Exercices : Barbara Tumpach
Relecture : François Lescure

# Intersections des $L^p$ et convergences

## 1 Cas d'une mesure finie

**Exercice 1**

Soit $\Omega$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est *finie* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\Omega)$.

1. Montrer que si $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. En particulier, pour $1 < q < 2 < p$, on a :
$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$
2. Soit $\mathscr{B}^n(0,1)$ la boule unité centrée en 0 de $\mathbb{R}^n$. En considérant les fonctions
$$f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$$
montrer que pour $q < p$, l'inclusion $L^p(\mathscr{B}^n(0,1)) \subset L^q(\mathscr{B}^n(0,1))$ est stricte.

Correction ▼ [005964]

## 2 Cas de la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$

**Exercice 2**

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $\ell^p$ l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p := \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté $\ell^\infty$.

1. Montrer que si $q \leq p$, alors $\ell^q \subset \ell^p$. En particulier, pour $1 < q < 2 < p$, on a :
$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$
2. En considérant les suites $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$, montrer que pour $q < p$, l'inclusion $\ell^q \subset \ell^p$ est stricte.

Correction ▼ [005965]

## 3 Cas de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

**Exercice 3**

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. – Pour quelle valeur de $\alpha$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^n)$ ?
   – Pour quelle valeur de $\beta$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^n)$ ?

- Soit $1 \leq q < p \leq +\infty$. En utilisant $(a)$ et $(b)$, trouver une fonction $f$ qui appartienne à $L^q(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^p(\mathbb{R}^n)$ et une fonction $g$ qui appartienne à $L^p(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^q(\mathbb{R}^n)$.

2. – Soit $1 \leq q < p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$.
   – Soit $r$ tel que $q < r < p$. Montrer que
$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha}$$
   où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0,1]$. On pourra écrire $r = r\alpha + r(1-\alpha)$ et utiliser l'inégalité de Hölder pour un couple de réels conjugués bien choisi.
   – En déduire que si $f_n$ converge vers $f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ alors $f_n$ converge vers $f$ dans $L^r(\mathbb{R}^n)$, i.e $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.
3. Soit $f \in L^p([0,+\infty[) \cap L^q([0,+\infty[)$ avec $1 \leq q < 2 < p$. Montrer que la fonction $h$ définie par $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r)$ appartient à $L^1([0,+\infty[)$ et trouver des constantes $C_{p,q}$ et $\gamma$ telles que $\|h\|_1 \leq C_{p,q} \|f\|_q^{\gamma} \|f\|_p^{(1-\gamma)}$.

Correction ▼ [005966]

# 4 Convergences

### Exercice 4

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_{[n,2n]}(x).$$

1. Montrer que $f_n$ converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ mais ne converge pas fortement dans $L^2([0,+\infty[)$.
2. Montrer que $f_n$ converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$ pour $p > 2$.

Correction ▼ [005967]

### Exercice 5

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{n} \mathbf{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x).$$

1. Montrer que $f_n$ converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ mais ne converge pas fortement dans $L^2([0,+\infty[)$.
2. Montrer que $f_n$ converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$ pour $p < 2$.

Correction ▼ [005968]

## Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $\Omega$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est *finie* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, notons $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\Omega)$.

1. Si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors
$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p(x)\,dx \leq \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) < +\infty,$$
ainsi $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ pour tout $p$ et $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$. Montrons que si $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Soit $f \in L^p(\Omega)$, on a par exemple :
$$\begin{aligned} \|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q(x)\,dx &= \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^q(x)\,dx + \int_{\{|f|<1\}} |f|^q(x)\,dx \\ &\leq \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^p(x)\,dx + \int_{\{|f|<1\}} 1\,dx \\ &\leq \|f\|_p^p + \mu(\Omega) < +\infty. \end{aligned}$$
Ou encore, en utilisant l'inégalité de Hölder pour les réels conjugués $r = \frac{p}{q} > 1$ et $r' = \frac{p}{p-q}$ :
$$\begin{aligned} \|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q(x)\,dx &= \left(\int_\Omega |f|^{q\cdot\frac{p}{q}}(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{p}{p-q}}(x)\,dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \\ &= \|f\|_p^q\, \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{p}}, \end{aligned}$$
ce qui implique :
$$\|f\|_q \leq \|f\|_p \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{qp}}.$$
En conclusion, pour $1 < q < 2 < p$ :
$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

