Valeurs absolues. Partie entière. Inégalités

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **I Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose $m = \frac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ (moyenne harmonique). Montrer que $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

Correction ▼ [005146]

Exercice 2 *I Inégalité de BERNOULLI

Montrer que, pour a réel positif et n entier naturel donnés, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Correction ▼ [005147]

Exercice 3 ***

On veut montrer de manière élémentaire (c'est-à-dire en se passant du logarithme népérien et en ne travaillant qu'avec les deux opérations $+$ et $\times$) que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+\frac{1}{n})^n < 3$.

Pour cela développer, puis majorer $u_k = \frac{C_n^k}{n^k}$ en commençant par majorer $v_k = \frac{u_{k+1}}{u_k}$ par $\frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005148]

Exercice 4 ***I

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2,..., a_n, n réels strictement positifs.

Montrer que $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$ (développer et penser à $f(x) = x + \frac{1}{x}$).

Correction ▼ [005149]

Exercice 5 ***I Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2,..., a_n, b_1, b_2,..., b_n, $2n$ réels. Montrer que

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.|b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

(Indication. Considérer le polynôme $f(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k x)^2$, développer puis ordonner suivant les puissances décroissantes puis utiliser, dans le cas général, les connaissances sur le second degré). Retrouver alors le résultat de l'exercice 4.

Correction ▼ [005150]

Exercice 6 ***

Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Correction ▼ [005151]

Exercice 7 **I

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x+1) = E(x)+1$.
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x)+E(y) \leq E(x+y)$.
3. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$.

Correction ▼ [005152]

Exercice 8 **I

Tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^p a_p,$$

où p est un entier naturel et les a_i sont des entiers éléments de $\{0,\ldots,9\}$, a_p étant non nul. Déterminer p en fonction de n.

Correction ▼ [005153]

Exercice 9 **I

Soient x un réel. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2}$.

Correction ▼ [005154]

Exercice 10 **I

Soient n un entier naturel et x un réel positif.

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 1 et n ? entre 1 et x ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 0 et n ? entre 0 et x ?
3. Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et x ? Combien y a-t-il d'entiers naturels impairs entre 0 et x ?
4. Combien y a-t-il de multiples de 3 entre 0 et x ?
5. Combien l'équation $x+2y = n$, n entier naturel donné et x et y entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions ?
6. De combien de façons peut-on payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros ?
7. (***) Combien l'équation $2x+3y = n$, n entier naturel donné et x et y entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions ?

Correction ▼ [005155]

Exercice 11 ****

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} E(x+\frac{k}{n}) = E(nx)$ (poser la division euclidienne de $E(nx)$ par n).

Correction ▼ [005156]

Exercice 12 ****

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $E(\frac{1}{3}(n+2-E(\frac{n}{25}))) = E(\frac{8n+24}{25})$.

Correction ▼ [005157]

Exercice 13 ****I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe $(a_n,b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, puis que $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
2. Montrer que $E((2+\sqrt{3})^n)$ est un entier impair (penser à $(2-\sqrt{3})^n$)).

Correction ▼ [005158]

Exercice 14 **

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Correction ▼ [005159]

Exercice 15 ***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in [-1, 1]^n$ tels que $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$.
Montrer que $|x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| \leq E(\frac{n^2}{4})$.

Correction ▼ [005160]

Exercice 16 ***I

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 3 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt[n]{n!})$.
(commencer par vérifier que pour $k = 2, 3, ..., n$, on a : $(n-k+1)k > n$).

Correction ▼ [005161]

Exercice 17 ***

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geq \frac{n}{4}$ (remarquer que si $x \in [0;1]$, $x^2 \leq x$).

Correction ▼ [005162]

Exercice 18 **I

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$.

Correction ▼ [005163]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$.

