第九章　空间解析几何

习题 9.2　向量代数

1. 已知两点 $A\left(4,\sqrt{2},1\right)$ 和 $B\left(3,0,2\right)$.(1)求 $\overline{AB}$ 的模；(2)求与 $\overline{AB}$ 平行的单位向量；

(3)求 $\overline{AB}$ 的方向角.

【解析】本题考查向量的坐标形式，向量的模计算，单位向量的计算以及方向角计算公式的应用.

（1） $\overline{AB}=(-1,-\sqrt{2},1)$ ，$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$ ；

（2） $\overline{AB}^o=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}(-1,-\sqrt{2},1)$;与其平行的单位向量为 $\pm\dfrac{1}{2}(-1,-\sqrt{2},1)$.

（3） $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2},\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$ ，则 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3},\beta=\dfrac{3\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

2. 已知 $\vec{\alpha}=\left(a,5,1\right)$ 与 $\vec{\beta}=\left(3,1,b\right)$ 共线，求 a 与 b 的值.

【解析】本题考查两个向量平行的坐标关系.

$\vec{\alpha}=\left(a,5,1\right)$ 与 $\vec{\beta}=\left(3,1,b\right)$ 共线，则对应分量成比例，即 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{5}{1}=\dfrac{1}{b}$，则 $a=15,b=\dfrac{1}{5}$.

3.设 $\vec{\alpha}=\left(3,-1,-2\right),\vec{\beta}=\left(1,2,-1\right)$，求 $\left(1\right)\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ 及 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$；$\left(2\right)\left(-2\vec{\alpha}\right)\cdot\left(3\vec{\beta}\right)$ 及 $\vec{\alpha}\times2\vec{\beta}$；$\left(3\right)\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的夹角余弦；$\left(4\right)$ 以 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 为邻边的平行四边形面积；$\left(5\right)$ 既垂直于 $\vec{\alpha}$ 又垂直于 $\vec{\beta}$ 的一个向量；$\left(6\right)\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}\right)$.

【解析】本题考查向量的数量积、向量积、混合积在坐标形式下的计算公式；向量夹角的计算；向量积的概念和向量积模的几何意义.

（1） $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$ ，$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=(5,1,7)$ ；

（2） $\left(-2\vec{\alpha}\right)\cdot3\vec{\beta}=-6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-18$ ，$\vec{\alpha}\times2\vec{\beta}=2\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=(10,2,14)$ ；

（3） $\cos\angle(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$ ；

（4） $S=\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{matrix}\right\|=\left|(5,1,7)\right|=5\sqrt{3}$ ；

（5）既垂直于 $\vec{\alpha}$ 又垂直于 $\vec{\beta}$ 的一个向量是 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=(5,1,7)$ ；

（6） $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}\right)=\begin{vmatrix}3&-1&-2\\1&2&-1\\3&-1&-2\end{vmatrix}=0$.

4. 已知 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 垂直，且 $\left|\vec{\alpha}\right|=3$ ，$\left|\vec{\beta}\right|=4$ ，求 $\left|\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\times\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\right|$.

【解析】考查抽象的向量的性质、运算了的计算.

① $\left(3\overrightarrow{\alpha}-\overrightarrow{\beta}\right)\times\left(\overrightarrow{\alpha}-2\overrightarrow{\beta}\right)=3\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\alpha}-6\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}-\overrightarrow{\beta}\times\overrightarrow{\alpha}+2\overrightarrow{\beta}\times\overrightarrow{\beta}=-5\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}$；

② $\left|\left(3\overrightarrow{\alpha}-\overrightarrow{\beta}\right)\times\left(\overrightarrow{\alpha}-2\overrightarrow{\beta}\right)\right|=\left|-5\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}\right|=5\left|\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}\right|=5\left|\overrightarrow{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{\beta}\right|\sin\angle(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})$；

③ 因为$\overrightarrow{\alpha}$与$\overrightarrow{\beta}$垂直，所以$\angle(\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta})=\dfrac{\pi}{2}$，原式$=5\times3\times4\times\sin\dfrac{\pi}{2}=60$.

5. 已知$\left|\overrightarrow{\alpha}\right|=10$，$\left|\overrightarrow{\beta}\right|=2$.(1)若$\overrightarrow{\alpha}\bullet\overrightarrow{\beta}=12$，求$\left|\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}\right|$；(2)若$\left|\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}\right|=16$，求$\overrightarrow{\alpha}\bullet\overrightarrow{\beta}$.

【解析】考查抽象向量的数量积，向量积的运算性质计算.

（1）① $\overrightarrow{\alpha}\bullet\overrightarrow{\beta}=\left|\overrightarrow{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{\beta}\right|\cos\theta=20\cos\theta=12\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，

② $\left|\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}\right|=\left|\overrightarrow{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{\beta}\right|\sin\theta=20\times\dfrac{4}{5}=16$；

（2）① $\left|\overrightarrow{\alpha}\times\overrightarrow{\beta}\right|=\left|\overrightarrow{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{\beta}\right|\sin\theta=16\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\cos\theta=\pm\dfrac{3}{5}$，

② $\overrightarrow{\alpha}\bullet\overrightarrow{\beta}=\left|\overrightarrow{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{\beta}\right|\cos\theta=20\times\left(\pm\dfrac{3}{5}\right)=\pm12$.

6. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$均为单位向量，且满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，求$\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{c}+\vec{c}\bullet\vec{a}$.

【解析】考查单位向量概念，数量积的应用.

① $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$均为单位向量，则$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$；

② $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$两边右乘$\vec{b}$得，$\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{b}+\vec{c}\bullet\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{c}\bullet\vec{b}=-1$，
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$两边右乘$\vec{c}$得，$\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{c}+\vec{c}\bullet\vec{c}=0\Rightarrow\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{c}=-1$，
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$两边右乘$\vec{a}$得，$\vec{a}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{c}\bullet\vec{a}=0\Rightarrow\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{c}\bullet\vec{a}=-1$，

上面三式相加，得$\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{c}+\vec{c}\bullet\vec{a}=-\dfrac{3}{2}$

习题 9.3　空间的平面与直线

1. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面间夹角的余弦.

【解析】考查平面夹角的计算

① 平面法向量 $\vec{n}=(2,-2,1)$；

② xoy 面 $\overrightarrow{n_1}=(0,0,1)$，则 $\cos\theta_1=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\dfrac{1}{3}$；

xoz 面 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$，则 $\cos\theta_2=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{2}{3}$；

yoz 面 $\overrightarrow{n_3}=(1,0,0)$，则 $\cos\theta_3=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_3}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{n_3}\right|}=\dfrac{2}{3}$.

2. 求过点 $M_1(4,1,2)$ 和 $M_2(-3,5,-1)$ 且垂直于平面 π：$6x-2y+3z+7=0$ 的平面方程.

【解析】考查点法式方法构建平面方程

① $\overrightarrow{M_1M_2}=(-7,4,-3)$，$\vec{n}=(6,-2,3)$；

② 所求平面法向量 $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -7 & 4 & -3\\ 6 & -2 & 3\end{vmatrix}=(6,3,-10)$；

③ 所求平面方程为：$6(x-4)+3(y-1)-10(z-2)=0$，即 $6x+3y-10z-7=0$.

3. 求通过点 $(2,1,1)$ 且垂直于直线 $\begin{cases}x+2y-z+1=0\\ 2x+y-z=0\end{cases}$ 的平面方程.

【解析】考查点法式方法构建平面方程

① $\overrightarrow{n_1}=(1,2,-1)$，$\overrightarrow{n_2}=(2,1,-1)$；

② 所求平面法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-1,-1,-3)=-(1,1,3)$；

③ 所求平面方程为：$(x-2)+(y-1)+3(z-1)=0$，即 $x+y+3z-6=0$.

4. 一直线过点 $(-1,2,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases}x+y-2z-1=0\\ x+2y-z+1=0\end{cases}$，求该直线的方程.

【解析】考查点向式方法构建直线方程

① $\overrightarrow{n_1}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,2,-1)$；

② $\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=(3,-1,1)$；

③ 所求直线方程为 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.

5.一直线过点 $(1,2,1)$，又与直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=-z$ 相交且垂直于直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$，求该直

线

方程.

【解析】直线方程的计算

① $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=-z$，$P_1(0,0,0)$，$\overline{s_1}=(2,1,-1)$；

② $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$，$P_2(1,0,-1)$，$\overline{s_2}=(3,2,1)$；

③ 设所求直线$\vec{s}=(a,b,c)$，因为$\vec{s}\perp\overline{s_2}\Rightarrow\vec{s}\cdot\overline{s_2}=0$，即$3a+2b+c=0$ （*1）

④ 记$P(1,2,1)$,所求直线与$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=-z$相交$\Leftrightarrow(\overline{PP_1},\vec{s},\overline{s_1})=0$，而$\overline{PP_1}=(-1,-2,-1)$，即

$\begin{vmatrix}-1 & -2 & -1\\ a & b & c\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$，即 $a-b+c=0$ （*2）

⑤ （*1）与（*2）联立，得$a=-\frac{3}{2}b,c=\frac{5}{2}b$，则$a:b:c=-3:2:5$；

⑥ $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{5}$为所求直线方程.

6. 求直线$\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程.

【解析】考查平面束方程的应用

① 设过直线的平面束方程为Π_1：$(2x-4y+z)+\lambda(3x-y-2z-9)=0$，化简得

$(2+3\lambda)x-(4+\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$，则$\overline{n_1}=(2+3\lambda,-4-\lambda,1-2\lambda)$；

② 设已知平面方程$4x-y+z=1$为Π，因为$\Pi\perp\Pi_1$，则$\vec{n}\perp\overline{n_1}$，即

$4(2+3\lambda)+4+\lambda+(1-2\lambda)=0\Rightarrow\lambda=-\frac{13}{11}$，所以$\Pi_1$：$17x+31y-37z-117=0$；

③ 投影方程为：$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z=1\end{cases}$

习题 9.4　几种常见的二次曲面

1. 求以点 $A(3,2,1)$ 为球心，且与平面 $x+2y-3z=18$ 相切的球面方程.

【解析】考查点到平面的距离公式及球面方程.

① $R=\dfrac{|3+2\times2-3\times1-18|}{\sqrt{1+2^2+(-3)^2}}=\sqrt{14}$；

② 所求球面方程为：$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=14$.

2. 求下列旋转面的方程，并指出它的名称.

(1) 曲线 $\begin{cases} y=2x \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周；　　【解】 $y^2=4(x^2+y^2)$　锥面.

(2) 曲线 $\begin{cases} z^2=5x \\ y=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周；　　【解】 $5x=y^2+z^2$　抛物面.

(3) 曲线 $\begin{cases} x^2+z^2=9 \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周.　　【解】 $x^2+y^2+z^2=9$　球面.

4. 求两曲面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $z^2=x^2+y^2$ 的交线在 xoy 坐标面的投影曲线的方程，并作图.

【解析】投影曲面的计算

① $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow 2(x^2+y^2)=2 \Rightarrow x^2+y^2=1$ ，

② 投影曲线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$.

自 测 题

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）.

1. 设 $\overline{AB}=\{-3,0,4\},\overline{AC}=\{5,-2,-14\}$，则 $\angle BAC$ 的平分线上的单位向量是______.

【解析】本题思路不可直接用 $\overline{AB}+\overline{AC}$ 作为角平分线向量，因为平行四边形对角线未必为角平分线，所以正确方法是将 $\overline{AB},\overline{AC}$ 单位化后构造平行四边形，即菱形，而菱形的对角线为角平分线.

① $\overline{AB}^o=\dfrac{1}{5}(-3,0,4)$，$\overline{AC}^o=\dfrac{1}{15}(5,-2,-14)$；

② $\vec{a}=\overline{AB}^o+\overline{AC}^o=\left(-\dfrac{4}{15},-\dfrac{2}{15},-\dfrac{2}{15}\right)$；

③ $\vec{a}^o=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\dfrac{15}{\sqrt{24}}\left(-\dfrac{4}{15},-\dfrac{2}{15},-\dfrac{2}{15}\right)=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

2. 已知 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=5,\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3},\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b},\vec{d}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}$，若 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 垂直，则 $\lambda=$___.

【解析】$\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 垂直，则 $\vec{c}\cdot\vec{d}=0$，即

$$\begin{aligned}0=\vec{c}\cdot\vec{d}&=\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\lambda\vec{a}+17\vec{b}\right)=3\lambda\vec{a}\cdot\vec{a}+(51-\lambda)\vec{a}\cdot\vec{b}-17\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=3\lambda\left|\vec{a}\right|^2+(51-\lambda)\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\frac{2\pi}{3}-17\left|\vec{b}\right|^2\\&=12\lambda-5(51-\lambda)-425=17\lambda-780\Rightarrow\lambda=40.\end{aligned}$$

3. 直线 $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 与平面 $2x+y-z-3=0$ 的夹角是______.

【解析】$\vec{s}=(-1,1,2)$，$\vec{n}=(2,1,-1)$，$\sin\theta=\left|\dfrac{-1\times2+1\times1+2\times(-1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}\right|=\dfrac{1}{2}$，得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

4. 过直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 且平行于直线 $L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程为______________.

【解析】$\vec{s}_1=(1,0,-1),\vec{s}_2=(2,1,1)$, $\vec{n}=\overline{s_1}\times\overline{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=(1,-3,1)$，所求平面方程为 $x-3y+z+2=0$.

5. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=0\end{cases}$ 在 xoy 坐标面上的投影曲线为___________.

【解析】方程组联立消 z，得 $\begin{cases}2x^2+2y^2+2xy=1\\z=0\end{cases}$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 下列方程表示的直线中与直线 $L:\begin{cases}x+y+z=1\\x-y-2z=1\end{cases}$ 平行的是（　）.

$(A)\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{-2}$　　$(B)\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{-2}$

$(C)\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{2}$　　$(D)\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{2}$

【解析】$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}=(-1,3,-2)$,

7. 两直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$ 的夹角为（　　）.

$(A)\dfrac{\pi}{6}$　　　　$(B)\dfrac{\pi}{4}$　　　　$(C)\dfrac{\pi}{3}$　　　　$(D)\dfrac{\pi}{2}$

【解析】L_1 的方向向量 $\overline{s_1}=(1,-2,1)$，L_2 的方向向量 $\overline{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1,-1,2)$，

夹角余弦 $\cos\theta=\dfrac{|1\times(-1)+(-2)\times(-1)+1\times 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$，则 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，所以答案选 C.

8. 设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 L（　　）.

(A)平行于π　　　　(B)在π上　　　　(C) 垂直于π　　　　(D)与π斜交

【解析】直线 L 的方向向量 $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -10\end{vmatrix}=-7(4,-2,1)$，平面法向量 $\vec{n}=(4,-2,1)$，所以答案选 C

9. 直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 与直线 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ 的位置关系是（　　）.

(A)平行　　　　(B)相交于一点　　　　(C)异面　　　　(D)重合

【解析】$P_1(1,3,0)$，$P_2(0,0,-2)$，$\overline{P_2P_1}=(1,3,2)$，$\overline{s_1}=(4,-2,1)$，$\overline{s_2}=(0,2,1)$，则 $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$，

由定理可知两直线相交，所以答案选 B.

10. xoz 坐标面上曲线 $z=e^x\ (x>0)$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程为（　　）.

$(A)\sqrt{y^2+z^2}=e^x$　　　　$(B)y^2+z^2=e^x$　　　　$(C)z=e^{x^2+y^2}$

$(D)z=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

【解析】由选择曲面方程构造公式，得答案选 D.

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11. 设 $\vec{a}=\{3,0,4\},\vec{b}=\{-1,2,-2\}$，求与向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 均垂直的单位向量.

【解析】① $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直向量记为 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 0 & 4\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=(-8,2,6)=2(-4,1,3)$；

② $\vec{c}^{\,0}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{26}}(-4,1,3)$ 即为所求.

12. 设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

【解析】① $O(0,0,0),P(6,-3,2)$，则 $\overline{OP}=(6,-3,2)$，$\vec{n}_1=(4,-1,2)$；

② 所求平面法向量 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=(-4,-4,6)=-2(2,2,-3)$；

③ $2x+2y-3z=0$ 为所求平面方程.

13. 过平面 $\pi_1: x+28y-2z+17=0$ 和 $\pi_2: 5x+8y-z+1=0$ 的交线，作球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的切平面，求该切平面方程.

【解析】① 过平面 Π_1 与 Π_2 交线的平面束方程为 $(x+28y-2z+17)+\lambda(5x+8y-z+1)=0$，即

$$(1+5\lambda)x+(28+8\lambda)y-(2+\lambda)z+17+\lambda=0；$$

② 由题意，球面的球心到切平面距离为半径 1，即

$$\frac{|17+\lambda|}{\sqrt{(1+5\lambda)^2+(28+8\lambda)^2+[-(2+\lambda)]^2}}=1,$$

化简得 $89\lambda^2+428\lambda+500=0$，解得：$\lambda=-\frac{250}{89}$ 或 -2；

③ 切平面方程为：$387x-164y-24z-421=0$ 或 $3x-4-5=0$.

14. 求过点 $M_0(2,1,3)$ 且与直线 $l:\begin{cases}2x+y+2z=0\\ x+y-3=0\end{cases}$ 垂直相交的直线方程.

