Un acercamiento más profundo al método de Euler

Equipo # 4:

- Dylan Ramsés Cabrera Morales
- Leonardo Peláez Ascención
- Karla Díaz Saura
- Johnangel Crespo Leal
- Anthony Cruz García

Proyecto Final de EDO

Facultad de Matemática y Computación

Universidad de la Habana

Índice

1. Análisis de Euler mejorado **2**
1.1. Introducción 2
1.2. Método de Euler 2
1.3. Método de Euler Mejorado 4

2. Nueva visita a los números famosos **6**
2.1. Número e 6
2.2. Número ln2 6
2.3. Número π 6

3. Investigación de la población logística **7**

1. Análisis de Euler mejorado

1.1. Introducción

En muchas áreas de la ciencia, la ingeniería, la economía y otras disciplinas, los problemas se formulan mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Sin embargo, en la práctica es común que dichas EDO no dispongan de soluciones analíticas cerradas, por lo que se recurre a métodos numéricos para aproximar la solución en un conjunto discreto de puntos. Entre estos el método de Euler es uno de los más conocidos y sencillos. No obstante, su aplicación directa presenta ciertas limitaciones en cuanto a precisión y estabilidad numérica, lo que llevó a desarrollar métodos mejorados, entre ellos el método de Euler mejorado (también conocido como el método de Heun o el método del trapecio explícito).

1.2. Método de Euler

Consideremos el problema de calcular la pendiente de una curva desconocida que comienza en un punto dado y satisface una cierta ecuación diferencial dada. Se puede pensar en la ecuación diferencial como una fórmula que nos permite calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto de la curva, una vez que el punto ha sido calculado.

La idea es que a pesar de que la curva es desconocida en un principio, su punto de comienzo, al cual denotamos por A0, es conocido. Entonces, de la ecuación diferencial se puede calcular la pendiente de la curva en el punto A0 y por lo tanto la recta tangente a la curva.

Ahora, dando un pequeño paso sobre dicha recta, podemos tomarnos un nuevo punto A1 y suponer que dicho punto pertenece a la curva, entonces seguimos el mismo razonamiento aplicado anteriormente y volvemos a calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto A1. Luego de varios pasos tendremos formada una curva poligonal A0,A1,A2,A3... En general esta curva que obtenemos al aplicar el método no diverge lejos de la curva original, además el error entre ambas curvas se puede minimizar si se dan pasos muy pequeños al avanzar sobre la recta tangente a la curva y además el intervalo sobre el que trabajamos es finito.

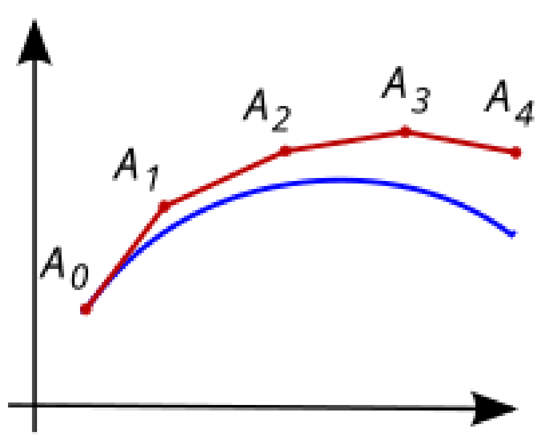

Figura 1: Método de Euler

Dado el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(x0) = y0$$

El método de Euler con tamaño de paso h consiste en aplicar la fórmula iterativa:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n) \qquad n \geq 0$$

La solución de las ecuaciones diferenciales por medio de este método involucra varios tipos de errores:

- **Error local** : Es la diferencia que se produce entre el valor real de la función y el aproximado mediante la recta tangente suponiendo que el punto desde el que partimos no tiene error alguno.
- **Error acumulado** : Acumulación de errores por las aproximaciones producidas durante los pasos previos acumulados. Es decir, ya no se supone que el punto del cual partimos no tenía error sino que asumimos que dicho error existe y que se propaga de paso en paso. Dicha propagación es, en el peor de los casos, lineal.
- **Error de Redondeo** : Resultado del número límite de cifras significativas que puede retener una computadora. Ya que el número de dígitos utilizados para hacer los cálculos es finito y los números representados puede que no lo sean (es decir, números con infinita cantidad de dígitos). Al limitar los números con infinita cantidad de dígitos (mediante truncamiento o redondeo) a números con finita cantidad de dígitos estamos cometiendo un error extra.

