Abra un sitio web: código 37.

Webmix sobre el empleo de los comandos del paquete **VilCretas** estudiados en el capítulo.

1.5 Ejercicios

Se insta al estudiante a resolver el conjunto de ejercicios propuestos con el objetivo de complementar su preparación en cada uno de los contenidos relacionados con el tema de recursividad.

Ejercicios

1.5.1 ¿Qué ocurre con la función recursiva `Factoriales` desarrollada en la sección 1.1, si `n` es un número entero negativo? Justifique su respuesta.

Genere un programa recursivo de pila en *Wolfram Mathematica* que calcule el resultado de:

1.5.2 $\sum_{i=1}^{n-5} \frac{i}{i+1}$.

1.5.3 $\sum_{i=14}^{n+5} \left(\frac{i}{2^{i-4}}\right)^2$.

1.5.4 $\prod_{i=1}^{n-10} (3i-1)$.

1.5.5 $\prod_{i=8}^{n+3} \left(\frac{3^{i+1}}{i+1}\right)$.

1.5.6 $\sum_{i=1}^{n+1} \left[\left(\prod_{j=2}^{i-1} (2j-5)\right) i\right]$.

1.5.7 Construya una recursividad de cola para cada uno de los ejercicios del punto 2.

Elabore un programa recursivo de pila y de cola en *Wolfram Mathematica* que calcule el resultado de:

1.5.8 $a_n = 5a_{n-1} + 2n - \sqrt{2}$ con $a_5 = 2$.

1.5.9 $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ con $a_1 = -10$ y $a_2 = -19$.

1.5.10 $a_n = -36a_{n-2} + a_{n-3} + 12a_{n-1}$ con $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ y $a_3 = \sqrt[5]{2}$.

1.5.11 $9a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - 2a_{n-4}$ con $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$ y $a_5 = 4$.

1.5.12 Mediante un programa recursivo resuelva el siguiente problema: supónga que una persona inicia un ahorro en un banco. Si el monto de intereses a pagar cada mes por la entidad bancaria es de un 5 % y el capital inicial fue de *US* \$200, ¿cuánto dinero tendrá la persona en su cuenta al cabo de un año?

1.5.13 Los llamados números de *Catalan* en honor al matemático belga *E. Catalan* se definen así:

$$C_n = \frac{2\,(2n-1)}{n+1} C_{n-1},\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ con } C_0 = 1$$

Construya un programa recursivo en *Mathematica* que retorne el n–ésimo número de *Catalan*. Genere la lista de los primeros treinta números de *Catalan* usando esa recursividad.

1.5.14 Realice un programa en *Wolfram Mathematica* que implemente la siguiente recursividad para calcular el máximo común divisor entre dos números enteros positivos o cero:

$$MCD\,(n,m) = \begin{cases} n \text{ si } m = 0 \\ m \text{ si } n = 0 \\ MCD\,(n-m,m) \text{ si } n \geq m \\ MCD\,(n,m-n) \text{ si } n < m \end{cases}$$

Recorra paso a paso el cálculo de $MCD\,(120,144)$.

1.5.15 El matemático alemán *Wilhelm Ackermann* propuso una función doblemente recursiva para números n y m enteros positivos o cero, definida como sigue:

$$A\,(m,n) = \begin{cases} n+1 \text{ si } m = 0 \\ A\,(m-1,1) \text{ si } m > 0 \text{ y } n = 0 \\ A\,(m-1, A\,(m,n-1)) \text{ si } m > 0 \text{ y } n > 0 \end{cases}$$

En ocasiones ésta es utilizada para comparar la eficiencia de compiladores al crecer muy rápidamente. Genere en *Wolfram Mathematica* dicha función. Empleando el método elaborado, conjeture una fórmula para $A\,(1,n)$, $A\,(2,n)$ y $A\,(3,n)$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1.5.16 Construya una recursividad de cola en los ejemplos 1.5 y 1.8.

1.5.17 Elabore un programa recursivo en *Wolfram Language* que convierta un número en base decimal a base dos.

1.5.18 Implemente una recursividad que determine si dado un entero positivo n éste es un número perfecto. Se dice que $n \in \mathbb{N}$ es perfecto si al sumar todos sus divisores propios el resultado es igual a n.

1.5.19 Realice un programa recursivo que determine todas las descomposiciones de un número natural n como la suma de dos números enteros no negativos. Por ejemplo, si se invocara el programa para $n = 5$, devolvería: $4+1$, $3+2$, $2+3$, $1+4$, $0+5$.

1.5.20 Por medio del software *Mathematica*, implemente un algoritmo recursivo que calcule el mínimo común múltiplo entre dos números enteros positivos n y m. Utilice la instrucción `LCM[n,m]` para verificar algunos resultados.

1.5.21 Modifique el algoritmo *quicksort* compartido en el ejemplo 1.10, con el objetivo de ordenar una lista de números reales de forma descendente.

1.5.22 Construya un programa recursivo en *Wolfram Mathematica* para hallar el máximo de una lista de n números reales. Sugerencia: utilice como base el algoritmo *quicksort*.

Descargue un archivo: código 38.

Solución de los ejercicios propuestos.

Ejercicios

Por medio de los comandos **`GraficaRRL`** y **`RT`**, grafique y obtenga los primeros veinte términos de las siguientes sucesiones definidas por una relación de recurrencia.

2.3.1 $a_n = -4a_{n-1}$ con $a_0 = 5$.

2.3.2 $a_n = 3n \cdot a_{n-1} + 3^n$ con $a_1 = 1$.

2.3.3 $a_n = 4n \cdot a_{n-1} - 2a_n$ con $a_2 = \frac{5}{2}$.

2.3.4 $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$ con $a_0 = 1$ y $a_1 = 3$.

2.3.5 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ con $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$ (a esta sucesión se le llama sucesión de *Lucas* en honor a su creador, el matemático francés *Édouard Lucas*, quien también desarrolló el juego de las torres de *Hanoi*).

2.3.6 $a_n = \sqrt{2}a_{n-2} + 5a_{n-3} - a_{n-1}$ con $a_5 = 7$, $a_6 = -8$ y $a_7 = \frac{3}{2}$.

2.3.7 $(a_n)^3 = 5\,(a_{n-2})^3 - \frac{7}{2}\,(a_{n-1})^3$ con $a_3 = -\frac{2}{3}$ y $a_2 = \sqrt{2}$. Sugerencia: para trazar la gráfica recurra a la instrucción **`DiscretePlot`** de *Wolfram Mathematica*.

Encuentre una relación de recurrencia que represente la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.3.8 $a_n = \{1, 3, 10, 41, 206, 1237, \ldots\}$.

2.3.9 $a_n = \left\{5, -8, 29, -\frac{109}{2}, \frac{689}{4}, -\frac{2869}{8}, \ldots\right\}$.

2.3.10 $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \ \forall n,\ n \in \mathbb{N}$.

2.3.11 $a_n = 3^{n+1}\,(12 - n) \ \forall n,\ n \in \mathbb{N}$.

Resuelva paso a paso las relaciones de recurrencia dadas a continuación. Verifique el resultado, si es posible, a través del software *Wolfram Mathematica*.

2.3.12 La relación de recurrencia obtenida en el ejemplo 2.4 que cuenta el número de pasos necesarios para solucionar el juego de las torres de *Hanoi*.

2.3.13 $a_n = 3^n a_{n-1}$ con $a_0 = 2$.

2.3.14 $a_n = 2n \cdot a_{n-1}$ con $a_1 = 3$.

2.3.15 $a_n = 5a_{n-1} + 2n - \sqrt{2}$ con $a_5 = 2$.

2.3.16 $a_n = \sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{3}}$ con $a_0 = 1$.

2.3.17 $a_n = 7a_{n-1} - a_{n-2}$ con $a_0 = 1$ y $a_1 = 5$.

2.3.18 $5a_n = 4a_{n-2} - 5a_{n-1}$ con $a_2 = 2$ y $a_3 = 1$.

2.3.19 $a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$ con $a_0 = 5$, $a_1 = 2$ y $a_2 = 3$.

2.3.20 $a_n = 500a_{n-3} + 20a_{n-1} - 625a_{n-4} - 150a_{n-2}$ con $a_1 = a_0 = 1$ y $a_2 = a_3 = 3$.

2.3.21 $\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}}$ con $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$.

2.3.22 $(a_n)^2 = (a_{n-2})^2 - 2(a_{n-1})^2$ con $a_0 = -2$ y $a_1 = \sqrt{5}$.

Resuelva los siguientes problemas. Verifique con la ayuda del software *Mathematica*.

2.3.23 Una persona tiene n dólares y cada día compra pan a US \$1, leche a US \$2 o café a US \$2. Si a_n representa el número de formas en las que puede gastar el dinero, encuentre una relación de recurrencia para a_n. Resuelva dicha relación de recurrencia.

2.3.24 La población mundial en el año 2003 se estimó en 7.1 billones de personas y se calculó un crecimiento global de 1.2% al año. Encuentre una relación de recurrencia que determine después del año 2003 la población mundial. Resuelva la relación de recurrencia. Calcule una estimación del número de personas en el mundo para el año 2050.

Conjeture la solución general de las siguientes relaciones de recurrencia con $j \in \mathbb{N}$. Sugerencia: utilice el comando **RRCP** del paquete **VilCretas**. Para una ayuda sobre su empleo consulte la página 579 de este libro.

2.3.25 $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2j$ con $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

2.3.26 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + j$ con $a_2 = a_3 = 1$.

2.3.27 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - j$ con $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

Descargue un archivo: código 69.

Solución de los ejercicios propuestos.

Descargue un archivo: código 102.

Cuaderno interactivo sobre los contenidos del capítulo.

Descargue un archivo: código 103.

Quiz interactivo de repaso sobre los contenidos del capítulo.

Abra un sitio web: código 104.

Webmix sobre el empleo de los comandos del paquete **VilCretas** estudiados en el capítulo.

3.5 Ejercicios

El conjunto de ejercicios propuestos brindará al estudiante un soporte adecuado, con el objetivo de fortalecer sus conocimientos en cada uno de los contenidos relacionados con el tema de análisis de algoritmos.

Ejercicios

Recurriendo al comando `PruebaADA2` determine cuál algoritmo es más eficiente en tiempo de ejecución.

3.5.1 Una recursividad de pila y otra de cola para encontrar los números de *Fibonacci*.

3.5.2 Los métodos `a` y `Recurrencia` con `a[n_] := 2 a[n - 1] - 3 a[n - 2]`, `a[1] = Sqrt[2]`, `a[2] = 1` y `Recurrencia[n_] := If[n == 1, Sqrt[2], If[n == 2, 1, 2 Recurrencia[n - 1] - 3 Recurrencia[n - 2]]]`.

3.5.3 Los métodos `MCD1` y `MCD2` que determinan el máximo común divisor entre dos números enteros, donde `MCD1[n_, m_] := If[n == 0, m, MCD1[Mod[m, n], n]]` y `MCD2[n_, m_] := If[n == 0, m, If[m == 0, n, If[n >= m, MCD2[n - m, m], MCD2[n, m - n]]]]`. Sugerencia: tome para alguno de los dos números enteros un valor fijo.

3.5.4 Las funciones `Seleccion` e `Insercion` del paquete **VilCretas**.

3.5.5 Los algoritmos de la burbuja y ordenamiento rápido (*quicksort*).

Demuestre las siguientes igualdades y represente gráficamente utilizando el *software* Wolfram *Mathematica*.

3.5.6 $a_j n^j + a_{j-1} n^{j-1} + \cdots + a_0 = \Omega\left(n^j\right)$.

3.5.7 $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \Theta(\ln n)$.

3.5.8 $\dfrac{n^3+5}{5n+2} = O\left(n^2\right)$.

3.5.9 $n \ln n = O\left(n^2\right)$.

3.5.10 $n^{2^n} + n^{n^2} = O\left(n^{2^n}\right)$.

3.5.11 $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \Theta\left(n^3\right)$.

Halle una notación O grande tan buena como sea posible para las siguientes funciones.

3.5.12 $7^n + 10n^2 + 8n^3 + 3^n$.

3.5.13 $\left(2^n + n^2\right)\left(5n^3 + 5^n\right)$.

3.5.14 $(n^n + n2^n + 3^n)(n! + 3^n)$.

3.5.15 $\left(n^3 + n^2 \ln n\right)(\ln n + 1) + (6 \ln n + 1)\left(n^4 + 2\right)$.

3.5.16 $(n + \ln(n+1) + 1)^2 + (\ln n + 1)\left(n^3 + 1\right)$.

3.5.17 El algoritmo de “selección” es un método de ordenamiento sobre una lista de datos L. Se basa en buscar el máximo de L e intercambiar este valor con el elemento ubicado en la última posición. Posteriormente, se aplica el mismo razonamiento sobre la lista L menos su último dato y se continúa así, hasta llegar a una lista de longitud uno. La instrucción `Seleccion` del paquete **VilCretas** ofrece una implementación. Encuentre para el peor de los casos una notación O grande.

Determine una notación Θ en la peor situación para los siguientes métodos. Represente gráficamente en *Mathematica*.

3.5.18 `Programa[n_]:=Module[{p = 1}, For[i = 0, i <= n - 2, For[j = 1, j <= Floor[i/2], p = p + 1; j++]; i++]; Return[p]].`

3.5.19 `Programa[n_] := Module[{p = 1}, While[i <= 2n, p = p + 1; i = i + 2]; Return[p]].`

3.5.20 `Programa[n_] := Module[{p = 1, i = n}, While[i >= 1, p *= 2; i = Floor[i/5]]; Return[p]].`

3.5.21 `Programa[n_] := Module[{p = 1, i = n/2}, While[i >= 1, For[j = 1, j <= i, p = p * 2; j++]; i = Floor[i/Sqrt[5]]]; Return[p]].`

Conjeture para cuáles valores enteros positivos de j se satisface las notaciones asintóticas $f(n) = O\left(g(n)\right)$, $f(n) = \Omega\left(g(n)\right)$ y $f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$.

3.5.22 $f(n) = \frac{2}{3}n^3 + (\ln n)^5$ y $g(n) = n^j$.

3.5.23 $f(n) = \dfrac{n^2 + 3\ln n}{n^5+1}$ y $g(n) = n^j$.

3.5.24 $f(n) = n^{6j} - n^5 + 2n - 4$ y $g(n) = n^j$.

3.5.25 $f(n) = \dfrac{n^8}{n^j + 1}$ y $g(n) = (\ln(n))^j$.

3.5.26 $f(n) = \dfrac{n^{\frac{1}{j}} (\ln n)^{-5j}}{n^{\frac{1}{j}} + 1}$ y $g(n) = (\ln n)^{-5j}$.

Descargue un archivo: código 105.

Solución de los ejercicios propuestos.

Ejercicios

4.5.1 Encuentre con ayuda de *Wolfram Mathematica* el producto cartesiano entre A y B, siendo $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a$ un número par, $a \leq 500\}$ y $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b$ un número impar, $b \leq 500\}$. ¿Cuál es la cardinalidad de $A \times B$?

4.5.2 Grafique $A \times B$ por medio del software *Mathematica*, si $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 5\}$ y $B = \{b \in \mathbb{R} \mid -10 \leq b \leq 6\}$.

4.5.3 Halle el dominio y el rango de la relación binaria R dada por: aRb sí y solo sí el mínimo común múltiplo entre a y b es igual a 300, con $a \in A = \{1, 3, ..., 99\}$ y $b \in B = \{2, 4, \ldots, 100\}$. ¿Cuál es el máximo valor del mínimo común múltiplo donde la relación R es distinta de vacío? Sugerencia: utilice el comando **`LCM`** de *Mathematica* que calcula el mínimo común múltiplo.

4.5.4 Represente en el plano cartesiano la relación binaria R: aRb siendo a y b dos números reales, sí y solo sí $\frac{a^2}{36} + \frac{b^2}{49} = 1$. ¿Cuál es el domino de R? ¿Cuál es el ámbito de R? Determine si los pares ordenados de L pertenecen a la relación R con:

$$L = \left\{ \left(\sqrt{2}, \frac{7}{3}\sqrt{\frac{17}{2}}\right), \left(5\sqrt{2}, \frac{7}{3}\sqrt{\frac{29}{2}}\right), \left(2\sqrt{7}, \frac{7\sqrt{2}}{3}\right), \left(\sqrt{2}, \frac{7}{3}\sqrt{\frac{53}{2}}\right), \left(-3, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right), \right.$$

$$\left. \left(\sqrt{3}, -\frac{7}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}\right), \left(-3, \frac{7\sqrt{11}}{2}\right), \left(\sqrt{7}, -\frac{7\sqrt{29}}{6}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{7\sqrt{143}}{12}\right), (0, -7) \right\}$$

4.5.5 Sea R_1 la relación binaria: $aR_1b \Leftrightarrow a \leq b^2$, siendo a, $b \in A = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$. Encuentre explícitamente los pares ordenados de R_1. Determine usando la instrucción **`ElementRelBinQ`** si $6R_13$, $84R_196$, $24R_12$, $98R_110$ y $38R_16$.

Halle los pares ordenados que constituyen las siguientes relaciones binarias definidas sobre el conjunto A indicado.

4.5.6 $R_2 = \{(a, b) \mid a + b \leq 20\}$ con $A = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$.

4.5.7 $aR_3b \Leftrightarrow a$ y b son números palíndromos con $A = \{11, 13, 17, 19, 21, 22, 23, 29, 32, 51, 72, 83, 89, 97, 113, 121, 127, 222, 312, 723\}$.

4.5.8 $aR_4b \Leftrightarrow a^2 - b^2$ es múltiplo de 5 con $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4.5.9 $aR_5b \Leftrightarrow$ el residuo de la división $(a-3) \div 3$ es igual al residuo de $(b-3) \div 3$ donde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4.5.10 $R_6 = \{(a, b) \mid a - b \geq 3\}$ con $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4.5.11 $aR_7b \Leftrightarrow \left|a^3 + b^2\right| = 3k$ con $k \in \mathbb{Z}$ donde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4.5.12 Grafique en el plano cartesiano las relaciones binarias R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 y R_7. Encuentre una matriz y un grafo que las represente.

Resuelva las operaciones señaladas a continuación, usando la definición y también matrices booleanas.

4.5.13 $\overline{R_1^{-1}}$ y $R_1 o R_1$.

4.5.14 $\overline{R_2 o R_2}$ y $(R_2 o R_2)\, o R_2$.

4.5.15 $R_3^{-1} \cup R_3$ y $R_3 \cap R_3^{-1}$.

4.5.16 $\overline{R_1^{-1} \cup R_2^{-1}}$ y $R_1^{-1} o R_2^{-1}$.

4.5.17 $(R_6 \cup R_5)^{-1}$ y $\overline{\left(\overline{R_4 \cap R_7}\right)^{-1}}$.

4.5.18 $\left(\left(\overline{R_5} \cap R_6^{-1}\right) \cup R_4\right) o \overline{R_7}$.

4.5.19 $\left(\left(\overline{\overline{R_7} \cap R_5^{-1}}\right)^{-1} o \overline{R_6}\right) \cup R_4^{-1}$.

4.5.20 Clasifique como reflexiva, antisimétrica, transitiva, de equivalencia y de orden parcial, las relaciones R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 y R_7. Justifique su respuesta.

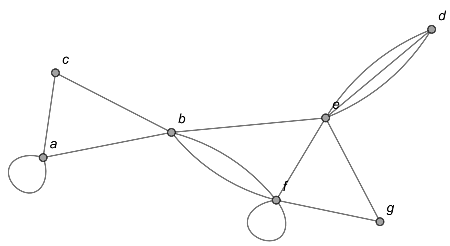
4.5.21 Construya con ayuda del comando `SetPartitions`, todas las relaciones de equivalencia que se obtienen de las particiones de longitud 2 sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Descargue un archivo: código 153.

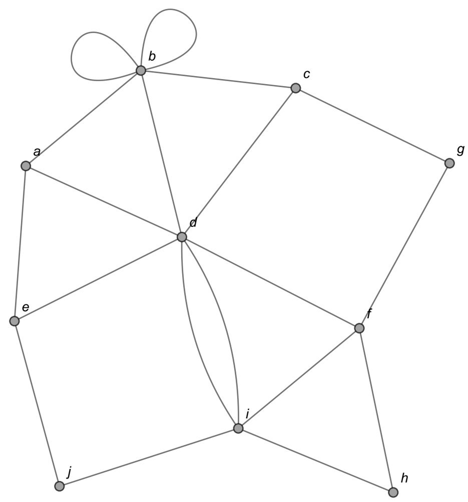
Solución de los ejercicios propuestos.

Ejercicios

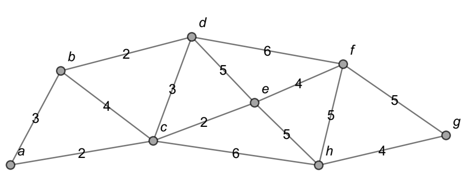
Considere los siguientes grafos y halle lo solicitado.



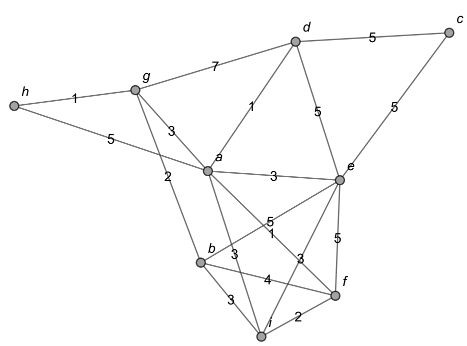
Grafo 1



Grafo 2



Grafo 3



Grafo 4

5.5.1 Un circuito de longitud mayor o igual a 10.

5.5.2 Un camino no circuital de longitud mayor o igual a 10.

5.5.3 Las valencias de cada vértice.

5.5.4 El número de aristas tomando como base los grados de los nodos.

5.5.5 Determine sobre los grafos 3 y 4, si existe un circuito o una trayectoria de *Euler*. Encuentre un camino de ese tipo utilizando el algoritmo de *Fleury*, en caso de existir.

5.5.6 Determine sobre los grafos 3 y 4, si hay condiciones suficientes para garantizar la existencia de un circuito de *Hamilton*. Halle un circuito hamiltoniano si éste es contenido por el grafo.

5.5.7 Construya una matriz de adyacencia y una matriz de incidencia asociadas a los grafos 1, 2, 3 y 4.

5.5.8 Construya una matriz de adyacencia de pesos para los grafos 3 y 4.

Represente los siguientes grafos en *Wolfram Mathematica*, dada una matriz de adyacencia de pesos. Asuma los vértices como letras consecutivas del abecedario iniciando en a.

5.5.9 Grafo 5 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5.5.10 Grafo 6 : $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 15 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 9 & 2 & 1 \\ 15 & 1 & 9 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.5.11 Grafo 7 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

5.5.12 Grafo 8 : $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

5.5.13 Grafo 9 : $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 & 7 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 6 & 3 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 0 & 6 & 6 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 6 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & 0 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 2 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

5.5.14 Grafo 10 : $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 0 & 2 & 8 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 8 & 1 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 0 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.5.15 Grafo 11 : $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 6 & 2 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 2 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 4 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 4 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5.5.16 Grafo 12 : $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 9 & 9 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 9 & 10 & 0 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 9 & 0 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 10 & 4 & 0 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 2 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 9 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 3 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

5.5.17 En los grafos 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12 determine si existe una trayectoria o un circuito de *Euler*. Halle un camino de ese tipo si corresponde. Además, establezca si hay condiciones suficientes para la existencia de un circuito de *Hamilton* e indicar uno si el grafo lo contiene.

5.5.18 Aplique el algoritmo de *Dijkstra* para hallar la longitud de un camino más corto y una trayectoria de longitud mínima, sobre los grafos: 3 de a a h, 4 de a a h, 5 de a a c, 6 de a a d, 7 de a a d, 8 de c a g, 9 de b a g, 10 de b a g, 11 de c a e y 12 de b a h.

5.5.19 Encuentre la longitud de un camino más largo y una trayectoria de longitud máxima, sobre los grafos: 3 del vértice a al nodo g y 4 del nodo b al vértice f.

5.5.20 ¿Cuántos circuitos simples de longitud 3 hay en K_3?, ¿cuántos circuitos simples de longitud 4 hay en K_4?, ¿cuántos circuitos simples de longitud 5 hay en K_5? Conjeture con ayuda de *Mathematica* una fórmula que determine ¿cuántos circuitos simples de longitud n hay en K_n?

5.5.21 Sea A una matriz de adyacencia de K_{20}. Compruebe que todos los elementos de la diagonal principal de A^k, son iguales entre sí, $1 \leq k \leq 10$, $k \in \mathbb{N}$. Conjeture con ayuda de *Mathematica* una fórmula que exprese el valor constante de la diagonal principal de A^k, $\forall k$, $k \in \mathbb{N}$.

5.5.22 Considere los grafos rueda, estrella, ciclo, camino y red presentados en la página 605. ¿Pueden contener circuitos de *Euler* o de *Hamilton?* ¿Qué condiciones deben satisfacer en caso afirmativo?

Descargue un archivo: código 227.

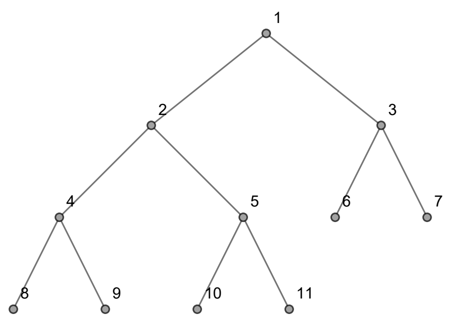
Solución de los ejercicios propuestos.

