安徽大学 2020--2021 学年第一学期《线性代数 A》
期末试卷（B 卷）参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 相；2. 6；3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$；4. $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+10x_2x_3$；

5．-14.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6. C；7. B；8. A ；9.A；10. B.

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11. 解: 将各行都加到第一行，提取公因子得

$$D_n=\left[x+(n-1)y\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y & x & y & \cdots & y \\ y & y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$ ……………………………..5 分

右边行列式将各行加上第一行的 $-b$ 倍

$$D_n=\left[x+(n-1)y\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)^{n-1}\left[x+(n-1)y\right].$$ ……………………………..10 分

12. 解: 作矩阵 A

$$A=\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T\right)=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -3 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&-9&0\\0&-8&40&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=B$$ ……………………..5 分

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$

易知β_1,β_2,β_4为 B 的列向量组的一个极大线性无关组，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为 A 的列向量组的一个极大无关组.故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大线性无关组…………..10 分

13. 解：$\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1&0&k\\1&0&k\\1&0&k\end{pmatrix}$， ………………………………3 分

因为相似矩阵有相同的迹，…………………….. . .6 分

故$1+0+k=3+0+0\Rightarrow k=2$……………………………………. . .10 分

14. 解：矩阵A的特征方程为$|\lambda I-A|=\lambda^2(\lambda-3)=0$

故矩阵A的特征值为$\lambda_1=3,\ \lambda_2=0$（二重） …………………………4 分 把特征值$\lambda_1=3$带入齐次线性方程组$(\lambda I-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，

其基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 故特征值$\lambda_1=3$的全部特征向量为$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$（$k_1\neq 0,k_1\in R$）

…………………………7 分

把特征值$\lambda_2=0$带入齐次线性方程组$(\lambda I-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，

其基础解系为：$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. 故$\lambda_2=0$的全部特征向量为

$k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$（$k_2,k_3$为$R$中不全为 0 的数）………10 分

15. 解：该二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$ ……………………………………………5 分

A 的各阶顺序主子式为 $\det A_1 = 5 > 0, \det A_2 = 1 > 0, \det A_3 = 1 > 0$，

故该二次型为正定二次型 …………………………………………... .10 分

四、分析计算题（本题 10 分）

16. 解：由题意，$I = I - A^k = (I-A)(I + A + A^2 + \cdots A^{k-1})$，………………………5 分

即 $$(I-A)(I + A + A^2 + \cdots A^{k-1}) = I$$

故 $I-A$ 可逆，且 $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots A^{k-1}$. ………………………10 分

五、证明题（本题 10 分）

17. 证明: 因为矩阵 A,B 为正定矩阵，所以

存在正交矩阵 Q_1,Q_2，使得对任意非零列向量 X 有 ，

$X^T AX > 0$，$X^T BX > 0$, ………………………8 分

故有 $X^T\left(A+B\right)X = X^T AX + X^T BX > 0$, ，则 $A+B$ 为正定矩阵. ………………………10 分