Exercices : Barbara Tumpach
Relecture : François Lescure

Intégrales généralisées et théorie de la mesure

1 Rappel

Définition. Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable sur tout segment $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ (on admet les cas où $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$). Supposons que la fonction $F(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ possède une limite I lorsque $\alpha \to a$ et $\beta \to b$. On dit alors que l'intégrale généralisée ou impropre $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente et que I est la valeur de cette intégrale.

Proposition.(Condition de Cauchy) Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable sur tout segment $[a,x]$, $x > a$. Pour que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ soit convergente, il faut et il suffit que l'intégrale $\int_x^{x'} f(t)\,dt$ tende vers 0 lorsque x et x' tendent vers $+\infty$.

Théorème. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Posons pour tout $x \in [a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Alors F est continue sur $[a,b]$. De plus, si f est continue en un point x de $[a,b]$, alors F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

Définition. Étant donné une fonction réelle g sur $[a,b]$, on appelle *primitive* de g sur $[a,b]$ une fonction $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que G est dérivable en tout point $x \in [a,b]$ et $G'(x) = g(x)$. Une fonction Riemann-intégrable f sur $[a,b]$ n'admet pas nécessairement de primitive, mais si f est continue sur $[a,b]$, le théorème ci-dessus assure que $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

Théorème.(Théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre) Soient Λ un espace métrique, a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et $f : [a,b] \times \Lambda \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors la fonction $F : \Lambda \to \mathbb{R}$ définie par $F(\lambda) = \int_a^b f(t,\lambda)\,dt$ est continue.

Théorème.(Théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre) Soient Λ un ouvert de $\mathbb{R}$, a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et $f : [a,b] \times \Lambda \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que la fonction f possède une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,\lambda)$ par rapport à la deuxième variable qui soit une fonction continue sur $[a,b] \times \Lambda$. Alors la fonction $F : \Lambda \to \mathbb{R}$ définie par $F(\lambda) = \int_a^b f(t,\lambda)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée vaut $F'(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,\lambda)\,dt$.

Théorème. Soit F_n est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$, qui converge uniformément vers F. Supposons que, pour tout $1 \leq j \leq k$, la suite des $j^{\text{ième}}$ dérivées $F_n^{(j)}$ converge uniformément vers une fonction g_j. Alors F est de classe $\mathscr{C}^k$ et la dérivée $j^{\text{ième}}$ de F vaut $F^{(j)} = g_j$.

2 Intégrales généralisées

Exercice 1

1. *Le but de cette question est de montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ n'est pas absolument convergente.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt.$$

Montrer que pour $n \geq 0$, $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$ est divergente.

2. *Deuxième formule de la moyenne.* Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$, admettant des primitives notées F et G respectivement. Supposons que F est positive et décroissante. Montrer qu'il existe $y \in [a,b]$ tel que :
$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = F(a) \int_a^y g(x)\, dx.$$
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente.
4. *Le but de cette question est de calculer la valeur de cette intégrale.* Pour tout nombre réel $\lambda \geq 0$, on pose :
$$\begin{cases} f(t,\lambda) & = & e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} \qquad \text{pour} \quad t > 0 \\ f(0,\lambda) & = & 1. \end{cases}$$
   (a) Pour $0 < x \leq y$, démontrer que l'on a :
$$\left| \int_x^y f(t,\lambda)\, dt \right| \leq \frac{2}{x} e^{-\lambda x}.$$
   (b) En déduire que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\, dt$ sont convergentes, uniformément pour $\lambda \geq 0$. On pose, pour $\lambda \geq 0$,
$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$
   Démontrer que la fonction F est continue pour $\lambda \geq 0$.
   (c) Démontrer que la fonction F est dérivable pour $\lambda > 0$ et que sa dérivée est égale à l'intégrale généralisée convergente
$$F'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \sin t\, dt.$$
   (d) Calculer cette dernière intégrale généralisée, par exemple en intégrant par parties sur $[0,x]$ et en calculant la limite quand $x \to +\infty$.
   (e) En déduire la valeur de $F(\lambda)$ pour $\lambda \geq 0$ à une constante additive près. Démontrer que $F(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$. En déduire la valeur de la constante additive, puis la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Correction ▼ [005925]

3 Théorie de la mesure

Exercice 2

Montrer que $\mathscr{A}$ est une σ-algèbre si et seulement si $\mathscr{A}$ est une algèbre et une classe monotone.

Correction ▼ [005926]

Exercice 3

Soit (Ω,Σ) un espace mesurable (i.e. un ensemble Ω muni d'une tribu $\Sigma \subset \mathscr{P}(\Omega)$). Soit μ une mesure finie sur (Ω,Σ). Montrer les propriétés suivantes : $(A, B, A_i$ sont des élements de de $\Sigma)$

1. Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont deux à deux disjoints, alors
$$\mu\left(\cup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i).$$
2. Si $B \subset A$ alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.
3. *Monotonie :* Si $B \subset A$ alors $\mu(B) \leq \mu(A)$.