【解析】① 设所求直线方向向量 $\vec{s}=(a,b,c)$；

② l 的方向向量 $\overline{s_1}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}=(-2,2,1)$；

③ $\begin{cases}2x+y+2z=0\\ x+y-3=0\end{cases}\Rightarrow x+2z+3=0$，令 $z=1$，则 $x=-5, y=8$，交点记为 $M_1(-5,8,1)$；

④ 两直线垂直得：$-2a+2b+c=0$；

两直线相交得：$\left(\overline{M_0M_1},\vec{s},\overline{s_1}\right)=\begin{vmatrix}-7 & 7 & -2\\ a & b & c\\ -2 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$，即 $a+b=0$；

两式整理得：$a=-b, c=-4b$；

⑤ 则 $a:b:c=-1:1:(-4)$；

⑥ 所求直线方程为：$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-4}$.

★★15. 设 l_1,l_2 为两条共面直线，l_1 的方程为 $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}$；$l_2$ 通过点 $(2,-3,-1)$，且与 x 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{3}$，与 z 轴正向夹角为锐角，求 l_2 的方程.

【解析】① 若 $l_1//l_2$，则 l_1 的方向向量 $(1,2,2)$ 也为 l_2 的方向向量，则 l_2 与 x 轴夹角余弦为 $\frac{(1,2,2)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{1+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}$，不可能为 $\frac{\pi}{3}$，所以 l_1 与 l_2 不平行；

② l_1 与 l_2 只能相交. 不妨令交点为 P，所以 P 在 l_1 上，由 l_1 的参数方程可设 P 的坐标为 $(t+7,2t+3,2t+5)$，又 l_2 过点 $Q(2,-3,-1)$，则 $\overline{QP}=(t+5,2t+6,2t+6)$ 平行于 l_2，取 $(\lambda c,c,c)$ 为 l_2 的方向向量，其中 $c=2t+6$，则 $\lambda=\frac{t+5}{2t+6}$；又 l_2 与 x 轴夹角为锐角，取 $c=1$，又夹角为 $\frac{\pi}{3}$，

即 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{(\lambda,1,1)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{\lambda^2+1+1}}=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+2}}\Rightarrow\lambda=\frac{\sqrt{6}}{3}$；

所以 l_2 的方向向量为 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},1,1\right)$，其对应的方程为 $\frac{x-2}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+1}{1}$，化简得 $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{\sqrt{6}}=\frac{z+1}{\sqrt{6}}$.

16. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $y+z=1$ 的交线在 xoy 坐标面上的投影方程，并确定交线类型.

【解析】① $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ y+z=1 \end{cases}$ 消 z 得 $1-y=x^2+y^2$，即 $x^2+y^2+y=1 \Rightarrow x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$；

②投影方程为 $\begin{cases} x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \\ z=0 \end{cases}$，为 xoy 面上的一个圆.

第十章　多元函数微分学

习题 10.1　多元函数的基本概念

1. 已知 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

【解析】$\begin{cases}x+y=u\\ \dfrac{y}{x}=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u}{1+v}\\ y=\dfrac{uv}{1+v}\end{cases}\Rightarrow f(u,v)=\left(\dfrac{u}{1+v}\right)^2-\left(\dfrac{uv}{1+v}\right)^2=\dfrac{u^2(1-v)}{(1+v)^2}=\dfrac{u^2(1-v)}{1+v}$，则 $f(x,y)=\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$.

2. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\cdot a=a$；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy\left(\sqrt{xy+4}+2\right)}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\sqrt{xy+4}+2\right)=4$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

【解析】因为 $0\le\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{2xy}}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{xy}$，由夹边定理可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

3. 证明下列极限不存在.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

【解析】①沿 $y=x$ 的路径趋于 $(0,0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{x^4}=1$;

② 沿 y 轴趋于 $(0,0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$;

③ 沿两条不同路径趋于 $(0,0)$ 点，所得极限存在但不相等，所以原式极限不存在.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

【解析】$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{\substack{y=kx^2\\x\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^4}{(1+k^2)x^4}=\dfrac{k}{1+k^2}$，沿不同路径极限存在不唯一，所以原式极限不存在.

习题 10.2　偏导数与全微分

1. 求下列函数的一阶偏导数.

$(1)\ z=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$；

【解析】① $z=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$；

② $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{y^2-x^2}{xy^2}$.

$(2)\ z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$；

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x\right]=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$(3)\ u=x^{\frac{y}{z}}$；

【解析】$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\left(x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\right)\cdot\dfrac{1}{z}=\dfrac{\ln x}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\right)\cdot\left(-\dfrac{y}{z^2}\right)=-\dfrac{y\ln x}{z^2}\cdot x^{\frac{y}{z}}$.

$(4)\ u=\arctan(x-y)^2$.

【解析】$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{1+(x-y)^4}\cdot 2(x-y)\cdot 1=\dfrac{2(x-y)}{1+(x-y)^4}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{1+(x-y)^4}\cdot 2(x-y)\cdot(-1)=-\dfrac{2(x-y)}{1+(x-y)^4}$.

2. 设 $f(x,y,z)=(z-a^{xy})\sin\ln x$，求 $f(x,y,z)$ 在点 $(1,0,2)$ 处的 3 个一阶偏导数.

【解析】

方法一：先分别对 x,y,z 求出偏导函数，然后在代值；

方法二：亦可以用偏导数定义的方法求之；

方法三：$f'_x(1,0,2)=\left[\dfrac{d}{dx}f(x,0,2)\right]_{x=1}=\left[\dfrac{d}{dx}\sin(\ln x)\right]_{x=1}=\left[\dfrac{1}{x}\cos(\ln x)\right]_{x=1}=1$；

$$f'_y(1,0,2)=\left[\frac{d}{dy}f(1,y,2)\right]_{y=1}=\left[\frac{d}{dy}(0)\right]_{y=1}=0；$$

$$f'_z(1,0,2)=\left[\frac{d}{dz}f(1,0,z)\right]_{z=1}=\left[\frac{d}{dz}(0)\right]_{z=1}=0.$$

3. 设 $u=e^{\frac{x}{y^2}}$，证明 $2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

【解析】① $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{\frac{x}{y^2}}\cdot\dfrac{1}{y^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{\frac{x}{y^2}}\cdot x\cdot(-2)\cdot\dfrac{1}{y^3}=-\dfrac{2x}{y^3}e^{\frac{x}{y^2}}$；

② $2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x\cdot e^{\frac{x}{y^2}}\cdot\dfrac{1}{y^2}-y\cdot\dfrac{2x}{y^3}e^{\frac{x}{y^2}}=0$.

4. 设 $z=x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

【解析】① $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y=1+\ln(xy)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{xy}\cdot y=\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0$；

② $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=-\dfrac{1}{y^2}$.

5. 设 $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【解析】

① $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\dfrac{1\cdot(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\dfrac{(1-xy)-(x+y)(-x)}{(1-xy)^2}=\dfrac{1}{1+y^2}$；

② $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2y}{(1+y^2)^2}$；

③ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0.$

6. 求下列函数的全微分.

$(1)\ z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$

【解析】① $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\dfrac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$；

② $dz=\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$.

$(2)\ u=\ln\left(x^2-y^2+e^z\right)$

【解析】① $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2-y^2+e^z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-2y}{x^2-y^2+e^z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial z}=\dfrac{e^z}{x^2-y^2+e^z}$；

② $dz=\dfrac{2xdx-2ydy+e^z dz}{x^2-y^2+e^z}$.

7. 设 $u=\left(\dfrac{y}{z}\right)^{\frac{1}{x}}$，求 $du(1,1,1)$.

【解析】① $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(\dfrac{y}{z}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\ln\dfrac{y}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=0$；

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{y}{z}\right)^{\frac{1}{x}-1}\cdot\dfrac{1}{z}$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=1$；

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{y}{z}\right)^{\frac{1}{x}-1}\cdot\left(-\dfrac{y}{z^2}\right)$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=-1$；

② $du(1,1,1)=dy-dz$.

习题 10.3　多元复合函数微分法

1. 求下列复合函数的偏导数.

$(1)\, z=\sin(2u+3v), u=xy, v=x^2+y^2$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\cos(2u+3v)\cdot 2\cdot y+\cos(2u+3v)\cdot 3\cdot 2x=\cos(2xy+3x^2+3y^2)\cdot(2y+6x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\cos(2u+3v)\cdot 2\cdot x+\cos(2u+3v)\cdot 3\cdot 2y=\cos(2xy+3x^2+3y^2)\cdot(2x+6y).$$

$(2)\, z=u^2\ln v$，其中$u=\dfrac{x}{y}, v=3x-2y$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^3}{v}\cdot 3=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x}{(3x-2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)=-\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

2. 设$z=f(xy,\dfrac{x}{y})+g(\dfrac{y}{x})$，其中$f$具有 二阶连续偏导数，$g$具有二阶连续导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解析】① $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y}+g'\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$,

② $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial z}{\partial y}\left[f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y}+g'\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)\right]$

$$=y\left[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]+f_1'+\left[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]\cdot\frac{1}{y}+f_2'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+g''\cdot\frac{1}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+g'\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''+f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{y}{x^3}g''-\frac{1}{x^2}g'.$$

3. 设$z=\dfrac{y}{f(u)}$，其中$u=x^2-y^2$，$f(u)$为可导函数，求$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【解析】① $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{yf'(u)}{f^2(u)}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{2xyf'(u)}{f^2(u)}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{f(u)}-\dfrac{yf'(u)}{f^2(u)}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{f(u)}+\dfrac{2y^2f'(u)}{f^2(u)}$, ② $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf'(u)}{f^2(u)}+\frac{1}{yf(u)}+\frac{2yf'(u)}{f^2(u)}=\frac{1}{yf(u)}=\frac{z}{y^2}$.

4. 设 $f(u,v,w)$ 具有二阶连续偏导数，求函数 $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$ 的二阶连续偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 dz.

【解析】① $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\cos x+f_3'\cdot e^{x+y}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot(-\sin y)+f_3'\cdot e^{x+y}$,

② $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f_1'\cdot\cos x+f_3'\cdot e^{x+y}\right)$

$=-\sin x\cdot f_1'+\cos x\cdot\left(f_{11}''\cdot\cos x+f_{13}''\cdot e^{x+y}\right)+e^{x+y}\cdot f_3'+e^{x+y}\cdot\left(f_{31}''\cdot\cos x+f_{33}''\cdot e^{x+y}\right)$

$=-\sin x\cdot f_1'+e^{x+y}\cdot f_3'++\cos^2 x\cdot f_{11}''+2\cos x f_{13}''\cdot e^{x+y}+e^{2(x+y)}\cdot f_{33}''$.

③ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'\cdot\cos x+f_3'\cdot e^{x+y}\right)$

$=\cos x\cdot\left[f_{12}''\cdot(-\sin y)+f_{13}''\cdot e^{x+y}\right]+e^{x+y}\cdot f_3'+e^{x+y}\cdot\left[f_{32}''\cdot(-\sin y)+f_{33}''\cdot e^{x+y}\right]$

$=e^{x+y}\cdot f_3'-\cos x\cdot\sin y\cdot f_{12}''+\cos x\cdot e^{x+y}\cdot f_{13}''-\sin y\cdot e^{x+y}\cdot f_{23}''+f_{33}''\cdot e^{2(x+y)}$

④ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[f_1'\cdot(-\sin y)+f_3'\cdot e^{x+y}\right]$

$=-\cos y\cdot f_2'-\sin y\left[f_{22}''\cdot(-\sin y)+f_{23}''\cdot e^{x+y}\right]+e^{x+y}\cdot f_3'+e^{x+y}\cdot\left[f_{32}''\cdot(-\sin y)+f_{33}''\cdot e^{x+y}\right]$

$=-\cos y\cdot f_2'+e^{x+y}\cdot f_3'+\sin^2 y\cdot f_{22}''-2e^{x+y}\cdot\sin y\cdot f_{23}''+f_{33}''\cdot e^{2(x+y)}$

⑤ $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(f_1'\cdot\cos x+f_3'\cdot e^{x+y}\right)dx+\left(f_1'\cdot(-\sin y)+f_3'\cdot e^{x+y}\right)dy$

5. 设 $u=f(r),r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，若 u 满足调和方程 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，试求函数 u.

【解析】① $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}f'(r)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{r}f'(r)$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{r}f'(r)$,

② $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[\frac{x}{r}f'(r)\right]_x'=\frac{1}{r}f'(r)+x\left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{x}{r}f'(r)+\frac{x}{r}f''(r)\cdot\frac{x}{r}=\frac{1}{r}f'(r)-\frac{x^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r)$ ；

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r}f'(r)-\frac{y^2}{r^3}f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f''(r)$ ； $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r}f'(r)-\frac{z^2}{r^3}f'(r)+\frac{z^2}{r^2}f''(r)$ ；

③ $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2}{r}f'(r)+f''(r)=0$，

解微分方程得：$\dfrac{f''(r)}{f'(r)}=-\dfrac{2}{r}\Rightarrow \ln f'(r)=-2\ln r+\ln C_1\Rightarrow f'(r)=\dfrac{C_1}{r^2}\Rightarrow f(r)=-\dfrac{C_1}{r}+C_2$；

即 $u=-\dfrac{C_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+C_2$， C_1,C_2 为任意实数.

习题 10.4　隐函数求导法则

1. 设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解析】① $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=\frac{x}{z}-\ln z+\ln y$，

② $F_x'=\frac{1}{z}$，$F_y'=\frac{1}{y}$，$F_z'=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}$，

③ $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}}=\frac{x}{x+z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

2. 设 $e^z-xyz=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解析】① $F(x,y,z)=e^z-xyz$，

② $F_x'=-yz$，$F_z'=e^z-xy$，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{yz}{e^z-xy}$，

③

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(e^z-xy)-yz\left(e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{\left(e^z-xy\right)^2}=\frac{y\cdot\frac{yz}{e^z-xy}\cdot(e^z-xy)-yz\left(e^z\cdot\frac{yz}{e^z-xy}-y\right)}{\left(e^z-xy\right)^2}$$

$$=\frac{2y^2z(e^z-xy)-y^2z^2e^z}{\left(e^z-xy\right)^3}.$$

3. 设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是由方程组 $\begin{cases}u^2-v+x=0\\u+v^2-y=0\end{cases}$ 确定的 x,y 的隐函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

【解析】方程组两边对 x,y 分别求微分，得

$$\begin{cases}2udu-dv+dx=0\\du+2vdv-dy=0\end{cases}$$

消去 du：$(4uv+1)dv=-dx+2udy\Rightarrow dv=\frac{-dx+2udy}{4uv+1}\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2u}{4uv+1}$；

消去 dv：$(4uv+1)du=-2vdx+dy\Rightarrow du=\frac{-2vdx+dy}{4uv+1}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2v}{4uv+1}$.

4. 设 $\begin{cases}x=e^u+u\sin v\\y=e^u-u\cos v\end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

【解析】方程组两边对 x,y 分别求偏导，得

$$1=e^{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sin v+u\cdot\cos v\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1)$$

$$0=e^{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin v+u\cdot\cos v\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2)$$

$$0=e^{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos v+u\cdot\sin v\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3)$$

$$1=e^{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos v+u\cdot\sin v\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (4)$$

（1）（3）联立，解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^{u}(\sin v-\cos v)+1},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-e^{u}}{u\left[e^{u}(\sin v-\cos v)+1\right]};$$

（2）（4）联立，解得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^{u}(\sin v+\cos v)+1},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\sin v+e^{u}}{u\left[e^{u}(\sin v-\cos v)+1\right]}.$$

5. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y=y(x),z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^{z}-xz=0$ 所确定，求 $\dfrac{du}{dx}$.

【解析】① $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{dx}$，

② $e^{xy}-y=0\Rightarrow e^{xy}(y+xy')-y'=0\Rightarrow y'=\dfrac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}$，

③ $e^{z}-xz=0\Rightarrow e^{z}\cdot z'-z-xz'=0\Rightarrow z'=\dfrac{z}{e^{z}-x}$，

④ $\dfrac{du}{dx}=f_x'+f_y'\cdot\dfrac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}+f_z'\cdot\dfrac{z}{e^{z}-x}$.

6. 设 $y=g(x,z)$，而 z 是由方程 $f(x-z,xy)=0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 g,f 具有一阶偏导连续，$f_1^{'}-xf_2^{'}g_2^{'}\neq 0$，求 $\dfrac{dz}{dx}$.

【解析】$f(x-z,xy)=0$ 两边对 x 求导，即

$$f_1'\cdot\left(1-\frac{dz}{dx}\right)+f_2'\cdot\left[y+x\left(g_1'+g_2'\cdot\frac{dz}{dx}\right)\right]=0,$$

化简得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{f_1'+yf_2'+xf_2'\cdot g_2'}{f_1'-xf_2'\cdot g_2'}.$$

习题 10.5　偏导数在几何上的应用

1. 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，求与平面 $x+2y+z+4=0$ 平行的切线方程.

【解析】切点 P 对应参数为 t_0，切向量 $\overline{T}=(1,-2t,3t^2)\big|_{t=t_0}=(1,-2t_0,3t_0^2)$ 与 $\vec{n}=(1,2,1)$ 垂直，即

$$1-4t_0+3t_0^2=0 \Rightarrow t_0=1 \text{ 或 } \frac{1}{3},$$

$\overline{T_1}=(1,-2,3)$ 或 $\overline{T_2}=\left(1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，则切线方程为：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3} \text{ 或 } \frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}.$$

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在 $M(1,1,1)$ 处的切线与法平面方程.