6.6 Ejercicios

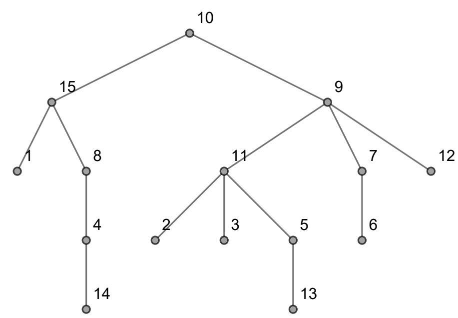
Se insta al estudiante a resolver el conjunto de ejercicios propuestos.

Ejercicios

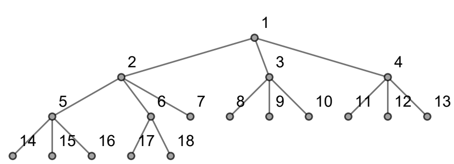
Considere los siguientes árboles:



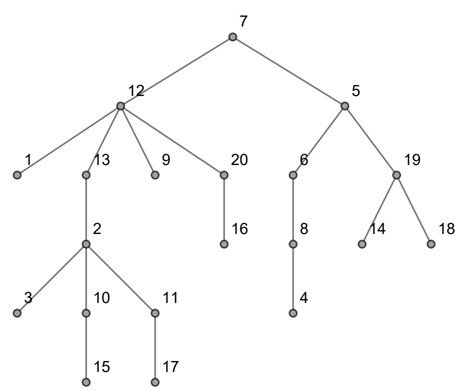
Árbol 1



Árbol 2



Árbol 3



Árbol 4

6.6.1 Justifique teóricamente que dichos grafos son árboles.

6.6.2 Halle su orden, los nodos terminales y su altura.

6.6.3 ¿Los árboles son completos?, explique.

6.6.4 ¿Los árboles son balanceados?, justifique.

6.6.5 Construya cada árbol en el software *Wolfram Mathematica*.

Determine un árbol binario de códigos de *Huffman* no optimizado y optimizado, para codificar las siguientes expresiones. Encuentre la codificación correspondiente.

6.6.6 ingeniería.

6.6.7 matemáticas.

6.6.8 laboratorio.

6.6.9 mississipis.

6.6.10 matematicadiscreta.

A través de un árbol binario de búsqueda almacene la información indicada y realice un recorrido prefijo, interfijo y postfijo.

6.6.11 $Datos = \{85, 31, 94, 47, 91, 35, 87, 48, 44, 99, 19, 95, 2, 22, 18, 90, 56, 7, 43, 39\}$.

6.6.12 $Datos = \{77, 14, 25, 86, 22, 81, 94, 65, 74, 41, 87, 35, 67, 85, 47, 42, 8, 2, 59, 92, 29, 44, 75, 64\}$.

6.6.13 $Datos = \{j, k, w, i, m, l, n, q, p, b, z, u, c, v, d, r, a, e, s\}$.

6.6.14 La frase de *Isaac Newton*: “en matemáticas no se deben despreciar ni los errores más diminutos”.

6.6.15 La frase de *Leonardo Da Vinci*: “ninguna investigación humana puede ser denominada ciencia si no pasa a través de pruebas matemáticas”.

Encuentre notaciones polaca y polaca inversa para las siguientes expresiones algebraicas:

6.6.16 $((a-c)\cdot d) \div (a+(b-c))$.

6.6.17 $(a\cdot b + c\cdot d) - (a \div b - d - e)$.

6.6.18 $a\cdot b + (c+d) + a \div b - f\cdot(d-e)$.

6.6.19 $\big((a+b)\cdot c + f\big)\cdot e - d\cdot\big((a+c) - f + d \div e\big)$.

6.6.20 $a\cdot(b - c\div d + e) - g\cdot\big(f\cdot(a+b)\div(c+d\cdot e)\big) + a\cdot b$.

Considere los grafos 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12 presentados en la sección de ejercicios del capítulo 5 (página 288).

6.6.21 Halle un árbol generador a lo “ancho” y a lo “largo”. Supónga el orden del abecedario.

6.6.22 Determine un árbol de expansión minimal, a través de los algoritmos de *Prim* y de *Kruskal*. Asuma el orden del abecedario.

Resuelva lo indicado a continuación, sobre los grafos 3 y 4 de la sección de ejercicios del capítulo 5, utilizando el orden $V = \{h, b, d, g, f, e, a, c\}$ y $V = \{i, g, c, b, f, a, e, h, d\}$, respectivamente.

6.6.23 Un árbol generador a lo “ancho” y a lo “largo”.

6.6.24 Un árbol de expansión mínima, por medio del algoritmo de *Prim*.

6.6.25 Un árbol generador de longitud máxima, recurriendo a los algoritmos de *Prim* y de *Kruskal*.

Resuelva lo solicitado.

6.6.26 Determine un árbol de expansión a lo "ancho" y a lo "largo" en los grafos: completo, rueda, estrella, ciclo y camino, de tamaño n, $2 \leq n \leq 10$, $n \in \mathbb{Z}$, usando el orden ascendente del conjunto de los números naturales, ¿es generalizable algún resultado?

Descargue un archivo: código 270.

Solución de los ejercicios propuestos.

Descargue un archivo: código 310.

Quiz interactivo de repaso sobre los contenidos del capítulo.

Abra un sitio web: código 311.

Webmix sobre el empleo de los comandos del paquete **VilCretas** estudiados en el capítulo.

Se finaliza compartiendo con el estudiante algunos ejercicios de repaso.

7.5 Ejercicios

Se invita al alumno a fortalecer lo aprendido en el capítulo, mediante los siguientes ejercicios.

Ejercicios

Realice el diagrama de transición de las siguientes máquinas de estado finito:

7.5.1 $M_1 = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \Omega)$, con $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$, $\tau = \{a, b\}$, $\delta = \{0, 1, 2\}$, $\sigma^* = \sigma_0$ y:

	Δ		Ω	
	a	b	a	b
σ_0	σ_1	σ_2	1	0
σ_1	σ_2	σ_1	2	1
σ_2	σ_0	σ_1	2	0

7.5.2 $M_2 = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \Omega)$, con $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\delta = \{0, 1\}$, $\sigma^* = \sigma_2$ y:

	Δ			Ω		
	a	b	c	a	b	c
σ_0	σ_1	σ_2	σ_0	1	0	1
σ_1	σ_0	σ_1	σ_2	0	1	1
σ_2	σ_1	σ_0	σ_2	0	1	0

7.5.3 $M_3 = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \Omega)$, con $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\delta = \{0, 1\}$, $\sigma^* = \sigma_3$ y:

	Δ			Ω		
	a	b	c	a	b	c
σ_0	σ_3	σ_1	σ_0	0	1	1
σ_1	σ_3	σ_1	σ_3	1	0	0
σ_2	σ_0	σ_1	σ_2	0	1	0
σ_3	σ_3	σ_3	σ_0	1	0	1

7.5.4 $M_4 = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \Omega)$, con $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\delta = \{0, 1\}$, $\sigma^* = \sigma_1$ y:

	Δ			Ω		
	a	b	c	a	b	c
σ_0	σ_3	σ_3	σ_1	0	0	1
σ_1	σ_0	σ_1	σ_2	0	1	1
σ_2	σ_2	σ_0	σ_3	1	0	0
σ_3	σ_0	σ_2	σ_3	0	1	0

7.5.5 $M_5 = (\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \Delta, \Omega)$, con $\sigma = \{\phi$, $\{\sigma_0\}$, $\{\sigma_1\}$, $\{\sigma_2\}$, $\{\sigma_0, \sigma_1\}$, $\{\sigma_0, \sigma_2\}$, $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}\}$, $\tau = \{a, b\}$, $\delta = \{0, 1\}$, $\sigma^* = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ y:

	Δ		Ω	
	a	b	a	b
ϕ	$\{\sigma_0, \sigma_1\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$	1	0
$\{\sigma_0\}$	ϕ	$\{\sigma_0\}$	1	0
$\{\sigma_1\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1\}$	$\{\sigma_0, \sigma_2\}$	0	1
$\{\sigma_2\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$	$\{\sigma_0, \sigma_2\}$	0	1
$\{\sigma_0, \sigma_1\}$	$\{\sigma_1, \sigma_2\}$	$\{\sigma_2\}$	1	0
$\{\sigma_0, \sigma_2\}$	$\{\sigma_1\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1\}$	0	1
$\{\sigma_1, \sigma_2\}$	ϕ	ϕ	0	1
$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$	$\{\sigma_0\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$	1	1

Procese las hileras α de símbolos de entrada dadas, en las máquinas de estado finito M_1, M_2, M_3, M_4 y M_5. Muestre el recorrido correspondiente.

7.5.6 $\alpha = baaaaabbbbbabaaababa$.

7.5.7 $\alpha = aaababbaaabaaaababaa$.

7.5.8 $\alpha = abaabababaaabababaabba$.

7.5.9 $\alpha = bbbacbcbbacccbbabbbb$, exceptuando M_1 y M_5.

7.5.10 $\alpha = cbcccaabcacbbaabccaa$, exceptuando M_1 y M_5.

7.5.11 Determine si las máquinas M_1, M_2, M_3, M_4 y M_5 son autómatas de estado finito determinísticos, justificando detalladamente la respuesta. En caso de no serlo, modifique la máquina con el objetivo de transformala en un autómata.

7.5.12 Diseñe una máquina de estado finito que resuelva la resta no negativa entre dos números binarios. La tabla de reglas básicas para llevar a cabo la resta binaria entre dos *bits*, corresponde a:

$0 - 0 = 0$
$1 - 0 = 1$
$1 - 1 = 0$
$0 - 1 = 1$ y se lleva un 1

Utilice la máquina para efectuar la operación: $(11011101)_2 - (1110110)_2$. En la máquina elaborada, cuando se restan dos números binarios, ¿existe la posibilidad de finalizar en cualquier estado?, explique.

Elabore los diagramas de transición de los autómatas de estado finito determinísticos siguientes:

7.5.13 $A_1 : \sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\sigma^* = \sigma_1$, $\widehat{A} = \{\sigma_0\}$ y:

Δ	a	b	c
σ_0	σ_0	σ_0	σ_0
σ_1	σ_0	σ_1	σ_3
σ_2	σ_3	σ_3	σ_1
σ_3	σ_1	σ_2	σ_0

7.5.14 $A_2 : \sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\sigma^* = \sigma_0$, $\widehat{A} = \{\sigma_1, \sigma_3\}$ y:

Δ	a	b	c
σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_0	σ_0	σ_1
σ_2	σ_3	σ_0	σ_1
σ_3	σ_2	σ_2	σ_3

7.5.15 $A_3 : \sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$, $\tau = \{a, b, c, d\}$, $\sigma^* = \sigma_2$, $\widehat{A} = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ y:

Δ	a	b	c	d
σ_0	σ_2	σ_0	σ_1	σ_2
σ_1	σ_0	σ_1	σ_0	σ_2
σ_2	σ_0	σ_1	σ_0	σ_0

7.5.16 $A_4 : \sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b, c, d\}$, $\sigma^* = \sigma_3$, $\widehat{A} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ y:

Δ	a	b	c	d
σ_0	σ_2	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_0
σ_2	σ_3	σ_0	σ_3	σ_3
σ_3	σ_0	σ_2	σ_1	σ_2

7.5.17 $A_5 : \sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b, c, d\}$, $\sigma^* = \sigma_1$, $\widehat{A} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ y:

Δ	a	b	c	d
σ_0	σ_2	σ_0	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	σ_3	σ_3	σ_0
σ_2	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1
σ_3	σ_3	σ_0	σ_2	σ_2

Determine si las hileras α de símbolos de entrada dadas, son aceptadas en los autómatas de estado finito A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5. Muestre el recorrido correspondiente.

7.5.18 $\alpha = bbabbbaaccbccbaccbba$.

7.5.19 $\alpha = aaccbaabccacaaacaabb$.

7.5.20 $\alpha = ccbababaccaccabbddcc$, exceptuando A_1 y A_2.

7.5.21 $\alpha = cbcaccaabcacdcaadacc$, exceptuando A_1 y A_2.

7.5.22 $\alpha = bcdccdbbcdbadacaddbd$, exceptuando A_1 y A_2.

7.5.23 Conjeture al menos dos tipos de hileras generales del lenguaje vinculado a los autómatas A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5.

Trace el diagrama de transición de un autómata de estado finito determinístico que acepte el conjunto de hileras de símbolos de entrada señalado. Realice distintas pruebas con el software *Wolfram Mathematica* para verificar los resultados. Retorne, además, las cinco componentes de cada autómata.

7.5.24 Cadenas de "strings" que posean un número impar de caracteres b, mayor o igual a 3, con $\tau = \{a, b\}$.

7.5.25 Hileras que empiezan con bab y terminan en aba.

7.5.26 Arreglos que contengan exactamente tres a y una b, suponiendo $\tau = \{a, b, c\}$.

7.5.27 Hileras que contengan ab y no finalicen en cb.

7.5.28 Cadenas de caracteres que no inician con ab y no finalizan en abc.

Construya el diagrama de transición de los autómatas de estado finito no determinísticos siguientes:

7.5.29 $A_6 : \sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\sigma^* = \sigma_1$, $\widehat{A} = \{\sigma_0, \sigma_1\}$ y:

Δ	a	b	c
σ_0	$\{\sigma_0, \sigma_2\}$	ϕ	$\{\sigma_2\}$
σ_1	$\{\sigma_1\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1\}$	σ
σ_2	$\{\sigma_0, \sigma_1\}$	$\{\sigma_0, \sigma_2\}$	$\{\sigma_0\}$

7.5.30 $A_7 : \sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b\}$, $\sigma^* = \sigma_3$, $\widehat{A} = \{\sigma_2, \sigma_3\}$ y:

Δ	a	b
σ_0	$\{\sigma_3\}$	ϕ
σ_1	$\{\sigma_0, \sigma_1\}$	$\{\sigma_1, \sigma_3\}$
σ_2	σ	$\{\sigma_1, \sigma_2\}$
σ_3	$\{\sigma_0\}$	$\{\sigma_0, \sigma_2\}$

7.5.31 $A_8 : \sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b\}$, $\sigma^* = \sigma_0$, $\widehat{A} = \{\sigma_0, \sigma_2, \sigma_3\}$ y:

Δ	a	b
σ_0	ϕ	$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$
σ_1	$\{\sigma_0, \sigma_3\}$	$\{\sigma_0, \sigma_2\}$
σ_2	$\{\sigma_3\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3\}$
σ_3	σ	$\{\sigma_1, \sigma_2\}$

7.5.32 $A_9 : \sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b\}$, $\sigma^* = \sigma_2$, $\widehat{A} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ y:

Δ	a	b
σ_0	$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$	σ
σ_1	σ	$\{\sigma_0, \sigma_2, \sigma_3\}$
σ_2	$\{\sigma_0, \sigma_2, \sigma_3\}$	σ
σ_3	σ	$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3\}$

7.5.33 $A_{10} : \sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tau = \{a, b, c\}$, $\sigma^* = \sigma_3$, $\widehat{A} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3\}$ y:

Δ	a	b	c
σ_0	$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$	$\{\sigma_0, \sigma_3\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3\}$
σ_1	$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$	$\{\sigma_0, \sigma_2\}$	ϕ
σ_2	ϕ	σ	$\{\sigma_0, \sigma_2, \sigma_3\}$
σ_3	$\{\sigma_1, \sigma_2\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$	σ

Establezca si las hileras α de símbolos de entrada dadas, son aceptadas en los autómatas de estado finito no determinísticos A_6, A_7, A_8, A_9 y A_{10}. Muestre un recorrido en caso de que la cadena de caracteres sea aceptada.

7.5.34 $\alpha = baaaabbbbaabbaa$.

7.5.35 $\alpha = abaababbbbaaaaa$.

7.5.36 $\alpha = aabbbbbbabbabaa$.

7.5.37 $\alpha = baabbaaabbabaab$.

7.5.38 $\alpha = abbcbcccccbcaaa$, considerando solo A_6 y A_{10}.

7.5.39 Encuentre por medio del teorema 7.1, un autómata de estado finito determinístico equivalente para A_6, A_7, A_8, A_9 y A_{10}. Elabore el diagrama de transición reducido.

Descargue un archivo: código 312.

Solución de los ejercicios propuestos.

8.4 Ejercicios

Se insta al estudiante a resolver el conjunto de ejercicios propuestos con la intención de ratificar el nivel de aprovechamiento adquirido.

Ejercicios

Determine por definición (realizando derivaciones) y justificando paso a paso, al menos dos hileras generales que pertenecen al lenguaje $L(G_j)$, $1 \leq j \leq 12$, $j \in \mathbb{N}$, con relación a las gramáticas dadas.

8.4.1 $G_1 = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\sigma = \{S, A\}$.
- Símbolos terminales: $\tau = \{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $P =$

$$\begin{array}{llll} 1. & S \longrightarrow bS & 4. & A \longrightarrow bA \\ 2. & S \longrightarrow aA & 5. & A \longrightarrow a \\ 3. & A \longrightarrow aS & 6. & S \longrightarrow b \end{array}$$

- $\sigma^* = S$.

8.4.2 $G_2 = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\sigma = \{S, A, B\}$.
- Símbolos terminales: $\tau = \{a, b, c\}$.
- Producciones o reglas de composición: $P =$

$$\begin{array}{llll} 1. & S \rightarrow aAc & 4. & A \rightarrow B \\ 2. & A \rightarrow aA & 5. & B \rightarrow b \\ 3. & A \rightarrow Ac & 6. & B \rightarrow Bb \end{array}$$

- $\sigma^* = S$.

8.4.3 $G_3 = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\sigma = \{S, A, B\}$.
- Símbolos terminales: $\tau = \{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $P =$

$$\begin{array}{llll} 1. & S \longrightarrow A & 5. & B \longrightarrow ABb \\ 2. & A \longrightarrow a & 6. & A \longrightarrow ABB \\ 3. & B \longrightarrow b & 7. & AB \longrightarrow BA \\ 4. & S \longrightarrow ABA & & \end{array}$$

- $\sigma^* = S$.

8.4.4 $G_4 = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\sigma = \{S, A, B\}$.
- Símbolos terminales: $\tau = \{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $P =$

$$\begin{array}{llll} 1. & S \longrightarrow A & 5. & Bb \longrightarrow ABb \\ 2. & S \longrightarrow AAB & 6. & AB \longrightarrow ABB \\ 3. & Ab \longrightarrow ABa & 7. & B \longrightarrow b \\ 4. & A \longrightarrow aa & & \end{array}$$

- $\sigma^* = S$.

8.4.5 $G_5 = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\sigma = \{S, A, B\}$.
- Símbolos terminales: $\tau = \{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $P =$

$$\begin{array}{llll} 1. & S \longrightarrow BAB & 5. & A \longrightarrow aA \\ 2. & S \longrightarrow ABA & 6. & A \longrightarrow ab \\ 3. & A \longrightarrow AB & 7. & B \longrightarrow b \\ 4. & B \longrightarrow BA & & \end{array}$$

- $\sigma^* = S$.

8.4.6 $G_6 = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\sigma = \{S, A, B, C\}$.
- Símbolos terminales: $\tau = \{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $P =$

$$\begin{array}{llll} 1. & A \rightarrow bB & 5. & S \rightarrow bB \\ 2. & B \rightarrow b & 6. & C \rightarrow aC \\ 3. & B \rightarrow bCC & 7. & C \rightarrow aB \\ 4. & S \rightarrow aA & & \end{array}$$

- $\sigma^* = S$.

8.4.7 $G_7 = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\sigma = \{S, A, B\}$.
- Símbolos terminales: $\tau = \{a, b, c\}$.

- Producciones o reglas de composición: $P =$

1.	$S \to aS$	6.	$B \to bB$
2.	$S \to a$	7.	$B \to b$
3.	$S \to bA$	8.	$B \to aA$
4.	$A \to cB$	9.	$B \to a$
5.	$A \to cS$		

- $\sigma^* = S$.

8.4.8 $G_8 = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\sigma = \{S, A, B, C\}$.
- Símbolos terminales: $\tau = \{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $P =$

1.	$A \longrightarrow aB$	6.	$C \longrightarrow aS$
2.	$A \longrightarrow bA$	7.	$C \longrightarrow bA$
3.	$B \longrightarrow a$	8.	$S \longrightarrow aS$
4.	$B \longrightarrow aC$	9.	$S \longrightarrow bA$
5.	$B \longrightarrow bA$		

- $\sigma^* = S$.

8.4.9 $G_9 = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\sigma = \{S, A, B, C\}$.
- Símbolos terminales: $\tau = \{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $P =$

1.	$S \to aS$	6.	$B \to bC$
2.	$S \to bA$	7.	$B \to b$
3.	$A \to bS$	8.	$C \to aB$
4.	$A \to aB$	9.	$C \to bS$
5.	$B \to aB$		

- $\sigma^* = S$.

8.4.10 $G_{10} = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\sigma = \{S, A, B, C\}$.
- Símbolos terminales: $\tau = \{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $P =$

1.	$S \to aS$	6.	$A \to aC$
2.	$S \to aA$	7.	$B \to aS$
3.	$S \to bC$	8.	$B \to a$
4.	$S \to a$	9.	$C \to aB$
5.	$A \to bA$	10.	$C \to aC$

- $\sigma^* = S$.

8.4.11 $G_{11} = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\sigma = \{S, A, B, C\}$.
- Símbolos terminales: $\tau = \{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $P =$

1.	$S \to aA$	6.	$B \to aB$	11.	$C \to aS$
2.	$S \to aB$	7.	$B \to bA$	12.	$C \to bA$
3.	$A \to bS$	8.	$B \to aA$	13.	$C \to aC$
4.	$A \to b$	9.	$B \to b$	14.	$C \to a$
5.	$A \to a$	10.	$B \to aC$		

- $\sigma^* = S$.

8.4.12 $G_{12} = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\sigma = \{S, A, B, C, D, E, F, G\}$.
- Símbolos terminales: $\tau = \{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $P =$

1.	$A \to aG$	6.	$C \to aG$	11.	$E \to b$	16.	$G \to a$
2.	$A \to bB$	7.	$C \to bG$	12.	$E \to bC$	17.	$G \to bG$
3.	$B \to aG$	8.	$D \to aE$	13.	$F \to a$	18.	$S \to aA$
4.	$B \to b$	9.	$D \to bF$	14.	$F \to aC$	19.	$S \to bD$
5.	$B \to bC$	10.	$E \to aG$	15.	$F \to bG$		

- $\sigma^* = S$.

8.4.13 Clasifique las gramáticas G_j, $1 \leq j \leq 12$, $j \in \mathbb{N}$, en sensibles al contexto, libres del contexto, regulares o ninguna de ellas. Explique.

8.4.14 Construya una gramática G libre del contexto en notación **BNF**, cuyo lenguaje sea el conjunto de los números enteros.

8.4.15 Diseñe una gramática G libre del contexto en notación **BNF**, que tenga como lenguaje los enteros negativos que no empiecen con 0.

8.4.16 Construya una gramática G libre del contexto en notación **BNF**, donde los elementos del lenguaje sean únicamente las siguientes oraciones:

Adriana analiza algoritmos constantemente.
Adriana analiza algoritmos rápidamente.
Adriana construye algoritmos constantemente.
Adriana construye algoritmos rápidamente.
José analiza algoritmos constantemente.
José analiza algoritmos rápidamente.
José construye algoritmos constantemente.
José construye algoritmos rápidamente.

8.4.17 Encuentre un autómata de estado finito no determinístico equivalente a las gramáticas G_1, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11} y G_{12}. Además, usando el autómata verifique la correctitud de las hileras generales ya halladas (en un ejercicio anterior), que pertenecen a su lenguaje.

Diseñe una gramática regular $G = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$ que posea como lenguaje el conjunto $L(G)$ indicado.

8.4.18 $L(G) = \{$hileras que finalizan en $abc\}$.

8.4.19 $L(G) = \{$hileras que inician con ab y terminan con $ba\}$.

8.4.20 $L(G) = \{$hileras con un número par de letras b y con un número impar de letras $a\}$.

8.4.21 $L(G) = \{$hileras que no inician con ba y no terminan con $abb\}$.

8.4.22 $L(G) = \{$hileras con exactamente una a, una b y una $c\}$.

Descargue un archivo: código 330.

Solución de los ejercicios propuestos.

Solución de los ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

1.5.1 La pila de llamadas nunca finaliza al no obtenerse el caso raíz.

1.5.2 `Suma[n_]:=If[n == 6 , 1/2 , Suma[n - 1] + (n - 5)/(n - 4)]`.

1.5.3 `Suma[n_]:=If[n == 9 , 49/262144 , Suma[n - 1] + 2^(8 - 2 (5 + n)) (5 + n)^2]`.

1.5.4 `Producto[n_]:=If[n == 11 , 2 , Producto[n - 1]*(3 n - 31)]`.

1.5.5 `Producto[n_]:=If[n == 5 , 2187 , Producto[n - 1]*(3^(n + 4)/(n + 4))]`.

1.5.6 `SumaProducto[n_]:=Module[{Producto}, Producto[i_]:=If[i == 1 || i == 2, 1, If[i == 3, -1, Producto[i - 1] (2 i - 7)]]; If[n == 0, 1, SumaProducto[n - 1] + Producto[n + 1] (n + 1)]]`.

