Le groupe symétrique

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **IT

Soit σ l'élément de S_{12} : $\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11)$.

1. Combien σ possède-t-elle d'inversions ? Que vaut sa signature ?
2. Décomposer σ en produit de transpositions. Retrouvez sa signature.
3. Déterminer les orbites de σ.
4. Déterminer σ^{2005}.

Correction ▼ [005353]

Exercice 2 ***IT

Démontrer que S_n est engendré par $\tau_{1,2}$, $\tau_{1,3},...,\tau_{1,n}$.

Correction ▼ [005354]

Exercice 3 ***IT

Démontrer que A_n est engendré par les cycles de longueur 3 (pour $n \geq 3$).

Correction ▼ [005355]

Exercice 4 ***I

Démontrer que S_n est engendré par $\tau_{1,2}$ et le cycle $(2\ 3\ ...\ n\ 1)$.

Correction ▼ [005356]

Exercice 5 ***I

Soit $(G, \times)$ un groupe. Montrer que $(G, \times)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(S(G), \circ)$ et que, en particulier, tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n (théorème de CAYLEY). (Indication : montrer que pour chaque x de G, l'application $y \mapsto xy$ est une permutation de G.)

Correction ▼ [005357]

Exercice 6 ***

Soit σ une permutation de $\{1,...,n\}$ et k le nombre d'orbites de σ. Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$.

Correction ▼ [005358]

Exercice 7 ***I

σ étant une permutation de $\{1,...,n\}$ donnée, on définit la matrice notée P_σ, carrée d'ordre n dont le terme ligne i colonne j est $\delta_{i,\sigma(j)}$ (où $\delta_{i,j}$ est le symbôle de KRONECKER. On note G l'ensemble des P_σ où σ décrit S_n.

1. (a) σ et σ' étant deux éléments de S_n, calculer $P_\sigma \times P_{\sigma'}$.
   (b) En déduire que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$, isomorphe à $(S_n, \circ)$ (les matrices P_σ sont appelées « matrices de permutation »).

2. (Une utilisation des P_σ) A étant une matrice carrée donnée, calculer AP_σ et $P_\sigma A$. Que constate-t-on ?

Correction ▼ [005359]

Exercice 8 ***I

$A_1, A_2,...,A_p$ sont p matrices carrées d'ordre n, deux à deux distinctes et inversibles. On suppose que $\{A_1,...,A_p\}$ est stable pour $\times$. Montrer que $\{A_1,...,A_p\}$ est un sous groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$.

Correction ▼ [005360]

Exercice 9 ***

Dans $E = \mathbb{R}^n$, on considère l'hyperplan H d'équation $x_1 + ... + x_n = 0$ dans la base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E. Pour $\sigma \in S_n$ donnée, on considère l'endomorphisme f_σ de E défini par : $\forall i \in E,\ f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
On pose alors $p = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma$. Montrer que p est une projection dont on déterminera l'image et la direction.

Correction ▼ [005361]

Correction de **l'exercice 1 ▲**

1. Les inversions de σ sont : $\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11)$.

$\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{2,6\}$, $\{2,7\}$, $\{2,8\}$, $\{2,10\}$, $\{2,11\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{3,6\}$, $\{3,7\}$, $\{3,8\}$, $\{6,7\}$, $\{6,8\}$, $\{9,10\}$, $\{9,11\}$, $\{9,12\}$.

Au total, il y a $2+8+5+2+3 = 20$ inversions. σ est donc une permutation paire (de signature 1).

