

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КІЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»**

**Навчально-науковий фізико-технічний інститут  
Кафедра математичних методів захисту інформації**

**Звіт до  
лабораторної роботи за темою:  
Дослідження сучасних алгебраїчних криптосистем  
на прикладі постквантових  
криптографічних алгоритмів.  
Алгоритм TiGER**

**Оформлення звіту:**  
Юрчук Олексій, ФІ-52МН  
Дигас Богдан, ФІ-52МН

11 листопада 2025 р.  
м. Київ

# ЗМІСТ

<b>1 Вступне слово</b>	<b>1</b>
<b>2 Загальне теоретичне дослідження</b>	<b>2</b>
2.1 Постквантова криптографія . . . . .	2
2.2 Передумови створення TiGER . . . . .	2
2.3 Участь у КрqC та злиття з SMAUG . . . . .	3
2.3.1 Злиття TiGER та SMAUG . . . . .	3
2.3.2 Результати КрqC 2023 . . . . .	4
<b>3 Теоретична база алгоритму TiGER</b>	<b>5</b>
3.1 Алгебраїчні структури . . . . .	5
3.1.1 Кільця та многочлени . . . . .	5
3.1.2 Факторкільця многочленів . . . . .	6
3.1.3 Кільце многочленів у TiGER . . . . .	6
3.1.4 Операції в кільці $R_q$ . . . . .	6
3.2 Задачі на решітках . . . . .	7
3.2.1 Решітки та базові задачі . . . . .	7
3.2.2 Задача Learning With Errors (LWE) . . . . .	7
3.2.3 Задача Ring Learning With Errors (RLWE) . . . . .	8
3.2.4 Задача Learning With Rounding (LWR) . . . . .	8
3.2.5 Задача Ring Learning With Rounding (RLWR) . . . . .	9
3.3 "Сімейство" алгоритмів на базі RLWE/RLWR . . . . .	9
3.3.1 Lizard . . . . .	9
3.3.2 RLizard . . . . .	10
3.3.3 CRYSTALS-Kyber . . . . .	10
3.3.4 Saber . . . . .	11
3.3.5 Порівняння алгоритмів, і що з них взяв TiGER . . . . .	12
3.4 Криптографічні примітиви . . . . .	12
3.4.1 Схема шифрування з відкритим ключем (PKE) . . . . .	12
3.4.2 Механізм інкапсуляції ключа (KEM) . . . . .	13
3.4.3 Побудова KEM з PKE . . . . .	13
3.4.4 Криптографічні геш-функції . . . . .	14
3.4.5 Зв'язок PKE та KEM у TiGER . . . . .	14
3.5 Основні поняття безпеки, що стосуються TiGER . . . . .	14
3.5.1 IND-CPA безпека . . . . .	14
3.5.2 IND-CCA безпека . . . . .	15
3.5.3 Ймовірність помилки розшифрування (DFP/R) . . . . .	16
3.5.4 Квантова безпека a.k.a. QROM . . . . .	17
3.6 Перетворення Fujisaki-Okamoto . . . . .	17
3.6.1 Класичне перетворення FO . . . . .	17
3.6.2 Перетворення $FO_m^f$ з неявним відхиленням . . . . .	18
3.6.3 Застосування у алгоритмі TiGER . . . . .	19

<b>4 Повний опис алгоритму TiGER</b>	<b>20</b>
4.1 Загальна структура алгоритму . . . . .	20
4.1.1 Модульна побудова алгоритму . . . . .	20
4.1.2 Взаємодія між компонентами TiGER . . . . .	21
4.2 Публічні параметри . . . . .	21
4.3 Допоміжні алгоритми . . . . .	23
4.4 TiGER.PKE . . . . .	25
4.4.1 KeyGen – генерація ключів . . . . .	25
4.4.2 Encryption – шифрування . . . . .	26
4.4.3 Decryption – розшифрування . . . . .	27
4.5 TiGER.KEM . . . . .	29
4.5.1 KeyGen – генерація ключів . . . . .	29
4.5.2 Encapsulation – інкапсуляція . . . . .	29
4.5.3 Decapsulation – декапсуляція . . . . .	30
4.6 Аналіз коректності . . . . .	32
4.7 Особливості реалізації . . . . .	34
<b>5 Аналіз безпеки</b>	<b>37</b>
5.1 Теоретичні основи безпеки . . . . .	37
5.1.1 IND-CPA безпека TiGER.PKE . . . . .	37
5.1.2 IND-CCA безпека TiGER.KEM . . . . .	37
5.1.3 Важливість моделі QROM . . . . .	38
5.2 Квантова стійкість . . . . .	38
5.3 Рівні безпеки NIST . . . . .	40
5.3.1 Категорії безпеки згідно NIST . . . . .	40
5.3.2 Відповідність TiGER стандартам NIST . . . . .	41
<b>6 Порівняння з іншими алгоритмами</b>	<b>42</b>
6.1 TiGER vs RLizard . . . . .	42
6.2 TiGER vs Kyber . . . . .	44
6.3 TiGER vs Saber . . . . .	47
6.4 TiGER vs SMAUG . . . . .	49
6.5 Порівняння усіх перелічених алгоритмів . . . . .	52
<b>7 Перенесення атак та можливі покращення</b>	<b>55</b>
<b>8 Практичне застосування та висновки</b>	<b>56</b>
<b>9 Результати власної реалізації</b>	<b>57</b>

# Розділ 1

## Вступне слово

**Мета роботи** (власне, для чого ми тут зібралися):

Дослідити особливостей реалізації сучасних алгебраїчних криптосистем на прикладі учасників першого раунду національного конкурсу з постквантової криптографії в Кореї (КроС).

**Наши задачі на комп'ютерний практикум та порядок їх виконання:**

- 1) Роздітися на бригади. Визначили хто за що відповідатиме. Богдан – займається реалізацією алгоритму TiGER, Олексій – теоретичною частиною і звітом загалом.
- 2) Провести теоретичне дослідження теми, надавши вичерпний та повний опис теоретичної сторони алгоритму з усіма деталями та відомими результатами досліджень; провести аналіз вже існуючих атак на алгоритм TiGER, а також загалом можливих атак; виконати порівняльний аналіз нашого алгоритму зі схожими та дослідити можливість перенесення та застосування відомих атак на нього.
- 3) Реалізувати алгоритм програмно та всі(нє, ну ми постараємося) можливі варіанти цього алгоритму;
- 4) Перевірити коректність – підтвердити правильність реалізації за допомогою тестів, використавши тестові дані з офіційної реалізації;
- 5) Зробити аналіз продуктивності алгоритму та, знову ж таки, провести порівняння та аналіз швидкодії за різних умов, дослідити вплив модифікацій окремих його складових частин на ефективність.

# Розділ 2

## Загальне теоретичне дослідження

### 2.1 Постквантова криптографія

Сучасна криптографія з відкритим ключем, зокрема RSA та криптографія на еліптичних кривих – Elliptic Curve Cryptography (ECC), базується на обчислювальній складності задач факторизації великих чисел та дискретного логарифмування. Однак у 1994 році Пітер Шор [1] продемонстрував квантові алгоритми, здатні розв'язувати ці задачі за поліноміальний час на достатньо потужному квантовому комп'ютері. Це створює критичну загрозу для існуючої криптографічної інфраструктури.

Постквантова криптографія (Post-Quantum Cryptography, PQC) – це галузь криптографії, що розробляє алгоритми, стійкі як до класичних, так і до квантових атак. Серед основних напрямків PQC виділяють криптографію на решітках, криптографію на кодах виправлення помилок, багатовимірну поліноміальну(квадратичну) криптографію та криптографію на основі геш-функцій [2].

### 2.2 Передумови створення TiGER

Механізм інкапсуляції ключа (Key Encapsulation Mechanism, KEM) є одним з найважливіших криптографічних примітивів для захищеного обміну ключами. У контексті заміни класичних протоколів, таких як Diffie-Hellman (DH) або Elliptic Curve Diffie-Hellman ECDH, постквантові KEM повинні забезпечувати не лише високий рівень безпеки, але й бути ефективними за розміром даних та залишатися обчислювано складними для зламу зловмисником.

Криптографія на решітках, зокрема алгоритми на основі задач Learning With Errors (LWE) [3] та Ring Learning With Errors (RLWE) [4], продемонструвала перспективність у створенні ефективних постквантових схем. Розвиток цього напрямку привів до появи сімейства алгоритмів, що використовують детермінований варіант – Learning With Rounding (LWR) [5], який замінює випадкову помилку округленням, що покращує як продуктивність, так і довжину шифротексту.

Серед попередніх розробок слід відзначити алгоритми Lizard [6] та RLizard [7], які комбінували RLWE для генерації ключів з RLWR для шифрування, досягаючи балансу між безпекою та ефективністю. Однак ці схеми мали певні обмеження щодо розміру відкритого ключа та шифротексту, що ускладнювало їх інтеграцію в існуючі протоколи.

TiGER (Tiny bandwidth key encapsulation mechanism for easy miGration based on RLWE(R)) [8] був розроблений командою дослідників з метою створення компактного та ефективного KEM, придатного для легкої інтеграції в існуючі системи безпеки. Основні задачі, які ставили перед собою науковці це:

- **Мінімізація розміру шифротексту та відкритого ключа**
- **Висока обчислювальна ефективність** — використання в якості модуля числа, яке є степенем двійки ( $q = 2^k$ ) (для оптимізації операцій округлення через побітові зсуви);
- **Відмова від NTT** — алгоритм не використовує Number Theoretic Transform, що спрощує реалізацію;
- **Використання розріджених секретів (з малою вагою Геммінга)** — зменшення розміру секретного ключа та прискорення множення многочленів;
- **Корекція помилок** — застосування кодів XEf та D2 для зниження ймовірності помилки розшифрування.

Конструкція TiGER базується на комбінації RLWR для генерації відкритого ключа та RLWE для шифрування, з подальшим застосуванням перетворення Fujisaki-Otakamoto [9, 10] для досягнення IND-CCA безпеки.

## 2.3 Участь у КроС та злиття з SMAUG

У 2022 році Національна служба розвідки Республіки Корея ініціювала Korean Post-Quantum Cryptography Competition скорочено – КроС [11]. Це національний конкурс для стандартизації постквантових криптографічних алгоритмів.

Обраний нами для аналізу алгоритм TiGER був поданий на перший раунд конкурсу КроС у категорії механізмів інкапсуляції ключа (KEM) і був одним з чотирьох алгоритмів, які пройшли до другого раунду.

### 2.3.1 Злиття TiGER та SMAUG

Команди TiGER та SMAUG об'єдналися для створення спільногого алгоритму SMAUG-T [12]. Метою злиття було поєднання переваг обох підходів:

- Від **TiGER**: Компактність шифротексту, використання RLWE/RLWR на кільцевому рівні, корекція помилок через D2 кодування (для параметра TiMER);
- Від **SMAUG**: Модульна структура (MLWE/MLWR), розрідженні секрети через використання гаусівського шуму, покращена безпека за рахунок збільшення розмірності.

Результатом злиття став алгоритм SMAUG-T версії 3.0 (лютий 2024), який включає в себе:

- Три основні набори параметрів: **SMAUG-T128**, **SMAUG-T192**, **SMAUG-T256** (відповідають рівням безпеки NIST 1, 3, 5);
- Додатковий набір параметрів **TiMER** (Tiny SMAUG using Error Reconciliation) – оптимізований для IoT(Internet of Thing)-пристроїв з мінімальним шифротекстом завдяки використанню D2 кодування з TiGER.

## **2.3.2 Результати КрqС 2023**

У січні 2025 року було оголошено фінальні результати конкурсу КрqС. Переможцями стали:

- У категорії KEM: **SMAUG-T** та **NTRU+**;
- У категорії цифрового підпису: **HAETAE** (до речі, також від команди SMAUG).

Таким чином, ідеї та технології TiGER увійшли до складу національного стандарту постквантової криптографії Кореї через алгоритм SMAUG-T.

# Розділ 3

## Теоретична база алгоритму TiGER

### 3.1 Алгебраїчні структури

Криптографія на решітках (Lattice-based cryptography) використовує алгебраїчні структури для забезпечення ефективності обчислень та компактності представлення даних. У цьому розділі я розпишу основні алгебраїчні об'єкти, що застосовуються в алгоритмі TiGER.

#### 3.1.1 Кільце та многочлени

**Означення 3.1.1** (Кільце).

Кільце ( $R, +, \cdot$ ) – це множина з двома операціями: додавання (+) та множення ( $\cdot$ ), що задоволяє наступні властивості:

1.  $(R, +)$  є абелевою групою за додаванням. Нейтральний елемент 0;
2. Множення є асоціативним:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ,  $\forall a, b, c \in R$ ;
3. Дистрибутивність:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  та  $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ ,  $\forall a, b, c \in R$ ;
4. Існує нейтральний елемент за множенням:  $1 \in R$  такий, що  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ ,  $\forall a \in R$ .

Якщо ще  $a \cdot b = b \cdot a$ ,  $\forall a, b \in R$ , то таке кільце називається комутативним.

**Означення 3.1.2** (Кільце многочленів).

Нехай  $R$  – комутативне кільце з одиницею. Кільце многочленів  $R[x]$  складається з усіх виразів виду

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

де  $\forall i : a_i \in R$ ,  $a_n \neq 0$  та  $n \in \mathbb{Z}$ .

Число  $n$  називається степенем многочлена  $f(x)$ , позначається  $\deg(f)$ .

Операції додавання та множення многочленів наступним чином:

- $(f + g)(x) = \sum_{i=0}^{\max(\deg(f), \deg(g))} (a_i + b_i)x^i$ , де  $a_i, b_i$  – коефіцієнти  $f$  та  $g$  відповідно;
- $(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{\deg(f)+\deg(g)} c_k x^k$ , де  $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ .

### 3.1.2 Факторкільця многочленів

**Означення 3.1.3** (Факторкільце).

Нехай  $R$  – кільце та  $I$  – його ідеал. Факторкільце  $R/I$  складається з класів еквівалентності  $a + I = \{a + r : r \in I\}$  для  $a \in R$ , з операціями:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \quad (a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I.$$

У Lattice-based cryptography найчастіше використовується факторкільце многочленів за ідеалом, що породжений циклотомічним многочленом.

**Означення 3.1.4** (Циклотомічний многочлен).

$n$ -ий циклотомічний многочлен (Cyclotomic polynomial)  $\Phi_n(x)$  визначається як мінімальний многочлен над  $\mathbb{Q}$ , коренями якого є примітивні корені  $n$ -го степеня з одиницею:

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k, n) = 1}} (x - e^{2\pi i k/n}).$$

**Лема 3.1.1.** Для  $n = 2^k$ , де  $k \in \mathbb{N}$ , циклотомічний многочлен має вигляд:

$$\Phi_n(x) = x^{n/2} + 1.$$

Доведення: При  $n = 2^k$  примітивними коренями  $n$ -го степеня з одиницею є  $e^{2\pi i m/n}$  для непарних  $m$ . З  $(x^{n/2} + 1) = (x^n - 1)/(x^{n/2} - 1)$  випливає твердження леми.  $\square$

### 3.1.3 Кільце многочленів у TiGER

В алгоритмі TiGER використовується кільце многочленів виду:

$$R_q = \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{(x^n + 1)},$$

де  $n$  – степінь двійки (зазвичай  $n = 512$  або  $n = 1024$ ), а  $q$  – модуль, що також є степенем двійки ( $q = 256$  у всіх варіаціях алгоритму TiGER).

Елементами  $R_q$  є многочлени степеня не вище  $n - 1$  з коефіцієнтами з  $\mathbb{Z}_q$ :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{Z}_q.$$

Вибір саме такого  $n$  та многочлена  $x^n + 1$  забезпечує:

- Ефективність множення многочленів (без потреби в NTT);
- Редукцію за модулем  $x^n + 1$ , що спрощує обчислення;
- Зв'язок з циклотомічними многочленами та решітковими задачами.

### 3.1.4 Операції в кільці $R_q$

Для  $f(x), g(x) \in R_q$  операції в кільці визначаються наступним чином:

**Додавання:** покоефіцієнтне за модулем  $q$ :

$$(f + g)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} ((f_i + g_i) \bmod q) x^i.$$

**Множення:** спочатку виконується звичайне множення многочленів, потім взяття за модулем  $(x^n + 1)$  та  $q$ . Оскільки  $x^n \equiv -1 \pmod{x^n + 1}$ , то маємо:

$$h_i = \left( \sum_{j=0}^i f_j g_{i-j} - \sum_{j=i+1}^{n-1} f_j g_{n+i-j} \right) \pmod{q},$$

де  $h(x) = (f \cdot g)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i x^i$ .

## 3.2 Задачі на решітках

Безпека TiGER базується на обчислювальній складності певних задач на решітках. У цьому підпункті зазначимо основні решіткові задачі, що лежать в основі постквантової криптографії.

### 3.2.1 Решітки та базові задачі

**Означення 3.2.1** (Решітка).

Нехай  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^n$  – лінійно незалежні вектори. Решітка  $\Lambda$ , породжена цими векторами, визначається як:

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{b}_i : a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Вектори  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  називаються базисом решітки, а  $m$  – розмірністю решітки.

**Означення 3.2.2** (Мінімальна відстань решітки(shortest vector)).

Мінімальна відстань решітки  $\Lambda$  визначається як:

$$\lambda_1(\Lambda) = \min_{\mathbf{v} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}} \|\mathbf{v}\|,$$

де  $\|\cdot\|$  – евклідова норма.

**Означення 3.2.3** (SVP).

*Shortest Vector Problem (SVP):* Для заданого базису решітки  $\Lambda$  знайти ненульовий вектор  $\mathbf{v} \in \Lambda$  такий, що  $\|\mathbf{v}\| = \lambda_1(\Lambda)$ .

