# 隐马尔可夫模型

## 算法引出：

隐马尔可夫模型是由初始概率分布，状态转移概率分布以及观测概率分布确定的。隐马尔可夫模型定义如下：

**设是所有可能的状态的集合，是所有可能的观测集合**

其中，是可能的状态数，是可能的观测数。

**是长度为的状态序列，是对应的观测序列：**

，

**是状态转移概率矩阵：**

其中，

，，

是在时刻处于状态的条件下在时刻转移到 的概率。

**是观测概率矩阵：**

其中，

，，

是在时刻处于状态的条件下生成观测的概率。

是初始状态概率向量：

其中：

，

是时刻处于状态的概率。

## 隐马尔可夫模型三要素

隐马尔可夫模型是由初始状态概率向量、状态转移矩阵和观测矩阵组成的：

## 隐马尔可夫的两个基本假设

1. 齐次马尔可夫性假设，即假设隐藏的马尔可夫链在任意时刻的状态只依赖于其前一时刻的状态，与其他时刻的状态即观测无关，也与时刻无关。
2. 观测独立性假设，即假设任意时刻的观测只依赖与该时刻的马尔可夫链的状态，与其他观测即状态无关。

## 例一（盒子和球模型）：

假设有4个盒子，每个盒子里都装有红白两种颜色的球，盒子里的红、白数由下表列出：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 盒子 | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 红球数 | 5 | 3 | 6 | 8 |
| 白球数 | 5 | 7 | 4 | 2 |

按照下边的方法抽球，产生一个球的颜色的观测序列

1. 开始，从4个盒子里以等概率随机选取1个盒子，从这个盒子里随机抽出1个球，记录其颜色，放回；
2. 然后，从当前盒子随机转移到下一个盒子，规则如下：
   1. 如果当前盒子是1，那么下一个盒子一定是盒子2。
   2. 如果当前的盒子是2或3，那么分别以0.4和0.6 的概率转移到左边或右边的盒子。
   3. 如果当前盒子是4，那么各以0.5的概率停留在停留在盒子4或转移到盒子3。
3. 确定转移的盒子后，再从这个盒子中随机抽出一个球，记录其颜色，放回；
4. 如此下去，重复进行5次，得到一个球的颜色的观测序列；

本例中，盒子对应状态，状态的集合是：

，

球的颜色对应观测，观测的集合为：

，

状态序列和观测序列的长度：

初始概率分布为：

状态转移概率分布为：

观测概率分布为：

## 观测序列生成算法

输入：隐马尔可夫模型，观测序列长度;

输出：观测序列

1. 按照初始状态分布产生状态。
2. 令 ；
3. 按照状态的观测概率分布生成；
4. 按照状态的状态转移概率分布产生状态，；
5. 令，若，转步骤（3），否则终止。

## 隐马尔可夫的三个基本问题

### 概率计算问题

给定模型的和观测序列，计算在模型下的观测序列出现的概率。

#### 前向算法

定义（前向概率）：

给定隐马尔可夫模型，定义到时刻部分观测序列为且状态为的概率为前向概率，记作：

可以递推的求前向概率及观测序列概率

**观测序列概率的前向算法：**

输入：隐马尔可夫模型，观测序列；

输出：观测序列概率

1. 初值

*，*

1. 递推，对

，

1. 终止

#### 后向算法

定义（后向概率）：

给定隐马尔可夫模型，定义到时刻部分观测序列为的条件下，从1到的部分观测序列为状态为的概率为后向概率，记作

可以递推的求后向概率及观测序列概率

**观测序列概率的后向算法：**

输入：隐马尔可夫模型，观测序列；

输出：观测序列概率

（1），

（2）对

，

（3）=

#### 例题

考虑盒子和球模型，状态集合，观测集合，

，，

设，，试用前向算法计算

解：

1. 计算初值
2. 递推计算
3. 终止

### 学习问题

已知观测序列，估计模型参数。使得在该模型下的观测序列概率最大。即用极大似然估计的方法估计参数。

#### 监督学习

假设已给定训练数据包含个长度相同的观测序列和对应的状态序列，则可以利用极大似然估计法来估计隐马尔可夫模型的参数。

1. 转移概率的估计：

，，

1. 观测概率的估计：

，，

1. 初始状态概率的估计为个样本中初始状态为的概率。

#### Baum-Welch算法

假设给定训练数据集只包含个长度为的观测序列而没有对应的状态序列，目标是学习隐马尔可夫模型的参数，将观测数据看作观测数据，状态学列数据看作不可观测的隐数据，则隐马尔可夫模型事实上是一个含有隐变量的概率模型：

其参数学习可以由EM算法实现。

1. 转移概率的估计：
2. 观测概率的估计：

，，

其中：

### 预测问题

也称解码问题。已知模型和观测序列，求对给定观测序列条件概率最大的状态序列。

即给定观测序列，求最有可能的对应的状态序列。

#### 维特比算法：

维特比算法实际上是用动态规划算法来解隐马尔可夫模型预测问题，即用动态规划求概率最大路径（最优路径）。维特比算法会找到全局最优的一条路径，而不是局部最优的路径。

**输入：模型和观测**

**输出：最优路径**

1. 初始化

*，*

*，*

1. 递推。对于

，

，

1. 终止
2. 最优路径回溯。对

求得最优路径

#### 例题

考虑盒子和球模型，状态集合，观测集合，

，，

设，，试求最优状态序列，即最优路径

1. 初始化。在时，对每一个状态，，求状态状态

为红，记此概率为，则：

则有，，

记，

1. 在时，求时状态为观测为红并在时状态为观测为白的路径的最大概率，记为：

同时，对每个状态。记录概率最大路径的前一个状态，

，

则有：

同理可得 *，，，，*

1. 在时，有

，

，

，

1. 以表示最优路径的概率，则

最优的路径的终点是

1. 根据最优终点，逆向找到，

在时，

在时，

则最优状态序列为

## 课后习题

1. 给定盒子和求组成的隐马尔可夫模型，其中：

，，

设，，试用后向算法计算

1. 考虑盒子和球组成的隐马尔可夫模型，其中

，，

设，，试用前向后向算法计算

1. 考虑例题1，试用维特比算法求最优路径