2. $\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 11\ 8\ 9\ 12)$.
Puis, $\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 8\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 8\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 5\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{7,4}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 5\ 4\ 1\ 2\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{5,2}\circ\tau_{7,4}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 2\ 4\ 1\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Puis, $\tau_{1,4}\circ\tau_{5,2}\circ\tau_{7,4}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma = (3\ 2\ 1\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12) = \tau_{1,3}$.
Par suite,

$$\sigma = \tau_{11,12}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{7,4}\circ\tau_{5,2}\circ\tau_{1,4}\circ\tau_{1,3}.$$

3. $O(1) = \{1,3,4,7\} = O(3) = O(4) = O(7)$, puis $O(2) = \{2,5,8,10\}$ puis $O(6) = \{6\}$ et $O(9) = \{9,11,12\} = O(11) = O(12)$. σ a 4 orbites, deux de cardinal 4, une de cardinal 3 et un singleton (correspondant à un point fixe).

4. σ est donc le produit commutatif des cycles $c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ et $c_3 = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 \\ 12 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.
On a $c_1^4 = c_2^4 = Id$ et $c_3^3 = Id$. Or, $2005 = 4.1001+1$. Donc, $c_1^{2005} = c_1(c_1^4)^{1001} = c_1$, et de même $c_2^{2005} = c_2$. Puis, $c_3^{2005} = (c_3^3)^{668}c_3 = c_3$. Puisque c_1, c_2 et c_3 commutent,

$$\sigma^{2005} = c_1^{2005}c_2^{2005}c_3^{2005} = c_1c_2c_3 = \sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11).$$

Correction de **l'exercice 2 ▲**

$(S_n,\circ)$ est engendré par les transpositions. Il suffit donc de montrer que pour $2 \leq i < j \leq n$, la transposition $\tau_{i,j}$ est produit des $\tau_{1,k}$, $2 \leq k \leq n$.
Mais $\tau_{1,i}\circ\tau_{1,j}\circ\tau_{1,i} = (i1j)(ji1)(i1j) = (1ij) = \tau_{i,j}$ ce qu'il fallait démontrer.

Correction de **l'exercice 3 ▲**

Les éléments de A_n sont les produits pairs de transpositions. Il suffit donc de vérifier qu'un produit de deux transpositions est un produit de cycles de longueur 3.
Soient i, j et k trois éléments deux à deux distincts de $\{1,...,n\}$. $\tau_{i,k}\circ\tau_{i,j}$ est le 3-cycle : $i \to j$ $j \to k$ $k \to i$, ce qui montre qu'un 3-cycle est pair et que le produit de deux transpositions dont les supports ont en commun un singleton est un 3-cycle.
Le cas $\tau_{i,j}\circ\tau_{i,j} = Id = (231)(312)$ est immédiat. Il reste à étudier le produit de deux transpositions à supports disjoints.
Soient i, j, k et l quatre éléments de deux à deux distincts de $\{1,...,n\}$.

$$\tau_{i,j}\circ\tau_{k,l} = (jikl)(ijlk) = (jilk) = (jkil)(ljik).$$

Donc, $\tau_{i,j}\circ\tau_{k,l}$ est un bien un produit de 3-cycles ce qui achève la démonstration.

Correction de l'exercice 4 ▲

D'après l'exercice 2, il suffit de montrer que pour $2 \leq i \leq n$, $\tau_{1,i}$ peut s'écrire en utilisant uniquement $\tau = \tau_{1,2}$ et $c = (2\ 3\ \ldots\ n\ 1)$. On note que $c^n = Id$.
Tout d'abord, pour $1 \leq i \leq n-1$, étudions $\sigma = c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1}$.
Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$.

$$\tau \circ c^{n-i+1}(k) \neq c^{n-i+1}(k) \leq c^{n-i+1}(k) \in \{1,2\} \Leftrightarrow k \in \{c^{-n+i-1}(1), c^{-n+i-1}(2)\} \Leftrightarrow k \in \{c^{i-1}(1), c^{i-1}(2)\}$$
$$\Leftrightarrow k \in \{i, i+1\}.$$

