaire  $\alpha$  tel que  $f = \alpha \det_{\mathfrak{B}'}$  (avec  $\alpha = f(e'_1, \dots, e'_n)$ ), et un scalaire  $\beta$  tel que  $g = \beta \det_{\mathfrak{B}}$  (avec  $\beta = g(e_1, \dots, e_n)$ ). On a  $\alpha = \det_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B}) \det_{\mathfrak{B}}(u(e'_1), \dots, u(e'_n)) = \det_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B}) g(e'_1, \dots, e'_n) = \det_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B}) g(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}')$ , ce qui donne finalement  $\alpha = \beta$ , par conséquent :

$$\det_{\mathfrak{B}'}(u(e'_1), \dots, u(e'_n)) = \det_{\mathfrak{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$



#### DÉFINITION 23.9

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on appelle **déterminant de  $u$**  le scalaire, noté  $\det(u)$  et défini par :  $\det(u) = \det_{\mathfrak{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ . Ce scalaire est **indépendant de la base  $\mathfrak{B}$  choisie**.

**Exemple:** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  défini par  $u(x, y) = (x + y; 2x - y)$ , notons  $\mathfrak{B} = (i, j)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $\det(u) = \det_{\mathfrak{B}}(i + 2j, i - j) = \det_{\mathfrak{B}}(3i, i - j) = \det_{\mathfrak{B}}(3i, -j) = -3 \det_{\mathfrak{B}}(i, j) = -3$ .

**Expression du déterminant :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , la matrice du système  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est en fait la matrice de  $u$  dans la base  $\mathfrak{B}$ , posons  $A(a_{i,j}) = \text{mat}(u)$ , alors on peut écrire :

$$\det(u) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

### 2) Propriétés du déterminant

– Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , soit  $\mathfrak{B}$  une base de  $E$ , alors :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \det_{\mathfrak{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

**Preuve:** L'application  $f$  définie par  $f(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathfrak{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n))$  est  $n$ -linéaire alternée, donc il existe un scalaire  $\alpha$  tel que  $f = \alpha \det_{\mathfrak{B}}$ , ce scalaire vaut  $\alpha = f(e_1, \dots, e_n)$  (en posant  $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ), donc  $\alpha = \det(u)$  d'après la définition.  $\square$

– Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ , on a  $\det(u \circ v) = \det(v \circ u) = \det(u) \det(v)$ .

**Preuve:** Soit  $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , alors :

$$\det(u \circ v) = \det_{\mathfrak{B}}(u(v(e_1)), \dots, u(v(e_n))) = \det(u) \det_{\mathfrak{B}}(v(e_1), \dots, v(e_n)) = \det(u) \det(v),$$

de même, on obtient  $\det(v \circ u) = \det(v) \det(u)$ , ce qui donne l'égalité.  $\square$

– Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\mathfrak{B}$  une base de  $E$ , alors  $u \in \text{GL}(E)$  ssi  $\det(u) \neq 0$ , et si c'est le cas, alors  $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$ .

**Preuve:** Si  $u \in \text{GL}(E)$ , alors  $\det(u) \det(u^{-1}) = \det(u \circ u^{-1}) = \det(\text{id}_E) = 1$ , donc  $\det(u) \neq 0$ , et on a la formule. Réciproquement, si  $\det(u) \neq 0$ , alors la famille  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est libre, donc  $u$  est bien un automorphisme de  $E$ .  $\square$

**DÉFINITION 23.10**

L'application  $\det : \text{GL}(E) \rightarrow \mathbb{K}^*$  est un morphisme de groupes, son noyau est donc un sous-groupe de  $\text{GL}(E)$ , ce sous-groupe est appelé **groupe spécial linéaire** et noté  $\text{SL}(E)$ . On a donc :  $\text{SL}(E) = \{u \in \text{GL}(E) / \det(u) = 1\} = \{u \in \mathcal{L}(E) / \det(u) = 1\}$ .

