安徽大学 2016—2017 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》（B 卷）参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $3x-2y-z-2=0$； 2. 0； 3. $\dfrac{y}{x^2+y^2}dx-\dfrac{x}{x^2+y^2}dy$；

4. $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)dx$； 5. 0

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. D； 7. A； 8. B； 9. A； 10. C

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 解：

$$\frac{dy}{dx}=f_1'(e^x,\cos x,x^2+1)e^x+f_2'(e^x,\cos x,x^2+1)(-\sin x)+f_3'(e^x,\cos x,x^2+1)\cdot 2x$$

故 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=f_1'(1,1,1)$

………………… 10 分

12. 解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$，$G(x,y,z)=x+y+z$

故曲线在点 $(1,-2,1)$ 处的切线向量为 $\vec{\tau}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\{-6,0,6\}$

故曲线在点 $(1,-2,1)$ 处切线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$

………………… 10 分

13. 解：由曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 具有轮换对称性，知

$$\iint_\Sigma z^2dS=\iint_\Sigma x^2dS=\iint_\Sigma y^2dS=\frac{1}{3}\iint_\Sigma\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=\frac{1}{3}\iint_\Sigma R^2dS=\frac{4}{3}\pi R^4$$

………………… 10 分

14. 解：$\oint_C(x+y)^2ds=\oint_C\left(x^2+y^2+2xy\right)ds$

C 关于 x 轴对称，而 $2xy$ 关于 y 是奇函数，由对称性知

$$\oint_C(x+y)^2ds=\oint_C\left(x^2+y^2+2xy\right)ds=\oint_C\left(x^2+y^2\right)ds=\oint_C ds=2\pi.$$

………………… 10 分

15. 解： 由格林公式，

$$\oint_L (y+x)dx+(2x+y)dy=\iint\limits_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1}(2-1)dxdy=6\pi .$$

………………… 10 分

16. 解：$\iint\limits_S xdydz+(z+1)dxdy$

$=\oiint\limits_{S+S_1} xdydz+(z+1)dxdy-\iint\limits_{S_1} xdydz+(z+1)dxdy$ 其中 S_1： $x^2+y^2\le 1$，取下侧，

由高斯公式

$$\oiint\limits_{S+S_1} xdydz+(z+1)dxdy=2\iiint\limits_V dxdydz=\frac{4\pi}{3},$$

$$\iint\limits_{S_1} xdydz+(z+1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy=-\pi ,$$

故原式$=\frac{7\pi}{3}$.

………………… 10 分

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

17. 解： $f(x)=\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n$

其中 $0<x\le 4$.

………………… 8 分

18. 解：平面上任一点 (x,y) 到直线 $x-y+4=0$ 的距离

$$d=\frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}}.$$

由题意求最短距离等价于求以 $y^2=4x$ 为约束条件时，d^2 的极小值点.

令 $L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x-y+4)^2-\lambda(y^2-4x)$， ………………… 4 分

令 $\begin{cases} L_x{}'=(x-y+4)+4\lambda=0 \\ L_y{}'=-(x-y+4)-2\lambda y=0 \\ L_\lambda{}'=y^2-4x=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

显然 d^2 存在最小值，所以抛物线 $y^2=4x$ 上的点 $(1,2)$ 到直线 $x-y+4=0$ 的距离最

短. ………………… 8分

五、证明题（每小题4分，共4分）

19．由$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$，知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$绝对收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$收敛。

另一方面，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，故由级数的性质知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n^2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$发散。

………………… 4分