安徽大学2018—2019学年第二学期

《线性代数B》期末考试（A卷）参考答案与评分标准

一、填空题（本题共五小题，每小题3分，共15分）

1、$\underline{4}$；2、$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$；3、$\underline{-3}$；4、$\underline{4}$；5、$\underline{\dfrac{3\pi}{4}}$.

二、选择题（本题共五小题，每小题2分，共10分）

6、A；　7、C；　8、B；　9、D；　10、C.

三、计算题（本题共六小题，第11-15题每题10分，第16题20分，共70分）

11. 解. 第1列乘以-1分别加到第2，3，…，n列，则

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix}$$

（第i列乘以$-\dfrac{1}{i}$加到第1列）……………………（5分）

$$=\begin{vmatrix} 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 2 & & & \\ 0 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & n \end{vmatrix}=n!(2+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i})=n!(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i})$$

…….（10分）

12. 解. 由$A-3B=AB$可得，$A=(A+3I)B$，故$B=(A+3I)^{-1}A$. …….（5分）

对$(A+3I\mid A)$作初等行变换得

$$(A+3I\mid A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

由此可知$B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$……………………………………（10分）

13. 解. 对方程组的增广矩阵 A 作初等行换

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -4 & -1 & 2 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right)$$

故原方程组有解当且仅当 $a=2$ ……………………（5 分）

当 $a=2$ 时，原方程组同解于方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2 \quad +3x_4=-3 \\ \qquad\qquad x_3+4x_4=-8 \end{cases}$

以 x_2,x_4 为自由变量，其导出组的基础解系为

$$\xi_1=(2,1,0,0)^T,\xi_2=(-3,0,-4,1)^T,$$

令 $x_2=x_4=0$，得特解 $\eta=(-3,0,-8,0)^T$.

综上原方程组的一般解为

$$(-3,0,-8,0)^T+k_1(2,1,0,0)^T+k_2(-3,0,-4,1)^T,$$

其中 k_1,k_2 为任意常数. ……………………（10 分）

14. 解. $|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda-1 & 2 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$.

故 A 的全部特征值为 $\lambda_1=1$（2 重），$\lambda_2=-1$（单重）. ………………（5 分）

对于特征值 $\lambda_1=1$，$I_3-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A 可相似对角化的充要条件时 A 有三个线性无关的特征向量。故 A 有两个属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量. 故 $r(I_3-A)=1$，即 $x=2$. ………………（10 分）

15. 解. 因为 A 是正交阵，即 $AA^T=I_3$，所以

$(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+a^2=1$，得 $a=0$；

$x\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+y\cdot a=0$，得 $x=0$ ；

$x^2+0^2+y^2=1$，得 $y=\pm1$；

$x\cdot0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot b=0$，得 $b=-\frac{1}{2}$；

$(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+b^2+c^2=1$ ，得 $c=0$. ....（10 分）

注：题中五个参数，每个 2 分.

16. 解. （1）$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$ ....（2 分）

$|\lambda I_3-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，

所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1=1$ （2 重），$\lambda_2=-2$（单重）. ....（4 分）

对于 $\lambda_1=1$，$I_3-A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，求解 $(I_3-A)X=0$ 的基础解系得

$$\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T$$

A 的属于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中 k_1,k_2 为任意不全为零的常数.（7 分）

对于 $\lambda_2=-2$，$-2I_3-A=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\-1&-2&-1\\1&-1&-2\end{pmatrix}$，求解 $(-2I_3-A)X=0$ 的基础解系得

$$\alpha_3=(1,-1,1)^T.$$

A 的属于 $\lambda_2=-2$ 的全部特征向量为 $k_3\alpha_3$，其中 k_3 为任意非零常数..................（10 分）

（2）对 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 作 Schmidt 正交阵化

$\beta_1=\alpha_1=(1,1,0)^T$，

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,0,-1)^T-\frac{1}{2}(1,1,0)^T=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1)^T$

$\beta_3=\alpha_3=(1,-1,1)^T$，

单位化得

$$\xi_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)^T,$$

$$\xi_2=(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3})^T,$$

$$\xi_3=(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})^T.$$

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$，…………（14分）

作正交线性替换 $X=QY$，原二次型可化为标准形 $y_1^2+y_2^2-2y_3^2$. …………（17分）

（3）原二次型的正惯性指数为2，负惯性指数为1，

规范形为 $z_1^2+z_2^2-z_3^2$. ………..（20分）

四、证明题（本题共5分）

17. 证法一. 设数 k_1,k_2,k_3 满足 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$.

即 $k_1(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(2\alpha_3-3\alpha_4)=0$

故 $k_1\alpha_1+(-k_1+k_2)\alpha_2+(k_1-k_2+2k_3)\alpha_3+(-k_1-3k_3)\alpha_4$.

由 α_1，α_2，α_3,α_4 线性无关可知，$k_1=k_2=k_3=0$.

故 β_1,β_2,β_3 线性无关. ………..（3分）

另一方面，设 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4=0$,

即 $x_1(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)+x_2(\alpha_2-\alpha_3)+x_3(2\alpha_3-3\alpha_4)+x_4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-4\alpha_4)=0$.

即$\begin{cases} x_1+x_4=0 \\ -x_1+x_2+x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=0 \\ -x_1-3x_3-4x_4=0 \end{cases}$，$(1,2,1,-1)$为其非零解，故$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关.

综上可知，β_1,β_2,β_3是向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的一个极大线性无关组. ………..（5 分）

证法二. $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

作初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ………..（3 分）

由此可知，β_1,β_2,β_3线性无关.

且$\beta_4=\beta_1+2\beta_2+\beta_3$.

综上可知，β_1,β_2,β_3是向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的一个极大线性无关组. ………..（5 分）