## V) Déterminant d'une matrice carrée

### 1) Définition

**DÉFINITION 23.11**

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , et soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $A$ , on appelle **déterminant de  $A$**  le déterminant de  $u$  et on pose

$$\det(A) = \det(u) = \det_{\mathfrak{B}}(C_1(A), \dots, C_n(A)),$$

où  $\mathfrak{B}$  désigne la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

**Expression du déterminant :**  $A$  est la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , donc d'après le paragraphe précédent, on a :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

**Notation :** on écrit :  $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

**Exemples :**

- Cas d'une matrice carrée de taille 2 :  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .
- Cas d'une matrice triangulaire : si  $A$  est triangulaire, alors  $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$  (produit des éléments diagonaux).

### 2) Propriétés du déterminant d'une matrice carrée

- Une matrice carrée  $A$  et sa transposée, ont le même déterminant. On en déduit que si  $\mathfrak{B}$  est la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , alors  $\det(A) = \det_{\mathfrak{B}}(C_1(A), \dots, C_n(A)) = \det_{\mathfrak{B}}(L_1(A), \dots, L_n(A))$ .

**Preuve :** En effet, on a  $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \det(A^t)$ .  $\square$

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $\mathfrak{B}$  une base quelconque de  $E$ , si  $\text{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\det(u) = \det(A)$ .

On en déduit en particulier que si  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\det(P^{-1} \times A \times P) = \det(A)$ .

- Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\det(A \times B) = \det(A) \det(B)$ , en particulier, on a  $\det(A \times B) = \det(B \times A)$ .
- Une matrice carrée est inversible ssi son déterminant est non nul, si c'est le cas, alors  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ .
- Utilisation de la méthode de *Gauss* : on utilise celle-ci pour se ramener au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire, plus précisément :
  - L'opération  $L_i \leftrightarrow L_j$ , change le signe du déterminant (idem avec les colonnes).
  - L'opération  $L_i \leftarrow \alpha L_i$  ( $\alpha \neq 0$ ), multiplie le déterminant par  $\alpha$  (idem avec les colonnes).
  - L'opération  $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ , ne change pas le déterminant (idem avec les colonnes).

**Exemple :** Avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .



$$\det(A) \stackrel{C_1 \leftrightarrow C_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

**DÉFINITION 23.12**

L'application :  $\det : \text{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n$ , est un morphisme de groupes, donc son noyau est un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ , celui-ci est appelé **groupe spécial linéaire de type  $n$  sur  $\mathbb{K}$** , on le note  $\text{SL}_n(\mathbb{K})$ , on a donc :  $\text{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \det(A) = 1\}$ .

**3) Développement suivant une ligne ou une colonne**

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , soit  $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , notons  $C_1, \dots, C_n$  les vecteurs colonnes de  $A$ , pour  $j \in \llbracket 1..n \rrbracket$ , on a  $C_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ , par linéarité par rapport à la  $j$ -ième variable, on peut écrire :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \det_{\mathfrak{B}}(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

En posant  $\gamma_{i,j}(A) = \det_{\mathfrak{B}}(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n)$ , on a alors  $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \gamma_{i,j}(A)$ , c'est le développement de  $\det(A)$  suivant la colonne  $j$ .

**DÉFINITION 23.13**

Le scalaire  $\gamma_{i,j}(A)$  est appelé **cofacteur** ( $i, j$ ) de la matrice  $A$ , c'est le déterminant de la matrice  $A$  dans laquelle la colonne  $j$  a été remplacée par le  $i$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

Calcul de  $\gamma_{i,j}(A)$  :

$$\text{On a } \gamma_{i,j}(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}, \text{ on échange les colonnes } C_{j+1} \text{ et } C_j,$$

puis  $C_{j+1}$  et  $C_{j+2}, \dots$  etc, pour amener la colonne  $j$  en dernière position, **sans changer l'ordre sur les autres colonnes**, le déterminant est multiplié par  $(-1)^{n-j}$ . De la même façon, on amène la ligne  $i$  en dernière position sans changer l'ordre des autres lignes, le déterminant est multiplié par  $(-1)^{n-i}$ . On obtient alors :

$$\gamma_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix},$$

notons  $b_{i,j}$  les coefficients de la matrice à l'intérieur de ce déterminant, on a

$$\gamma_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n},$$

on remarque que lorsque  $\sigma(n) \neq n$ , alors  $b_{\sigma(n),n} = 0$ , on peut donc ne retenir que les permutations ayant  $n$  comme point fixe, c'est à dire en fait les éléments de  $\mathfrak{S}_{n-1}$ , et comme  $b_{n,n} = 1$ , on a alors :

$$\gamma_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n-1),n-1}.$$

C'est le déterminant de la matrice extraite de  $A$  par suppression de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ , multiplié par  $(-1)^{i+j}$ .



