安徽大学 20 11 —20 12 学年第 2 学期

《 复变函数 》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

院/系＿＿＿＿＿＿专业＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿座位号＿＿＿

题　号	一	二	三	四	总分
得　分					

得 分	

一、判断题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是 $\mathbb{C}$ 中区域 D 上的复值函数，$z_0\in D$，则 $f(z)$ 在 z_0 处复导数 $f'(z_0)$ 存在的充要条件是 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 z_0 处可微并且满足 Cauchy-Riemann 方程。……………………………………（　　）

2. 设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 中区域 D 上的解析函数，并且对任意 $z\in D$，$f(z)$ 的实部 u 与虚部 v 满足 $u=\sin v$，则 $f(z)$ 在 D 上是常数。……………………（　　）

3. 如果 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 中区域 D 上的复值函数，$a\in D$，$f(z)$ 在 a 处导数 $f'(a)$ 存在，则 $f(z)$ 在 a 处解析。……………………………………（　　）

4. 设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 中非空单连通开集 D 内解析函数，存在 D 中序列 $\{z_n\}$，使得 $f(z_n)=0$ 且 $\{z_n\}$ 存在极限点 a，则对任意 $z\in D$，$f(z)\equiv 0$。…………（　　）

5. 如果 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 中非空开集 D 上的复值函数，$a\in D$，$f(z)$ 在 $D-\{a\}$ 上解析，a 是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $f(z)$ 是 D 上的亚纯函数。……………（　　）

6. v 是 u 的共轭调和函数，则 u 是 v 的共轭调和函数。……………（　　）

7. 如果 $f(z)$ 是 $\{z \mid z\in\mathbb{C}, |z|>1\}$ 上解析函数，并且 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $f(z)$ 在 ∞ 处的留数为零。……………………………………（　　）

8. 一个幂级数在其收敛圆周上的敛散性有三种可能：（1）处处发散，（2）处处收敛，（3）既有收敛点，又有发散点。……………………………（　　）

9. 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在 D 内 $f'(z)\neq 0$，则 $f(z)$ 在 D 内单叶。……………………………………………………（　　）

10. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的极点，则 z_0 是 $e^{f(z)}$ 的本性奇点。………………（　　）

二、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

得 分	

1. 求单位圆盘到上半平面的所有分式线性变换。

2. 设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 内的解析函数，$a,b\in\mathbb{C}$，并且 $a\neq b$，计算积分 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)}$，其中 Γ 是一条不过 a,b 的光滑 Jordan 曲线。

3. 分别在$|z|<1$，$1<|z|<2$和$2<|z|<\infty$内将$f(z)=\dfrac{1}{z^2-z-2}$展成洛朗级数。

4. 设$f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)}$，

1） 求$f(z)$在扩充复平面中所有奇点。（3 分）

2） 指出每个奇点的类别。（3 分）

3） 计算$f(z)$在每个孤立奇点处的留数。（4 分）

5. 求 $z^6+4z^4+1=0$ 在区域 $\{z:1<|z|<2\}$ 内根的个数。

得 分	

三、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设 D 是围线 C 的内部， $f(z)$ 在区域 D 内解析，在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上连续，其模 $|f(z)|$ 在 C 上为常数 M 。试证：若 $f(z)$ 不恒等于一个常数，则 $f(z)$ 在 D 内至少有一个零点。

2. 设在原点 $z=0$ 附近 $f(z)$ 的洛朗展式为 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n z^n$ 。证明： $f(z)$ 在 $z=0$ 的某邻域内存在原函数的充要条件是 $C_{-1}=0$ 。

得 分	

四、思考题（每小题 5 分，共 10 分）

1. 问在点 $z=0$ 处解析，且满足 $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2}, f(-\frac{1}{n})=-\frac{1}{n^2}, n=1,2\cdots$ 的函数 $f(z)$ 是否存在？

2. 设 $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，试问 $z=0$ 是否一定是 $\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点？说明理由。