安徽大学 2018—2019 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末考试（A 卷）参考答案与评分标准

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、$\underline{\dfrac{2}{3}}$；2、$\underline{0}$；3、$\underline{\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y}$；4、$\underline{\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x}$；5、$\underline{(-6,-2,-4)}$.

二、选择题（本题共五小题，每小题 2 分，共 10 分）

6、B； 7、A； 8、C； 9、B； 10、D.

三、计算题（本题共五小题，每小题 9 分，共 45 分）

11. **解.** V 关于 zOx 平面和 yOz 平面对称，故 $\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$（4 分）

V 在 xOy 平面的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2\le 1$.

$$原式=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1 z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}[1-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^4)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}$$ ……………………………………（9 分）

12. **解.** 记 $P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. ……………（4 分）

任取 ε 满足 $0<\varepsilon<1$，设 $C_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2$，方向为逆时针. 则

$$\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{C_\varepsilon}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\varepsilon^2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}2\pi\varepsilon^2=2\pi$$ ………………………（9 分）

13. **解法一**. 曲面Σ在xOy平面的投影区域为$D_{xy}:x^2+y^2\le 1,x,y\ge 0$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 又因$\Sigma$的方向向上，所以

$$\iint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)(-\frac{\partial z}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{……….（5 分）}$$

$$=-\iint_{D_{xy}} y\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sin\theta r\mathrm{d}r=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=-\frac{1}{4} \quad \text{.….（9 分）}$$

解法二. 曲面Σ在zOx平面的投影区域为$D_{zx}:0\le z\le 1,0\le x\le z$.

因为$\Sigma: y=\sqrt{z^2-x^2}$的方向向上，即为该锥面的左侧，故

$$\iint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint_{D_{zx}} z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x \quad \text{…………………………….（5 分）}$$

$$=-\int_0^1 z^2\mathrm{d}z\int_0^z \mathrm{d}x=-\int_0^1 z^3\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}. \quad \text{…………………（9 分）}$$

14. **解**. 设$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

因为$f(x)$是偶函数，所以$b_n=0,n=1,2,\cdots$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k.\end{cases}$$

因为$f(x)$连续，故$f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}\cos nx$ ……………………………（7 分）

$$=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\cos(2k-1)x$$

于是，$0=f(0)=\dfrac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{(2n-1)^2\pi}$. 从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$ ……………（9 分）

15. **解**. $g'(x)=f_1(x,x)+f_2(x,x)=2+3=5$ ……………………………………（4 分）

$$h'(x)=f_1(g(x),x)g'(x)+f_2(g(x),x)$$

故由$f(1,1)=1$可知$\varphi'(1)=f_1(1,1)[f_1(1,1)+f_2(1,1)]+f_2(1,1)=13$. ……………（9 分）

四、应用题（本题共两小题，每小题10分，共20分）

16. 解. 构造Lagrange函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=2x+y+3z+\lambda(x^2+y^2-2)+\mu(x+z-1).$$

令 $L_x=2+2\lambda x+\mu=0$，

$L_y=1+2\lambda y=0$，

$L_z=3+\mu=0$，

$L_\lambda=x^2+y^2-2=0$，

$L_\mu=x+z-1=0$. ………… （5分）

解得 $x=1,y=-1,z=0$ 或 $x=-1,y=1,z=2$.

又因为 $f(x,y,z)$ 在条件 $x^2+y^2=2$ 和 $x+z=1$ 下必有最大值和最小值,

故 $f(x,y,z)$ 在点 $(1,-1,0)$ 处取最小值 $f(1,-1,0)=1$,

$f(x,y,z)$ 在点 $(-1,1,2)$ 处取最大值 $f(-1,1,2)=5$ …………（10分）

17. 解. $M=\iint_\Sigma \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$ ……………………………（3分）

Σ 的方程为 $z=1-x-y$，

且在 xOy 平面上的投影区域为 $\{(x,y)\mid 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\frac{\partial z}{\partial y}=-1,$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{3}$$

故

$$M=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}(2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(2-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$ ……………………………………（10分）

五、证明题（本题共两小题，每小题 5 分，共 10 分）

18. 证明. 当 $n \geq 2$ 时，$a_n = n - \ln n > 0$.

又因为 $a_{n+1} - a_n = (n+1) - \ln(n+1) - (n - \ln n) = 1 - \ln(1+\frac{1}{n}) > 0$，

所以 $\frac{1}{n-\ln n}$ 单调递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n} = 0$. 故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 收敛. ....（3 分）

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n-\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{\ln n}{n}} = 1$，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ 发散.

从而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 条件收敛. ....（5 分）

19. 证明：作变量替换 $x+y=u, x-y=v$，则 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$ ....（2 分）

D 对应区域 $\{(u,v) \mid -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$. $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$.

故

$$\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{-1\leq u\leq 1,\\ -1\leq v\leq 1}} f(u)\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u = \int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u$$ ....（5 分）