#### DÉFINITION 23.14

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on appelle **mineur** ( $i, j$ ) de la matrice  $A$ , le déterminant  $\Delta_{i,j}(A)$  de la matrice  $A_{i,j}$  obtenue par suppression de ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de  $A$ . Le lien entre cofacteur et mineur est :  $\gamma_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A)$ .

Le développement de  $\det(A)$  suivant la colonne  $j$  s'écrit donc :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A).$$

$\Delta_{i,j}(A)$  est un déterminant d'ordre  $n-1$ , c'est donc une formule **récurrente**.

**Exemple:** En développant suivant la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-3) - 9 = -3.$$

**Développement suivant la ligne  $j$  :** comme une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  a le même déterminant que sa transposée, développer  $\det(A)$  suivant la ligne  $j$  revient à développer  $\det({}^tA)$  suivant la colonne  $j$ , ce qui donne  $\det(A) = \sum_{i=1}^n ({}^tA)_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}({}^tA)$ , mais  $\Delta_{i,j}({}^tA) = \Delta_{j,i}(A)$ , ce qui donne finalement :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{j,i} (-1)^{i+j} \Delta_{j,i}(A)$$

**Un exemple classique :** le déterminant de *Vandermonde*<sup>1</sup>

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$ , où  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ , soit  $V_n = \det(A)$ , alors on a le résultat suivant :

$$V_n = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

**Preuve:** Si deux des scalaires sont égaux, le résultat est évident. Supposons les  $\alpha_i$  distincts deux à deux. On peut vérifier que pour  $n = 2$  le résultat est vrai. Supposons le vrai au rang  $n$ , et remplaçons dans  $V_{n+1}$  la dernière ligne par  $(1 \ X^2 \ \dots \ X^{n+1})$ , le déterminant obtenu en développant suivant la dernière ligne, est un polynôme  $P(X)$  de degré au plus  $n+1$ , dont les racines sont  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ , de plus son coefficient dominant est  $V_n$ , par conséquent on a  $P(X) = V_n \prod_{i=0}^n (X - \alpha_i)$ , d'où  $V_{n+1} = V_n \prod_{i=0}^n (\alpha_{n+1} - \alpha_i) = \prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (\alpha_j - \alpha_i)$ .  $\square$

#### 4) Comatrice

1. VANDERMONDE Alexandre (1735 – 1796) : mathématicien français qui fut le premier à étudier les déterminants.

**DÉFINITION 23.15**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on appelle comatrice de  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont les coefficients sont les cofacteurs  $\gamma_{i,j}(A)$ . Notation :  $\text{Com}(A) = (\gamma_{i,j}(A))_{1 \leq i,j \leq n}$ .

**Exemple:** Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , alors  $\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

**THÉORÈME 23.8 (relation fondamentale)**

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \times {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A) \times A = \det(A)I_n$$

**Preuve:** Soit  $B = A \times {}^t\text{Com}(A)$ , alors  $b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}(-1)^{j+k} \Delta_{jk}(A)$ , qui est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans  $A$ , la ligne  $j$  par la ligne  $i$ , d'où  $b_{i,j} = \det(A)\delta_{i,j}$ .

Posons  $C = {}^t\text{Com}(A) \times A$ , alors  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,j}(-1)^{i+k} \Delta_{k,i}(A)$ , qui est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans  $A$ , la colonne  $i$  par la colonne  $j$ , on a donc  $c_{i,j} = \det(A)\delta_{i,j}$ .  $\square$

**Application:** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{Com}(A)$$

**VI) Applications****1) Systèmes linéaires**

C'est un système de la forme (S) : 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}, \text{ où les scalaires } x_1, \dots, x_p \text{ sont les}$$

inconnues.

Le système (S) peut s'interpréter de plusieurs façons :

– Sous forme matricielle : (S)  $\iff AX = B$  où  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ , et  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ ,  $A$

est la **matrice du système**.

