

# 安徽大学 2019—2020 学年第一学期

## 《高等数学 A (一)》期末考试试卷答案详解

一、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. A    2. C    3. B    4. D    5. C

二、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

6.  $y = -x$     7. 6    8.  $x \sin x + \cos x + C$     9.  $\frac{\pi}{6}$     10.  $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$

三、计算题 (每小题 9 分, 共 54 分)

$$11. \text{【解】} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt \stackrel{x^2 - t^2 = u}{=} -\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt}{x^2(1 - e^{x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du}{x^2(-x^2)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du}{x^4}$$

$$\stackrel{\text{洛比达}}{=} -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} f(x^2) \cdot 2x}{4x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{4x^2}$$

$$= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 - 0}$$

$$= -\frac{1}{4} f'_+(0) = -\frac{1}{4} f'(0) = -\frac{1}{4}$$

9 分

12. 【解】由已知, 有

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{-x}, & x < 0, \\ xe^{-x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

$f(x)$  在  $x=0$  点处连续

$$\text{故 } f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(x-1), & x < 0, \\ e^{-x}(1-x), & x > 0, \end{cases}$$

又  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-xe^{-x}}{x} = -1$ ,  $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^{-x}}{x} = 1$ , 故  $f(x)$  在  $x=0$  点处不可导.

令  $f'(x) = 0$ , 得  $f(x)$  的唯一驻点  $x=1$ ;

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	—	不存在	+	0	—

$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$
--------	------------	-----	------------	-----	------------

则  $f(x)$  的极大值  $f(1) = e^{-1}$ , 极小值  $f(0) = 0$ ;

$$\text{又 } f''(x) = \begin{cases} e^{-x}(2-x), & x < 0, \\ e^{-x}(x-2), & x > 0, \end{cases} \text{ 令 } f''(x) = 0, \text{ 得 } x = 2; \quad x = 0 \text{ 为 } f(x) \text{ 不可导点,}$$

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	+	不存在	—	0	+
$f(x)$	凹	拐点	凸	拐点	凹

则  $f(x)$  的拐点为  $(0, 0)$  和  $(2, 2e^{-2})$

9 分

**13. 【解】**

$$\begin{aligned} \int \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx & \stackrel{\substack{\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t \\ x=\frac{1}{t^2-1}}}{=} \int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)^2} \\ & = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \left( \frac{\frac{1}{4}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{(t+1)^2} \right) dt \\ & = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\ & = x \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) - \frac{1}{2} x \left( \sqrt{\frac{1+x}{x}} - 1 \right) + C \quad 9 \text{ 分} \end{aligned}$$

**14. 【解】 方法一 (倒代换)**

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x}} & \stackrel{\frac{1}{x}=t}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+4t}} \\ & = \frac{1}{2} (1+4t)^{\frac{1}{2}} \bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\sqrt{3}-1). \quad 9 \text{ 分} \end{aligned}$$

**方法二 (三角换元)**

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x}} & = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{(x+2)^2-4}} \stackrel{x+2=2\sec t}{=} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sec t \cdot \tan t}{2(\sec t-1) \cdot 2\tan t} dt \\ & = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t}{\sec t-1} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos t} dt = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 \frac{t}{2} dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1)$$

9 分

$$\begin{aligned} 15. \text{【解】 } a_n &= \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin nx dx = -\int_0^{2\pi} \sin nxd(e^{-x}) \\ &= -\left(e^{-x} \sin nx \Big|_0^{2\pi} - n \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos nxdx\right) = n \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos nxdx \\ &= -n \int_0^{2\pi} \cos nxd(e^{-x}) = -n \left(e^{-x} \cos nx \Big|_0^{2\pi} + n \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin nxdx\right) \\ &= -n(e^{-2\pi} - 1) - n^2 \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin nxdx = -n(e^{-2\pi} - 1) - n^2 a_n \end{aligned}$$

$$\text{移项, 得 } a_n = \frac{n(1 - e^{-2\pi})}{1 + n^2};$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1 - e^{-2\pi})}{1 + n^2} = 1 - e^{-2\pi}.$$

9 分

$$\begin{aligned} 16. \text{【解】 (1) } \int_{-a}^a f(x)g(x)dx &\stackrel{x=-t}{=} -\int_a^{-a} f(-t)g(-t)dt = \int_{-a}^a f(-x)g(-x)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)]g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx. \end{aligned}$$

$$(2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx \text{ 中 } f(x) = \arctan e^x, \quad g(x) = |\sin x|,$$