1.5.7

1.5.2 `SumaCola[n_]:=Module[{SC}, SC[m_, Cont_ : 6, Suma_]:= If[m == 6, 1/2 , If[Cont == m, Suma, SC[m, Cont + 1, Suma + (Cont - 4)/(Cont - 3) ]]]; SC[n, 1/2]]`, o bien, `SumaCola[n_, Suma_ : 0]:=If[n == 6, Suma + 1/2 , SumaCola[n - 1, Suma + (n - 5)/(n - 4)]]`.

1.5.3 `SumaCola[n_]:= Module[{SC}, SC[m_, Cont_ : 9, Suma_]:= If[m == 9, 49/262144, If[Cont == m, Suma, SC[m, Cont + 1, Suma + 2^(8 - 2 (6 + Cont)) (6 + Cont)^2 ]]]; SC[n, 49/262144]]`, o bien, `SumaCola[n_, Suma_ : 0]:=If[n == 9, Suma + 49/262144, SumaCola[n - 1, Suma + 2^(8 - 2 (5 + n)) (5 + n)^2]]`.

1.5.4 `ProductoCola[n_]:=Module[{PC}, PC[m_, Cont_ : 11, Producto_] :=If[m == 11, 2, If[Cont == m, Producto, PC[m, Cont + 1, Producto*(3 Cont - 28)]]]; PC[n, 2]]`, o bien, `ProductoCola[n_, Producto_ : 1]:=If[n == 11, Producto*2 , ProductoCola[n - 1, Producto*(3 n - 31)]]`.

1.5.5 **ProductoCola[n_]:=Module[{PC}, PC[m_, Cont_ : 5, Producto_] :=If[m == 5, 2187, If[Cont == m, Producto, PC[m, Cont + 1, Producto*(3^(Cont + 5)/(Cont + 5))]]]; PC[n, 2187]]**, o bien, **ProductoCola[n_, Producto_ : 1]:=If[n == 5, Producto*2187, ProductoCola[n − 1, Producto*(3^(n + 4)/(n + 4))]]**.

1.5.6 **SumaProductoCola[n_, Suma_ : 0]:=Module[{ProductoCola}, ProductoCola[i_, Producto_ : 1]:=If[i == 1 || i == 2, 1, If[i == 3, −Producto, ProductoCola[i − 1, Producto*(2 i − 7)]]]; If[n == 0, 1 + Suma, SumaProductoCola[n − 1, Suma + ProductoCola[n + 1] (n + 1)]]]**.

1.5.8 **RecurrenciaPila[n_]:=If[n == 5, 2, 5 RecurrenciaPila[n − 1] + 2 n − Sqrt[2]]** y **RecurrenciaCola[n_]:= Module[{RecurrenciaAuxiliar}, RecurrenciaAuxiliar[m_, Cont_ : 5, a_]:=If[m == 5, 2, If[Cont == m, a, RecurrenciaAuxiliar[m, Cont + 1, 5 a + 2 (Cont + 1) − Sqrt[2]]]]; RecurrenciaAuxiliar[n, 2]]**.

1.5.9 **RecurrenciaPila[n_]:=If[n == 1, −10, If[n == 2, −19, RecurrenciaPila[n − 1] + 6 RecurrenciaPila[n − 2]]]** y **RecurrenciaCola[n_]:=Module[{RecurrenciaAuxiliar}, RecurrenciaAuxiliar[m_, Cont_ : 2, a1_, a2_]:=If[m == 1, −10, If[m == 2, −19, If[Cont == m, a2, RecurrenciaAuxiliar[m, Cont + 1, a2, a2 + 6 a1]]]]; RecurrenciaAuxiliar[n, −10, −19]]**.

1.5.10 **RecurrenciaPila[n_]:=If[n == 1, 1, If[n == 2, −1, If[n == 3, Power[2, (5)^−1], 12 RecurrenciaPila[n − 1] − 36 RecurrenciaPila[n − 2] + RecurrenciaPila[n − 3]]]]** y **RecurrenciaCola[n_]:=Module[{RecurrenciaAuxiliar}, RecurrenciaAuxiliar[m_, Cont_ : 3, a1_, a2_, a3_]:=If[m == 1, 1, If[m == 2, −1, If[m == 3, Power[2, (5)^−1], If[Cont == m, a3, RecurrenciaAuxiliar[m, Cont + 1, a2, a3, 12 a3 − 36 a2 + a1]]]]]; RecurrenciaAuxiliar[n, 1, −1, Power[2, (5)^−1]]]**.

1.5.11 **RecurrenciaPila[n_]:=If[n == 2, 1, If[n == 3, 2, If[n == 4, 3, If[n == 5, 4, 1/9 (6 RecurrenciaPila[n − 1] − RecurrenciaPila[n − 2] + RecurrenciaPila[n − 3] − 2 RecurrenciaPila[n − 4])]]]]** y **RecurrenciaCola[n_]:= Module[{RecurrenciaAuxiliar}, RecurrenciaAuxiliar[m_, Cont_ : 5, a2_, a3_, a4_, a5_]:=If[m == 2, 1, If[m == 3, 2, If[m == 4, 3, If[m == 5, 4, If[Cont == m, a5, RecurrenciaAuxiliar[m, Cont + 1, a3, a4, a5, 1/9 (6 a5 − a4 + a3 − 2 a2)]]]]]]; RecurrenciaAuxiliar[n, 1, 2, 3, 4]]**.

1.5.12 **Ahorro[n_, ahorro_ : 1]:=If[n == 0, ahorro*200, Ahorro[n − 1, 1.05 ahorro]]**, 359171.

1.5.13 **catalan[n_]:=Module[{CatalanCola}, CatalanCola[m_,**

```
Cont_ : 0, Cn_]:=If[m == 0, 1, If[m == Cont, Cn, CatalanCola[m,
Cont + 1, (2 (2 Cont + 1))/(Cont + 2) Cn]]];
CatalanCola[n, 1]]
```
In[ ] :=

```
Table[catalan[i], {i, 0, 29}]
```
Out[ ] =

{1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452, 18367353072152, 69533550916004, 263747951750360, 1002242216651368}.

1.5.14 `mcd[n_, m_]:=If[m == 0, n, If[n == 0, m, If[n >= m, mcd[n - m, m], mcd[n, m - n]]]]` y `mcdPasos[n_, m_]:=If[m == 0, n, If[n == 0, m, If[n >= m, Print["mcd[", n - m, ",", m, "]"]; mcdPasos[n - m, m], Print["mcd[", n, ",", m - n, "]"]; mcdPasos[n, m - n]]]]`

In[ ] :=

```
mcdPasos[120, 144]
```
Out[ ] =

mcd[120,24]
mcd[96,24]
mcd[72,24]
mcd[48,24]
mcd[24,24]
mcd[0,24]
24.

1.5.15 `Ackermann[m_, n_]:=If[m == 0, n + 1, If[m > 0 && n == 0, Ackermann[m - 1, 1], If[m > 0 && n > 0, Ackermann[m - 1, Ackermann[m, n - 1]]]]]`, las fórmulas serían “$n+2$”, “$2n+3$” y “$8\cdot 2^n-3$”, respectivamente.

1.5.16 `SumaDigiCola[n_]:=Module[{SDCAux}, SDCAux[m_, digito_ : Mod[n, 10], Suma_ : 0]:=If[m == 0, Suma, SDCAux[(m - digito)/10, Mod[(m - digito)/10, 10], Suma + digito]]; SDCAux[n]]` y `BToDCola[n_]:=Module[{BToDAux}, BToDAux[m_, Cont_ : 0, digito_ : Mod[n, 10], Decimal_ : 0]:=If[m == 0, Decimal, BToDAux[(m - digito)/10, Cont + 1, Mod[(m - digito)/10, 10], Decimal + 2^Cont digito]]; BToDAux[n]]`.

1.5.17 `DToB[n_, Lista_ :{}]:=Module[{L = Lista, digito = Mod[n, 2]}, If[n == 0, L, L = Prepend[L, digito]; DToB[(n - digito)/2, L]]]`, o bien, `DToB[n_, Lista_ :{}]:=Module[{L = Lista, digito = Mod[n, 2]}, If[n == 0, ToExpression[StringJoin[ToString /@ L]], L = Prepend[L, digito]; DToB[(n - digito)/2, L]]]`.

1.5.18 `NumPerfect[n_, Cont_ : 1, Lista_ :{}]:=Module[{L =`

```
Lista}, If[Cont <= n/2, If[Mod[n, Cont] == 0, L = Append[L,
Cont]]; NumPerfect[n, Cont + 1, L], If[Total[Lista] == n, True,
False]]].
```

1.5.19
```
DesComp[n_, Cont_ : 1]:=Module[{i = Cont}, If[Cont <=
n, Print[n, "=", n - i, "+", i]; i++; DesComp[n, i]]].
```

1.5.20
```
mcm[n_, m_]:=Module[{MCD}, MCD[nn_, mm_]:=If[nn == 0,
Return[mm], MCD[Mod[mm, nn], nn]]; n*m/MCD[n, m]].
```

1.5.21
```
quicksortDes[begin_ : 1, end_]:=Module[{piv, aux},
If[begin < end, i = begin; j = end; piv = L[[Floor[(begin
+ end)/2]]]; While[i <= j, While[L[[i]] > piv, i++];
While[L[[j]] < piv, j-]; If[i <= j, aux = L[[i]]; L[[i]] =
L[[j]]; L[[j]] = aux; i++; j-]]; Print[ReplacePart[L,
Style[L[[Floor[(begin + end)/2]]], Blue], Floor[(begin + end)
/2]]]; If[begin < j, quicksortDes[begin, j]]; If[i < end,
quicksortDes[i, end]]]; L].
```

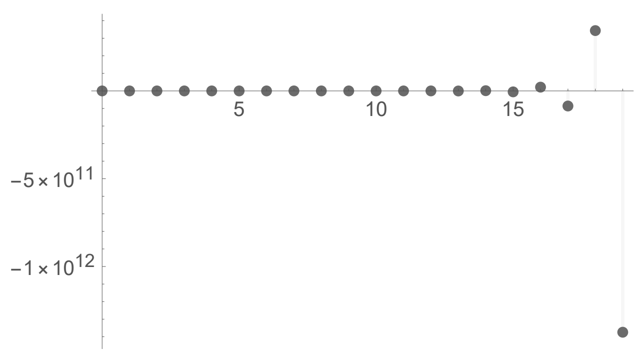
1.5.22
```
Maximo[begin_ : 1, end_]:=Module[{piv, aux},
If[begin < end, i = begin; j = end; piv = L[[Floor[(begin
+ end)/2]]]; While[i <= j, While[L[[i]] > piv, i++];
While[L[[j]] < piv, j-]; If[i <= j, aux = L[[i]]; L[[i]] =
L[[j]]; L[[j]] = aux; i++; j-]]; If[begin < j, Maximo[begin,
j]]; If[i < end, Maximo[i, end]]]; First[L]].
```

Soluciones del Capítulo 2

2.3.1 **In[ ]** :=

```
GraficaRRL[{-4}, {5}, npuntos -> 20, inicio -> 0]
RT[{-4}, {5}, 20, inicio -> 0]
```

Out[ ] =

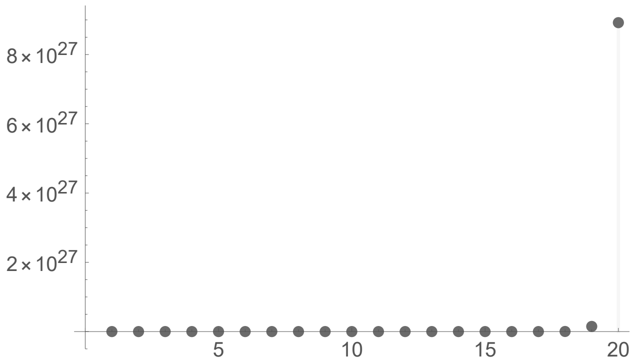


{5, -20, 80, -320, 1280, -5120, 20480, -81920, 327680, -1310720, 5242880, -20971520, 83886080, -335544320, 1342177280, -5368709120, 21474836480, -85899345920, 343597383680, -1374389534720}

2.3.2 **In[ ]** :=

```
GraficaRRL[{3 n, 3^n}, {1}, npuntos -> 20]
RT[{3 n, 3^n}, {1}, 20]
```

Out[ ] =

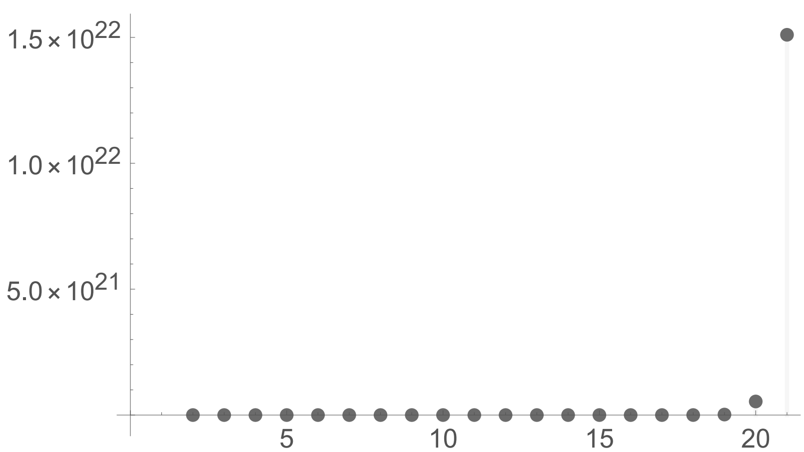


{1, 15, 162, 2025, 30618, 551853, 11591100, 278192961, 7511229630, 225336947949, 7436119459464, 267700301072145, 10440311743407978, 438493093227918045, 19732189195270660932, 947145081373034771457, 48304399150024902484470, 2608437554101345121581869, 148680940583776673092428000, 8920856435026600389032464401}

2.3.3 **In[ ]** :=

```
GraficaRRL[{(4 n)/3}, {5/2}, npuntos -> 20, inicio -> 2]
RT[{(4 n)/3}, {5/2}, 20, inicio -> 2]
```

Out[ ] =

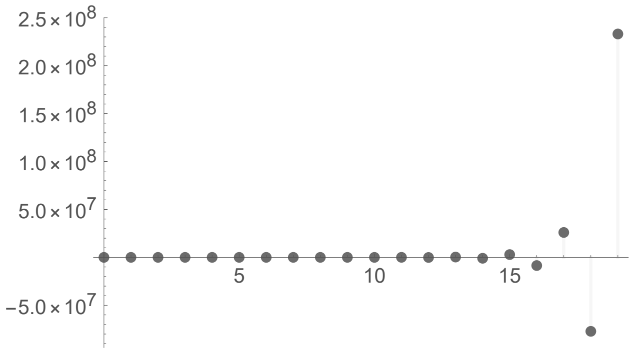


{5/2, 10, 160/3, 3200/9, 25600/9, 716800/27, 22937600/81, 91750400/27, 3670016000/81, 161480704000/243, 2583691264000/243, 134351945728000/729, 7523708960768000/2187, 150474179215360000/2187, 9630347469783040000/6561, 654863627945246720000/19683, 5238909023561973760000/6561, 398157085790710005760000/19683, 31852566863256800460800000/59049, 891871872171190412902400000/59049}

2.3.4 **In[ ]** :=

```
GraficaRRL[{-1, 6}, {1, 3}, npuntos -> 20, inicio -> 0]
RT[{-1, 6}, {1, 3}, 20, inicio -> 0]
```

Out[ ] =

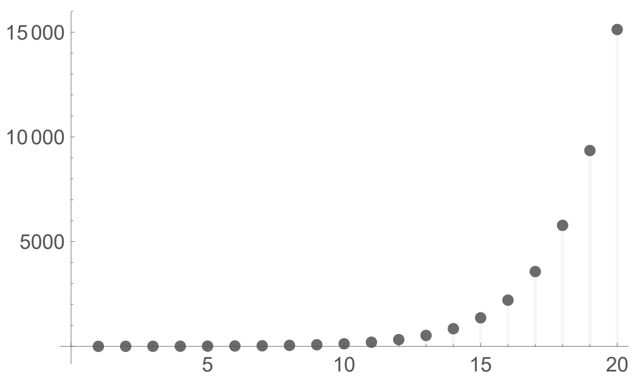


{1, 3, 3, 15, 3, 87, -69, 591, -1005, 4551, -10581, 37887, -101373, 328695, -936933, 2909103, -8530701, 25985319, -77169525, 233081439}

2.3.5 **In[ ]** :=

```
GraficaRRL[{1, 1}, {1, 3}, npuntos -> 20]
RT[{1, 1}, {1, 3}, 20]
```

Out[ ] =

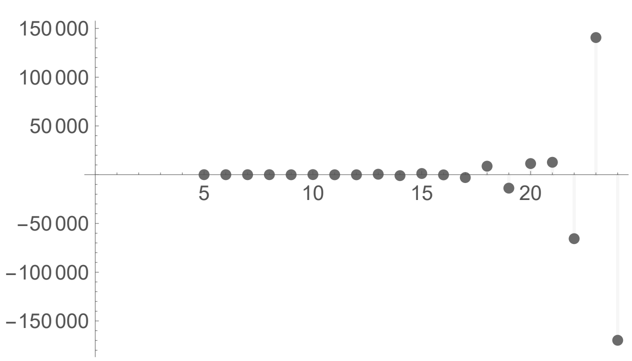


{1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, 15127}

2.3.6 **In[ ]** :=

```
GraficaRRL[{-1, Sqrt[2], 5}, {7, -8, 3/2}, npuntos -> 20,
inicio -> 5]
RT[{-1, Sqrt[2], 5}, {7, -8, 3/2}, 20, inicio -> 5] // N
```

Out[ ] =

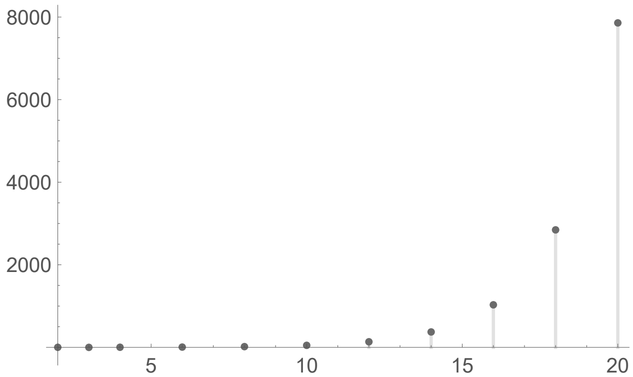


{7., -8., 1.5, 22.1863, -60.065, 98.9411, -72.9544, -87.4466, 478.979, -967.419, 1207.57, -180.806, -2948.53, 8730.66, -13804.6, 11408.9, 12721.8, -65610., 140646., -169823.}

2.3.7 **In[ ]** :=

```
a[n_] := Power[-(7/2) (a[n - 1])^3 + 5 (a[n - 2])^3, (3)^-1]
a[2] = Sqrt[2];
a[3] = -(2/3);
DiscretePlot[a[n], {n, 2, 20}]
Surd[RT[{-(7/2), 5}, {(Sqrt[2])^3, (-2/3)^3}, 20, inicio -> 3],
3] // N
```

Out[ ] =



{1.41421, -0.666667, 2.47599, -3.79391, 6.43949, -10.6491, 17.7177, -29.4356, 48.9202, -81.2959, 135.101, -224.514, 373.105, -620.038, 1030.4, -1712.35, 2845.64, -4728.97, 7858.75, -13059.9}

2.3.8 $a_n = n \cdot a_{n-1} + 1$ con $a_1 = 1$.

2.3.9 $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + 5a_{n-2}$ con $a_1 = 5$ y $a_2 = -8$.

2.3.10 $a_n = a_{n-1} + n - 1$ con $a_1 = 0$.

2.3.11 $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ con $a_1 = 99$ y $a_2 = 270$.

2.3.12 $a_n = 2^n - 1$, **RR[{2, 1}, {1}, n]**.

2.3.13 $a_n = 2 \cdot 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$, **RR[{3^n}, {2}, n, inicio -> 0]**.

2.3.14 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} n!$, **RR[{2 n}, {3}, n]**.

2.3.15 $a_n = \frac{1}{8}\left(-5 + 2\sqrt{2} + 41 \cdot 5^{-5+n} - 2\sqrt{2} \cdot 5^{-5+n} - 4n\right)$, **RR[{5, 2 n - Sqrt[2]}, {2}, n, inicio -> 5]**.

2.3.16 $a_n = \frac{1}{3}\sqrt[2^n]{3}$, no se puede corroborar la respuesta mediante la instrucción **RR**.

2.3.17 $a_n = \frac{1}{10}\left(5 - \sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\left(7 - 3\sqrt{5}\right)\right)^n + \frac{1}{10}\left(5 + \sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\left(7 + 3\sqrt{5}\right)\right)^n$, **RR[{7, -1}, {1, 5}, n, inicio -> 0]**, **MetodoRRHL[{7, -1}, {1, 5}, n, b, inicio -> 0]**.

2.3.18 $a_n = \frac{-798+151i\sqrt{21}}{1050}\left(\frac{1}{5}\left(2 - i\sqrt{21}\right)\right)^n - \frac{25\left(42i+\sqrt{21}\right)}{42\left(17i+4\sqrt{21}\right)}\left(\frac{1}{5}\left(2 + i\sqrt{21}\right)\right)^n$, **RR[{4/5, -1}, {2, 1}, n, inicio -> 2]**, **MetodoRRHL[{4/5, -1}, {2, 1}, n, b, inicio -> 2]**.

2.3.19 $a_n = 15 - 10\cdot 2^n + \frac{7}{2} n\cdot 2^n$, **RR[{5, -8, 4}, {5, 2, 3}, n, inicio -> 0]**, **MetodoRRHL[{5, -8, 4}, {5, 2, 3}, n, b, inicio -> 0]**.

2.3.20 $a_n = 5^n - \frac{527}{375} n\cdot 5^n + \frac{91}{125} n^2\cdot 5^n - \frac{46}{375} n^3\cdot 5^n$, **RR[{20, -150, 500, -625}, {1, 1, 3, 3}, n, inicio -> 0]**, **MetodoRRHL[{20, -150, 500, -625}, {1, 1, 3, 3}, n, b, inicio -> 0]**.

2.3.21 $a_n = \left[\frac{1}{3}\left(-2+\sqrt{2}\right)(-1)^n + \frac{1}{6}\left(1+\sqrt{2}\right)2^n\right]^2$, **(RR[{1, 2}, {1, Sqrt[2]}, n])^2**, **MetodoRRHL[{1, 2}, {1, Sqrt[2]}, n, b]**.

2.3.22 $a_n = \sqrt{b_1\left(\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{7}\right)\right)^n + b_2\left(\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{7}\right)\right)^n}$ con $b_1 = \frac{1}{7} i\left(-14i + 3\sqrt{7}\right)$ y $b_2 = -\frac{1}{7} i\left(14i+3\sqrt{7}\right)$, **(RR[{1, -2}, {4, 5}, n, inicio -> 0])^(1/2)**, **MetodoRRHL[{1, -2}, {4, 5}, n, b, inicio -> 0]**.

2.3.23 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ con $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$, $a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}\cdot 2^n$, **RR[{1, 2}, {1, 3}, n]**, **MetodoRRHL[{1, 2}, {1, 3}, n, b]**.

2.3.24 $a_n = 1.012\cdot a_{n-1}$ con $a_0 = 7.1$, $a_n = 7.1\cdot(1.012)^n$, **RR[{1.012}, {7.1}, n, inicio -> 0]**, $a_{47} = 12.4378$, para el año 2050 se estiman 12.4378 billones de personas en el mundo.

2.3.25 **RRCP[{-1, 2, 2 j}, {1, 2}, n, 10, inicio -> 0]**, $a_n = \frac{1}{9}\left((12-2j) + (2j-3)(-2)^n + 6jn\right)$.

2.3.26 **RRCP[{1, 1, j}, {1, 1}, n, 10, inicio -> 2]**, $a_n = \frac{1}{2}\left(-2j - (j+1)\right.$**Fibonacci[n]**$+ (j+1)$**LucasL[n]**$\left.\right)$.

2.3.27 **RRCP[{-1, -1, -j}, {1, 2}, n, 10, inicio -> 0]**, $a_n = b_1\left(-b_2 + \left(b_3 + b_4 i\sqrt{3}\right)(r_1)^n + \left(b_3 - b_4 i\sqrt{3}\right)(r_2)^n\right)$ con $i = (0,1)$, $r_1 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $b_1 = \frac{1}{12}\left(3+(-1)^{1+j}\right)$, $b_2 = -\frac{1}{2}\left(3+(-1)^j\right)j$, $b_3 = \frac{1}{4}\left(3+(-1)^j\right)(3+j)$ y $b_4 = \frac{1}{4}\left(3+(-1)^j\right)(5+j)$.

Soluciones del Capítulo 3

3.5.1 Una recursividad de cola que construye los números de *Fibonacci* es más rápida.

3.5.2 Es más eficiente en tiempo de ejecución el método **a**.

3.5.3 Se muestra más velóz **MCD1**.

3.5.4 **Seleccion** es más rápido.

3.5.5 *Quicksort* es más eficiente en tiempo de ejecución.

3.5.6 Se demuestra por la propiedad 3 del teorema 3.3, **CDFGraficaNAP[{Sum[n^i, {i, 0, j}], n^j}, 0.01, 10, 1000, 10]**.

