## Applications linéaires

# 1 Définition

**Exercice 1**

Déterminer si les applications $f_i$ suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{rl} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\ f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\ f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_5(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000929]

**Exercice 2**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $\phi$ une application linéaire de $E$ dans lui-même telle que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\phi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots, \phi^{n-1}(x)\}$ est une base de $E$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000930]

# 2 Image et noyau

**Exercice 3**

Soit $E$ un espace vectoriel et soient $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$, on définit l'application $f \colon E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que $f$ est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de $f$.
3. Que donne le théorème du rang ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000934]

**Exercice 4**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $f$ une application linéaire de $E$ dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$

(ii) $f^2 = 0$ et $n = 2 \cdot \operatorname{rg}(f)$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000943]

**Exercice 5**

Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par $g$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000947]

### Exercice 6

Soit $E$ et $F$ de dimensions finies et $u,v \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)$.
2. En déduire que $|\mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u+v)$.

Correction ▼ Vidéo ■ [001027]

## 3 Injectivité, surjectivité, isomorphie

### Exercice 7

Pour les applications linéaires suivantes, déterminer $\mathrm{Ker}\, f_i$ et $\mathrm{Im}\, f_i$. En déduire si $f_i$ est injective, surjective, bijective.

$$\begin{array}{rl} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_3(x,y) = (y,0,x-7y,x+y) \\ f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_4(P) = \big(P(-1),P(0),P(1)\big) \end{array}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000956]

### Exercice 8

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1,e_2,e_3\}$ une base de $E$, et $t$ un paramètre réel.

Démontrer que la donnée de $\left\{\begin{array}{rcl} \phi(e_1) & = & e_1+e_2 \\ \phi(e_2) & = & e_1-e_2 \\ \phi(e_3) & = & e_1+te_3 \end{array}\right.$ définit une application linéaire $\phi$ de $E$ dans $E$. Écrire le transformé du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Comment choisir $t$ pour que $\phi$ soit injective ? surjective ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000954]

### Exercice 9

Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie et $\phi$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Montrer que $\phi$ est un isomorphisme si et seulement si l'image par $\phi$ de toute base de $E$ est une base de $F$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000963]

## 4 Morphismes particuliers

### Exercice 10

Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $P$ le sous-espace des fonctions paires et $I$ le sous-espace des fonctions impaires. Montrer que $E = P \bigoplus I$. Donner l'expression du projecteur sur $P$ de direction $I$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000974]

### Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient $A$ et $B$ deux polynômes à coefficients réels de degré $n+1$. On considère l'application $f$ qui à tout polynôme $P$ de $E$, associe le reste de la division euclidienne de $AP$ par $B$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.
2. Montrer l'équivalence

$$f \text{ est bijective} \iff A \text{ et } B \text{ sont premiers entre eux.}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000959]

**Exercice 12**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1-X)P'.$$

Montrer que $f$ est une application linéaire et donner une base de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000976]

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Une seule application n'est pas linéaire.

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

Prendre une combinaison linéaire nulle et l'évaluer par $\phi^{n-1}$.

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

Faire un dessin de l'image et du noyau pour $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que le noyau est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

Pour chacune des implications utiliser la formule du rang.

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

Dire qu'un sous-espace $F$ est stable par $g$ signifie que $g(F) \subset F$.

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

$t = 0$ est un cas à part.

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

Pour une base $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $E$ considérer la famille $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$.

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

Pour une fonction $f$ on peut écrire

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Le projecteur sur $P$ de direction $I$ est l'application $\pi : E \longrightarrow E$ qui vérifie $\pi(f) \in P$, $\pi \circ \pi = \pi$ et $\operatorname{Ker} \pi = I$.

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

Résultats utiles d'arithmétique des polynômes : la division euclidienne, le théorème de Bézout, le lemme de Gauss.

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

$P'$ désigne la dérivée de $P$. Pour trouver le noyau, résoudre une équation différentielle. Pour l'image calculer les $f(X^k)$.

