



Congruence

Exercice 1

1. Trouver

$$999 \cdot 1998 \pmod{1999}, \quad 136^7 \pmod{137}, \quad 1997 \cdot 1998 \cdot 1999 \cdot 2000 \pmod{2001}.$$

2. Trouver $2792^{217} \pmod{5}$ et $10^{1000} \pmod{13}$.

[002240]

Exercice 2

1. Examiner les carrés $a^2 \pmod{n}$ pour $n = 3, 4, 8$.
2. Examiner $a^3 \pmod{9}$ et $b^4 \pmod{16}$.

[002241]

Exercice 3

Passer \pmod{n} avec un module approprié et montrer que chacune des équations suivantes n'a aucune solution dans \mathbb{Z} :

- $3x^2 + 2 = y^2$;
- $x^2 + y^2 = n$ pour $n = 2003, 2004$;
- $x^2 + y^2 + z^2 = 1999$;
- $x^3 + y^3 + z^3 = 5$;
- $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{15}^4 = 7936$.

[002242]

Exercice 4

On dit que $a \pmod{n}$ est inversible si il existe $b \pmod{n}$ tel que $ab \equiv 1 \pmod{n}$.

- Trouver tous les éléments inversibles modulo 5, 6, 9, 11.
- Trouver $\text{pgcd}(107, 281)$ et sa représentation linéaire en utilisant l'algorithme d'Euclide.
- Trouver l'inverse de 107 $\pmod{281}$ et l'inverse de 281 $\pmod{107}$.
- Montrer que $a \pmod{n}$ est inversible ssi a et n sont premiers entre eux.

[002243]

Exercice 5

Trouver toutes les solutions dans \mathbb{Z} :

- $2x + 3 \equiv 10 \pmod{13}$;
- $$\begin{cases} 2x + 3y \equiv 5 \pmod{7} \\ 5x + 2y \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

3. $x^2 + 2x + 14 \equiv 0 \pmod{17}$.

[002244]

Exercice 6 Le petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et a un nombre premier à p . Montrer que :

1. $am \equiv an \pmod{p}$ ssi $m \equiv n \pmod{p}$;
2. La suite $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a \pmod{p}$ est une permutation de la suite $1, 2, 3, \dots, (p-1) \pmod{p}$;
3. $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

[002245]

Exercice 7

1. Examiner $7^n + 11^n \pmod{19}$.
2. Trouver $2792^{217} \pmod{5}$ et $10^{1000} \pmod{13}$.
3. Montrer que 13 divise $2^{70} + 3^{70}$ et 11 divise $2^{129} + 3^{118}$.

[002246]

Exercice 8 Théorème de Wilson

Soit $p = 2m + 1$ un nombre premier. Montrer que :

1. $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$;
2. $(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1} \pmod{p}$.

[002247]

Exercice 9

Soit $p > 2$ un nombre premier.

1. Soit a premier à p . Supposons que la congruence $x^2 \equiv a \pmod{p}$ possède une solution. Montrer que $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$.
2. La congruence $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ a une solution ssi $p \equiv 1 \pmod{4}$.

[002248]