SVP є NP-складною задачею [13]. Для криптографічних цілей часто використовується наступна версія:

**Означення 3.2.4** (Апроксимаційна задача SVP).

$\gamma$ -approximate SVP ( $\gamma$ -SVP): Для заданого базису решітки  $\Lambda$  та параметра наближення  $\gamma \geq 1$ , знайти ненульовий вектор  $\mathbf{v} \in \Lambda$  такий, що  $\|\mathbf{v}\| \leq \gamma \cdot \lambda_1(\Lambda)$ .

### 3.2.2 Задача Learning With Errors (LWE)

Задача Learning With Errors була введена Одедом Регевим у 2005 році [3] і стала основою для багатьох постквантових криптосистем.

### Означення 3.2.5 (LWE задача (search version)).

Нехай  $n, q \geq 1$  – цілі числа,  $\chi$  – розподіл ймовірностей на  $\mathbb{Z}_q$ . Пошукова задача  $LWE_{n,q,\chi}$  визначається наступним чином:

Для невідомого секрету  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_q^n$  та заданої послідовності пар  $(\mathbf{a}_i, b_i) \in \mathbb{Z}_q^n \times \mathbb{Z}_q$ , де

$$b_i = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{s} \rangle + e_i \pmod{q},$$

з випадково обраними  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{Z}_q^n$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – операція векторного добутку та  $e_i \xleftarrow{p} \chi$ , знайти секрет  $\mathbf{s}$ .

### Означення 3.2.6 (LWE задача (detection version)).

Розпізнавальна задача  $Decision-LWE_{n,q,\chi}$  полягає у розрізненні наступних двох розподілів:

- $(\mathbf{a}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle + e \pmod{q})$ , де  $\mathbf{a} \leftarrow \mathbb{Z}_q^n$ ,  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_q^n$  фіксоване,  $e \xleftarrow{p} \chi$ ;
- $(\mathbf{a}, u)$ , де  $\mathbf{a}, u$  – рівномірно розподілені на  $\mathbb{Z}_q^n$  та  $\mathbb{Z}_q$  відповідно.

### Теорема 3.2.1 (Регева).

Для певних параметрів  $n, q, \chi$ , розв’язання задачі  $Decision-LWE$  за поліноміальний час у середньому випадку еквівалентно розв’язанню наближеної задачі  $\gamma$ -SVP за квантовий поліноміальний час у найгіршому випадку для деякого  $\gamma = \tilde{O}(n/\sigma)$ .

## 3.2.3 Задача Ring Learning With Errors (RLWE)

Ring-LWE є алгебраїчною версією LWE, що вже використовує кільця многочленів для більшої ефективності [4].

### Означення 3.2.7 (RLWE задача).

Нехай  $R = \mathbb{Z}[x]/(x^n + 1)$ ,  $R_q = \mathbb{Z}_q[x]/(x^n + 1)$ , та  $\chi$  – розподіл ймовірностей на  $R_q$ . Розпізнавальна задача  $Decision-RLWE_{n,q,\chi}$  полягає у розрізненні наступних розподілів:

- $(a, a \cdot s + e)$ , де обрано  $a \in R_q$  (рівномірний розподіл),  $s \in R_q$  фіксоване,  $e \xleftarrow{p} \chi$ ;
- $(a, u)$ , де  $a, u$  обрані рівномірно з  $R_q$ .

Важливим є те, що RLWE дозволяє представляти  $n$  секретів (LWE-зразків) у вигляді одного многочлена в  $R_q$ , що значно зменшує розмір ключів та шифротекстів. Для TiGER використовується  $n \in \{512, 1024\}$  та  $q = 256$ .

## 3.2.4 Задача Learning With Rounding (LWR)

Learning With Rounding є детермінованим варіантом LWE, де замість додавання випадкової помилки використовується округлення [5].

### Означення 3.2.8 (LWR задача).

Нехай  $n, q, p$  – цілі числа,  $p < q$ . Визначимо функцію округлення  $\lfloor \cdot \rceil_p : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_p$  як

$$\lfloor x \rceil_p = \left\lfloor \frac{p}{q} \cdot x \right\rfloor \pmod{p},$$

де  $\lfloor \cdot \rceil$  позначатиме округлення до найближчого цілого.

Розпізнавальна задача  $Decision-LWR_{n,q,p}$  полягає у розрізненні наступних розподілів:

- $(\mathbf{a}, \lfloor \langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle \rfloor_p)$ , де  $\mathbf{a} \leftarrow \mathbb{Z}_q^n$ ,  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_q^n$  – фіксоване;
- $(\mathbf{a}, u)$ , де  $\mathbf{a} \leftarrow \mathbb{Z}_q^n$ ,  $u \leftarrow \mathbb{Z}_p$ .

**Теорема 3.2.2** (Редукція (взяття за модулем) LWR до LWE [5]). Для відповідних параметрів  $n, q, p$  та достатньо малого розподілу помилок  $\chi$ , задача  $\text{Decision-LWR}_{n,q,p}$  зводиться до задачі  $\text{Decision-LWE}_{n,q,\chi}$ .

**Зауваження.** (Ідея теореми) При достатньо великому відношенні  $q/p$ , округлення  $\lfloor \langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle \rfloor_p$  стає еквівалентно до додавання малої помилки округлення, яка розподілена майже рівномірно на інтервалі  $(-q/(2p), q/(2p)]$ .

### 3.2.5 Задача Ring Learning With Rounding (RLWR)

RLWR поєднує переваги RLWE (компактність – за рахунок алгебраїчної структури) та LWR (детермінованість, та відсутність потреби у відборі помилок(sampling)).

**Означення 3.2.9** (RLWR задача).

Нехай  $R_q = \mathbb{Z}_q[x]/(x^n + 1)$ ,  $R_p = \mathbb{Z}_p[x]/(x^n + 1)$ , де  $p < q$ . Функція округлення застосовуються для кожного коефіцієнта окремо:

$$\lfloor f \rceil_p = \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{p}{q} \cdot f_i \right\rfloor x^i \bmod p.$$

Розпізнавальна задача  $\text{Decision-RLWR}_{n,q,p}$  полягає у розрізненні:

- $(a, \lfloor a \cdot s \rceil_p)$ , де  $a \in R_q$  обрано рівномірно,  $s \in R_q$  фіксоване;
- $(a, u)$ , де  $a \in R_q$ ,  $u \in R_p$  обрані рівномірно.

**Твердження 3.2.1.**

При певних параметрах  $n, q, p$ , задача  $\text{RLWR}_{n,q,p}$  є не легшою за задачу  $\text{RLWE}_{n,q,\chi}$  з розподілом помилок  $\chi$ , що відповідає помилці округлення.

У TiGER використовується комбінація: RLWR – для генерації відкритого ключа (компактність) та RLWE – для шифрування (гнучкості у контролі помилок). Модулі обираються як степені двійки:  $q = 256$ ,  $p \in \{64, 128\}$ , що дозволяє реалізувати округлення через побітові зсуви. Про це поговоримо детальніше наступному, 4 розділі.

## 3.3 “Сімейство” алгоритмів на базі RLWE/RLWR

TiGER належить до сімейства алгоритмів на решітках, які базуються на задачах RLWE та RLWR. Опишемо основні алгоритми цього сімейства, які вплинули на дизайн TiGER (далі). Далі їх буде порівняно у розділі 6 та попередньо у таблиці 3.1.

### 3.3.1 Lizard

Lizard [6] був одним з перших алгоритмів, що комбінував у собі LWE та LWR для досягнення балансу між безпекою та ефективністю.

**Основні характеристики:**

- **Структура:** LWE для генерації відкритого ключа, LWR для шифрування;

- **Простір:** Цілочисельні решітки над  $\mathbb{Z}_q^n$  без використання кільцевої структури;
- **Модуль:** Малий модуль  $q$  для покращення коректності;
- **Розміри:** Великі ключі (через відсутність алгебраїчної структури).

#### **Переваги:**

- Консервативна безпека (базується на стандартній LWE);
- Низька ймовірність помилки розшифрування.

#### **Недоліки:**

- Великі розміри ключів та шифротекстів;
- Повільніше множення векторів (порівняно з кільцевими варіантами).

### **3.3.2 RLizard**

RLizard [7] є кільцевою версією попереднього алгоритму, оптимізованою для IoT-пристроїв.

#### **Основні характеристики:**

- **Структура:** RLWE для генерації ключів, RLWR для шифрування;
- **Простір:**  $R_q = \mathbb{Z}_q[x]/(x^n + 1)$ ,  $n = 512$  або  $n = 1024$ ;
- **Модуль:** Малий модуль  $q$  (наприклад,  $q = 1024$ );
- **Помилки:** Дискретний гаусівський розподіл помилок з високою точністю (CDT-sampling).

#### **Переваги:**

- Компактні ключі та шифротексти завдяки кільцевій структурі;
- Швидке шифрування/розшифрування;
- Висока коректність;
- Підходить для пристроїв з обмеженим ресурсом.

#### **Недоліки:**

- Відносно велика пропускна здатність порівняно з найкомпактнішими схемами;
- Залежність від якісного (справді випадкового) семплювання гаусівських помилок.

### **3.3.3 CRYSTALS-Kyber**

Kyber [14] є одним з фіналістів конкурсу NIST PQC і базується на Module-LWE (MLWE).

#### **Основні характеристики:**

- **Структура:** MLWE для обох операцій – генерації ключів та шифрування повідомлення;
- **Простір:** Модульні решітки  $R_q^k$ , де  $k \in \{2, 3, 4\}$  (залежно від рівня безпеки);

- **Модуль:**  $q = 3329$  (просте число для ефективного NTT);
- **Оптимізація:** Number Theoretic Transform (NTT) для швидкого множення многочленів (хах, тут порівнюючи з чим саме і що вважати швидко);
- **Компресія:** Агресивне "стиснення" шифротексту.

**Переваги:**

- Стандартизовано під NIST (FIPS 203);
- Непоганий баланс між розмірами, швидкістю та безпекою;
- Ефективна реалізація з NTT.

**Недоліки:**

- Використання простого модуля ускладнює деякі оптимізації;
- Більший шифротекст порівняно з деякими MLWR-схемами.

### 3.3.4 Saber

Saber [15] є Module-LWR схемою, фіналістом NIST PQC Round 3.

**Основні характеристики:**

- **Структура:** MLWR для обох операцій;
- **Простір:** Модульні решітки  $R_q^k$ ,  $k \in \{2, 3, 4\}$ ;
- **Модуль:**  $q = 8192 = 2^{13}$ ;
- **Оптимізація:** Відсутність NTT (округлення завдяки побітовим операціям);
- **Помилки:** Детермініновані (через застосування округлення).

**Переваги:**

- Компактний шифротекст;
- Простота реалізації (без потреби в NTT чи гаусівському семплюванні);
- Ефективні побітові операції;
- Хороша стійкість до side-channel атак.

**Недоліки:**

- Більший(за розміром) відкритий ключ порівняно з Kyber;

### 3.3.5 Порівняння алгоритмів, і що з них взяв TiGER

Характеристика	Lizard	RLizard	Kyber	Saber
Структура	LWE/LWR	RLWE/RLWR	MLWE	MLWR
Розмірність	$n$	$n$	$n \times k$	$n \times k$
Модуль $q$	малий	малий	3329	8192
NTT	Hi	Hi	Так	Hi
Семплювання	Гаусс	Гаусс/CDT	Centered binomial	Округлення
Компресія	Помірна	Помірна	Агресивна	Помірна

Таблиця 3.1: Порівняння підходів у сімействі RLWE/RLWR алгоритмів

TiGER об'єднує в собі найкращі ідеї з попередніх доборок:

#### Позиція TiGER:

- Базується на **RLWE/RLWR** (як RLizard);
- Використовує **степені двійки** для  $q, p$  (як Saber);
- **Розрідженні секрети** для ефективності;
- **Корекція помилок** (XEf, D2) для мінімізації DFP/R;
- **Без NTT** для простоти;
- Фокусування на **мінімальному шифротексті** для легшого впровадження в існуючі протоколи.

## 3.4 Криптографічні примітиви

У цій частині розділу розглянемо базові криптографічні примітиви, що використовуються для безпосередньо при побудові TiGER: схеми шифрування з відкритим ключем (PKE) та механізми інкапсуляції ключа (KEM).

### 3.4.1 Схема шифрування з відкритим ключем (PKE)

#### Означення 3.4.1 (PKE схема).

Схема шифрування з відкритим ключем (*Public Key Encryption, PKE*) складається з трьох алгоритмів:

- $\text{KeyGen}(1^\lambda) \rightarrow (\text{pk}, \text{sk})$  — ймовірнісний алгоритм генерації ключів, що на вході приймає параметр безпеки  $\lambda$  і повертає пару: відкритий ключ  $\text{pk}$  та секретний ключ  $\text{sk}$ ;
- $\text{Enc}(\text{pk}, m; r) \rightarrow c$  — ймовірнісний алгоритм шифрування, що приймає відкритий ключ  $\text{pk}$ , повідомлення  $m$  з простору повідомлень  $\mathcal{M}$  та випадкове число  $r$ , і повертає шифротекст  $c$ ;

- $\text{Dec}(\text{sk}, c) \rightarrow m'$  — детермінінований алгоритм розшифрування, що приймає секретний ключ  $\text{sk}$  і шифротекст  $c$ , та повертає повідомлення  $m'$  або помилку  $\perp$ .

**Означення 3.4.2** (Коректність РКЕ).

РКЕ схема є  $(1 - \delta)$ -коректною, якщо для будь-якої пари ключів  $(\text{pk}, \text{sk}) \leftarrow \text{KeyGen}(1^\lambda)$  та будь-якого повідомлення  $m \in \mathcal{M}$  виконується:

$$\mathbb{P}[\text{Dec}(\text{sk}, \text{Enc}(\text{pk}, m)) \neq m] \leq \delta,$$

де ймовірність визначається через випадковість алгоритму  $\text{Enc}$ . Параметр  $\delta$  називається ймовірністю помилки розшифрування (Decryption Failure Probability/Rate, DFP/R)

У задачах на решітках, через наявність помилок у RLWE/RLWR, коректність не завжди є ідеальною. Тому для практичних застосувань необхідно, щоб  $\delta$  було незначним ( $\delta \leq 2^{-128}$ ).

### 3.4.2 Механізм інкапсуляції ключа (КЕМ)

**Означення 3.4.3** (КЕМ схема).

Механізм інкапсуляції ключа (Key Encapsulation Mechanism, КЕМ) складається з трьох кроків:

- $\text{KeyGen}(1^\lambda) \rightarrow (\text{pk}, \text{sk})$  — алгоритм генерації ключів (аналогічно до РКЕ);
- $\text{Encaps}(\text{pk}) \rightarrow (c, K)$  — ймовірнісний алгоритм інкапсуляції, що приймає відкритий ключ  $\text{pk}$  і повертає шифротекст  $c$  та спільний секретний ключ  $K \in \mathcal{K}$ ;
- $\text{Decaps}(\text{sk}, c) \rightarrow K'$  — детермінінований алгоритм декапсуляції, що приймає секретний ключ  $\text{sk}$  і шифротекст  $c$ , та повертає прихований секретний ключ  $K'$  або символ помилки  $\perp$ .

**Означення 3.4.4** (Коректність КЕМ).

КЕМ схема є  $(1 - \delta)$ -коректною, якщо для будь-якої пари ключів  $(\text{pk}, \text{sk}) \leftarrow \text{KeyGen}(1^\lambda)$  справджується таке:

$$\mathbb{P}[\text{Decaps}(\text{sk}, c) \neq K : (c, K) \leftarrow \text{Encaps}(\text{pk})] \leq \delta.$$

### 3.4.3 Побудова КЕМ з РКЕ

Стандартний спосіб побудови КЕМ з РКЕ полягає у шифруванні випадкового повідомлення та використанні геш-функції для отримання спільногого ключа.

**Твердження 3.4.1** (Нативна побудова КЕМ).

Нехай РКЕ =  $(\text{KeyGen}, \text{Enc}, \text{Dec})$  — РКЕ це ось така трійка, що містить у собі простір повідомлень  $\mathcal{M}$ , та  $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{K}$  — деяка геш-функція. Тоді можна побудувати КЕМ таким способом:

- Спосіб генерації KeyGen такий же, як у РКЕ;
- $\text{Encaps}(\text{pk})$ : обирають  $m \in \mathcal{M}$ , а далі обчислюють  $c \leftarrow \text{Enc}(\text{pk}, m)$  та  $K \leftarrow H(m)$ . На виході отримано пару:  $(c, K)$ ;

- $\text{Decaps}(\text{sk}, c)$ : обчислюють  $m' \leftarrow \text{Dec}(\text{sk}, c)$  та на виході отримуємо  $K' \leftarrow H(m')$ .

Така побудова не забезпечує IND-CCA безпеки навіть якщо базова PKE схема є IND-CPA безпечною, але для нас головне щоб було зрозуміло як цей механізм працює). А для досягнення IND-CCA безпеки вже необхідно застосувати перетворення Fujisaki-Okamoto (розвглянемо його у секції 3.6).

### 3.4.4 Криптографічні геш-функції

**Означення 3.4.5** (Криптографічна геш-функція).

Функція  $H : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^n$  називається криптографічною геш-функцією, якщо вона задовільняє наступні умови:

1. **Стійкість до знаходження прообразу:** Для випадкового  $y \in \{0, 1\}^n$  обчислювано важко знайти  $x$  такий, що  $H(x) = y$ ;
2. **Стійкість до знаходження другого прообразу:** Для заданого  $x$  обчислювано важко знайти  $x' \neq x$  такий, що  $H(x') = H(x)$ ;
3. **Стійкість до колізій:** Обчислювано важко знайти дві різні величини  $x, x'$  такі, що  $H(x) = H(x')$ .

У TiGER використовуються геш-функції з сімейства SHA-3 – SHAKЕ256 (або SHA3-256) для генерації випадковості, обчислення спільних ключів та інших криптографічних операцій. SHAKЕ256 є функцією з розширенним виходом (XOF), що дозволяє генерувати вихід довільної довжини.