– Sous forme linéaire : soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ , soit  $x \in \mathbb{K}^p$  le vecteur de coordonnées  $(x_1, \dots, x_p)$  dans la base canonique, et soit  $b$  le vecteur de  $\mathbb{K}^n$  de coordonnées  $(b_1, \dots, b_n)$ , on a alors (S)  $\iff u(x) = b$ .

– Sous forme vectorielle : soient  $v_1, \dots, v_p$  les vecteurs colonnes de  $A$ , on a (S)  $\iff x_1v_1 + \dots + x_pv_p = b$ , c'est une équation vectorielle dans  $\mathbb{K}^n$ .

**Rappel :** structure de l'ensemble des solutions de l'équation linéaire  $u(x) = b$  :

Il y a des solutions ssi  $b \in \text{Im}(u)$ , si c'est le cas, et si  $x_0 \in \mathbb{K}^p$  désigne une solution particulière, alors l'ensemble des solutions est  $x_0 + \ker(u)$ , où  $\ker(u)$  est l'ensemble des solutions de l'équation homogène, c'est un s.e.v de  $\mathbb{K}^p$  de dimension  $p - \text{rg}(u)$

**DÉFINITION 23.16 (Systèmes de CRAMER)**

C'est un système linéaire carré possédant une unique solution, ce qui revient à dire que la matrice du système est carrée inversible.

**Formules de Cramer<sup>2</sup>** : on a ici  $n = p$ , notons  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$ , on a  $B = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$ , soit  $D_i$  la matrice obtenue en remplaçant dans  $A$  la colonne  $i$  par la colonne  $B$ , on a :  $\det(D_i) = \sum_{k=1}^n x_k \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_k, C_{i+1}, \dots, C_n)$ , ce qui donne  $\det(D_i) = x_i \det(A)$ , d'où les formules :

$$\forall i \in \llbracket 1..n \rrbracket, x_i = \frac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)}{\det(A)}$$

**Exemple:** Si  $ad - bc \neq 0$ , alors le système  $(S) : \begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$ , possède une unique solution :

$$\begin{cases} x = \frac{ud - vb}{ad - bc} \\ y = \frac{av - cu}{ad - bc} \end{cases}$$

## 2) Orientation d'un espace vectoriel réel

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $E$ , soit  $P$  la matrice de passage, alors  $P$  est une matrice inversible, donc  $\det(P) \neq 0$ , on a alors soit  $\det(P) > 0$ , soit  $\det(P) < 0$ .



### DÉFINITION 23.17

On dit que la base  $\mathcal{B}$  est en relation avec la base  $\mathcal{B}'$  lorsque la matrice de passage a un déterminant strictement positif, on note alors  $\mathcal{B} \mathcal{S} \mathcal{B}'$ .

**Exemple:** Une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est en relation avec elle-même, mais pas avec  $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$ .



### THÉORÈME 23.9

La relation  $\mathcal{S}$  est une relation d'équivalence, et il n'y a que deux classes d'équivalence.

**Preuve:** La réflexivité est évidente. La symétrie découle de la formule  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}^{-1}$ . La transitivité découle de la formule :  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$ .

D'après l'exemple ci-dessus, il y a au moins deux classes d'équivalence, soit  $\mathcal{B}''$  une troisième base, supposons que  $\mathcal{B}$  ne soit pas en relation avec  $\mathcal{B}''$ , alors  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$ , d'où  $\det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}) = \det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) \times \det(P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}) > 0$ , car ces deux déterminants sont négatifs, par conséquent  $\mathcal{B}'' \mathcal{S} \mathcal{B}'$ , et donc la classe de  $\mathcal{B}''$  est égale à celle de  $\mathcal{B}'$ .  $\square$



### DÉFINITION 23.18

Orienter l'espace vectoriel  $E$  c'est choisir une des deux classes d'équivalence, que l'on appelle **classe des bases directes**, l'autre étant alors appelée **classe des bases indirectes**. Il n'y a donc que deux orientations possibles.

**À retenir :** le déterminant de la matrice de passage entre deux bases directes (ou deux bases indirectes) est strictement positif. Le déterminant de la matrice de passage entre une base directe et une base indirecte est strictement négatif.



