曲线拟合和函数逼近案例

1 问题背景

随着全球气候变暖及厄尔尼诺现象频发，城市化进程不断加快，随之而来的是城市热岛效应和雨增效应的明显，与此同时，地面不透水面积比例增大，改变了下垫面条件，导致地表径流不断加大，给给排水系统造成了更大压力. 2011 年 5 月，江苏省人民政府办公厅颁发《省政府办公厅转发住房城乡建设厅关于加强全省城市排涝设施建设管理意见的通知》要求：“各省辖市要抓紧组织开展城市暴雨公式修订工作，为城市排涝设施建设提供设计依据”. 编制暴雨强度公式是城市排水排涝规划设计的技术基础，直接影响排水工程的安全与成效，与海绵城市的建设也密切相关. 根据我国《室外排水设计规范》规定，进行城市排水管网排涝工程设计时，应当依据当地的暴雨强度公式.

以泰州市暴雨强度公式修编为例，选取泰州水文台 1982-2015 年共 34 年降雨历时为 180min 的年最大降雨量数据(mm/min)如下：

表 6-1

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_m	0.527	0.471	0.441	0.430	0.399	0.384	0.374	0.365	0.348	0.341
m	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_m	0.337	0.336	0.332	0.320	0.319	0.312	0.302	0.281	0.279	0.277
m	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_m	0.277	0.273	0.273	0.266	0.254	0.253	0.247	0.239	0.230	0.216
m	31	32	33	34						
x_m	0.209	0.209	0.181	0.162						

下面依据该数据进行降雨强度理论频率曲线的拟合.

2 数学模型

设降雨资料年数为 n 年(上表中 $n=34$)，将 n 个降雨强度数据从大到小排队，计算降雨强度大于等于某一值发生的经验频率 P：

$$P=\frac{m}{n+1},\tag{6.1}$$

其中，m 为数据的排队序号. 经验重现期为：

$$T=\frac{1}{P}=\frac{n+1}{m}.\tag{6.2}$$

根据《规范要求》，可采用指数分布曲线拟合降雨强度 x 与频率 P 的关系，作为理论频率曲线.

降雨强度等于某一值 x 发生的概率为(密度函数)：

$$y=f(x)=\alpha e^{-\alpha(x-\beta)},\tag{6.3}$$

降雨强度大于等于 X_P 发生的频率为(超过机率)：

$$P(x>X_P)=\int_{X_P}^{\infty}f(x)dx=e^{-\alpha(x-\beta)}.\tag{6.4}$$

其中，α,β 为待定参数.

3 计算方法

降雨强度大于等于 X_P 发生的频率拟合函数为 $P=e^{-\alpha(x-\beta)}$，不能直接进行最小二乘拟合，可以先应用自然对数将问题线性化，

$$\ln P=-\alpha(x-\beta),$$

将(6.2)代入，得

$$\ln T=\alpha x-\alpha\beta,$$

通过定义 $\gamma=-\alpha\beta$，我们可以得到

$$\ln T=\alpha x+\gamma.\tag{6.5}$$

原始的最小二乘问题是用来拟合数据，即找到 α,β 以最小化方程 $P_m=e^{-\alpha(x_m-\beta)}$ 余项的平方和，其中 $m=1,2,\cdots,n$. 余项平方和如下：

$$Q=(e^{-\alpha(x_1-\beta)}-P_1)^2+(e^{-\alpha(x_2-\beta)}-P_2)^2+\cdots+(e^{-\alpha(x_n-\beta)}-P_n)^2.$$

现在我们在“对数空间”求解，改变了最小二乘误差，即找出 α,γ 以最小化方程 $\ln T_m=\alpha x_m+\gamma$ 余项的平方和，其中 $m=1,2,\cdots,n.$ 余项平方和如下：

$$Q=(\alpha x_1+\gamma-\ln T_1)^2+(\alpha x_2+\gamma-\ln T_2)^2+\cdots+(\alpha x_n+\gamma-\ln T_n)^2. \tag{6.6}$$

针对(6.6)，分别对α,γ求偏导，

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha}=2\sum_{m=1}^{n}(\alpha x_m+\gamma-\ln T_m)x_m=0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \gamma}=2\sum_{m=1}^{n}(\alpha x_m+\gamma-\ln T_m)=0,$$