3.5.7 **Limit[Sum[1/i, {i, 1, n}]/Log[n], n -> Infinity]**,

CDFGraficaNA[{Sum[1/i, {i, 1, n}], Log[n]}, 0.01, 10, 1000].

3.5.8 **Limit[(n^3 + 5)/(5 n + 2)/n^2, n -> Infinity], CDFGraficaNA[{(n^3 + 5)/(5 n + 2), n^2}, 0.01, 10, 1000].**

3.5.9 **Limit[(n Log[n])/n^2, n -> Infinity], CDFGraficaNA[{(n Log[n])/n^2, n^2}, 0.01, 10, 1000].**

3.5.10 **Limit[(n^2^n + n^n^2)/n^2^n, n -> Infinity], CDFGraficaNA[{n^2^n + n^n^2, n^2^n}, 0.01, 10, 1000].**

3.5.11 **Limit[Sum[i^2, {i, 1, n}]/n^3, n -> Infinity], CDFGraficaNA[{Sum[i^2, {i, 1, n}], n^3}, 0.01, 10, 1000].**

3.5.12 $O(7^n)$.

3.5.13 $O(2^n 5^n)$.

3.5.14 $O(n^n n!)$.

3.5.15 $O(n^4 \ln n)$.

3.5.16 $O(n^3 \ln n)$.

3.5.17 $O(n^2)$.

3.5.18 $(n-1)\,\frac{(n-2)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1 = \Theta(n^2)$, **CDFGraficaNA[{((n - 1) (n - 2))/2, n^2}, 0.01, 10, 1000].**

3.5.19 $\Theta(n)$, **CDFGraficaNA[{(2 n - 1)/2 + a /. a -> 0.5, n}, 0.01, 10, 1000].**

3.5.20 $\Theta(\ln n)$, **CDFGraficaNA[{Log[n]/Log[5] + a /. a -> 0.5, Log[n]}, 0.01, 10, 1000].**

3.5.21 $\Theta(n \ln n)$, **CDFGraficaNA[{n/2 Log[n], n Log[n]}, 0.01, 10, 1000].**

3.5.22 $f(n) = \frac{2}{3}n^3 + (\ln n)^5$ y $g(n) = n^j$, $1 \le j \le 2 \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$, $j = 3 \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$ y $j \ge 4 \Rightarrow f(n) = O(g(n))$, $j \in \mathbb{N}$.

3.5.23 $f(n) = \dfrac{n^2 + 3\ln n}{n^5 + 1}$ y $g(n) = n^j$, $j \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = O(g(n))$, nunca ocurre Ω ni Θ.

3.5.24 $f(n) = n^{6j} - n^5 + 2n - 4$ y $g(n) = n^j$, $j \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$, nunca ocurre O ni Θ.

3.5.25 $f(n) = \dfrac{n^8}{n^j + 1}$ y $g(n) = (\ln(n))^j$, $1 \le j \le 7 \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$, $j \ge 8 \Rightarrow f(n) = O(g(n))$ y nunca ocurre Θ, $j \in \mathbb{N}$.

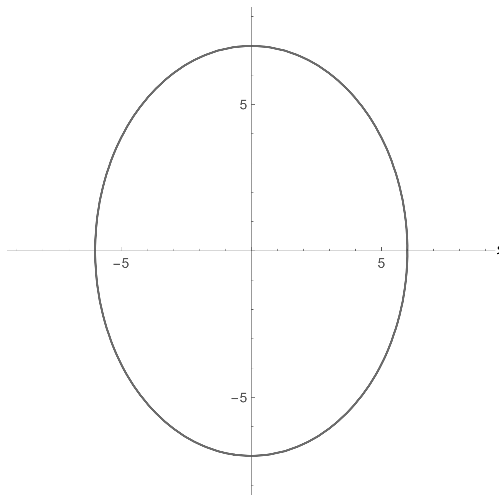
3.5.26 $f(n) = \dfrac{n^{\frac{1}{j}}(\ln n)^{-5j}}{n^{\frac{1}{j}} + 1}$ y $g(n) = (\ln n)^{-5j}$, $j \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$, nunca ocurre Ω ni O.

Soluciones del Capítulo 4

4.5.1 `PC[Range[2, 500, 2], Range[1, 500, 2]]`, `Length[Lista]`, 62500.

4.5.2 `GraficaPC[{5, Infinity}, {-10, 6}]`.

4.5.3 $D = \{3, 15, 25, 75\}$, $Rang = \{4, 12, 20, 60, 100\}$, 9900.

4.5.4 

,

$D =]-\infty, -6] \cup [6, +\infty[$, $Rang = [-7, 7]$, {True, False, True, False, True, True, False, True, True, True}.

4.5.5 `R1=RelBin["a<=b^2", Range[2, 100, 2], Range[2, 100, 2]]`, {False, True, False, True, False}.

4.5.6 `R2 = RelBin["a+b<=20", A, A]` con `A=Range[2, 100, 2]`.

4.5.7 `R3 = RelBin["PalindromeQ[a]&&PalindromeQ[b]", A, A]` con `A` el conjunto del enunciado.

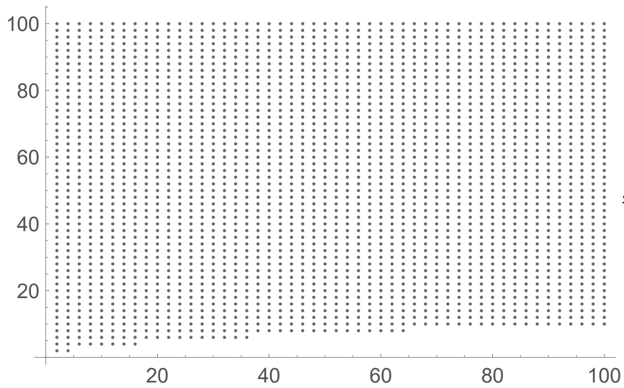
4.5.8 `R4 = RelBin["Mod[a^2-b^2,5]==0", A, A]` con `A=Range[5]`.

4.5.9 `R5 = RelBin["Mod[a-3,3]==Mod[b-3,3]", A, A]` con `A = Range[5]`.

4.5.10 `R6 = RelBin["a-b>=3", A, A]` con `A = Range[5]`.

4.5.11 `R7 = RelBin["Mod[Abs[a^3+b^2],3]==0", A, A]`, o bien, `R7 = RelBin["IntegerQ[Abs[a^3+b^2]/3]", A, A]`, con `A = Range[5]`.

4.5.12 R_1 :

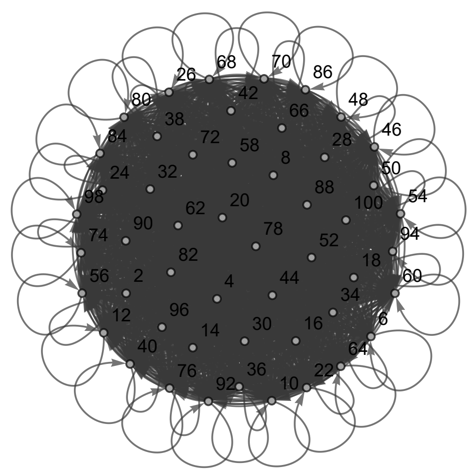


,

In[ ] :=

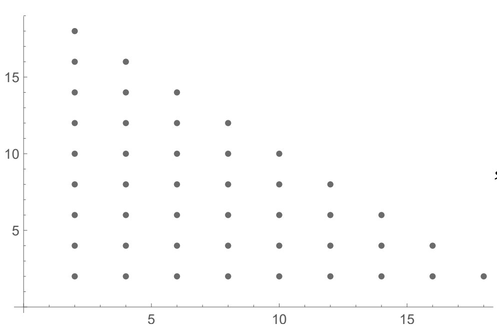
```
A = Range[2, 100, 2];
R1 = RelBin["a<=b^2", A, A];
MR1 = MatrizRelBin[R1, A, A]
```

,



.

R_2 :

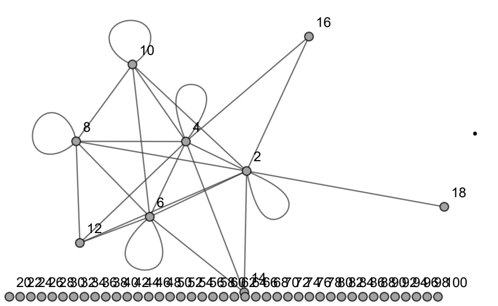


,

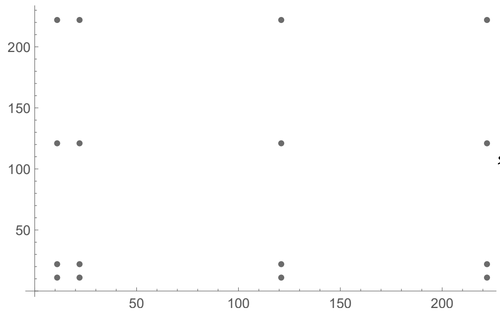
In[ ] :=

```
A = Range[2, 100, 2];
R2 = RelBin["a+b<=20", A, A];
MR2 = MatrizRelBin[R2, A, A]
```

,

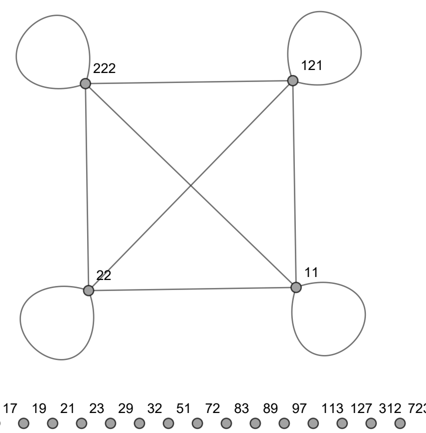


.

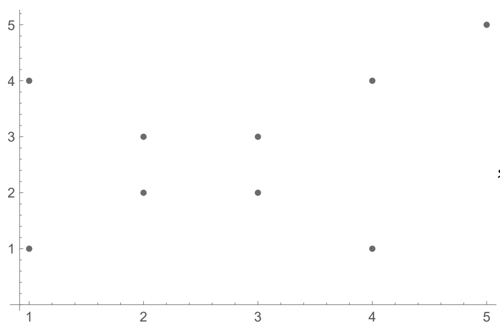
R_3 :  ,

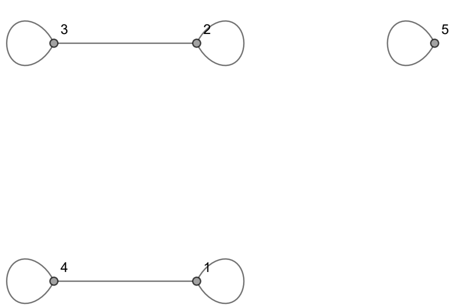
In[ ] :=

```
R3 = RelBin["PalindromeQ[a]&&PalindromeQ[b]", A, A];
MR3 = MatrizRelBin[R3, A, A]
```

con **A** el conjunto del enunciado, 

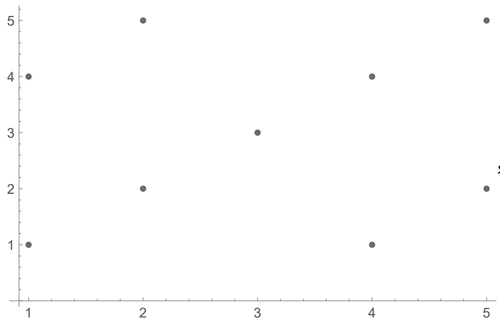
.

R_4 :  , $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

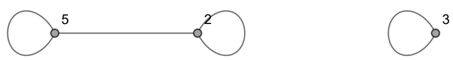


.

R_5 :

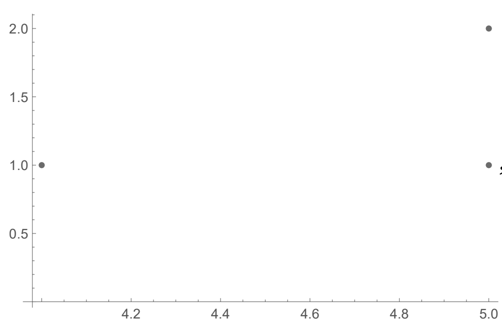


$$, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

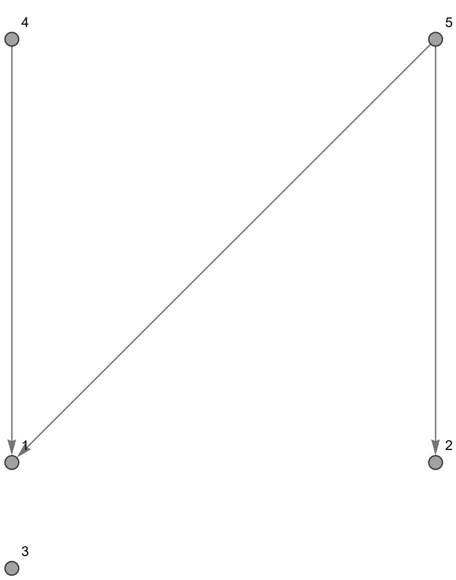


.

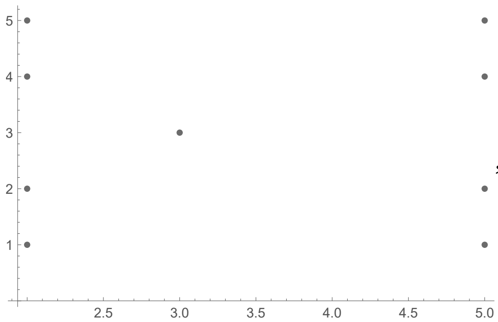
R_6 :

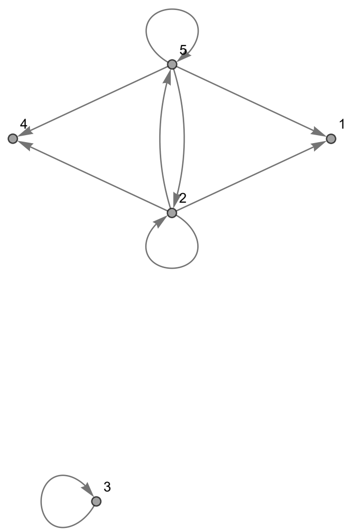


$$, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



.

R_7 :  , $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,



4.5.13 $\overline{R_1^{-1}}$: `R1Inversa = Reverse /@ R1`, `Complement[PC[A, A], R1Inversa]`, $R_1 o R_1$: `RelBinMatriz[ProductoBooleano[MR1, MR1][[1]], A, A]`.

4.5.14 $\overline{R_2 o R_2}$: `Complement[PC[A, A], RelacionComposicion[R2, R2]]`, $(R_2 o R_2)\, o R_2$: `RelBinMatriz[ProductoBooleano[ProductoBooleano[MR2, MR2][[1]], MR2][[1]], A, A]`.

4.5.15 $R_3^{-1} \cup R_3$: {{11, 11}, {11, 22}, {11, 121}, {11, 222}, {22, 11}, {22, 22}, {22, 121}, {22, 222}, {121, 11}, {121, 22}, {121, 121}, {121, 222}, {222, 11}, {222, 22}, {222, 121}, {222, 222}}, $R_3 \cap R_3^{-1} = R_3^{-1} \cup R_3$.

4.5.16 $\overline{R_1^{-1} \cup R_2^{-1}}$: `Complement[PC[A, A], Union[Reverse /@ R1, Reverse /@ R2]]`, $R_1^{-1} o R_2^{-1}$: `RelBinMatriz[ProductoBooleano[Transpose[MR2], Transpose[MR1]][[1]], A, A]`.

4.5.17 $\overline{(R_6 \cup R_5)^{-1}}$: {{1, 1}, {4, 1}, {2, 2}, {5, 2}, {3, 3}, {1, 4}, {4, 4}, {1, 5}, {2, 5}, {5, 5}}, $\left(\overline{R_4 \cap R_7}\right)^{-1}$: {{2, 2}, {3, 3}, {5, 5}}.

4.5.18 {{1, 1}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 2}, {2, 3}, {3, 1}, {3, 4}, {3, 5}, {3, 2}, {3, 3}, {4, 1}, {4, 4}, {4, 5}, {4, 2}, {4, 3}, {5, 2}, {5, 3}}.

4.5.19 {{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 1}, {2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 1}, {3, 2}, {3, 3}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 1}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 4}, {4, 5}, {5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5}}.

4.5.20 R_1 : reflexiva, R_2 : simétrica, R_3 : simétrica y transitiva, R_4 : de equivalencia, R_5 : de equivalencia, R_6 : antisimétrica y transitiva, R_7 : transitiva.

4.5.21
```
Table[i -> ReEquivalenciaParticion[Select[
SetPartitions[Range[5]], Length[#] == 2 &][[i]], Range[5]], {i,
Length[Select[SetPartitions[Range[5]], Length[#] == 2 &]]}].
```

Soluciones del Capítulo 5

5.5.1 Grafo $1 : b \to e \to d \to e \to g \to f \to f \to b \to a \to a \to c \to b$, longitud 11. Grafo $2 : b \to a \to e \to d \to i \to h \to f \to d \to c \to g \to f \to i \to d \to b$, longitud 13. Grafo $3 : a \to c \to h \to g \to f \to d \to c \to e \to h \to f \to e \to d \to b \to a$, longitud 13. Grafo $4 : a \to h \to g \to b \to i \to f \to b \to e \to c \to d \to g \to a \to i \to e \to f \to a \to e \to d \to a$, longitud 18.

5.5.2 Grafo $1 : a \to a \to c \to b \to f \to f \to b \to e \to f \to g \to e \to d \to e \to d$, longitud 13. Grafo $2 : a \to d \to e \to j \to i \to d \to i \to h \to f \to g \to c \to d \to b \to b \to b$, longitud 14. Grafo $3 : h \to g \to f \to h \to e \to d \to f \to e \to c \to b \to a$, longitud 10. Grafo $4 : b \to i \to f \to a \to e \to c \to d \to a \to g \to h \to a \to i$, longitud 11.

5.5.3 Grafo 1:

	a	b	c	d	e	f	g
Grado o valencia	4	5	2	3	6	6	2

Grafo 2:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Grado o valencia	3	7	3	7	3	4	2	2	5	2

Grafo 3:

	a	b	c	d	e	f	g	h
Grado o valencia	2	3	5	4	4	4	2	4

Grafo 4:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Grado o valencia	6	4	2	4	6	4	4	2	4

5.5.4 Grafo $1 : \frac{28}{2} = 14$. Grafo $2 : \frac{38}{2} = 19$. Grafo $3 : \frac{28}{2} = 14$. Grafo $4 : \frac{36}{2} = 18$.

5.5.5 Grafo 3 : no hay circuito euleriano pero sí una ruta de *Euler*: $b \to a \to c \to d \to e \to c \to h \to e \to f \to g \to h \to f \to d \to b \to c$. Grafo 4 : no hay una ruta euleriana pero sí un circuito: $a \to d \to g \to h \to a \to i \to f \to e \to i \to b \to g \to a \to f \to b \to e \to c \to d \to e \to a$.

5.5.6 Grafo $3 : m = 14 < \frac{n^2 - 3n + 6}{2} = 23$. La propiedad de *Dirac* es falsa, $\theta(a) = 2 < \frac{n}{2} = 4$. La propiedad de *Ore* es falsa, $\theta(a) + \theta(d) = 6 < n = 8$. El grafo sí tiene un circuito de *Hamilton*: $a \to b \to d \to e \to f \to g \to h \to c \to a$. Grafo $4 : m = 18 < \frac{n^2 - 3n + 6}{2} = 30$. La propiedad de *Dirac* es falsa, $\theta(d) = 4 < \frac{n}{2} = \frac{9}{2}$. La propiedad de *Ore* es falsa, $\theta(a) + \theta(c) = 8 < n = 9$. El grafo sí tiene un circuito de *Hamilton*: $a \to h \to g \to b \to i \to f \to e \to c \to d \to a$.

5.5.7 Grafo 1 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Grafo 2 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Grafo 3 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

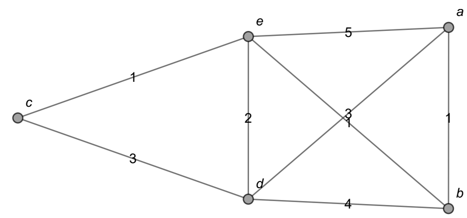
$$\text{Grafo } 4: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

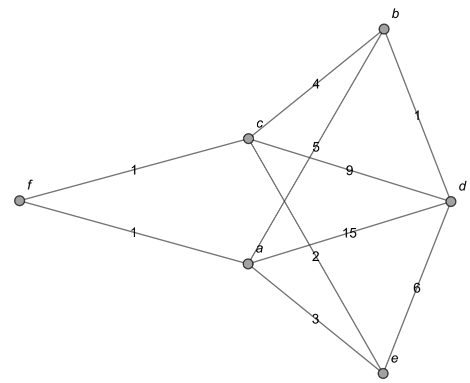
5.5.8 Grafo $3:$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 5 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

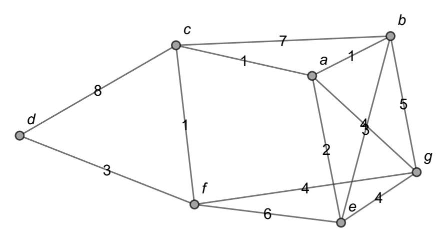
$$\text{Grafo } 4: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



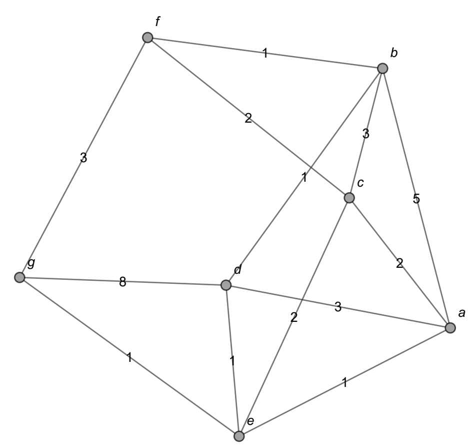
5.5.9



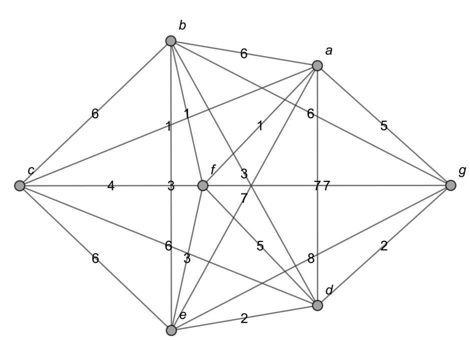
5.5.10



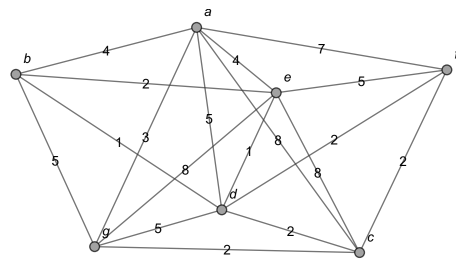
5.5.11



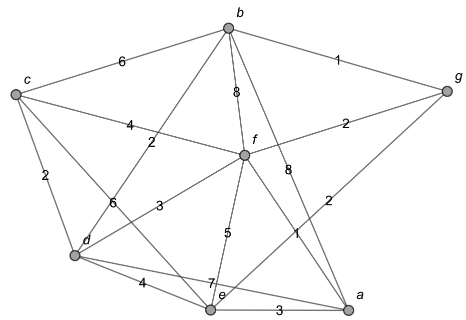
5.5.12



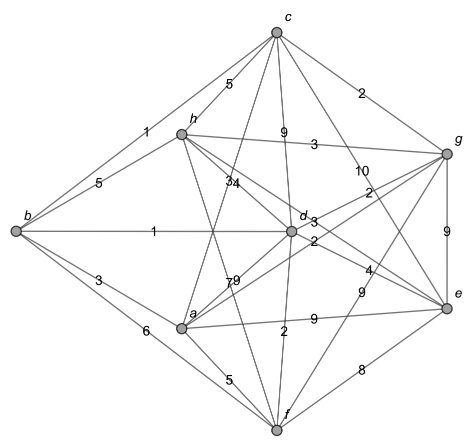
5.5.13



5.5.14



5.5.15



5.5.16

5.5.17 Grafo 5 : hay una ruta de *Euler*: $a \to d \to b \to e \to c \to d \to e \to a \to b$. Se cumple la propiedad de las aristas y la de *Ore*, un circuito hamiltoniano es: $a \to b \to d \to c \to e \to a$. Grafo 6 : hay una ruta euleriana: $e \to a \to b \to c \to d \to a \to f \to c \to e \to d \to b$. No se cumple ninguna de las propiedades y el grafo sí tiene un circuito de *Hamilton*: $a \to e \to d \to b \to c \to f \to a$. Grafo 7 : hay un circuito de *Euler*: $a \to g \to f \to d \to c \to f \to e \to g \to b \to e \to a \to c \to b \to a$. No se cumple ninguna de las propiedades y el grafo sí tiene un circuito de *Hamilton*: $a \to g \to e \to f \to d \to c \to b \to a$. Grafo 8 : hay una ruta euleriana: $f \to b \to a \to c \to b \to d \to a \to e \to d \to g \to e \to c \to f \to g$. Se satisface la propiedad de *Ore* y un circuito hamiltoniano es: $a \to d \to g \to f \to b \to c \to e \to a$. Grafo 9 : hay una ruta de *Euler*: $g \to a \to b \to c \to a \to d \to b \to e \to a \to f \to b \to g \to d \to c \to e \to d \to f \to e \to g \to f \to c$. Todas las propiedades se satisfacen y un circuito de *Hamilton* es: $a \to f \to c \to d \to e \to g \to b \to a$. Grafo 10 : hay una ruta euleriana: $c \to a \to b \to d \to a \to e \to b \to g \to a \to f \to c \to d \to e \to f \to d \to g \to e \to c \to g$. Todas las propiedades se satisfacen y un circuito hamiltoniano es: $a \to d \to b \to g \to c \to f \to e \to a$. Grafo 11 : no hay circuitos eulerianos, ni rutas de *Euler*. Se satisface la propiedad de *Ore* y un circuito de *Hamilton* es: $a \to b \to g \to e \to f \to c \to d \to a$. Grafo 12 : hay una ruta euleriana: $b \to a \to c \to b \to f \to a \to d \to c \to e \to a \to g \to c \to h \to d \to e \to f \to d \to g \to e \to h \to f \to g \to h \to b \to d$. Todas las propiedades se satisfacen y un circuito de *Hamilton* es: $a \to b \to c \to e \to g \to h \to d \to f \to a$.