1. On a déjà $x = \frac{x+x}{2} \leq \frac{x+y}{2} = m \leq \frac{y+y}{2} = y$ et donc $\boxed{x \leq m \leq y}$.
(on peut aussi écrire : $m - x = \frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2} \geq 0$).
2. On a ensuite $x = \sqrt{x.x} \leq \sqrt{xy} = g \leq \sqrt{y.y} = y$ et donc $\boxed{x \leq g \leq y}$.
3. $m - g = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2) = \frac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0$ et donc, $\boxed{x \leq g \leq m \leq y}$.
4. D'après 1), la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est comprise entre $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, ce qui fournit $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{h} \leq \frac{1}{x}$, ou encore $\boxed{x \leq h \leq y}$.
5. D'après 3), la moyenne géométrique des deux réels $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ ou encore $\frac{1}{g} \leq \frac{1}{h}$ et finalement

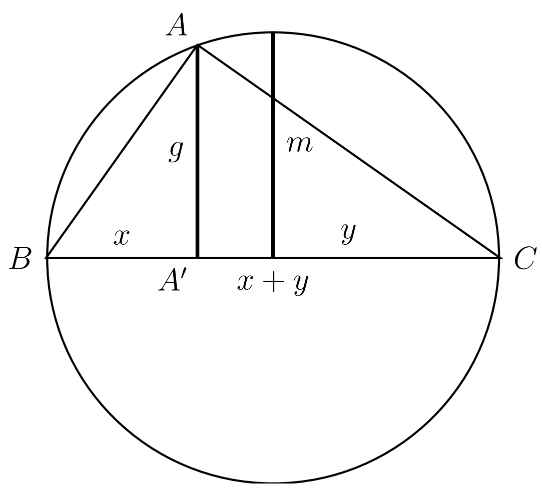
$$\boxed{x \leq h \leq g \leq m \leq y \text{ où } \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),\ g = \sqrt{xy} \text{ et } m = \frac{x+y}{2}.}$$

Remarque 1. On a $h = \frac{2xy}{x+y}$, mais cette expression ne permet pas de comprendre que $\frac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

Remarque 2. On peut visualiser l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique.

Si (ABC) est un triangle rectangle en A et A' est le pied de la hauteur issue de A, on sait que $AA'^2 = A'B.A'C$. On se sert de cette remarque pour construire g et la comparer graphiquement à m.

On accolle deux segments de longueurs respectives x et y. On construit alors un triangle rectangle d'hypothénuse ce segment (de longueur $x+y$) noté [BC], tel que le troisième sommet A ait une projection orthogonale A' sur (BC) vérifiant $BA' = x$ et $CA' = y$.



La moyenne arithmétique de x et y est $m = \frac{x+y}{2}$, le rayon du cercle, et la moyenne géométrique de x et y est $g = \sqrt{xy} = \sqrt{A'B.A'C} = AA'$, la hauteur issue de A du triangle (ABC).

Correction de l'exercice 2 ▲

$(1+a)^n = (1+a)\ldots(1+a) = 1 + na + \ldots \geq 1 + na$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n^k}$. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, posons $u_k = \frac{C_n^k}{n^k}$ puis $v_k = \frac{u_{k+1}}{u_k}$. Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a alors

$$v_k = \frac{C_n^{k+1}.n^k}{C_n^k.n^{k+1}} = \frac{1}{n}.\frac{n!k!(n-k)!}{n!(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{n(k+1)} = \frac{(n+1)-(k+1)}{n(k+1)} = -\frac{1}{n} + \frac{n+1}{n(k+1)}$$
$$\leq -\frac{1}{n} + \frac{n+1}{2n} \text{ (car } k \geq 1)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour $k \in \{1, ..., n-1\}$, $u_{k+1} \leq \frac{1}{2}u_k$ et donc, immédiatement par récurrence,

$$u_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}u_1 = \frac{1}{2^{k-1}}\frac{n}{n} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

En tenant compte de $u_0 = 1$, on a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2(1-\frac{1}{2^n}) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2,..., a_n, n réels strictement positifs.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{a_i}{a_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}) = n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i})$$

Pour $x > 0$, posons alors $f(x) = x + \frac{1}{x}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. f est donc strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. f admet ainsi un minimum en 1. Par suite,

$$\forall x > 0,\ f(x) \geq f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

(**Remarque.** L'inégalité entre moyenne géométrique et arithmétique permet aussi d'obtenir le résultat :

$$\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}) \geq \sqrt{x.\frac{1}{x}} = 1.)$$