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. $f_1$ est linéaire. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}
f_1\big((x,y)+(x',y')\big) &= f_1\big(x+x',y+y'\big)\\
&= \big(2(x+x')+(y+y'),(x+x')-(y+y')\big)\\
&= \big(2x+y+2x'+y',x-y+x'-y'\big)\\
&= \big(2x+y,x-y\big)+\big(2x'+y',x'-y'\big)\\
&= f_1(x,y)+f_1(x',y')
\end{aligned}$$

   Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$f_1\big(\lambda\cdot(x,y)\big) = f_1\big(\lambda x,\lambda y\big) = \big(2\lambda x+\lambda y,\lambda x-\lambda y\big) = \lambda\cdot\big(2x+y,x-y\big) = \lambda\cdot f_1(x,y).$$

2. $f_2$ n'est pas linéaire, en effet par exemple $f_2(1,1,0)+f_2(1,1,0)$ n'est pas égal à $f_2(2,2,0)$.
3. $f_3$ est linéaire : il faut vérifier d'abord que pour tout $(x,y,z)$ et $(x',y',z')$ alors $f_3\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) = f_3(x,y,z)+f_3(x',y',z')$. Et ensuite que pour tout $(x,y,z)$ et $\lambda$ on a $f_3\big(\lambda\cdot(x,y,z)\big) = \lambda\cdot f_3(x,y,z)$.
4. $f_4$ est linéaire : il faut vérifier d'abord que pour tout $(x,y)$ et $(x',y')$ alors $f_4\big((x,y)+(x',y')\big) = f_4(x,y)+f_4(x',y')$. Et ensuite que pour tout $(x,y)$ et $\lambda$ on a $f_4\big(\lambda\cdot(x,y)\big) = \lambda\cdot f_4(x,y)$.
5. $f_5$ est linéaire : soient $P,P' \in \mathbb{R}_3[X]$ alors

$$\begin{aligned}
f_5\big(P+P'\big) &= \big((P+P')(-1),(P+P')(0),(P+P')(1)\big)\\
&= \big(P(-1)+P'(-1),P(0)+P'(0),P(1)+P'(1)\big)\\
&= \big(P(-1),P(0),P(1)\big)+\big(P'(-1),P'(0),P'(1)\big)\\
&= f_5(P)+f_5(P')
\end{aligned}$$

   Et si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
f_5\big(\lambda\cdot P\big) &= \big((\lambda P)(-1),(\lambda P)(0),(\lambda P)(1)\big)\\
&= \big(\lambda\times P(-1),\lambda\times P(0),\lambda\times P(1)\big)\\
&= \lambda\cdot\big(P(-1),P(0),P(1)\big)\\
&= \lambda\cdot f_5(P)
\end{aligned}$$

## Correction de l'exercice 2 ▲

Montrons que la famille $\{x,\phi(x),\phi^2(x),\ldots,\phi^{n-1}(x)\}$ est libre. Soient $\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 x+\lambda_1\phi(x)+\cdots+\lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x) = 0$. Alors : $\phi^{n-1}\big(\lambda_0 x+\lambda_1\phi(x)+\cdots+\lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)\big) = 0$. Mais comme de plus $\phi^n = 0$, on a l'égalité $\phi^{n-1}\big(\lambda_0 x+\lambda_1\phi(x)+\cdots+\lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)\big) = \phi^{n-1}(\lambda_0 x)+\phi^n\big(\lambda_1 x+\cdots+\lambda_{n-1}\phi^{n-2}(x)\big) = \phi^{n-1}(\lambda_0 x) = \lambda_0\phi^{n-1}(x)$. Comme $\phi^{n-1}(x) \neq 0$ on obtient $\lambda_0 = 0$.
En calculant ensuite $\phi^{n-2}\big(\lambda_1\phi(x)+\cdots+\lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)\big)$ on obtient $\lambda_1 = 0$ puis, de proche en proche, $\lambda_2 = 2,\ldots,$ $\lambda_{n-1} = 0$. La famille $\{x,\phi(x),\ldots,\phi^{n-1}(x)\}$ est donc libre. En plus elle compte $n$ vecteurs, comme $\dim E = n$ elle est libre et maximale et forme donc une base de $E$.