4. *Principe inclusion-exclusion :* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
5. $\mu\left(\cup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$. *(Rappelons que l'on a égalité si l'union est disjointe.)*

Correction ▼ [005927]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt.$$

Pour $n \geq 0$, on a $\frac{1}{(n+1)\pi} \leq \frac{1}{t}$, donc

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\, dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt.$$

Or $|\sin t| = (-1)^n \sin t$ sur $[n\pi, (n+1)\pi]$. Ainsi

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\, dt = (-1)^n [-\cos t]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = 2.$$

Il en découle que $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

est divergente.

2. *Deuxième formule de la moyenne.* D'après l'énoncé, F est une primitive de f et est positive et décroissante. Puisque la fonction g admet des primitives, la fonction $G(y) := \int_a^y g(x)\, dx$ est la primitive de g s'annulant en a. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour montrer qu'il existe $y \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = F(a) \int_a^y g(x)\, dx,$$

il suffit de montrer que

$$F(a) \min_{y\in[a,b]} G(y) \leq \int_a^b F(x)g(x)\, dx \leq F(a) \max_{y\in[a,b]} G(y).$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\, dx.$$

avec $F(a)G(a) = 0$. Comme f est négative sur $[a,b]$, on a :

$$\min_{y\in[a,b]} G(y) \int_a^b -f(x)\, dx \leq -\int_a^b f(x)G(x)\, dx \leq \max_{y\in[a,b]} G(y) \int_a^b -f(x)\, dx,$$

$$\Leftrightarrow \min_{y\in[a,b]} G(y) (F(a) - F(b)) \leq -\int_a^b f(x)G(x)\, dx \leq \max_{y\in[a,b]} G(y) (F(a) - F(b)).$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$\begin{aligned} F(b)\left(G(b) - \min_{y\in[a,b]} G(y)\right) + F(a) \min_{y\in[a,b]} G(y) &\leq \int_a^b F(x)g(x)\, dx \\ &\leq F(b)\left(G(b) - \max_{y\in[a,b]} G(y))\right) + F(a) \max_{y\in[a,b]} G(y). \end{aligned}$$

Les inégalités $G(b) - \min_{y\in[a,b]} G(y) \geq 0$ et $G(b) - \max_{y\in[a,b]} G(y) \leq 0$ et la positivité de F permettent de conclure.

3. D'après le critère de Cauchy (voir la proposition des rappels), pour montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente, il suffit de montrer que $\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt$ tend vers 0 lorsque x et x' tendent vers $+\infty$. D'après la formule de la moyenne appliquée à $F(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin t$, il vient :

$$\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{x}\int_x^y \sin t\,dt$$

pour un certain $y \in [x,x']$. On en déduit que

$$\left|\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| = \frac{1}{x}|\cos y - \cos x| \le \frac{2}{x}.$$

Ainsi $\lim_{x,x'\to+\infty} \int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt = 0$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

4. (a) Posons pour $t > 0$, $U(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{t}$. On a $u(t) = U'(t) = -\frac{e^{-\lambda t}}{t^2}(\lambda t + 1) < 0$. Ainsi U est positive et décroissante sur $]0,+\infty[$. D'après la deuxième formule de la moyenne, pour $0 < x \le y$, il vient :

$$\left|\int_x^y f(t,\lambda)\,dt\right| = \left|\int_x^y U(t)\sin t\,dt\right| = \left|\frac{e^{-\lambda x}}{x}\int_x^{y'} \sin t\,dt\right|,$$

pour un certain $y' \in [x,y]$. On en déduit que

$$\left|\int_x^y f(t,\lambda)\,dt\right| \le \frac{2e^{-\lambda x}}{x}.$$

(b) On remarque que, pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t,\lambda)$ est continue sur $[0,x]$, donc Riemann-intégrable sur cet intervalle. D'après le critère de Cauchy et la question 4.a), les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$ sont convergentes. Soit $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$. Pour montrer que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$ convergent uniformément en $\lambda \ge 0$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x > x_0$ et pour tout $\lambda \ge 0$,

$$\left|F(\lambda) - \int_0^x f(t,\lambda)\,dt\right| \le \varepsilon.$$

Or, d'après la question 4.a),

$$\left|F(\lambda) - \int_0^x f(t,\lambda)\,dt\right| \le \frac{2e^{-\lambda x}}{x} \le \frac{2e^{-\lambda x_0}}{x_0} \le \frac{2}{x_0}.$$