2. Montrons que pour $q < p$, l'inclusion $L^p(\mathscr{B}^n(0,1)) \subset L^q(\mathscr{B}^n(0,1))$ est stricte. La fonction $f_\alpha$ appartient à $L^\infty(\mathscr{B}^n(0,1))$ si et seulement $\alpha \leq 0$, et à $L^p(\mathscr{B}^n(0,1))$ avec $p < +\infty$ si et seulement si
$$p\alpha - n + 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{n}{p}$$
Soit $1 \leq q < p$, alors $f_{\frac{1}{2}(\frac{n}{p}+\frac{n}{q})}$ appartient à $L^q(\mathscr{B}^n(0,1)) \setminus L^p(\mathscr{B}^n(0,1))$. En particulier, $f_{\frac{1}{2}(\frac{n}{p}+\frac{n}{q})}$ appartient à $L^q(\mathscr{B}^n(0,1)) \setminus L^\infty(\mathscr{B}^n(0,1))$.

## Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $\ell^p$ l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p := \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté $\ell^\infty$.

1. Montrons que si $q \leq p$, alors $\ell^q \subset \ell^p$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Comme
$$\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^q < +\infty,$$
il existe un rang $N$ tel que pour $n > N$, $|u_n|^q < 1$. En particulier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\ell^\infty$ et
$$\|u\|_\infty \leq \max\{u_0, \ldots, u_N, 1\}.$$
De plus, pour $n > N$, on a $|u_n|^p \leq |u_n|^q$ et
$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^p \leq \sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^q \leq \|u\|_q^q < +\infty,$$
ce qui implique que $\|u\|_p < +\infty$. En conclusion, pour $1 < q < 2 < p$, on a :
$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$

2. La suite $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$ appartient à $\ell^\infty$ pour tout $\alpha \geq 0$ et à $\ell^p$ avec $1 \leq p < +\infty$ si et seulement si $\alpha p > 1$, i.e $\alpha > \frac{1}{p}$. En particulier la suite constante égale à 1 appartient à $\ell^\infty$ mais n'appartient à aucun $\ell^p$ pour $p < +\infty$. Soit $1 < q < p < +\infty$. Pour tout $\alpha$ tel que $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{q}$, la suite $u^{(\alpha)}$ appartient à $\ell^p \setminus \ell^q$. C'est le cas en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$. Ainsi l'inclusion $\ell^q \subset \ell^p$ est stricte lorsque $q < p$.

---

**Correction de l'exercice 3 ▲**

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. – La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $2\alpha p > n$.
   – La fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p\beta < n$.
   – Soit $1 \leq q < p \leq +\infty$. La fonction
   $$f(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{n}{p+q}}$$
   vérifient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $f \notin L^q(\mathbb{R}^n)$. La fonction
   $$g(x) = |x|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$
   vérifient $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $g \notin L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. – Soit $1 \leq q < p < +\infty$ et $f_n$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$. Comme $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_{p,q}$, $f_n$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, donc elle converge vers une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$. De même, $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_{p,q}$, donc $f_n$ converge vers une fonction $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_q$. De plus, il existe une sous-suite de $f_{n_k}$ qui converge vers $f$ presque-partout et il existe une sous-suite de $f_{n_k}$ qui converge vers $g$ presque-partout. Ainsi $f = g$ $\mu$-p.p. et $f_n$ converge vers $f = g$ dans $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$.
   – Soit $r$ tel que $q < r < p$. Montrons que
   $$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$
   où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0,1]$. Puisque $1 = \frac{\alpha r}{p} + \frac{(1-\alpha)r}{q}$, les réels $p' = \frac{p}{\alpha r}$ et $q' = \frac{q}{(1-\alpha)r}$ sont conjugués. D'après l'inégalité de Hölder,
   $$\begin{aligned}
   \int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{r\alpha}(x)\cdot|f|^{(1-\alpha)r}(x)\,dx \\
   &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\alpha r p'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{(1-\alpha)rq'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q'}} \\
   &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q(x)\,dx\right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}} \\
   &\leq \|f\|_p^{\alpha r}\|f\|_q^{(1-\alpha)r},
   \end{aligned}$$
   ce qui équivaut à $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{(1-\alpha)}$. On peut également écrire $r = \beta q + (1-\beta)p$ avec $\beta \in ]0,1[$ et appliquer Hölder avec les réels conjugués $\frac{1}{\beta}$ et $\frac{1}{1-\beta}$ :
   $$\begin{aligned}
   \int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\beta q}(x)\cdot|f|^{(1-\beta)p}(x)\,dx \\
   &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q(x)\,dx\right)^{\beta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx\right)^{(1-\beta)},
   \end{aligned}$$
   ce qui implique
   $$\|f\|_r \leq \|f\|_q^{\frac{q\beta}{r}} \|f\|_p^{\frac{p(1-\beta)}{r}}$$
   qui est l'inégalité cherchée car $\alpha = \frac{p\beta}{r}$ vérifie bien $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