Debido a que la aproximación de una curva por medio de una línea recta no es exacta, se comete un error derivado del método. A este error se le conoce como error de truncamiento. Este error se puede disminuir reduciendo el valor de h, pero se obtendrá un mayor número de cálculos y, por consiguiente, un error de redondeo mucho más alto.
Como ya fue explicado anteriormente este método utiliza la pendiente en el punto actual para extrapolar la solución al siguiente punto. Esto resulta en un error global de orden **O(h)** , por lo que para obtener una buena precisión es necesario emplear pasos muy pequeños lo que puede incrementar:

- La cantidad de cálculos y , por ende , el tiempo de cómputo
- La acumulación de errores, debido a la limitación de la precisión de la máquina.

1.3. Método de Euler Mejorado

Ante las limitaciones del Método de Euler surge la necesidad de un método que mejore la precisión sin exigir pasos extremadamente pequeños, aumente la estabilidad y minimice la acumulación de errores y conserve la simplicidad de implementación en la medida de lo posible. El método de Euler mejorado surge como respuesta a esta necesidad, introduciendo un esquema predictor-corrector. La estrategia de este método consiste en realizar una predicción de la pendiente $k_1 = f(x_n, y_n)$. Luego se utiliza el método de Euler para realizar una primera estimación de y_{n+1} , a dicha estimación la llamaremos u_{n+1}. Ahora que se ha calculado u_{n+1} se puede tomar $k_2 = f(x_{n+1}, u_{n+1})$ como una segunda estimación de la pendiente de la curva solución en $x = x_{n+1}$. Para finalizar se promedian ambas pendientes (k_1 y k_2) obteniendo así una estimación más exacta de la pendiente promedio de la curva solución en todo el subintervalo $[x_n\ ,\ x_n + 1]$

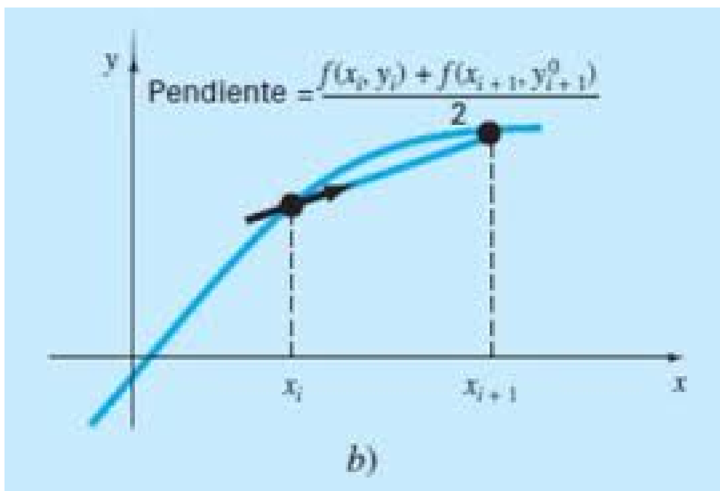

Figura 2: Método de Euler Mejorado

Dado el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(x0) = y0$$

El método de Euler Mejorado con tamaño de paso h consiste en aplicar la fórmula iterativa:

$$\begin{gathered} k_1 = f(x_n, y_n) \\ u_{n+1} = y_n + h * k_1 \\ k_2 = f(x_{n+1}, u_{n+1}) \\ k = \tfrac{k_1 + k_2}{2} \\ y_{n+1} = y_n + h * k \end{gathered}$$

Propiedades:

- Error global acumulado $\mathbf{O}(h^2)$
- Ventajas:
  - Mayor precisión: Permite obtener resultados significativamente más precisos que el método original sin necesidad de reducir demasiado el tamaño del paso.
  - La corrección basada en la pendiente al final del intervalo disminuye la acumulación de errores.
- Desventajas:
  - Mayor costo computacional: Se requieren dos evaluaciones de f por cada paso, lo que aumenta el tiempo de cómputo, especialmente en problemas complejos o en sistemas de alta dimensión.
  - Complejidad de implementación: El algoritmo es algo más complejo, aunque sigue siendo relativamente sencillo en comparación con métodos de orden superior o implícitos.
- Aplicaciones: Es ideal en situaciones donde se requiere una mayor precisión en la solución de la EDO, como en simulaciones de fenómenos físicos complejos, modelos de sistemas dinámicos, o en la resolución de problemas en ingeniería y ciencias aplicadas donde el control de errores es crucial.