5.5.18 Grafo $3 : \{8, \{\{a,c\},\{c,h\}\}\}$. Grafo $4 : \{4, \{\{a,g\},\{g,h\}\}\}$. Grafo $5 : \{3, \{\{a,b\},\{b,e\},\{e,c\}\}\}$. Grafo $6 : \{6, \{\{a,b\},\{b,d\}\}\}$. Grafo $7 : \{5, \{\{a,c\},\{c,f\},\{f,d\}\}\}$. Grafo $8 : \{3, \{\{c,e\},\{e,g\}\}\}$. Grafo $9 : \{5, \{\{b,d\},\{d,g\}\}\}$. Grafo $10 : \{5, \{\{b,g\}\}\}$. Grafo $11 : \{6, \{\{c,e\}\}\}$. Grafo $12 : \{5, \{\{b,h\}\}\}$.

5.5.19 Grafo $3 : \{34, \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,h\},\{h,e\},\{e,d\},\{d,f\},\{f,g\}\}\}$. Grafo $4 : \{25, \{\{b,e\},\{e,d\},\{d,g\},\{g,a\},\{a,i\},\{i,f\}\}\}$.

5.5.20 K_3 tiene $2 \cdot 3 = 6$ circuitos simples de longitud 3. K_4 posee $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ circuitos simples de longitud 4. K_5 contiene $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ circuitos simples de longitud 5. En general, K_n tiene $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ circuitos simples de longitud n.

5.5.21 El valor constante de la diagonal principal de la matriz A^k, $1 \leq k \leq 10$, $k \in \mathbb{N}$, corresponde a: 0 con $k = 1$, 19 con $k = 2$, 342 con $k = 3$, 6517 con $k = 4$, 123804 con $k = 5$, 2352295 con $k = 6$, 44693586 con $k = 7$, 849178153 con $k = 8$, 16134384888 con $k = 9$ y 306553312891 con $k = 10$. Utilizando estos datos y el comando **`FindSequenceFunction`** del software *Wolfram Mathematica* se obtiene la fórmula general: $\frac{1}{20}\left(19(-1)^k + 19^k\right)$, $\forall k$, $k \in \mathbb{N}$.

5.5.22 Grafo rueda: nunca posee un circuito de *Euler* y si $n \geq 3$, con n el orden del grafo, contiene circuitos hamiltonianos. Grafo estrella: no contiene circuitos eulerianos y no posee circuitos de *Hamilton*. Grafo ciclo: para cualquier orden contiene tanto circuitos de *Euler* como de *Hamilton*. Grafo camino: no posee circuitos de ningún tipo. Grafo red: tiene circuitos eulerianos si la cantidad de nodos fila n y de vértices columna m es igual a 2 y no contiene circuitos de *Hamilton* si simultáneamente n y m son números impares, suponiendo que el grafo posee circuitos.

Soluciones del Capítulo 6

6.6.1 Árbol 1 : es conexo y contiene 10 aristas, donde $10 = 11 - 1 = n - 1$, con $n = 11$ el número de vértices del grafo. Árbol 2 : no tiene circuitos y posee 14 aristas, donde $14 = 15 - 1 = n - 1$, con $n = 15$ el número de nodos del grafo. Árbol 3 : es conexo y no tiene circuitos. Árbol 4 : no posee circuitos y contiene 19 aristas, donde $19 = 20 - 1 = n - 1$, con $n = 20$ el número de vértices del grafo.

6.6.2

Árbol 1 :	Árbol 2 :
Orden: 2 (árbol binario) Hojas: $\{6,7,8,9,10,11\}$ Altura: 3	Orden: 3 Hojas: $\{1,2,3,14,13,6,12\}$ Altura: 4
Árbol 3 :	**Árbol 4 :**
Orden: 3 Hojas: $\{7,8,9,10,11,12,$ $13,14,15,16,17,18\}$ Altura: 3	Orden: 4 Hojas: $\{1,3,4,9,15,17,$ $14,16,18\}$ Altura: 5

6.6.3 Árbol 1 : es completo. Árbol 2 : no es completo, por ejemplo, la raíz 10 no tiene tres hijos. Árbol 3 : no es completo, falla en el nodo 6 que no tiene tres hijos. Árbol 4 : no es completo, por ejemplo, la raíz 7 tiene dos hijos en lugar de cuatro.

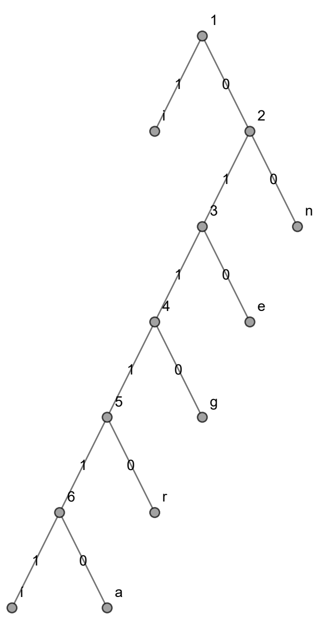
6.6.4 Árbol 1 : es balanceado. Árbol 2 : no es balanceado, por ejemplo, la hoja 1 se encuentra en el nivel 2, que no corresponde a la altura del árbol igual a 4 o a la altura menos uno igual a 3. Árbol 3 : es balanceado. Árbol 4 : no es balanceado, por ejemplo, el nodo terminal 9 está en el nivel 2, distinto de la altura 5 del árbol o ese valor menos uno igual a 4.

6.6.5 Árbol 1 : `Arbol[{{1, 2}, {1, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 6}, {3, 7}, {4, 8}, {4, 9}, {5, 10}, {5, 11}}]`.

Árbol 2 : `Arbol[{{1, 15}, {2, 11}, {3, 11}, {4, 8}, {4, 14}, {5, 11}, {5, 13}, {6, 7}, {7, 9}, {8, 15}, {9, 10}, {9, 11}, {9, 12}, {10, 15}}]`.

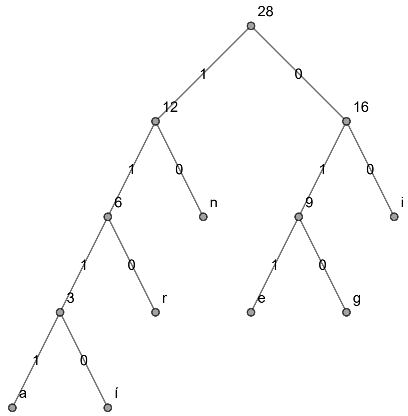
Árbol 3 : `Arbol[{{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 5}, {2, 6}, {2, 7}, {3, 8}, {3, 9}, {3, 10}, {4, 11}, {4, 12}, {4, 13}, {5, 14}, {5, 15}, {5, 16}, {6, 17}, {6, 18}}]`.

Árbol 4 : `Arbol[{{1, 12}, {2, 3}, {2, 10}, {2, 11}, {2, 13}, {4, 8}, {5, 6}, {5, 7}, {5, 19}, {6, 8}, {7, 12}, {9, 12}, {10, 15}, {11, 17}, {12, 13}, {12, 20}, {14, 19}, {16, 20}, {18, 19}}]`.

6.6.6 

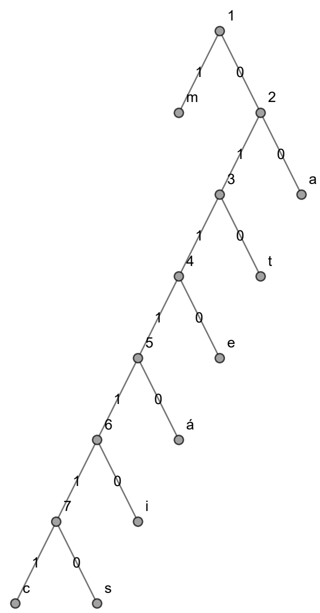
,

1000110010001010011100111110111110.



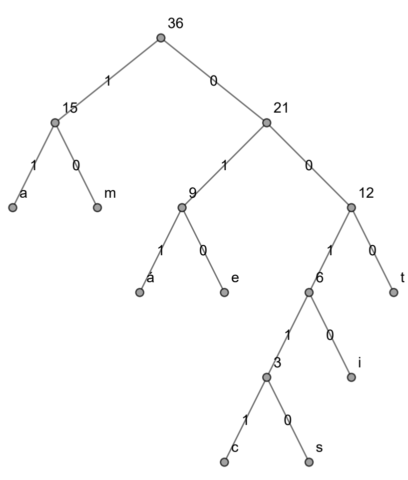
,

10010011100001111011101111.



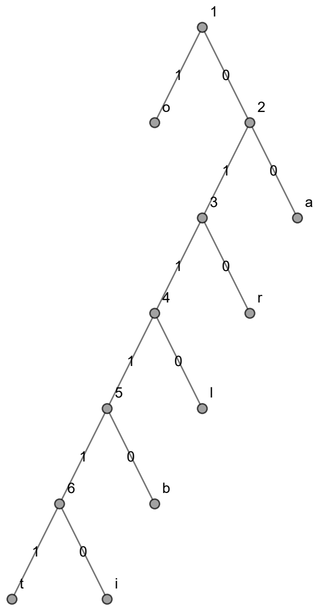
6.6.7 ,

10001001101011100100111100111111000111110.



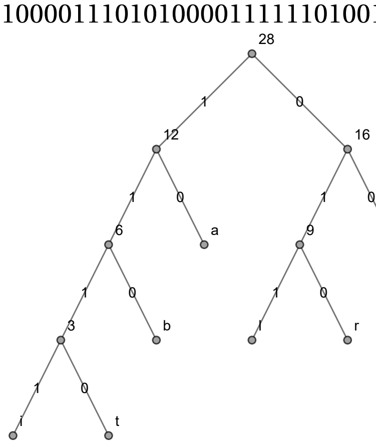
,

1011000010100110000010001111100110.

6.6.8 

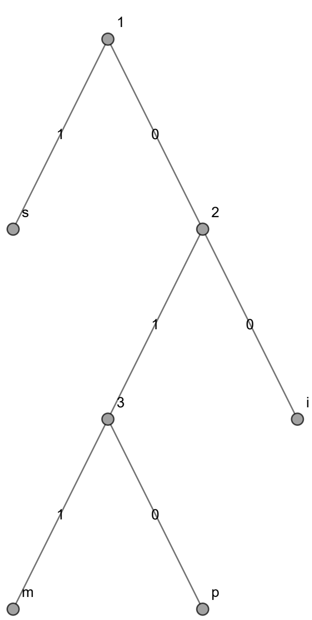
,

110000111010100001111110100111101.



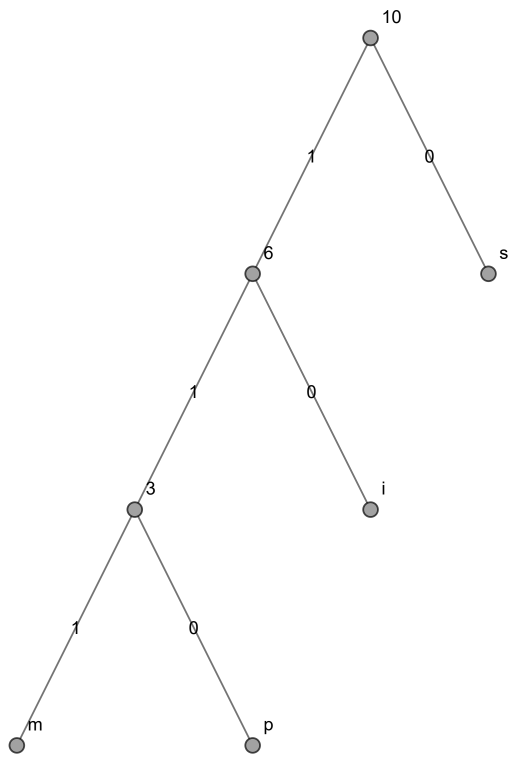
,

1110110000101011100001011110 0.

6.6.9 

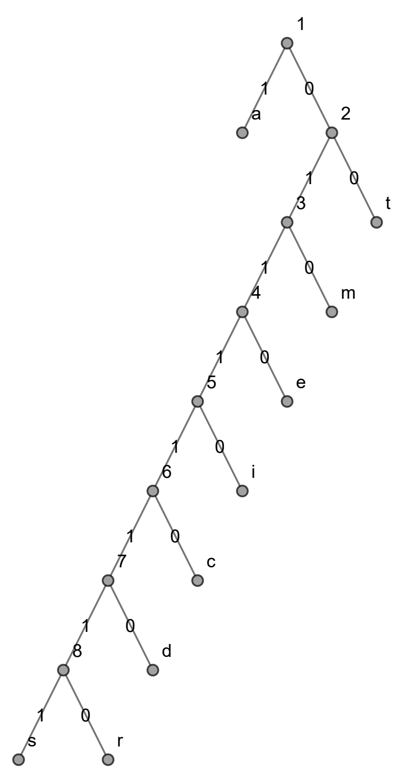
,

110011001100010001.



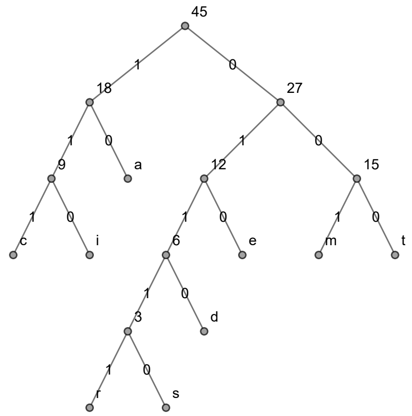
,

1111000100010110100.



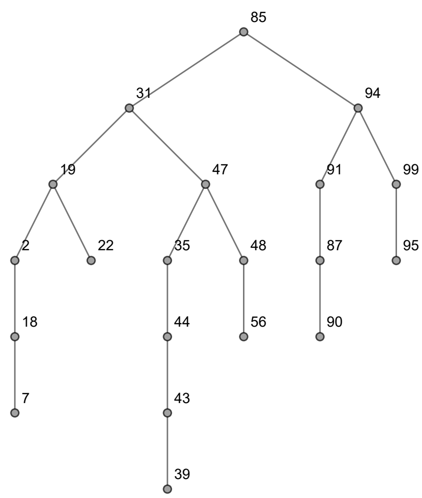
6.6.10 ,

10100011001010001110011110101111100111001111111011110011111100110001.



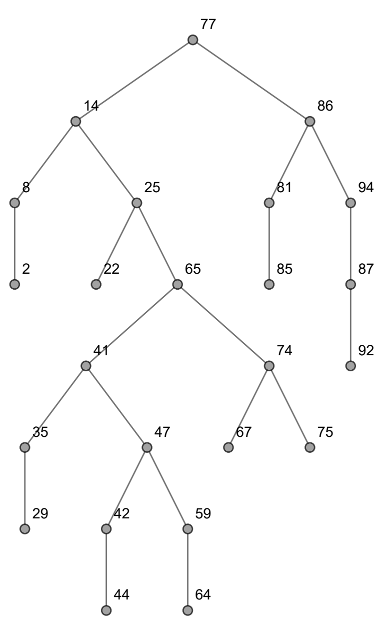
,

110000010001100001101111001101100111011101111101000010.



6.6.11 ,

prefijo: $\{85, 31, 19, 2, 18, 7, 22, 47, 35, 44, 43, 39, 48, 56, 94, 91, 87, 90, 99, 95\}$,
interfijo: $\{2, 7, 18, 19, 22, 31, 35, 39, 43, 44, 47, 48, 56, 85, 87, 90, 91, 94, 95, 99\}$ y
postfijo: $\{7, 18, 2, 22, 19, 39, 43, 44, 35, 56, 48, 47, 31, 90, 87, 91, 95, 99, 94, 85\}$.

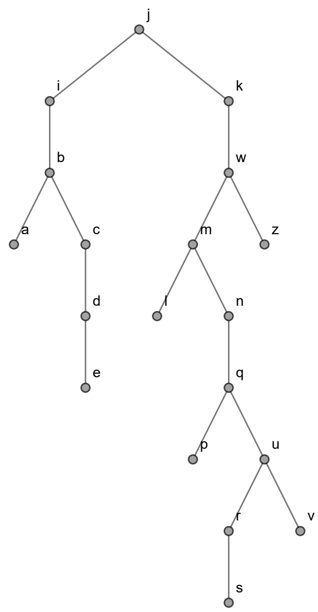


6.6.12 ,

prefijo: $\{77, 14, 8, 2, 25, 22, 65, 41, 35, 29, 47, 42, 44, 59, 64, 74, 67, 75, 86, 81, 85, 94, 87, 92\}$,

interfijo: $\{2, 8, 14, 22, 25, 29, 35, 41, 42, 44, 47, 59, 64, 65, 67, 74, 75, 77, 81, 85, 86, 87, 92, 94\}$ y

postfijo: $\{2, 8, 22, 29, 35, 44, 42, 64, 59, 47, 41, 67, 75, 74, 65, 25, 14, 85, 81, 92, 87, 94, 86, 77\}$.

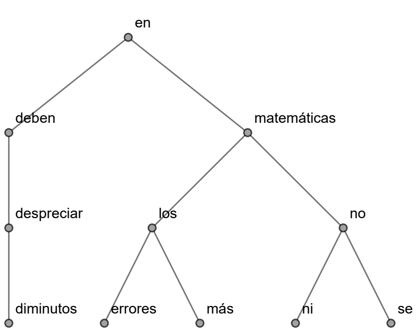
6.6.13 

,

prefijo: $\{j, i, b, a, c, d, e, k, w, m, l, n, q, p, u, r, s, v, z\}$,

interfijo: $\{a, b, c, d, e, i, j, k, l, m, n, p, q, r, s, u, v, w, z\}$ y

postfijo: $\{a, e, d, c, b, i, l, p, s, r, v, u, q, n, m, z, w, k, j\}$.

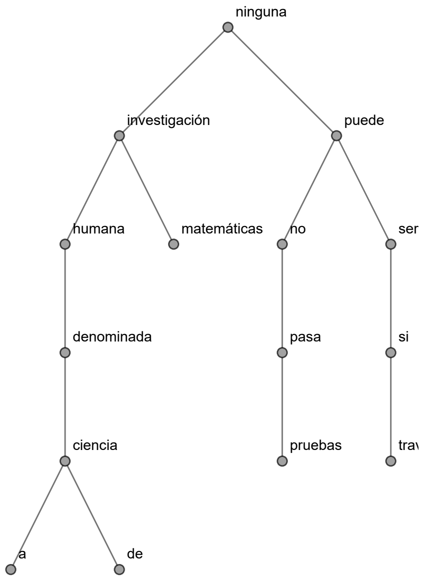
6.6.14 

,

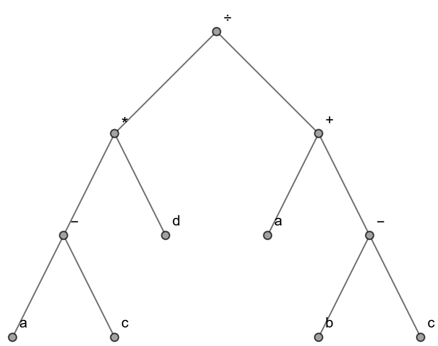
prefijo: {en, deben, despreciar, diminutos, matemáticas, los, errores, más, no, ni, se},

interfijo: {deben, despreciar, diminutos, en, errores, los, más, matemáticas, ni, no, se} y

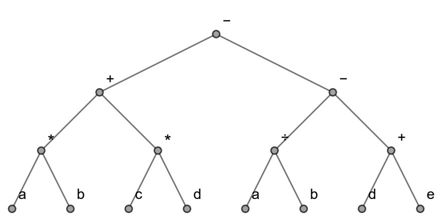
postfijo: {diminutos, despreciar, deben, errores, más, los, ni, se, no, matemáticas, en}.



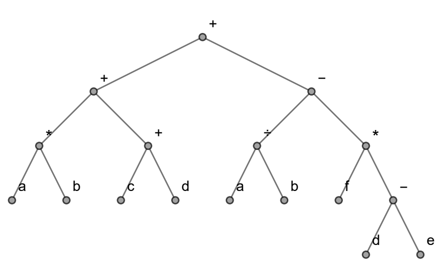
6.6.15 ,
prefijo: {ninguna, investigación, humana, denominada, ciencia, a, de, matemáticas, puede, no, pasa, pruebas, ser, si, través},
interfijo: {a, ciencia, de, denominada, humana, investigación, matemáticas, ninguna, pasa, pruebas, no, puede, ser, si, través} y
postfijo: {a, de, ciencia, denominada, humana, matemáticas, investigación, pruebas, pasa, no, través, si, ser, puede, ninguna}.



6.6.16 ,
polaca: $\div \cdot - acd + a - bc$ y polaca inversa: $ac - d \cdot abc - + \div$.

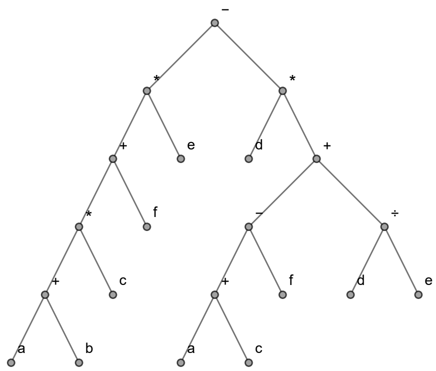


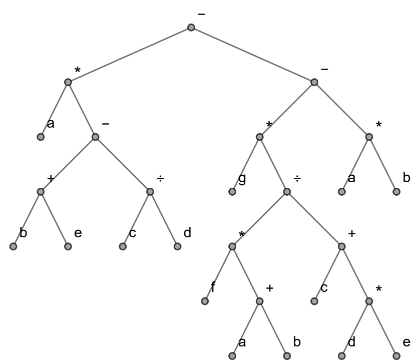
6.6.17 ,
polaca: $- + \cdot ab \cdot cd - \div ab + de$ y polaca inversa: $ab \cdot cd \cdot + ab \div de + --$.



6.6.18 ,

polaca: $++\cdot ab+cd-\div ab\cdot f-de$ y polaca inversa: $ab\cdot cd++ab\div fde-\cdot-+$.

6.6.19  ,
polaca: $-\cdot+\cdot+abcfe\cdot d+-+acf\div de$ y polaca inversa: $ab+c\cdot f+e\cdot dac+f-de\div+\cdot-$.

6.6.20  ,
polaca: $-\cdot a-+be\div cd-\cdot g\div\cdot f+ab+c\cdot de\cdot ab$ y polaca inversa: $abe+cd\div-\cdot gfab+\cdot cde\cdot+\div\cdot ab\cdot--$.

6.6.21 Grafo $3: BPA=\{[a,b],[a,c],[b,d],[c,e],[c,h],[d,f],[g,h]\}$ y $BPL=\{[a,b],[b,c],[c,d],[d,e],[e,f],[f,g],[g,h]\}$.
Grafo $4: BPA=\{[a,d],[a,e],[a,f],[a,g],[a,h],[a,i],[c,d],[b,e]\}$ y $BPL=\{[a,d],[c,d],[c,e],[b,e],[b,f],[f,i],[b,g],[g,h]\}$.
Grafo $5: BPA=\{[a,b],[a,d],[a,e],[c,d]\}$ y $BPL=\{[a,b],[b,d],[c,d],[c,e]\}$.
Grafo $6: BPA=\{[a,b],[a,d],[a,e],[a,f],[b,c]\}$ y $BPL=\{[a,b],[b,c],[c,d],[d,e],[c,f]\}$.
Grafo $7: BPA=\{[a,b],[a,c],[a,e],[a,g],[c,d],[c,f]\}$ y $BPL=\{[a,b],[b,c],[c,d],[d,f],[e,f],[e,g]\}$.
Grafo $8: BPA=\{[a,b],[a,c],[a,d],[a,e],[b,f],[d,g]\}$ y $BPL=\{[a,b],[b,c],[c,e],[d,e],[d,g],[f,g]\}$.
Grafo $9: BPA=\{[a,b],[a,c],[a,d],[a,e],[a,f],[a,g]\}$ y $BPL=\{[a,b],[b,c],[c,d],[d,e],[e,f],[f,g]\}$.
Grafo $10: BPA=\{[a,b],[a,c],[a,d],[a,e],[a,f],[a,g]\}$ y $BPL=\{[a,b],[b,d],[c,d],[c,e],[e,f],[e,g]\}$.
Grafo $11: BPA=\{[a,b],[a,d],[a,e],[a,f],[b,c],[b,g]\}$ y $BPL=\{[a,b],[b,c],[c,d],[d,e],[e,f],[f,g]\}$.
Grafo $12: BPA=\{[a,b],[a,c],[a,d],[a,e],[a,f],[a,g],[b,h]\}$ y $BPL=\{[a,b],[b,c],[c,d],[d,e],[e,f],[f,g],[g,h]\}$.