## Correction de l'exercice 3 ▲

1. Aucun problème...

2. Par définition de $f$ et de ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels, l'image est

$$\operatorname{Im} f = \{f(x_1,x_2) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} = E_1 + E_2.$$

Pour le noyau :

$$\operatorname{Ker} f = \{(x_1,x_2) \mid f(x_1,x_2) = 0\} = \{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

Mais on peut aller un peu plus loin. En effet un élément $(x_1,x_2) \in \operatorname{Ker} f$, vérifie $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $x_1 = -x_2$. Donc $x_1 \in E_2$. Donc $x_1 \in E_1 \cap E_2$. Réciproquement si $x \in E_1 \cap E_2$, alors $(x,-x) \in \operatorname{Ker} f$. Donc

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,-x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}.$$

De plus l'application $x \mapsto (x,-x)$ montre que $\operatorname{Ker} f$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.

3. Le théorème du rang s'écrit :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim(E_1 \times E_2).$$

Compte tenu de l'isomorphisme entre $\operatorname{Ker} f$ et $E_1 \cap E_2$ on obtient :

$$\dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1 \times E_2).$$

Mais $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$, donc on retrouve ce que l'on appelle le théorème des quatre dimensions :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f$, cela entraîne $f(f(x)) = 0$ ; donc $f^2 = 0$. De plus d'après la formule du rang $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f) = n$, mais $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$, ainsi $2\operatorname{rg}(f) = n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $f^2 = 0$ alors $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ car pour $y \in \operatorname{Im} f$ il existe $x$ tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$. De plus si $2\operatorname{rg}(f) = n$ alors la formule du rang donne $\dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{rg}(f)$ c'est-à-dire $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$. Nous savons donc que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\operatorname{Ker} f$ mais ces espaces sont de même dimension donc sont égaux : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

On va montrer $g(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} f$. Soit $y \in g(\operatorname{Ker} f)$. Il existe $x \in \operatorname{Ker} f$ tel que $y = g(x)$. Montrons $y \in \operatorname{Ker} f$ :

$$f(y) = f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(0) = 0.$$

On fait un raisonnement similaire pour montrer $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$. Soit $z \in g(\operatorname{Im} f)$, il existe $y \in \operatorname{Im} f$ tel que $z = g(y)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f.$$

---

**Correction de l'exercice 6 ▲**

1. Par la formule $\dim(G+H) = \dim(G) + \dim(H) - \dim(G \cap H)$, on sait que $\dim(G+H) \leqslant \dim(G) + \dim(H)$. Pour $G = \operatorname{Im} u$ et $H = \operatorname{Im} v$ on obtient : $\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leqslant \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v$. Or $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. Donc $\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
2. On applique la formule précédente à $u+v$ et $-v$ : $\operatorname{rg}((u+v)+(-v)) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v)$, or $\operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(v)$ donc $\operatorname{rg}(u) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(v)$. Donc $\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v) \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$. On recommence en échangeant $u$ et $v$ pour obtenir : $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v)$.

**Correction de** **l'exercice 7 ▲**

Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire "à la main".

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$ pour $f : E \to F$. Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

1. $f_1$ est injective, surjective (et donc bijective).

   (a) Faisons tout à la main. Calculons le noyau :

   $$\begin{aligned}(x,y) \in \operatorname{Ker} f_1 &\iff f_1(x,y) = (0,0) \iff (2x+y, x-y) = (0,0)\\ &\iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)\end{aligned}$$

   Ainsi $\operatorname{Ker} f_1 = \{(0,0)\}$ et donc $f_1$ est injective.

   (b) Calculons l'image. Quels éléments $(X,Y)$ peuvent s'écrire $f_1(x,y)$ ?

   $$\begin{aligned}f_1(x,y) = (X,Y) &\iff (2x+y, x-y) = (X,Y)\\ &\iff \begin{cases} 2x+y=X \\ x-y=Y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{X+Y}{3} \\ y = \frac{X-2Y}{3} \end{cases}\\ &\iff (x,y) = \left(\frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3}\right)\end{aligned}$$

   Donc pour n'importe quel $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ on trouve un antécédent $(x,y) = (\frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3})$ qui vérifie donc $f_1(x,y) = (X,Y)$. Donc $\operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}^2$. Ainsi $f_1$ est surjective.

   (c) Conclusion : $f_1$ est injective et surjective donc bijective.