【解析】方程组两边对 x 求导，得 $\begin{cases} 2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}-3=0 \\ 2-3\cdot\dfrac{dy}{dx}+5\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}=3-2x \\ 3\cdot\dfrac{dy}{dx}-5\cdot\dfrac{dz}{dx}=2 \end{cases}$

两式联立解得

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{15-10x+4z}{6z+10y} \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{9-6x-4y}{6z+10y} \end{cases}$$

则 $\overline{T}\big|_{(1,1,1)}=\left(1,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}\right)\Bigg|_{(1,1,1)}=\left(1,\dfrac{9}{16},-\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{1}{16}(16,9,-1)$，

即切线方程为：$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$；

法平面方程为：$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$，化简得 $16x+9y-z-24=0$.

3. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使得曲面在该点的法线垂直于平面 $x+3y+z=0$，并求法线方程.

【解析】设该点坐标 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，该点的法向量为 $\vec{n}\big|_{P_0}=(-y_0,-x_0,1)$，

记平面 $x+3y+z=0$ 的法向量为 $\overline{n_1}=(1,3,1)$，由题意可知 $\vec{n}\big|_{P_0} // \vec{n}$，则 $\dfrac{-y_0}{1}=\dfrac{-x_0}{3}=1$，解

$$x_0=-3, y_0=-1, z_0=x_0y_0=3,$$

所以 $P_0(-3,-1,3)$，$\vec{n}\big|_{P_0}=(1,,3,1)$，

则法线方程为：$\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

4. 设直线$l_1:\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$在平面$\pi$上，而平面$\pi$与曲面$z=x^2+y^2$相切于点$(1,-2,5)$，求$a,b$之值.

【解析】设$F(x,y,z)=x^2+y^2-z$，则曲面$S:z=x^2+y^2$在$(1,,-2,5)$处的法向量为

$$\left(F_x',F_y',F_z'\right)\Big|_{(1,-2,5)}=\left(2x,2y,-1\right)\Big|_{(1,-2,5)}=(2,-4,-1),$$

由题意可知平面π的方程为：$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$，化简得$2x-4y-z-5=0$；

由l_1的方程可知$y=-b-x$，所以$z=x+ay-3=x+a(-b-x)-3=(1-a)x-ab-3$代入平面$\pi$方程，得

$$2x-4(-b-x)-(1-a)x+ab+3-5=0,$$

化简得$(5+a)x+4b+ab-2=0$，即$\begin{cases}5+a=0\\4b+ab-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\b=-2\end{cases}$.

习题 10.7 多元函数的极值

1. 求函数 $z=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$ 的极值.

【解析】（1）$\begin{cases} z_x'=2e^{2x}(x+y^2+2y)+e^{2x}=e^{2x}[2x+2y^2+4y+1]=0 \\ z_y'=e^{2x}(2y+2)=0\Rightarrow y=-1 \end{cases}$，得驻点 $P\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$；

（2）$A=z''_{xx}=e^{2x}(2x+2y^2+4y+2)$，$B=z''_{xy}=4e^{2x}(y+1)$，$C=z''_{yy}=2e^{2x}$；

（3）$A\big|_P=2e$，$B\big|_P=0$，$C\big|_P=2e$；

（4）$B^2-AC=-4e^2<0$，$A\big|_P=2e>0$，则 $f_{极小值}(P)=-\dfrac{e}{2}$.

2. 求函数 $z=x^2y\left(4-x-y\right)$ 在 $x=0,y=0$ 及 $x+y=6$ 围成的区域上的最大值及最小值.

【解析】（1）先求出函数在 D 内的所有驻点和偏导数不存在的点，解方程得：

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=xy(8-3x-2y)=0 \\ f_y'(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=x^2(4-x-2y)=0 \end{cases}$$

得到区域 D 内的唯一驻点(2,1)，且 $f(2,1)=4$；

（2）再求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的极值.

① 在边界 x=0 和 y=0 上 $f(x,y)$ =0;

② 在边界 $x+y$=6 上，即 y=6－x $(0\le x\le 6)$，于是

$$f(x,y)=-2x^2(6-x)\ \ (0\le x\le 6)$$

$f_x'=4x(x-6)+2x^2=0\Rightarrow x_1=0,x_2=4$，则驻点为 $(0,6),(4,2)$，则 $f(0,6)=0$，$f(4,2)=-64$；又 $f(6,0)=0$

（3）综上比较后得到 $f(2,1)=4$ 为最大值，$f(4,2)=-64$ 为最小值.

3. 求内接于半径为 R 的球且有最大体积的长方体.

【解析】设长方体的长、宽、高分别为 $2x,2y,2z$，则长方体体积 $V=8xyz\quad (x,y,z>0)$，而 x,y,z 应满 $x^2+y^2+z^2=R^2$；

构建拉格朗日辅助函数：$L(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$

$$\begin{cases} L_x'=8yz+2\lambda x=0 \\ L_y'=8xz+2\lambda y=0 \\ L_z'=8xy+2\lambda z=0 \\ L_\lambda'=x^2+y^2+z^2-R^2=0 \end{cases}$$

上述方程满足轮换对称式，则可知 $x=y=z$ 代入最后一个方程，解得 $x=y=z=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$，且 $V_{\max}=\dfrac{8}{3\sqrt{3}}R^3$.

4. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线为一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.

【解析】设从原点到椭圆上任一点 (x,y,z) 的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

构建拉格朗日辅助函数：$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 & (1) \\ L'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 & (2) \\ L'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 & (3) \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 & (4) \\ L'_\mu = x + y + z - 1 = 0 & (5) \end{cases}$$

由（1）（2）推出 $x = y$ 代入（4）（5）得 $2y^2 - z = 0, 2y + z - 1 = 0$，联立解得

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, z = 2 \mp \sqrt{3},$$

则 $d_{\min}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right) = \sqrt{9-5\sqrt{3}}$，$d_{\max}\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right) = \sqrt{9+5\sqrt{3}}$.

自 测 题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$_______.

【解析】答案是 0. 利用有界量乘无穷小量仍为无穷小量.

2. 设 $z=e^{\sin xy}$，则 $dz=$______.

【解】$dz=e^{\sin xy}\cdot\cos xy\cdot(ydx+xdy)$.

3. 设 $z=z(x,y)$ 可微，且满足 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$，且 $z\left(x,x^2\right)=1$，则 $z(x,y)=$______.

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y\Rightarrow z=x^2y+y^2+\varphi(x)$，又 $z\left(x,x^2\right)=1$，得 $\varphi(x)=1-2x^4$，则

$z(x,y)=x^2y+y^2+1-2x^4$.

4. 设 $f(x,y,z)=e^xyz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则 $f_x'(0,1,-1)=$______.

【解析】$f_x'=e^xyz^2+e^xy\cdot2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$；下只要求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 即可；

方程 $x+y+z+xyz=0$ 两边对 x 求偏导，得 $1+z_x'+yz+xyz_x'=0$，代值得 $z_x'\big|_{(0,1,-1)}=0$，进而得 $f_x'(0,1,-1)=1$.

5. 函数 $z=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值是______.

【解析】按照无条件极值的计算方法，计算得极值为 0.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 设 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则函数 z 在点 $(0,0)$ 处（ ）.

(A) 不连续 (B) 连续，但偏导数 $z_x'(0,0)$ 和 $z_y'(0,0)$ 不存在

(C) 连续且偏导数 $z_x'(0,0)$ 和 $z_y'(0,0)$ 都存在，但不可微 (D) 可微

【解析】答案选 C. 上课作为例题详细讲解过.

7. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 下面 4 条性质：

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续 ② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微 ④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有（ ）.

(A) ②⇒③⇒① (B) ③⇒②⇒①

(C)③⇒④⇒①　　　　　　　　(D)③⇒①⇒④

【解析】答案选择 A. 上课讲解过之间关系图

8. 已知函数 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$ 对任何 x 与 y 成立，则 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 等于（　）.

$(A)\ 2x-2y$　　$(B)\ 2x+2y$　　$(C)\ x+y$　　$(D)\ x-y$

【解析】由题意可知 $f(x,y)=xy$，得答案选 C.

9. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2) \\ y=4 \end{cases}$ 在 $P_0(2,4,5)$ 点的法平面方程为（　）.

$(A)x+y-7=0$　　$(B)x+z-7=0$　　$(C)x-y+7=0$　　$(D)x-z-7=0$

【解析】方程组两边分别对 x 求导，得 $\begin{cases} z'_x=\dfrac{1}{4}(2x+2y\cdot y'_x) \\ y'_x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x=\dfrac{1}{2}x \\ y'_x=0 \end{cases}$，则切向量 $\overline{T}=\left(1,0,\dfrac{1}{2}x\right)$，

切向量坐标为 $\overline{T}\Big|_{(2,4,5)}=(1,0,1)$，进而法平面方程为 $(x-2)+(z-5)=0$，化简得 $x+z-7=0$，答案选 B.

10. 函数 $f(x,y)=x^2-ay^2\ (a>0)$ 在 $(0,0)$ 处（　）.

(A)不取极值　　(B)取极小值　　(C)取极大值　　(D)是否取极值依赖于 a

【解析】由极值的定义可知正确答案选 A.

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11. 设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 $dz,\dfrac{\partial z^2}{\partial x\partial y}$.

【解析】（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-\arctan\frac{y}{x}}+(x^2+y^2)\cdot e^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\left[-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\right]\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=(2y-x)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$；

（2）$dz=(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}dx+(2y-x)e^{-\arctan\frac{y}{x}}dy$；

（3）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\right]=e^{-\arctan\frac{y}{x}}+(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\left[-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{x}\right]=\dfrac{y^2-x^2-xy}{x^2+y^2}e^{-\arctan\frac{y}{x}}$.

12. 设 $u=xy,v=\dfrac{x}{y},z=z(u,v)$ 对每个变量有二阶连续偏导数，计算 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【解析】（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=z'_1\cdot y+z'_2\cdot\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=z'_1\cdot x+z'_2\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=z'_1\cdot x-\dfrac{x}{y^2}z'_2$；

（2）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\cdot\left(z''_{11}\cdot y+z''_{12}\cdot\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{1}{y}\cdot\left(z''_{21}\cdot y+z''_{22}\cdot\dfrac{1}{y}\right)=y^2\cdot z''_{11}+2z''_{12}+\dfrac{1}{y^2}\cdot z''_{22}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\cdot\left[z''_{11}\cdot x+z''_{12}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]+\frac{2x}{y^3}\cdot z'_2-\frac{x}{y^2}\left[z''_{21}\cdot x+z''_{22}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]=x^2\cdot z''_{11}-\frac{2x^2}{y^2}z''_{12}+\frac{2x}{y^3}\cdot z'_2+\frac{x^2}{y^4}\cdot z''_{22}\ ;$$

（3）$x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4x^2\cdot z''_{12}-\dfrac{2x}{y}\cdot z'_2$.

13. 设$z=f\left(2x-y\right)+g\left(x,xy\right)$，其中$f\left(t\right)$二阶可导，$g\left(u,v\right)$具有连续二阶偏导数，求$\dfrac{\partial z^2}{\partial x\partial y}$.

【解析】（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot 2+g'_1\cdot 1+g'_2\cdot y=2f'+g'_1+yg'_2$；

（2）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(2f'+g'_1+yg'_2\right)'_y=2f''\cdot(-1)+g''_{12}\cdot x+g'_2+yg''_{22}\cdot x=-2f''+xg''_{12}+g'_2+xyg''_{22}$.

14. 设$u=u\left(x,y\right),v=v\left(x,y\right)$，由方程组$\begin{cases}u^2-v=3x+y\\u^2-2v^2=x-2y\end{cases}$确定，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

【解析】方程组两边同时取微分，得$\begin{cases}2udu-dv=3dx+dy & (1)\\2udu-4vdv=dx-2dy & (2)\end{cases}$，

$(1)\times 4v-(2)$ 得 $(8uv-2u)du=(12v-1)dx+(4v+2)dy\Rightarrow du=\dfrac{12v-1}{8uv-2u}dx+\dfrac{4v+2}{8uv-2u}dy$ ，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{12v-1}{8uv-2u},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{4v+2}{8uv-2u}.$$

$(1)-(2)$ 得 $(4v-1)dv=2dx+3dy\Rightarrow dv=\dfrac{2}{4v-1}dx+\dfrac{3}{4v-1}dy$ ，则

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2}{4v-1},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3}{4v-1}.$$

15. 设曲面$F\left(x,y,z\right)=0$在点$P\left(1,1,1\right)$处法向量为$\vec{n}=\{1,2,3\}$，求曲面$F\left(x,y^2,z^3\right)=0$在点$P\left(1,1,1\right)$处的法线与切平面方程.

【解析】（1）$F'_x(1,1,1)=1,F'_y(1,1,1)=2,F'_z(1,1,1)=3$ ，

（2）$\vec{n}=\left(F'_x\cdot 1,F'_y\cdot 2y,F'_z\cdot 3z^2\right)$，则$\vec{n}\big|_P=\left(1,4,9\right)$；

（3）法线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{9}$；

（4）切平面方程为：$(x-1)+4(y-1)+9(z-1)=0$ ，化简得$x+4y+9z-14=0$.

16. 在第一卦限内作椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的切平面，使该切平面与三个坐标平面围成四面体体积最小，求切点坐标.

【解析】（1）设$P_0(x_0,y_0,z_0)$为椭球面上任一点，x_0,y_0,z_0均大于零.

在P_0处法向量为$\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)\Big|_{P_0}=\left(\dfrac{2x_0}{a^2},\dfrac{2y_0}{b^2},\dfrac{2z_0}{c^2}\right)$，则切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0\ ,$$

化简为：$\dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y+\dfrac{z_0}{c^2}z=1$，所以切平面在三个坐标轴上的截距分别为$\dfrac{a^2}{x_0},\dfrac{b^2}{y_0},\dfrac{c^2}{z_0}$，于是由该切平面与三坐标轴围

成四面体体积为 $V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$.

（2）要使得 $V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6xyz}$ 取得最小值，只要 $u=xyz$ 取得最大值即可，故原问题转化为求 $u=xyz$ 在 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 下最大值.

构建拉格朗日辅助函数 $L=xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$，则

$$\begin{cases} L'_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0 & (1) \\ L'_y=zx+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0 & (2) \\ L'_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0 & (3) \\ L'_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 & (4) \end{cases}$$

由（1）（2）（3）联立，得 $-xyz=\dfrac{2\lambda x^2}{a^2}=\dfrac{2\lambda y^2}{b^2}=\dfrac{2\lambda z^2}{c^2}$，则 $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$，代入（4）中，得

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}},$$

所以 $u=xyz$ 在 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 处取最大值，故切点坐标为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$，$V_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}abc$.

第十一章　重积分

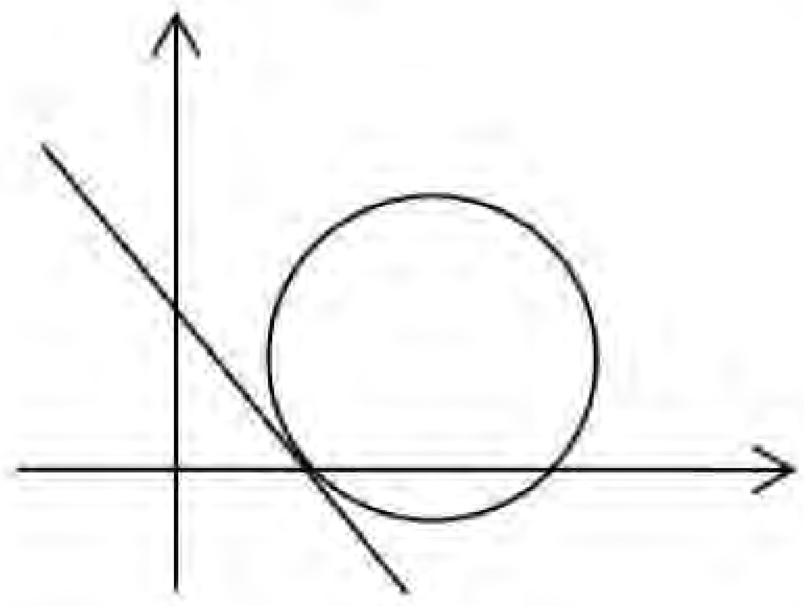
习题 11.1 二重积分的概念与性质

1. 利用二重积分的性质，比较下列二重积分的大小.

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，其中 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成.