6.6.22 Grafo $3: Prim=\{[a,c],[c,e],[a,b],[b,d],[e,f],[e,h],[h,g]\}$ y $Kruskal=\{[c,e],[a,c],[b,d],[c,d],[g,h],[e,f],[e,h]\}$. Peso: 22.

Grafo 4 : $Prim = \{[a,d],[a,f],[f,i],[a,e],[a,g],[g,h],[g,b],[d,c]\}$ y
$Kruskal = \{[a,d],[a,f],[g,h],[f,i],[b,g],[a,e],[a,g],[c,e]\}$. Peso: 18.
Grafo 5 : $Prim = \{[a,b],[b,e],[e,c],[e,d]\}$ y $Kruskal = \{[c,e],[b,e],[a,b],[d,e]\}$. Peso: 5.
Grafo 6 : $Prim = \{[a,f],[f,c],[c,e],[c,b],[b,d]\}$ y $Kruskal = \{[c,f],[a,f],[b,d],[c,e],[b,c]\}$.
Peso: 9.
Grafo 7 : $Prim = \{[a,b],[a,c],[c,f],[a,e],[f,d],[a,g]\}$ y
$Kruskal = \{[a,b],[c,f],[a,c],[a,e],[d,f],[a,g]\}$. Peso: 12.
Grafo 8 : $Prim = \{[a,e],[e,d],[d,b],[b,f],[e,g],[a,c]\}$ y
$Kruskal = \{[b,f],[a,e],[e,g],[d,e],[b,d],[c,f]\}$. Peso: 7.
Grafo 9 : $Prim = \{[a,c],[a,f],[f,b],[b,d],[d,e],[d,g]\}$ y
$Kruskal = \{[a,f],[a,c],[b,f],[d,e],[d,g],[b,e]\}$. Peso: 10.
Grafo 10 : $Prim = \{[a,g],[g,c],[c,d],[d,b],[d,e],[c,f]\}$ y
$Kruskal = \{[d,e],[b,d],[d,f],[c,g],[c,f],[a,g]\}$. Peso: 11.
Grafo 11 : $Prim = \{[a,f],[f,g],[g,b],[b,d],[d,c],[g,e]\}$ y
$Kruskal = \{[b,g],[a,f],[e,g],[f,g],[c,d],[b,d]\}$. Peso: 10.
Grafo 12 : $Prim = \{[a,g],[g,c],[c,b],[b,d],[d,f],[g,h],[h,e]\}$ y
$Kruskal = \{[b,c],[b,d],[c,g],[a,g],[d,f],[e,h],[g,h]\}$. Peso: 14.

6.6.23 Grafo 3 : $BPA = \{[h,g],[h,f],[h,e],[h,c],[d,f],[b,c],[a,c]\}$ y
$BPL = \{[h,g],[g,f],[d,f],[b,d],[b,a],[a,c],[e,c]\}$.
Grafo 4 : $BPA = \{[i,b],[i,f],[i,a],[i,e],[g,b],[a,h],[a,d],[c,e]\}$ y
$BPL = \{[i,b],[g,b],[g,a],[f,a],[f,e],[c,e],[c,d],[a,h]\}$.

6.6.24 Grafo 3 : $Prim = \{[h,g],[h,f],[f,e],[e,c],[c,a],[a,b],[b,d]\}$. Peso: 22.
Grafo 4 : $Prim = \{[i,f],[f,a],[a,d],[i,b],[b,g],[g,h],[i,e],[e,c]\}$. Peso: 18.

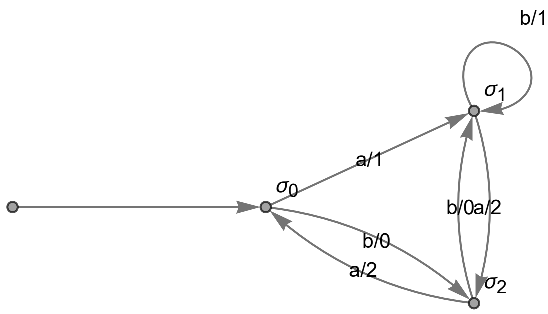
6.6.25 Grafo 3 : $Prim = \{[h,c],[h,f],[f,d],[h,e],[f,g],[c,b],[b,a]\}$ y $Kruskal = \{[d,f],[c,h],[e,h],[d,e],[f,g],[b,c],[a,b]\}$. Peso: 34.
Grafo 4 : $Prim = \{[i,b],[b,e],[e,c],[c,d],[d,g],[e,f],[i,a],[a,h]\}$ y
$Kruskal = \{[d,g],[d,e],[a,h],[c,d],[b,e],[e,f],[a,g],[a,i]\}$. Peso: 38.

6.6.26 Se debe correr para estudiar los grafos completos:
In[ ] :=

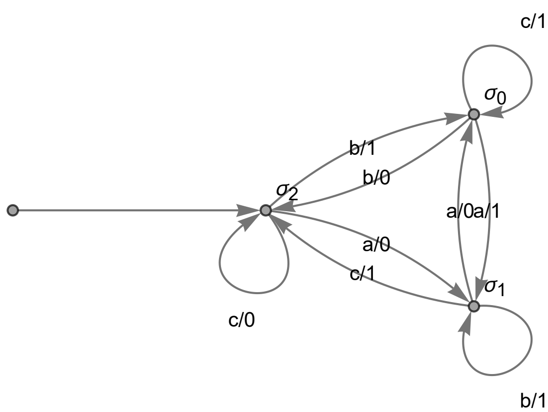
```
Table[i -> BuscarPrimeroAncho[GrafoCompleto[i], orden ->
Range[i]], {i, 2, 10}]
Table[i -> BuscarPrimeroLargo[GrafoCompleto[i], orden ->
Range[i]], {i, 2, 10}]
```

En los otros tipos de grafos se realiza lo mismo, cambiando **`GrafoCompleto`** en el código por: **`GrafoRueda`**, **`GrafoEstrella`**, **`GrafoCiclo`** o **`GrafoCamino`**, según corresponda.
Grafo completo y grafo rueda: $BPA = \{[1,2],[1,3],\ldots,[1,n]\}$ y
$BPL = \{[1,2],[2,3],\ldots,[n-1,n]\}$.
Grafo estrella: $BPA = BPL = \{[1,2],[1,3],\ldots,[1,n]\}$.
Grafo ciclo: $BPA = \{[1,2],[1,n],[2,3],[n-1,n],[3,4],[n-2,n-1],[4,5],[n-3,n-2],\ldots\}$ y
$BPL = \{[1,2],[2,3],\ldots,[n-1,n]\}$.
Grafo camino: $BPA = BPL = \{[1,2],[2,3],\ldots,[n-1,n]\}$.

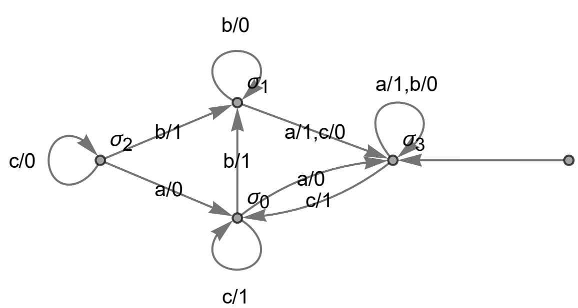
Soluciones del Capítulo 7



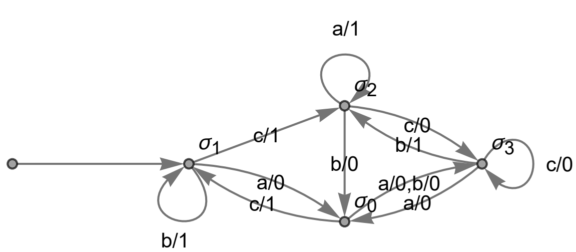
7.5.1



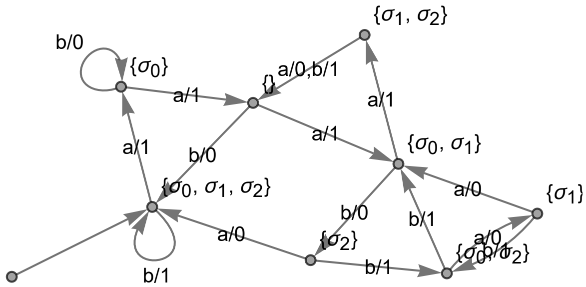
7.5.2



7.5.3



7.5.4



7.5.5

7.5.6 $M_1 : \{\{0, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 1, 2, 0, 2\}, \{\sigma_0, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2\}\}$.
$M_2 : \{\{1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0\}, \{\sigma_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_1\}\}$.
$M_3 : \{\{0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1\}, \{\sigma_3, \sigma_3\}\}$.
$M_4 : \{\{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}, \{\sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_3\}\}$.
$M_5 : \{\{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}, \{\{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0\}, \phi, \{\sigma_0,\sigma_1\}, \{\sigma_1,\sigma_2\}, \phi, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0\}, \{\sigma_0\}, \phi, \{\sigma_0,\sigma_1\}, \{\sigma_1,\sigma_2\}, \phi, \{\sigma_0,\sigma_1\}, \{\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}\}\}$.

7.5.7 $M_1 : \{\{1, 2, 2, 0, 2, 0, 0, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 2\}, \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_0\}\}$.
$M_2 : \{\{0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}, \{\sigma_2, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_0\}\}$.
$M_3 : \{\{1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1\}, \{\sigma_3, \sigma_3\}\}$.
$M_4 : \{\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{\sigma_1, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3\}\}$.
$M_5 : \{\{1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1\}, \{\{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0\}, \phi, \{\sigma_0,\sigma_1\}, \{\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0\}, \phi, \{\sigma_0,\sigma_1\}, \{\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0\}, \phi, \{\sigma_0,\sigma_1\}, \{\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0\}, \phi\}\}$.

7.5.8 $M_1 : \{\{1, 1, 2, 2, 0, 2, 0, 2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 2, 0, 0, 2\}, \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2\}\}$.
$M_2 : \{\{0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0\}, \{\sigma_2, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0\}\}$.
$M_3 : \{\{1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1\}, \{\sigma_3, \sigma_3\}\}$.
$M_4 : \{\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0\}, \{\sigma_1, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0\}\}$.
$M_5 : \{\{1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0\}, \{\{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0\}, \{\sigma_0\}, \phi, \{\sigma_0,\sigma_1\}, \{\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0\}, \phi, \{\sigma_0,\sigma_1\}, \{\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}, \{\sigma_0\}, \{\sigma_0\}, \phi, \{\sigma_0,\sigma_1\}, \{\sigma_2\}, \{\sigma_0,\sigma_2\}, \{\sigma_1\}\}\}$.

7.5.9 $M_2 : \{\{1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}, \{\sigma_2, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1\}\}$.

M_3 : $\{\{0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0\}, \{\sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3\}\}$.

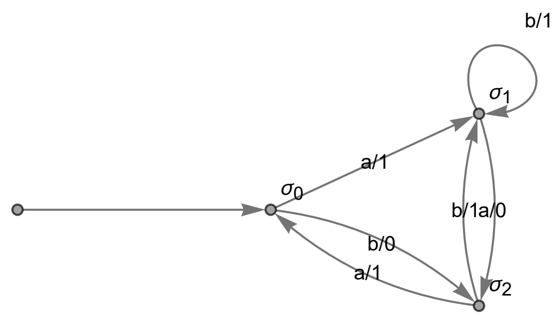
M_4 : $\{\{1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1\}, \{\sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_2\}\}$.

7.5.10 M_2 : $\{\{0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{\sigma_2, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_0\}\}$.

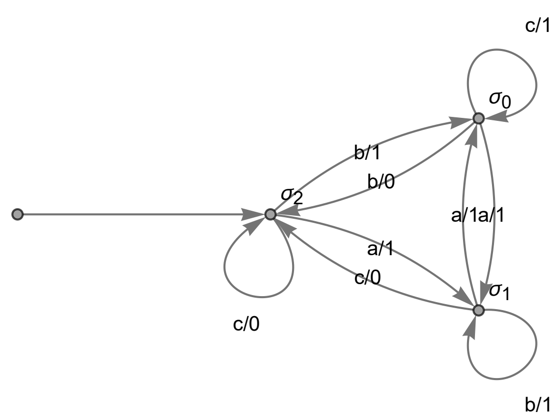
M_3 : $\{\{1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1\}, \{\sigma_3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_3\}\}$.

M_4 : $\{\{1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0\}, \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_0, \sigma_3\}\}$.

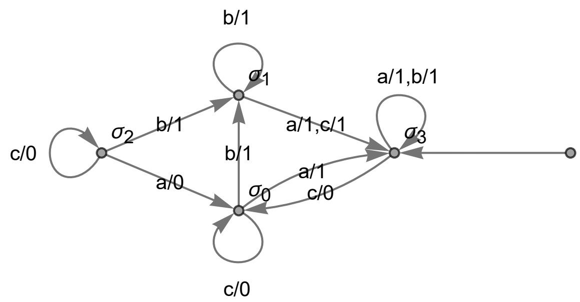
7.5.11 M_1 : no es autómata pues δ contiene el 2. Una modificación sería:



M_2 : no es autómata pues por ejemplo en σ_2 hay dos aristas entrantes con símbolo de salida 0 y una con símbolo de salida 1. Una modificación sería:

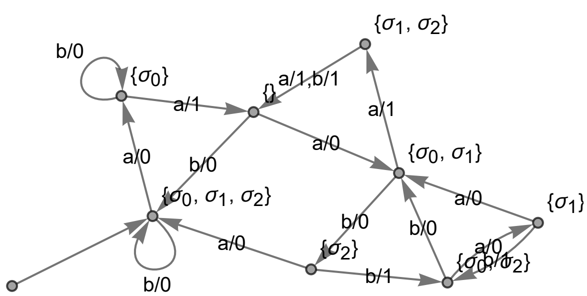


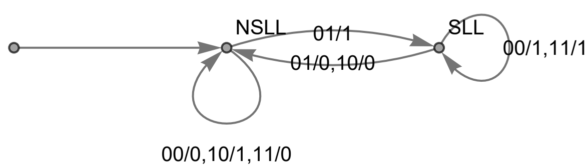
M_3 : no es autómata pues por ejemplo en σ_1 hay dos aristas entrantes con símbolo de salida 1 y una con símbolo de salida 0. Una modificación sería:



M_4 : es un autómata de estado finito pues $\delta = \{0, 1\}$ y todas las aristas entrantes a un mismo estado tienen el mismo símbolo de salida. Los estados aceptados son σ_1 y σ_2.

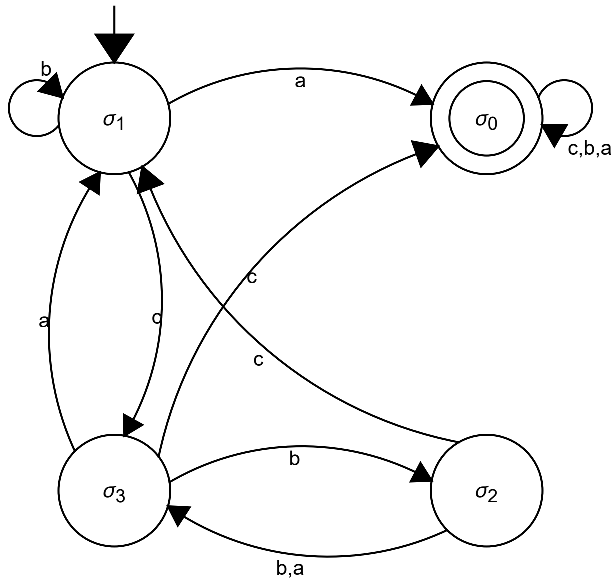
M_5 : no es autómata pues por ejemplo en $\{\sigma_0\}$ hay una arista entrante con símbolo de salida 0 y otra con símbolo de salida 1. Una modificación sería:



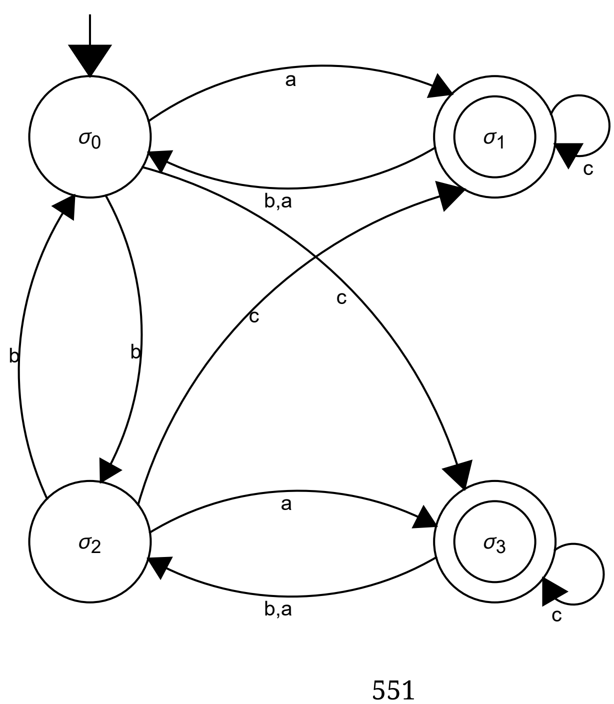


7.5.12 ,

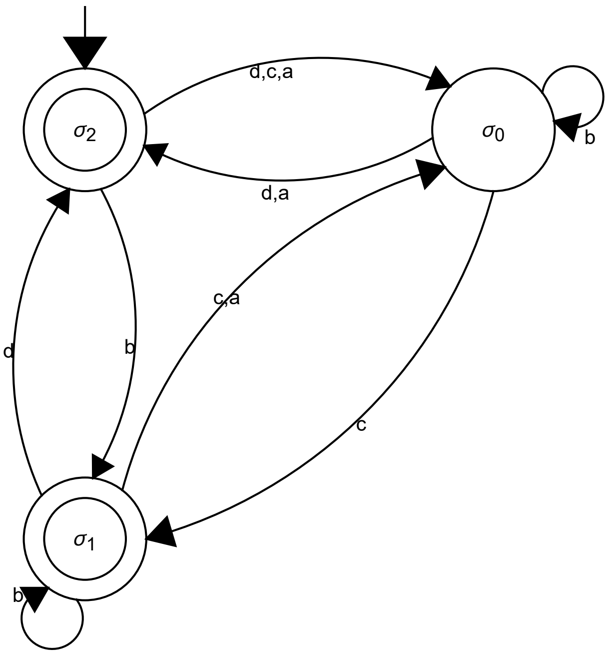
al procesar α ={10, 01, 11, 10, 11, 01, 11, 10} se obtiene: {{1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0}, {NSLL, NSLL, SLL, SLL, NSLL, NSLL, SLL, SLL, NSLL}}, como consecuencia $(11011101)_2 - (1110110)_2 = (1100111)_2$. En la máquina nunca se debe finalizar en el estado “SLL”. Si esto ocurre la resta binaria brinda un resultado negativo y la máquina solo funciona en caso contrario.



7.5.13

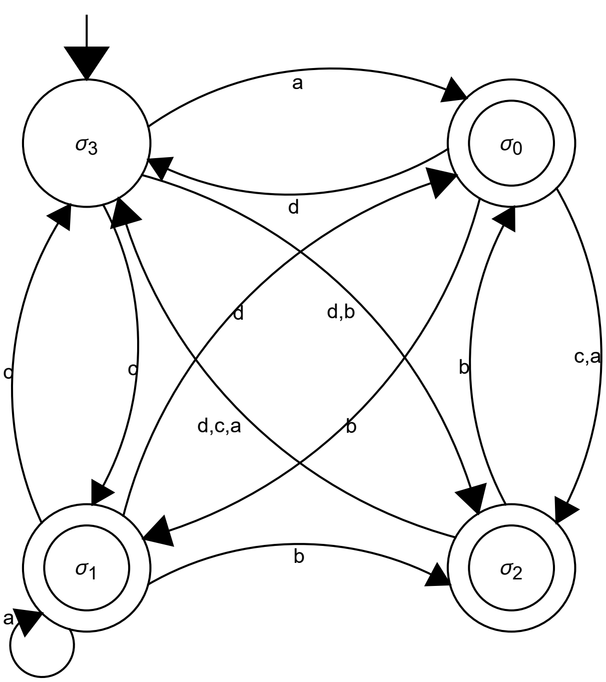


7.5.14



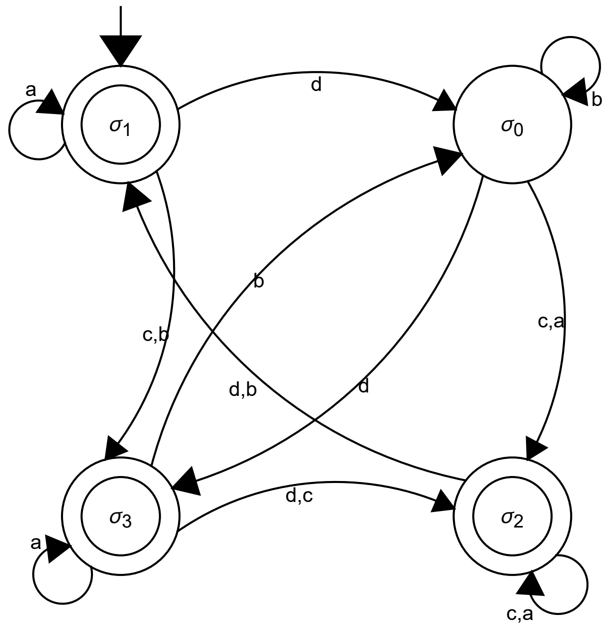
d,c,a
d,a
b
c,a
d
b
c
b
σ_2
σ_0
σ_1

7.5.15



a
d
d
d,b
c
c
b
c,a
d,c,a
b
b
a
σ_3
σ_0
σ_1
σ_2

7.5.16



7.5.17

7.5.18 A_1 : {True, {σ_1, σ_1, σ_1, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0}}.
A_2 : {True, {σ_0, σ_2, σ_0, σ_1, σ_0, σ_2, σ_0, σ_1, σ_0, σ_3, σ_3, σ_2, σ_1, σ_1, σ_0, σ_1, σ_1, σ_1, σ_0, σ_2, σ_3}}.
A_3 : {False, {σ_2, σ_1, σ_1, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_2, σ_0, σ_1, σ_0, σ_0, σ_1, σ_0, σ_0, σ_2, σ_0, σ_1, σ_1, σ_1, σ_0}}.
A_4 : {True, {σ_3, σ_2, σ_0, σ_2, σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, σ_0, σ_2, σ_3, σ_2, σ_3, σ_1, σ_2, σ_3, σ_1, σ_3, σ_2, σ_0, σ_2}}.
A_5 : {True, {σ_1, σ_3, σ_0, σ_2, σ_1, σ_3, σ_0, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_1, σ_3, σ_2, σ_1, σ_1, σ_3, σ_2, σ_1, σ_3, σ_3}}.

7.5.19 A_1 : {True, {σ_1, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0, σ_0}}.
A_2 : {False, {σ_0, σ_1, σ_0, σ_3, σ_3, σ_2, σ_3, σ_2, σ_0, σ_3, σ_3, σ_2, σ_1, σ_0, σ_1, σ_0, σ_3, σ_2, σ_3, σ_2, σ_0}}.
A_3 : {True, {σ_2, σ_0, σ_2, σ_0, σ_1, σ_1, σ_0, σ_2, σ_1, σ_0, σ_1, σ_0, σ_1, σ_0, σ_2, σ_0, σ_1, σ_0, σ_2, σ_1, σ_1}}.
A_4 : {True, {σ_3, σ_0, σ_2, σ_3, σ_1, σ_2, σ_3, σ_0, σ_1, σ_3, σ_1, σ_1, σ_3, σ_0, σ_2, σ_3, σ_1, σ_1, σ_1, σ_2, σ_0}}.
A_5 : {True, {σ_1, σ_1, σ_1, σ_3, σ_2, σ_1, σ_1, σ_1, σ_3, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_1, σ_3}}.

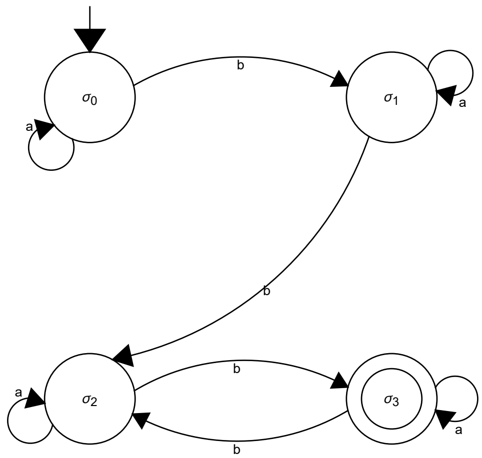
7.5.20 A_3 : {False, {σ_2, σ_0, σ_1, σ_1, σ_0, σ_0, σ_2, σ_1, σ_0, σ_1, σ_0, σ_2, σ_0, σ_1, σ_0, σ_0, σ_0, σ_2, σ_0, σ_1, σ_0}}.
A_4 : {True, {σ_3, σ_1, σ_3, σ_2, σ_3, σ_2, σ_3, σ_2, σ_3, σ_1, σ_3, σ_0, σ_2, σ_3, σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, σ_2, σ_3, σ_1}}.
A_5 : {True, {σ_1, σ_3, σ_2, σ_1, σ_1, σ_3, σ_3, σ_0, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_1, σ_3, σ_2, σ_1, σ_3, σ_2}}.