### 3.4.5 Зв’язок PKE та KEM у TiGER

TiGER складається з двох рівнів:

1. **TiGER.PKE** – являє собою базову IND-CPA безпечну схему шифрування, що базується на RLWE(R);
2. **TiGER.KEM** – KEM, отриманий застосуванням перетворення Fujisaki-Okamoto (FO) до TiGER.PKE для досягнення IND-CCA безпеки.

Це дозволяє:

- Окремо аналізувати безпеку PKE (на базі RLWE/RLWR);
- Використовувати загальні результати про перетворення FO для доведення IND-CCA безпеки KEM;

## 3.5 Основні поняття безпеки, що стосуються TiGER

### 3.5.1 IND-CPA безпека

**Означення 3.5.1** (IND-CPA (Indistinguishability under Chosen-Plaintext Attack) гра для PKE).

Розглянемо наступну "гру" між претендентом (*challenger*)  $\mathcal{C}$  та супротивником (*adversary*)  $\mathcal{A}$ :

1.  $\mathcal{C}$  генерує  $(\text{pk}, \text{sk}) \leftarrow \text{KeyGen}(1^\lambda)$  і передає  $\text{pk}$  супротивнику  $\mathcal{A}$ ;
2.  $\mathcal{A}$  обирає два повідомлення  $m_0, m_1 \in \mathcal{M}$  однакової довжини і передає їх  $\mathcal{C}$ ;
3.  $\mathcal{C}$  Випадковим чином обирає біт  $b \xleftarrow{p} \{0, 1\}$ , обчислює  $c \leftarrow \text{Enc}(\text{pk}, m_b)$  і передає  $c$  супротивнику  $\mathcal{A}$ ;
4.  $\mathcal{A}$  виводить біт  $b'$ .

Перевага супротивника визначається наступним чином:

$$\text{Adv}_{\text{PKE}}^{\text{IND-CPA}}(\mathcal{A}) = \left| \mathbb{P}[b' = b] - \frac{1}{2} \right| + \varepsilon(\lambda).$$

PKE схема є IND-CPA безпечною, якщо для будь-якого ефективного (PPT) супротивника  $\mathcal{A}$  перевага  $\text{Adv}_{\text{PKE}}^{\text{IND-CPA}}(\mathcal{A})$  є незначною функцією від  $\lambda$ .

IND-CPA безпечність означає нерозрізnenість шифротекстів: супротивник маючи доступ до відкритого ключа (а отже, має можливість шифрувати будь-які повідомлення), не може визначити, яке з двох повідомень було зашифроване. Це вимагає від шифрування, щоб воно було ймовірнісним.

**Означення 3.5.2** (IND-CPA (Indistinguishability under Chosen-Plaintext Attack) безпека для KEM).

Для KEM "гра" IND-CPA визначається аналогічно:

1.  $\mathcal{C}$  генерує пару  $(\text{pk}, \text{sk}) \leftarrow \text{KeyGen}(1^\lambda)$  і передає  $\text{pk}$  супротивнику  $\mathcal{A}$ ;
2.  $\mathcal{C}$  обирає  $b \xleftarrow{p} \{0, 1\}$ . Якщо обрано  $b = 0$ , то обчислює  $(c, K_0) \leftarrow \text{Encaps}(\text{pk})$ ; а якщо  $b = 1$ , обчислює  $(c, K_0) \leftarrow \text{Encaps}(\text{pk})$  та  $K_1 \xleftarrow{p} \mathcal{K}$ . Опісля передає пару  $(c, K_b)$  супротивнику;
3.  $\mathcal{A}$  виводить біт  $b'$ .

Перевага супротивника  $\text{Adv}_{\text{KEM}}^{\text{IND-CPA}}(\mathcal{A})$  визначається аналогічно як і в PKE.

Безпека KEM тісно пов'язана з:

- IND-CPA безпекою базової PKE схеми;
- Ймовірністю помилки розшифрування  $\varepsilon$ ;
- Параметрами випадкових оракулів (про трохи далі).

Важливим є те, що навіть за наявності помилок розшифрування (що неминуче для схем на решітках), можна довести IND-CCA безпеку за умови достатньо малого  $\varepsilon(\lambda)$ .

### 3.5.2 IND-CCA безпека

**Означення 3.5.3** (IND-CCA для PKE).

"Гра" IND-CCA відрізняється від IND-CPA тим, що противник  $\mathcal{A}$  має додатково доступ до оракула десифратора (decryption oracle)  $\text{Dec}(\text{sk}, \cdot)$ :

1.  $\mathcal{C}$  генерує  $(\text{pk}, \text{sk}) \leftarrow \text{KeyGen}(1^\lambda)$  і передає  $\text{pk}$  супротивнику  $\mathcal{A}$ ;

2.  $\mathcal{A}$  робить запити до оракула дешифрування, подаючи на вхід довільні шифротексти  $c_i$  і отримувати  $m_i = \text{Dec}(\text{sk}, c_i)$ ;
3.  $\mathcal{A}$  обирає  $m_0, m_1$  і отримує challenge шифротекст  $c^* \leftarrow \text{Enc}(\text{pk}, m_b)$  для випадкового  $b$ ;
4.  $\mathcal{A}$  продовжує робити запити до оракула дешифрування, але не може запитувати  $c^*$  – випадок **IND-CCA2** (а якщо запити заборонені вже після отримання  $c^*$  – це **IND-CCA1**);
5.  $\mathcal{A}$  виводить біт  $b'$ .

Перевага  $\text{Adv}_{\text{PKE}}^{\text{IND-CCA}}(\mathcal{A})$  визначається аналогічно.

**Означення 3.5.4** (IND-CCA безпека для KEM).

Для KEM схеми противник має доступ до оракула декапсуляції  $\text{Decaps}(\text{sk}, \cdot)$  і **не може** запитувати challenge шифротекст  $c^*$  після його отримання.

IND-CCA (Indistinguishability under Chosen Ciphertext Attack) безпека є значно сильнішою, ніж IND-CPA, оскільки моделює активного противника, який може маніпулювати шифротекстами та спостерігати результати дешифрування. Для практичних застосувань зазвичай потрібна IND-CCA2 безпека.

### 3.5.3 Ймовірність помилки розшифрування (DFP/R)

**Означення 3.5.5** (Decryption Failure Probability/Rate).

Для PKE схеми ймовірність помилки розшифрування (DFP/R) визначається як:

$$\delta = \max_{m \in \mathcal{M}} \mathbb{P}_{(\text{pk}, \text{sk}), r} [\text{Dec}(\text{sk}, \text{Enc}(\text{pk}, m; r)) \neq m],$$

де ймовірність береться за випадковістю генерації ключів та шифрування.

Для KEM схеми:

$$\delta = \mathbb{P}_{(\text{pk}, \text{sk}), (c, K)} [\text{Decaps}(\text{sk}, c) \neq K].$$

У решіткових схемах помилки розшифрування виникають природнім шляхом (наявність шуму у RLWE/RLWR), тому параметри схеми (розміри модулів, розподіл помилок, коефіцієнт стиснення) мають бути підібрані так, щоб забезпечити мале  $\delta$ . (!) Висока ймовірність помилки розшифрування може привести до наступних атак:

- **Failure boosting attacks [16]:** Супротивник може ітеративно створювати шифротексти, що мають високу ймовірність помилки, щоб витягувати поступово інформацію про секретний ключ;
- **Multi-target attacks [17]:** При наявності багатьох публічних ключів або сесій, навіть відносно мала DFP/R може стати проблемою.

Для реалізацій TiGER цільова DFP/R становить:

- TiGER128:  $\delta \approx 2^{-120}$ ;
- TiGER192:  $\delta \approx 2^{-136}$ ;
- TiGER256:  $\delta \approx 2^{-167}$ .

P.S. Ці значення вважаються достатньо малими для практичного застосування.

### 3.5.4 Квантова безпека а.к.а. QROM

**Означення 3.5.6** (Quantum Random Oracle Model).

Модель квантового випадкового оракула (скорочено *QROM*) – це розширення класичної моделі випадкового оракула (*ROM*), де противник має квантовий доступ до геш-функцій, тобто може ще робити запити у суперпозиції.

Для TiGER необхідно, щоб перетворення Fujisaki-Okamoto забезпечувало IND-CCA безпеку у *QROM*, це гарантуватиме стійкість проти квантових атак.

## 3.6 Перетворення Fujisaki-Okamoto

Перетворення Fujisaki-Okamoto (скорочено *FO*) [9, 10] є загальним методом перетворення IND-CPA безпечної PKE схеми у IND-CCA безпечну KEM схему. В цьому підпункті наведемо просте класичне *FO* перетворення та його модифікацію – варіант з неявним відхиленням, що використовується в TiGER.

### 3.6.1 Класичне перетворення *FO*

**Теорема 3.6.1** (Fujisaki-Okamoto).

Нехай  $\text{PKE} = (\text{KeyGen}, \text{Enc}, \text{Dec})$  – IND-CPA безпечна PKE схема з однозначним детермінованим розшифруванням. Нехай  $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{K}$  та  $H : \mathcal{M} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$  – випадкові оракули. Тоді наступна конструкція є IND-CCA безпечною KEM у моделі випадкового оракула [9]:

**Algorithm 1**  $\text{KeyGen}()$

- 1: Generate  $(pk, sk) \leftarrow \text{PKE.KeyGen}(1^\lambda)$
- 2: **return**  $(pk, sk)$

**Algorithm 2**  $\text{Encaps}(pk)$

- 1: Choose  $m \xleftarrow{p} \mathcal{M}$
- 2: Calculate  $(r, K) \leftarrow G(m)$
- 3: Calculate  $c \leftarrow \text{PKE.Enc}(pk, m; r)$
- 4: **return**  $(c, K)$

**Algorithm 3**  $\text{Decaps}(sk, c)$

- 1: Calculate  $m' \leftarrow \text{PKE.Dec}(sk, c)$
- 2: Calculate  $(r', K') \leftarrow G(m')$
- 3: Calculate  $c' \leftarrow \text{PKE.Enc}(pk, m'; r')$
- 4: **if**  $c = c'$  **then**
- 5:     **return**  $K'$
- 6: **else**
- 7:     **return**  $\perp$
- 8: **end if**

**Ключова ідея перетворення FO** полягає у **повторному шифруванні** (re-encryption): після розшифрування повідомлення  $m'$  воно повторно шифрується з тією ж випадковістю, і результат порівнюється з отриманим шифротекстом. Це дозволяє виявити модифікації шифротексту.

### 3.6.2 Перетворення $\text{FO}_m^{\perp}$ з неявним відхиленням

Для схем на решітках з ненульовою ймовірністю помилки розшифрування було розроблено модифікацію – варіант FO з **неявним відхиленням** (implicit rejection) [18].

**Означення 3.6.1** (Перетворення  $\text{FO}_m^{\perp}$ ).

Нехай PKE – IND-CPA безпечна PKE схема. Конструкція  $\text{FO}_m^{\perp}$  відрізняється від класичного FO у додатковій декапсуляції:

**Algorithm 4** KeyGen()

- 1: Generate  $(pk, sk') \leftarrow \text{PKE.KeyGen}(1^\lambda)$
- 2: Choose  $z \xleftarrow{p} \mathcal{Z}$  ▷ Додатковий випадковий ключ
- 3: **return**  $(pk, sk = (sk', z))$

**Algorithm 5** Encaps( $pk$ )

- 1: Choose  $m \xleftarrow{p} \mathcal{M}$
- 2: Calculate  $r \leftarrow G(m, pk)$
- 3: Calculate  $c \leftarrow \text{PKE.Enc}(pk, m; r)$
- 4: Calculate  $K \leftarrow H(m, c)$
- 5: **return**  $(c, K)$

**Algorithm 6** Decaps( $sk, c$ )

- 1: Split  $sk = (sk', z)$
- 2: Calculate  $m' \leftarrow \text{PKE.Dec}(sk', c)$
- 3: Calculate  $r' \leftarrow G(m', pk)$
- 4: Calculate  $c' \leftarrow \text{PKE.Enc}(pk, m'; r')$
- 5: **if**  $c = c'$  **then**
- 6:     **return**  $K' \leftarrow H(m', c)$
- 7: **else**
- 8:     **return**  $\bar{K} \leftarrow H(z, c)$  ▷ Неявне відхилення
- 9: **end if**

**Ключова відмінність:** замість повернення  $\perp$  при невдалій перевірці, алгоритм повертає псевдовипадковий ключ  $\bar{K} = H(z, c)$ , де  $z$  – секретний випадковий ключ. Це має дві переваги:

- **Захист від side-channel атак:** Оскільки зовнішньому спостерігачу стає важче визначити, чи відбулася помилка при декапсуляції;
- **Постійний час виконання:** Обидва варіанти (успіх/невдача) тепер виконують однакові операції гешування.

### 3.6.3 Застосування у алгоритмі TiGER

TiGER.KEM побудовано із застосуванням варіанту перетворення  $\text{FO}_m^{\perp}$  до TiGER.PKE:

- **TiGER.PKE:** Базується на RLWR (для відкритого ключа) та RLWE (для шифрування), забезпечує IND-CPA безпеку;
- **Геш-функції:** Використовуються  $G = H = \text{SHAKE256}$  (функція з розширенним виходом) для генерації випадковості та спільних ключів;
- **Додаткове гешування:** Відкритий ключ  $\text{pk}$  гешується разом з повідомленням:  $r \leftarrow G(m, H(\text{pk}))$ , що забезпечує захист від multi-target атак;
- **Неявне відхилення:** При невдалій декапсуляції повертається  $\bar{K} = H(z, c)$ , що захищає від витоку інформації про помилки та розкритті хоч і мізерної, та інформації, про ключ.

# Розділ 4

## Повний опис алгоритму TiGER

### 4.1 Загальна структура алгоритму

TiGER має модульну архітектуру, що складається з двох рівнів: базової схеми шифрування з відкритим ключем (TiGER.PKE) та механізму інкапсуляції ключа (TiGER.KEM), отриманого застосуванням перетворення Fujisaki-Okamoto до PKE схеми.

#### 4.1.1 Модульна побудова алгоритму

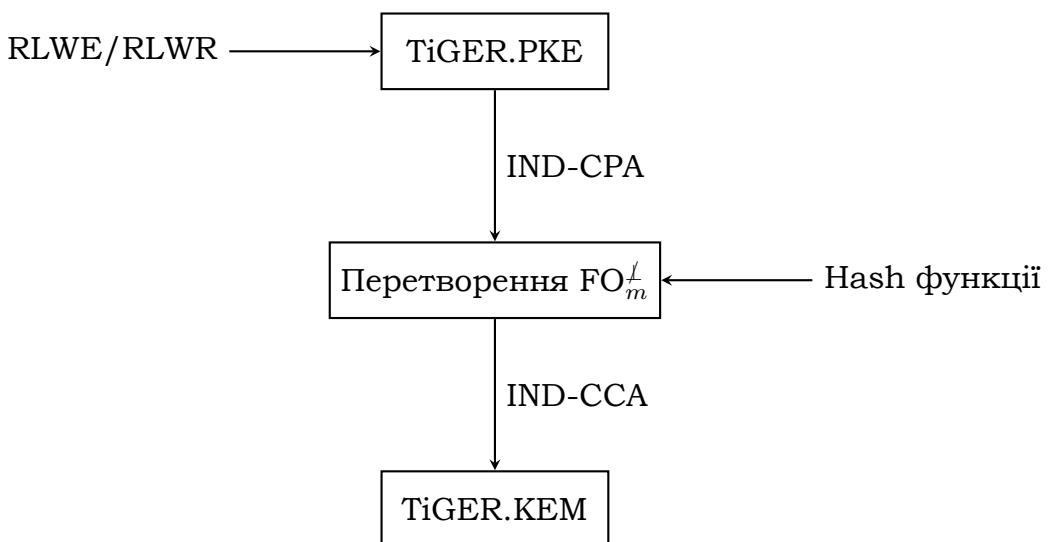


Рис. 4.1: Модульна структура TiGER

Конструкція TiGER базується на трьох наступних принципах:

- Перший крок – TiGER.PKE:** Схема шифрування з відкритим ключем, що використовує комбінацію RLWR для генерації відкритого ключа та RLWE для шифрування повідомень. На припущення складності RLWE та RLWR задача маємо IND-CPA безпеку.
- Перетворення  $FO_m^f$ :** Варіант перетворення Fujisaki-Okamoto з неявним відхиленням, що перетворює IND-CPA безпечну PKE схему в IND-CCA безпечну KEM схему використовує геш-функції SHAKE256 та SHA3-256 як випадкові оракули  $H : \mathcal{M} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ .

3. **Вихід – TiGER.KEM:** Повний механізм інкапсуляції ключа з IND-CCA безпекою у моделі квантового випадкового оракула (QROM), придатний для практичного використання у постквантових протоколах.

#### 4.1.2 Взаємодія між компонентами TiGER

Взаємодія між компонентами відбувається наступним чином:

##### Генерація ключів:

- TiGER.PKE генерує пару  $(\text{pk}, \text{sk}')$  використовуючи RLWR;
- TiGER.KEM додає випадковий ключ  $z$  до секретного ключа:  $\text{sk} = (\text{sk}', z)$ ;
- Відкритий ключ  $\text{pk}$  гешується для захисту від multi-target атак.

##### Інкапсуляція:

- Генерується випадкове повідомлення  $m$ ;
- геш-функція  $G$  обчислює детерміновану випадковість  $r$  з  $m$  та гешу  $\text{pk}$ ;
- TiGER.PKE шифрує  $m$  з випадковістю  $r$  і видає шифротекст  $c$ ;
- Спільний ключ  $K$  обчислюється як  $H(m, c)$ .

