1. 累次积分 ⇒ $\begin{cases}\text{后积分先定限，限为数；}\\ \text{先积分后定限，限为线。}\end{cases}$

2. 极坐标：$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$

3. 变量代换：$\iint_{T(D)} f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$

二重积分

曲面面积

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

质心

$$\overline{\vec r}=\frac{\iiint_\Omega \vec r\,\rho(x,y,z)\,dV}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dV},\quad \vec r=(x,y,z)$$

转动惯量

$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)\,d\sigma$	$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$
$I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)\,d\sigma$	$I_y=\iiint_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$
$I_O=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,d\sigma$	$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dV$
	$I_O=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$

重积分应用

王晗宇整理 [illegible]
2022.6.4

1. 累次积分 $\begin{cases}\text{先一后二（投影法）}\\ \text{先二后一（截面法）}\end{cases}$

2. 柱坐标：$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$

3. 球坐标：$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

三重积分

（高斯）

$\vec F = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$

高斯公式：

$$\underbrace{\oint\!\!\oint_{\partial\Omega} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy}_{\text{通量}} \underset{\text{逆正顺负}}{=} (\pm)\iiint_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)}_{\text{散度 } \operatorname{div}\vec F} dxdydz$$

格林公式：

$$\oint_{\partial D} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

全微分方程：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

则 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx+Q\,dy$

（格林）

第二类曲线积分 $\xrightarrow{\text{（斯托克斯）}}$ 第二类曲面积分

$$\int_L P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$$
$$=\int_a^b\Big(P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\Big)dt$$

斯托克斯公式：

$$\oint_{\partial\Sigma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$
$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$
$$\underbrace{=\iint_\Sigma \underbrace{\begin{array}{ccc}(\vec i) & (\vec j) & (\vec k)\\ \hline \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{array}}_{\text{旋度 } \overrightarrow{\operatorname{rot} F}} dS}_{\text{环量}}$$

第二类曲面积分

① 逐个投影法：

$$\iint_\Sigma P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iint_\Sigma P\,dydz+\iint_\Sigma Q\,dzdx+\iint_\Sigma R\,dxdy$$

② 转换投影法：

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,dydz+Q(x,y,z)\,dzdx+R(x,y,z)\,dxdy$$
$$=\pm\iint_{D_{xy}}\Big(P(x,y,z(x,y))(-z'_x)+Q(x,y,z(x,y))(-z'_y)+R(x,y,z(x,y))\Big)dxdy$$

上正下负
右正左负
前正后负

$$=\iint_{D_{xy}}\big(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\big)\cdot dS$$

第一类曲线积分

$$\int_L f(x,y,z)\,ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

第一类曲面积分

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$
$$=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

方向向量 $\vec v$

梯度 $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(P_0)=(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$

方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec v}\right|_{P_0}=\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(P_0)\cdot\vec v$