7.5.21 A_3 : {False, {σ_2, σ_0, σ_0, σ_1, σ_0, σ_1, σ_0, σ_2, σ_0, σ_0, σ_1, σ_0, σ_1, σ_2, σ_0, σ_2, σ_0, σ_2, σ_0, σ_1, σ_0}}.
A_4 : {False, {σ_3, σ_1, σ_2, σ_3, σ_0, σ_2, σ_3, σ_0, σ_2, σ_0, σ_2, σ_3, σ_1, σ_0, σ_2, σ_3, σ_0, σ_3, σ_0, σ_2, σ_3}}.
A_5 : {True, {σ_1, σ_3, σ_0, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_1, σ_3, σ_3, σ_2, σ_1, σ_3, σ_3, σ_3, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2}}.

7.5.22 A_3 : {True, {σ_2, σ_1, σ_0, σ_2, σ_0, σ_1, σ_2, σ_1, σ_1, σ_0, σ_2, σ_1, σ_0, σ_2, σ_0, σ_1, σ_0, σ_2, σ_0, σ_0, σ_2}}.
A_4 : {False, {σ_3, σ_2, σ_3, σ_2, σ_3, σ_1, σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, σ_2, σ_0, σ_2, σ_3, σ_0, σ_2, σ_3, σ_2, σ_3, σ_2, σ_3}}.
A_5 : {True, {σ_1, σ_3, σ_2, σ_1, σ_3, σ_2, σ_1, σ_3, σ_0, σ_2, σ_1, σ_3, σ_3, σ_2, σ_2, σ_2, σ_2, σ_1, σ_0, σ_0, σ_3}}.

7.5.23 A_1 : $b^n ac^m$, $n \geq 0$, $m \geq 0$ y $b^n cb^m ca$, $n \geq 0$, m impar, con $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
A_2 : $b^n ac^m$, n impar, $m \geq 0$ y $(ab)^n ac^m$, $n \geq 0$, $m \geq 0$, con $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

A_3 : $(bd)^n\, b^m$, $n \geq 0$, $m \geq 1$ y $d^n b^m c$, n impar, $m \geq 0$, con $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
A_4 : $(ad)^n\, a\,(bd)^m$, $n \geq 0$, $m \geq 0$ y $c^n a\,(cb)^m\, a$, n par, $m \geq 0$, con $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
A_5 : $a^n b a^m c^h$ y $d b^n\,(db)^m\, a^h$, con $n \geq 0$, $m \geq 0$, $h \geq 1$ y $n, m, h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.



7.5.24

In[ ] :=

```
Prueba[automata_, n_] := Module[{L = LenguajeStrings[automata,
n, limite -> True], valorLogico = True, m}, m = Length[L];
If[ToString[Select[Table[Count[L[[i]], b], {i, m}], EvenQ[#]
&]] != "{}", valorLogico = False]; Print[m, " pruebas: ",
valorLogico]]
Prueba[aut, 20]
```

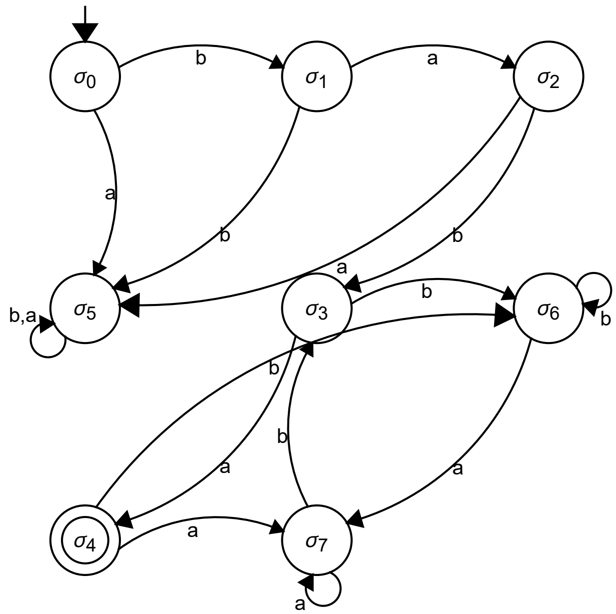
Out[ ] =

1048365 pruebas: True

Componentes del autómata:

- Estados: $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.
- Símbolos de entrada: $\{a, b\}$.
- Estado inicial: σ_0.
- Estados aceptados: $\{\sigma_3\}$.
- Función de transición de estados:

Δ	a	b
σ_0	σ_0	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2
σ_2	σ_2	σ_3
σ_3	σ_3	σ_2



7.5.25

In[ ] :=

```
Prueba[automata_, n_] := Module[{L = LenguajeStrings[automata,
n, limite -> True], valorLogico = True, i, m}, m = Length[L];
For[i = 1, i <= m, If[ToString[Take[L[[i]], 3]] != ToString[{b,
a, b}] || ToString[Take[L[[i]], -3]] != ToString[{a, b, a}],
valorLogico = False; Break[]]; i++]; Print[If[valorLogico ==
False, i, i - 1], " pruebas: ", valorLogico]]
Prueba[aut, 20]
```

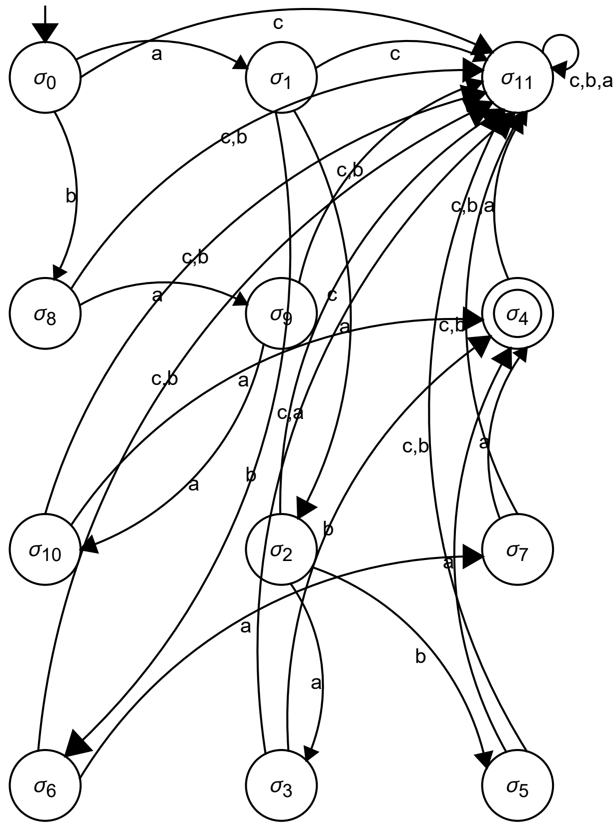
Out[ ] =

26215 pruebas: True

Componentes del autómata:

- Estados: $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7\}$.
- Símbolos de entrada: $\{a, b\}$.
- Estado inicial: σ_0.
- Estados aceptados: $\{\sigma_4\}$.
- Función de transición de estados:

Δ	a	b
σ_0	σ_5	σ_1
σ_1	σ_2	σ_5
σ_2	σ_5	σ_3
σ_3	σ_4	σ_6
σ_4	σ_7	σ_6
σ_5	σ_5	σ_5
σ_6	σ_7	σ_6
σ_7	σ_7	σ_3



7.5.26

In[ ] :=

```
Prueba[automata_, n_] := Module[{L = LenguajeStrings[automata,
n, limite -> True], valorLogico = True}, If[n >= 4,
If[ToString[L] != ToString[Permutations[{a, a, a, b}]],
valorLogico = False]; valorLogico, Print["La longitud debe ser
mayor o igual a 4"]]]
Prueba[aut, 20]
```

Out[ ] =

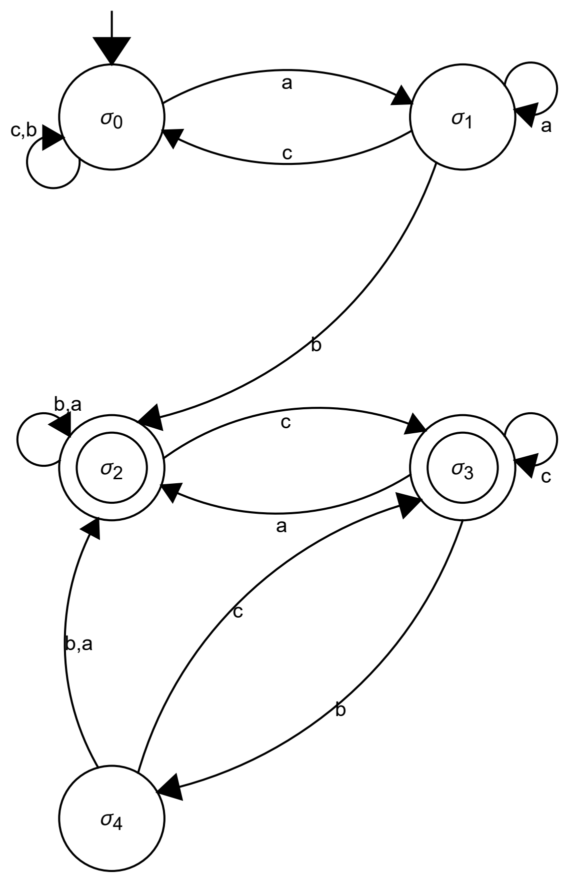
True

Componentes del autómata:

- Estados: $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9, \sigma_{10}, \sigma_{11}\}$.
- Símbolos de entrada: $\{a, b, c\}$.
- Estado inicial: σ_0.
- Estados aceptados: $\{\sigma_4\}$.

- Función de transición de estados:

Δ	a	b	c
σ_0	σ_1	σ_8	σ_{11}
σ_1	σ_2	σ_6	σ_{11}
σ_2	σ_3	σ_5	σ_{11}
σ_3	σ_{11}	σ_4	σ_{11}
σ_4	σ_{11}	σ_{11}	σ_{11}
σ_5	σ_4	σ_{11}	σ_{11}
σ_6	σ_7	σ_{11}	σ_{11}
σ_7	σ_4	σ_{11}	σ_{11}
σ_8	σ_9	σ_{11}	σ_{11}
σ_9	σ_{10}	σ_{11}	σ_{11}
σ_{10}	σ_4	σ_{11}	σ_{11}
σ_{11}	σ_{11}	σ_{11}	σ_{11}



7.5.27

In[ ] :=

```
Prueba[automata_, n_] := Module[{L = LenguajeStrings[automata,
n, limite -> True], valorLogico = True, i, m}, m = Length[L];
For[i = 1, i <= m, If[StringCount[StringJoin[ToString /@
L[[i]]], "ab"] == 0 || ToString[Take[L[[i]], -2]] == ToString[
{c, b}], valorLogico = False; Break[]]; i++]; Print[If[
valorLogico == False, i, i - 1], " pruebas: ", valorLogico]]
```

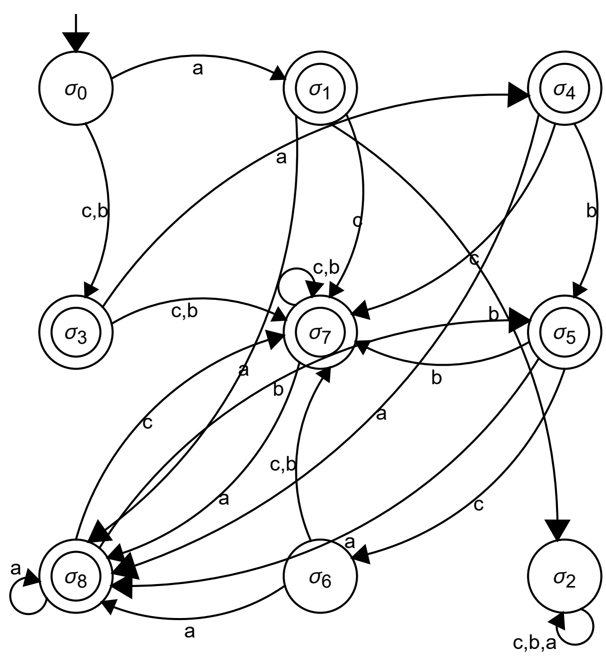
```
Prueba[aut, 13]
```
Out[ ] =

1686560 pruebas: True

Componentes del autómata:

- Estados: $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$.
- Símbolos de entrada: $\{a, b, c\}$.
- Estado inicial: σ_0.
- Estados aceptados: $\{\sigma_2, \sigma_3\}$.
- Función de transición de estados:

Δ	a	b	c
σ_0	σ_1	σ_0	σ_0
σ_1	σ_1	σ_2	σ_0
σ_2	σ_2	σ_2	σ_3
σ_3	σ_2	σ_4	σ_3
σ_4	σ_2	σ_2	σ_3



7.5.28

In[ ] :=

```
Prueba[automata_, n_] := Module[{L = LenguajeStrings[automata,
n, limite -> True], valorLogico = True, i, m}, m = Length[L];
For[i = 1, i <= m, If[Length[L[[i]]] == 2, If[ToString[L[[i]]]
== ToString[{a, b}], valorLogico = False; Break[]], If[
Length[L[[i]]] >= 3, If[ToString[Take[L[[i]], 2]] ==
ToString[{a, b}] || ToString[Take[L[[i]], -3]] == ToString[{a,
b, c}], valorLogico = False; Break[]]]]; i++]; Print[If[
```

```
valorLogico == False, i, i - 1], " pruebas: ", valorLogico]]
Prueba[aut, 13]
```

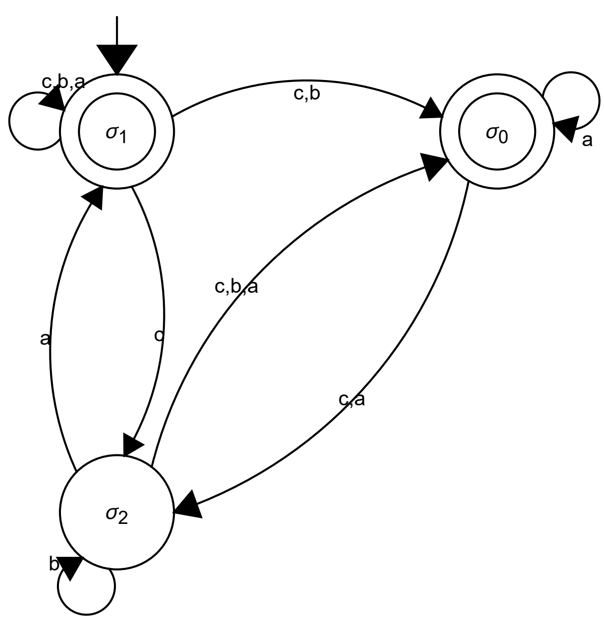
Out[ ] =

2047032 pruebas: True

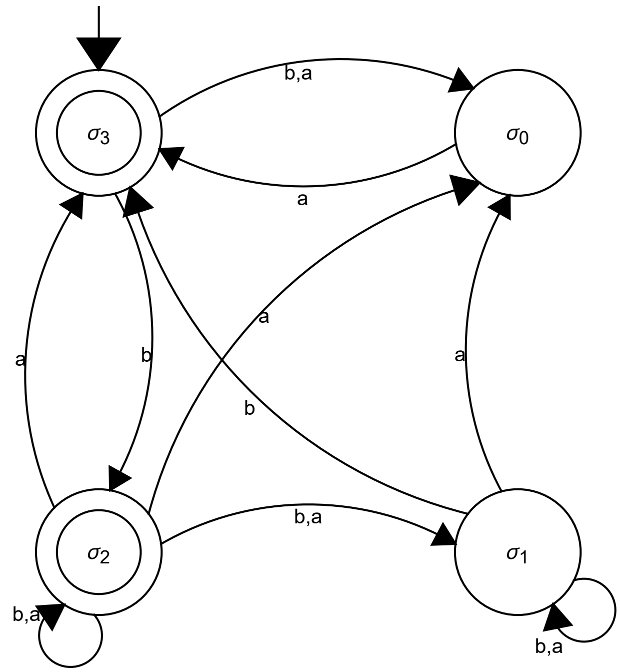
Componentes del autómata:

- Estados: $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8\}$.
- Símbolos de entrada: $\{a, b, c\}$.
- Estado inicial: σ_0.
- Estados aceptados: $\{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_7, \sigma_8\}$.
- Función de transición de estados:

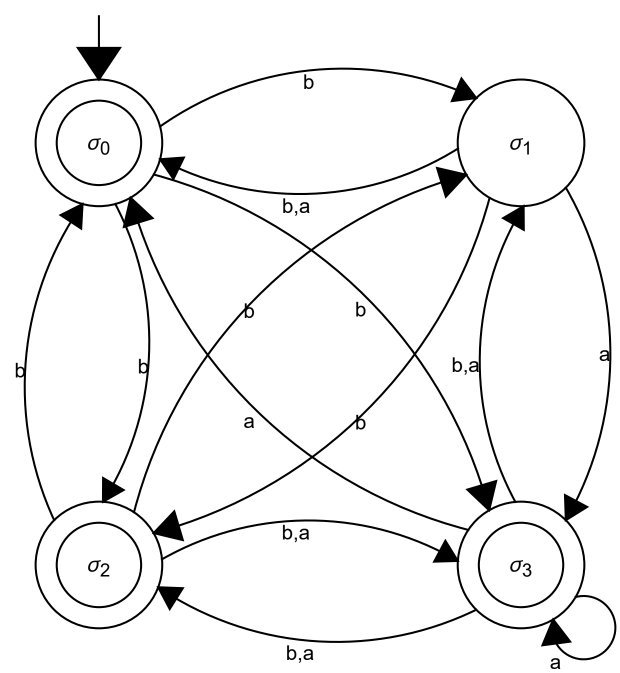
Δ	a	b	c
σ_0	σ_1	σ_3	σ_3
σ_1	σ_8	σ_2	σ_7
σ_2	σ_2	σ_2	σ_2
σ_3	σ_4	σ_7	σ_7
σ_4	σ_8	σ_5	σ_7
σ_5	σ_8	σ_7	σ_6
σ_6	σ_8	σ_7	σ_7
σ_7	σ_8	σ_7	σ_7
σ_8	σ_8	σ_5	σ_7



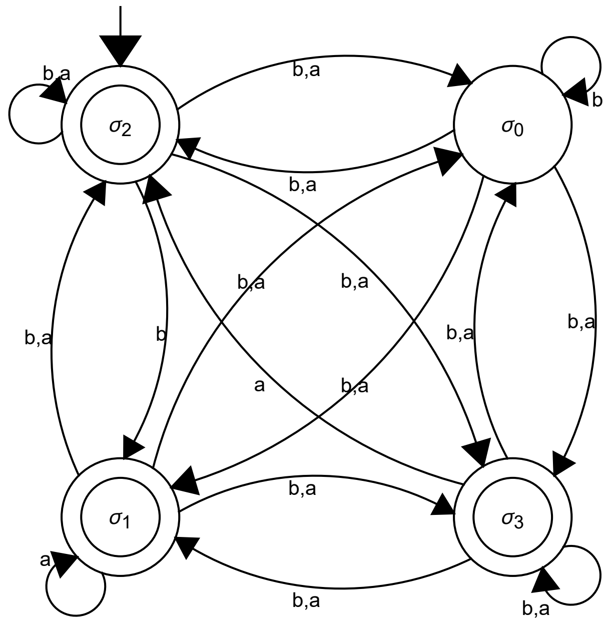
7.5.29


σ_3
σ_0
σ_2
σ_1
b,a
a
a
a
b
a
b
b,a
b,a
b,a

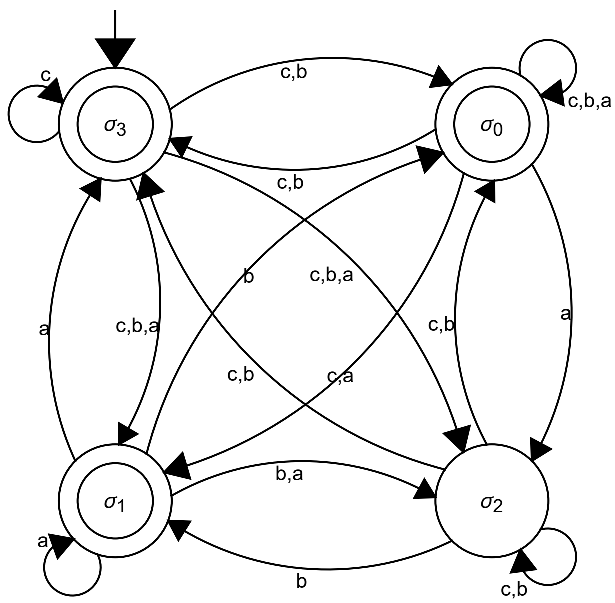
7.5.30


σ_0
σ_1
σ_2
σ_3
b
b,a
b
b
b,a
a
b
b
a
b
b,a
b,a
a

7.5.31



7.5.32



7.5.33

7.5.34 A_6 : {True, {$\sigma_1, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0$}}.
A_7 : {True, {$\sigma_3, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2$}}.
A_8 : {True, {$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3$}}.
A_9 : {True, {$\sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2$}}.
A_{10} : {True, {$\sigma_3, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0$}}.

7.5.35 A_6 : {True, {$\sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1$}}.
A_7 : False.
A_8 : False.
A_9 : {True, {$\sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2$}}.
A_{10} : {True, {$\sigma_3, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0$}}.

7.5.36 A_6 : {True, {$\sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1$}}.

A_7 : {True, $\{\sigma_3, \sigma_0, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2\}$}.

A_8 : False.

A_9 : {True, $\{\sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2\}$}.

A_{10} : {True, $\{\sigma_3, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0\}$}.

7.5.37 A_6 : {True, $\{\sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1\}$}.

A_7 : {True, $\{\sigma_3, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2\}$}.

A_8 : {True, $\{\sigma_0, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_2\}$}.

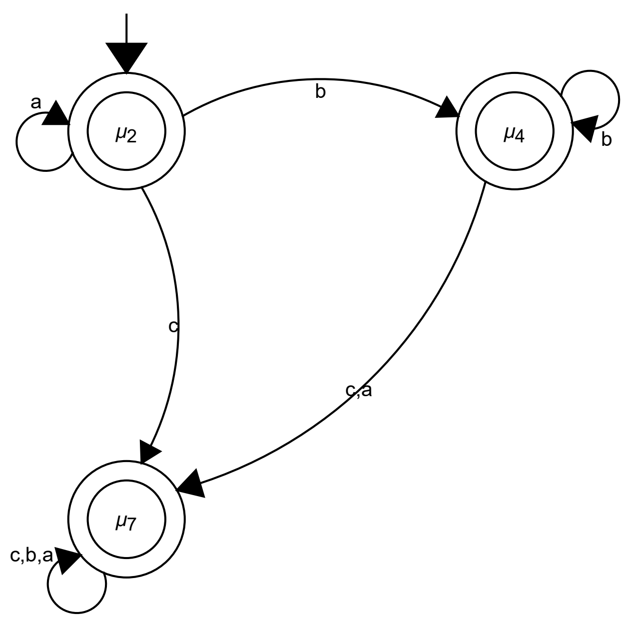
A_9 : {True, $\{\sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2\}$}.

A_{10} : {True, $\{\sigma_3, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0\}$}.

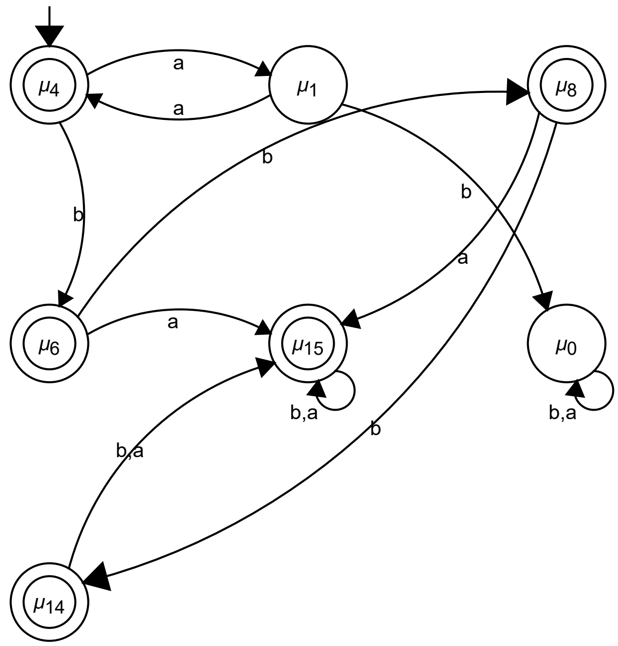
7.5.38 A_6 : {True, $\{\sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1\}$}.

A_{10} : {True, $\{\sigma_3, \sigma_1, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0, \sigma_0\}$}.