2. Pour $f_2$ on pourrait raisonner similairement, mais on va simplifier le travail pour l'image de $f_2$.

   (a) Calculons d'abord le noyau :

   $$\begin{aligned}(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f_2 &\iff f_1(x,y,z) = (0,0,0)\\ &\iff (2x+y+z, y-z, x+y) = (0,0,0)\\ &\iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases}\\ &\iff \cdots\\ &\iff (x,y,z) = (0,0,0)\end{aligned}$$

   Ainsi $\operatorname{Ker} f_2 = \{(0,0,0)\}$ et donc $f_2$ est injective.

   (b) Maintenant nous allons utiliser que $\operatorname{Ker} f_2 = \{(0,0,0)\}$ , autrement dit $\dim \operatorname{Ker} f_2 = 0$. La formule du rang, appliquée à $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim \operatorname{Ker} f_2 + \dim \operatorname{Im} f_2 = \dim \mathbb{R}^3$. Donc $\dim \operatorname{Im} f_2 = 3$. Ainsi $\operatorname{Im} f_2$ est un espace vectoriel de dimension 3 inclus dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 donc $\operatorname{Im} f_2 = \mathbb{R}^3$. Ainsi $f_2$ est surjective.

   (c) $f_2$ est injective, surjective donc bijective.

3. Sans aucun calcul on sait $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ne peut être surjective car l'espace d'arrivée est de dimension strictement supérieur à l'espace de départ.

   (a) Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \operatorname{Ker} f_3 &\iff f_3(x,y) = (0,0,0,0) \\
&\iff (y,0,x-7y,x+y) = (0,0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ x - 7y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
&\iff \cdots \\
&\iff (x,y) = (0,0)
\end{aligned}$$

   Ainsi $\operatorname{Ker} f_3 = \{(0,0)\}$ et donc $f_3$ est injective.

   (b) La formule du rang, appliquée à $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ s'écrit $\dim \operatorname{Ker} f_3 + \dim \operatorname{Im} f_3 = \dim \mathbb{R}^2$. Donc $\dim \operatorname{Im} f_3 = 2$. Ainsi $\operatorname{Im} f_3$ est un espace vectoriel de dimension 2 inclus dans $\mathbb{R}^3$, $f_3$ n'est pas surjective.

   Par décrire $\operatorname{Im} f_3$ nous allons trouver deux vecteurs indépendants de $\operatorname{Im} f_3$. Il y a un nombre infini de choix : prenons par exemple $v_1 = f(1,0) = (0,0,1,1)$. Pour $v_2$ on cherche (un peu à tâtons) un vecteur linéairement indépendant de $v_1$. Essayons $v_2 = f(0,1) = (1,0,-7,1)$. Par construction $v_1, v_2 \in \operatorname{Im} f$ ; ils sont clairement linéairement indépendants et comme $\dim \operatorname{Im} f_3 = 2$ alors $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f_3$.

   Ainsi $\operatorname{Im} f_3 = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2\} = \big\{\lambda(0,0,1,1) + \mu(1,0,-7,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\}$.

4. $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ va d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension strictement plus petit et donc $f_4$ ne peut être injective.

   (a) Calculons le noyau. Écrivons un polynôme $P$ de degré $\leq 3$ sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors $P(0) = d$, $P(1) = a+b+c+d$, $P(-1) = -a+b-c+d$.

$$\begin{aligned}
P(X) \in \operatorname{Ker} f_4 &\iff \big(P(-1), P(0), P(1)\big) = (0,0,0) \\
&\iff (-a+b-c+d, d, a+b+c+d) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} -a+b-c+d = 0 \\ d = 0 \\ a+b+c+d = 0 \end{cases} \\
&\iff \cdots \\
&\iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\
&\iff (a,b,c,d) = (t,0,-t,0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   Ainsi le noyau $\operatorname{Ker} f_4 = \big\{tX^3 - tX \mid t \in \mathbb{R}\big\} = \operatorname{Vect}\{X^3 - X\}$. $f_4$ n'est pas injective son noyau étant de dimension 1.

   (b) La formule du rang pour $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim \operatorname{Ker} f_4 + \dim \operatorname{Im} f_4 = \dim \mathbb{R}_3[4]$. Autrement dit $1 + \dim \operatorname{Im} f_4 = 4$. Donc $\dim \operatorname{Im} f_4 = 3$. Ainsi $\operatorname{Im} f_4$ est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc $\operatorname{Im} f_4 = \mathbb{R}^3$. Conclusion $f_4$ est surjective.

