一．选择题

1．D　　2．B　　3．A　　4．D　　5．B

二．填空题

6．0　　7．1　　8．-2　　9．2　　10．$e^x\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f(\ln x)\right]dx$

三．计算题

11．解：$\frac{n}{(2n)^2}\le\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{n}{(n+1)^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2n)^2}=0,\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2}=0$，由夹逼准则知

$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2})=0$

12．解：$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\cdot x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$

13．解：$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{(x^2-1)\cdot\frac{x^2}{x^2-1}}$

其中，$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1$，故原式$=e^1=e$

14．解：由 $\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^2+bx+1}\right)=2\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}=2$

$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(3-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=0\Rightarrow a=9$

$\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^2+bx+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-bx-1}{3x+\sqrt{9x^2+bx+1}}=-\frac{b}{6}=2$

WPS PDF编辑试用

$\Rightarrow b=-12$

15．解：方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 两边同时对 x 求导，有

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')+\frac{1}{y-x}(y'-1)=1$$

令 $x=0,y=1$ 带入上式，得 $y'(0)=1$，故切线方程 $y=x+1$

16．解：

当$x\neq 0$时，$f'(x)=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}$，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right]=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

五．证明题

17．证明：令 $f(x)=2^x+\sin x-2$，显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$f(0)=-1<0$， $f(1)=\sin 1>0$，

由零点定理知，至少存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，故

方程 $2^x+\sin x=2$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

18．证明：显然 $a_n>0$，$(n=1,2,\cdots)$，$a_2-a_1=\frac{a_1}{1+a_1}>0$，即 $a_2>a_1$，

设 $a_n>a_{n-1}$，则 $a_{n+1}-a_n=(1+\frac{a_n}{1+a_n})-(1+\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}})=\frac{a_n-a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}>0$，

即 $a_{n+1}>a_n$，故 $\{a_n\}$ 单调增加；

因为 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}=1+\frac{a_n}{1+a_n}<2$，故数列 $\{a_n\}$ 有上界；

由单调有界定理，数列 $\{a_n\}$ 收敛.

WPS PDF编辑试用