On en déduit alors que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \geq n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2 = n + 2\frac{n^2-n}{2} = n^2.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Pour x réel, posons $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k x)^2$. On remarque que pour tout réel x, $f(x) \geq 0$. En développant les n carrés, on obtient,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (b_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + a_k^2) = (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)x^2 + 2(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)x + (\sum_{k=1}^{n} a_k^2).$$

1er cas. Si $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \neq 0$, f est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est alors négatif ou nul. Ceci fournit

$$0 \geq \Delta' = (\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 - (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)(\sum_{k=1}^{n} a_k^2),$$

et donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

2ème cas. Si $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0$, alors tous les b_k sont nuls et l'inégalité est immédiate.

Finalement, dans tous les cas,

$$\boxed{|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.}$$

Cette inégalité est encore valable en remplaçant les a_k et les b_k par leurs valeurs absolues, ce qui fournit les inégalités intermédiaires.
Retrouvons alors l'inégalité de l'exercice 4. Puisque les a_k sont strictement positifs, on peut écrire :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{a_i}}^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}\sqrt{\frac{1}{a_i}}\right)^2 = n^2.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Si l'un des réels a, b ou c est strictement plus grand que 1, alors l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est négatif (puisque a, b et c sont positifs) et donc inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.
Sinon, les trois réels a, b et c sont dans $[0,1]$. Le produit des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ vaut

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c).$$

Mais, pour $x \in [0,1]$, $x(1-x)$ est positif et d'autre part, $x(1-x) = -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$. Par suite,

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{4^3}.$$

Il est alors impossible que les trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ soient strictement plus grand que $\frac{1}{4}$, leur produit étant dans ce cas strictement plus grand que $\frac{1}{4^3}$.
On a montré dans tous les cas que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $E(x) \leq x < E(x)+1$ puis $E(x)+1 \leq x+1 < (E(x)+1)+1$. Comme $E(x)+1 \in \mathbb{Z}$, on a bien $E(x+1) = E(x)+1$.
2. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a $E(x)+E(y) \leq x+y$. Ainsi, $E(x)+E(y)$ est un entier relatif inférieur ou égal à $x+y$. Comme $E(x+y)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x+y$, on a donc $E(x)+E(y) \leq E(x+y)$.

   Améliorons. $E(x) \leq x < E(x)+1$ et $E(y) \leq y < E(y)+1$ fournit $E(x)+E(y) \leq x+y < E(x)+E(y)+2$ et donc $E(x+y)$ vaut, suivant le cas, $E(x)+E(y)$ ou $E(x)+E(y)+1$ (et est dans tous les cas supérieur ou égal à $E(x)+E(y)$).
3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $k = E(x)$ et $l = E(y)$.

   1er cas. Si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ et $y \in [l, l+\frac{1}{2}[$, alors $x+y \in [k+l, k+l+1[$ et donc $E(x+y) = k+l$, puis $E(x)+E(y)+E(x+y) = k+l+k+l = 2k+2l$. D'autre part, $2x \in [2k, 2k+1[$ et $2y \in [2l, 2l+1[$. Par suite, $E(2x)+E(2y) = 2k+2l$. Dans ce cas, $E(x)+E(y)+E(x+y) = E(2x)+E(2y)$.

   2ème cas. Si $x \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$ et $y \in [l, l+\frac{1}{2}[$, alors $x+y \in [k+l+\frac{1}{2}, k+l+\frac{3}{2}[$ et donc $E(x+y) = k+l$ ou $k+l+1$,puis $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2k+2l$ ou $2k+2l+1$. D'autre part, $2x \in [2k+1, 2k+2[$ et $2y \in [2l, 2l+1[$. Par suite, $E(2x)+E(2y) = 2k+2l+1$. Dans ce cas, $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$.

   3ème cas. Si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ et $y \in [l+\frac{1}{2}, l+1[$, on a de même $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$.

4ème cas. Si $x \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$ et $y \in [l+\frac{1}{2}, l+1[$, on a $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2k+2l+2 = E(2x)+E(2y)$.

