Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer, T. Tahani, F. Sarkis
Corrections : F. Sarkis

Equations différentielles

Exercice 1

1. Pour chacune des équations suivantes où $y = y(x)$ est rélle de variable réelle, décrire les solutions en précisant leur intervalle maximal de définition et dessiner les trajectoires :
$$\text{(i) } y' = e - y \text{ (ii) } y' - y = e^x \text{ (iii) } xy' - 2y = 0.$$
2. Quelles sont les courbes isoclines de l'équation $y' = y^2 - x$; en déduire l'allure des trajectoires.

[002557]

Exercice 2

On considère l'équation
$$x' = 3x^{2/3} :(1)$$
avec condition initiale $x(0) = 0$.

1. Soit φ une solution de (1) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$; on pose $\lambda = \inf\{t \leq 0; \varphi(t) = 0\} \leq +\infty$. Montrez que φ est identiquement nulle sur (λ, μ).
2. Montrer que φ vaut $(t-\lambda)^3$ si $t \leq \lambda$, 0 sur $[\lambda, \mu]$ et $(t-\mu)^3$ si $t \geq \mu$; en déduire toutes les solutions maximales de (1) définies sur $\mathbb{R}$ avec $x(0) = 0$.

Correction ▼ [002558]

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $x' = |x| + |t|$.

1. Montrez que pour tout réel x_0, il existe une solution maximale (φ, J) telle que $\varphi(0) = x_0$.
2. Détermner la solution maximale correspondant à $x_0 = 1$, en distinguant les cas $t \geq 0$ et $t < 0$, et vérifiez qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Combien de fois est-elle dérivable ?

Correction ▼ [002559]

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t,x) = 4\frac{t^3 x}{t^4 + x^2}$ si $(t,x) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. On s'interesse à l'équation différentielle
$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

1. L'application f, est-elle continue ? est-elle localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ? Que peut-on en déduire pour l'équation (2) ?
2. Soit φ une solution de (2) qui est définie sur un intervalle I ne contenant pas 0. On définit une application psi par $\varphi(t) = t^2\psi(t), t \in I$. Déterminer une équation différentielle (E) telle que ψ soit solution de cette équation, puis résoudre cette équation (E).
3. Que peut-on en déduire pour l'existence et l'unicité de l'équation différentielle (2) avec donnée initiale $(t_0, x_0) = (0,0)$

Exercice 5

Soit l'équation différentielle

$$x''' - xx'' = 0$$

où x est une application trois fois dérivable, définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Mettre cette équation différentielle sous la forme canonique $y'(t) = f(t, y(t))$, où f est une application que l'on déterminera.
2. Soient $t_0, a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale φ de l'équation (3) qui satisfasse aux conditions initiales
$$\varphi(t_0) = a, \varphi'(t_0) \text{ et } \varphi''(t_0) = c.$$
3. Soit φ une telle solution maximale. Calculer la dérivée de la fonction
$$t \to \varphi''(t) exp\left(-\int_{t_0}^{t} \varphi(u)du\right)$$
En déduire que la fonction φ est soit convexe, soit concave sur son intervalle de définition. Déterminer φ dans le cas où $\varphi''(t_0) = 0$.

Correction ▼ [002561]

Exercice 6

On considère l'équation $xx'' = (x')^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, $x_0 \neq 0$ et x'_0 étant donnés dans $\mathbb{R}$, il existe une unique solution φ définie au voisinage de 0, telle que $\varphi(0) = x_0$ et $\varphi'(0) = x'_0$.
2. Si de plus $x'_0 \neq 0$, on peut supposer que φ est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de x_0 (pourquoi ?) ; on note ψ l'application réciproque et on pose $z(x) = \varphi'(\psi(x))$. Calculez $z'(x)$, trouver l'équationb satisfaite par z et expliciter z ; en déduire une expression de φ.
3. Quelle est la solution φ de léquation telle que $\varphi(0) = x_0 \neq 0$ et $\varphi'(0) = 0$.

[002562]