Donc, si $k \notin \{i, i+1\}$,

$$\sigma(k) = c^{i-1}(k)(\tau \circ c^{n-i+1}(k)) = c^{i-1}(c^{n-i+1}(k)) = c^n(k) = k,$$

et la restriction de σ à $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i, i+1\}$ est l'identité de cet ensemble. Comme σ n'est pas l'identité puisque $\sigma(i) \neq i$, σ est donc nécessairement la transposition $\tau_{i,i+1}$.
On a montré que $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1} = \tau_{i,i+1}$.
Vérifions maintenant que les $\tau_{1,i}$ s'écrivent à l'aide des $\tau_{j,j+1}$. D'après l'exercice 2, $\tau_{i,j} = \tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}$, et donc bien sûr, plus généralement, $\tau_{i,j} = \tau_{k,i} \circ \tau_{k,j} \circ \tau_{k,i}$.
Par suite, $\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i} \circ \tau_{1,2}$ puis, $\tau_{2,i} = \tau_{2,3} \circ \tau_{3,i} \circ \tau_{2,3}$, puis, $\tau_{3,i} = \tau_{3,4} \circ \tau_{4,i} \circ \tau_{3,4}$ ... et $\tau_{i-2,i} = \tau_{i-2,i-1} \circ \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1}$. Finalement,

$$\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \ldots \circ \tau_{i-2,i-1} \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1} \circ \ldots \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2},$$

ce qui achève la démonstration.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $(G, \times)$ un groupe. Pour x élément de G, on considère $f_x : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ y & \mapsto & xy \end{array}$. f_x est une application de G vers G et de plus, clairement $f_x \circ f_{x^{-1}} = f_{x^{-1}} \circ f_x = Id_G$. Donc, pour tout élément x de G, f_x est une permutation de G.
Soit alors $\varphi : \begin{array}{ccc} (G, \times) & \to & (S_G, \circ) \\ x & \mapsto & f_x \end{array}$. D'après ce qui précède, φ est une application. De plus, φ est de plus un morphisme de groupes. En effet, pour $(x, x', y) \in G^3$, on a :

$$\varphi((xx'))(y) = f_{xx'}(y) = xx'y = f_x(f'_x(y)) = f_x \circ f_{x'}(y) = (\varphi(x) \circ \varphi(x'))(y),$$

et donc $\forall (x, x') \in G^2$, $\varphi(xx') = \varphi(x) o \varphi(x')$.
Enfin, φ est injectif car, pour x élément de G :

$$\varphi(x) = Id \Rightarrow \forall y \in G,\ xy = y \Rightarrow xe = e \Rightarrow x = e.$$

Donc, $\mathrm{Ker}\varphi = \{e\}$, et φ est injectif.
φ est ainsi un isomorphisme de groupes de $(G, \times)$ sur $(f(G), \circ)$ qui est un sous groupe de $(S_G, \circ)$. $(G, \times)$ est bien isomorphe à un sous groupe de $(S_G, \circ)$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Montrons d'abord par récurrence sur $l \geq 2$ que la signature d'un cycle de longueur l est $(-1)^{l-1}$.
C'est connu pour $l = 2$ (signature d'une transposition).
Soit $l \geq 2$. Supposons que tout cycle de longueur l ait pour signature $(-1)^{l-1}$. Soit c un cycle de longueur $l+1$. On note $\{x_1, x_2, \ldots, x_{l+1}\}$ le support de c et on suppose que, pour $1 \leq i \leq l$, $c(x_i) = x_{i+1}$ et que $c(x_{l+1}) = x_1$.
Montrons alors que $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$ est un cycle de longueur l. $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$ fixe déjà x_{l+1} puis, si $1 \leq i \leq l-1$, $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c(x_i) = \tau_{x_1, x_{l+1}}(x_{i+1}) = x_{i+1}$ (car x_{i+1} n'est ni x_1, ni x_{l+1}), et enfin $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c(x_l) = \tau_{x_1, x_{l+1}}(x_{l+1}) = x_1$. $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$ est donc bien un cycle de longueur l. Par hypothèse de récurrence, $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$ a pour signature $(-1)^{l-1}$ et donc, c a pour signature $(-1)^{(l+1)-1}$.

