安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试题（A 卷）

参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 **2** 分，共 **10** 分）

1. D　　2. B　　3. C　　4. C　　5. A

二、填空题（每小题 **2** 分，共 **10** 分）

6. -1　　7. -1　　8. $\dfrac{\pi}{2}$　　9. $(\dfrac{1}{4},+\infty)$　　10. $6a$

三、计算题（每小题 **9** 分，共 **54** 分）

11. 解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x-1)\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^2}{x\mathrm{e}^x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$，

…………………… 7 分

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{(\mathrm{e}^x-1)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x-1)\ln x}=\mathrm{e}^0=1$.　　……………………9 分

12. 解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{b-\cos x}\cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}$　　…………………… 4 分

当 $b\neq 1$ 时，极限值为 0，与题设矛盾. 所以 $b=1$.　　……………………6 分

因此，原式左边 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a+x}}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$.

由 $\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$，得出 $a=4$.　　…………………… 9 分

13. 解：因为 $x=y^y$，则 $x=\mathrm{e}^{y\ln y}$.　　…………………… 3 分

对等式两边关于 x 求导，则有 $1=\mathrm{e}^{y\ln y}(y'\ln y+y')$，

从而 $y'=\dfrac{1}{y^y(\ln y+1)}=\dfrac{1}{x(\ln y+1)}$，　　…………………… 8 分

故 $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln y+1)}$. ························9 分

14. 解：原式 $=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^{2}}}$ ························4 分

$=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^{2}}}\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)=\arcsin(\frac{\sqrt{2}(x+1)}{2})+C$. ························9 分

15. 解：原式 $=\displaystyle\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}(\frac{1}{2-x})$ ······················ 3 分

$=\left.\dfrac{\ln(1+x)}{2-x}\right|_0^1-\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x})\mathrm{d}x$ ························6 分

$=\ln 2-\dfrac{1}{3}[-\ln(2-x)|_0^1+\ln(1+x)|_0^1]=\dfrac{\ln 2}{3}$. ························9 分

16. 解：原式 $=\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$ ······················ 3 分

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[\ln x-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]\Bigg|_1^b$ ······················ 6 分

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln\dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\dfrac{1}{2}\ln 2=\ln 1+\dfrac{1}{2}\ln 2=\dfrac{1}{2}\ln 2$. ······················ 9 分

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

17. 解：因为 $y'=2x$， $y''=2$，

所以曲线的曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$. ······················ 4 分

从而曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{2}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}$， $\rho'=6x(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}$.

令 $\rho'=0$，得 $x=0$. 当 $x<0$ 时， $\rho'<0$；当 $x>0$ 时， $\rho'>0$. 所以在 $x=0$ 时， ρ 取

得极小值；驻点唯一，从而ρ的极小值也是最小值，从而在$x=0$时，K取得最大值. …………………… 8 分

18．**解：** 由题知，$V_x=\pi\int_a^{2a}\left(\frac{a}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi a}{2}$， ……………………3 分

$V_y=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{a}{y}\right)^2\mathrm{d}y+\pi\int_0^{\frac{1}{2}}4a^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1 a^2\mathrm{d}y=2\pi a^2$. ……………………7 分

因为$V_x=V_y$，所以$a=\frac{1}{4}$. …………………… 8 分

五、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

19. **证明：** 令$f(x)=x\ln x$，$x>0$，则$f'(x)=1+\ln x, f''(x)=\frac{1}{x}>0, x>0$.

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上是下凸的， ……………………4 分

从而对任意的$x,y\in(0,+\infty)$，$x\neq y$，恒有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x)+f(y)],$$

即$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}<\frac{1}{2}(x\ln x+y\ln y)$，

亦即$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$. …………………… 10 分