

《 离散数学 》 考试试卷（样卷 B）

一、解答题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设 $B = \{0, a, b, 1\}$, $S_1 = \{a, 1\}$, $S_2 = \{0, 1\}$, $S_3 = \{a, b\}$, 二元运算 \oplus 和 $*$ 定义如下表所示:

\oplus	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

回答下列问题，并说明理由:

- (1) 分别指出二元运算 \oplus 和 $*$ 的么元与零元;
- (2) $\langle S_1, *, \oplus \rangle$ 是代数吗? 是 $\langle B, *, \oplus, 1, 0 \rangle$ 的子代数吗?
- (3) $\langle S_2, *, \oplus, 1, 0 \rangle$ 是 $\langle B, *, \oplus, 1, 0 \rangle$ 的子代数吗?
- (4) $\langle S_3, *, \oplus \rangle$ 是代数吗?

2. 设 R 为实数集, 函数 $f: R \times R \rightarrow R \times R$, 且 $f(\langle x, y \rangle) = \langle x + y, x - y \rangle$, 回答下列问题:

- (1) f 是双射吗? 为什么?
- (2) 如果 f 是双射, 写出它的逆函数 $f^{-1}(\langle x, y \rangle)$;
- (3) 写出合成函数 $f \circ f(\langle x, y \rangle)$ 。

二、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

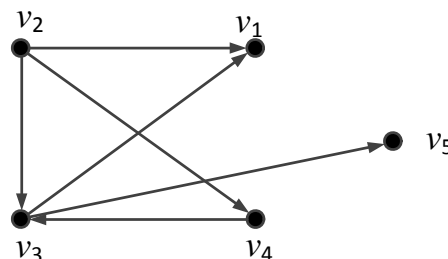
1. 用等值演算法求公式 $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 的主合取范式与主析取范式。(结果中的极大/小项必须编号)

2. 设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, X 上的关系 $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$, 求解如下问题:

- (1) 写出 R 的关系矩阵,
- (2) 用矩阵计算求出 R 的传递闭包 $t(R)$ 的关系矩阵;
- (3) 写出 R 诱导的等价关系的关系矩阵及划分。

3. 有向图 G 如右图所示, 利用矩阵方法计算下列问题:

- (1) 求 G 的邻接矩阵 A 。
- (2) 求出长度小于 3 的路径和回路的总数。
- (3) 求出可达矩阵 P 。



三、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 用逻辑符号写出以下前提和结论，并用推理规则证明该推理过程。

前提：如果你学习，那么你离散数学不会不及格。

如果你不热衷于玩游戏，那么你将学习。

但你离散数学不及格。

结论：因此你热衷于玩游戏。

2. 证明：在布尔代数中 $a = b \Leftrightarrow (a * b') \oplus (a' * b) = 0$ 。

四、综合分析题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 对于群 $\langle N_6, +_6 \rangle$ ，求解如下问题：

- (1) 证明 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 是循环群（写出生成元，并将所有元素表示为生成元的幂的形式）；
- (2) 证明 $\langle \{0, 2, 4\}, +_6 \rangle$ 是 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 的正规子群。
- (3) 写出 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 的所有子群
- (4) 若将 $+_6$ 改为 \times_6 ，则 $\langle N_6, \times_6 \rangle$ 是否还是代数？是否还是群？给出理由。
- (5) 若 $\langle N_6, \times_6 \rangle$ 不是群，请保持运算 \times_6 不变，仅修改载体，构造一个关于 \times_6 的群。

2. S_{72} 是 72 的所有因子集合， D 是整除关系，求解如下问题：

- (1) 画出 $\langle S_{72}, D \rangle$ 的哈斯图；
- (2) 判断 $\langle S_{72}, D \rangle$ 是否为格，并给出理由；
- (3) 在 $\langle S_{72}, D \rangle$ 中写出子集 $B = \{2, 4, 6\}$ 的最大元、极小元、上界、最大下界；
- (4) 指出格中每个元素的补元。若不存在，则指明不存在；
- (5) $\langle \{1, 2, 3, 4, 12\}, D \rangle$ 是格吗？是 $\langle S_{72}, D \rangle$ 的子格吗？给出理由。

五、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

甲、乙两只蚂蚁分别位于右图中的结点 a, b 处，并设图中的边长度是相等的。甲、乙进行比赛：从它们所在的结点出发，走过图中的所有边最后到达结点 c 处。如果它们的速度相同，问谁先到达目的地？