### DÉFINITION 23.19 (orientation induite sur un hyperplan)

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  ( $\mathbb{R}$ -espace vectoriel orienté), et soit  $e_n$  un vecteur de  $E$  n'appartenant pas à  $H$ , soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1})$  une base de  $H$ , la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , si cette base est directe, on dira que  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  est une base directe de  $H$  pour l'orientation induite sur  $H$  par le vecteur  $e_n$ .

2. CRAMER Gabriel (1704 – 1752) : mathématicien français qui s'est intéressé aux systèmes linéaires et à la théorie des déterminants.

## VII) Exercices

## ★Exercice 23.1

Calculer les déterminants suivants :

$$a) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 1 & -1 & 1 \\ t & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

## ★Exercice 23.2

Calculer le déterminant de la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} a) a_{ij} &= 1 - \delta_{ij}. & b) a_{ij} &= b - a\delta_{ij} & c) a_{ij} &= |i - j|. \\ d) a_{ij} &= \begin{cases} a+b & \text{si } i = j \\ ab & \text{si } j = i+1 \\ 1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & e) a_{ij} &= C_{p-i+1}^{j-1}, \text{ où } p \geq n. & f) a_{ij} &= \sin(i+j). \end{aligned}$$

## ★Exercice 23.3

- a) Soit  $\mathfrak{B}$  une base d'un  $\mathbb{K}$ -espace  $E$  de dimension  $n$ , soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , soit  $p \leq n$ , soit  $x_1, \dots, x_n, e \in E$ , montrer que  $\det_{\mathfrak{B}}(x_1 + \lambda e, x_2 + \lambda e, \dots, x_p + \lambda e, x_{p+1}, \dots, x_n)$  est un polynôme en  $\lambda$  de degré au plus 1.

Soient  $a, b \in \mathbb{C}$  distincts, pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , on pose :  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda_n \end{pmatrix}$

- b) Pour  $x \in \mathbb{C}$ , on pose  $P(x) = \det(B)$  où  $B = (a_{ij} + x)$ . Montrer que  $P(x)$  est un polynôme de degré 1 au plus 1. Calculer  $P(-a)$  et  $P(-b)$ .  
c) En déduire  $\det(A)$ .

## ★Exercice 23.4

a) Soit  $A = \left( \begin{array}{c|c} B & C \\ \hline O_{n-p,p} & D \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ .

i) Montrer que  $A = A' \times A''$  avec  $A' = \left( \begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline O_{n-p,p} & D \end{array} \right)$  et  $A'' = \left( \begin{array}{c|c} B & O_{p,n-p} \\ \hline O_{n-p,p} & I_{n-p} \end{array} \right)$ .

ii) Calculer  $\det(A')$  et  $\det(A'')$ , en déduire que  $\det(A) = \det(B) \times \det(D)$ .

b) Soit  $A$  une matrice triangulaire par blocs, c'est à dire  $A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{\ddots} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \boxed{\ddots} & * \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_n} \end{pmatrix}$ , où les

matrices  $A_i$  sont carrées, montrer que  $\det(A) = \prod_{i=1}^n \det(A_i)$ .

## ★Exercice 23.5

Soit  $E$  un espace de dimension  $n$ ,  $\mathfrak{B}$  une base de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , pour  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , on pose  $f(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathfrak{B}}(u(x_1), x_2, \dots, x_n) + \dots + \det_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, u(x_n))$ . Montrer que  $f = \text{tr}(u) \cdot \det_{\mathfrak{B}}$ .

## ★ Exercice 23.6

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , soit  $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , on note  $c_1, \dots, c_n$  les vecteurs colonnes de  $A$ .

a) Montrer que  $\det(A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i1} a_{j2} \det_{\mathfrak{B}}(e_i, e_j, c_2, \dots, c_n)$ .

b) En déduire que  $\det(A) = - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (-1)^{i_1+i_2} \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} \end{vmatrix} \times \Delta_{(i_1, i_2), (1, 2)}(A)$  où  $\Delta_{(i_1, i_2), (1, 2)}(A)$  désigne le déterminant de la matrice obtenue en supprimant dans la matrice  $A$  les lignes  $L_{i_1}$  et  $L_{i_2}$  et les colonnes  $C_1$  et  $C_2$ . C'est le développement de  $\det(A)$  suivant les colonnes 1 et 2.

c) Exemple : développer le déterminant  $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & m & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$  suivant les colonnes 1 et 2.