##### Декапсуляція:

- TiGER.PKE розшифровує шифротекст  $c$  та повертає повідомлення  $m'$ ;
- Виконується повторне шифрування (re-encryption)  $m'$  для перевірки цілісності;
- Якщо перевірка успішна, повертається  $K' = H(m', c)$ ;
- Якщо перевірка невдала, повертається псевдовипадковий ключ  $\bar{K} = H(z, c)$  (неявне відхилення).

## 4.2 Публічні параметри

TiGER визначає три набори параметрів, що відповідають трьом рівням безпеки згідно з класифікацією NIST: TiGER128 (рівень 1), TiGER192 (рівень 3) та TiGER256 (рівень 5). Розглянемо детальніше значення кожного параметра та обґрунтування їх вибору.

Параметр	TiGER128	TiGER192	TiGER256
$n$	512	1024	1024
$q$	$2^{14}$	$2^{15}$	$2^{16}$
$p$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{11}$
$k_1$ (бітів для $\mathbf{b}$ )	10	11	11
$k_2$ (бітів для $\mathbf{c}_1$ )	4	4	5
$h_s$	274	284	274
$h_r$	274	284	274
$h_e$	274	284	274
$d$ (для XEf)	8	8	9
$f$ (для D2)	2	2	2
$ \mathbf{pk} $ (кількість байт)	804	1568	1568
$ \mathbf{sk} $ (кількість байт)	1876	3680	3680
$ \mathbf{ct} $ (кількість байт)	804	1408	1600
Рівень безпеки NIST	1	3	5
Класична безпека (кількість біт)	143	207	272
Квантова безпека (кількість біт)	128	192	256
DFP	$2^{-120}$	$2^{-136}$	$2^{-167}$

Таблиця 4.1: Параметри TiGER для різних рівнів безпеки

### Структурні параметри:

- $n$  — степінь многочлена, що визначає розмірність поліноміального кільця  $R = \mathbb{Z}[x]/(x^n + 1)$ . Більше  $n$  забезпечує вищу безпеку, але і водночас збільшує обчислювальну складність та розміри ключів;
- $q$  — основний модуль, що визначає кільце  $R_q = R/qR$ . В даному алгоритмі обрано як степінь двійки для оптимізації операцій модульної арифметики.
- $p$  — модуль для RLWR округлення при генерації відкритого ключа. Задовільняє  $p < q$  та також є степенем двійки. Відношення  $q/p$  визначає рівень "шуму" від округлення.

### Параметри для стиснення:

- $k_1$  — кількість біт для представлення компонент вектора  $\mathbf{b}$  у відкритому ключі. Стиснення з  $\log_2 q$  до  $k_1$  біт зменшує розмір відкритого ключа;
- $k_2$  — кількість біт для представлення першої частини шифротексту  $\mathbf{c}_1$ . Агресивніша компресія зменшує розмір шифротексту, але збільшує ймовірність помилки розшифрування(!).

### Параметри розподілів помилок:

- $h_s$  — вага Геммінга (Hamming weight) секретного ключа  $\mathbf{s}$ . TiGER використовує розрідженні тернарні многочлени з коефіцієнтами  $\{-1, 0, 1\}$ , де рівно  $h_s$  коефіцієнтів є ненульовими;
- $h_r$  — вага Геммінга помилки  $\mathbf{r}$  при генерації відкритого ключа (RLWR);
- $h_e$  — вага Геммінга для помилок  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  при шифруванні (RLWE).

### **Параметри кодів корекції помилок:**

- $d$  — параметр коду XEf (extended XOR-based error correction). Визначає кількість біт повідомлення, які кодуються разом. Чим більше  $d$ , тим краща корекція помилок, але при цьому збільшуються обчислення;
- $f$  — параметр коду D2 (duplication code). Визначає частоту дублювання бітів повідомлення для додаткового захисту від помилок DFP/R.

Фактичні бітові розміри криптографічних об'єктів обчислюються наступним чином:

**Відкритий ключ**  $\text{pk} = (\rho, \mathbf{b})$ :

$$|\text{pk}| = 32 + n \cdot k_1 / 8 \text{ байт},$$

де 32 байти – розмір seed  $\rho$ , який використовується для генерації випадкового многочлена  $\mathbf{a} \in R_q$ . Замість зберігання повного многочлена  $\mathbf{a}$  (що займало б  $n \log_2 q$  біт) пам'яті, зберігається лише seed, з якого  $\mathbf{a}$  відновлюється за потреби. Компонента  $\mathbf{b}$  – це результат RLWR обчислення  $\mathbf{b} = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r}]_p$ , стиснута до  $k_1$  біта на кожен коефіцієнт.

**Секретний ключ**  $\text{sk} = (\text{sk}', z, h, \text{pk})$ :

$$|\text{sk}| = |\text{sk}'| + 32 + 32 + |\text{pk}| \text{ байт},$$

де  $\text{sk}'$  – зжате представлення розрідженої секратного ключа  $\mathbf{s}$ ,  $z$  та  $h$  – 32-байтові значення для FO перетворення.

**Шифротекст**  $\text{ct} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ :

$$|\text{ct}| = n \cdot k_2 / 8 + n / 8 \text{ байт}.$$

Параметри TiGER були підібрані розробниками з урахуванням наступних критеріїв:

1. **Безпека:** Забезпечують стійкість до відомих атак на RLWE/RLWR, включаючи атаки з використанням решіткових алгоритмів (BKZ, LatticeSieve) на класичних та квантових комп'ютерах. Запас безпеки становить 10-15 біт понад нормово;
2. **Коректність:** Ймовірність помилки розшифрування (DFP/R) не перевищує  $2^{-120}$  для всіх наборів параметрів, що є достатнім для практичного використання;
3. **Ефективність:** Вибір степенів двійки для модулів дозволяє використовувати швидкі побітові операції, а розрідженні секрети прискорюють множення многочленів;
4. **Компактність:** Параметри компресії  $(k_1, k_2)$  обрані так, щоб мінімізувати розміри при збереженні прийнятного рівня DFP/R. Коди корекції помилок дозволяють застосовувати агресивнішу компресію без погіршення коректності.

## **4.3 Допоміжні алгоритми**

TiGER використовує набір допоміжних алгоритмів для генерації випадкових величин, розширення seed-значень та корекції помилок.

1. **Алгоритм HWT<sub>h</sub>** відповідає за генерацію розрідженої тернарного многочлена з фіксованою вагою Геммінга.

**Algorithm 7**  $HWT_h$ 

- 1: Input: Seed  $\sigma \in \{0, 1\}^{256}$ , weight  $h \leq n$ .
- 2: Output: Поліном  $\mathbf{s} \in R$  з коефіцієнтами  $\{-1, 0, 1\}$  та рівно  $h$  ненульовими коефіцієнтами.

Алгоритм використовує SHAKE256 для генерації послідовності випадкових індексів та знаків. Спочатку обираються  $h$  різних позицій в діапазоні  $[0, n - 1]$ , потім дляожної позиції генерується випадковий знак  $\pm 1$ . Використовується метод rejection sampling для забезпечення рівномірного розподілу індексів. Виконується за константний час (з точністю до rejection sampling).

2. **Алгоритм** expandA — генерація псевдовипадкового многочлена  $\mathbf{a}$  з seed.

**Algorithm 8**  $HWT_h$ 

- 1: Input: Seed  $\rho \in \{0, 1\}^{256}$ .
- 2: Output: Многочлен  $\mathbf{a} \in R_q$  з рівномірно розподіленими коефіцієнтами.

Тут також використовується SHAKE256 як додаткова псевдовипадковості (PRG). Seed  $\rho$  розширяється до послідовності байтів, які інтерпретуються як коефіцієнти многочлена в  $\mathbb{Z}_q$ . Застосовується rejection sampling для забезпечення рівномірності: якщо згенероване значення  $\geq q$ , воно відкидається і генерується нове. Многочлен  $\mathbf{a}$  використовується у RLWR для обчислення відкритого ключа:  $\mathbf{b}$  та у RLWE при шифруванні.

Цей підхід дозволяє зберігати у відкритому ключі лише 32 байти seed замість повного многочлена, що займає  $n \log_2 q$  біт — для TiGER256 це  $1024 \times 16 = 16384$  біт = 2048 байт). Обидві сторони (відправник і отримувач) можуть незалежно відновити  $\mathbf{a}$  з  $\rho$ .

3. **Алгоритми корекції помилок** eccENC та eccDEC — кодування та декодування повідомлення для зниження DFP/R.

- Код XEf (XOR-based error correction with extension): Повідомлення розбивається на блоки по  $d$  біт. Для кожного блоку обчислюється біт парності як ксор (XOR) усіх біт блоку та додається до закодованого повідомлення. Це дозволяє виявити та виправити одиночні помилки в кожному блоці. При декодуванні для кожного блоку перевіряється цей біт парності. Якщо він не збігається, алгоритм намагається виправити помилку перебором всіх  $d$  позицій у блоці.
- Код D2 (Duplication code): Додатковий рівень захисту, що дублює кожен біт повідомлення  $f$  разів. При декодуванні використовується мажоритарне голосування (majority voting): якщо більшість копій біта мають значення 1, результат буде 1, інакше – 0.

TiGER застосовує спочатку код XEf, потім код D2, що дає двоетапну систему корекції помилок. Це дозволяє використовувати агресивнішу компресію шифротексту при збереженні низької DFP/R.

4. **Геш-функції** — використовуються для генерації випадковостей та обчислення спільних ключів у перетворенні FO.

- **SHAKE256**: Функція з розширенним виходом (XOF) зі стандарту SHA-3. Використовується першочергово як генератор псевдовипадковості (PRG) у  $\text{expandA}$  та  $\text{HWT}_h$ , функція  $G$  у перетворенні FO для отримання детермінованої випадковості з повідомлення та для генерації довгих послідовностей псевдовипадкових байтів.
- **SHA3-256**: Криптографічна геш-функція зі стандарту SHA-3. Використовується як функція  $H$  у перетворенні Fujisaki-Okamoto для обчислення спільного ключа  $K = H(m, c)$ , гешуванні відкритого ключа для захисту від multi-target атак та для генерації фінального спільного ключа фіксованого розміру (256 біт).

Обидві ці функції є частиною стандарту FIPS 202 (2015 р) та мають формальний аналіз безпеки. У моделі квантового випадкового оракула (QROM) вони моделюються як ідеальні випадкові функції та доступними супротивнику.

## 4.4 TiGER.PKE

TiGER.PKE це базова схема шифрування з відкритим ключем, що забезпечує IND-CPA безпеку. Схема використовує комбінацію RLWR для генерації відкритого ключа та RLWE для шифрування повідомень.

### 4.4.1 KeyGen – генерація ключів

Алгоритм генерації ключів створює пару відкритий&секретний ключ на основі RLWR.

#### Algorithm 9 TiGER.PKE.KeyGen()

```

1: Input: Параметри  $(n, q, p, h_s, h_r, k_1)$ 
2: Output: Відкритий ключ  $pk$ , секретний ключ  $sk$ 
3:
4: Generate seed  $\rho \xleftarrow{p} \{0, 1\}^{256}$ 
5: Generate seed  $\sigma_s \xleftarrow{p} \{0, 1\}^{256}$ 
6: Generate seed  $\sigma_r \xleftarrow{p} \{0, 1\}^{256}$ 
7:
8: a  $\leftarrow \text{expandA}(\rho)$                                 ▷ Expand seed в многочлен
9: s  $\leftarrow \text{HWT}_{h_s}(\sigma_s)$                       ▷ Sparse секретний ключ
10: r  $\leftarrow \text{HWT}_{h_r}(\sigma_r)$                       ▷ Sparse error
11:
12: b'  $\leftarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \in R_q$           ▷ RLWR обчислення
13: b'  $\leftarrow \lfloor \mathbf{b}' \cdot (p/q) \rfloor \in R_p$     ▷ Округлення за mod p
14: b  $\leftarrow \text{Compress}(\mathbf{b}', k_1)$                   ▷ Компресія до  $k_1$  біт
15:
16:  $pk \leftarrow (\rho, \mathbf{b})$ 
17:  $sk \leftarrow \sigma_s$                                      ▷ Save secret seed(!)
18: return  $(pk, sk)$ 
```

Кроки алгоритму (якщо словами):

- Генерація seeds:** Спершу створюються три незалежні 256-бітні seeds:

- $\rho$  — для генерації публічного многочлена  $\mathbf{a}$ ;
  - $\sigma_s$  — для генерації секретного ключа  $\mathbf{s}$ ;
  - $\sigma_r$  — для генерації помилки  $\mathbf{r}$ .
2. **Expand a:** Використовується алгоритм `expandA` для детермінованої генерації рівномірно випадкового многочлена  $\mathbf{a} \in R_q$  з seed  $\rho$ .
3. **Генерація розріджених многочленів:**
- Секретний ключ  $\mathbf{s}$  генерується як тернарний многочлен з вагою Геммінга  $h_s$ ;
  - Помилка  $\mathbf{r}$  аналогічно генерується з вагою  $h_r$ .
4. **RLWR:** Обчислюється  $\mathbf{b}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \in R_q$ , після чого виконується округлення до найближчого цілого модуля  $p$ :  $\lfloor \mathbf{b}' \cdot (p/q) \rfloor$ . Операція округлення вводить детермінований "шум", що замінює явну помилку в класичному RLWE.
5. **Компресія:** Многочлен  $\mathbf{b}'$  стискається з  $\log_2 p$  біт до  $k_1$  біт на коефіцієнт для зменшення розміру відкритого ключа.
6. **Формування ключів:** Відкритий ключ містить seed  $\rho$  та стиснений  $\mathbf{b}'$ , а секретний ключ зберігається у вигляді seed  $\sigma_s$ , з якого можна відновити  $\mathbf{s}$  за потреби.

#### 4.4.2 Encryption – шифрування

Алгоритм шифрування перетворює повідомлення в шифротекст використовуючи RLWE.

##### Algorithm 10 TiGER.PKE.Enc( $pk, m; r$ )

- 1: **Input:** Відкритий ключ  $pk = (\rho, \mathbf{b})$ , повідомлення  $m \in \{0, 1\}^{256}$ , випадковість  $r$
- 2: **Output:** Шифротекст  $ct = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$
- 3:
- 4: Parse seeds from  $r$ :  $(\sigma_{e_1}, \sigma_{e_2}) \leftarrow r$
- 5:
- 6:  $\mathbf{a} \leftarrow \text{expandA}(\rho)$  ▷ Відновлення  $\mathbf{a}$  з seed
- 7:  $\mathbf{b}' \leftarrow \text{Decompress}(\mathbf{b}, k_1)$  ▷ Декомпресія відкритого ключа
- 8:
- 9:  $\mathbf{e}_1 \leftarrow \text{HWT}_{h_e}(\sigma_{e_1})$  ▷ Генерація "помилок"
- 10:  $\mathbf{e}_2 \leftarrow \text{HWT}_{h_e}(\sigma_{e_2})$
- 11:
- 12:  $m' \leftarrow \text{eccENC}(m)$  ▷ Кодування з корекцією помилок
- 13:  $\mathbf{m} \leftarrow \text{Encode}(m')$  ▷ Перетворення біт в многочлен
- 14:
- 15:  $\mathbf{c}'_1 \leftarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \in R_q$  ▷ RLWE компонента
- 16:  $\mathbf{c}_1 \leftarrow \text{Compress}(\mathbf{c}'_1, k_2)$  ▷ Агресивна компресія
- 17:
- 18:  $\mathbf{c}'_2 \leftarrow \mathbf{b}' \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{m} \cdot \lfloor q/2 \rfloor \in R_q$  ▷ Повідомлення + шум
- 19:  $\mathbf{c}_2 \leftarrow \text{Compress}(\mathbf{c}'_2, 1)$  ▷ Компресія до 1 біт
- 20:
- 21: **return**  $ct = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$

Кроки алгоритму:

1. **Парсинг випадковості:** З детермінованої випадковості  $r$  (згенерованої через геш-функцію  $G$  у FO) отримуємо seeds для генерації помилок  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ .
2. **Відновлення відкритого ключа:**
  - Многочлен  $\mathbf{a}$  відновлюється з  $\rho$  seed;
  - Компресований  $\mathbf{b}$  декомпресується до  $\mathbf{b}' \in R_p$ .
3. **Генерація "помилок":** Створюються два розріджених тернарних многочлена  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  з вагою Геммінга  $h_e$  кожен.
4. **Підготовка повідомлення:**
  - Повідомлення  $m$  кодується через eccENC (коди XEf та D2) для захисту від помилок;
  - Закодоване повідомлення перетворюється в многочлен  $\mathbf{m} \in R$  з коефіцієнтами з  $\{0, 1\}$ ;
  - Множиться на  $\lfloor q/2 \rfloor$  для розміщення в "середині" модуля  $q$ .
5. **RLWE шифрування:**
  - $\mathbf{c}'_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  — "маскування" помилки  $\mathbf{e}_1$ ;
  - $\mathbf{c}'_2 = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{m} \cdot \lfloor q/2 \rfloor$  — зашифроване повідомлення.
6. **Компресія шифротексту:**
  - $\mathbf{c}_1$  стискається до  $k_2$  біт на коефіцієнт (агресивна компресія);
  - $\mathbf{c}_2$  стискається до 1 біт на коефіцієнт (зберігається лише знак).

#### 4.4.3 Decryption – розшифрування

Алгоритм розшифрування відновлює повідомлення з шифротексту використовуючи секретний ключ.