分别得到等式

$$(\sum_{m=1}^{n}x_m)\gamma+(\sum_{m=1}^{n}x_m^2)\alpha=\sum_{m=1}^{n}x_m\ln T_m,$$

$$\left(\sum_{m=1}^{n}1\right)\gamma+\left(\sum_{m=1}^{n}x_m\right)\alpha=\sum_{m=1}^{n}\ln T_m.$$

联立方程组，即可求得两个参数

$$\alpha=\frac{\overline{x\ln T}-\overline{x}\times\overline{\ln T}}{\overline{x^2}-(\overline{x})^2},$$

$$\beta=\overline{x}-\frac{1}{\alpha}\times\overline{\ln T},$$

其中$\overline{u}$表示数据u的平均值.

如此，求解出两个待定参数后，可以计算指定频率P下的理论降雨强度$\hat{x}$：

$$\hat{x}=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{P}+\beta.$$

4 编程实现

下面采用指数型分布曲线拟合泰州水文台 180min 降雨历时下的暴雨强度理论频率曲线，并与经验频率点相比较。

```
clear all
clc
axis([0,1,0,1])
xlabel('降雨强度x(mm/min)')
ylabel('降雨概率P')
text(0,0,'0')
```

```
hold on
n = 34;
m = 1:1:n;
P = m/(n+1);
T = 1./P;
lnT = log(T);
x = [0.527,0.471,0.441,0.430,0.399,0.384,0.374,0.365,0.348,0.341,...
     0.337,0.336,0.332,0.320,0.319,0.312,0.302,0.281,0.279,0.277,...
     0.277,0.273,0.273,0.266,0.254,0.253,0.247,0.239,0.230,0.216,...
     0.209,0.209,0.181,0.162];
scatter(x,P)
hold on
ave_x = sum(x)/n;
ave_x2 = sum(x.^2)/n;
ave_lnT = sum(lnT)/n;
ave_xT = dot(x,lnT)/n;
a = (ave_xT-ave_x*ave_lnT)/(ave_x2-(ave_x)^2);
b = ave_x - ave_lnT/a;
x = 0.162:0.01:0.527;
p = exp(-a*x+a*b);
plot(x,p)
```

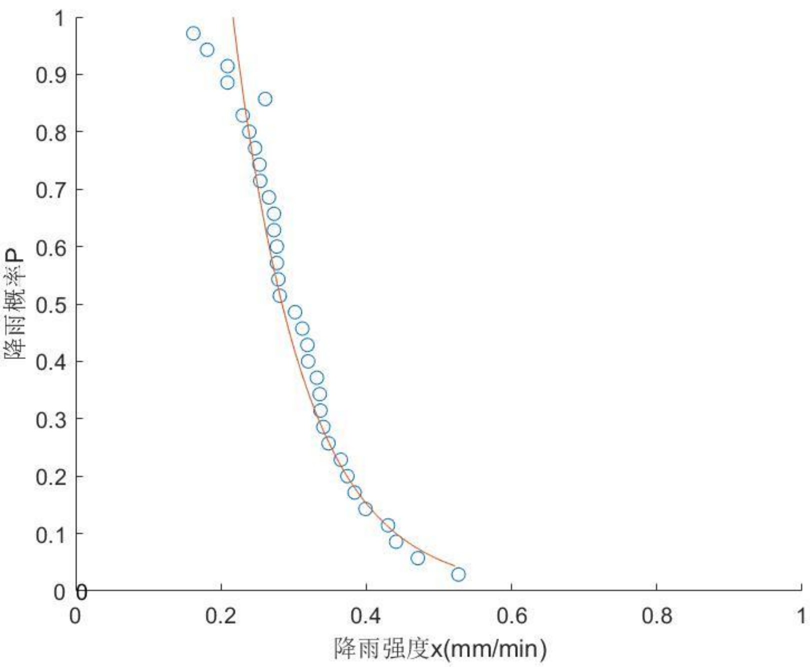

图6-1 指数拟合曲线图

由指数拟合曲线图像看出，指数拟合曲线能基本反应经验频率点分布规律。