

《离散数学》考试试卷（样卷 A）

一、解答题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 集合 $S=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ 上的二元运算 $*$ 如右边的运算表所示，回答下列问题：

$*$	α	β	γ	δ
α	δ	α	β	γ
β	α	β	γ	δ
γ	β	γ	γ	γ
δ	α	δ	γ	δ

- (1) 判断 $*$ 是否是可交换的，并说明理由；
- (2) 指出关于 $*$ 的么元、零元、幂等元。（如没有则写“不存在”）
- (3) 哪些元素有逆元？逆元是什么？

2. 对下列函数

- ① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = 2^x, S = \{1, 2\}$;
- ② $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = |x|, S = \{0, 1\}$;
- ③ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3, S = \mathbb{N}$;
- ④ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2, S = [-3, -1]$;

回答如下问题：

- (1) 判断函数是单射的、满射的还是双射的；
- (2) 如果是双射函数，写出其逆函数；
- (3) 写出给定的集合 S 的逆象。

二、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

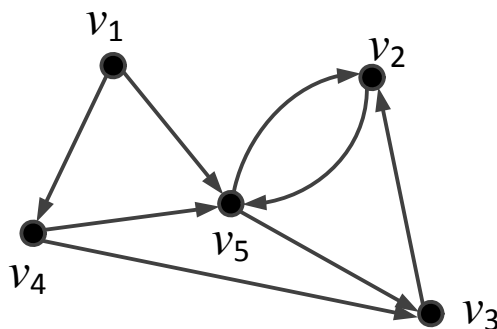
1. 用等值演算法求公式 $((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$ 的主合取范式与主析取范式。

2. 设 R_1 和 R_2 都是集合 $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 上的关系， $R_1=\{\langle x, y \rangle \mid y = x+1\}$ ， $R_2=\{\langle x, y \rangle \mid y = x^2\}$ ，求解如下问题：

- (1) 写出 R_1, R_2 ；
- (2) 写出 R_2 的关系矩阵；
- (3) 求出 $R_1 \circ R_2$ (R_1 和 R_2 的合成) 的关系矩阵；
- (4) 求出 R_1 的传递闭包 $t(R_1)$ 的关系矩阵。

3. 有向图 G 如右图所示，试求：

- (1) 求 G 的邻接矩阵 A 。
- (2) 求出 A^2, A^3, A^4 和 A^5 ， v_1 到 v_4 长度为 1、2、3、4 和 5 的路有多少？
- (3) 求出 $A^T A$ 和 $A A^T$ ，说明 $A^T A$ 和 $A A^T$ 中的第(2, 2)元素和第(2, 3)元素的意义。
- (4) 求出可达矩阵 P 。
- (5) 求出强分图。



三、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 用推理规则构造下面推理过程的证明。

前提： $\exists xF(x)$, $\forall x(F(x) \vee G(x) \rightarrow H(x))$

结论： $\exists xH(x)$

2. 在布尔代数中，证明恒等式 $(a * b) \oplus (a' * c) \oplus (b' * c) = (a * b) \oplus c$

四、综合分析题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设 Z 为整数集合， $+$ 是实数的加法运算， $\forall x, y \in Z$ ，在 Z 上定义二元运算 $*$ ：

$$x * y = x + y - 2,$$

求解如下问题：

- (1) 证明运算是可交换和可结合的
- (2) 利用群的定义证明： $\langle Z, * \rangle$ 是一个群。
- (3) $\langle Z, * \rangle$ 是否为循环群？若是，请证明。

2. 设集合 $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ ， R 为 A 上的整除关系，

- (1) 画出偏序 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图；
- (2) 依据偏序 $\langle A, R \rangle$ ，写出集合 A 中的最大元、最小元、极大元、极小元；
- (3) 依据偏序 $\langle A, R \rangle$ ，写出 A 的子集 $B = \{2, 3, 6, 12\}$ 的上界、下界、最小上界、最大下界；
- (4) 已知 $\langle A, R \rangle$ 不是格，但若在 A 中增加一个元素就可以构成格，请问应该增加哪个元素？
- (5) 增加一个元素后，画出该格的哈斯图，并写出格中每个元素的补元（如果某元素没有补元，就写不存在）。

五、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

一个售货员要去 $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ 六座城市推销产品，城市之间的路程如下表所示。若售货员从 V_1 出发，希望没有重复地走遍所有城市，并回到 V_1 。请使用最近邻算法为该售货员找到一条尽可能短的推销路径（要求给出详细的算法过程），画出该推销路径，并计算其路程长度。

	V1	V2	V3	V4	V5	V6
V1	0	10	6	8	7	15
V2	10	0	5	20	15	16
V3	6	5	0	14	7	8
V4	8	20	14	0	4	12
V5	7	15	7	4	0	6
V6	15	16	8	12	6	0