

论数学归纳法的严谨性和许多同学对数学归纳法的误解

王晗宇

摘要

数学归纳法 (Mathematical Induction, MI) 是一种数学证明方法, 通常被用于证明某个给定命题在整个 (或者局部) 自然数范围内成立。除了自然数以外, 广义上的数学归纳法也可以用于证明一般良基结构, 例如: 集合论中的树。这种广义的数学归纳法应用于数学逻辑和计算机科学领域, 称作结构归纳法。

在我高等数学课本上遇到的一个题: 求一个数列的单调性。这个求单调性并不是很简单, 我找了一些方法, 感觉用数学归纳法比较容易。当我与同学交流用数学归纳法的时候, 我发现好多同学都对这种方法有点排斥。所以我感觉很多同学对数学归纳法好像有一个误解。

关键词: 数学归纳法、严谨性、误解

正文

一、首先说说什么是数学归纳法。

数学归纳法 (Mathematical Induction, MI) 是一种数学证明方法, 通常被用于证明某个给定命题在整个 (或者局部) 自然数范围内成立。最简单和常见的数学归纳法是证明当 n 等于任意一个自然数时某命题成立。证明分为下面两步:

1. 证明当 $n=1$ 时命题成立。
2. 假设 $n=m$ 时命题成立, 那么可以推导出在 $n=m+1$ 时命题也成立。(m 代表任意自然数)

这种方法的原理在于: 首先证明在某个起点值时命题成立, 然后证明从一个值到下一个值的过程有效。当这两点都已经证明, 那么任意值都可以通过反复使用这个方法推导出来。

二、下面论证数学归纳法的严谨性:

这里先以我遇到的一个数学题为例。

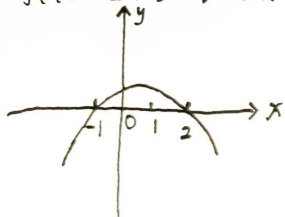
$a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, n = 1, 2, \dots$ 求这个数列 $\{a_n\}$ 的单调性。

用单调数列定义可以得到:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2+a_n} - a_n \\ &= \sqrt{2+a_n} - \sqrt{a_n^2} \\ &= \frac{2+a_n - a_n^2}{\sqrt{2+a_n} + \sqrt{a_n^2}} \end{aligned}$$

分母显然大于0, 对于分子:

设 $f(t) = 2+t-t^2$, 则 $f(t)$ 图像大致为:



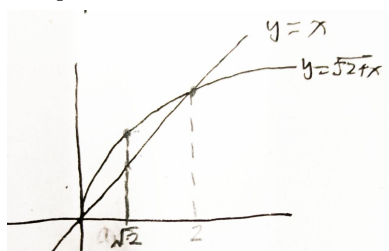
$a_1 = \sqrt{2} \in (1, 2)$,

令 $n=1$, 可看出 $a_2 - a_1 > 0$. 但当 $n > 2$ 时的情况不容易确定下来。

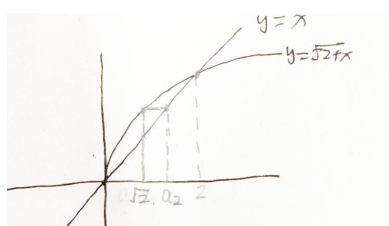
这里如果不用数学归纳法可能会比较复杂。下面提供一种思路：

画出 $y=\sqrt{2+x}$ 以及 $y=x$ 的图像

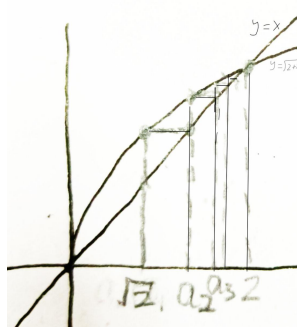
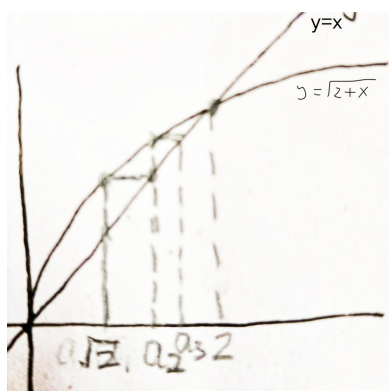
取 $a_1=\sqrt{2}$,并在图中作出函数值:



利用 $y=x$ 将函数值转移到 x 轴得到 a_2 :



同理得 a_3 以及 $n>3$ 的值:



可看出：对于任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 有 $a_{n+1} > a_n$ 且小于 2. (这种方法并非笔者原创，只是笔者对此稍做了研究而已)
数学归纳法就是对这种以图像为载体的方法的一种简化。该题用数学归纳法证明如下：

显然 $a_1 < 2$. ①, 设 $a_k < 2$, 则

$$a_{k+1} < \sqrt{2+2} = 2. \text{ ②}$$

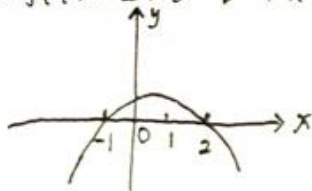
其中 $(k-1) \in \mathbb{N}_+$.

由 ①、② 得对于任意 $n \in \mathbb{N}_+$, a_n 小于 2, 由

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2+a_n} - a_n \\
 &= \sqrt{2+a_n} - \sqrt{a_n^2} \\
 &= \frac{2+a_n - a_n^2}{\sqrt{2+a_n} + \sqrt{a_n^2}}
 \end{aligned}$$

分母显然大于0, 对于分子:

设 $f(t) = 2+t-t^2$, 则 $f(t)$ 图像大致为:



可得 $a_{n+1} > a_n$, 即数列单调递增。

由此例可知, 数学归纳法是一些其他方法的一种简化, 具有和其他常见方法一样的严谨性。

三、很多同学对数学归纳法的排斥问题:

笔者与同学交流用数学归纳法的时候, 发现好多同学都对这种方法有点排斥。觉得数学归纳法不是一种严谨的方法, 或者对数学归纳法有一种莫名的排斥感, 说白了就是对于解决数学题往往不想用数学归纳法。笔者认为这与高中内容以及高考有很大的关系。

(1)首先, 高中数学中数学归纳法不是重点内容, 在高中数学知识体系中占比很小, 甚至有部分地区的同学高中时对数学归纳法根本没有涉及。所以很多同学对数学归纳法的了解程度及运用熟练度小。

(2)其次, 由于数学归纳法本身就是一种比较简单的数学证明方法, 但运用的范围小, 在不能使用数学归纳法的时候容易被学生误用。有些高中老师不建议同学大量使用数学归纳法来解决数学问题除非高考题目要求使用。

(3)再次, 数学归纳法在高中算是一种与高中所见到的其他方法有很大不同新的证明方式, 也具有不同于高中太多的思维方式, 而且“数学归纳法”名称本身很容易被误解成相对不是特别严谨的归纳推理法。

总之, 数学归纳法并非归纳推理法, 同一些常见的证明方法一样也是一种严谨的数学证明方法。在有些需要的情况下, 合理运用数学归纳法确实是一种不错的选择。

参考文献:

《高等数学.上册/范益政, 郑婷婷, 陈华友主编.科学出版社出版》

《百度百科-数学归纳法》

2021年10月15日