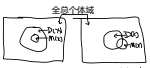
离散数学第一章-王晗宇

2023年1月15日 10:14



对于全称量词，特性谓词作为蕴含式之前件而加入之 $\forall x\,(M(x)\to P(x))$

对于存在量词，特性谓词作为合取项而加入之 $\exists x\,(M(x)\wedge P(x))$

全称量化/存在量化

量词+ 个体+谓词

全称量词 $\forall$

存在量词 $\exists$

谓词常元

谓词变元

约束变元

自由变元

原子公式

谓词演算公式

等价

永真

可满足

永假（不可满足）

对偶原理 同下

组成

悖论 命题

原子命题

命题连接词（逻辑运算符）

否定词 $\neg$

合取词 $\wedge$

析取词 $\vee$

蕴含词 $\to$

等值词 $\leftrightarrow$

$\neg\wedge\vee\to\leftrightarrow$

与非 $\uparrow$

或非 $\downarrow$

蕴含否定 $\not\to$

异或 $\oplus$

$\{\wedge,\neg\}$ $\{\vee,\neg\}$ $\{\uparrow\}$ $\{\downarrow\}$ 全功能的

复合命题

命题常元 T/F

命题变元 *（以真假为其变域的变元）*

含有命题变元的断言称为命题公式

永真式(重言式)

可满足式

永假式(矛盾式)

非永真式

蕴含式 为永真 永真蕴含式 $\Rightarrow$

等值式 为永真 逻辑恒等式 $\Leftrightarrow$

性质：(1) A<=>B,B<=>C,则A<=>C

A=>B,B=>C,则A=>C （传递性）

(2) A=>B,A=>C,则A=>B∧C

代入规则 所有P换成Q,R

替换规则 A<=>B,B可替换A

对偶原理

$\wedge\vee$、T,F 换 $\vee\wedge$、F,T $\longrightarrow$ 定理 (1) $\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$

(2) $A\Leftrightarrow B$ 则 $A^*\Leftrightarrow B^*$

(3) $A\Rightarrow B$ 则 $B^*\Rightarrow A^*$

范式

基本积(合取) —变元与否定不同时存在，且有且仅出现一次— 组成 → 极小项 (m_i) 真值为1

最简析取范式 —控制最少命题的— 析取范式 → 主析取范式 $\sum(i,j,\cdots)$

最简合取范式 —控制最少命题的— 合取范式 → 主合取范式 $\prod(i,j,\cdots)$

基本和(析取) —变元与否定不同时存在，且有且仅出现一次— 组成 → 极大项 (M_i) 真值为0

谓词演算永真公式

1.把永真命题的变元用谓词公式代换

2.消去量词 (1) $\forall xA\Leftrightarrow A$ $\exists xA\Leftrightarrow A$

(2) $\forall xP(x)\Rightarrow P(y)\Rightarrow\exists xP(x)$

(3) $\forall xA(x)\Leftrightarrow A(1)\wedge\cdots\wedge A(n)$

$\exists xA(x)\Leftrightarrow A(1)\vee\cdots\vee P(n)$

3.量词否定 $\neg(\underset{\exists}{\forall}xP(x))\Leftrightarrow\underset{\forall}{\exists}x\,\neg P(x)$

4.扩张&收缩 $\underset{\exists}{\forall}xA(x)\wedge P\Longleftrightarrow\underset{\exists}{\forall}x(A(x)\wedge P)$

5.分配

$\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

$\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

$\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

6.量词对->,<->的处理

$\exists x(A(x)\to B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\to\exists xB(x)$

$\exists xA(x)\to\forall xB(x)\Longrightarrow\forall x(A(x)\to B(x))$

7.多个量词

$\forall x\underset{\exists}{\forall y}P(x,y)\Rightarrow\exists x\forall yP(x,y)\Rightarrow\forall x\exists yP(x,y)\Rightarrow\exists x\underset{\exists}{\exists y}P(x,y)$

$\forall y\forall xP(x,y)\Rightarrow\exists y\forall xP(x,y)\Rightarrow\forall y\exists xP(x,y)\Rightarrow\exists y\exists xP(x,y)$