- Si $f_n$ converge vers $f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$ alors $f_n$ converge vers $f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et dans $L^q(\mathbb{R}^n)$, donc dans $L^r(\mathbb{R}^n)$ d'après l'inégalité précédente. En conclusion, $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $L^r(\mathbb{R}^n)$ donc un sous-espace de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.

3. Soit $f \in L^p([0,+\infty[)\cap L^q([0,+\infty[)$ et $h$ la fonction définie par $h(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}f(r)$. On notera $p'$ le conjugué de $p$ et $q'$ le conjugué de $q$. Montrons que $h$ appartient à $L^1([0,+\infty[)$. On a :
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr=\int_0^R\frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr+\int_R^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr$$
$$\leq\left(\int_0^R r^{-\frac{p'}{2}}\,dr\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^R|f(r)|^p\,dr\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_R^{+\infty} r^{-\frac{q'}{2}}\,dr\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_R^{+\infty}|f(r)|^q\,dr\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq\left(\frac{1}{1-\frac{p'}{2}}\right)^{\frac{1}{p'}}R^{\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}\right)}\|f\|_p+\left(\frac{1}{\frac{q'}{2}-1}\right)^{\frac{1}{q'}}R^{\left(\frac{1}{q'}-\frac{1}{2}\right)}\|f\|_q.$$
En optimisant par rapport à $R$, on obtient :
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr\quad\leq\quad C_{p,q}\|f\|_p^{1-\gamma}\|f\|_q^{\gamma},$$
où, en posant $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}$ et $\beta=\frac{1}{q}-\frac{1}{2}$, on a $\gamma=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, et $C_{p,q}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha^{\gamma}\beta^{1-\gamma}}\left(1-\frac{p'}{2}\right)^{-\frac{1-\gamma}{p'}}\left(\frac{q'}{2}-1\right)^{-\frac{\gamma}{q'}}$.

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :
$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{[n,2n]}(x).$$

1. Quelque soit $g$ continue à support compact,
$$\int_{[0,+\infty[}f_n(x)g(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{2n}g(x)\,dx\to 0$$
quand $n\to+\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact, $f_n$ converge faiblement vers 0. D'autre part, $f_n$ converge presque partout vers 0. Supposons que $f_n$ converge fortement vers une fonction $f$ dans $L^2([0,+\infty[)$. Alors il existe une sous-suite de $f_n$ qui converge presque-partout vers $f$, ce qui implique que $f=0$ est la seule limite possible. Or :
$$\|f_n\|_2=1$$
pour tout $n$, donc $\|f_n\|_2$ ne tend pas vers $\|f\|_2=0$ ce qui contredit le fait que $f_n$ converge vers $f$ dans $L^2([0,+\infty[)$.

2. Pour $p>2$, on a :
$$\int_{[0,+\infty[}|f_n(x)|^p\,dx=\int_n^{2n}n^{-\frac{p}{2}}\,dx=n^{1-\frac{p}{2}}\to 0,$$
quand $n\to+\infty$ donc $f_n$ converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$.

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :
$$f_n(x)=\sqrt{n}\mathbf{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x).$$

1. Quelque soit $g$ continue à support compact,
$$\int_{[0,+\infty[} f_n(x)g(x)\,dx = \sqrt{n}\int_n^{n+\frac{1}{n}} g(x)\,dx \to 0$$
quand $n \to +\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact, $f_n$ converge faiblement vers 0. Comme $f_n$ converge presque partout vers 0 on conclut comme précédemment que $f_n$ ne converge pas fortement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ car
$$\|f_n\|_2 = 1.$$

2. Pour $p < 2$, on a :
$$\int_{[0,+\infty[} |f_n(x)|\,dx = \int_n^{n+\frac{1}{n}} n^{\frac{p}{2}}\,dx = n^{\frac{p}{2}-1} \to 0,$$
donc $f_n$ converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$.

---