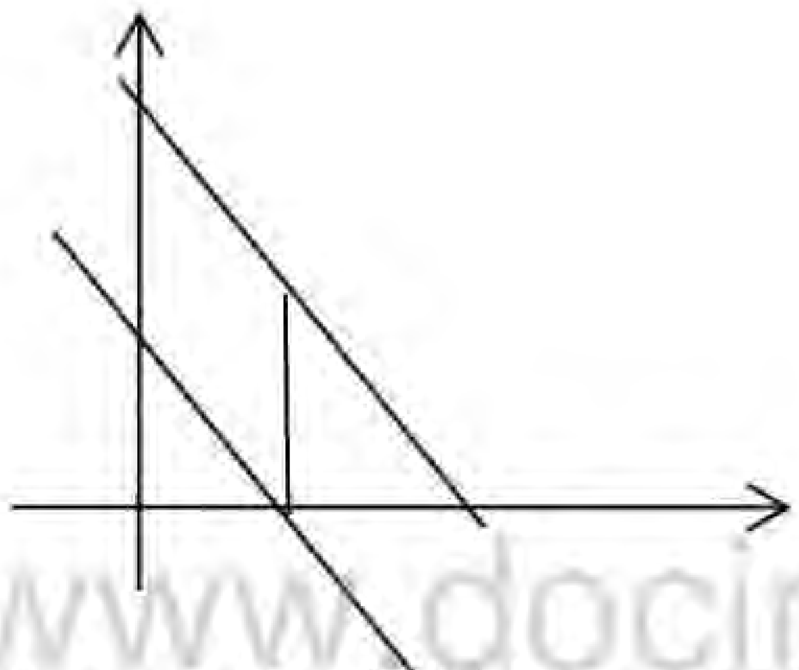
【解析】由题意及图像可知 $x+y=1$ 为切线，$x+y\ge 1$，则 $(x+y)^2\le (x+y)^3$，由保号性可知

$$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \le \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$$



(2) $\iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中 D 是由三角形闭区域，三顶点分别为 $(1,0)$，$(1,1)$，$(2,0)$.

【解析】



由图像可知 $1\le x+y\le 2<e$，则 $0\le \ln(x+y)<1$，所以 $\ln(x+y)\ge[\ln(x+y)]^2$，

则
$$\iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma \ge \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$$

2. 利用二重积分的性质估计下列积分的值.

(1) $I=\iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\}$.

【解析】(1) $S_D=\pi^2$；

(2) $f(x,y)=\sin^2 x\sin^2 y$，$0\le f(x,y)\le 1$，则 $I\in[0,\pi^2]$.

(2) $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9) d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$.

【解析】(1) $S_D=4\pi$；

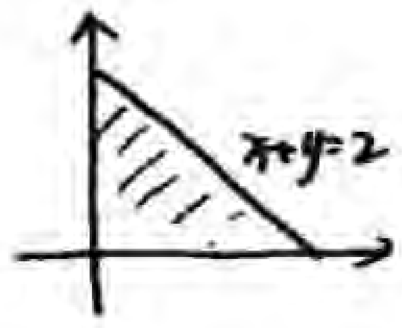
(2) $f(x,y)=x^2+4y^2+9$ 在 D 上最值问题，计算最大值为 25，最小值为 9；

(3) $I\in[36\pi,100\pi]$.

习题 11.2　二重积分的计算

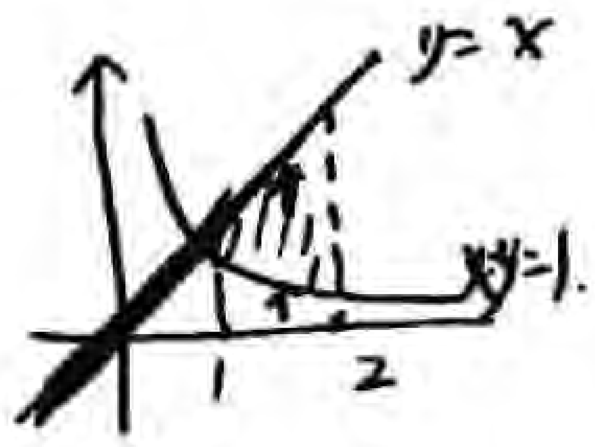
1. 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma$，其中 D 是由 $x=0, y=0$ 及直线 $x+y=2$ 所围成的区域.



【解析】原式$=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(3x+2y)\,dy=\dfrac{20}{3}$

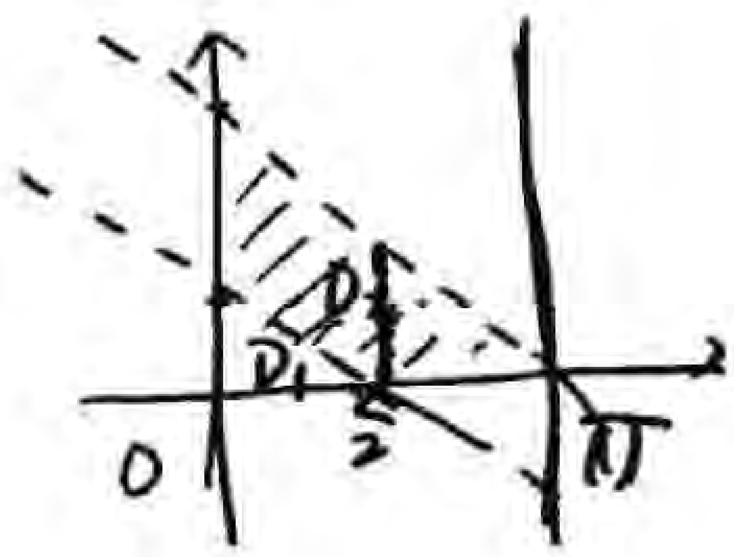
(2) $\iint\limits_D \dfrac{y^2}{x^2}dxdy$，其中 D 是由直线 $x=2, y=x$ 及双曲线 $xy=1$ 所围成的区域.



【解析】原式$=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\dfrac{y^2}{x^2}dy$

$$=\int_1^2\frac{1}{x^2}\cdot\left[\frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=\int_1^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)dx=\frac{27}{64}$$

(3) $\iint\limits_D |\cos(x+y)|dxdy$，其中 D 是由 $0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi-x$ 确定的区域.



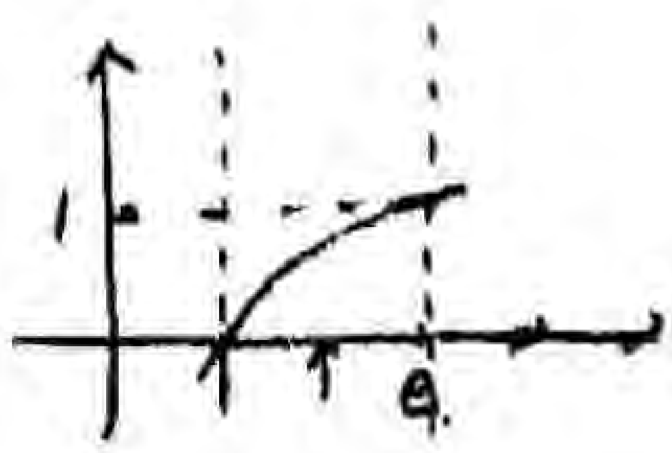
【解析】D 被 $x+y=\dfrac{\pi}{2}$ 划分为 D_1, D_2，如图所示

原式$=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)dxdy+\iint\limits_{D_2}[-\cos(x+y)]dxdy$

=

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy+\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi-x}[-\cos(x+y)\ ]dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_0^{\pi-x}[-\cos(x+y)\ ]dy=\pi$$

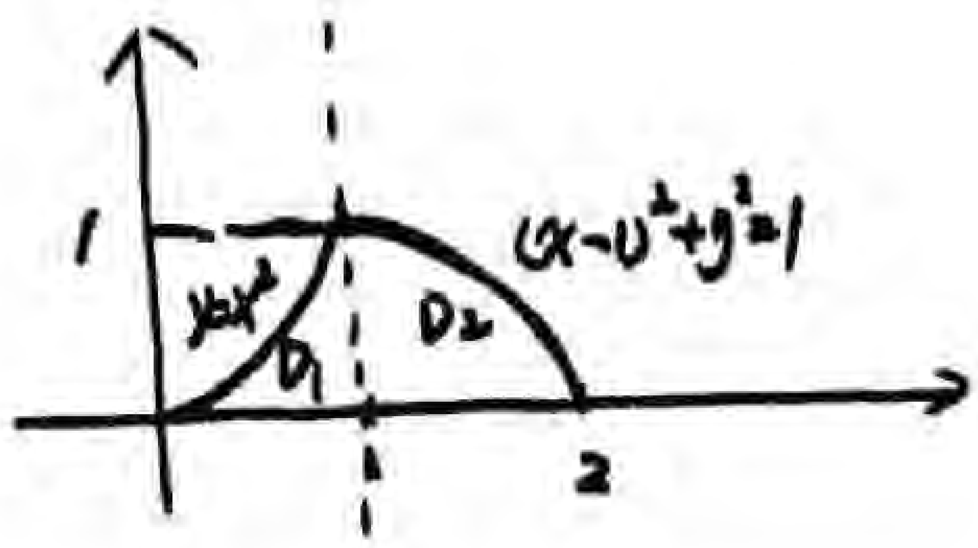
2. 画出下列二次积分所表示的二重积分的积分区域，并交换积分次序.



(1) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy$；

【解析】原式$=\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e}f(x,y)dx$

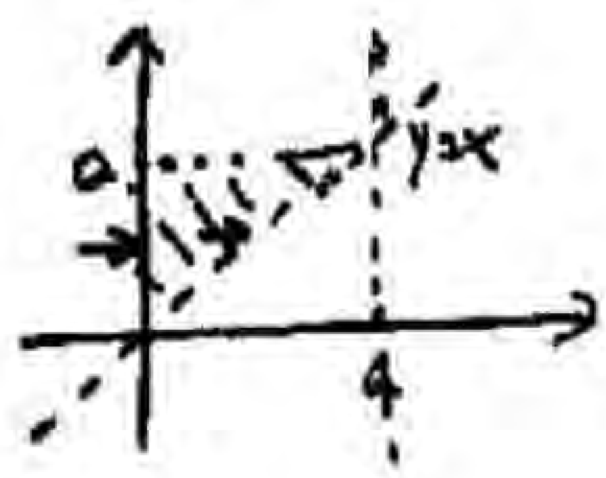
(2) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}f(x,y)dy$.



【解析】原式$=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

3. 计算下列二重积分，必要时交换积分次序.

(1) $\int_0^a dx\int_x^a e^{y^2}dy$；



【解析】$\int_0^a dx\int_x^a e^{y^2}dy=\int_0^a dy\int_0^y e^{y^2}dx=\int_0^a ye^{y^2}dy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a e^{y^2}dy^2=\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^a=\frac{1}{2}\left(e^{a^2}-1\right)$$

(2) $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}dy$.

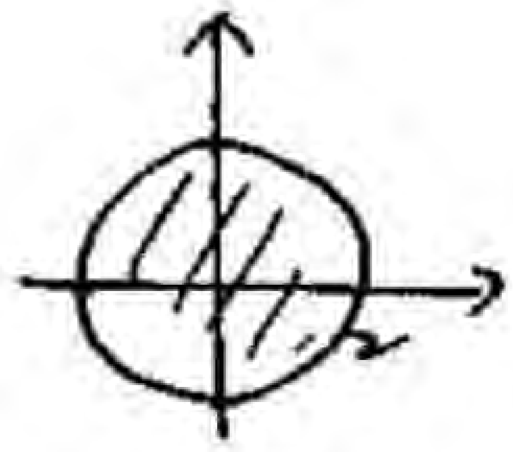
【解析】$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}dy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\dfrac{\sin y}{y}dy$

$$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy=\int_0^1(\sin y-y\sin y)dy$$

$$=\int_0^1 \sin y dy-\int_0^1 y\sin y dy=\sin 1-1$$

4. 选择适当的坐标系计算下列积分：

(1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的区域.



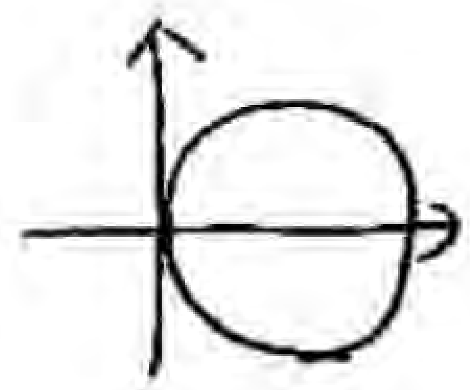
【解析】$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{r^2}\cdot rdr=2\pi\cdot\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^2=\pi\left(e^4-1\right)$

(2) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le x+y\right\}$.

【解析】$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta}(r\cos\theta+r\sin\theta)\cdot rdr$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta}r^2dr=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^4d\theta=\frac{\pi}{2}$$

(3) $\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le x\right\}$.



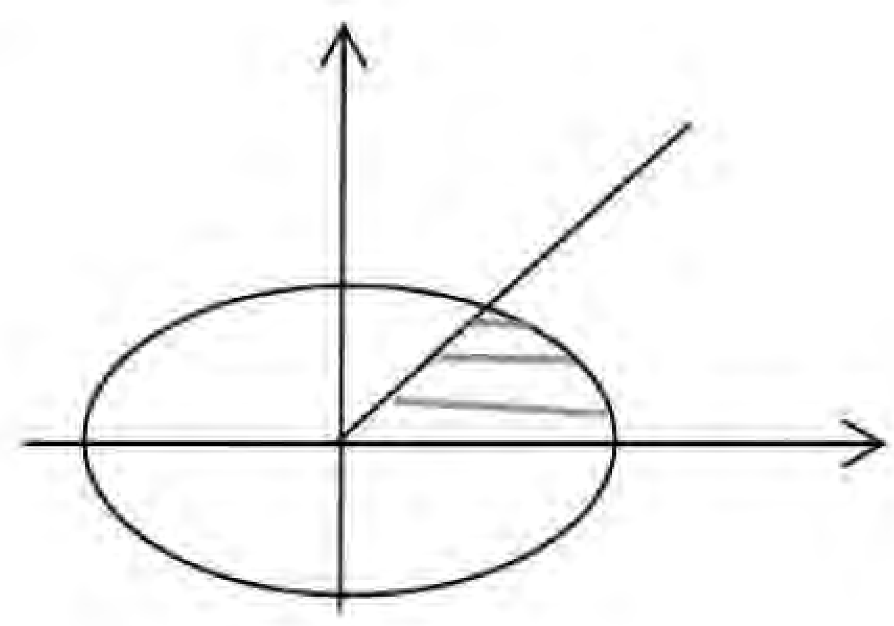
【解析】$\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2}\cdot rdr$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta\int_0^{\cos\theta}rdr=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$$

(4) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy$，其中 D 是由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4$ 和直线 $y=0,y=x$ 所围成的第一象限部分.

【解析】利用广义极坐标：$x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta$，其中 $0\le\theta\le\arctan\frac{a}{b},0\le r\le 2$；

则 $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr，\quad dxdy=rdrd\theta；$$



$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy=\int_0^{\arctan\frac{a}{b}}d\theta\int_0^2\sqrt{\frac{(ar\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(br\sin\theta)^2}{b^2}}\cdot abrdr$$

$$=\arctan\frac{a}{b}\int_0^2 abr^2dr=\frac{8}{3}ab\cdot\arctan\frac{a}{b}$$

(5) $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 由 $xy=a,xy=b,y^2=cx,y^2=dx$ 所围成的第一象限部分 $\left(0<a<b,0<c<d\right)$.

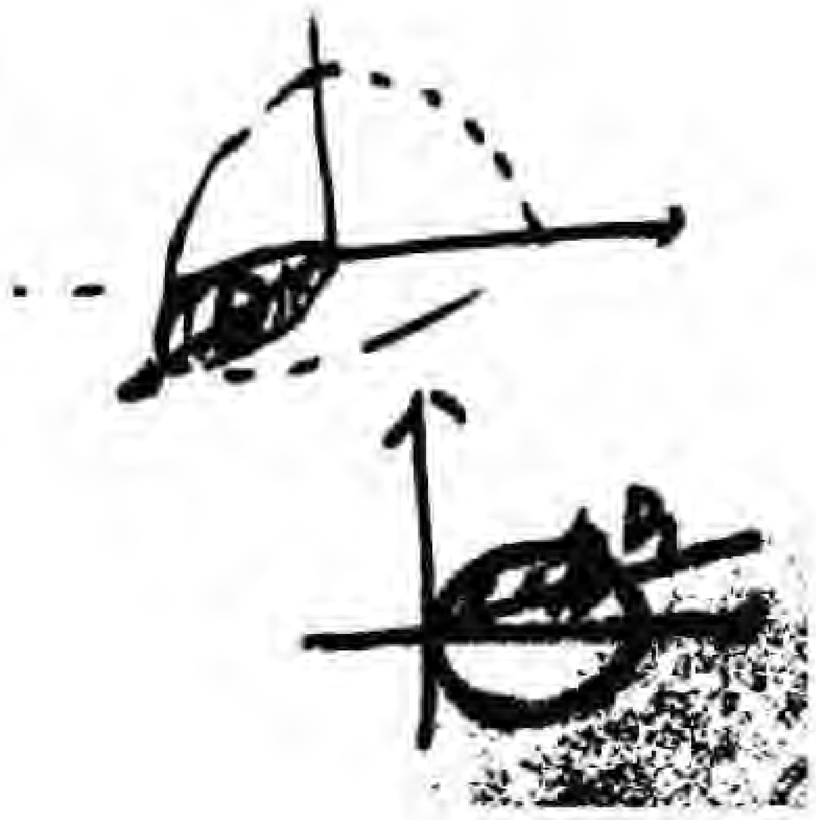
【解析】利用任意坐标变换：令 $xy=u,\frac{y^2}{x}=v\Rightarrow x=\left(\frac{u^2}{v}\right)^{\frac{1}{3}},y=(uv)^{\frac{1}{3}}$，则

$$D_1:a\le u\le b,c\le v\le d \text{ 且 } \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{3v},$$

$$\iint\limits_D xydxdy=\iint\limits_{D_1}u\cdot\frac{1}{3v}dudv=\frac{1}{3}\int_a^b udu\int_c^d\frac{1}{v}dv=\frac{1}{6}\left(b^2-a^2\right)\ln\frac{d}{c}$$

5. 求由柱面 $x^2+y^2=2ax$ 围成的柱体被球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 所截得部的体积.

