安徽大学2017-2018学年第二学期

《高等数学A(二)》期末考试B卷参考答案与评分标准

一、填空题(本题共五小题，每小题3分, 共15分)

1. $\underline{\quad\sqrt{3}\quad}$.

2. $\underline{\quad\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}\quad}$.

3. $\underline{\quad\dfrac{5}{3}\quad}$.

4. $\underline{\quad\dfrac{64}{3}\pi\quad}$.

5. $\underline{\quad\dfrac{3}{2}\quad}$.

二、选择题 (本题共五小题，每小题3分, 共15分)

6. A.　　7. A.　　8. D.　　9. C.　　10. B.

三、计算题 (本题共六小题，每小题8分, 共48分)

11. 解. 方程组两边同时对x求导得

$$\begin{cases}1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5\text{分})$$

求解可得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z-x}{y-z}$, $\quad\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{y-z}$. ……………………………(8分)

12. 解. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$. ……………………………………(2 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(yf_{11}''+\frac{1}{y}f_{12}'')+\frac{1}{y}(yf_{21}''+\frac{1}{y}f_{22}'')=y^2f_{11}''+2f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}''. \quad \cdots\cdots (6\text{分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}f_{12}')-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}f_{22}'')$$

$$=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}'' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8\text{分})$$

13. 解. (1) $f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}$, $f_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}$, $f_z = \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}$.

故$f(x,y,z)$的梯度场

$\mathbf{grad} f(x,y,z) = (\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2})$ ……………(4分)

(2) $\mathrm{div}\mathbf{grad}\ f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}$. ……………(8分)

14. 解法1. 曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$的交线为$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=1. \end{cases}$ …. (2分)

设D_{xy}: $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 1$.

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z\mathrm{d}z$$

$= 2\pi \displaystyle\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r = \dfrac{\pi}{2}$. ……………(8分)

解法2. 曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$的交线为$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=1. \end{cases}$ ……. (2分)

记D_{1z}: $x^2+y^2 \le z^2, 0 \le z \le 1$; D_{2z}: $x^2+y^2 \le 2-z^2, 1 \le z \le \sqrt{2}$. 于是

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_{1z}} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}z \iint\limits_{D_{2z}} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$= \displaystyle\int_0^1 \pi z^3 \mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{2}} \pi z(2-z^2)\mathrm{d}z = \dfrac{\pi}{2}$ ……………(8分)

15. 解. 首先，我们有$I = \displaystyle\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. ……………(2分)

设Σ_1为xOy平面上圆盘: $x^2+y^2 \le 1, z=0$，方向取下侧.

记V 为由Σ, Σ_1围成的空间闭区域. 由Gauss公式可知

$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{V} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \dfrac{4}{3}\pi$. ……………(6分)

又因为$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi$.

于是$I = \dfrac{4}{3}\pi + \pi = \dfrac{7}{3}\pi$. ……………(8分)

16. 解. 由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}$可知，原幂级数的收敛半径为2.

又因为$x=2$时，原级数发散，当$x=-2$时，原级数收敛,

所以该幂级数的收敛域为$[-2,2)$..(2分)

设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$. 两边同时对$x$求导可得$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$.

由此可得$f(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+f(0)=-\ln(1-x)$.

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}=-\ln(1-\dfrac{x}{2})$, $x\in[-2,2)$. ....(8 分)

四、应用题(本题共10分)

17. 解：L的质量为$M=\displaystyle\int_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$. ....(3 分)

由$\mathrm{d}s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\mathrm{d}t=\sqrt{5}\mathrm{d}t$可得

$M=\displaystyle\int_0^{\pi}(1+4t^2)\sqrt{5}\mathrm{d}t=\sqrt{5}(\pi+\dfrac{4}{3}\pi^3)$. ....(10 分)

五、证明题（每小题6分，共12分）

18. 证明：当$n>1$时，$\dfrac{1}{n-\ln n}$单调递减.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}=0$，故由Leibniz 判别法可知，原级数收敛. ....(4 分)

由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-\ln n}=1$ 可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}$发散. 故原级数条件收敛. ....(6 分)

19. 证明：由Green公式与二重积分的几何意义可知

$\displaystyle\oint_{\partial D}-\dfrac{1}{2}y\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2}x\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A(D)$. ....(6 分)