安徽大学2019-2020年第一学期期末考试卷A卷(离散数学)

选择题

1、下列语句中，哪个是真命题(　)

A. x+2=4

B. 我们要努力学习；

C. 如果ab为奇数，那么是奇数，或是偶数；

D. 如果时间流逝不止，你就可以长生不老。

2、下列命题公式中, 永真式的是（　）

A. $(P \to Q) \to P$

B. $\neg(Q \to P) \wedge P$

C. $(P \wedge \neg P) \leftrightarrow Q$

D. $P \to (P \vee Q)$

3、在谓词逻辑中, 令 $F(x)$ 表示 x 是火车; $G(y)$ 表示 y 是汽车; $L(x,y)$ 表示 x 比 y 快。命题 “并不是 所有的火车比所有的汽车快" 的符号表示中哪些是正确的? (　)

I.$\neg\forall x\forall y(F(x) \wedge G(y) \to L(x,y))$

II.$\exists x\exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg L(x,y))$

III.$\exists x\exists y(F(x) \wedge G(y) \to \neg L(x,y))$

A. 仅I;

B. 仅III;

C. I和II;

D. 都不对

4、下列结论正确的是：（　　）

A. 若 $A \cup B=A \cup C$, 则 $B=C$;

B. 若 $A \cup B \subseteq A \cap B$, 则 $A=B$;

C. 若 $A \cap B=A \cap C$, 则 $B=C$;

D. 若 $A \subset B$ 且 $C \subset D$, 则 $A \cap C \subset B \cap D$。

5、设 $A_1=\phi, A_2=\{\phi\}, A_3=\rho(\{\phi\}), A_4=\rho(\phi)$,以下命题为假的是（　　）

A. $A_2 \in A_4$

B. $A_1 \subseteq A_3$

C. $A_4 \subseteq A_2$

D. $A_4 \in A_3$

6、设 R 是集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 上的二元关系,$R=\{\langle a,d\rangle,\langle d,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$。下列哪些命题为真？（　　）

I. $R \cdot R$ 是对称的

II. $R \cdot R$ 是自反的

III. $R \cdot R$ 不是传递的

A. 仅I

B. 仅II

C. I和II

D. 全真

7、R 是二元关系且 $R = R^4$, 则一定是传递的是（ ）

A. R^4;

B. R^3;

C. R^2;

D. R.

8、设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的等价关系, 确定下列各式, 哪些是 A 上的等价关系（　　）

A. $A \times A - R_1$

B. $R_1 - R_2$;

C. $R_1 \cup R_2$;

D. $R_1 \cap R_2$。

9、函数 $f: X \to Y$ 可逆的充要条件是: ( )

A. $A = B$;

B. $|A|=|B|$;

C. f 为双射;

D. f 为满射。

10、下列集合中，哪个集合的基数与其他集合的基数不同（ ）

A. N^N (N 为自然数集, $n \in N$);

B. N^N (N 为自然数集);

C. $R \times R$ (R 为实数集);

D. x 坐标轴上所有闭区间集合;

填空题

11、全集 $U=\{1,2,3,4,5\},A=\{1,5\},B=\{1,2,3,4\},C=\{2,5\}$, 则可求出:

$A\cap\bar{B}=$______________;

$\rho(A)\cap\rho(C)=$______________;

$\bar{C}=$______________。

12、设 $|A|=3,|\rho(B)|=16,|\rho(A\cup D)|=64$, 则：

$|B|=$_______________,

$|A\cap B|=$_______________,

$|A-B|=$_______________,

$|A\oplus B|=$_______________。

13、设 $A=\{1,2,3,4\}$, R 是 A 上的二元关系, 且 $R=\{<1,2><2,4>,<3,3>\}$则

$r(R)=$_______________,$s(R)=$ _______________,$t(R)=$ _______________,

14、设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, 则 A 上共有多少个二元关系_______________？其中有多少个等价关系 _______________?

15、设函数 $f:A\to A,B\subseteq A$ 为 A 的子集。则:$f\left(f^{-1}(B)\right)$_____________B,$f^{-1}(f(B))$_____________B;当f为_____________函数时$f\left(f^{-1}(B)\right)=B$；当f为_____________函数时$f^{-1}(f(B))=B$.

综合题

16、求命题公式 $((P\wedge Q)\vee\neg R)\to P$ 的主析取范式与主合取范式 (要求用等值演算的方法求解)。

17、用推理规则证明:

(1) $P\to(Q\to R),\neg S\vee P,Q$永真蕴含$S\to R$。

(2) 前提: $\forall x(F(x)\to(Q(y)\wedge R(x))),\exists xF(x)$; 结论: $\exists x(F(x)\wedge R(x))$。

18、设集合 $A=\{a,b,c\},\rho(A)$ 是集合 A 的幂集, 试给出 $<\rho(A),\subseteq>$ 的哈斯图, 并指出子 集 $\{\{a\},\{b\}\}$ 的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最小上界、最大下届 (如果存在的话)。

19、设 R 是集合 A 上的关系, 令 $S=\{\langle a,b\rangle\mid\exists c\in A$, 使 $\in R$ 且 $\in R\}$, 证 明: 如果 R 是等价关系, 则 S 也是等价关系。

20、已知 $f:N\times N\to N,f(\langle x,y\rangle)=x^2+y^2$。请问:

(1) f 是单射吗?

(2) f 是满射吗?

