安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期中考试试题参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．C　　2．B　　3．A　　4．B　　5．A

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．0　　7．3　　8．-2　　9．$y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$　　10．$-\pi dx$

三．计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．解：$\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}=\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

………………（10 分）

12．解：$\dfrac{1+2+\cdots+n}{2n^2+n}\le\dfrac{1}{2n^2+1}+\dfrac{2}{2n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{2n^2+n}\le\dfrac{1+2+\cdots+n}{2n^2+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{2n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{2n^2+n}=\dfrac{1}{4}$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{2n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{2n^2+1}=\dfrac{1}{4}$

由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n^2+1}+\dfrac{2}{2n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{2n^2+n}\right)=\dfrac{1}{4}$

………………（10 分）

13．解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}{x\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\frac{1}{2}x^3\cdot\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

………………（10 分）

14．解：$\lim\limits_{x\to 0-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$

………………（10 分）

15．解：

【解析】对方程$xy+e^{y}=x+1$两边关于x求导有$y+xy'+y'e^{y}=1$，得$y'=\dfrac{1-y}{x+e^{y}}$

对$y+xy'+y'e^{y}=1$再次求导可得$2y'+xy''+y''e^{y}+(y')^{2}e^{y}=0$，

得 $y''=-\dfrac{2y'+(y')^{2}e^{y}}{x+e^{y}}$ (*)

当$x=0$时，$y=0$，$y'(0)=\dfrac{1-0}{e^{0}}=1$，代入 (*) 得

$$y''(0)=-\frac{2y'(0)+(y'(0))^{2}e^{0}}{(0+e^{0})^{3}}=-(2+1)=-3$$

………………（10 分）

16．解：依题意,：$x\le f(x)\le x^{2}+x,-1\le x\le 1\ \Rightarrow f(0)=0$

$$x\le f(x)-f(0)\le x^{2}+x$$

$x\to 0^{+}$, $1\le\dfrac{f(x)-f(0)}{\mathrm{x}}\le x+1$,两边取右极限$\Rightarrow f_{+}'(0)=1$

$x\to 0^{-}$, $1\ge\dfrac{f(x)-f(0)}{\mathrm{x}}\ge x+1$,两边取左极限$\Rightarrow f_{-}'(0)=1$

$f'(0)$存在, 且$f'(0)=1$.

………………（10 分）

四．证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．证明：令$f(x)=3^{x}+\cos x-3$，显然$f(x)$在$[0,1]$上连续，且

$f(0)=-1<0$，$f(1)=\cos 1>0$，

由零点定理知，至少存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=0$，故

方程$3^{x}+\cos x=3$在区间$(0,1)$内至少有一个实根.

………………（5 分）

18．证明：

由 $0 < x_1 < 3$ 知 x_1 及 $3 - x_1$ 均为正数, 故

$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3 - x_1)} \le \dfrac{1}{2}(x_1 + 3 - x_1) = \dfrac{3}{2}$. 假设 $0 < x_k \le \dfrac{3}{2}$，

$x_{k+1} = \sqrt{x_k(3 - x_k)} \le \dfrac{1}{2}(x_k + 3 - x_k) = \dfrac{3}{2}$. 由数学归纳法知

对任意正整数有 $0 < x_n \le \dfrac{3}{2}$． 另一方面，

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3 - x)} - x_n = \frac{x_n(3 - x_n) - x_n^{\ 2}}{\sqrt{x_n(3 - x_n)} + x_n} = \frac{x_n(3 - 2x_n)}{\sqrt{x_n(3 - x_n)} + x_n} \ge 0$$

由单调有界定理，$\{x_n\}$ 收敛.

………………（5 分）