【解析】所求体积以 $D:(x-a)^2+y^2\le a^2$ 为底，以 $z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$ 围成体积的 2 倍，则



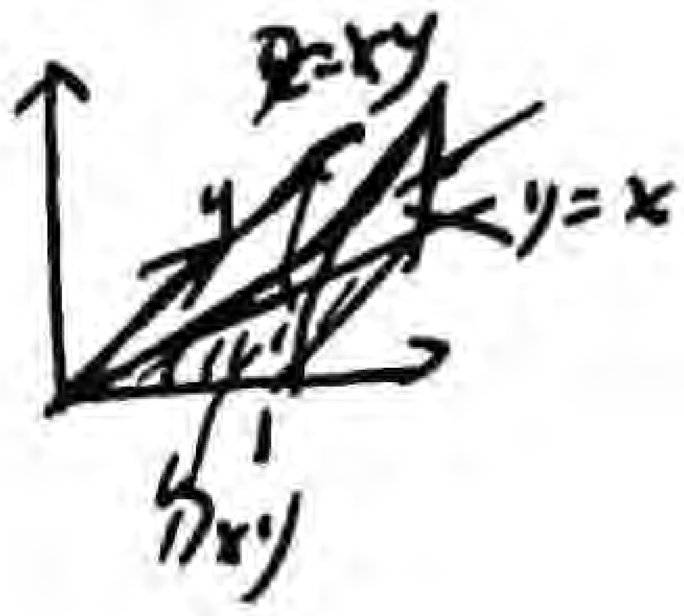
$$V=2\iint\limits_{D}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\cdot rdr=-\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta-1)d\theta=\frac{32a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

习题 11.3　三重积分

1. 计算下列三重积分:

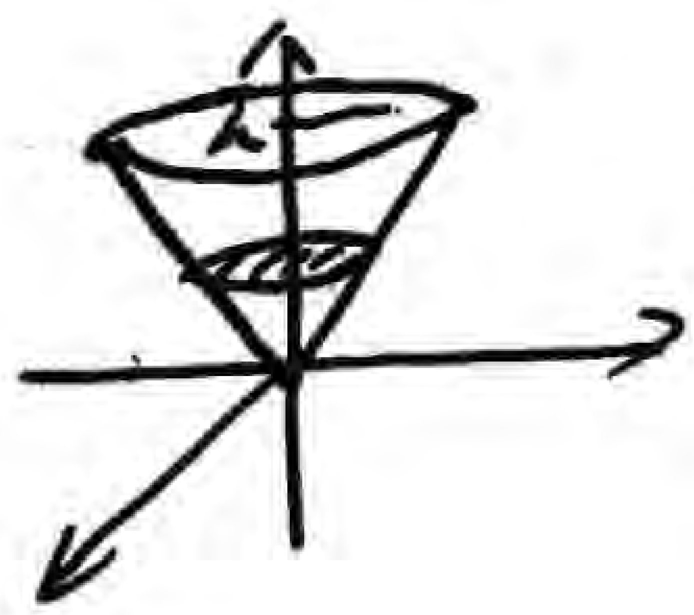
(1)$\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$，其中$V$ 由 $z=xy, y=x, x=1$ 和 $z=0$ 所围成.



【解析】V 投影到 xoy 面的投影区域 $D_{xy}:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x\end{cases}$，$0\le z\le xy$

原式$=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_0^{xy}xy^2z^3dz=\dfrac{1}{4}\iint\limits_{D_{xy}}xy^2\cdot(xy)^4dxdy=\dfrac{1}{4}\int_0^1dx\int_0^x x^5y^6dy=\dfrac{1}{364}$.

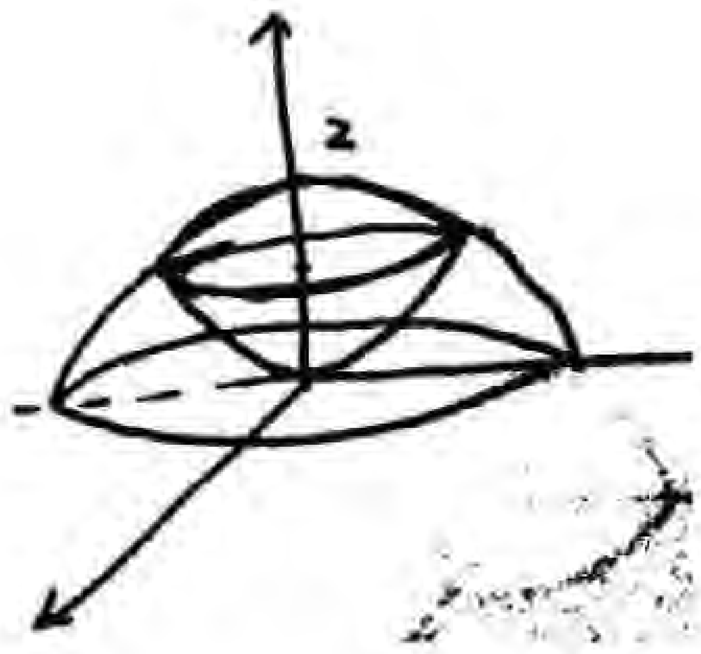
(2)$\iiint\limits_V zdxdydz$，其中V 由 $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h\ (R>0,h>0)$ 所围成.



【解析】$D_z: x^2+y^2\le\left(\dfrac{R}{h}z\right)^2$，$0\le z\le h$

原式$=\int_0^h zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^h z\cdot\pi\left(\dfrac{R}{h}z\right)^2dz=\pi\cdot\dfrac{R^2}{h^2}\int_0^h z^3dz=\dfrac{\pi}{4}R^2h^2$

(3) $\iiint\limits_V zdxdydz$，其中V 由球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与抛物面 $z=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)$ 所围成.

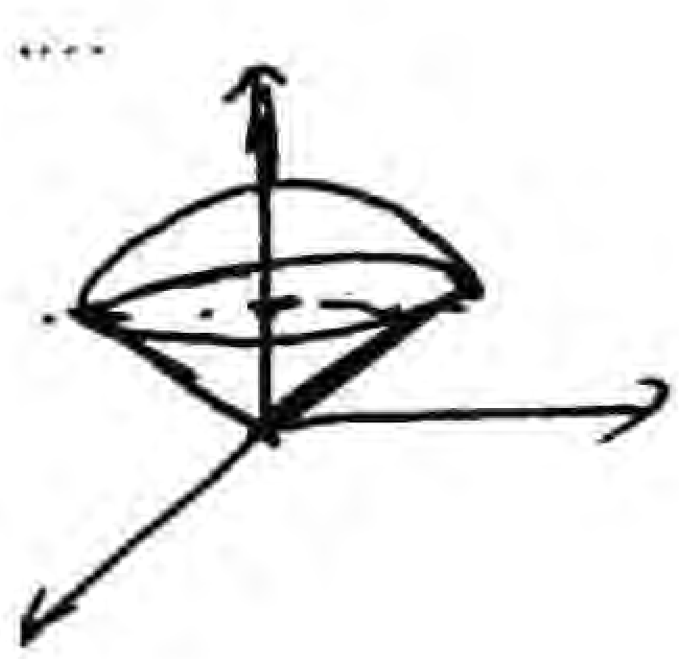


【解析】$D_{xy}: x^2+y^2\le 3$，利用柱坐标方程计算：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$

则 $V': 0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{3}, \dfrac{1}{3}r^2\le z\le\sqrt{4-r^2}$；

原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}rdr\int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}}zdz=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}r\cdot\dfrac{1}{2}\left[4-r^2-\dfrac{4}{9}r^4\right]dr=\dfrac{13}{4}\pi$

(4)$\iiint\limits_V zdxdydz$，其中V 由 $x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$ 及 $x^2+y^2\le z^2$ 所围成.



【解析】$\begin{cases}x^2+y^2+(z-a)^2=a^2\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}\Rightarrow z=0$ 或 $z=a$，$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$；

选择球坐标方程：$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$，

得 $0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}, 0\le r\le 2a\cos\varphi$，

原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\theta}(r\cos\varphi)(r^2\sin\varphi)dr$

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{2a\cos\theta}r^3dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}4a^4\cos^5\varphi\sin\varphi d\varphi=\dfrac{7}{6}\pi a^4$

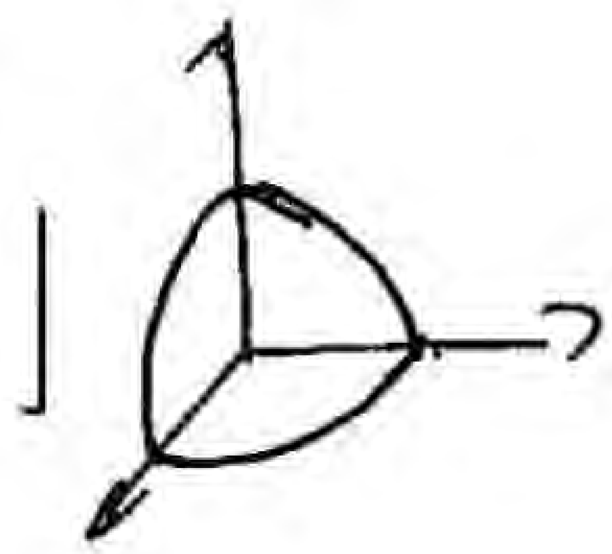
(5) $\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$，其中 V 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

【解析】利用广义球坐标方程：$x=ra\sin\varphi\cos\theta, y=rb\sin\varphi\sin\theta, z=rc\cos\varphi$，得

$$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi, 0\le r\le 1, dxdydz=abcr^2\sin\varphi，$$

原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot abr^2\sin\varphi dr=\frac{\pi^2}{4}abc$

2. 设物体占有的空间区域为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面在第一卦限内的部分，点 (x,y,z) 处的体密度为 $\rho(x,y,z)=xyz$，求物体的质量.



【解析】$M=\iiint\limits_V xyzdV$，其中 $V: x^2+y^2+z^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$；

选择球坐标方程：$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$，

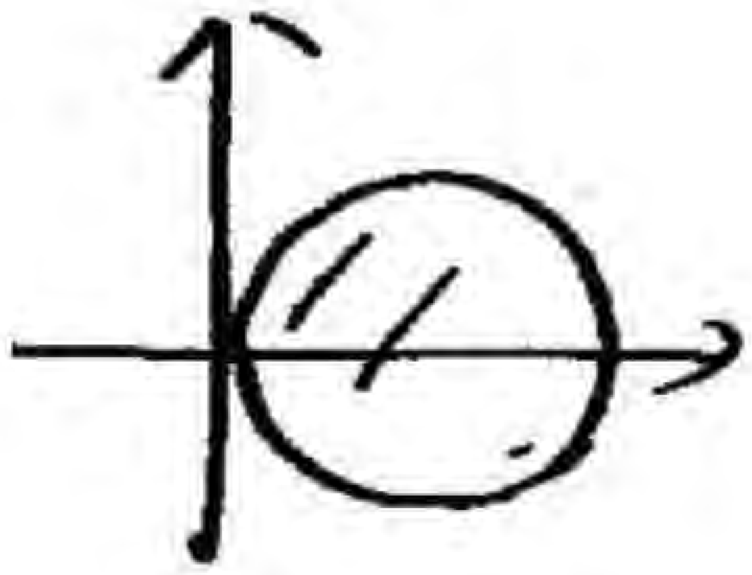
得 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le 1$，即

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r\sin\varphi\cos\theta\cdot r\sin\varphi\sin\theta\cdot r^2\sin\varphi dr$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^1 r^5dr=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{48}$

习题 11.4　重积分的应用

1. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.



【解析】(1) 所求面积的曲面方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$；

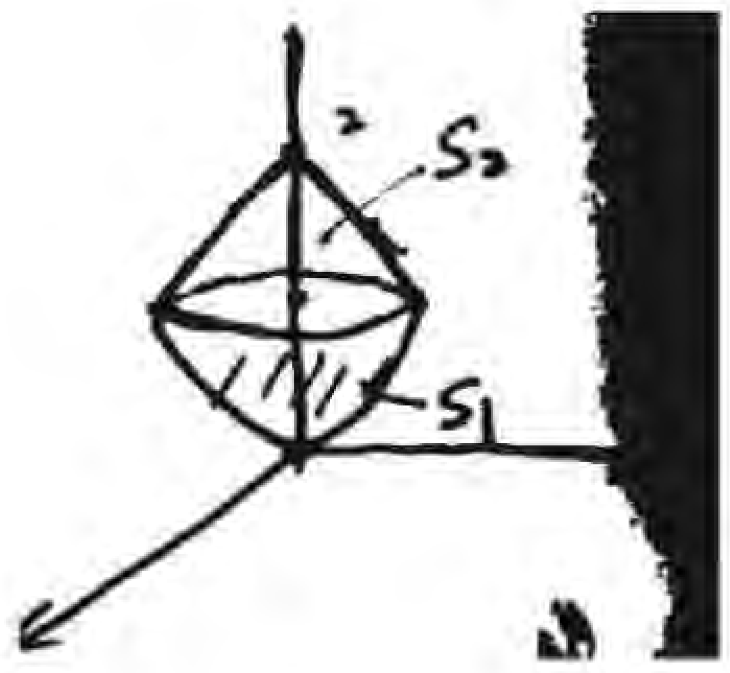
(2) $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$；

(3) $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2x$ 为在 xoy 面投影曲线边界方程；

(4)

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}rdr=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}r^2\right)\Bigg|_0^{2\cos\theta}d\theta=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta d\theta=\sqrt{2}\pi$$

2. 求由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}, z=x^2+y^2$ 所围立体的表面积.



【解析】(1) 消 z，得

$\left(x^2+y^2\right)^2=2-\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)^2+\left(x^2+y^2\right)-2=0$，即

$\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2+2\right)=0$，则 $x^2+y^2=1$ 为积分区域 D 的边界；

(2) $S_1=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\cdot rdr=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)；$$

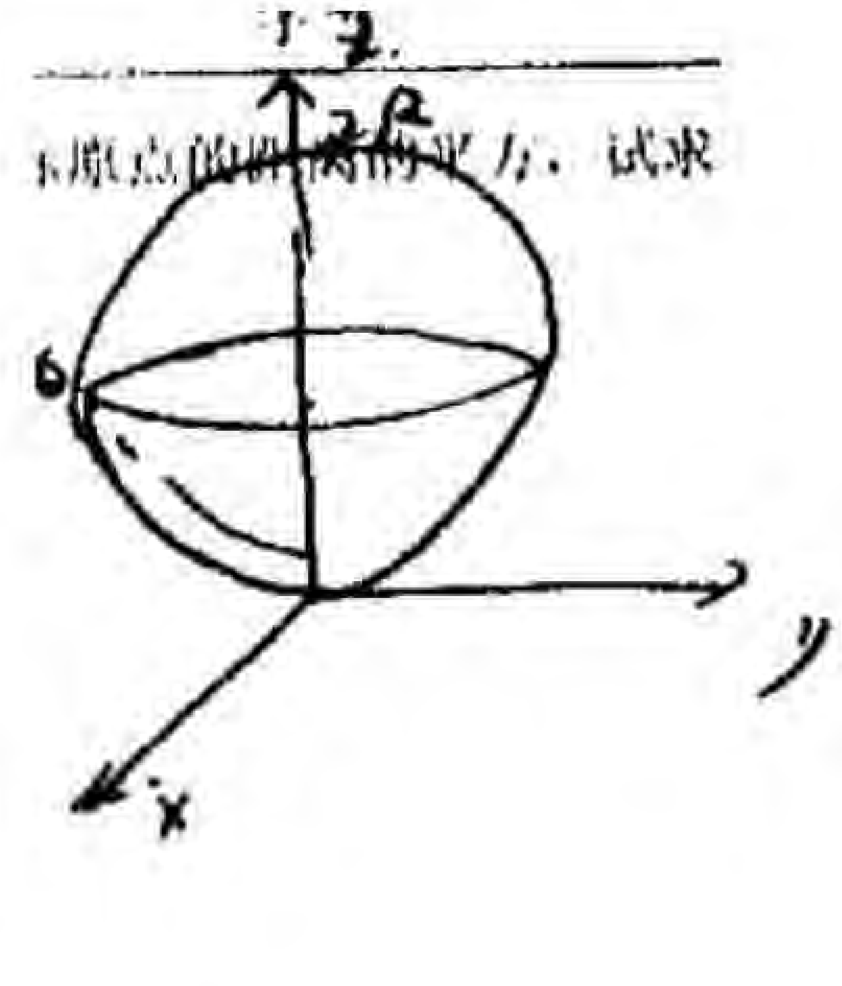
(3) $S_1=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+\dfrac{x^2}{2-x^2-y^2}+\dfrac{y^2}{2-x^2-y^2}}dxdy$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2-r^2}}\cdot rdr=(4-2\sqrt{2})\pi；$$

(4) $S=S_1+S_2=\dfrac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)+(4-2\sqrt{2})\pi$

3. 球体 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ 内，各点处的密度大小等于该点到坐标原点的距离的平方，试求该球体的质心.