$g(x)$  为偶函数, 下证  $f(x) + f(-x) = A$ , 考虑其导数, 有

$$[f(x) + f(-x)]' = (\arctan e^x + \arctan e^{-x})' = 0,$$

所以  $f(x) + f(-x) \equiv A$ , 取  $x = 0$ , 可得  $A = \frac{\pi}{2}$ , 则

$$f(x) + f(-x) = \arctan e^x + \arctan e^{-x} = \frac{\pi}{2},$$

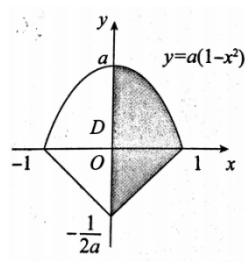
$$\text{则 } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2}.$$

9

分

#### 四、应用题 (每小题 12 分, 共 12 分)

$$\begin{aligned} 17. \text{【解】 (1) 由 } y &= a(1 - x^2), \text{ 有 } y' = -2ax, \text{ 则过点 } A(1, 0) \text{ 的} \\ \text{法线斜率} &\text{为 } \frac{1}{2a}, \text{ 从而得到过点 } A(1, 0) \text{ 的法线方程为} \\ y &= \frac{1}{2a}(x - 1); \end{aligned}$$



如图所示, 由于图形关于  $y$  轴对称, 故  $D$  的面积为

$$S(a) = 2 \int_0^1 \left[ a(1-x^2) - \frac{1}{2a}(x-1) \right] dx = \frac{4a}{3} + \frac{1}{2a},$$

令  $S'(a) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2a^2} = 0$ , 解得  $a = \frac{\sqrt{6}}{4}$  或  $a = -\frac{\sqrt{6}}{4}$  (舍去), 又  $S''\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) > 0$ , 故当

$$a = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ 时, } S(a) \text{ 最小, 最小面积为 } S\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

(2) 由于  $D$  的下半部分三角形区域绕  $y$  轴旋转为圆锥体, 其体积为

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \times 1^2 \times \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9} \pi,$$

且  $D$  的上半部分绕  $y$  轴旋转体的体积为

$$V_2 = \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \pi \cdot x^2(y) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \pi \cdot \left(1 - \frac{4}{\sqrt{6}} y\right) dy = \frac{\sqrt{6}}{4} \pi - \frac{3\pi}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{8} \pi,$$

故所求旋转体的体积为

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\sqrt{6}}{9} \pi + \frac{\sqrt{6}}{8} \pi = \frac{17\sqrt{6}}{72} \pi. \quad 12 \text{ 分}$$

五、证明题 (每小题 7 分, 共 14 分)

18. 【证明】

(1) 先证  $f(x) < f'(0)x$

当  $x \in (0, 1)$ , 令  $g(x) = f(x) - f'(0)x$ ,  $g'(x) = f'(x) - f'(0) < 0$ ,

则  $g(x)$  单调递减, 又  $g(0) = 0$ , 可知  $g(x) < g(0) = 0$ , 有  $f(x) < f'(0)x$ ;

(2) 再证  $f(1)x < f(x)$

令  $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ , 只要证  $h(x) > h(1)$ , 即只要证  $h(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减.

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x) \cdot x - [f(x) - f(0)]}{x^2} = \frac{f'(x) \cdot x - f'(\xi)x}{x^2}, \text{ 其中 } 0 < \xi < x$$

因为  $f'(x)$  单调递减, 所以  $h'(x) < 0$ , 即  $h(x)$  单调递减, 则  $h(x) = \frac{f(x)}{x} > \frac{f(1)}{1}$ ,

即  $f(1)x < f(x)$ ;

7 分

19. 【证明】

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$  及  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  处连续, 则  $0 = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f(\frac{1}{2})$ , 进而可得

$$f'(\frac{1}{2}) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = 0;$$

又由积分中值定理可知, 存在  $\eta \in (1, \frac{3}{2})$ , 使得

$$f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx = 2f(\eta) \cdot \frac{1}{2} = f(\eta);$$

由  $f(x)$  在  $[\eta, 2]$  上连续, 在  $(\eta, 2)$  内可导,  $f(2) = f(\eta)$ , 由罗尔定理, 存在

$\tau \in (\eta, 2)$ , 使得  $f'(\tau) = 0$ ;

又  $f'(x)$  在  $[\frac{1}{2}, \tau]$  上连续, 在  $(\frac{1}{2}, \tau)$  内可导,  $f'(\frac{1}{2}) = f'(\tau)$ , 由罗尔定理, 存在

$\xi \in (\frac{1}{2}, \tau) \subset (0, 2)$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

7 分