---

**Correction de l'exercice 8 ▲**

---

1. Comment est définie $\phi$ à partir de la définition sur les éléments de la base ? Pour $x \in E$ alors $x$ s'écrit dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Et $\phi$ est définie sur $E$ par la formule
$$\phi(x) = \alpha_1 \phi(e_1) + \alpha_2 \phi(e_2) + \alpha_3 \phi(e_3).$$
Soit ici :
$$\phi(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3.$$
Cette définition rend automatiquement $\phi$ linéaire (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincu !).
2. On cherche à savoir si $\phi$ est injective. Soit $x \in E$ tel que $\phi(x) = 0$ donc $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3 = 0$. Comme $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base alors tous les coefficients sont nuls :
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad t\alpha_3 = 0.$$
Si $t \neq 0$ alors en résolvant le système on obtient $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Donc $x = 0$ et $\phi$ est injective.
Si $t = 0$, alors $\phi$ n'est pas injective, en résolvant le même système on obtient des solutions non triviales, par exemple $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$. Donc pour $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ on obtient $\phi(x) = 0$.
3. Pour la surjectivité on peut soit faire des calculs, soit appliquer la formule du rang. Examinons cette deuxième méthode. $\phi$ est surjective si et seulement si la dimension de $\operatorname{Im}\phi$ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée (ici $E$ de dimension 3). Or on a une formule pour $\dim \operatorname{Im}\phi$ :
$$\dim \operatorname{Ker}\phi + \dim \operatorname{Im}\phi = \dim E.$$
Si $t \neq 0$, $\phi$ est injective donc $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$ est de dimension 0. Donc $\dim \operatorname{Im}\phi = 3$ et $\phi$ est surjective.
Si $t = 0$ alors $\phi$ n'est pas injective donc $\operatorname{Ker}\phi$ est de dimension au moins 1 (en fait 1 exactement), donc $\dim \operatorname{Im}\phi \leqslant 2$. Donc $\phi$ n'est pas surjective.
On remarque que $\phi$ est injective si et seulement si elle est surjective. Ce qui est un résultat du cours pour les applications ayant l'espace de départ et d'arrivée de même dimension (finie).

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

1. Montrons que si $\phi$ est un isomorphisme, l'image de toute base de $E$ est une base de $F$ : soit $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $E$ et nommons $\mathscr{B}'$ la famille $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$.
   (a) $\mathscr{B}'$ est libre. Soient en effet $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\phi(e_1) + \cdots + \lambda_n\phi(e_n) = 0$. Alors $\phi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$ donc, comme $\phi$ est injective, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ puis, comme $\mathscr{B}$ est libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
   (b) $\mathscr{B}'$ est génératrice. Soit $y \in F$. Comme $\phi$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = \phi(x)$. Comme $\mathscr{B}$ est génératrice, on peut choisir $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Alors $y = \lambda_1\phi(e_1) + \cdots + \lambda_n\phi(e_n)$.
2. Supposons que l'image par $\phi$ de toute base de $E$ soit une base $F$. Soient $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $E$ et $\mathscr{B}'$ la base $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$.
   (a) $\operatorname{Im}\phi$ contient $\mathscr{B}'$ qui est une partie génératrice de $F$. Donc $\phi$ est surjective.
   (b) Soit maintenant $x \in E$ tel que $\phi(x) = 0$. Comme $\mathscr{B}$ est une base, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Alors $\phi(x) = 0 = \lambda_1\phi(e_1) + \cdots + \lambda_n\phi(e_n)$ donc puisque $\mathscr{B}'$ est libre : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. En conséquence si $\phi(x) = 0$ alors $x = 0$ : $\phi$ est injective.

En fait on montrerait de la même façon que "$\phi$ est un isomorphisme si et seulement si l'image par $\phi$ **d'une** base de $E$ est une base de $F$".