**Algorithm 11** TiGER.PKE.Dec( $sk, ct$ )

```

1: Input: Секретний ключ  $sk = \sigma_s$ , шифротекст  $ct = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ 
2: Output: Повідомлення  $m \in \{0, 1\}^{256}$  або  $\perp$ 
3:
4:  $\mathbf{s} \leftarrow \text{HWT}_{h_s}(\sigma_s)$   $\triangleright$  Відновлення sk з seed
5:
6:  $\mathbf{c}'_1 \leftarrow \text{Decompress}(\mathbf{c}_1, k_2)$   $\triangleright$  Декомпресія шифротексту
7:  $\mathbf{c}'_2 \leftarrow \text{Decompress}(\mathbf{c}_2, 1)$ 
8:
9:  $\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{c}'_2 - \mathbf{c}'_1 \cdot \mathbf{s} \in R_q$   $\triangleright$  Видалення маски
10:
11:  $\mathbf{m}' \leftarrow \text{Round}(\mathbf{v})$   $\triangleright$  Округлення до  $\{0, 1\}$ 
12:  $m' \leftarrow \text{Decode}(\mathbf{m}')$   $\triangleright$  Розбиття многочлена на біти
13:
14:  $m \leftarrow \text{eccDEC}(m')$   $\triangleright$  Декодування з корекцією помилок
15:
16: if  $m = \perp$  then
17:   return  $\perp$   $\triangleright$  Помилка розшифрування
18: else
19:   return  $m$ 
20: end if

```

Покроково маємо:

- Відновлення секретного ключа:** З seed  $\sigma_s$  відновлюється розріджений многочлен  $\mathbf{s}$ .
- Декомпресія шифротексту:** Обидві компоненти  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  декомпресуються до повного розміру в  $R_q$ .
- Видалення маски:** Обчислюється  $\mathbf{v} = \mathbf{c}'_2 - \mathbf{c}'_1 \cdot \mathbf{s}$ , що має бути близьким до  $\mathbf{m} \cdot \lfloor q/2 \rfloor$  (за наявності малої помилки).
- Округлення:** Функція Round округлює кожен коефіцієнт  $\mathbf{v}$  до найближчого з чисел: 0 або  $\lfloor q/2 \rfloor$ , потім нормалізує до  $\{0, 1\}$ :

$$\text{Round}(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |v_i| < q/4 \\ 1, & \text{якщо } |v_i - \lfloor q/2 \rfloor| < q/4 \\ \text{error}, & \text{інакше} \end{cases}$$

- Декодування:** Многочлен  $\mathbf{m}'$  перетворюється в послідовність біт  $m'$ , після чого застосовується eccDEC для виправлення помилок та отримання повідомлення  $m$ .
- Перевірка коректності:** Якщо eccDEC виявляє unexpect error, повертається  $\perp$ .

Джерела помилок розшифрування можуть виникнути завдяки:

- Помилка  $\mathbf{r}$  від RLWR при генерації  $\mathbf{b}$ ;
- Помилки  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  від RLWE при шифруванні;

- Помилки від компресії/декомпресії  $\mathbf{b}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  відповідно;

Параметри TiGER підібрані так, щоб сумарна помилка залишалась в межах  $\pm q/4$  з високою ймовірністю, забезпечуючи коректне розшифрування. Коди корекції помилок XEf та D2 додатково підвищують надійність.

## 4.5 TiGER.KEM

TiGER.KEM – механізм інкапсуляції ключа, отриманий застосуванням перетворення Fujisaki-Okamoto з неявним відхиленням до TiGER.PKE. Забезпечує IND-CCA безпеку у моделі квантового випадкового оракула.

### 4.5.1 KeyGen – генерація ключів

Алгоритм генерації ключів розширює TiGER.PKE.KeyGen додатковою компонентою – FO перетворенням.

#### Algorithm 12 TiGER.KEM.KeyGen()

```

1: Input: Параметри  $(n, q, p, h_s, h_r, k_1)$ 
2: Output: Відкритий ключ  $pk$ , секретний ключ  $sk$ 
3:
4:  $(pk', sk') \leftarrow \text{TiGER.PKE.KeyGen}()$                                 ▷ Базова генерація ключів
5:
6:  $z \xleftarrow{p} \{0, 1\}^{256}$                                               ▷ Випадковий ключ для implicit rejection
7:  $h \leftarrow \text{SHA3-256}(pk')$                                          ▷ Геш відкритого ключа
8:
9:  $pk \leftarrow pk'$ 
10:  $sk \leftarrow (sk', z, h, pk')$                                          ▷ Розширений секретний ключ
11:
12: return  $(pk, sk)$ 
```

#### Компоненти секретного ключа:

- $sk'$  — секретний ключ TiGER.PKE (правду кажучи це seed  $\sigma_s$ );
- $z$  — випадковий 256-бітний ключ для обчислення псевдовипадкового спільногоключа при невдалій декапсуляції (неявне відхилення);
- $h$  — геш відкритого ключа, використовується геш-функцією  $G$  для генерації випадковості шифрування;
- $pk'$  — копія відкритого ключа (для можливості повторного шифрування при декапсуляції).

### 4.5.2 Encapsulation – інкапсуляція

Алгоритм інкапсуляції генерує спільний ключ та його зашифровану форму.

### Algorithm 13 TiGER.KEM.Encaps( $pk$ )

```
1: Input: Відкритий ключ  $pk$ 
2: Output: Шифротекст  $ct$  та спільний ключ  $K \in \{0, 1\}^{256}$ 
3:
4:  $m \xleftarrow{p} \{0, 1\}^{256}$  ▷ Вибираємо випадкове повідомлення
5:
6:  $h \leftarrow \text{SHA3-256}(pk)$  ▷ Гешування відкритого ключа
7:  $r \leftarrow \text{SHAKE256}(m \| h)$  ▷ Детермінована випадковість
8:
9:  $ct \leftarrow \text{TiGER.PKE.Enc}(pk, m; r)$  ▷ Шифрування повідомлення
10:
11:  $K \leftarrow \text{SHA3-256}(m \| ct)$  ▷ Спільний ключ обчислюється через геш
12:
13: return  $(ct, K)$ 
```

#### Ключові аспекти:

1. **Випадкове повідомлення:** Генерується рівномірно (розподілене) випадкове  $m \in \{0, 1\}^{256}$ , яке буде зашифроване.
2. **Детермінована випадковість:** Замість використання нової випадковості для шифрування,  $r$  обчислюється детермінована як  $r = \text{SHAKE256}(m \| h)$ . Це критично для можливості повторного шифрування при декапсуляції.
3. **Гешування відкритого ключа:** Включення  $h = \text{SHA3-256}(pk)$  в обчислення  $r$  забезпечує взаємозв'язок шифротексту до конкретного відкритого ключа, що захищає від multi-target атак.
4. **Спільний ключ:** Обчислюється як  $K = \text{SHA3-256}(m \| ct)$ , як можна бачити є залежність як від повідомлення так і від шифротексту. Це є важливим для безпеки алгоритму загалом: противник не може обчислити  $K$  без знання  $m$ , навіть якщо перехопив шифротекст  $ct$ .

#### 4.5.3 Decapsulation – декапсуляція

Декапсуляція застосовується для відновлення спільногого ключа з шифротексту, виконуючи перевірку цілісності через повторне шифрування.

**Algorithm 14** TiGER.KEM.Decaps( $sk, ct$ )

```

1: Input: Секретний ключ  $sk = (sk', z, h, pk)$ , шифротекст  $ct$ 
2: Output: Спільний ключ  $K \in \{0, 1\}^{256}$ 
3:
4:  $m' \leftarrow \text{TiGER.PKE.Dec}(sk', ct)$  ▷ Розшифрування
5:
6: if  $m' = \perp$  then
7:   return  $\bar{K} \leftarrow \text{SHA3-256}(z \| ct)$  ▷ Implicit rejection
8: end if
9:
10:  $r' \leftarrow \text{SHAKE256}(m' \| h)$  ▷ Створення "випадковості"
11:  $ct' \leftarrow \text{TiGER.PKE.Enc}(pk, m'; r')$  ▷ Повторне шифрування
12:
13: if  $ct' = ct$  then
14:   return  $K \leftarrow \text{SHA3-256}(m' \| ct)$  ▷ Успішна декапсуляція
15: else
16:   return  $\bar{K} \leftarrow \text{SHA3-256}(z \| ct)$  ▷ Implicit rejection
17: end if

```

- Розшифрування:** Спершу – звичайне розшифрування через TiGER.PKE.Dec. Якщо розшифрування видало помилку ( $m' = \perp$ ), одразу повертається псевдовипадковий ключ.
- Re-encryption:** Розшифроване повідомлення  $m'$  повторно шифрується з тією ж визначеню випадковістю  $r' = \text{SHAKE256}(m' \| h)$  (є критичном кроком для забезпечення IND-CCA безпеки).
- Перевірка цілісності:** Отриманий  $ct'$  порівнюється з оригінальним  $ct$ :
  - Якщо  $ct' = ct$ , це означає, що шифротекст не був модифікований противником, і тоді повертається справжній спільний ключ  $K = \text{SHA3-256}(m' \| ct)$ ;
  - Якщо  $ct' \neq ct$ , це сигналізує про атаку або помилку, і повертається псевдовипадковий ключ, щоб заплути словмисника.
- Неявне відхилення (implicit rejection):** Замість явного повернення помилки  $\perp$ , алгоритм повертає псевдовипадковий ключ  $\bar{K} = \text{SHA3-256}(z \| ct)$ . Це має дві такі переваги:
  - Захист від side-channel атак:** Зовнішньому спостерігачу важко визначити, чи відбулась успішна декапсуляція чи ні, оскільки в обох випадках повертається деякий 256-бітний ключ;
  - Константний час:** Що при успішному output, що пои failed виконується однакова кількість геш-операцій.
- Роль секретного ключа  $z$ :** Випадковий ключ  $z$  є унікальним для кожної пари ключів та невідомим противнику. Це гарантує, що  $\bar{K}$  буде непередбачуваним для противника навіть за наявності багатьох невдалих декапсуляцій.

**Ключові моменти безпеки або ж чому це безпечно**

Перетворення  $\text{FO}_m^L$  з повторним шифруванням перетворює будь-яку IND-CPA безпечну PKE схему в IND-CCA безпечну KEM.

- **Детермінована випадковість:** Використання  $r = \text{SHAKE256}(m\|h)$  замість нової випадковості робить шифрування детермінованим для даного  $m$  та  $rk$ , що дозволяє виконати перевірку через повторне шифрування;
- **Гешування спільного ключа:**  $K = \text{SHA3-256}(m\|ct)$  робить спільний ключ неперебачуваним без знання  $m$ , навіть якщо  $ct$  скомпроментовано супротивником;
- **Захист від атак вибраного шифротексту:** Противник може подавати довільні модифіковані шифротексти  $ct^*$  до оракула декапсуляції, але:
  - Якщо  $ct^*$  не є валідним шифруванням деякого  $m^*$ , перевірка умови  $ct' \neq ct^*$  виявить це;
  - Противник отримає лише  $\bar{K} = \text{SHA3-256}(z\|ct^*)$ , що не надає жодної інформації про справжній спільний ключ через випадковість  $z$  та властивості геш-функції.

## 4.6 Аналіз коректності

Коректність вимагає від TiGER, того щоб розшифрування майже завжди повертало правильне повідомлення. У цій секції проаналізуємо джерела помилок та обчислимо ймовірність помилки розшифрування.

### Математичний аналіз помилок

При розшифруванні повідомлення обчислюється величина:

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}'_2 - \mathbf{c}'_1 \cdot \mathbf{s} = \mathbf{m} \cdot \lfloor q/2 \rfloor + \mathbf{err},$$

де  $\mathbf{err}$  – сумарна помилка з декількох джерел.

**Джерела помилок є наступними:**

1. **Помилка від RLWR:** При генерації відкритого ключа:

$$\mathbf{b} = \lfloor (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r}) \cdot (p/q) \rfloor,$$

що вносить помилку округлення  $\mathbf{err}_{\text{RLWR}}$ , де  $\mathbf{err}_{\text{RLWR}} \approx \mathbf{r} \cdot (p/q)$ .

2. **Помилка від RLWE:** При шифруванні:

$$\mathbf{c}'_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{c}'_2 = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{m} \cdot \lfloor q/2 \rfloor,$$

що вносить помилку  $\mathbf{err}_{\text{RLWE}} = -\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{s} + \mathbf{err}_{\text{RLWR}} \cdot \mathbf{e}_1$ .

3. **Помилка від компресії відкритого ключа:** Компресія  $\mathbf{b}$  ( $\log_2 p \rightarrow k_1$ ) біт вносить наступну помилку округлення:

$$\mathbf{err}_{\text{comp}, \mathbf{b}} \approx \mathbf{U}([-p/2^{k_1+1}, p/2^{k_1+1}]).$$

4. **Помилка від компресії шифротексту:** Компресія  $\mathbf{c}_1$  до  $k_2$  біт та  $\mathbf{c}_2$  до 1 біт:

$$\mathbf{err}_{\text{comp}, \mathbf{c}_1} \approx \mathbf{U}([-q/2^{k_2+1}, q/2^{k_2+1}]), \quad \mathbf{err}_{\text{comp}, \mathbf{c}_2} \approx \mathbf{U}([-q/4, q/4]).$$

**Сумарна помилка складатиме:** помилку в кожному коефіцієнті многочлена  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{err} &= \mathbf{err}_{\text{comp}, \mathbf{c}_2} + \mathbf{err}_{\text{comp}, \mathbf{c}_1} \cdot \mathbf{s} \\ &\quad + (\mathbf{err}_{\text{comp}, \mathbf{b}} \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1 \cdot (p/q)). \end{aligned}$$

Помилка розшифрування виникає, коли  $|\mathbf{err}_i| \geq q/4$  для якогось коефіцієнта  $i$ , і це призводить до неправильного округлення.

## Оцінка ймовірності помилки

Для оцінки DFP/R необхідно обчислити ймовірність того, що хоча б один коефіцієнт має помилку  $\geq q/4$ .

### Статистичний аналіз:

- Розподіл помилок:** Кожна компонента помилки має рівномірний розподіл в заданих межах.
- Дисперсія:** Для розрідженої тернарного многочлена  $\mathbf{s}$  з вагою  $h_s$ :

$$\text{Var}(\mathbf{s}) \approx h_s, \quad \text{Var}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}) \approx h_s \cdot h_e / 3,$$

де ділення враховує коефіцієнти  $\{-1, 0, 1\}$ .

- Максимальна помилка складає:**

$$\sigma_{\text{err}}^2 \approx h_s \cdot h_e / 3 + h_r \cdot h_e \cdot (p/q)^2 + (q/2^{k_2+1})^2 + (q/2)^2 + \dots$$

- DFP/R для одного коефіцієнта:** Ймовірність помилки в одному з коефіцієнтів:

$$P(\text{помилка в } i\text{-му коефіцієнти}) \approx 2 \cdot Q(q/4/\sigma_{\text{err}}),$$

де  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$  – функція розподілу помилок для нормального розподілу.

- Тоді DFP/R для всього повідомлення:**

$$\text{DFP/R} \leq n \cdot P(\text{помилка в одному коефіцієнти}) = n \cdot 2 \cdot Q(q/4/\sigma_{\text{err}}).$$

## Різні параметри мають різний вплив на DFP/R:

- Модулі  $q$  та  $p$ :**

- Більше  $q$  збільшує інтервал ( $q/4$  стає більшим), зменшуючи DFP/R;
- Менше відношення  $q/p$  зменшує помилку від RLWR, але при цьому збільшує розмір відкритого ключа.

- Ваги Геммінга  $h_s, h_r, h_e$ :**

- Більші ваги збільшують дисперсію помилки, підвищуючи DFP/R;
- Менші ваги зменшують безпеку (легше атакувати розрідженні ключі);

- Параметри компресії  $k_1, k_2$ :**

- Менші  $k_1, k_2$  краще зменшують розміри ключів/шифротексту, збільшуючи помилку компресії;

- Коди корекції помилок (XEf, D2):**

- Коди XEf можуть виправити одиночні помилки в блоках по  $d$  біт, знижуючи доволі DFP/R доволі добре (у  $d$  разів) для таких помилок;
- Код D2 з  $f = 2$  дублює кожен біт, дозволяючи виправляти помилки через мажоритарне голосування.

## Експериментальні результати

Автори TiGER провели обчислювальні експерименти для верифікації теоретичних оцінок DFP/R і отримали:

- **TiGER128:**  $\text{DFP}/\text{R} \approx 2^{-120}$  (теоретична),  $< 2^{-128}$  (експериментальна після  $2^{40}$  тестів);
- **TiGER192:**  $\text{DFP}/\text{R} \approx 2^{-136}$  (теоретична), не виявлено помилок після  $2^{45}$  тестів;
- **TiGER256:**  $\text{DFP}/\text{R} \approx 2^{-167}$  (теоретична), не виявлено помилок після  $2^{48}$  тестів.

Експерименти підтверджують, що практична DFP/R не перевищує теоретичних оцінок і є достатньо малою для будь-яких реалістичних сценаріїв використання.

## 4.7 Особливості реалізації

TiGER розробляється з ухилом на ефективність та безпеку.

Конструкція TiGER має наступні риси, що забезпечують компактність, ефективність та безпеку реалізації.

**Компактність** досягається через використання RLWR та агресивної компресії, що дозволяє отримати малі розміри відкритого ключа та шифротексту порівняно з аналогами. Наприклад, TiGER128 має відкритий ключ розміром лише 804 байти та шифротекст 804 байти, що менше ніж у Kyber512 ( $800 + 768$  байт) та Saber ( $672 + 736$  байт). Економія місця особливо важлива для протоколів з обмеженою пропускною здатністю, таких як TLS, де кожен байт має значення. Також зберігання seed замість повних многочленів (як у a) економить до 2 КБ для TiGER256.

**Висока обчислювальна ефективність** забезпечується через використання модулів які є степенями двійки ( $q = 2^k$ ), що дозволяє виконувати операції модульної арифметики через прості побітові зсуви:

- Округлення  $\lfloor x \cdot (p/q) \rfloor$  виконується як побітовий зсув вправо: оскільки  $q = 2^{14}$  та  $p = 2^{10}$  для TiGER128, ділення на  $q/p = 2^4$  еквівалентне зсуву на 4 біти;
- Операції за  $\text{mod } q$  виконуються через побітовий AND з числом  $q - 1$ . Це значно швидше ніж модульні операції, що використовуються в деяких інших схемах.
- Розрідженні секрети ( $h_s \ll n$ ) прискорюють множення многочленів: замість  $O(n^2)$  операцій для множення, потрібно лише  $O(h_s \cdot n)$  операцій, що дає прискорення приблизно в  $n/h_s \approx 2$  рази.