Ainsi pour $x_0 > \frac{2}{\varepsilon}$, on a l'inégalité désirée, et ce indépendamment de la valeur de λ. Posons $F_n(\lambda) = \int_0^n f(t,\lambda)\,dt$. D'après ce qui précède,

$$\sup_{\lambda\in[0,+\infty[} |F(\lambda) - F_n(\lambda)| \le \frac{2}{n},$$

i.e. F_n converge uniformément vers F sur $[0,+\infty[$. Comme les fonction F_n sont continues, il en découle que F est continue. On peut aussi revenir à la définition de continuité : pour montrer que la fonction $\lambda \mapsto F(\lambda)$ est continue en un point $\lambda_0 \in [0,+\infty[$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de λ_0 tel que $|F(\lambda) - F(\lambda_0)| < \varepsilon$ pour tout λ dans ce voisinage. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et posons $x_\varepsilon = \frac{6}{\varepsilon}$. On a :

$$\begin{aligned}
|F(\lambda) - F(\lambda_0)| &= \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\,dt + \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt - \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda_0)\,dt\right| \\
&\le \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\,dt\right| + \left|\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt\right| + \left|\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda_0)\,dt\right| \\
&\le \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\,dt\right| + \frac{2}{3}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de trouver un voisinage de λ_0 tel que $\left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout λ dans ce voisinage. L'existence d'un tel voisinage est garantie par la continuité de la fonction $\lambda \mapsto \int_0^{x_\varepsilon} f(t,\lambda)\, dt$ donnée par le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (voir les rappels). On peut également déterminer l'existence de ce voisinage à la main de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0))\, dt\right| &\leq \int_0^{x_\varepsilon} |(f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)|\, dt \\ &\leq \sup_{t\in[0,x_\varepsilon]} \left|e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}\right| \int_0^{x_\varepsilon} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt, \\ &\leq x_\varepsilon \sup_{t\in[0,x_\varepsilon]} \left|e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}\right|,\end{aligned}$$

où l'on a utiliser l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$. On a :

$$\begin{aligned}\left|e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}\right| &= \left|e^{-\frac{(\lambda+\lambda_0)t}{2}} \left(e^{-\frac{(\lambda_0-\lambda)t}{2}} - e^{\frac{(\lambda_0-\lambda)t}{2}}\right)\right| \\ &\leq 2\sinh\left(\frac{|\lambda-\lambda_0|t}{2}\right) \leq 2\sinh\left(\frac{|\lambda-\lambda_0|x_\varepsilon}{2}\right),\end{aligned}$$

car la fonction sinh est croissante. Ainsi le voisinage de λ_0 déterminé par $|\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{3}\operatorname{argsinh}\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\right)$ convient.

(c) Pour $x \in [0,+\infty[$ et $\lambda \in]0,+\infty[$, posons

$$\tilde{F}(x,\lambda) = \int_0^x f(t,\lambda)\, dt.$$

D'après le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (voir les rappels), la fonction $\tilde{F}$ est dérivable par rapport à la deuxième variable et sa dérivée partielle vaut :

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x,\lambda) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,\lambda)\, dt.$$

Lorsque $x \to +\infty$, $\tilde{F}(x,\lambda)$ tend vers $F(\lambda)$. D'après la question 4.b) cette convergence est uniforme pour $\lambda \geq 0$. D'autre part, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x,\lambda)$ tend vers $F'(\lambda) := -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \sin t\, dt$. On peut montrer comme dans la question 4.b) que cette convergence est uniforme pour $\lambda > 0$ (attention il faut exclure $\lambda = 0$ ici). Il en découle que $\lim_{h\to 0} \frac{F(\lambda+h)-F(\lambda)}{h} = F'(\lambda)$ (écrivez l'argument ! On pourra soit utiliser le dernier théorème des rappels, soit le montrer à la main...).

(d) Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned}-\int_0^x e^{-\lambda t} \sin t\, dt &= \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \sin t\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \cos t\, dt \\ &= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \sin x + \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \cos t\right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \sin t\, dt \\ &= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \sin x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \cos x - \frac{1}{\lambda^2} + \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \sin t\, dt.\end{aligned}$$

Ainsi

$$-\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) \int_0^x e^{-\lambda t} \sin t\, dt = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \sin x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \cos x - \frac{1}{\lambda^2}.$$

On en déduit que

$$F'(\lambda) = \lim_{x\to+\infty} -\int_0^x e^{-\lambda t} \sin t\, dt = \frac{-1}{1+\lambda^2}.$$

(e) De la question précédente, il découle que

$$F(\lambda) = -\arctan\lambda + C,$$

où C est une constante réelle. Montrons que $F(\lambda)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x > \frac{4}{\varepsilon}$. On a :

$$\begin{aligned}
|F(\lambda)| &= \left| \int_0^x e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \\
&\leq \int_0^x e^{-\lambda t} \frac{|\sin t|}{t}\, dt + \left| \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \\
&\leq \int_0^x e^{-\lambda t}\, dt + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

où on a utiliser que $|\sin t| \leq t$ et la question $4.b$). Ainsi

$$|F(\lambda)| \leq \frac{1 - e^{-\lambda x_0}}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1-e^{-\lambda x_0}}{\lambda} = 0$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\frac{1-e^{-\lambda x_0}}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que pour $\lambda > \lambda_0$, $|F(\lambda)| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = 0$. Alors $C = \lim_{\lambda \to +\infty} \arctan\lambda = \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$F(\lambda) = -\arctan\lambda + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

cf Proposition 5.1. du polycopié de Marc Troyanov.

Correction de l'exercice 3 ▲

Découle directement des définitions.