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Soit λ_n et μ_n deux suites de points tels que $\varphi(\lambda_n) = \varphi(\mu_n) = 0$ et convergeant respectivement vers λ et μ, il reste à montrer que φ est nulle sur chaque interval $[\lambda_n, \mu_n]$. Soit c un extremum de φ sur cet interval, on a alors necessairement $\varphi'(c) = 0$ et donc $3c^{2/3} = 0$ et donc $c = 0$ et donc $\varphi(c) = \varphi(0) = 0$. Par conséquent le sup et le min de φ sur $[\lambda_n, \mu_n]$ sont nuls et donc φ est aussi nulle sur cet intervalle. En passant à la limite, on a prouvé que φ est nulle sur $]\lambda, \mu[$.
2. On vérifie que les solutions proposées vérifient l'équation différentielle (1). La fonction $x^{2/3}$ est lipschitzienne par rapport à x dès que $x \neq 0$. Si φ_2 est une solution maximale sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi_2(0) = 0$, il existe alors nécessairement λ, μ (définis précédement) tels que φ_2 est nulle sur $]\lambda, \mu[$. Par continuité de la solution elle vérifie $\varphi(\lambda) = \varphi(\mu) = 0$. Mais alors $\varphi_2' - \varphi = 0$ est donc $\varphi_2 = \varphi + K$ où K est une constante donnée. Du fait que $\varphi_2(\lambda) = \varphi(\lambda) + K = 0 + K = 0$, on a $K = 0$ ce qui termine la démonstration.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(t,x) = |x| + |t|$. f est continue et Lipschitzienne par rapport à la seconde variable. En effet,
$$|f(t,x) - f(t,y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$
Remarquons que $x' \geq 0$ pour tout t et que pour tout point $(0, x_0$ passe une solution maximale unique (φ, J).
2. Prenons $x_0 = 1$, lorque $t \geq 0$; l'équation devient
$$x't() = x(t) + t$$
car $|t| = t$ et $x(t) \geq x(0) > 0, x(0) = 1$. Elle admet comme solution sur $[0, +\infty[$ avec $\varphi(0) = 1$
$$\varphi(t) = 2e^t - t - 1.$$
Lorsque $t < 0$, on distingue deux cas : premier cas $x(t) \geq 0$; $x' = -t + x(t)$ et alors $x(t) = ce^t + t + 1$ avec $x(0) = 1$ d'où $c = 0$ et $\varphi(t) = t + 1$. Cela n'est valable que lorsque $\varphi(t) \geq 0$, c'est à dire $t \geq 1$. Donc $\varphi(t) = t + 1$ sur $[-1, 1]$. Deuxième cas : $x(t) \leq 0$, ceci a lieu lorsque $t \leq -1$ car φ croissante et $\varphi(-1) = 0$. Nous avons alors $\varphi'(t) = -t - \varphi(t)$. D'où $\varphi(t) = ce^{-t} - t + 1$ or $\varphi(-1) = ce + 2 = 0$ d'où $c = -2e^{-1}$ et $\varphi(t) = -2e^{-t+1} - t + 1$ sur $]-\infty, -1]$. La solution maximale vérifiant $\varphi(0) = 1$ est la suivante :
$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - t - 1 \text{ sur } [0, +\infty[\\ t + 1 \text{ sur } [-1, 0] \\ -2e^{-(t+1)} - t + 1 \text{ sur }]-\infty, -1] \end{pmatrix}$$
$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - 1 \text{ sur }]0, +\infty[\\ 1 \text{ sur }]-1, 0[\\ 2e^{-(t+1)} - 1 \text{ sur }]-\infty, -1[\end{pmatrix}$$
En étudiant les limites de φ' aux point 0 et -1, on voit que φ' est continue sur $\mathbb{R}$.
$$\varphi''(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \text{ sur }]0, +\infty[\\ 0 \text{ sur }]-1, 0[\\ -2e^{-(t+1)} \text{ sur }]-\infty, -1[\end{pmatrix}$$
φ n'est donc pas deux fois dérivable en 0 et -1.

Correction de l'exercice 4 ▲

$f(t,x) = \frac{4t^3x}{t^4+x^2}$ (si $(t,x) \neq (0,0)$) est de classe C^∞ en tant que quotient, somme et produit de fonctions C^∞.

1. $|f(t,x)| = |2t|.|\frac{2t^2x=}{(t^2)^2+x^2}| \leq 2|t| \to_{(t,x)\to 0} 0 = f(0,0)$. f est donc continue en $(0,0)$. f n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de $(0,0)$ car sinon il existerait $k,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que $t \in]-\alpha,\alpha[$, $x \in]-\beta,\beta[$ et
$$|f(t,x) - f(t,0)| \leq k|x-0|$$
D'où $\frac{4t^3x}{t^4+x^2} \leq kx \Rightarrow \frac{4t^3}{t^4+x^2} \leq k \to \frac{4}{t} \leq k, \forall t \in]0,\alpha[$ ce qui est absurde. Nous ne pouvons pas appliquer Cauchy-Lipschitz.
2. (φ, I) solution de (2) avec $0 \notin I$,
$$\psi(t) = t^{-2}\varphi(t) \Rightarrow \psi'(t) = t^{-2}\varphi'(t) - 2t^{-3}\varphi(t)$$
$$\psi'(t) = 4t^{-2}\frac{t^3\varphi(t)}{t^4+\varphi^2(t)} - 2t^{-1}\psi(t)$$
d'où en exprimant tout en fonction de ψ :
$$\frac{\psi'(t)(1+\psi^2(t))}{\psi(t)(1-\psi(t))(1+\psi(t))} = \frac{2}{t}$$
Or $\frac{1+\psi^2(t)}{\psi(t)(1-\psi(t))(1+\psi(t))} = \frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1-\psi(t)} - \frac{1}{1+\psi(t)}$ d'où
$$\psi'(t)(\frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1-\psi(t)} - \frac{1}{1+\psi(t)}) = \frac{2}{t}$$
En intégrant par rapport à t on obtient :
$$ln|\frac{\psi(t)}{1-\psi^2(t)}| = ln(t^2) + c$$
d'où
$$\frac{\psi(t)}{1-\psi(t)} = ct^2.$$
$\psi(t)$ vérifie est donc une racine de l'équation
$$ct^2\psi^2(t) + \psi(t) - ct^2 = 0$$
et donc
$$\psi(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c^2t^4}}{2ct^2}$$
d'où $\varphi = \frac{-1\pm\sqrt{1+4c^2t^4}}{2c}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Posons $y_1 = x$, $y_2 = x' = y_1'$, $y_3 = x'' = y_2'$. L'équation devient $y_3' - y_1y_3 = 0$ et donc en posant $f(t,y_1,y_2,y_3) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1y_3 \end{pmatrix}$ l'équation s'écrit
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = f(t,y_1,y_2,y_3).$$
2. f étant de classe C^∞, elle est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable (y_1,y_2,y_3) et donc le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de conclure.
3. La dérivée de la fonction donnée est nulle. Par conséquent, elle est constante et donc, l'exponentielle étant strictement positive, le signe de φ'' est constant. Si cette constante est strictement positive, φ est convexe, si elle est strictement négative, φ est concave. Si elle est nulle $\varphi'' = 0$ et donc $\varphi(t) = at+b$ qui est bien une solution de l'équation différentielle et vérifie $\varphi''(t_0) = 0$. L'unicité montre que toutes les solutions qui vérifient $\varphi''(t_0) = 0$ sont bien de la forme $at+b$.