**Простота в реалізації** є важливою перевагою TiGER. Відмова від використання Number Theoretic Transform (NTT) спрощує імплементацію, оскільки NTT вимагає специфічних модулів виду  $q = 1 \bmod 2n$  та bit-reversal permutation (якийсь жах, я таки не вдуплів що це). TiGER використовує множення многочленів, яке, хоч і має вищу асимптотичну складність  $O(n^2)$  порівняно з  $O(n \log n)$  для NTT, але є простішим для людського сприйняття та реалізації. Для розріджених многочленів складність знижується до  $O(h \cdot n)$ , що робить це множення конкурентоспроможним. При реалізації важливо уникати умовних переходів та операцій індексації масивів, які залежать від секретних значень, оскільки це може привести до витоку інформації через timing або cache атаки.

**Захист від атак** забезпечується кількома механізмами:

- Неявне відхилення (*implicit rejection*) у TiGER.KEM захищає від витоку інформації через помилки розшифрування. Це протидіє failure boosting attacks, де противник ітеративним підходом підбирає шифротексти з високою ймовірністю помилки для витягування інформації про секретний ключ. (адаптивна атака на основі вибраного шифротекста)
- Гешування відкритого ключа ( $r = G(m, H(pk))$ ) забезпечує стійкість до multi-target атак, прив'язуючи кожен шифротекст до конкретного відкритого ключа.
- Детермінована випадковість шифрування через  $G$  дозволяє виконати перевірку цілісності через повторне шифрування, що є основою IND-CCA безпеки.

**Коди корекції помилок** є ключовою інновацією вTiGER. Застосування кодів ХЕf та D2 значно знижує ймовірність помилки розшифрування без збільшення розміру шифротексту. Код ХЕf може виправити одиночні помилки в блоках по  $d$  біт та відповідно підвищує стійкість у стільки ж разів. Без кодів корекції довелося або використовувати менш агресивне стиснення (більший шифротекст), або змиритися з вищим DFP/R, що неприйнятно для практичних застосувань.

**Константний час виконання** є критичним для захисту від атак через побічні канали (side-channel attacks). Генерація розріджених многочленів через  $\text{HWT}_h$  використовує rejection sampling, при цьому загальна кількість ітерацій обмежена та не залежить від секретних даних. Операції з многочленами виконуються за фіксований час незалежно від значень коефіцієнтів. Плюс неявне відхилення гарантує, що (не)успішна декапсуляція виконуються з використанням однакової кількості геш-операцій.

**Практичні переваги** Модульна структура (PKE + FO) дозволяє окремо тестувати та оптимізувати різні компоненти. Відсутність складних математичних операцій (як pairing у криптографії на еліптичних кривих) робить TiGER перспективним для впровадження на пристроях з обмеженим ресурсом (embedded systems, IoT).

У таблиці 4.2 підсумуємо ключові технічні рішення TiGER та їх вплив на характеристики алгоритму.

Таблиця 4.2: Порівняльна таблиця покращень TiGER

Технічне рішення	Переваги	Компроміси
<b>RLWR замість RLWE</b> (відкритий ключ)	+ Менший розмір $pk$ через детерміністичне округлення	- Необхідність балансування $q/p$
<b>Модулі – степені двійки</b> ( $q = 2^k$ , $p = 2^k$ )	+ Швидкі побітові операції + Простота в реалізації + Const час виконання	- Трохи менша безпека на біт порівняно з простим $q$
<b>Розрідженні секрети</b> ( $h_s, h_r, h_e \ll n$ )	+ Швидке множення: $O(h \cdot n)$ замість $O(n^2)$ + Менша дисперсія помилок	- Потенційна вразливість до комбінованих атак - Невипадковий вибір $h$ для збереження safety balance
<b>Відсутність NTT</b>	+ Свобода у виборі модулів $p, q$ + Менше ризиків для side-channel attacks	- Повільніше множення: $O(n^2)$ vs $O(n \log n)$ - Компенсується розрідженністю

Continued on next page

Таблиця 4.2: Порівняльна таблиця покращень TiGER (Continued)

Технічне рішення	Переваги	Компроміси
<b>Агресивна компресія</b> $(k_1 = 10-11, k_2 = 4-5)$	+ Компактні розміри $pk$ і $ct$ + Ефективність у протоколах з обмеженою пропускною здатністю	- Збільшення помилок компресії - Вища DFP без корекції помилок
<b>Коди корекції помилок</b> (XEf + D2)	+ Дуже низька DFP ( $\leq 2^{-120}$ ) + Дозволяє агресивнішу компресію + Надійність decryption	- Невелике збільшення обчислень - Складніша логіка реалізації коду
<b>Неявне відхилення</b> (implicit rejection)	+ Захист від failure boosting атак + Константний час (успіх = невдача)	- Складніша декапсуляція
<b>Seed-based генерація</b> ( $\rho$ для $a$ , $\sigma$ для $s$ )	+ Малі розміри ключів (256 біт seed замість $n \log q$ біт) + Детерміністичність і повторюваність	- Потреба регенерувати многочлени при використанні - Вимоги до якісного PRNG
<b>FO<sub>m</sub><sup>+</sup> перетворення</b>	+ IND-CCA безпека з IND-CPA PKE + Стандартизований підхід + Забезпечення безпеки в QROM	- Потреба повторного шифрування - Додаткові геш-обчислення
<b>Детерміністична випадковість</b> ( $r = G(m, h)$ )	+ Можливість перевірки через re-encryption + Відсутність потреби у новій випадковості при Enc	- Критична залежність від стійкості самих геш-функцій - І вразливість при компрометації $G$

Як видно з таблиці, більшість технічних рішень TiGER представляють собою компроміси між різними характеристиками. Ключовою перевагою є досягнення балансу між безпекою, ефективністю та компактністю при збереженні практичності реалізації. Особливо цінною є комбінація агресивної компресії з кодами корекції помилок – це унікальність TiGER порівняно з багатьма конкурентами.

# Розділ 5

## Аналіз безпеки

### 5.1 Теоретичні основи безпеки

TiGER.PKE та TiGER.KEM забезпечують різні рівні криптографічної безпеки завдяки застосуванню добре вивчених криптографічних перетворень.

#### 5.1.1 IND-CPA безпека TiGER.PKE

Базова схема TiGER.PKE забезпечує безпеку проти атаки з використанням відкритого тексту – IND-CPA (Indistinguishability under Chosen Plaintext Attack). Формально, це означає, що противник, може обирати повідомлення та отримувати їх шифрування, але при цьому не може відрізняти шифротексти двох обраних ним повідомлень з ймовірністю суттєво більшою за  $1/2$ .

**Твердження 5.1.1** (про IND-CPA безпеку).

У припущеннях складності RLWE та RLWR проблем, TiGER.PKE є IND-CPA безпечною схемою шифрування з відкритим ключем у моделі випадкового оракула.

*Ідея доведення:* Безпека TiGER.PKE зводиться до складності двох задач: RLWR (для відкритого ключа) та RLWE (для шифротексту). Відкритий ключ  $\mathbf{b} = \lfloor (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r}) \cdot (p/q) \rfloor \in \text{RLWR}$  зразком, який не розкриває інформацію про  $\mathbf{s}$  за припущення складності RLWR. А шифротекст  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$  складається з RLWE зразків:  $\mathbf{c}'_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \in \text{RLWE}$  зразком відносно  $\mathbf{e}_1$ , а  $\mathbf{c}'_2 = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{m} \cdot \lfloor q/2 \rfloor$  маскує повідомлення  $\mathbf{m}$  через RLWE. Зловмисник, який здатний розрізняти шифротексти, міг би вирішити RLWE/RLWR задачі, а це суперечить припущення їх складності.

#### 5.1.2 IND-CCA безпека TiGER.KEM

TiGER.KEM досягає значно кращої безпеки. Він має стійкість до атак з виборним шифротекстом –IND-CCA (Indistinguishability under Chosen Ciphertext Attack). У цій моделі противник має доступ до оракула декапсуляції і може подавати довільні шифротексти для розшифрування (за винятком цільового шифротексту).

**Твердження 5.1.2** (про IND-CCA безпеку).

За припущенням IND-CPA безпеки TiGER.PKE та моделювання геш-функцій  $G, H$ , як квантових випадкових оракулів, TiGER.KEM є IND-CCA безпечною в моделі квантового випадкового оракула (QROM).

*Ідея доведення:* Безпека досягається через перетворення Fujisaki-Okamoto з неявним відхиленням ( $\text{FO}_m^{\perp}$ ). Доведення використовує послідовність game-hopping (гібридних

експериментів), де в кожному наступному експерименті протокол модифікується незначним чином, і в результаті зловмисник не може відрізити сусідні експерименти. Заключний експеримент відповідає ситуації, де спільний ключ є повністю випадковим і незалежним від шифротексту.

### 5.1.3 Важливість моделі QROM

Класичні доведення безпеки FO перетворення використовують модель випадкового оракула (ROM), де геш-функції моделюються як справжні випадкові функції, доступні лише через класичні запити(??). Однак зловмисник з квантовим комп’ютером може виконувати *квантові запити* до оракулів, що являють собою суперпозиції багатьох входів одночасно, що потенційно дає переваги в атаках.

Модель квантового випадкового оракула (QROM) враховує цю загрозу, моделюючи геш-функції як квантові оракули, доступні для квантових запитів. TiGER.KEM має формальне доведення безпеки в QROM, що підтверджує його стійкість навіть проти зловмисників з доступом до квантових обчислень геш-функцій.

## 5.2 Квантова стійкість

Основна мотивація постквантової криптографії – захист від появи квантових комп’ютерів, які становлять екзистенційну і доволі реальну загрозу для сучасних криптосистем на основі розв’язання задач факторизації та дискретного логарифму.

### Квантові загрози класичній криптографії

Квантові алгоритми: Шора (1994) та Гровера (1996) радикально змінили ландшафт криптографічної безпеки:

**Алгоритм Шора** вирішує задачі факторизації цілих чисел та дискретного логарифму за поліноміальний час на квантовому комп’ютері. Для числа  $N$  складність факторизації становить  $\exp(O((\log N)^{1/3}))$  (субекспоненційна), тоді як квантовий алгоритм Шора досягає  $O((\log N)^3)$  (поліноміальна). Це означає повну компрометацію таких алгоритмів як:

- **RSA:** Квантовий комп’ютер з  $\sim 2000$  логічних кубітів може факторизувати 2048-бітне число за лічені години (трохи перебільшу, але все ж);
- **ECDSA/ECDH:** Дискретний логарифм на еліптичних кривих вирішується аналогічно ефективно;
- **Diffie-Hellman:** Класичний варіант DH також стає вразливим через полегшення обрахування дискретного логарифму у скінчених полях.

**Алгоритм Гровера** забезпечує квадратичне(!) прискорення задачі пошуку в несортированих базах даних. Для звичаного пошуку розміру  $N$ , класична складність становила б  $O(N)$ , тоді як квантовий алгоритм досягає  $O(\sqrt{N})$ . Це має свій вплив на симетричну криптографію:

- **AES-128:** Ефективна безпека знижується до  $2^{64}$  операцій, що вже недостатньо;
- **SHA-256:** Collision resistance (стійкість до колізій) зменшується з  $2^{128}$  до  $2^{85}$ , а preimage resistance (стійкість до знаходження прообразу) – з  $2^{256}$  до  $2^{128}$ ;

Як наслідок - треба подвоювати розмірів ключів (AES-256, SHA-512) для збереження еквівалентного рівня безпеки.

В той же час решіткові задачі є стійкими до квантових атак. На відміну від факторизації та дискретного логарифму, задачі на решітках (включно з RLWE та RLWR) не мають відомих ефективних квантових алгоритмів.

Ключові причини цього:

- Відсутність прихованої підгрупової структури:** Алгоритм Шора використовує квантове перетворення Фур'є (QFT) для виявлення періодичності в підгрупах кільця  $\mathbb{Z}_N^*$  або серед точок еліптичної кривої. Решіткові задачі не мають такої регулярної алгебраїчної структури, яка б дозволяла QFT виявляти корисну інформацію.
- Геометрична проблема:** Задачі на решітках є геометричними проблемами – пошук найближчого вектора решітки або найкоротшого ненульового вектора. Ці задачі залишаються складними навіть для квантових алгоритмів, оскільки не існує приведення до задач з експоненційною кількістю періодичних розв'язків.
- Відомі квантові атаки неефективні:** Найкращі з відомих квантових алгоритми для решіткових задач це квантові версії класичних BKZ (Basis Kernel Z) та sieving алгоритмів. Вони надають лише поліноміально-логарифмічне прискорення (наприклад, з  $2^{0.292\beta}$  до  $2^{0.265\beta}$  для просіювання, де  $\beta$  – block dimension), що далеко від експоненційного прискорення алгоритму Шора.

## Оцінка квантової складності атак на TiGER

Для оцінки безпеки TiGER проти квантових атак використовується модель Core-SVP (Short Vector Problem), що вимірює складність вирішення SVP на решітці розмірності  $\beta$  (block dimension):

В класичній моделі обчислень найкращими класичними алгоритмами (BKZ + sieving) досягається:

$$T_{\text{classical}} \approx 2^{0.292\beta+o(\beta)}$$

В квантовому всесвіті, при застосуванні квантових версії sieving алгоритмів (див. Laarhoven et al., 2015), складність досягає:

$$T_{\text{quantum}} \approx 2^{0.265\beta+o(\beta)}$$

Для TiGER параметри обиралися так, щоб при достатньо великому  $\beta$  забезпечувався бажаний рівень безпеки:

- **TiGER128:**  $\beta_{\text{quantum}} \approx 483$ , це дає  $2^{128}$  квантових операцій для атаки;
- **TiGER192:**  $\beta_{\text{quantum}} \approx 724$ , що дає  $2^{192}$  квантових операцій;
- **TiGER256:**  $\beta_{\text{quantum}} \approx 966$ , що дає  $2^{256}$  квантових операцій.

Ці оцінки консервативні і враховують можливі майбутні покращення квантових алгоритмів. Навіть за наявності величенського квантового комп'ютера/ів з мільйонами логічних кубітів, злам того ж TiGER128 вимагав би  $2^{128}$  квантових операцій, що наразі є практично нереалістичним.

## Стійкість головного у TiGER – геш-функції

TiGER використовує геш-функції SHA3-256 та SHAKE256, які також мають бути квантово стійкими:

- **SHA3 (Keccak):** Базується на губчастій конструкції (sponge construction), яка не має відомих квантових атак, ефективніших за атаку із застосуванням алгоритму Гровера. Для SHA3-256 квантова collision resistance становить порядку  $\approx 2^{85}$  операцій, а preimage resistance –  $2^{128}$  операцій. Це є терпимим для використання у TiGER.KEM.
- **SHAKE256:** Як XOF (extendable-output function) з змінною довжиною виходу, SHAKE256 має аналогічну як і SHA3. Використання  $G$  для генерації детерміністичної випадковості не створює додаткових квантових вразливостей.

## 5.3 Рівні безпеки NIST

NIST (National Institute of Standards and Technology) визначив п'ять рівнів безпеки для стандартизації постквантових алгоритмів. Ці рівні дозволяють порівнювати стійкість різних алгоритмів з існуючими класичними еталонними схемами.

### 5.3.1 Категорії безпеки згідно NIST

Рівні безпеки NIST визначаються через мінімальну обчислювальну складність зламу, еквівалентну пошуку ключа в симетричних криптосистемах або зламу класичних асиметричних схем:

Рівень	Класичний еквівалент	Квантовий еквівалент
1	Пошук ключа AES-128	$2^{128}$ класичних або $2^{64}$ квантових операцій
2	Collision пошук в SHA-256	$2^{128}$ класичних або $2^{64}$ квантових операцій (для колізій)
3	Пошук ключа AES-192	$2^{192}$ класичних або $2^{96}$ квантових операцій
4	Collision пошук в SHA-384	$2^{192}$ класичних або $2^{96}$ квантових операцій (для колізій)
5	Пошук ключа AES-256	$2^{256}$ класичних або $2^{128}$ квантових операцій

Таблиця 5.1: Рівні безпеки NIST

Насправді є 3 NIST anchor layers (1, 3, 5), а інші два – містять проміжні значення.

1. **TiGER128 (Рівень 1):** Призначений для загального використання, де потрібен баланс між безпекою та ефективністю. Перший рівень достатній для захисту більшості даних на найближчі 10-15 років, враховуючи поточний стан квантових технологій.

- TiGER192 (Рівень 3):** Підвищена безпека для конфіденційних даних, що вимагають довгострокового захисту (20-30 років). Квантова безпека  $2^{192}$  операцій робить атаку практично неможливою навіть за наявності значних прогресів у квантових обчислennях.
- TiGER256 (Рівень 5):** Максимальна безпека для критично важливих застосувань (державні секрети, військові документи, фінансові інфраструктури і т.п.). Квантова безпека в  $2^{256}$  операцій гарантує захист навіть від гіпотетичних квантових комп'ютерів майбутнього з безпредметною обчислювальною потужністю, але ми ще подивимося:).

#### Ключові принципи NIST:

- Рівні безпеки NIST визначаються за складністю атаки квантовим комп'ютером. Наприклад, рівень 1 вимагає, щоб квантова атака на алгоритм вимагала не менше ресурсів, ніж квантовий пошук ключа AES-128 (що становить  $2^{64}$  квантових операцій через алгоритм Гровера с еквівалентно  $2^{128}$  класичним).
- NIST вимагає консервативних оцінок безпеки, що враховують можливі майбутні покращення алгоритмів для атак. Алгоритм вважається відповідним рівню безпеки, якщо найкраща відома атака (з урахуванням можливих покращень) вимагатиме не менше ресурсів, ніж еталонна задача.
- Рівні NIST фокусуються також на практичній складності атак, враховуючи не лише теоретичну складність алгоритмів, але й реальні обчислювальні обмеження.