Finalement, on a dans tous les cas $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$.

Correction de l'exercice 8 ▲

p est déterminé par l'encadrement : $10^p \leq n < 10^{p+1}$ qui s'écrit encore $p \leq \frac{\ln n}{\ln 10} < p+1$. Par suite,

$$\boxed{p = E(\log_{10}(n)).}$$

$$\boxed{\text{Le nombre de chiffres d'un entier } n \text{ en base 10 est donc } E(\log_{10}(n))+1.}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$kx - 1 < E(kx) \leq kx.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2} \leq \frac{x+2x+\ldots+nx}{n^2} = \frac{n(n+1)x}{2n^2} = \frac{(n+1)x}{2n},$$

et aussi,

$$\frac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2} > \frac{(x-1)+(2x-1)+\ldots+(nx-1)}{n^2} = \frac{n(n+1)x/2-n}{n^2} = \frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n}.$$

Finalement, pour tout naturel non nul,

$$\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} < \frac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2} \leq \frac{(n+1)x}{2n}.$$

Les deux membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $\frac{x}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, on peut affirmer que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2} = \frac{x}{2}.}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Par définition d'un entier, il y a n entiers entre 1 et n. Ensuite, pour tout entier naturel k, on a

$$1 \leq k \leq x \Leftrightarrow 1 \leq k \leq E(x).$$

   Il y a donc $E(x)$ entiers entre 1 et x.
2. Il y a $n+1$ entiers entre 0 et n et $E(x)+1$ entiers entre 0 et x.
3. Les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Or,

$$0 \leq 2k \leq x \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{x}{2}.$$

   Le nombre des entiers pairs compris entre 0 et x est encore le nombre des entiers k compris au sens large entre 0 et $\frac{x}{2}$. D'après 2), il y a $E(\frac{x}{2})+1$ entiers pairs entre 0 et x. De même, il y a $E(\frac{x}{3})+1$ multiples de 3 entre 0 et x.

   De même,

$$0 \leq 2k+1 \leq x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq E(\frac{x-1}{2}).$$

Il y a donc $E(\frac{x-1}{2})+1 = E(\frac{x+1}{2})$ entiers impairs entre 0 et x.

4. Il y a $E(\frac{x}{3})+1$ multiples de 3 entre 0 et x.
5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$x+2y = n \Leftrightarrow x = n-2y.$$

Donc, (x,y) est solution si et seulement si $y \in \mathbb{N}$ et $n-2y \in \mathbb{N}$ ou encore si et seulement si $0 \leq 2y \leq n$. Il y a donc $E(\frac{n}{2})+1$ couples solutions.

6. Si x et y sont respectivement le nombre de pièces de 10 centimes d'euros et le nombre de pièces de 20 centimes d'euros, le nombre cherché est le nombre de couples d'entiers naturels solutions de l'équation $10x+20y = 1000$ qui s'écrit encore $x+2y = 100$. D'après 5), il y a $E(\frac{100}{2})+1 = 51$ façons de payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros.
7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$2x+3y = n \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2}.$$

Donc,

$$(x,y) \text{ solution} \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } n-3y \in 2\mathbb{N}.$$

Maintenant, comme $n-3y = (n-y)-2y$ et que $2y$ est un entier pair, $n-3y$ est pair si et seulement si $n-y$ est pair ce qui revient à dire que y a la parité de n. Ainsi,

$$(x,y) \text{ solution} \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{n}{3} \text{ et } y \text{ a la parité de } n.$$

1er cas. Si n est pair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers pairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{n}{6}))+1 = E(\frac{n+6}{6})$ tels entiers.

2ème cas. Si n est impair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers impairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{\frac{n}{3}-1}{2}))+1 = E(\frac{n+3}{6})$ tels entiers.

Finalement, le nombre cherché est $E(\frac{n+6}{6})$ si n est pair et $E(\frac{n+3}{6})$ si n est impair.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Par définition d'un entier, il y a n entiers entre 1 et n. Ensuite, pour tout entier naturel k, on a

$$1 \leq k \leq x \Leftrightarrow 1 \leq k \leq E(x).$$

Il y a donc $E(x)$ entiers entre 1 et x.