【解析】(1) V 为球体空间区域，所给球体质量分布对称于 z 轴，质点位于 z 轴上，由对称性可知，$\bar{x}=0,\bar{y}=0$，所以只要求 $\bar{z}$；



(2) 密度 $\rho=x^2+y^2+z^2$；

（3）$M=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)dV$　　利用球坐标

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{5}\left(2R\cos\varphi\right)^5d\varphi=\frac{32}{15}\pi R^5;$$

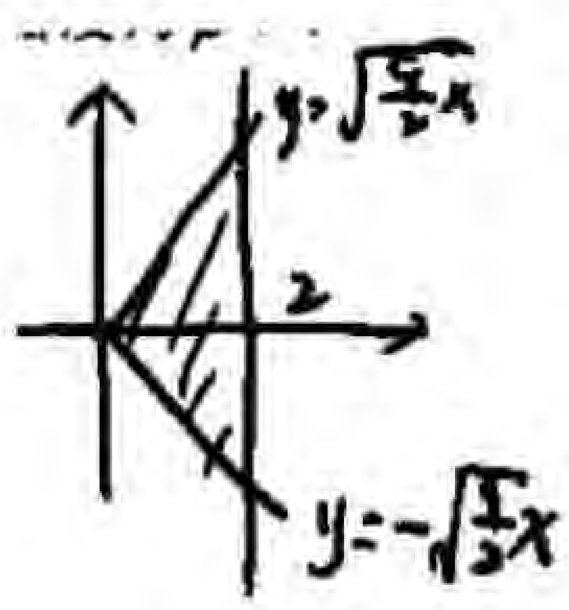
（4）$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{V}z\rho(x,y,z)dV=\frac{1}{M}\iiint\limits_{V}z(x^2+y^2+z^2)dV$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r\cos\varphi\cdot r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{2\pi}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\frac{1}{6}(2R\cos\varphi)^6d\varphi$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{8}{3}\pi R^5=\frac{5}{4}R$$

所以质心为$\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

4. 求由$y^2=\frac{9}{2}x$和$x=2$围成的均匀薄板对x轴及y轴的转动惯量（设面密度为ρ）.



【解析】$I_x=\iint\limits_{D}y^2\rho d\sigma=\rho\int_0^2dx\int_{-\sqrt{\frac{9}{2}x}}^{\sqrt{\frac{9}{2}x}}y^2dy=\rho\int_0^2\left(\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{-\sqrt{\frac{9}{2}x}}^{\sqrt{\frac{9}{2}x}}dx$

$$=\frac{2}{3}\rho\int_0^2\left(\sqrt{\frac{9}{2}x}\right)^3dx=\frac{2}{3}\rho\int_0^2\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{9}{\sqrt{2}}\rho\int_0^2x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{72}{5}\rho.$$

$$I_y=\iint\limits_{D}x^2\rho d\sigma=\rho\int_0^2dx\int_{-\sqrt{\frac{9}{2}x}}^{\sqrt{\frac{9}{2}x}}x^2dy=2\rho\int_0^2x^2\cdot\sqrt{\frac{9}{2}x}dx=2\rho\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^2x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{96}{7}\rho.$$

自 测 题

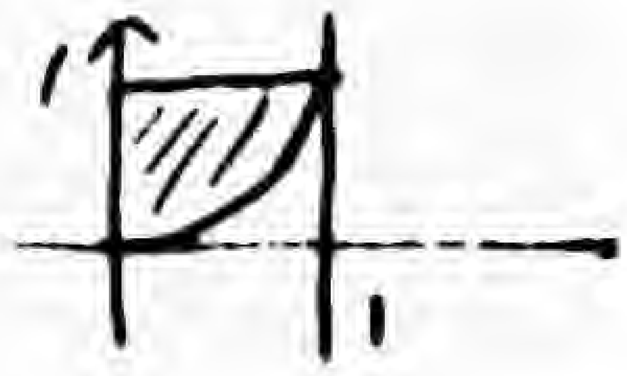
一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 交换二次积分次序：

$$\int_0^1 dx\int_{1-x^2}^1 f(x,y)dy+\int_1^e dx\int_{\ln x}^1 f(x,y)dy=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

【答案】$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{e^y} f(x,y)dx$

2. 计算 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$



【解析】交换积分顺序，计算得$\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$

3. 设 $f(x)$ 连续，$f(1)=1, F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f\left(x^2+y^2\right)dxdy,(t\ge 0)$，则 $F'(1)=\_\_\_\_\_\_$.

【解析】$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)\cdot rdr=2\pi\int_0^t f(r^2)\cdot rdr,$

则 $F'(t)=2\pi tf(t^2)$，进而 $F'(1)=2\pi$.

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{z\ln\left(x^2+y^2+z^2+1\right)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz=\_\_\_\_\_\_\_\_$，其中 Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.

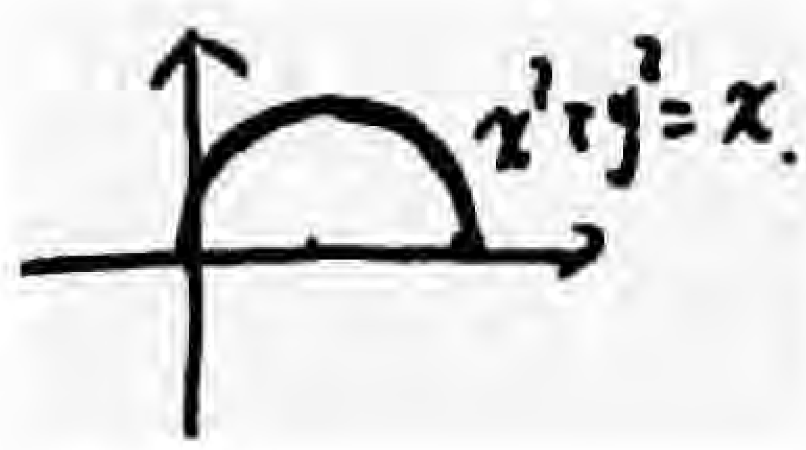
【解析】利用三重积分的对称性计算可知积分制为 0.

5. 设立体 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 围成，则其体积为_________.

【解析】$V=\iiint\limits_{\Omega}1dV=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z}1dV=\int_0^1\pi zdz=\dfrac{\pi}{2}$

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 设 $f(u,v)$ 连续，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 等于（　　）.

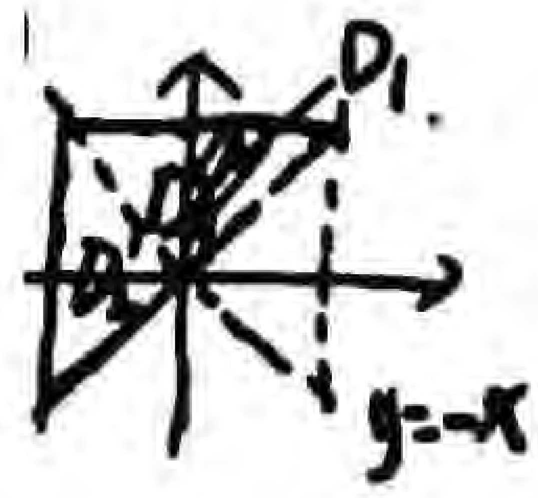


$(A)\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_0^1 f(x,y)dx$　　$(B)\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

$(C)\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$　　$(D)\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x,y)dx$

【解析】由图形可知正确答案选择 B

7. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|-a\le x\le a, x\le y\le a\right\}$，$D_1$ 表示 D 在第一象限的部分，则



$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy=$（　　）

$(A)\ 2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$　　　　$(B)\ 2\iint\limits_{D_1}xydxdy$

$(C)\ 4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　　　　$(D)\ 0$

【解析】添加辅助曲线 $y=-x$，则 $\iint\limits_D=\iint\limits_{D_1'}+\iint\limits_{D_2'}$，如图所示，利用对称性可知正确答案为 A

8. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le t^2\right\}$，则 $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$

（　　）

$(A)\ f(0,0)$　　$(B)\ -f(0,0)$　　$(C)\ f'(0,0)$　　(D) 不存在

【解析】

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\pi t^2}f(\xi,\eta)\cdot\pi t^2=\lim_{t\to0^+}f(\xi,\eta)=\lim_{\substack{\xi\to0^+\\ \eta\to0^+}}f(\xi,\eta)=f(0,0)$$

9. 设有空间区

$\Omega_1=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge0\right\},\Omega_2=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2\right.$

则有（　　）

$(A)\ \iiint\limits_{\Omega_1}xdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2}xdxdydz$

$(B)\ \iiint\limits_{\Omega_1}ydxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2}ydxdydz$

$(C)\ \iiint\limits_{\Omega_1}zdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2}zdxdydz$

$(D)\ \iiint\limits_{\Omega_1}xyzdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyzdxdydz$

【解析】利用对称性和保号性可知正确答案为 C

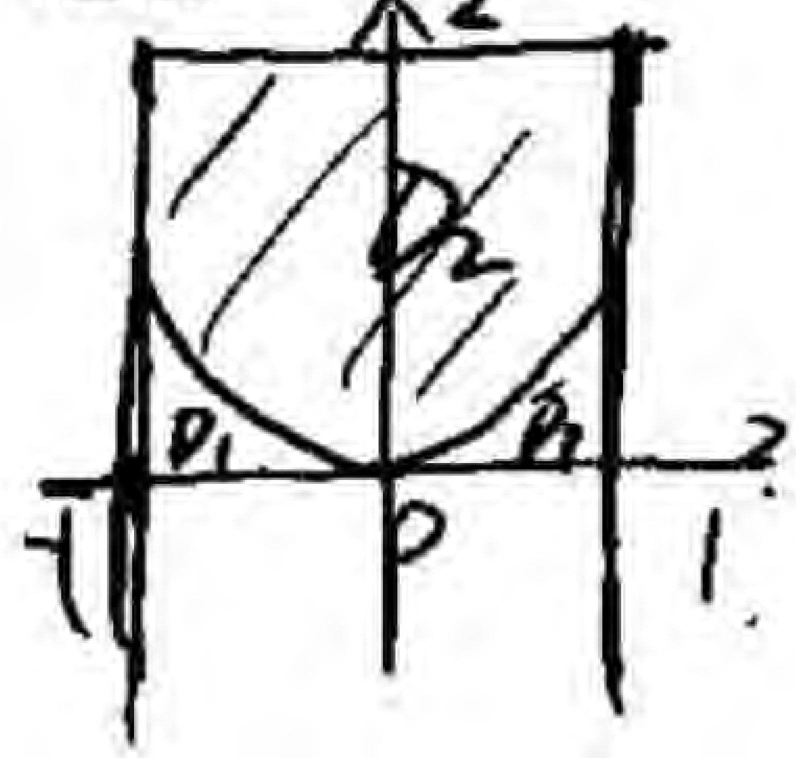
10. 已知空间区域 Ω 由 $x^2+y^2\le z, 1\le z\le 2$ 确定，$f(z)$ 连续，则 $\iiint\limits_\Omega f(z)dv=$（　　）

$(A)\ \pi\int_1^2 z^2f(z)dz$　$(B)\ 2\pi\int_1^2 f(z)dz$　　$(C)\ 2\pi\int_1^2 zf(z)dz$　$(D)\ \pi\int_1^2 zf(z)dz$

【解析】利用三重积分的截面法得正确答案为 D

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11. 计算二重积分 $\iint\limits_D\left|y-x^2\right|dxdy$，其中 D 由 $|x|\le1, 0\le y\le2$ 所围成.



【解析】(1) 利用 $y=x^2$ 将 D 划分为 D_1,D_2，如图所示；

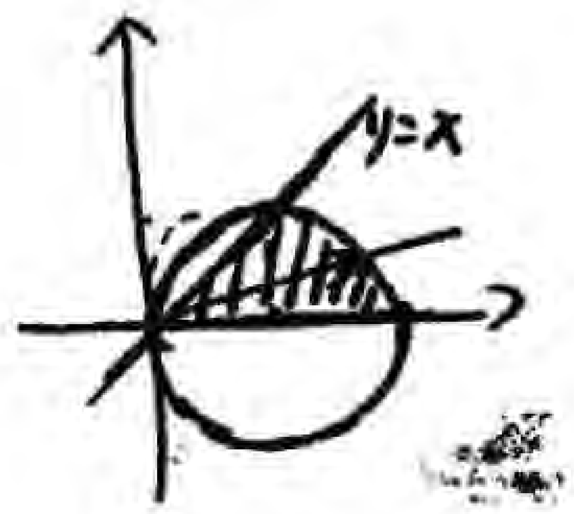
（2）$I=\iint\limits_{D_1}(x^2-y)dxdy+\iint\limits_{D_1}(y-x^2)dxdy$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}(x^2-y)dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}(y-x^2)dy$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^4dx+\int_{-1}^{1}(2-2x^2+\frac{1}{4}x^4)dx=\frac{46}{15}$$

12. 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x,x^2+y^2\le 2x\right\}$.

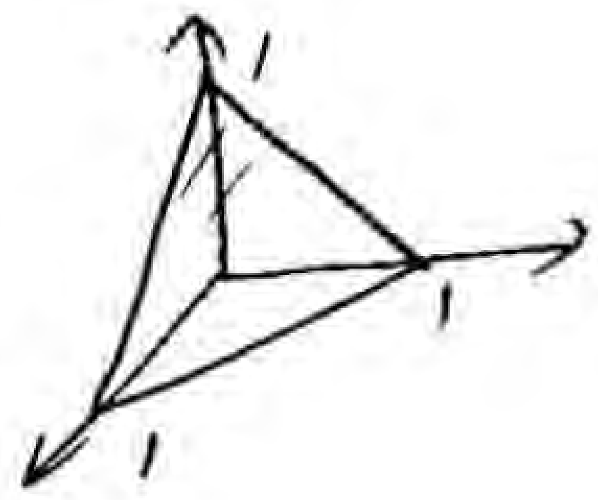
【解析】$\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cdot rdr$



$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta=\frac{10}{9}\sqrt{2}$$

13. 计算三重积分 $\iiint\limits_{V}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 V 由 $x=0,y=0,z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成.

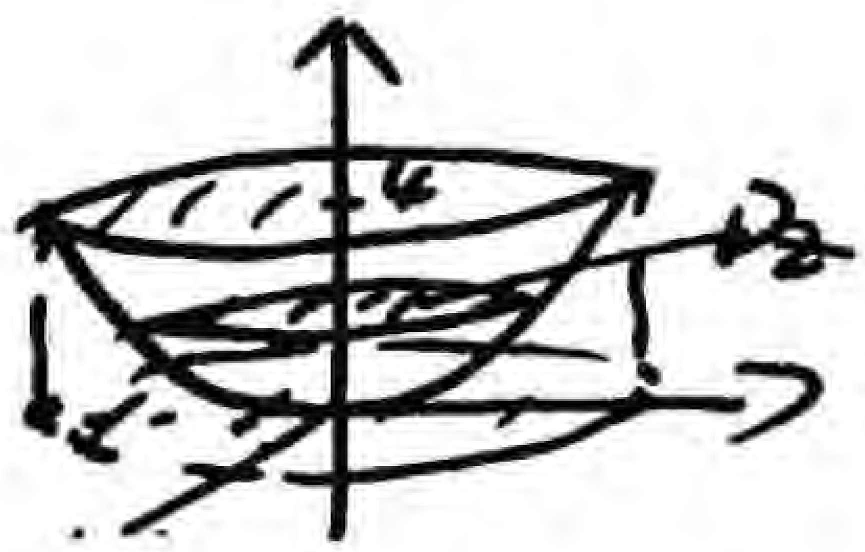
【解析】$\iiint\limits_{V}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(1+x+y+z)^{-3}dz$



$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$$

14. 计算三重积分 $\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2+z\right)dxdydz$，其中 V 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体.

【解析】（1）所得旋转曲面方程为：$x^2+y^2=2z$，如图所示，其投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\le 8$；



（2）$\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2+z\right)dxdydz=\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2\right)dxdydz+\iiint\limits_{V}zdxdydz$；

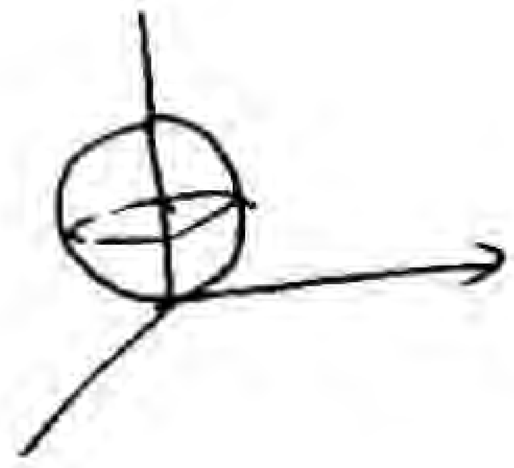
（3）$\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int_0^4dz\iint\limits_{D_z}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^4dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^2\cdot rdr=2\pi\int_0^4z^2dz=\frac{128\pi}{3}$；

（4）$\iiint\limits_{V}zdxdydz=\int_0^4dz\iint\limits_{D_z}zdxdy=\int_0^4z\cdot\pi\cdot 2zdz=2\pi\int_0^4z^2dz=\frac{128\pi}{3}$；

（5）原积分 $=\frac{256\pi}{3}$

15. 计算三重积分 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$，其中 V 由曲面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成.