(3) 计算 $f^{-1}(\{0\})$。

(4) 计算 $f(\{<0,0><1,2>\})$。

参考答案

选择题

1、【答案】
C

【解析】
略

2、【答案】
D

【解析】
略

3、【答案】
C

【解析】
略

4、【答案】
B

【解析】
略

5、【答案】
A

【解析】
略

6、【答案】
C

【解析】
略

7、【答案】
B

【解析】
略

8、【答案】
D

【解析】
略

9、【答案】
C

【解析】
略

10、【答案】
A

【解析】
略

填空题

11、【答案】
$\{5\};\{\phi,\{5\};(1,3,4\}$

【解析】
略

12、【答案】

$4,1,2,5$

【解析】

略

13、【答案】

$\{<1.2>,<2,4>,<3,3>,<1,1>,<2,2>,<4,4>\}$

$;\{<1,2>,<2,4>,<3,3>,<2,1>,<4,2>\};$

$\{<1,2>,<2,4>;<3,3>,<1,4>\}$

【解析】

略

14、【答案】

$2^{25},52$

【解析】

略

15、【答案】

$\subseteq$

, 满射，$\supseteq$

, 单射

【解析】

略

综合题

16、【答案】

$A \Leftrightarrow ((P \cap Q) \vee \neg R) \rightarrow P$

$\Leftrightarrow \neg((P \wedge Q) \vee \neg R) \vee P$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \wedge R) \vee P$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee P$

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge R) \wedge (\neg Q \vee Q)) \ \vee ((\neg Q \wedge R) \wedge (P \vee \neg P) \vee (P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg R)) \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

$\vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$ (主析取范式)

$\because \neg A \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$

$\therefore A \Leftrightarrow \neg(\neg A) \Leftrightarrow \neg((\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$ （主合取范式）

【解析】

略

17、【答案】

① 证明:

(1) $\neg S \vee P$ P

(2) S P (附加前提)

(3) D $T_{(1),(2)}$I

(4) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ P

(5) $Q \rightarrow R$ $T_{(3),(4)}$I

(6) Q P

(7) R $T_{(5),(6)}$I

(8) $S \rightarrow R$ $\mathrm{CP}_{(2),(7)}$

②证明:

(1) $\exists x F(x)$ P

(2) $4(c)$ $\mathrm{ES}_{(1)}$

(3) $\forall x(F(x) \rightarrow (Q(y) \wedge R(x)))$ P

(4) $H(c) \rightarrow (Q(y) \wedge R(c))$ US (3)

(5) $Q(y) \wedge R(c)$ T (2), (4) I

(7) $F(c) \wedge R(c)$ T (2), (6) I

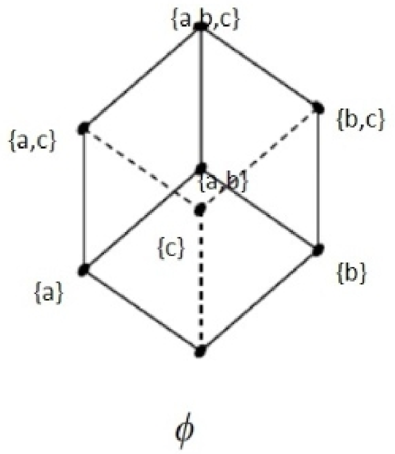
(8) $\exists x(F(x) \cap R(x))$ EG (7)

【解析】

略

18、【答案】

解: $\langle \rho(A), \subseteq \rangle$的哈斯图如下图所示。



$\{\{a\},\{b\}\}$ 的极大元是: $\{a\},\{b\}$; 极小元是: $\{a\},\{b\}$ (4 分); 最大元不存在;最小元不存在; 上界有: $\{a,b\},\{a,b,c\}$; 下界为: ϕ; 最小上界为: $\{a,b\}$; 最大下界为: ϕ 。

【解析】

略

19、【答案】

证明: 已知 R 是等价关系, 对 S 是等价关系的证明分 3 步:

(1) 自反性

$\because$ R 是自反的,

$\therefore$ 对 $\forall a \in A$, 有 $<a,a> \in R$

根据S的定义, 有 $<a,a> \in S$

$\therefore$ S是自反的；

(2) 对称性；

如果 $<a,b> \in S$, 则 $\exists c \in A$, 使 $<a,c> \in R$ 且 $<c,b> \in R$,

$\because R$是对称的，

$\therefore \langle b,c \rangle \in R$且$\langle c,a \rangle \in R$,

$\therefore$ 再根据 S 的定义有 $\langle b,a \rangle \in S$,

$\therefore S$是对称的;

(3) 传递性

如果 $<a,b> \in S$, $<b,c> \in S$,

则 $\exists d \in A$ 使 $<a,d> \in R$, 且 $<a,b> \in R$ 。 $\because R$ 是传递的, $\therefore <a,b> \in R$

则 $\exists e \in A$使 $<b,e> eR$, 且 $<e,c> \in R$ 。 $\because R$ 是传递的, $\therefore <b,c> \in R$

$\therefore$ 根据 S 的定义有 $<a,c> \in S$。 $\therefore S$ 是传递的。

由 (1), (2), (3) 得 S 是等价关系。

【解析】

略

20、【答案】

解答：(1) $<1,2>$, $<2,1> \in N \times N$, $f(\langle 1,2 \rangle)=f(<2,1>)=1^2+2^2=5$,但 $<1,2> \neq <2,1>$,所以 f 不是单射。

(2) $3 \in N$, 但找不出这样的 $<x,y> \in N \times N$,使得 $f(\langle x,y \rangle)=x^2+y^2=3$ 。所以 f 不是满射。

(3) $f^{-1}(\{0\})=\left\{\langle x, y \rangle \mid x^2+y^2=0\right\}$, 解之, 得 x=y=0, 所以 $f^{-1}(\{0\})=\{\langle 0,0 \rangle\}$

(4) $f\{<0,0>, <1,2>\}=\{0,5\}$

【解析】

略