2. Il y a $n+1$ entiers entre 0 et n et $E(x)+1$ entiers entre 0 et x.
3. Les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Or,

$$0 \leq 2k \leq x \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{x}{2}.$$

Le nombre des entiers pairs compris entre 0 et x est encore le nombre des entiers k compris au sens large entre 0 et $\frac{x}{2}$. D'après 2), il y a $E(\frac{x}{2})+1$ entiers pairs entre 0 et x. De même, il y a $E(\frac{x}{3})+1$ multiples de 3 entre 0 et x.

De même,

$$0 \leq 2k+1 \leq x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq E(\frac{x-1}{2}).$$

Il y a donc $E(\frac{x-1}{2})+1 = E(\frac{x+1}{2})$ entiers impairs entre 0 et x.

4. Il y a $E(\frac{x}{3})+1$ multiples de 3 entre 0 et x.
5. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $(x,y)\in\mathbb{N}^2$. On a

$$x+2y=n\Leftrightarrow x=n-2y.$$

Donc, (x,y) est solution si et seulement si $y\in\mathbb{N}$ et $n-2y\in\mathbb{N}$ ou encore si et seulement si $0\leq 2y\leq n$. Il y a donc $E(\frac{n}{2})+1$ couples solutions.
6. Si x et y sont respectivement le nombre de pièces de 10 centimes d'euros et le nombre de pièces de 20 centimes d'euros, le nombre cherché est le nombre de couples d'entiers naturels solutions de l'équation $10x+20y=1000$ qui s'écrit encore $x+2y=100$. D'après 5), il y a $E(\frac{100}{2})+1=51$ façons de payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros.
7. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $(x,y)\in\mathbb{N}^2$. On a

$$2x+3y=n\Leftrightarrow x=\frac{n-3y}{2}.$$

Donc,

$$(x,y)\text{ solution}\Leftrightarrow x=\frac{n-3y}{2}\text{ et }y\in\mathbb{N}\text{ et }n-3y\in 2\mathbb{N}.$$

Maintenant, comme $n-3y=(n-y)-2y$ et que $2y$ est un entier pair, $n-3y$ est pair si et seulement si $n-y$ est pair ce qui revient à dire que y a la parité de n. Ainsi,

$$(x,y)\text{ solution}\Leftrightarrow x=\frac{n-3y}{2}\text{ et }y\in\mathbb{N}\text{ et }0\leq y\leq\frac{n}{3}\text{ et }y\text{ a la parité de }n.$$

1er cas. Si n est pair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers pairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{n}{6}))+1=E(\frac{n+6}{6})$ tels entiers.

2ème cas. Si n est impair, le nombre de couples solutions est encore le nombre d'entiers impairs y compris au sens large entre 0 et $\frac{n}{3}$. Il y a $E(\frac{\frac{n}{3}-1}{2}))+1=E(\frac{n+3}{6})$ tels entiers.

Finalement, le nombre cherché est $E(\frac{n+6}{6})$ si n est pair et $E(\frac{n+3}{6})$ si n est impair.

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}$. La division euclidienne de n par 25 fournit un quotient entier q et et un reste r élément de $\{0,1,...,24\}$ tels que $n=25q+r$.
On a alors

$$E(\frac{1}{3}(n+2-E(\frac{n}{25})))=E(\frac{25q+r+2-q}{3})=E(8q+\frac{r+2}{3})=8q+E(\frac{r+2}{3}),$$

et

$$E(\frac{8n+24}{25})=E(\frac{8(25q+r)+24}{25})=8q+E(\frac{8r+24}{25}).$$

Pour montrer l'égalité de l'énoncé, il reste donc à vérifier les 25 égalités $E(\frac{r+2}{3})=E(\frac{8r+24}{25})$, $0\leq r\leq 24$, $(*)$, ce qui peut déjà se vérifier « à la main ».
Diminuons encore le nombre de vérifications. La division euclidienne de r par 3 s'écrit $r=3k+l$ avec $0\leq l\leq 2$. Mais alors,

$$E(\frac{r+2}{3})=k+E(\frac{l+2}{3})\text{ et }E(\frac{8r+24}{25})=E(\frac{25k-k+8l+24}{25})=k+E(\frac{-k+8l+24}{25}).$$

