安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末模拟卷一参考答案

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D；　**2**．~~B~~ D；　**3**．A；　**4**．C；　**5**．C

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．2；　**7**．3；　**8**．-2；　**9**．$y=x+1$；　**10**．$\ln(1+\sqrt{2})$

三．计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11．解：$\lim\limits_{x\to0+}\ln x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{\ln(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

故 $\lim\limits_{x\to0+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=e$

…………………………（10 分）

12．解：（1）两边对 x 求导，得 $y'-1=e^{x(1-y)}[1-y-xy']$

解得：$y'=\dfrac{1+(1-y)e^{x(1-y)}}{1+e^{x(1-y)}}$

（2）在方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 中，令 $x=0$，得 $y=1$，又由（1）知 $f'(0)=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=f'(0)=1$$

………………（10 分）

13．解：原方程可化为 $y'-\dfrac{2}{x+1}y=(x+1)^3$，这是一个一阶线性非齐次方程，其通解公式为

$y=e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C)$，即

$$y=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}(\int(x+1)^3e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}dx+C)=\frac{1}{2}(x+1)^4+C(x+1)^2$$

代入初始条件 $y(0)=\dfrac{1}{2}$，得 $C=0$，故原方程的解为 $y=\dfrac{1}{2}(x+1)^4$.

………………（10 分）

14．解：令 $x=\tan t$，则

$$\int\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{1}{\tan^4 t\sec t}\sec^2 tdt=\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt$$

$$=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t}d\sin t=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^4 t}d\sin t=\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{3\sin^3 t}+C=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+C$$

………………（10 分）

15．解：令 $\sqrt{x}=t$，由分部积分法，知

原式$=2\int_0^{\pi}t^2\cos tdt=2\int_0^{\pi}t^2d\sin t=0-2\int_0^{\pi}2t\sin tdt=4\int_0^{\pi}td\cos t=4\pi$

………………（10 分）

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

16．解：（1）依题意 D 的面积为

$$S=\int_0^1(e^y-ey)dy=e-1-\frac{e}{2}=\frac{e}{2}-1.$$

（2）依题意，旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1(e^y)^2dy-\pi\int_0^1(ey)^2dy=\frac{e^2-1}{2}\pi-\frac{e^2}{3}\pi=(\frac{e^2}{6}-\frac{1}{2})\pi.$$

………………（10 分）

五．证明题（每小题 5 分，共 10 分）

idea.

$f'(\xi)+f(\xi)=0$

$\Leftrightarrow (e^x f(x))'|_{x=\xi}=0$

17．证明：由 $f(0)f(1)>0$，$f(0)f(\frac{1}{2})<0$ 知，$f(0)f(\frac{1}{2})<0$，$f(\frac{1}{2})f(1)<0$

由连续函数的零点定理知，存在 $\eta\in(0,\frac{1}{2})$，$\zeta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=f(\zeta)=0$

令 $F(x)=e^x f(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由罗尔定理知，

至少存在 $\xi\in(\eta,\zeta)\subset(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$

………………（5 分）

18．证明：$F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$

由积分中值定理 $\int_a^x f(t)dt=f(\xi)(x-a)$，其中 $a<\xi<x$，故

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}=\frac{f(x)(x-a)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{f(x)-f(\xi)}{(x-a)}$$

依题意知 $f(x)$ 递增，知 $F'(x)\geq 0$

………………（5 分）