代入规则 所有P(不是约束)换成Q R

替换规则 同下

推理规则

US $\dfrac{\forall xA(x)}{\therefore A(y)}$

ES $\dfrac{\exists xA(x)}{\therefore A(y)}$

EG $\dfrac{A(y)}{\therefore\exists xA(x)}$

UG $\dfrac{\Gamma\Rightarrow A(x)}{\Gamma\Rightarrow\forall xA(x)}$ A(x)不是ES引入的

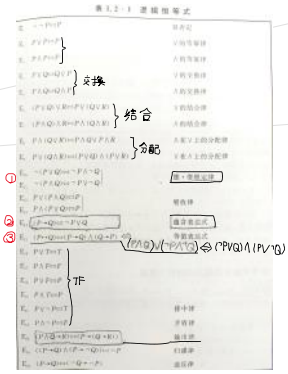


表 1.2-1 逻辑恒等式

E1	$\neg\neg P\Leftrightarrow P$	双否定
E2	$P\vee P\Leftrightarrow P$	幂等律
E3	$P\wedge P\Leftrightarrow P$	幂等律
E4	$P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$	交换律
E5	$P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$	交换律
E6	$(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$	结合律
E7	$(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$	结合律
E8	$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$	分配律
E9	$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$	分配律
E10	$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$	德·摩根律
E11	$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$	
E12	$P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$	吸收律
E13	$P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$	
E14	$P\to Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$	蕴含等值式
E15	$P\to Q\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$	等价等值式
E16	$P\vee P\Leftrightarrow P$	
E17	$P\wedge P\Leftrightarrow P$	
E18	$P\vee P\Leftrightarrow P$	幂等律
E19	$P\wedge P\Leftrightarrow P$	
E20	$P\vee T\Leftrightarrow T$	零一律
E21	$P\wedge F\Leftrightarrow F$	
E22	$P\vee(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\vee R$	结合律
E23	$P\wedge(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\wedge R$	
E24	$(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\Leftrightarrow P$	归缩律
E25	$(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\Leftrightarrow P$	

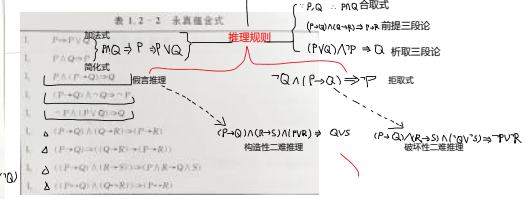


表 1.2-2 永真蕴含式

I1	$P\Rightarrow P\vee Q$	加式
I2	$P\wedge Q\Rightarrow P$	简式
I3	$P\wedge(P\to Q)\Rightarrow Q$	假言推理
I4	$\neg P\wedge(P\vee Q)\Rightarrow Q$	
I5	$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow(P\to R)$	
I6	$(P\to Q)\wedge(R\to S)\Rightarrow(P\wedge R\to Q\wedge S)$	
I7	$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow(P\to R)$	
I8	$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\wedge(P\vee R)\Rightarrow(Q\vee R)$	

推理规则

$\therefore P,Q$ $\therefore P\wedge Q$ 合取式

$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow P\to R$ 前提三段论

$(P\vee Q)\wedge\neg P\Rightarrow Q$ 析取三段论

$\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$ 拒取式

$(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(P\vee R)\Rightarrow Q\vee S$ 构造性二难推理

$(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(\neg Q\vee\neg S)\Rightarrow\neg P\vee\neg R$ 破坏性二难推理

证明方法

分情况证明法 $P_1\vee P_2\vee\cdots\vee P_n\to Q$ 分析证 $P_i\to Q$

演绎定理(CP)

无义证明法 P 假，则P->Q真

平凡证明法 Q 真，则P->Q真

直接证明法

间接证明法（逆反证明法）$P\to Q$ 等价于 $\neg Q\to\neg P$

反证法（归谬法）假设前提

规则 P 规则 T 规则CP