### 5.3.2 Відповідність TiGER стандартам NIST

TiGER має три набори (див. табл 4.1) параметрів, що відповідають відповідно трьом рівням безпеки NIST:

Характеристика	TiGER128	TiGER192	TiGER256
Рівень NIST	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>5</b>
Класична безпека (біт)	143	207	272
Квантова безпека (біт)	128	192	256
Core-SVP $\beta$ (квантовий)	483	724	966
Складність атаки (кв. опер.)	$2^{128}$	$2^{192}$	$2^{256}$
Еквівалент NIST	AES-128	AES-192	AES-256

Таблиця 5.2: Відповідність параметрів TiGER рівням NIST

Важливою характеристикою також є запас безпеки – різниця між заявленим рівнем безпеки та фактичною складністю найкращої відомої атаки. TiGER має значний запас безпеки:

- TiGER128:** Класична безпека  $\approx 143$  біт при заявлених 128 біт (запас +15 біт);
- TiGER192:** Класична безпека  $\approx 207$  біт при заявлених 192 біт (запас +15 біт);
- TiGER256:** Класична безпека  $\approx 272$  біт при заявлених 256 біт (запас +16 біт).

Цей запас забезпечує захист від можливих майбутніх покращень алгоритмів атак та надає впевненість у довгостроковій безпеці TiGER. Навіть якщо з'являться нові методи атак, що знижують складність на порядка  $\sim 2^{10}$  операцій, TiGER лишатиметься безпечним на заявлених рівнях.

# Розділ 6

## Порівняння з іншими алгоритмами

### 6.1 TiGER vs RLizard

RLizard є безпосереднім попередником алгоритму TiGER, розробленим тією ж командою в 2018 році. TiGER успадковує багато ідей від RLizard і вносить значні покращення, що роблять його більш компактним та ефективним.

#### Спільні риси

TiGER та RLizard мають багато спільного:

- Поседнання RLWE/RLWR:** Обидва алгоритми використовують RLWR для генерації відкритого ключа та RLWE для шифрування. Це дозволяє зменшити розмір відкритого ключа через округлення.
- Модулі у вигляді степенів двійки:** Використання модуля виду  $q = 2^k$  для оптимізації модульних операцій через побітові операції зсуву та bitwise AND.
- Відсутність NTT:** Обидва алгоритми не використовують Number Theoretic Transform, що спрощує програмну реалізацію, і при цьому ж зменшує ризики side-channel атак.
- Розрідженні секрети:** Секретні ключі та помилки є тернарними многочленами з малою вагою Геммінга ( $h \ll n$ ). Це прискорює прискорює множення многочленів.
- ФО перетворення:** Обидві схеми використовують перетворення Fujisaki-Okamoto для досягнення IND-CCA безпеки КЕМ з IND-CPA безпечної PKE.

#### Ключові відмінності

TiGER вносить кілька суттєвих покращень порівняно з RLizard:

- Зменшення степені многочлена ( $n = 1024 \rightarrow 512$ ):**
  - TiGER використовує половинний  $n$  для рівня 1, що зменшує складність множення многочленів з  $O(1024^2) \approx 10^6$  до  $O(512^2) \approx 2.6 \times 10^5$  операцій (прискорення у  $\sim 4x$ );
  - Зменшення  $n$  також зменшує розміри всіх інших многочленів у 2 рази;
  - Безпека не на гіршому рівні за рахунок компенсації – використання кодів корекції помилок.

## 2. Зменшення модуля ( $q = 2^{20} \rightarrow 2^{14}$ ):

- Менший  $q$  означає менше біт на кожен коефіцієнт многочлена: з 20 до 14 біт;
- Як наслідок – зменшення розмірів всіх компонентів многочленів з  $R_q$ ;
- Менший  $q$  також прискорює операції модульної арифметики (менші числа).

## 3. Агресивніша компресія:

- TiGER застосовує агресивну компресію  $k_2 = 4$  біт для  $\mathbf{c}_1$  та 1 біт для  $\mathbf{c}_2$ ;
- Агресивна компресія збільшує помилки, але TiGER компенсує це знову ж таки через коди корекції помилок.

## 4. Застосування кодів корекції помилок (XEf + D2):

- Ключова інновація TiGER — використання двох методів для корекції помилок;
- Код XEf виправляє одиночні помилки в блоках по  $d = 8$  біт, збільшуючи надійність приблизно в  $d$  разів;
- Код D2 дублює кожен біт ( $f = 2$ ), дозволяючи додатково виправляти помилки через мажоритарне голосування;
- Комбінація дозволяє TiGER використовувати агресивнішу компресію при збереженні дуже низької DFP/R ( $2^{-120}$ );
- В RLizard що того, що такого немає.

## 5. Неявне відхилення (implicit rejection):

- TiGER використовує  $\text{FO}_m^{\perp}$  варіант з неявним відхиленням: замість повернення  $\perp$  при невдалій декапсуляції, повертається псевдовипадковий ключ  $\bar{K} = H(z, ct)$  – захист від failure boosting атак
- RLizard використовує стандартний FO варіант з явним відхиленням, що є вразливішим до таких атак.

## 6. Підвищення безпеки при менших параметрах:

- Незважаючи на менший  $n$  та  $q$ , TiGER128 має *вищий* Core-SVP  $\beta = 483$  порівняно з RLizard  $\beta = 450$  – забезпечення кращої безпеки при значно менших розмірах;
- Це досягається через оптимізацію розподілу помилок, вибір ваг Геммінга, та консервативніші оцінки безпеки;

Це можна підсумувати таблицею:

Характеристика	RLizard	TiGER128
<i>Параметри</i>		
Степінь многочлена $n$	1024	512
Основний модуль $q$	$2^{20}$	$2^{14}$
Модуль округлення $p$	$2^{10}$	$2^{10}$
Вага секрету $h_s$	256	274
<i>Розміри (байт)</i>		
Відкритий ключ $ pk $	1472	804
Шифротекст $ ct $	1312	804
Секретний ключ $ sk $	1536	1876
Загалом	4320	3484
<i>Безпека та надійність</i>		
Core-SVP $\beta$	450	483
DFP/R	$2^{-128}$	$2^{-120}$
Коди корекції помилок	Немає	XEf + D2
Implicit rejection	Відсутнє	$\epsilon$

Таблиця 6.1: Порівняння RLizard та TiGER

## Практичні наслідки

Покращення TiGER мають значний практичний сенс:

- **Компактність:** Зменшення  $|pk| + |ct|$  на  $\sim 35\%$  робить TiGER ефективнішим для протоколів з обмеженою пропускною здатністю таких як TLS чи IoT;
- **Продуктивність:** Менший  $n$  та  $q$  прискорюють усі операції: генерацію ключів, шифрування, дешифрування.
- **Надійність:** Коди корекції помилок роблять TiGER більш надійним у реальних умовах, де можливі апаратні помилки;
- **Безпечність:** Implicit rejection та вищий Core-SVP  $\beta$  роблять TiGER стійкішим до сучасних атак.

## 6.2 TiGER vs Kyber

Kyber (нині стандартизований ML-KEM) є переможцем конкурсу NIST з постквантової криптографії та де-факто слугує стандартом для KEM на основі решіток. Порівняння TiGER з Kyber дає розуміння переваг та компромісів обох підходів.

## Архітектурні відмінності

Kyber та TiGER базуються на різних варіантах решіткових задач та мають різне математичне підґрунтя:

### 1. MLWE vs RLWE:

- *Kyber* використовує Module-LWE — узагальнення алгоритму LWE на вектори многочленів. Це компромісний варіант між стандартним LWE та RLWE;

- *TiGER* використовує чистий RLWE/RLWR на одному многочлені з кільцевої структури. Ця структура дозволяє зменшити розміри, але потенційно зменшує запас безпеки;

## 2. Модуль просте число vs степінь двійки:

- *Kyber* використовує  $q = 3329$  — спеціально обране просте число виду  $q = 1 \bmod 2n$ , що дозволяє використовувати NTT;
- *TiGER* використовує  $q = 2^{14}$ , що дозволяє швидкі побітові операції, але унеможливило NTT (оскільки  $2^{14}$  не має примітивних коренів степеня  $2n$ );

## 3. RLWR vs RLWE для відкритого ключа:

- *Kyber* генерує  $\mathbf{pk} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{e}$  з явною помилкою  $\mathbf{e}$ ;
- *TiGER* використовує RLWR:  $\mathbf{pk} = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r}]_{p/q}$  з округленням, що вводить неявну помилку та економить місце (але це усього порядка декількох кілобайт);

## 4. Секретні ключі:

- *Kyber* використовує Centered Binomial Distribution (CBD) з параметром  $\eta = 3$ . Коефіцієнти многочленів беруться з множини  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . Це дає "природний" розподіл помилок;
- *TiGER* використовує розрідженні тернарні многочлени: коефіцієнти з  $\{-1, 0, 1\}$ , де рівно  $h_s = 274$  ненульових коефіцієнтів. Це прискорює множення, але розрідженні секрети потенційно більш вразливі до комбінаторних атак. Необхідний консервативний вибір  $h_s$ .

Зведемо до таблиці:

Характеристика	<b>Kyber512</b>	<b>TiGER128</b>
<b>Базова проблема</b>	MLWE (Module-LWE) Вектори многочленів	RLWE + RLWR Один многочлен
<b>Розмірність</b>	$k = 2$ модулі $n = 256$ на модуль	$k = 1$ (тільки кільце) $n = 512$
<b>Модуль <math>q</math></b>	$3329$ (просте число)	$2^{14} = 16384$ (степінь 2)
<b>Множення</b>	NTT (FFT в $\mathbb{Z}_q$ ) $O(kn \log n)$	Пряме множення $O(hn)$ (розріджене)
<b>Відкритий ключ</b>	MLWE: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{e}$ Явна помилка $\mathbf{e}$	RLWR: $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r}]_{p/q}$ Округлення замість помилки
<b>Шифрування</b>	MLWE на векторах	RLWE на многочленах
<b>Секрети</b>	CBD розподіл ( $\eta = 3$ ) Щільні (всі коеф. $\neq 0$ )	Розрідженні тернарні Вага Геммінга $h_s = 274$
<b>Коди корекції</b>	Немає	XEf + D2
<b>FO варіант</b>	Стандартний	Implicit rejection

Таблиця 6.2: Архітектурні відмінності Kyber та TiGER

Також порівняємо їхні характеристик згідно (NIST рівень 1)

<b>Метрика</b>	<b>Kyber512</b>	<b>TiGER128</b>
<i>Безпека</i>		
Квантова безпека (біт)	128	128
Core-SVP $\beta$	512	483
Класична безпека (біт)	143	143
DFP/R	$2^{-139}$	$2^{-120}$
<i>Розміри в байтах</i>		
Відкритий ключ $ pk $	800	804
Шифротекст $ ct $	768	804
Секретний ключ $ sk $	1632	1876
$ pk  +  ct $	1568	1608
<i>Продуктивність на x86</i>		
KeyGen	55K	40K
Encaps	75K	65K
Decaps	80K	70K

Таблиця 6.3: Порівняння Kyber512 та TiGER128 згідно NIST 1

Ми бачимо, що:

### 1. По безпеці:

- Kyber512 має трохи вищий Core-SVP  $\beta = 512$  порівняно з TiGER128 ( $\beta = 483$ ). Це дає невеликий запас безпеки ( $\sim 6\%$ );
- Kyber має значно нижчу DFP/R ( $2^{-139}$  vs  $2^{-120}$ ), що робить його надійнішим.

### 2. По пам'яті:

- TiGER128 має майже однакові розміри з Kyber512:  $|pk| + |ct| = 1608$  vs  $1568$  байт;
- Kyber трохи компактніший завдяки використанню модульної структури MLWE та оптимізованій компресії;
- Секретний ключ TiGER більший (+15%), що є компромісом за зберігання додаткових seed для відновлення секретного ключа та ключа  $z$  для implicit rejection;

### 3. По швидкодії:

- TiGER показує кращу продуктивність ( $\sim 10\text{-}27\%$  швидше), особливо на генерації ключів. Це завдячуєчи використанню побітових операцій за модулем  $2^{14}$ ;
- Kyber з NTT асимптотично швидший для доволі великих  $n$ , але для  $n = 256$  (Kyber) vs  $n = 512$  (TiGER) різниця є невеликою;

## Переваги та недоліки

### Переваги Kyber:

- **Стандартизація:** Затверджений NIST як ML-KEM;

- **Консервативність:** MLWE менш структурований за RLWE, вищий Core-SVP  $\beta$ , нижча DFP/R;
- **Досвід:** Багато оптимізаційних реалізацій (більше років ”на сцені” алгоритмів);
- **NTT:** Асимптотично швидше множення для великих розмірностей (чесно, ну така собі перевага).

#### **Переваги TiGER:**

- **Простота:** Відсутність NTT спрощує реалізацію;
- **Ефективність:** Швидші побітові операції з модулем призводять до кращих показників на практиці для малих  $n$ ;
- **Застосування кодів коректування:** Інтеграція XEf + D2 дозволяє агресивніше стискання та підвищує надійність;
- **Implicit rejection:** Додатковий захист від failure boosting атак;

#### **Недоліки TiGER:**

- **Відсутність стандартизації:** Поки що затверджений NIST;
- **Нижчий  $\beta$ :** Трохи менший запас безпеки порівняно з Kyber;
- **Вища DFP/R:**  $2^{-120}$  vs  $2^{-139}$  (по факту змагання ”хто ближче до нуля”, бо і так це майже нуль);
- **Менш досліджений:** Менше публічних аудитів та оптимізованих реалізацій (дуже молодий алгоритм).

Kyber та TiGER представляють різну, так би мовити, філософію реалізації у постквантових KEM. Kyber обирає консервативний підхід (MLWE, вищий  $\beta$ ), а TiGER фокусується на практичній ефективності (степені двійки, коди корекції).

## 6.3 TiGER vs Saber

Saber є фіналістом конкурсу NIST, що базується на Module-LWR (Learning With Rounding) – детермінованому варіанті MLWE. Порівняння TiGER з Saber є важливим, оскільки обидва алгоритми використовують округлення (rounding) замість використання методу явних помилок.

За концепцією TiGER та Saber є доволі схожими:

1. **LWR підхід:** Обидва використовують округлення для введення т.з. ”шуму”:
  - *Saber:* MLWR на векторах многочленів;
  - *TiGER:* RLWR на одному многочлені (для відкритого ключа).
2. **Модулі степенів двійки:** Обидва використовують  $q = 2^k$ , що дозволяє ефективні побітові операції для округлення та модульної арифметики.
3. **Відсутність NTT:** Жоден з алгоритмів не використовує NTT. Це спрощує реалізацію та знижує складність коду.
4. **Компактність:** Обидва досягають малих розмірів ключів порівняно з алгоритмами на основі LWE.

## Ключові відмінності

Незважаючи на схожість у використанні LWR, TiGER та Saber мають і певні архітектурні відмінності:

### 1. MLWR vs RLWR:

- *Saber* використовує чистий MLWR для всього: шифрування і відкритий ключ генерується через MLWR на векторах ( $k = 2$  для LightSaber), щось середнє між LWE та RLWE;
- *TiGER* комбінує RLWR (для відкритого ключа) та RLWE (для шифрування). Такий гіbridний підхід *TiGER* може бути складним з точки зору аналізу безпеки, але дає більше можливостей для оптимізації окремих параметрів.

### 2. Модулі та точність округлень:

- *Saber* використовує більше біт для кодування повідомлення ( $T = 2^4$ ), що дає більший "запас" помилки, але збільшує розмір шифротексту;
- *TiGER* компенсує меншу точність ( $T = 2$ ) використанням кодів корекції помилок.

### 3. Агресивність компресії:

- *Saber* використовує помірну компресію з параметрами  $\varepsilon_p$  та  $\varepsilon_T$ . Це дає достатньо бітів про запас для надійного дешифрування;
- *TiGER* застосовує дуже агресивну компресію:  $k_2 = 4$  біт для  $\mathbf{c}_1$  (з оригінальних 14 біт) та 1 біт для  $\mathbf{c}_2$  (зберігає лише знак). Така агресивна компресія *TiGER* можлива завдяки використанню корекції помилок XEf + D2.

Характеристика	<b>LightSaber</b>	<b>TiGER128</b>
<b>Базова проблема</b>	MLWR (Module-LWR)	RLWR + RLWE (гіbrid)
<b>Структура</b>	Вектори многочленів $k = 2$ модулі, $n = 256$	Один многочлен $k = 1, n = 512$
<b>Модулі</b>	$q = 2^{13}, p = 2^{10}$ $T = 2^4$ (повідомлення)	$q = 2^{14}, p = 2^{10}$ $T = 2^1$ (повідомлення)
<b>Відкритий ключ</b>	MLWR: $[\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}]_{p/q}$ Чисте округлення	RLWR: $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r}]_{p/q}$ Округлення + мала помилка
<b>Шифрування</b>	MLWR: $[\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{s}']$ Округлення	RLWE: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ Явні помилки
<b>Секрети</b>	Біноміальний розподіл $\mu = 10$	Розрідженні тернарні $h_s = 274$
<b>Коди корекції</b>	Немає	XEf + D2
<b>Компресія</b>	Помірна ( $\varepsilon_p, \varepsilon_T$ )	Агресивна ( $k_2 = 4, 1$ біт)

Таблиця 6.4: Порівняння Saber та TiGER

Порівняємо їхні характеристики згідно першого рівня NIST:

Метрика	LightSaber	TiGER128
<i>Безпека</i>		
Квантова безпека (біт)	128	128
Core-SVP $\beta$	511	483
DFP/R	$2^{-136}$	$2^{-120}$
<i>Розміри (байт)</i>		
Відкритий ключ $ pk $	672	804
Шифротекст $ ct $	736	804
Секретний ключ $ sk $	1568	1876
$ pk  +  ct $	1408	1608
<i>Особливості</i>		
Коди корекції	Немає	XEf + D2
Implicit rejection	Немає	$\epsilon$
Симетричність розмірів	Hi (672/736)	Так (804/804)

Таблиця 6.5: NIST 1 порівняння LightSaber та TiGER128

Можна спостерігати, що:

- 1) LightSaber є *найкомпактнішим* серед провідних кандидатів NIST першого рівня. А TiGER на 14% більший за загальними розмірами  $|pk| + |ct|$  (1608 vs 1408 байт).
- 2) Обидва мають схожі параметри безпеки, але LightSaber має трохи вищий Core-SVP  $\beta$  (+5.5%) та значно нижчий DFP/R ( $2^{-136}$  vs  $2^{-120}$ ). Saber виграє в консервативності параметрів.
- 3) Але TiGER має унікальні переваги, такі як:
  - **Коди корекції помилок** роблять TiGER стійкішим до апаратних помилок та fault injection атак;
  - **Implicit rejection** забезпечує додатковий захист від failure boosting атак;
  - **Симетричність розмірів ключів** ( $|pk| = |ct|$ ) спрощує управління пам'яттю (при реалізації).
- 4) А ”під капотом” обох алгоритмів маємо наступне:
  - *Saber* компактність і простота реалізації через застосування чистого MLWR підходу;
  - *TiGER* жертвує компактністю заради додаткових функцій безпеки та надійності.