Si $l=0$, k varie de 0 à 8 et dans ce cas, $0\leq\frac{-k+24}{25}=\frac{-k+8l+24}{25}\leq\frac{24}{25}<1$. Par suite,

$$E(\frac{-k+8l+24}{25})=0=E(\frac{2}{3})=E(\frac{l+2}{3}).$$

On a ainsi vérifié $(*)$ quand $r \in \{0,3,6,9,12,15,18,21,24\}$.
Si $l=1$ ou $l=2$, $E(\frac{l+2}{3})=1$ et d'autre part, k varie de 0 à 7. Dans ce cas,

$$1=\frac{-7+8+24}{25}\leq\frac{-k+8l+24}{25}\leq\frac{16+24}{25}<2$$

et donc

$$E(\frac{-k+8l+24}{25})=1=E(\frac{l+2}{3}).$$

On a ainsi vérifié $(*)$ pour les autres valeurs de r. Finalement, on a montré que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ E(\tfrac{1}{3}(n+2-E(\tfrac{n}{25})))=E(\tfrac{8n+24}{25}).}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. La formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{3}^k2^{n-k}=\sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}\sqrt{3}^{2k}2^{n-2k}+\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}\sqrt{3}^{2k+1}2^{n-2k-1}\\&=\sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}3^k2^{n-2k}+\sqrt{3}\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}3^k2^{n-2k-1}.\end{aligned}$$

   Ainsi, en posant $a_n=\sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}3^k2^{n-2k}$ et $b_n=\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}3^k2^{n-2k-1}$, a_n et b_n sont des **entiers** tels que $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$. En remplaçant $\sqrt{3}$ par $-\sqrt{3}$, on a aussi $(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$. Mais alors,

$$a_n^2-3b_n^2=(a_n+b_n\sqrt{3})(a_n-b_n\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=(4-3)^n=1.$$

2. On note que $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=(a_n+b_n\sqrt{3})+(a_n-b_n\sqrt{3})=2a_n$. Mais,

$$0<(2-\sqrt{3})^n<1.$$

   Par suite,

$$(2+\sqrt{3})^n<(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=2a_n<(2+\sqrt{3})^n+1,$$

   ou encore

$$2a_n-1<(2+\sqrt{3})^n<2a_n.$$

   On en déduit que $E((2+\sqrt{3})^n)=2a_n-1$ et donc que$E((2+\sqrt{3})^n)$ est un entier impair.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}E(x)\leq x<E(x)+1&\Rightarrow nE(x)\leq nx<nE(x)+n\Rightarrow nE(x)\leq E(nx)<nE(x)+n\Rightarrow E(x)\leq\frac{E(nx)}{n}<E(x)+1\\&\Rightarrow E(\frac{E(nx)}{n})=E(x).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in [-1,1]^n$ tels que $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$.
On écrit

$$(x_1 + 2x_2 + ... + nx_n) = (x_1 + x_2 + ... + x_n) + (x_2 + x_3 + ... + x_n) + (x_3 + ... + x_n) + ... + (x_{n-1} + x_n) + x_n,$$

avec $x_1 + ... + x_n = 0$ et donc $x_2 + ... + x_n = -x_1$ ...
1er cas. Si $n = 2p$ est pair, alors $\frac{n^2}{4} = p^2$ et donc, $E(\frac{n^2}{4}) = p^2 = \frac{n^2}{4}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\begin{aligned}|x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| &\leq |x_1 + x_2 + ... + x_{2p}| + |x_2 + ... + x_{2p}| + ... + |x_p + ... + x_{2p}|\\ &+ |x_{p+1} + ... + x_{2p}| ... + |x_{2p-1} + x_{2p}| + |x_{2p}|\\ &= 0 + |-x_1| + |-x_1 - x_2| + ... + |-x_1 + ... - x_{p-1}|\\ &+ |x_{p+1} + ... + x_{2p}| ... + |x_{2p-1} + x_{2p}| + |x_{2p}|\\ &\leq 0 + 1 + 2 + ... + (p-1) + p + (p-1) + ... + 1 = 2\frac{p(p-1)}{2} + p = p^2 = E(\frac{n^2}{4})\end{aligned}$$

