

《离散数学》考试试卷（样卷 A）

一、解答题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 集合 $S=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ 上的二元运算 $*$ 如右边的运算表所示，回答下列问题：

$*$	α	β	γ	δ
α	δ	α	β	γ
β	α	β	γ	δ
γ	β	γ	γ	γ
δ	α	δ	γ	δ

- (1) 判断 $*$ 是否是可交换的，并说明理由。
- (2) 指出关于 $*$ 的幺元、零元、等幂元。（如没有则写“不存在”）
- (3) 哪些元素有逆元？逆元是什么？

2. 对下列函数

- ① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = 2^x, S = \{1, 2\}$;
- ② $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}, f(x) = |x|, S = \{-1, 0, 1\}$;
- ③ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3, S = \mathbb{N}$;
- ④ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2, S = [-3, -1]$;

回答如下问题：

- (1) 判断函数是单射的、满射的还是双射的；
- (2) 求 $f^{-1}(S)$, 其中 f^{-1} 表示逆象。
- (3) 求 $f(f^{-1}(S))$, 其中 f^{-1} 表示逆象。

二、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

1. 求命题公式 $((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$ 的主合取范式与主析取范式。（结果中的极大/小项必须编号）

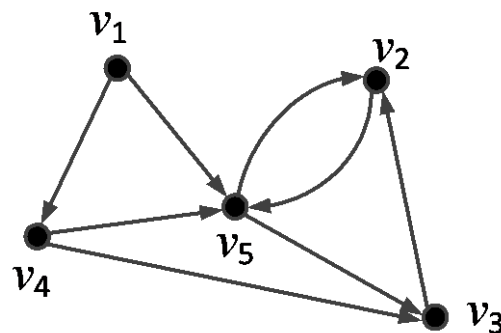
2. 设 R_1 和 R_2 都是集合 $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 上的关系, $R_1=\{ \langle x, y \rangle | y = x+1 \}$, $R_2=\{ \langle x, y \rangle | y = x^2 \}$,

求解如下问题：

- (1) 写出 R_1 、 R_2 ;
- (2) 写出 R_2 的关系矩阵。
- (3) 求出 $R_1 \bullet R_2$ (R_1 和 R_2 的合成) 的关系矩阵。
- (4) 求出 R_1 的传递闭包 $t(R_1)$ 的关系矩阵。

3. 有向图 G 如右图所示，试求：

- (1) 求 G 的邻接矩阵 A 。
- (2) 求出 A^2 、 A^3 、 A^4 和 A^5 , v_1 到 v_4 长度为 1、2、3、4 和 5 的路有多少？
- (3) 求出 $A^T A$ 和 $A A^T$, 说明 $A^T A$ 和 $A A^T$ 中的第(2, 2)元素和第(2, 3)元素的意义。
- (4) 求出可达矩阵 P 。
- (5) 求出强分图。



三、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 用推理规则构造下面推理过程的证明。

前提: $\exists x F(x), \forall x (F(x) \vee G(x) \rightarrow H(x))$, 结论: $\exists x H(x)$

2. 一起刑事案件中警方锁定甲、乙二人为犯罪嫌疑人，警方根据证据最终判断有以下事实：

(1)：甲罪犯或乙罪犯； (2)：如果乙是罪犯，则甲必定有伤；

(3)：甲手很干净，并且没有受伤。

设：P：甲是罪犯；Q：乙是罪犯；R：甲受伤；S：甲手上沾满鲜血。试证明甲是罪犯，要求给出命题前提与结论的符号化表示，以及推导步骤。

四、综合分析题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设 Z 为整数集合， $+$ 是实数的加法运算， $\forall x, y \in Z$ ，在 Z 上定义二元运算 $*$ ：

$$x * y = x + y - 2,$$

求解如下问题：

(1) 证明运算是可交换和可结合的。

(2) 利用群的定义证明： $\langle Z, * \rangle$ 是一个群。

(3) $\langle Z, * \rangle$ 是否为循环群？若是，请证明。

2. 设集合 $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ ， R 为 A 上的整除关系，

(1) 画出偏序 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图。

(2) 依据偏序 $\langle A, R \rangle$ ，写出集合 A 中的最大元、最小元、极大元、极小元。

(3) 依据偏序 $\langle A, R \rangle$ ，写出 A 的子集 $B = \{2, 3, 6, 12\}$ 的上界、下界、最小上界、最大下界。

(4) 已知 $\langle A, R \rangle$ 不是格，但若在 A 中增加一个元素就可以构成格，请问应该增加哪个元素？

(5) 增加一个元素后，画出该格的哈斯图，并写出格中每个元素的补元（如果某元素没有补元，就写不存在）。

五、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

在村村通自来水工程实施过程中，从保证供水质量以及设备维护方便角度出发，已选择某地区的 6 个地点作为该地区的 6 个中心供水站，两两供水站之间的路程如下表所示（单位：公里），问自来水管道路应该如何铺设才能使管道的总里程最少？以图形给出铺设方案，并给出管道的总里程数。

	V1	V2	V3	V4	V5	V6
V1	0	14	12	16	17	25
V2	14	0	10	20	16	20
V3	12	10	0	15	21	25
V4	16	20	15	0	8	24
V5	17	16	21	8	0	18
V6	25	20	25	24	18	0