Montrons maintenant que si σ est une permutation quelconque de $\{1,...,n\}$ ayant k orbites la signature de σ est $(-1)^{n-k}$.
Si σ est l'identité, σ a n orbites et le résultat est clair.
Si σ n'est pas l'identité, on décompose σ en produit de cycles à supports disjoints.
Posons $\sigma = c_1...c_p$ où p désigne le nombre d'orbites de σ non réduites à un singleton et donc $k-p$ est le nombre de points fixes de σ. Si l_i est la longueur de c_i, on a donc $n = l_1+...+l_p+(k-p)$ ou encore $n-k = l_1+...+l_p-p$.
Mais alors,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{p}\varepsilon(c_i) = \prod_{i=1}^{p}(-1)^{l_i-1} = (-1)^{l_1+...+l_p-p} = (-1)^{n-k}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. (a) Soient σ et σ' deux éléments de S_n. Soit $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$. Le coefficient ligne i, colonne j de $P_\sigma P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} = \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))},$$

et est donc aussi le coefficient ligne i, colonne j de la matrice $P_{\sigma\circ\sigma'}$. Par suite,

$$\forall(\sigma,\sigma') \in (S_n)^2,\ P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}.$$

(b) Soit $\sigma \in S_n$. D'après a), $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = P_{Id} = I_n = P_{\sigma^{-1}}P_\sigma$. On en déduit que toute matrice P_σ est inversible, d'inverse $P_{\sigma^{-1}}$. Par suite, $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ (et clairement, $G \neq \emptyset$).
Soit alors $(\sigma,\sigma') \in (S_n)^2$.

$$P_\sigma P_{\sigma'}^{-1} = P_\sigma P_{\sigma'^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma'^{-1}} \in G.$$

On a montré que G est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$.
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} S_n & \to & G \\ \sigma & \mapsto & P_\sigma \end{array}$. D'après a), φ est un morphisme de groupes. φ est clairement surjectif. Il reste à vérifier que φ est injectif.
Soit $\sigma \in S_n$.

$$\begin{aligned}\sigma \in \text{Ker}\varphi &\Rightarrow P_\sigma = I_n \Rightarrow \forall(i,j) \in \{1,...,n\}^2,\ \delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{i,j}\\ &\Rightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ \delta_{i,\sigma(i)} = 1 \Rightarrow \forall i \in \{1,...,n\},\ \sigma(i) = i\\ &\Rightarrow \sigma = Id.\end{aligned}$$

Puisque le noyau du morphisme φ est réduit à $\{Id\}$, φ est injectif.
Ainsi, φ est un isomorphisme du groupe $(S_n,\circ)$ sur le groupe $(G,\times)$ et on a montré que $(G,\times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$, isomorphe à $(S_n,\circ)$.

2. Soit $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$. Le coefficient ligne i, colonne j de AP_σ vaut :

$$\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}.$$

Ainsi, l'élément ligne i, colonne j, de AP_σ est l'élément ligne i, colonne $\sigma(j)$, de A, ou encore, si j est un élément donné de $\{1,...,n\}$, la j-ème colonne de AP_σ est la $\sigma(j)$-ème colonne de A. Ainsi, si on note C_1,...,C_n les colonnes de A (et donc $A = (C_1,...,C_n)$), alors $AP_\sigma = (C_{\sigma(1)},...,C_{\sigma(n)})$. En clair, multiplier A par P_σ à droite a pour effet d'appliquer la permutation σ aux colonnes de A (puisque P_σ est inversible, on retrouve le fait que permuter les colonnes de A ne modifie pas le rang de A).

De même, le coefficient ligne i, colonne j, de $P_\sigma A$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(k)}a_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{\sigma^{-1}(i),k}a_{k,j}=a_{\sigma^{-1}(i),j},$$

(on a utilisé $\sigma(k)=i\Leftrightarrow k=\sigma^{-1}(i)$) et multiplier A par P_σ à gauche a pour effet d'appliquer la permutation σ^{-1} aux lignes de A.