---

**Correction de l'exercice 10 ▲**

1. La seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle : $P \cap I = \{0\}$. Montrons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose en une fonction paire et une fonction impaire. En effet :
$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$
La fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est paire (le vérifier !), la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est impaire. Donc $P+I=E$. Bilan : $E = P \oplus I$.
2. Le projecteur sur $P$ de direction $I$ est l'application $\pi : E \longrightarrow E$ qui à $f$ associe la fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, c'est-à-dire à $f$ on associe la partie paire de $f$. Nous avons bien
   - $\pi(f) \in P$. Par définition de $\pi$, $\pi(f)$ est bien une fonction paire.
   - $\pi \circ \pi = \pi$. Si $g$ est une fonction paire alors $\pi(g) = g$. Appliquons ceci avec $g = \pi(f)$ (qui est bien est une fonction paire) donc $\pi(\pi(f)) = \pi(f)$.
   - $\operatorname{Ker} \pi = I$. Si $\pi(f) = 0$ alors cela signifie exactement que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est la fonction nulle. Donc pour tout $x$ : $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = 0$ donc $f(x) = -f(-x)$ ; cela implique que $f$ est une fonction impaire. Réciproquement si $f \in I$ est une fonction impaire, sa partie paire est nulle donc $f \in \operatorname{Ker} f$.

---

**Correction de l'exercice 11 ▲**

1. Soit $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la division euclidienne de $AP$ par $B$ s'écrit $AP = Q \cdot B + R$, donc en multipliant par $\lambda$ on obtient : $A \cdot (\lambda P) = (\lambda Q)B + \lambda R$. ce qui est la division euclidienne de $A \cdot (\lambda P)$ par $B$, donc si $f(P) = R$ alors $f(\lambda P) = \lambda R$. Donc $f(\lambda P) = \lambda f(P)$.
   Soient $P, P' \in E$. On écrit les divisions euclidiennes :
   $$AP = Q \cdot B + R, \quad AP' = Q' \cdot B + R'.$$
   En additionnant :
   $$A(P+P') = (Q+Q')B + (R+R')$$
   qui est la division euclidienne de $A(P+P')$ par $B$. Donc si $f(P) = R$, $f(P') = R'$ alors $f(P+P') = R+R' = f(P)+f(P')$.
   Donc $f$ est linéaire.
2. Sens $\Rightarrow$. Supposons $f$ est bijective, donc en particulier $f$ est surjective, en particulier il existe $P \in E$ tel que $f(P) = 1$ (1 est le polynôme constant égale à 1). La division euclidienne est donc $AP = BQ + 1$, autrement dit $AP - BQ = 1$. Par le théorème de Bézout, $A$ et $B$ sont premiers entre eux.
3. Sens $\Leftarrow$. Supposons $A, B$ premiers entre eux. Montrons que $f$ est injective. Soit $P \in E$ tel que $f(P) = 0$. Donc la division euclidienne s'écrit : $AP = BQ + 0$. Donc $B$ divise $AP$. Comme $A$ et $B$ sont premiers entre eux, par le lemme de Gauss, alors $B$ divise $P$. Or $B$ est de degré $n+1$ et $P$ de degré moins que $n$, donc la seule solution est $P = 0$. Donc $f$ est injective. Comme $f : E \longrightarrow E$ est injective et $E$ est de dimension finie, alors $f$ est bijective.

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

1. $f$ est bien linéaire...
2. Soit $P$ tel que $f(P) = 0$. Alors $P$ vérifie l'équation différentielle
   $$P + (1-X)P' = 0.$$
   Dont la solution est $P = \lambda(X-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1 et une base est donnée par un seul vecteur : $X-1$.
3. Par le théorème du rang la dimension de l'image est :
   $$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Ker} f = (n+1) - 1 = n.$$

Il faut donc trouver $n$ vecteurs linéairement indépendants dans $\operatorname{Im} f$. Évaluons $f(X^k)$, alors

$$f(X^k) = (1-k)X^k + kX^{k-1}.$$

Cela donne $f(1) = 1, f(X) = 1, f(X^2) = -X^2 + 2X, ...$ on remarque que pour $k = 2, \ldots n$, $f(X^k)$ est de degré $k$ sans terme constant. Donc l'ensemble

$$\left\{f(X), f(X^2), \ldots, f(X^n)\right\}$$

est une famille de $n$ vecteurs, appartenant à $\operatorname{Im} f$, et libre (car les degrés sont distincts). Donc ils forment une base de $\operatorname{Im} f$.

---