【解析】原式 $=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\theta} r\cdot r^2 \sin\varphi dr$



$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r^3 dr =$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cdot \left(\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\cos\varphi}\right) d\theta = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d(\cos\varphi) = \frac{\pi}{10}$$

16. 求由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}, z=x^2+y^2$ 所围成立体的表面积.

【解析】本题同 11.4 节第一题一样，免做！

第十二章　曲线积分与曲面积分

习题 12.1　第一类曲线积分

1. 计算 $\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)ds$，其中 $L: x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, t\in[0,2\pi]$.

【解析】(1) $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\sqrt{a^2+b^2}dt$

(2) $\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=\int_0^{2\pi}[a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2]\cdot\sqrt{a^2+b^2}dt=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+b^2}dt$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(a^2t+\frac{1}{3}b^2t^3\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{3}\left(3a^2+4\pi b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}$$

2. 计算 $\oint_L\cos\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 与 y 轴在第一象限内围成的图形的边界.

【解析】(1) $I=\int_{\overline{OA}}+\int_{\widehat{AB}}+\int_{\overline{OB}}$

(2) $\overline{OA}: x=0, y\in[0,a]$，$\int_{\overline{OA}}=\int_0^a\cos y dx=\sin a$；

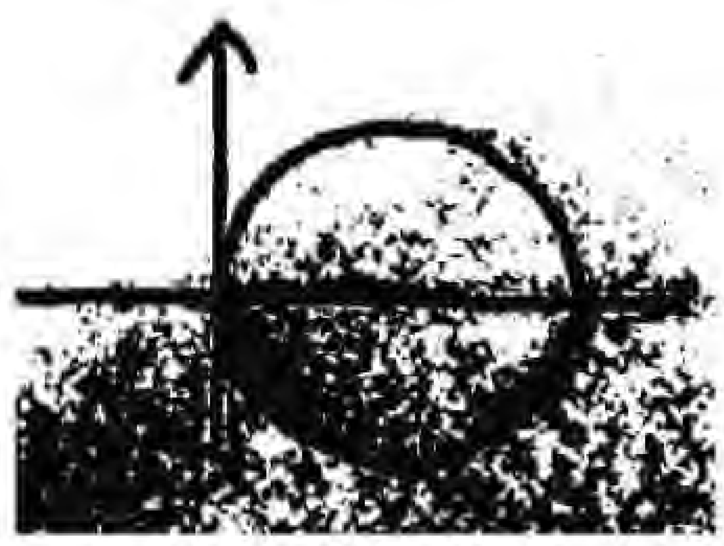
$\widehat{AB}$: $\int_{\widehat{AB}}=\int_{\widehat{AB}}\cos a ds=\cos a\cdot\frac{1}{8}\cdot 2\pi a=\frac{\pi}{4}a\cos a$；

$\overline{OB}: y=x, x\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}a]$，$\int_{\overline{OB}}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\cos\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}dx=\sin a$；

(3) $I=2\sin a+\frac{\pi}{4}a\cos a$

3. 计算 $\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 $L: x^2+y^2=ax\left(a>0\right)$.

【解析】解法一：直角坐标系做



(1) 对上半圆周弧微分 $ds=\sqrt{1+\left(\frac{a-2x}{2y}\right)^2}dx=\frac{a}{2y}dx=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx$ $(0\le x\le a)$；

(2) 由对称性可知

$$\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds=a\sqrt{a}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a-x}}dx=2a^2$$

解法二：极坐标系做

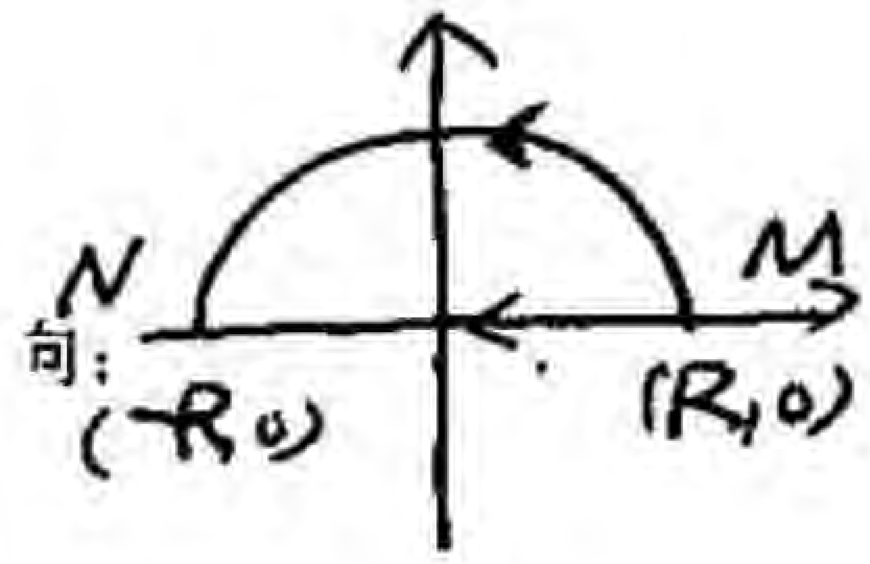
令 $\begin{cases}x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\\ x=\frac{a}{2}\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$

$$\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left[\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\right]^2+\left[\frac{a}{2}\sin t\right]^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}dt$$

$$=\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\cdot\frac{a}{2}dt=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}dt=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=2a^2$$

习题 12.2　第二类曲线积分

1. 计算 $\int_L y^2dx + x^2dy$，其中 L 为



(1) 圆周 $x^2+y^2=R^2$ 的上半部分，方向为逆时针方向；

(2) 从点 $M(R,0)$ 到点 $N(-R,0)$ 的直线段.

【解析】（1）利用极坐标 $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta;\theta:0\to\pi$；

$$\int_L y^2dx+x^2dy=\int_0^{\pi}\left[R^2\sin^2\theta\cdot R(-\sin\theta)+R^2\cos^2\theta\cdot R\cos\theta\right]d\theta$$

$$=R^3\int_0^{\pi}(\cos^3\theta-\sin^3\theta)d\theta=R^3\left[\int_0^{\pi}\cos^3\theta d\theta-\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\right]$$

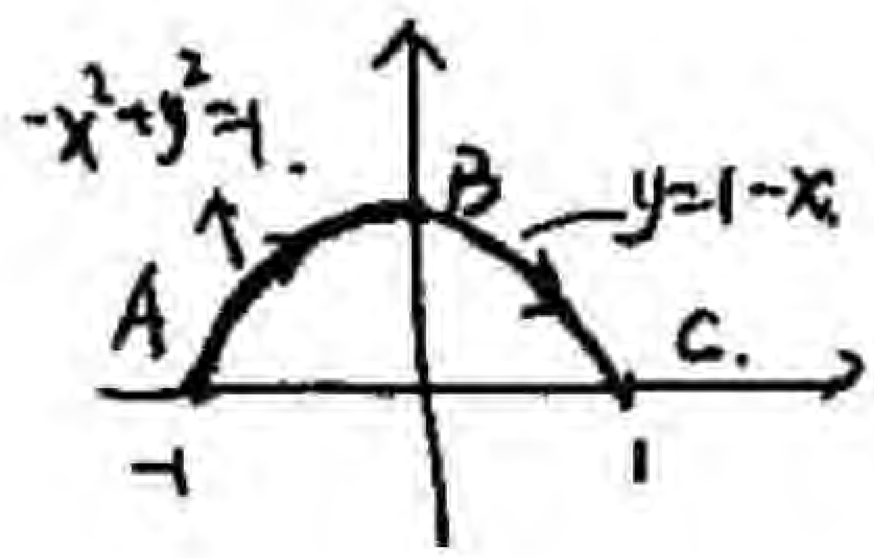
$$=R^3\left[\int_0^{\pi}\cos^2\theta d\sin\theta+\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\cos\theta\right]$$

$$=R^3\left[(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta)\Big|_0^{\pi}+(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta)\Big|_0^{\pi}\right]=-\frac{4}{3}R^3$$

（2）$\begin{cases}y=0\\x=x\end{cases}$　$x:R\to-R$，则 $\int_L y^2dx+x^2dy=\int_R^{-R}0dx=0$

2. 计算 $\int_L xdy-ydx, L$：从 $A(-1,0)$ 经过 $x^2+y^2=1$ 上半圆到 $B(0,1)$，再经过 $y=1-x^2$ 到 $C(1,0)$.

【解析】



（1）$\int_L=\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}$；

（2）$\overline{AB}:\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$　$\theta:\pi\to\frac{\pi}{2}$，则

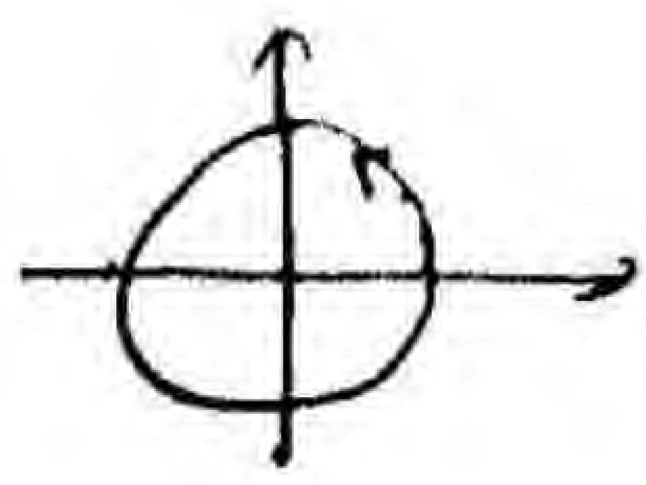
$$\int_{\overline{AB}}=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\cdot\sin\theta+\sin\theta\cdot\sin\theta)\,d\theta=-\frac{\pi}{2};$$

（3）$\overline{BC}:\begin{cases}y=1-x^2\\x=x\end{cases}$　$x:0\to1$，则

$$\int_{\overline{BC}}=\int_0^1\left[x\cdot(-2x)-(1-x^2)\right]dx=\int_0^1(-x^2-1)\,dx=-\frac{4}{3};$$

（4）$\int_L=\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}=-\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$

3. 计算第二类曲线积分 $\oint_L\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，



方向为逆时针方向.

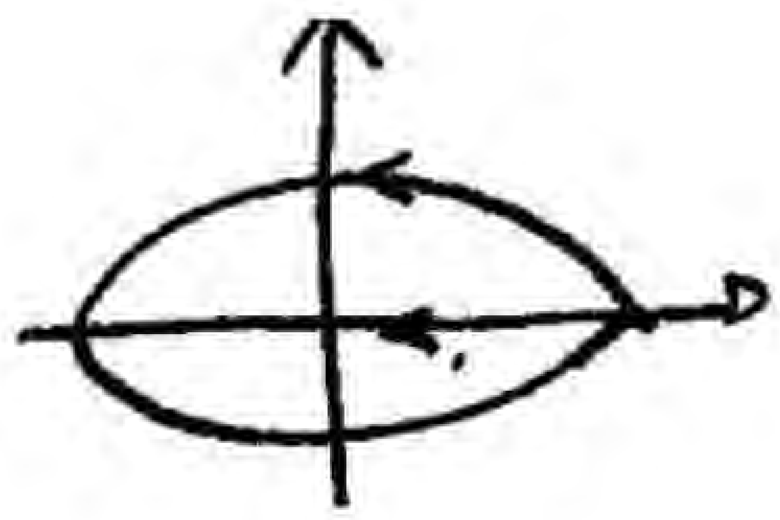
【解析】（1） $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}=\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{a^2}$；

（2） $L: x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, \quad \theta: 0\to 2\pi$；

（3） $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{a^2}=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[a^2(\cos\theta+\sin\theta)(-\sin\theta)-a^2(\cos\theta-\sin\theta)\cdot\cos\theta]d\theta$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta=-2\pi$$

4. 计算 $\int_L (x+y)dx+(x-y)dy$，其中 L 为



(1) 椭圆周 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的上半部分，从 $(a,0)$ 到 $(-a,0)$；

(2) 从点 $(a,0)$ 到点 $(-a,0)$ 的直线段.

【解析】（1） $L: x=a\cos\theta, y=b\sin\theta, \quad \theta: 0\to\pi$；

$\int_L (x+y)dx+(x-y)dy=\int_0^{\pi}[(a\cos\theta+b\sin\theta)\cdot(-a\sin\theta)+(a\cos\theta-b\sin\theta)\cdot b\cos\theta]d\theta$

$$=-\int_0^{\pi}(a^2+b^2)\sin\theta\cos\theta\, d\theta+ab\int_0^{\pi}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta=0$$

（2） $\begin{cases} y=0 \\ x=x \end{cases} \quad x: a\to -a$，则 $\int_L=\int_a^{-a}[(x+0)+(x-0)\cdot 0]dx=\int_a^{-a}x\,dx=0$

5. 设 $\overrightarrow{F}=\{y,z,x\}$，$L$ 为依参数增加方向进行的纽形螺线

$$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt \quad t\in[0,2\pi]$$

计算 $\int_L \overrightarrow{F}\cdot d\vec{r}$.

【解析】

$$\int_L \overrightarrow{F}\cdot d\vec{r}=\int_L ydx+zdy+xdz=\int_0^{2\pi}[a\sin t\cdot a(-\cos t)+bt\cdot a\cos t+ab\cos t]dt=-\pi a^2$$

习题 12.3　Green 公式

1. 计算曲线积分 $\oint_{L^+} xy^2dy - x^2ydx$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$.

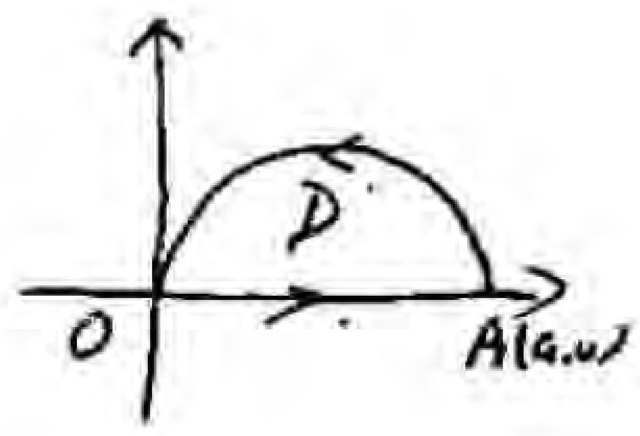
【解析】（1） $P=-x^2y$， $Q=xy^2$；

（2） $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=y^2+x^2$；

（3） $\oint_{L^+} xy^2dy-x^2ydx=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr=\dfrac{1}{2}\pi R^4$

2. 计算曲线积分 $\int_L\left(e^x\sin y-ay\right)dx+\left(e^x\cos y-bx\right)dy$，其中 L 为从 $A(a,0)$ 到 $O(0,0)$ 的上半圆周

$x^2+y^2=ax$.



【解析】（1）添加 $\overline{OA}:y=0$，从 $O\to A$；

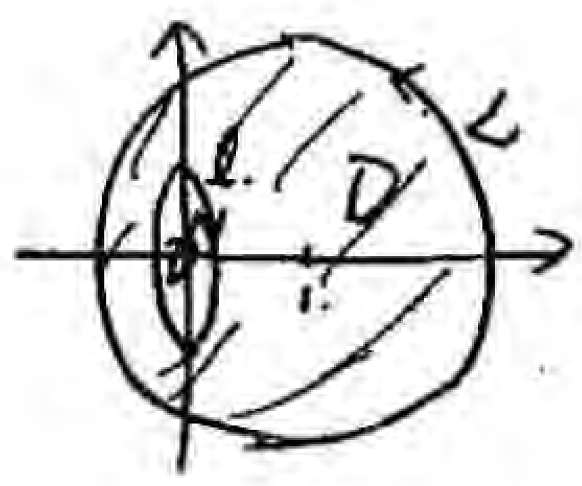
（2） $\int_L=\oint_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}$ ；

（3） $\int_L=\oint_{L+\overline{OA}}=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\dfrac{\partial(e^x\cos y-bx)}{\partial x}-\dfrac{\partial(e^x\sin y-ay)}{\partial x}\right]dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(a-b)dxdy=\dfrac{\pi a^2}{8}(a-b)$；

（4） $\overline{OA}:\begin{cases}y=0\\x=x\end{cases}\quad x:0\to a$, 则$\int_{\overline{OA}}=\int_0^a 0\,dx=0$；

（5） $\int_L=\dfrac{\pi a^2}{8}(a-b)$

3. 计算曲线积分 $\oint_{L^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周 $(R>1)$，取顺时针方向.(提示：挖去一个小椭圆)



【解析】（1）添加 $l:4x^2+y^2=\varepsilon^2(\varepsilon>0)$，方向逆时针方向；

（2） $P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$， 且 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$；

（3） $\int_{L^+}=\oint_{L^++l}-\oint_l$ ；

（4） $\oint_{L^++l}=\iint\limits_D 0dxdy=0$；

（5） $\oint_l\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\oint_l xdy-ydx=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_D 2dxdy=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon=\pi$；

（6） $\int_{L^+}=-\pi$

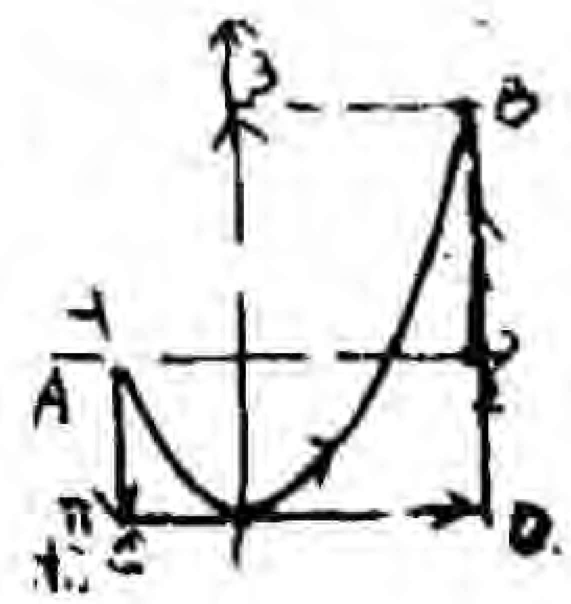
4. 曲线积分$\int_L \left(e^x+2f\left(x\right)\right)ydx-f\left(x\right)dy$与路径无关，且$f\left(1\right)=1$，求

$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left(e^x+2f\left(x\right)\right)ydx-f\left(x\right)dy$.