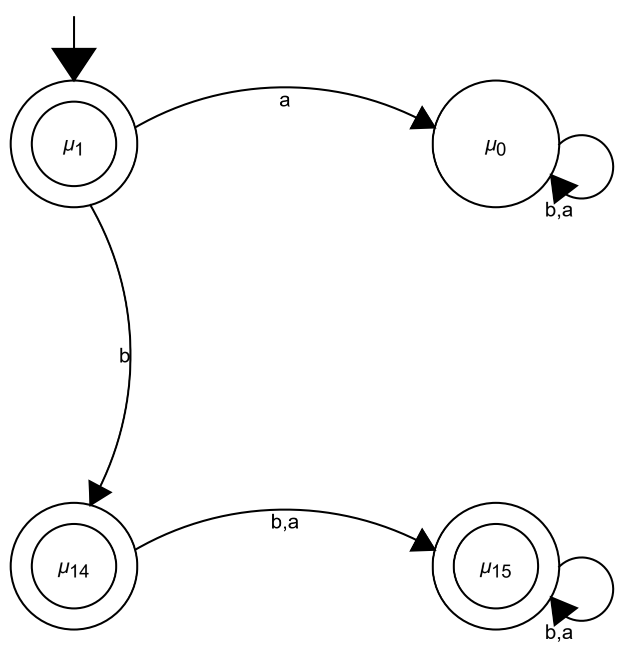
7.5.39 A_6 :



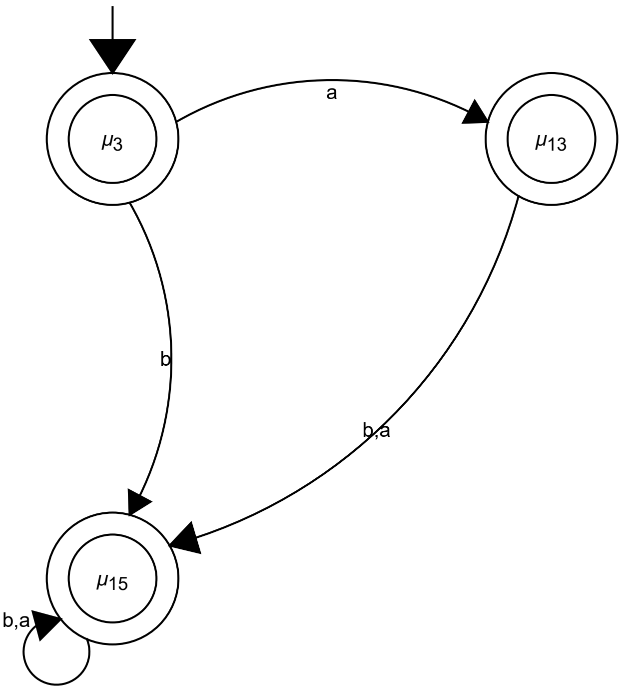
A_7 :



A_8 :

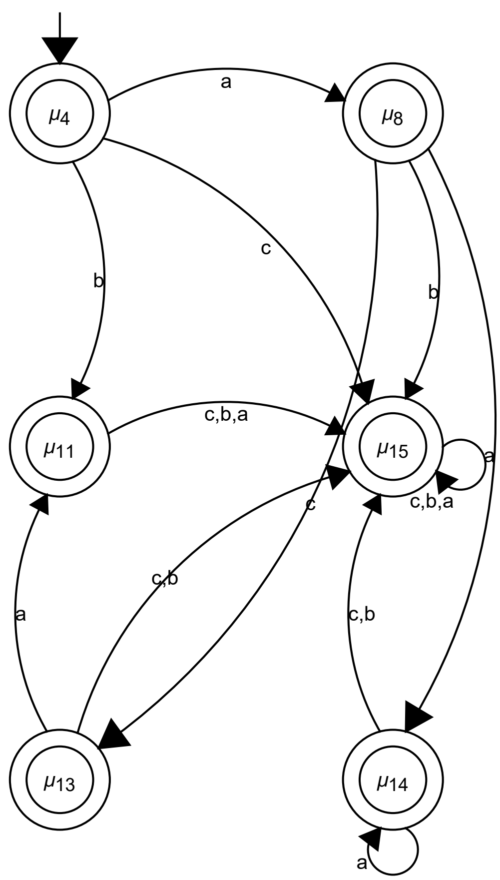


A_9 :



a
μ_3
μ_{13}
b
b,a
μ_{15}
b,a

A_{10} :



a
μ_4
μ_8
c
b
b
c,b,a
μ_{11}
μ_{15}
a
c,b,a
c
c,b
a
c,b
μ_{13}
μ_{14}
a

Soluciones del Capítulo 8

8.4.1 Hilera $1: S \to b^n S$ por $1 \to b^n aA$ por $2 \to b^n aaS$ por $3 \to b^n aab^m$ por 1 y 6, $n \geq 1$, $m \geq 1$, con $n, m \in \mathbb{N}$.
Hilera $2: S \to b^n S$ por $1 \to b^n aA$ por $2 \to b^n abA$ por $4 \to b^n ab^m a$ por 4 y 5, $n \geq 1$, $m \geq 1$, con $n, m \in \mathbb{N}$.

8.4.2 Hilera $1: S \to aAc$ por $1 \to a^n Ac$ por $2 \to a^n Ac^m$ por $3 \to a^n bc^m$ por 4 y 5, $n \geq 1$, $m \geq 1$, con $n, m \in \mathbb{N}$.
Hilera $2: S \to aAc$ por $1 \to a^n Ac$ por $2 \to a^n Ac^m$ por $3 \to a^n b^h c^m$ por 4, 5 y 6, $n \geq 1$, $m \geq 1$, $h \geq 1$, con $n, m, h \in \mathbb{N}$.

8.4.3 Hilera $1: S \to A$ por $1 \to ABB$ por $6 \to Ab^n$ por 3 y $6 \to ab^n$ por 2, con n un entero positivo par.
Hilera $2: S \to ABA$ por $4 \to BAA$ por $7 \to BAb^n Ab^m$ por 3 y $6 \to bab^n ab^m$ por 2 y 3, con n y m enteros positivos pares.

8.4.4 Hilera $1: S \to AAB$ por $2 \to AAb^n$ por 6 y $7 \to aaaab^n$ por 4, $n \geq 1$, con $n \in \mathbb{N}$.
Hilera $2: S \to AAB$ por $2 \to AAb$ por $7 \to AABa$ por $3 \to AAb^n a$ por 6 y $7 \to aaaab^n a$ por 4, $n \geq 1$, con $n \in \mathbb{N}$.

8.4.5 Hilera $1: S \to BAB$ por $1 \to BAb^{n-1}$ por 3 y $7 \to bab^n$ por 6 y 7, $n \geq 2$, con $n \in \mathbb{N}$.
Hilera $2: S \to ABA$ por $2 \to AbA$ por $7 \to a^{n-1} Aba^{n-1} A$ por $5 \to a^n bba^n b$ por 6, $n \geq 1$, con $n \in \mathbb{N}$.

8.4.6 Hilera $1: S \to aA$ por $4 \to abB$ por $1 \to abbCC$ por $3 \to abba^{n-1} Ca^{n-1} C$ por $6 \to abba^n Ba^n B$ por $7 \to abba^n ba^n b$ por 2, $n \geq 1$, con $n \in \mathbb{N}$.
Hilera $2: S \to bB$ por $5 \to bbCC$ por $3 \to bba^{n-1} Ca^{m-1} C$ por $6 \to bba^n Ba^m B$ por $7 \to bba^n ba^m b$ por 2, $n \geq 1$, $m \geq 1$, con $n, m \in \mathbb{N}$.

8.4.7 Hilera $1: S \to a^n S$ por $1 \to a^n bA$ por $3 \to a^n bcB$ por $4 \to a^n bcb^m$ por 6 y 7, $n \geq 1$, $m \geq 1$, con $n, m \in \mathbb{N}$.
Hilera $2: S \to a^n S$ por $1 \to a^n bA$ por $3 \to a^n bcS$ por $5 \to a^n bca^m$ por 1 y 2, $n \geq 1$, $m \geq 1$, con $n, m \in \mathbb{N}$.

8.4.8 Hilera $1: S \to a^n S$ por $8 \to a^n bA$ por $9 \to a^n b^m A$ por $2 \to a^n b^m aB$ por $1 \to a^n b^m aa$ por 3, $n \geq 1$, $m \geq 1$, con $n, m \in \mathbb{N}$.
Hilera $2: S \to bA$ por $9 \to b^n A$ por $2 \to b^n aB$ por $1 \to b^n abA$ por $5 \to b^n (ab)^m A$ por 1 y $5 \to b^n (ab)^m aB$ por $1 \to b^n (ab)^m aa$ por 3, $n \geq 1$, $m \geq 0$, con $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

8.4.9 Hilera $1: S \to a^n S$ por $1 \to a^n bA$ por $2 \to a^n baB$ por $4 \to a^n (ba)^m B$ por 6 y $8 \to a^n (ba)^m b$ por 7, $n \geq 1$, $m \geq 1$, con $n, m \in \mathbb{N}$.
Hilera $2: S \to bA$ por $2 \to baB$ por $4 \to ba^n B$ por $5 \to ba^n bC$ por $6 \to ba^n baB$ por $8 \to ba^n (ba)^m B$ por 6 y $8 \to ba^n (ba)^m b$ por 7, $n \geq 1$, $m \geq 0$, con $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

8.4.10 Hilera $1: S \to bC$ por $3 \to ba^{n-2} C$ por $10 \to ba^{n-1} B$ por $9 \to ba^n$ por 8, $n \geq 2$, con $n \in \mathbb{N}$.

Hilera $2: S \to a^{n-1}S$ por $1 \to a^n A$ por $2 \to a^n b^m A$ por $5 \to a^n b^m aC$ por $6 \to a^n b^m aaB$ por $9 \to a^n b^m aaa$ por 8, $n \geq 1$, $m \geq 1$, con $n, m \in \mathbb{N}$.

8.4.11 Hilera $1: S \to aA$ por $1 \to abS$ por $3 \to (ab)^{n-1} S$ por 1 y $3 \to (ab)^{n-1} aA$ por $1 \to (ab)^n$ por 4, $n \geq 1$, con $n \in \mathbb{N}$.

Hilera $2: S \to aB$ por $2 \to a^{n-1}B$ por $6 \to a^n C$ por $10 \to a^n bA$ por $12 \to a^n bbS$ por $3 \to a^n bbaB$ por $2 \to a^n bba^m B$ por $6 \to a^n bba^m b$ por 9, $n \geq 1$, $m \geq 1$, con $n, m \in \mathbb{N}$.

8.4.12 Hilera $1: S \to aA$ por $18 \to aaG$ por $1 \to aab^n G$ por $17 \to aab^n a$ por 16, $n \geq 1$, con $n \in \mathbb{N}$.

Hilera $2: S \to bD$ por $19 \to baE$ por $8 \to babC$ por $12 \to babaG$ por $6 \to babab^n G$ por $17 \to babab^n a$ por 16, $n \geq 1$, con $n \in \mathbb{N}$.

8.4.13 G_1 : regular. G_2 : libre del contexto. G_3 : ninguna, por la regla de composición $AB \to BA$. G_4 : ninguna, por la regla gramatical $Ab \to ABa$. G_5 : libre del contexto. G_6 : libre del contexto. G_7 : regular. G_8 : regular. G_9 : regular. G_{10} : regular. G_{11} : regular. G_{12} : regular.

8.4.14 <entero>::=<entero sin signo>| – <entero sin signo>

<entero sin signo>::=<dígito>|<dígito><entero sin signo>

<dígito>::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

σ^* =<entero>

8.4.15 <entero>::= – <primer dígito>

<entero>::= – <entero sin signo><primer dígito>

<entero sin signo>::=<dígito>|<dígito><entero sin signo>

<primer dígito>::= 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

<dígito>::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

σ^* =<entero>

8.4.16 <oración>::=<sujeto> b <predicado> .

<sujeto>::=Adriana|José

<predicado>::=<verbo> b <complemento> b <adverbio>

<verbo>::=analiza|construye

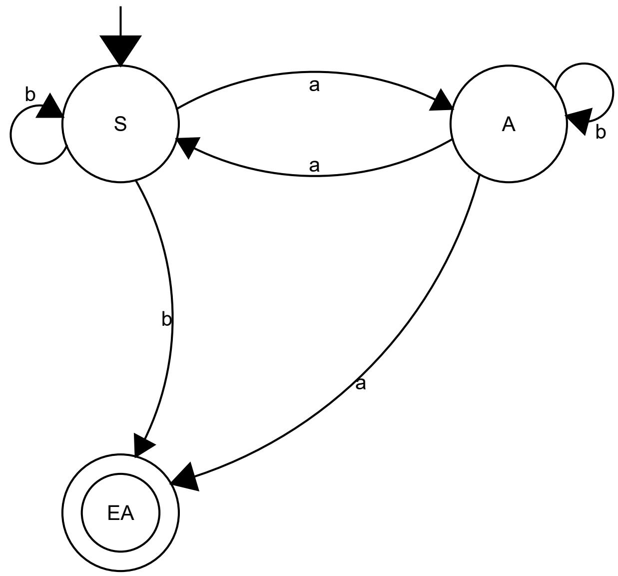
<complemento>::=algoritmos

<adverbio>::=constantemente|rápidamente

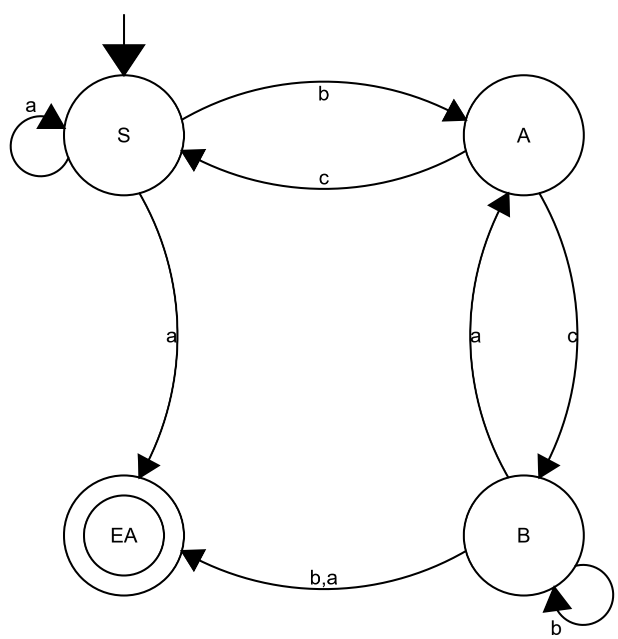
σ^* =<oración>

b simboliza el espacio en blanco.

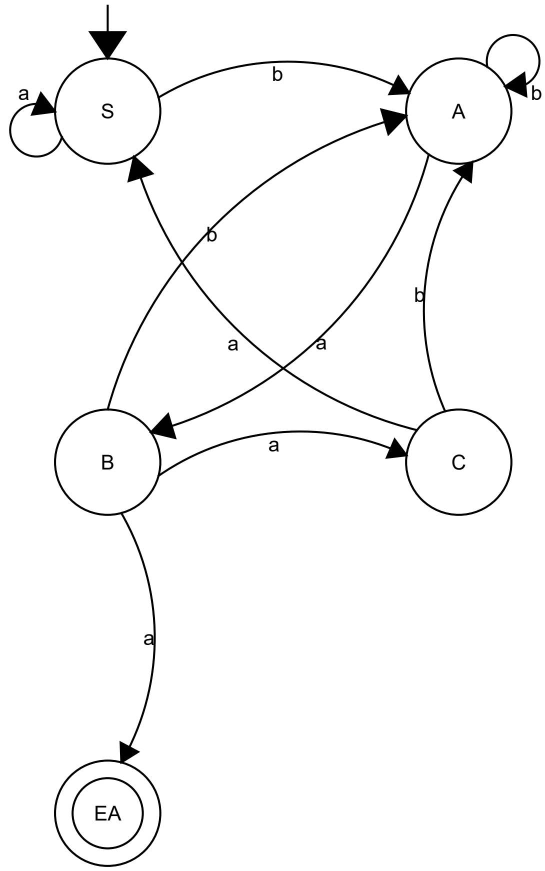
8.4.17 G_1 :



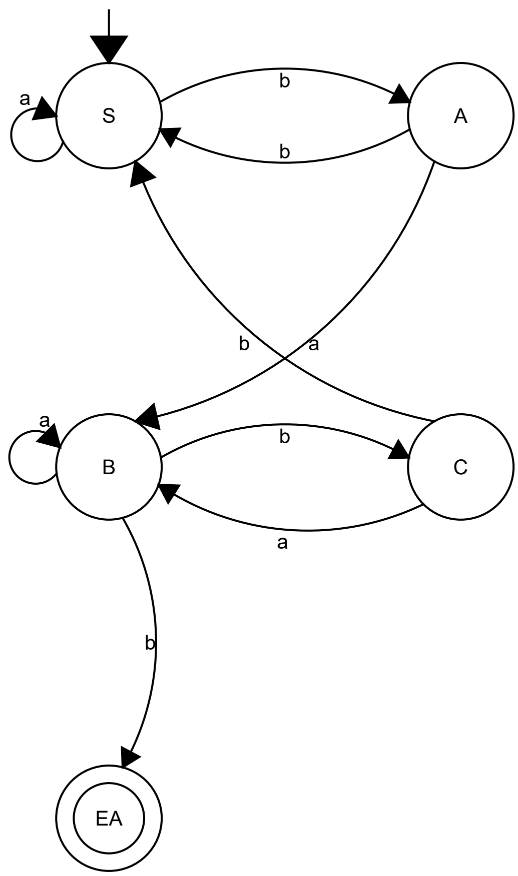
G_7 :



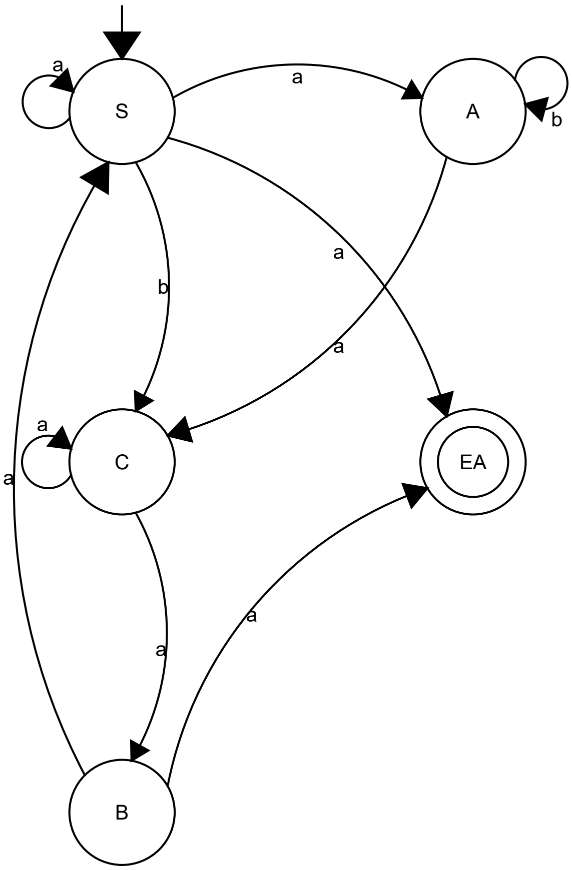
G_8 :



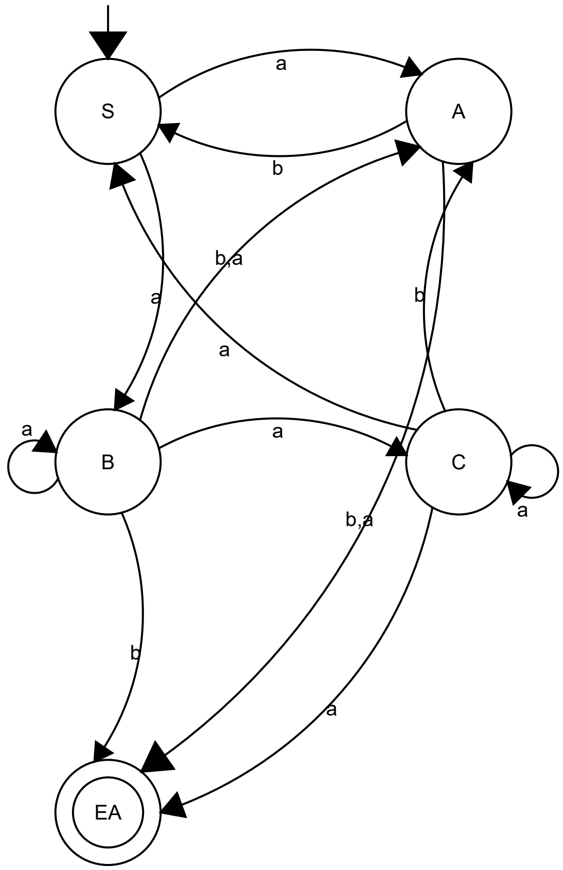
G_9 :



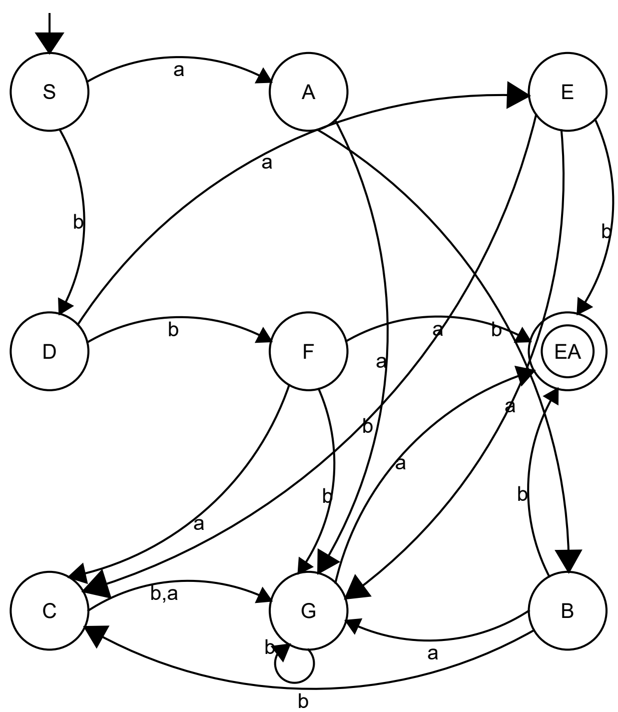
G_{10} :



G_{11} :



G_{12} :



8.4.18 $G = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\{S, A, B, C\}$.
- Símbolos terminales: $\{a, b, c\}$.
- Producciones o reglas de composición: $\{A \to aA,\ A \to bB,\ A \to cS,\ B \to aA,\ B \to bS,\ B \to c,\ B \to cC,\ C \to aA,\ C \to bS,\ C \to cS,\ S \to aA,\ S \to bS,\ S \to cS\}$.
- $\sigma^* = S$.

8.4.19 $G = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\{S, A, B, C, D, E\}$.
- Símbolos terminales: $\{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $\{A \to aD,\ A \to bB,\ B \to a,\ B \to aC,\ B \to bB,\ C \to aE,\ C \to bB,\ D \to aD,\ D \to bD,\ E \to aE,\ E \to bB,\ S \to aA,\ S \to bD\}$.
- $\sigma^* = S$.

8.4.20 $G = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\{S, A, B, C, D, E\}$.
- Símbolos terminales: $\{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $\{A \to aD,\ A \to bB,\ B \to a,\ B \to aC,\ B \to bA,\ C \to aB,\ C \to bD,\ D \to aA,\ D \to b,\ D \to bC,\ E \to aS,\ E \to bD,\ S \to aE,\ S \to bA\}$.
- $\sigma^* = S$.

8.4.21 $G = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\{S, A, B, C, D, E, F\}$.
- Símbolos terminales: $\{a, b\}$.
- Producciones o reglas de composición: $\{A \to aB,\ A \to b,\ A \to bF,\ B \to aB,\ B \to bB,\ C \to a,\ C \to aC,\ C \to b,\ C \to bD,\ D \to a,\ D \to aC,\ D \to bE,\ E \to a,\ E \to aC,\ E \to b,\ E \to bF,\ F \to a,\ F \to aC,\ F \to b,\ F \to bF,\ S \to a,\ S \to aC,\ S \to b,\ S \to bA\}$.
- $\sigma^* = S$.

8.4.22 $G = (\sigma, \tau, P, \sigma^*)$:

- Símbolos no terminales: $\{S, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$.
- Símbolos terminales: $\{a, b, c\}$.
- Producciones o reglas de composición: $\{A \to aK,\ A \to bB,\ A \to cD,\ B \to aK,\ B \to bK,\ B \to c,\ B \to cC,\ C \to aK,\ C \to bK,\ C \to cK,\ D \to aK,\ D \to b,\ D \to bC,\ D \to cK,\ E \to aF,\ E \to bK,\ E \to cG,\ F \to aK,\ F \to bK,\ F \to c,\ F \to cC,\ G \to a,\ G \to aC,\ G \to bK,\ G \to cK,\ H \to aI,\ H \to bJ,\ H \to cK,\ I \to aK,\ I \to b,\ I \to bC,\ I \to cK,\ J \to a,\ J \to aC,\ J \to bK,\ J \to cK,\ K \to aK,\ K \to bK,\ K \to cK,\ S \to aA,\ S \to bE,\ S \to cH\}$.
- $\sigma^* = S$.