2ème cas. Si $n = 2p+1$ est impair, alors $\frac{n^2}{4} = p^2 + p + \frac{1}{4}$ et donc, $E(\frac{n^2}{4}) = p^2 + p = \frac{n^2-1}{4}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\begin{aligned}|x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| &\leq |x_1 + x_2 + ... + x_{2p+1}| + ... + |x_{p+1} + ... + x_{2p+1}|\\ &+ |x_{p+2} + ... + x_{2p+1}| ... + |x_{2p+1}|\\ &= 0 + |-x_1| + |-x_1 - x_2| + ... + |-x_1 + ... - x_p|\\ &+ |x_{p+2} + ... + x_{2p+1}| ... + |x_{2p+1}|\\ &\leq 0 + 1 + 2 + ... + (p-1) + p + p + (p-1) + ... + 1 = 2\frac{p(p+1)}{2} = p^2 + p = E(\frac{n^2}{4})\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| \leq E(\tfrac{n^2}{4}).}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$.

$$n!^2 = \prod_{k=1}^{n} (n+1-k) \prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k).$$

Maintenant, la fonction $x \mapsto x(n+1-x)$ est strictement croissante sur $[0, \frac{n+1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{n+1}{2}, n+1]$. Puisque $f(1) = f(n) = n$, on en déduit que pour $x \in [2, n-1]$, $f(x) > n$. Puisque $n \geq 3$, on a $n-1 \geq 2$ et on peut écrire

$$n!^2 = n^2 \prod_{k=2}^{n-1} k(n+1-k) > n^2 \prod_{k=2}^{n-2} n = n^n,$$

et donc,

$$\sqrt[n]{n!} = (n!^2)^{1/(2n)} > (n^n)^{1/2n} = \sqrt{n}.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque, pour tout entier k, $|\cos k\,|\in[0,1]$, on a alors

$$\sum_{k=1}^{n}|\cos k\,|\geq\sum_{k=1}^{n}\cos^2 k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(1+\cos(2k))=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n}e^{2ik})=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(e^{2i}\frac{1-e^{2in}}{1-e^{2i}})$$
$$=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(e^{i(n-1+2)}\frac{\sin n}{\sin 1})=\frac{n}{2}+\frac{\cos(n+1)\sin n}{2\sin 1}\geq\frac{n}{2}-\frac{1}{2\sin 1}.$$

Maintenant, $\frac{1}{2\sin 1}=0,594...$. Par suite, pour $n\geq 3$, $\frac{1}{2\sin 1}\leq 0,75=\frac{3}{4}\leq\frac{n}{4}$, et donc

$$\frac{n}{2}-\frac{1}{2\sin 1}\geq\frac{n}{2}-\frac{n}{4}=\frac{n}{4}.$$

Enfin, si $n=1$, $|\cos 1|=0.5...\geq 0.25=\frac{1}{4}$ et si $n=2$, $|\cos 1|+|\cos 2|=0.9...\geq 0.5=\frac{2}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}|\cos k|\geq\frac{n}{4}.}$$

Correction de l'exercice 18 ▲

Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |\sin(nx)|\leq n|\sin x|$.

- C'est clair pour $n=0$.
- Soit $n\geq 0$. Supposons que $|\sin(nx)|\leq n|\sin x|$. Alors,

$$\begin{aligned}|\sin(n+1)x|&=|\sin nx\cos x+\cos nx\sin x|\leq|\sin nx|.|\cos x|+|\cos nx|.|\sin x|\\&\leq|\sin nx|+|\sin x|\\&\leq n|\sin x|+|\sin x|\quad\text{(par hypothèse de récurrence)}\\&=(n+1)|\sin x|\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\ |\sin(nx)|\leq n|\sin x|}$.