Enoncés et corrections : Ana Matos.

Décomposition en valeurs singulières. Conditionnement

Exercice 1

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rang $r \leq p = \min(m,n)$. On considère la décomposition en valeurs singulières de A

$$U^T AV = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_p)$$

où les σ_i sont les valeurs singulières de A

1. Montrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\{u^1, u^2, \cdots, u^r\}$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\{v^{r+1}, \cdots, v^n\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(^T A) = \mathrm{span}\{v^1, u^2, \cdots, v^r\}$ et $\mathrm{Ker}(A^T) = \mathrm{span}\{u^{r+1}, \cdots, u^m\}$.
3. Déterminer les matrices des projections orthogonales sur $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(A^T)$, $\mathrm{Ker}(A^T)$ à l'aide de U et V.
4. *Application :* calculer la décomposition en valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et les matrices correspondantes aux projections orthogonales de l'exercice précédent.

Correction ▼ [002216]

Exercice 2 Pseudo–inverse d'une matrice

Définition : Soit Σ une matrice diagonale de type $(m \times n)$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & \bigcirc & & & \end{pmatrix}$$

On appelle pseudo–inverse de Σ la matrice $\Sigma^\dagger$ de type $(n \times m)$ définie par

$$\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & & 0 & \\ & \ddots & & \bigcirc \\ 0 & & \mu_r^{-1} & \end{pmatrix}$$

Soit A une matrice de type $(m \times n)$ dont la décomposition en valeurs singulières est $A = U\Sigma V^*$.
On appelle *pseudo-inverse* de la matrice A la matrice $A^\dagger$ de type $(n \times m)$ définie par

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*.$$

1. Quelle application représente la restriction de $\Sigma^\dagger\Sigma$ au sous-espace $\mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_r\}$?
2. Montrer que si A est carrée régulière alors $A^\dagger = A^{-1}$.

3. Montrer que
$$A^\dagger = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i} v_i u_i^*.$$
4. Montrer que
   – $AA^\dagger$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$;
   – $A^\dagger A$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A^*)$
5. Montrer que la restriction à $\mathrm{Im}(A^*) = \mathrm{Ker}(A)^\perp$ de A^*A est une matrice inversible et
$$(A^*A)^{-1} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{-2} v_i v_i^*.$$

Correction ▼ [002217]

Exercice 3

Montrer que, pour $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$

1. $\|A\|_2 = \sigma_1$, la plus grande valeur singulière de A
2. $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2}$ où les σ_i sont les valeurs singulières de A.
3. Les valeurs singulières non nulles de A sont les racines carrés des valeurs propres non nulles de A^*A et AA^*.
4. pour $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $|\det(A)| = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i$.
5. Si $A = A^*$ alors les valeurs singulières de A sont les valeurs absolues des valeurs propres de A

Correction ▼ [002218]

Exercice 4

Montrer que

1. $\mathrm{cond}_2(A) = \mu_n(A)/\mu_1(A)$ avec $\mu_n(A)$ et $\mu_1(A)$ respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de A ;
2. si A est normale alors
$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|};$$
3. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale alors
$$\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(AQ) = \mathrm{cond}_2(QA)$$

Correction ▼ [002219]

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$

1. Calculer $\mathrm{cond}_2(A)$, $\mathrm{cond}_1(A)$ et $\mathrm{cond}_\infty(A)$;
2. Résoudre :
   – $Ax = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$
   – $Ay = b + \delta b$ pour $\delta b = \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Az = b + \Delta b$ pour $\Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$
3. Pour chacune des trois normes considérées, trouver une majoration théorique de
$$\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \text{ et } \frac{\|z-x\|}{\|x\|}$$
   et comparer avec les valeurs exactes. Quelle conclusion ?

Exercice 6 Conditionnement du problème de l'inversion d'une matrice

Soit A une matrice inversible donnée.

1. si $(A+\delta A)$ est une matrice inversible, démontrer

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1}-A^{-1}\|}{\|(A+\delta A)^{-1}\|} \leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

2. Démontrer que

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1}-A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}(1+\mathscr{O}(\|A\|))$$

Correction ▼ [002221]

Correction de l'exercice 1 ▲

4.On calcule

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres

$$\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 7 = \mu_1^2, \lambda_2 = 2 = \mu_2^2$$

