安徽大学 2020--2021 学年第一学期《线性代数 A》期末试卷（A 卷）参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 5；2. -72；3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$；4. 2；5． $-\dfrac{1}{6}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6. A；7. B；8. B ；9. D；10. D.

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11. 解:

$$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 9 & 27 \\ 4 & 1 & 16 & 64 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}=-12. \text{……..10 分}$$

12. 解: 由 $r(AB)<r(A),\ r(AB)<r(B)$ 知，矩阵 A，B 都不可逆，

故 $|A|=0, |B|=0$ ………5 分

$\Rightarrow \begin{cases} a-2b=-3 \\ a+b=3 \end{cases}$， 解得 $a=1, b=2$ ………………………10 分

13.解：$\begin{cases} |A|=|B| \\ tr(A)=tr(B) \end{cases}$， ………………………………5 分

即 $\Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ …………………………………….. .10 分

14. 解：矩阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

由 $\det(\lambda I-A)=0$ 得 A 的特征值 $\lambda_1=2$（二重），$\lambda_2=1$. ………………………3 分

对于 $\lambda_1=2$，解齐次线性方程组 $(2I-A)X=0$，可得它的一个基础解系

$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$,对于$\lambda_2=1$，解齐次线性方程组$(I-A)X=0$，可得它的一个基础解系$\alpha_3=(-1,01,)^T$，………..6 分

构造矩阵$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$A^n=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}^n P^{-1}=\begin{pmatrix}2^n&2^n-1&2^n-1\\0&2^n&0\\0&1-2^n&1\end{pmatrix}$$ …………………………..10 分

15. 解：该二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&t\end{pmatrix}$$ ……………………………………………5 分

A 的各阶顺序主子式为

$$\det A_1=1>0,\det A_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1>0,\det A_3=t-5>0$$

故　$t>5$. ………………………………………………………….. .10 分

四、分析计算题（本题 10 分）

16. 解：$A(\eta_2+\eta_3)=A\eta_2+A\eta_3=2b$，

$A\left[\frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3)\right]=b$，故$\frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3)$是$Ax=b$的特解. ………………………5 分

故　$\eta_1-\frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\\\frac{5}{2}\\3\end{pmatrix}$为$Ax=0$的解……………………7 分

又因为$r(A)=3$，故$\eta_1-\frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\\\frac{5}{2}\\3\end{pmatrix}$为$Ax=0$的基础解系，

故 $Ax=b$ 的通解为 $\eta_1+c\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\\\frac{5}{2}\\3\end{pmatrix}$,（$c$为任意常数） …………………10 分

五、证明题（本题 10 分）

17. 证明: 设矩阵 A,B 的特征值均为 $\lambda_1,\cdots\lambda_n$,

则存在正交矩阵 Q_1,Q_2，使得

$$Q_1^{-1}AQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\ Q_2^{-1}BQ_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

$\Rightarrow Q_1^{-1}AQ_1=Q_2^{-1}BQ_2\Rightarrow\left(Q_1Q_2^{-1}\right)^{-1}A\left(Q_1Q_2^{-1}\right)=B$ ………………………8 分

令 $Q=Q_1Q_2^{-1}$，则 Q 为正交矩阵，

故有正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=B$ ………………………10 分