安徽大学 2019--2020 学年第二学期《线性代数 B》期末试卷（A 卷）参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. C；2. B；3. A ；4. C；5. B.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 无；7. 0；8. $\begin{pmatrix} 10 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & -14 \\ 12 & -14 & 1 \end{pmatrix}$；9. -6；10. $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11. 解:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} - \cdots - \frac{1}{x_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_n \end{vmatrix}$$ ……………………..8 分

$$= \left[x_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{x_i} \right] \cdot \prod_{i=2}^{n} x_i$$ ……………………..10 分

12. 解: 作矩阵 A

$$A = \left(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$ （注：此处也可构造为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 9 & 6 & -7 \end{pmatrix}$）

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ 所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$. ………3 分

易知 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关，从而 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \therefore a = 3b$ ………6 分

易知 α_1, α_3 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组，故 β_3 可由 α_1, α_3 线性表示，从而

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 0, \therefore b = 5, a = 15.$$ ………………………10 分

13.解：$\begin{cases}|A|=|B| \\ tr(A)=tr(B)\end{cases}$， ………………………………5 分

即$\begin{cases}-2=2(8+3n) \\ 2+0+m=2+3+n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=0 \\ n=-3\end{cases}$………………………………….. .10 分

14. 解：矩阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$ ……………..3 分

由 $\det(\lambda I-A)=0$ 得 A 的特征值 $\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$. ………………………5 分

对于 $\lambda_1=1$，解齐次线性方程组 $(I-A)X=0$，

$$I-A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，对应可得方程组 $\begin{cases}x_2-x_3=0 \\ x_3=0\end{cases}$，

可得它的一个基础解系 $\alpha_1=(1,0,0)^T$，则 A 的属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $c_1\alpha_1$.(c_1 为任意非零常数). ……………………………………………………….. .8 分

对于 $\lambda_2=2$，解齐次线性方程组 $(2I-A)X=0$，

$$2I-A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，对应可得方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=0 \\ x_3=0\end{cases}$，

可得它的一个基础解系 $\alpha_2=(1,-1,0)^T$，则 A 的属于特征值 $\lambda_2=2$ 的特征向量为 $c_2\alpha_2$.(c_2 为任意非零常数). ……………………………………………………….. .10 分

15. 解：该二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}$$ ……………………………………………5 分

A 的各阶顺序主子式为

$$\det A_1=5>0, \det A_2=\begin{vmatrix}5 & 2 \\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0, \det A_3=1>0.$$

故 $f(x_1,x_2x_3)$ 是正定二次型. ……………………………………………………….. .10 分

四、分析计算题（本题 10 分）

16. 解：由题意，$A^2-2A-5I=(A+I)(A-3I)-2I=0$，……………………….5 分

即
$$(A+I)\frac{1}{2}(A-3I)=I$$

故 $A+I$ 可逆，且 $(A+I)^{-1}=\frac{1}{2}(A-3I)$ ……………………….10 分

五、证明题（本题 10 分）

17. 证明: 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r=0$ ……………………….2 分

于是

$$\left(k_1+\cdots+k_r\right)\alpha_1+\left(k_2+\cdots+k_r\right)\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 线性无关，所以有

$$\begin{cases}k_1+k_2\cdots+k_r=0\\ k_2+\cdots+k_r=0\\ k_r=0\end{cases}$$

解得 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$

故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也线性无关. ……………………….10 分