On calcule ensuite les vecteurs propres associés à ces valeurs propres

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et la matrice V est la matrice dont les colonnes sont

$$v_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T, \quad v_2 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})^T$$

les colonnes de U sont alors données par

$$u_1 = Av_1/\mu_1 = 1/(\sqrt{7}\sqrt{5})(3,5,-1)^T, \quad u_2 = Av_2/\mu_2 = 1/(\sqrt{2}\sqrt{5})(-1,0,-3)^T$$

quant à u_3 il est choisi orthogonal à u_1 et u_2 et de norme 1.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $\Sigma^\dagger \Sigma e_i = e_i, i = 1, \cdots, r$ c'est l'application identité
2. $AA^\dagger = U\Sigma V^* V \Sigma^\dagger U = U\Sigma\Sigma^\dagger U^* = I$
   On a donc obtenu une généralisation de l'inverse.
3. $U^* \sum_{i=1}^m \varepsilon_i u_i^*$ avec$\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m\}$ base canonique de $\mathbb{R}^m$. Comme $\Sigma^\dagger \varepsilon_i = 0$ pour $r+1 \leq i \leq m$ on a
   $$\Sigma^\dagger U^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} e_i u_i^* \Rightarrow A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} (Ve_i) u_i^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} v_i u_i^*$$
4. On a
   $$AA^\dagger = \sum_{i=1}^r \mu_i u_i v_i^* \sum_{j=1}^r \mu_j^{-1} v_j u_j^* = \sum_{j=1}^r \mu_j \mu_j^{-1} u_j u_j^*$$
   Comme $\mathrm{Im}(A)$ =span$\{u_1, \cdots, u_r\}$ le résultat suit.
5. soit $y \in \mathrm{Im}A^* \Leftrightarrow u = \sum_{i=1}^r x_i v_i$. Alors
   $$A^*A = V\Sigma^* U^* U \Sigma V^* = V\Sigma^*\Sigma V^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^2 v_i v_i^* \Rightarrow A^*Ay = \sum_{i=1}^r \mu_i^2 x_i v_i$$
   et finalement
   $$(\sum_{i=1}^r \mu_i^{-2} v_i v_i^*)(A^*Ay) = \sum_{i=1}^r x_i v_i$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. $\|A\|_2 = \|U\Sigma V^*\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \max |\sigma_j| = \sigma_1$
2. $\|A\|_F^2$ =tr(A^*A) =tr$(U^*A^*AU) = \|AU\|_F^2$ =tr$(A^*U^*UA) = \|UA\|_F^2$ et donc
   $$\|A\|_F = \|U\Sigma V^*\|_F = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2}$$

3. $A^*A = (V\Sigma^*U^*)(U\Sigma V^*) = V(\Sigma^*\Sigma)V^*$ et donc A^*A est semblable à $\Sigma^*\Sigma$, les deux matrices ont donc les mêmes valeurs propres. Les valeurs propres de $\Sigma^*\Sigma$ sont $\sigma_1^2, \cdots, \sigma_r^2$ plus $n-r$ valeurs propres nulles si $n > r$.
4. $|\det A| = |\det(U\Sigma V^*)| = |\det U| \det|\Sigma| |\det V^*| = |\det \Sigma| = \prod_{i=1}^r \sigma_i$
5. Une matrice hermitienne étant diagonalisable a une base orthonormale de vecteurs propres

$$A = Q\Lambda Q^* = Q|\Lambda|\mathrm{sign}(\Lambda)Q^*$$

or $U = \mathrm{sign}(\Lambda)Q^*$ est une matrice unitaire : $U^*U = Q\mathrm{sign}(\Lambda)\mathrm{sign}(\Lambda)Q^* = QQ^* = I$. Donc $Q|\Lambda|U$ est une décomposition en valeurs singulières de A, les valeurs singulières étant $|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. $\|A\|_2^2 = \rho(A^*A) = \max_i \lambda_i(A^*A) = \mu_1^2(A)$ la plus grande valeur singulière de A
$\|A^{-1}\|_2^2 = \rho(A^{-1}(A^{-1})^*) = \max_i \lambda_i((A^*A)^{-1} = \frac{1}{\mu_n(A)^2}$ avec $\mu_n(A)$ la plus petite valeur singulière de A. Donc
$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \mu_n(A)/\mu_1(A)$$
2. Si A est normale alors $\|A\|_2 = \rho(A)$ rayon spectral. Donc
$$A^{-1} = UD^{-1}U^* \Rightarrow (A^{-1})^*A^{-1} = U(D^{-1})^*D^{-1}U^* \Rightarrow \rho((A^{-1})^*A^{-1}) = 1/\min_i |\lambda_i(A)|^2$$
$$\mathrm{cond}_2(A) = \max|\lambda_i(A)|/\min|\lambda_i(A)|$$
3. $\mathrm{cond}_2(QA) = \|QA\|_2\|A^{-1}Q^*\|_2 = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \mathrm{cond}_2(A)$.

Correction de l'exercice 6 ▲

$B = A + \delta A = A(I + A^{-1}\delta A)$ matrice inversible si $\|A^{-1}\delta A\| < 1$
$B^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(A-B)B^{-1} \Rightarrow \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\|A-B\|\|B^{-1}\| \Rightarrow$

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq \|A^{-1}\|\|A-B\| = \|A^{-1}\|\|\delta A\| = \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$