Saber та TiGER можна назвати ”родичами” сім'ї LWR алгоритмів, які мають з різні пріоритети. Для застосувань, де критична мінімізація розмірів, Saber має перевагу. Для сценаріїв з високими вимогами до відмовостійкості та захисту від fault injection вже TiGER має певні переваги.

## 6.4 TiGER vs SMAUG

SMAUG (Speedy Module-1Attice-based mUltimedia Ghost) є найближчим ”родичем” для TiGER, оскільки обидва алгоритми мають спільну історію розробки та в результаті

були об'єднані в єдину специфікацію для участі у фінальному раунді конкурсу КроС. Порівняння TiGER з SMAUG дає глибше розуміння вигоди об'єднання двох підходів.

## Історія об'єднання

TiGER та SMAUG розроблялися незалежно, але з однією ціллю – створити ефективний KEM на основі RLWE/RLWR з малими розмірами (але підвищеною безпекою) та високою продуктивністю:

- **TiGER** (2020): Розроблений як еволюція RLizard, фокус на кодах виправлення помилок та гіbridному (RLWE/RLWR) підході;
- **SMAUG** (2021): Розроблений фокусуючись на модульній структурі та оптимізації для мультимедійних застосувань;
- **Об'єднання** (2022): Задля перемоги у конкурсі проекти об'єдналися, створивши єдину специфікацію "TiGER/SMAUG" та названою SMAUG-T з параметрами обох алгоритмів.

## Архітектурні схожості та відмінності

Ключові спостереження, які можна помітити:

### 1. Module vs Ring:

- SMAUG використовує модульну структуру ( $k = 2$ ) аналогічно до Kyber/Saber, що дає консервативніший підхід до безпеки. Цей модульний підхід дозволяє гнучкіше масштабувати безпеку через зміну  $k$ .
- TiGER використовує чисту кільцеву структуру ( $k = 1$ ), максимізуючи ефективність та компактність;

### 2. Коди корекції помилок:

- SMAUG використовує тільки XEf код для корекції одиночних помилок;
- TiGER додає другий рівень корекції (D2), що дублює біти для додаткової надійності;
- Подвійна корекція помилок в TiGER дозволяє використовувати агресивнішу компресію при збереженні низького рівня DFP/R.

### 3. Розміри модулів:

- SMAUG використовує менші модулі:  $q = 2^{11}$ ,  $p = 2^8$  – вимагають більшої обережності з відслідковуванням "помилок";
- В той час як TiGER використовує більші модулі:  $q = 2^{14}$ ,  $p = 2^{10}$ , але компенсує їх через використання чистої кільцевої структури та кодів корекції.

### 4. Цільове застосування:

- SMAUG оптимізований для мультимедійних застосувань та streaming, де важлива низька латентність;
- TiGER призначений для широкого використання, де цінується баланс між безпекою, розмірами та швидкодією.

Згребемо це все до компактного табличного вигляду:

Характеристика	SMAUG128	TiGER128
<b>Базові алгоритми</b>	MLWE + MLWR (гібрид на векторах)	RLWE + RLWR (гібрид на кільці)
<b>Структура</b>	Module: $k = 2, n = 256$	Ring: $k = 1, n = 512$
<b>Модулі</b>	$q = 2^{11}, p = 2^8$	$q = 2^{14}, p = 2^{10}$
<b>Секрети</b>	Біноміальний розподіл $\eta = 2$	Розріджені тернарні $h_s = 274$
<b>Коди корекції</b>	XEf	XEf + D2
<b>Компресія</b>	Помірна	Агресивна
<b>Implicit rejection</b>	$\epsilon$	$\epsilon$
<b>Target usage</b>	Мультимедіа, streaming	Загальне застосування(KEM, PKE)

Таблиця 6.6: Порівняння SMAUG та TiGER

Метрика	SMAUG128	TiGER128
<i>Безпека</i>		
Квантова безпека (біт)	128	128
Core-SVP $\beta$	492	483
DFP/R (орієнтовна)	$2^{-130}$	$2^{-120}$
<i>Розміри (байт)</i>		
Відкритий ключ $ pk $	672	804
Шифротекст $ ct $	800	804
$ pk  +  ct $	1472	1608

Таблиця 6.7: Числові характеристики SMAUG128 та TiGER128

Що можна сказати виходячи з цих цифр? Обидва алгоритми мають дуже близькі параметри безпеки (Core-SVP  $\beta$  відрізняється лише на 2%). SMAUG має трохи нижчу DFP/R завдяки консервативнішим параметрам. SMAUG є більш компактним приблизно на ~9%. Це досягається через використання менших модулів та оптимізовану компресію. Також TiGER має перевагу через подвійну систему корекції помилок (XEf & D2), що робить його стійкішим до різних атак та апаратних помилок.

## Стратегія об'єднання

Об'єднана специфікація TiGER/SMAUG (SMAUG-T) включає в себе:

- Єдина кодова база:** Спільна реалізація базових операцій (множення многочленів, гешування), а також застосування Implicit rejection для обох варіантів, уніфікованих геш-функцій (SHA3-256, SHAKE256) та спільна структура FO перетворення.
- Акцентування на параметрах та напрямку використання:** Користувач може обирати між TiGER (з акцентом на надійність) або SMAUG (акцент на компактність) залежно від сфери застосування, оскільки TiGER: Ring-based з подвійною корекцією – для загального використання, в той час як SMAUG: Module-based з одинарною корекцією помилок – для мультимедіа.

## **Переваги від цього об'єднання** такі:

1. В першу чергу це гнучкість. Користувачі можуть обирати оптимальний варіант (зміна параметрів) для конкретного цільового застосування;
2. Друга перевага – це ”спільний аудит” – тобто безпека обох алгоритмів аналізується заразом, що підвищує довіру до нього;
3. По третє – економія часу розробки, бо спільна кодова база зменшує дублювання зусиль;
4. І на останок – конкурентноспроможність. Об'єднана заявка сильніша через різноманітність у підходах.

Як підсумок вищепередованого, SMAUG та TiGER є комплементарними підходами в рамках родини RLWE/RLWR алгоритмів. Об'єднання двох алгоритмів створює гнучку екосистему, що покриває широкий спектр вимог постквантової криптографії.

## **6.5 Порівняння усіх перелічених алгоритмів**

Тут вже зведемо результати і зробимо комплексне порівняння TiGER з провідними постквантовими КЕМ алгоритмами за ключовими характеристиками: безпека, розміри, продуктивність та особливості реалізації, ну загалом як і робили до того.

### **Порівняння безпеки та розмірів:**

Всі дані взято для рівня безпеки NIST 1 (128 біт квантової безпеки).

1. Усі алгоритми забезпечують 128-бітну квантову безпеку (рівень NIST 1), але з різними значеннями Core-SVP  $\beta$  (block size):
  - *Kyber512* та *LightSaber* мають  $\beta \approx 510$ . Це дає невеликий запас порівняно з пороговим  $\beta = 512$  для 128-бітної безпеки;
  - *TiGER128* має  $\beta = 483$ , що є нижчим за еталонне значення, але це компенсується більш консервативними оцінками та використанням D2, XEf i implicit rejection.
2. TiGER128 має конкурентні розміри у порівнянні з іншими та володіє унікальною властивістю – однакові розміри  $|pk|$  та  $|ct|$  (обидва 804 байт):
  - Відкритий ключ (804 байт) близький до Kyber512 (800 байт) і трохи більший за LightSaber (672 байт);
  - Шифротекст (804 байт) трохи більший за Kyber512 (768 байт) та LightSaber (736 байт);

Алгоритм	Core-SVP $\beta$	$ pk $ (байт)	$ ct $ (байт)
<b>Kyber512</b>	512	800	768
<b>LightSaber</b>	511	672	736
<b>TiGER128</b>	483	804	804

Таблиця 6.8: Порівняння постквантових КЕМ (рівень NIST 1)

Для вищих рівнів безпеки (NIST 3 та NIST 5) TiGER також демонструє конкурентно спроможні характеристики:

<b>Рівень</b>	<b>Алгоритм</b>	$ pk  +  ct $ (байт)	<b>Відносна компактність</b>
<b>NIST 1</b>	Kyber512	1568	baseline(certificated)
	LightSaber	1408	-10%
	TiGER128	1608	+2.5%
<b>NIST 3</b>	Kyber768	2400	baseline(certificated)
	Saber	2304	-4%
	TiGER192	2976	+24%
<b>NIST 5</b>	Kyber1024	3168	baseline(certificated)
	FireSaber	3040	-4%
	TiGER256	3168	same

Таблиця 6.9: Порівняння розмірів для різних рівнів NIST

Можна бачити що: TiGER128 та TiGER256 мають конкурентні розміри порівняно з Kyber та Saber. TiGER192 має помітно більші розміри (+24% порівняно з Kyber768), що є компромісом за вищу надійність дешифрування (визначається по показнику DFP/R);

## Узагальнююче порівняння характеристик

У цю таблицю ми включимо усі параметри і особливості, які розглядали до цього, щоб зробити комплексний порівняльний аналіз на першому рівні NIST:

Характеристика	Kyber512	LightSaber	TiGER128	RLizard
<i>Параметри безпеки</i>				
Core-SVP $\beta$	512	511	483	450
DFP/R	$2^{-139}$	$2^{-136}$	$2^{-120}$	$2^{-128}$
<i>Розміри (байт)</i>				
$ pk $	800	672	804	1472
$ ct $	768	736	804	1312
$ sk $	1632	1568	1876	1536
$\Sigma$	3200	2976	3484	4320
<i>Особливості</i>				
Базова проблема	MLWE	MLWR	RLWE+RLWR	RLWE+RLWR
NTT	Так	Hi	Hi	Hi
Error correction codes	Hi	Hi	XEf+D2	Hi
Модулі	Простий	$2^k$	$2^k$	$2^k$
Статус	Standard NIST	Фіналіст	Кандидат	Попередник

Таблиця 6.10: Комплексне порівняння постквантових KEM (NIST 1)

З таблиці можна бачити, що Kyber є затвердженим NIST як ML-KEM стандарт, що робить його пріоритетним вибором для більшості застосувань. А TiGER є єдиним алгоритмом з інтегрованими кодами корекції помилок (XEf+D2), він також демонструє конкурентні розміри, близькі до Kyber та Saber, і значно кращі за RLizard та

залишається поки лиш цікавою альтернативою з унікальними характеристиками у задачах, де наведені його параметри становитимуть важоме критичне значення.

# **Розділ 7**

## **Перенесення атак та можливі покращення**

- 7.1 Аналіз слабких місць
- 7.2 Можливі вразливості через DFP/R
- 7.2 Meet-LWE атака (Alexander May)
- 7.3 CCA атаки на PKE (з роботи von Berg)
- 7.4 Атака з доступом до проміжного виводу декодування
- 7.5 Атака з урахуванням ХЕf корекції помилок
- 7.5 Side-channel attacks
- 7.6 Застосовність атак з інших RLWE/RLWR схем до TiGER

# **Розділ 8**

## **Практичне застосування та висновки**

- 8.1 Можливі сценарії використання TiGER (TLS, VPN, messaging)
- 8.2 Підсумки дослідження
- 8.3 Перспективи розвитку постквантової криптографії

# **Розділ 9**

**Результати власної реалізації**

# Bibliography

- [1] Peter W. Shor. «Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring». In: *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (1994), pp. 124–134. DOI: [10.1109/SFCS.1994.365700](https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700).
- [2] Wikipedia. *Post-quantum cryptography* — Wikipedia, The Free Encyclopedia. [Online; accessed 7-October-2025]. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Post-quantum\\_cryptography](https://en.wikipedia.org/wiki/Post-quantum_cryptography).
- [3] Oded Regev. «On lattices, learning with errors, random linear codes, and cryptography». In: *Journal of the ACM* 56.6 (2009), pp. 1–40. DOI: [10.1145/1568318.1568324](https://doi.org/10.1145/1568318.1568324).
- [4] Vadim Lyubashevsky, Chris Peikert, and Oded Regev. «On Ideal Lattices and Learning with Errors over Rings». In: *Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2010*. 2010, pp. 1–23. DOI: [10.1007/978-3-642-13190-5\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-13190-5_1).
- [5] Abhishek Banerjee, Chris Peikert, and Alon Rosen. «Pseudorandom Functions and Lattices». In: *Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2012*. 2012, pp. 719–737. DOI: [10.1007/978-3-642-29011-4\\_42](https://doi.org/10.1007/978-3-642-29011-4_42).
- [6] Jung Hee Cheon et al. «Lizard: Cut off the Tail! A Practical Post-Quantum Public-Key Encryption from LWE and LWR». In: *Security and Cryptography for Networks – SCN 2018*. 2018, pp. 160–177. DOI: [10.1007/978-3-319-98113-0\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-98113-0_9).
- [7] Joohee Lee et al. «RLizard: Post-quantum Key Encapsulation Mechanism for IoT Devices». In: *IEEE Access* 7 (2019), pp. 2080–2091. DOI: [10.1109/ACCESS.2018.2886964](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2886964).
- [8] Seunghwan Park et al. *TiGER: Tiny bandwidth key encapsulation mechanism for easy miGration based on RLWE(R)*. Cryptology ePrint Archive, Paper 2022/1651. <https://eprint.iacr.org/2022/1651>. 2022.
- [9] Eiichiro Fujisaki and Tatsuaki Okamoto. «Secure Integration of Asymmetric and Symmetric Encryption Schemes». In: *Advances in Cryptology – CRYPTO ’99*. 1999, pp. 537–554. DOI: [10.1007/3-540-48405-1\\_34](https://doi.org/10.1007/3-540-48405-1_34).
- [10] Eiichiro Fujisaki and Tatsuaki Okamoto. «Secure Integration of Asymmetric and Symmetric Encryption Schemes». In: *Journal of Cryptology* 26.1 (2013), pp. 80–101. DOI: [10.1007/s00145-011-9114-1](https://doi.org/10.1007/s00145-011-9114-1).
- [11] Kpqc Team. *Korean Post-Quantum Cryptography Competition*. <https://www.kpqc.or.kr>. 2023.
- [12] Jung Hee Cheon et al. *SMAUG-T: the Key Exchange Algorithm based on Module-LWE and Module-LWR*. Kpqc Round 2 Submission. Version 3.0. 2024.

- [13] Miklós Ajtai. «The shortest vector problem in  $L_2$  is NP-hard for randomized reductions». In: *Proceedings of the thirtieth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1998, pp. 10–19. DOI: [10.1145/276698.276705](https://doi.org/10.1145/276698.276705).
- [14] Joppe Bos et al. «CRYSTALS-Kyber: A CCA-Secure Module-Lattice-Based KEM». In: *2018 IEEE European Symposium on Security and Privacy (EuroS&P)*. 2018, pp. 353–367. DOI: [10.1109/EuroSP.2018.00032](https://doi.org/10.1109/EuroSP.2018.00032).
- [15] Jan-Pieter D’Anvers et al. «Saber: Module-LWR based key exchange, CPA-secure encryption and CCA-secure KEM». In: *Progress in Cryptology – AFRICACRYPT 2018*. 2018, pp. 282–305. DOI: [10.1007/978-3-319-89339-6\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-319-89339-6_16).
- [16] Siemen Dhooghe and Svetla Nikova. «My Gadget Just Cares For Me - How NINA Can Prove Security Against Combined Attacks». In: *Progress in Cryptology – INDOCRYPT 2018*. 2018, pp. 35–55. DOI: [10.1007/978-3-030-05378-9\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-05378-9_3).
- [17] Jan-Pieter D’Anvers, Siemen Dhooghe, and Frederik Vercauteren. «On the Impact of Decryption Failures on the Security of NTRU Encryption». In: *Advances in Cryptology – ASIACRYPT 2019*. 2019, pp. 565–598. DOI: [10.1007/978-3-030-34621-8\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-030-34621-8_20).
- [18] Dennis Hofheinz, Kathrin Hövelmanns, and Eike Kiltz. «A Modular Analysis of the Fujisaki-Okamoto Transformation». In: *Theory of Cryptography – TCC 2017*. 2017, pp. 341–371. DOI: [10.1007/978-3-319-70500-2\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70500-2_12).
- [19] Kathrin Hövelmanns et al. «Generic Authenticated Key Exchange in the Quantum Random Oracle Model». In: *Public-Key Cryptography – PKC 2020*. 2020, pp. 389–422. DOI: [10.1007/978-3-030-45388-6\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-030-45388-6_14).