Característica	**Método de Euler Original**	**Método de Euler Mejorado**
Orden de Precisión	Primer orden (Error global $O(h)$)	Segundo orden (Error global $O(h^2)$)
Evaluaciones de f por paso	1 evaluación	2 evaluaciones
Precisión y Acumulación de Error	Menor precisión, requiere pasos pequeños para mayor exactitud	Mayor precisión, menor acumulación de error
Costo Computacional	Bajo (rápido y sencillo)	Moderado (aumenta el tiempo de cómputo por paso)
Estabilidad	Menor estabilidad en problemas con variaciones rápidas	Mejor estabilidad al promediar las pendientes
Complejidad de Implementación	Muy sencilla	Algo más compleja, pero aún accesible
Aplicaciones Típicas	Aproximaciones preliminares o problemas simples	Simulaciones donde se requiere mayor precisión y control de errores

Cuadro 1: Comparación entre el Método de Euler Original y el Método de Euler Mejorado (sin la fila de Fórmula)

2. Nueva visita a los números famosos

2.1. Número e

$e \approx 2{,}71828 \qquad \frac{dy}{dx} = y \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = e??$

n	h	$y(1)$
20	0.05	2.71719
40	0.025	2.71800
80	0.0125	2.71821
160	0.00625	2.71826
320	0.003125	2.71828

Cuadro 2: Aproximaciones de $y(1)$ para distintos valores de n y h.

Para aproximadamente n = 320 se logran obtener 5 cifras decimales correctas de e

2.2. Número ln2

$ln2 \approx 0{,}69315 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad y(1) = 0 \qquad y(2) = ln2??$

n	h	$y(2)$
10	0.2	0.69563
20	0.1	0.69377
40	0.05	0.69330
80	0.025	0.69319
160	0.0125	0.69316
320	0.00625	0.69315

Cuadro 3: Aproximaciones de $y(1)$ para distintos valores de n y h.

Para aproximadamente n = 320 se logran obtener 5 cifras decimales correctas de ln2

2.3. Número π

$\pi \approx 3{,}14159 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{4}{1+x^2} \qquad y(0) = 0 \qquad y(1) = \pi??$

n	h	$y(1)$
10	0.1	3.13993
20	0.05	3.14118
40	0.025	3.14149
80	0.0125	3.14157
160	0.00625	3.14157
320	0.003125	3.14159

Cuadro 4: Aproximaciones de $y(1)$ para el problema correspondiente a π usando el método de Euler mejorado.

Para aproximadamente n = 320 se logran obtener 5 cifras decimales correctas de π

3. Investigación de la población logística

Dado el problema de valor inicial:
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} * y * (8 - y) \qquad y(0) = 1$

x	$y(x)$
10	4.3527
20	4.3542
30	4.3542
40	4.3542
50	4.3542
60	4.3542
70	4.3542
80	4.3542
90	4.3542
100	4.3542

Cuadro 5: Tabla para demostrar el estancamiento de la solución en 4.352

Analicemos problema de valor inicial:
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} * y * (m - y) \qquad y(0) = 1$
Supongamos que n = 2 y m = 1

Esta ecuación la podemos resolver de forma analítica mediante la resolución por Variables Separadas estudiada en clases. Llegando a que la función solución es:
$y(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^{\frac{x}{2}}}$
Dicha función tiende a uno por lo que podemos garantizar que este es el límite ¨correcto¨.
A continuación se analizará que tanto se acerca el método de Euler Mejorado para un tamaño de paso de 1 a dicho límite

x	$y(x)$
10	1.0
20	1.0
30	1.0
40	1.0
50	1.0
60	1.0
70	1.0
80	1.0
90	1.0
100	1.0

Cuadro 6: Tabla que muestra el acercamiento de Euler Mejorado a la solución real”de la ecuación

En este caso para h = 1 obtuvimos un aproximación muy cercana a la solución ¨real¨ pero podemos decir que generalmente este no nos llevará a una aproximación muy precisa del valor límite m , por lo que en gran parte de los casos se requerirá de una reducción en el tamaño de h