Relaciones de recurrencia

Etiquetas

¿Qué son las Relaciones de Recurrencia?

Una **relación de recurrencia** (o **recurrencia**) describe cómo calcular cada elemento de una sucesión basándose en uno o más elementos anteriores. En otras palabras, no se define la fórmula explícita del término a_n, sino que se proporciona una relación que permite obtener $a_{n+1}(\text{o } a_{n+k})$ a partir de valores previos.

Ejemplo sencillo

1. **Recurrencia de primer orden**:

   $$a_{n+1} = a_n + 2, \quad \text{con } a_0 = 0.$$

   - Esto indica que cada nuevo término se obtiene sumándole 2 al anterior.
   - La sucesión se construiría así:

     $$a_0 = 0, \quad a_1 = a_0 + 2 = 2, \quad a_2 = a_1 + 2 = 4, \quad a_3 = 6, \ldots$$

2. **Recurrencia de primer orden con factor**:

$$a_{n+1} = 3\, a_n, \quad \text{con } a_0 = 1.$$

- Cada término es el triple del anterior.
- La sucesión sería:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 9, \quad a_3 = 27, \dots$$

Resolviendo la Recurrencia

Existen distintas maneras de resolver recurrencias y expresar su **solución en forma cerrada**:

1. **Método iterativo** (desenrollar la recurrencia paso a paso).
2. **Resolución de ecuación característica** (para recurrencias lineales con coeficientes constantes).
3. **Herramientas algebraicas** (como RSolve en Mathematica, que encuentran la solución general).

Ejemplo de segundo orden

Una **recurrencia lineal de segundo orden** típica es:

$$a_{n+2} = 5\, a_{n+1} - 6\, a_n, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 5.$$

- Para encontrar la forma cerrada, se suele proponer una solución del tipo , se sustituye y se encuentra la ecuación:

$$a_n = r^n$$

$$r^{n+2} = 5r^{n+1} - 6r^n \quad \Rightarrow \quad r^2 = 5r - 6.$$

  - De ahí, , por lo que o .

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \implies (r-2)(r-3) = 0$$

$$r = 2$$

$$r = 3$$

- La solución general es .

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$

- Usando las condiciones iniciales :

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 5$$

Resolviendo el sistema, obtienes los valores concretos de y .

AA

BB

$$a_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 = A + B = 2$$

$$a_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 = 2A + 3B = 5$$

AA

BB

Otros ejemplos y casos

- **Recurrencias no lineales**: por ejemplo . Estas pueden ser más complejas de resolver.

$$a_{n+1} = a_n^2 + 1$$

- **Recurrencias con dependencia de n**: . A menudo requieren métodos especiales.

$$a_{n+1} = n\, a_n + 1$$

- **Recurrencias con combinaciones de términos anteriores**: como .

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_{n+1} + 3a_n$$

Conclusión

Las relaciones de recurrencia son herramientas poderosas para describir y analizar secuencias y procesos iterativos. Su estudio va desde casos muy sencillos (por ejemplo, $a_{n+1} = a_n + c$) hasta procesos mucho más complejos que se pueden modelar con recurrencias de mayor orden y coeficientes variables.

Otros ejemplos y casos

- **Recurrencias no lineales**: por ejemplo . Estas pueden ser más complejas de resolver.

$$a_{n+1} = a_n^2 + 1$$

- **Recurrencias con dependencia de n**: . A menudo requieren métodos especiales.

$$a_{n+1} = n\, a_n + 1$$

- **Recurrencias con combinaciones de términos anteriores**: como .

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_{n+1} + 3a_n$$