Correction de l'exercice 8 ▲

$G=\{A_1,...,A_p\}$ est déjà une partie non vide de $GL_n(\mathbb{R})$, stable pour $\times$. Il reste à vérifier que G est stable pour le passage à l'inverse.

Soient $i\in\{1,...,n\}$, puis $\varphi_i\ :\ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ A & \mapsto & A_iA \end{array}$. Puisque G est stable pour le produit, φ_i est une application de G dans G.

Montrons que φ_i est injective. Soit $(A,B)\in G$.

$$\varphi_(A)=\varphi_i(B)\Rightarrow A_iA=A_iB\Rightarrow A_i^{-1}A_iA=A_i^{-1}A_iB\Rightarrow A=B.$$

Donc, φ_i est une application injective de l'ensemble **fini** G dans lui-même. On sait alors que φ_i est une permutation de G.

Par φ_i, A_i a un antécédent A dans G. $A_iA=A_i$ fournit $A_i^{-1}A_iA=A_i^{-1}A_i$ puis $A=I\in G$. Ainsi, G contient la matrice I. Ensuite, I a un antécédent par φ_i dans G. Donc, il existe $B\in G$ telle que $A_iB=I$. Mais alors $A_i^{-1}=B\in G$.

G est bien stable pour le passage à l'inverse et est donc un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Pour $(x_1,...,x_n)\in E$, on pose $\varphi((x_1,...,x_n))=x_1+...+x_n$. φ est une forme linéaire non nulle sur E et H est le noyau de φ. H est donc bien un hyperplan de E.

Il est clair que, pour $(\sigma,\sigma')\in S_n^2$, $f_\sigma\circ f_{\sigma'}=f_{\sigma\circ\sigma'}$. $(\mathscr{L}(E),+,.)$ est un espace vectoriel et donc, p est bien un endomorphisme de E.

$$p^2=\frac{1}{n!^2}\left(\sum_{\sigma\in S_n}f_\sigma\right)^2=\sum_{(\sigma,\sigma')\in(S_n)^2}f_\sigma\circ f_{\sigma'}.$$

Mais, $(S_n,\circ)$ est un groupe fini. Par suite, l'application $\begin{array}{ccc} S_n & \to & S_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma\circ\sigma' \end{array}$, injective (même démarche que dans l'exercice 8), est une permutation de S_n. On en déduit que, pour σ' donnée, $\sum_{\sigma\in S_n}f_{\sigma\circ\sigma'}=\sum_{\sigma\in S_n}f_\sigma$. Ainsi, en posant $q=n!p$.

$$p^2=\frac{1}{n!^2}\sum_{\sigma'\in S_n}(\sum_{\sigma\in S_n}f_{\sigma\circ\sigma'})=\frac{1}{n!^2}\sum_{\sigma'\in S_n}q=\frac{1}{n!^2}.n!q=\frac{1}{n!}q=p.$$

p est donc une projection. Déterminons alors l'image et le noyau de p. Soit $i\in\{1,...,n\}$.

$$p(e_i)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}f_\sigma(e_i)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}e_{\sigma(i)}.$$

Maintenant, il y a (bien sûr) autant de permuations σ telles que $\sigma(i)=1$, que de permutations σ telles que $\sigma(i)=2$,... ou de permutations σ telles que $\sigma(i)=n$, à savoir $\frac{n!}{n}=(n-1)!$. Donc,

$$\forall i\in\{1,...,n\},\ p(e_i)=\frac{1}{n!}\frac{n!}{n}\sum_{k=1}^{n}e_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e_k.$$

Posons $u=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e_k$. D'après ce qui précède,

$$\mathrm{Im}p = \mathrm{Vect}(p(e_1), ..., p(e_n)) = \mathrm{Vect}(u).$$

Ensuite, si $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ est un élément de E,

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k p(e_k) = 0 \Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{n} x_k)u = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Leftrightarrow x \in H.$$

Ainsi, p est la projection sur $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à H.