【解析】$I=\int_{\overline{OB}}+\int_{\overline{BA}}=\int_0^1(e^x+xf(x))\cdot 0dx-\int_0^1 f(1)dy=\int_0^1(-1)dy=-1$

5. 计算$I=\int_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$是从$A\left(-1,0\right)$沿抛物线$y=x^2-1$到点$B\left(2,3\right)$的曲线弧.

【解析】（1）$P=\dfrac{-y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，且$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以可知积分与路径无关；



（2）沿$A\to C\to D\to B$构造新的路径进行计算

$\overline{AC}:\begin{cases}x=-1\\y=y\end{cases},y:0\to 1$，$\int_{\overline{AC}}=\int_0^1\dfrac{-1}{1+y^2}dy=-\arctan y\Big|_0^{-1}=\dfrac{\pi}{4}$；

$\overline{CD}:\begin{cases}x=x\\y=-1\end{cases},x:-1\to 2$，$\int_{\overline{CD}}=\int_{-1}^2\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-1}^2=\arctan 2+\dfrac{\pi}{4}$；

$\overline{BD}:\begin{cases}x=2\\y=y\end{cases},y:-1\to 3$，$\int_{\overline{BD}}=\int_{-1}^3\dfrac{2}{4+y^2}dy=\arctan\dfrac{y}{2}\Big|_{-1}^3=\arctan\dfrac{3}{2}+\arctan\dfrac{1}{2}$；

（3）$I=\dfrac{\pi}{2}+\arctan 2+\arctan\dfrac{3}{2}+\arctan\dfrac{1}{2}=\pi+\arctan\dfrac{3}{2}$　（$\because\arctan 2+\arctan\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{2}$）

6. 选择常数a,b使得$\left(2ax^3y^3-3y^2+5\right)dx+\left(3x^4y^2-2bxy-4\right)dy$是某个二元函数

$U\left(x,y\right)$在全平面内的

全微分，并求$U\left(x,y\right)$.

【解析】（1）$P=2ax^3y^3-3y^2+5,Q=3x^4y^2-2bxy-4$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=6ax^3y^2-6y,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12x^3y^2-2by$，

因为$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow\begin{cases}6a=12\\-2b=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$

（2）$\left(4x^3y^3-3y^2+5\right)dx+\left(3x^4y^2-6xy-4\right)dy$

$=4x^3y^3dx-3y^2dx+5dx+3x^4y^2dy-6xydy-4dy$

$$= (y^3dx^4 + x^4dy^3) - 3(y^2dx + xdy^2) + d(5x - 4y)$$

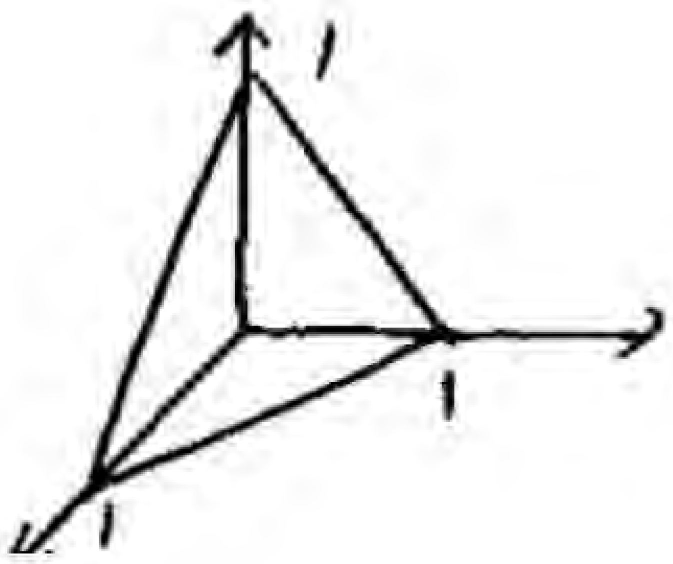
$$= d(x^4y^3) - d(3xy^2) + d(5x - 4y) = d(x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y)$$

所以 $u(x, y) = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C \quad (C \in R)$

习题 12.4　第一类曲面积分

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{S}\frac{dS}{\left(1+x+y\right)^2}$，其中 S 为四面体 $x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的边界.

【解析】(1) S 由四个面组成：



$S_1: x+y+z=1\ (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$，$S_2: x=0\ (y+z\le 1, y\ge 0, z\ge 0)$，

$S_3: y=0\ (x+z\le 1, x\ge 0, z\ge 0)$，$S_4: z=0\ (x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0)$；

(2) 对 S_1：$z=1-x-y$，向 xoy 面做投影，投影区域 $D_1: x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0$，且

$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{3}$，则

$$\iint\limits_{S_1}\frac{dS}{\left(1+x+y\right)^2}=\iint\limits_{D_1}\frac{\sqrt{3}}{\left(1+x+y\right)^2}dxdy=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{\left(1+x+y\right)^2}=\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)；$$

(3) 对 S_2：$x=0$，向 yoz 面做投影，投影区域 $D_2: y+z\le 1, y\ge 0, z\ge 0$，且 $\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}=1$

$$\iint\limits_{S_2}\frac{dS}{\left(1+x+y\right)^2}=\iint\limits_{S_2}\frac{dS}{\left(1+y\right)^2}=\iint\limits_{D_2}\frac{dydz}{\left(1+y\right)^2}=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\frac{dz}{\left(1+y\right)^2}=1-\ln 2；$$

(4) 对 S_3：$y=0$，向 xoz 面做投影，投影区域 $D_3: x+z\le 1, x\ge 0, z\ge 0$，且 $\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}=1$

$$\iint\limits_{S_3}\frac{dS}{\left(1+x+y\right)^2}=\iint\limits_{S_3}\frac{dS}{\left(1+x\right)^2}=\iint\limits_{D_3}\frac{dxdz}{\left(1+x\right)^2}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dz}{\left(1+x\right)^2}=1-\ln 2；$$

(5) 对 S_4：$z=0$，向 xoy 面做投影，投影区域 $D_4: x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0$，且 $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=1$

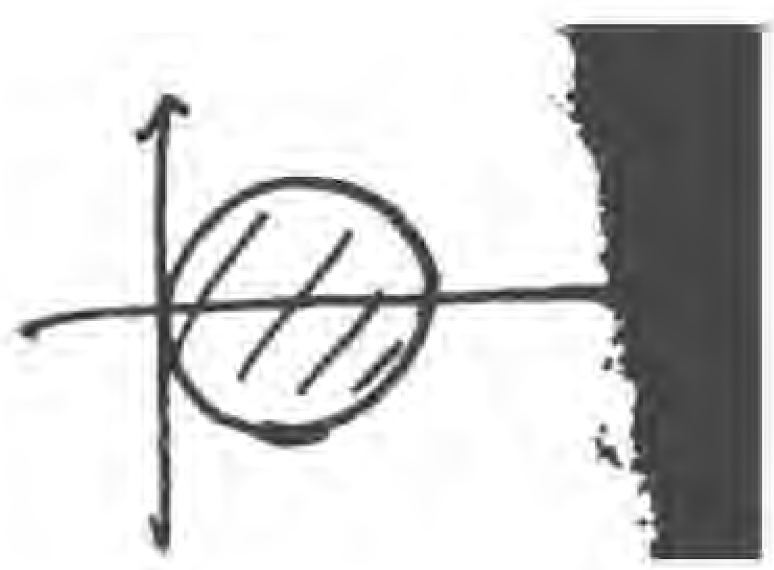
$$\iint\limits_{S_4}\frac{dS}{\left(1+x+y\right)^2}=\iint\limits_{D_4}\frac{dxdy}{\left(1+x+y\right)^2}=\int_0^1 dx\int_0^{1-y}\frac{dz}{\left(1+x+y\right)^2}=\ln 2-\frac{1}{2}；$$

(6) 原式$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{S}\left(xy+yz+zx\right)dS$，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分.

【解析】(1) S 向 xoy 面上投影，$D_{xy}: x^2+y^2\le 2ax$，如图所示

(2) $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$；



（3）原式$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(xy+y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\sqrt{2}dxdy$

$$\overset{\text{极坐标}}{=}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\left[r^2\cos\theta\sin\theta+r^2\sin\theta+r^2\cos\theta\right]\cdot rdr$$

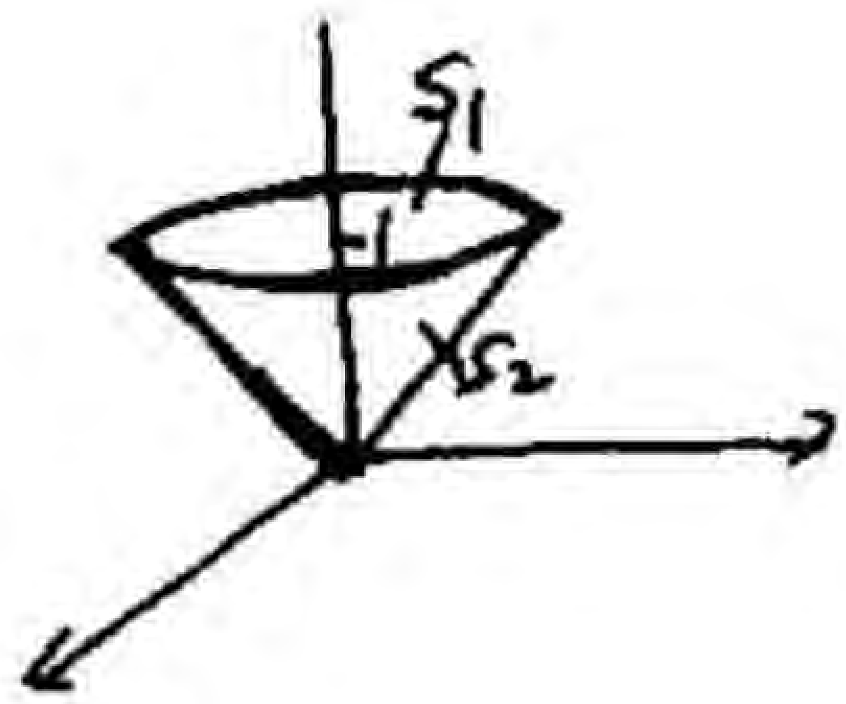
$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta\sin\theta+\sin\theta+\cos\theta\right)d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3dr$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta\sin\theta+\sin\theta+\cos\theta\right)\cdot\frac{1}{4}\left(2a\cos\theta\right)^4d\theta$$

$$\overset{\text{对称性化简}}{=}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\left(2a\cos\theta\right)^4\cdot\cos\theta d\theta=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$$

3. 计算曲面积分$\oiint\limits_S x^2dS$，其中S为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围成区域的全部界面.

【解析】（1）$\oiint\limits_S x^2dS=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}$ ；



（2）$S_1:z=1\ (x^2+y^2\le 1)$，$\iint\limits_{S_1}=\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot rdr=\frac{\pi}{4}$；

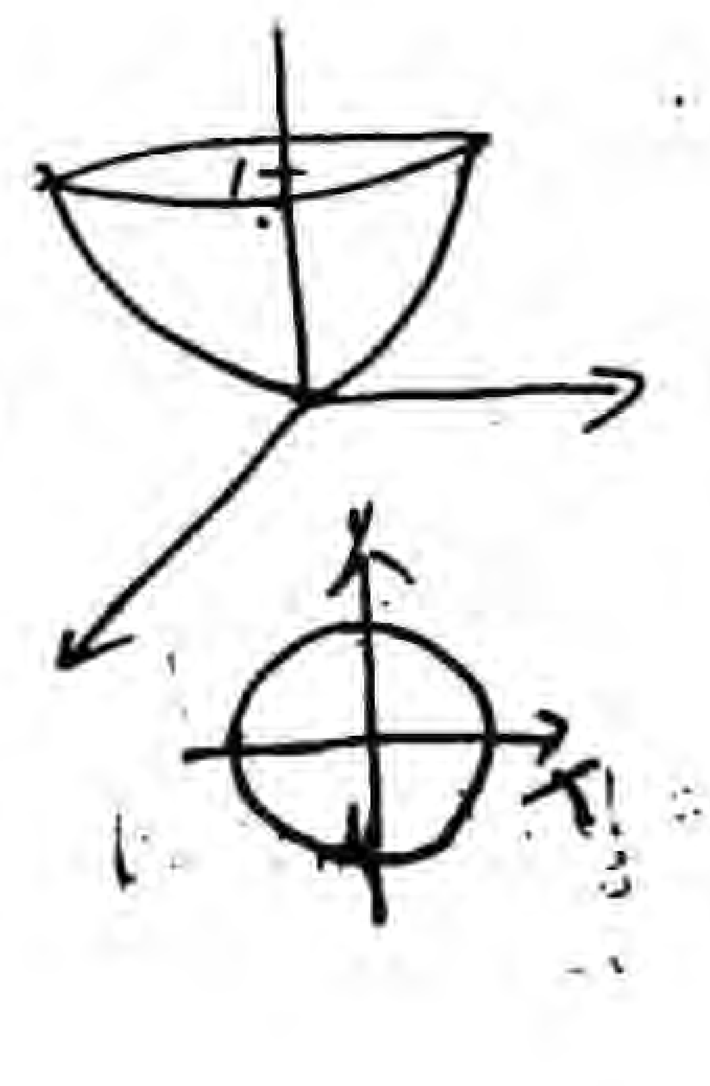
（3）$S_2:z=\sqrt{x^2+y^2}\ (x^2+y^2\le 1)$，

$$\iint\limits_{S_2}=\iint\limits_{D_{xy}}x^2\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}\ ;$$

（4）原式$=\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}+1\right)$

4. 求抛物面壳子$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\left(0\le z\le 1\right)$的质量，此壳的密度按规律$\rho=z$而变更.

【解析】（1）$M=\iint\limits_S\rho dS=\iint\limits_S zdS$；



（2）$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right), D_{xy}:x^2+y^2\le 2$；

（3）$M=\iint\limits_{D_{xy}}z\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}z\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cdot\sqrt{1+r^2}\cdot rdr$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\cdot\sqrt{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cdot\sqrt{1+r^2}d\left(r^2\right)$$

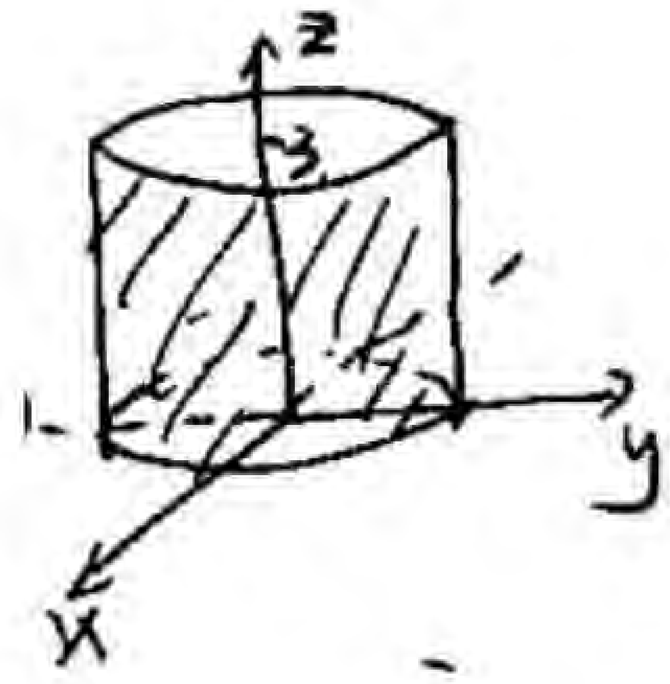
$$=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\sqrt{2}}\left(1+r^2\right)\cdot\sqrt{1+r^2}\,d\left(r^2\right)-\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}\,d\left(r^2\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{5}\left(1+r^2\right)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}\left(1+r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right]=\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$$

习题 12.5　第二类曲面积分

1. 计算下面第二类曲面积分：

(1) $\iint\limits_S x^2zdydz + y^2dzdx + zdxdy$，其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 的前半个柱面界于 $z=0$ 与 $z=3$ 之间的部分，取前侧.



【解析】（1）由于曲面 S 垂直于 xoy 面，所以 $\iint\limits_S zdxdy = 0$；

（2）$S_{右}: y=\sqrt{1-x^2}$，方向向右，$S_{左}: y=-\sqrt{1-x^2}$，方向向左，

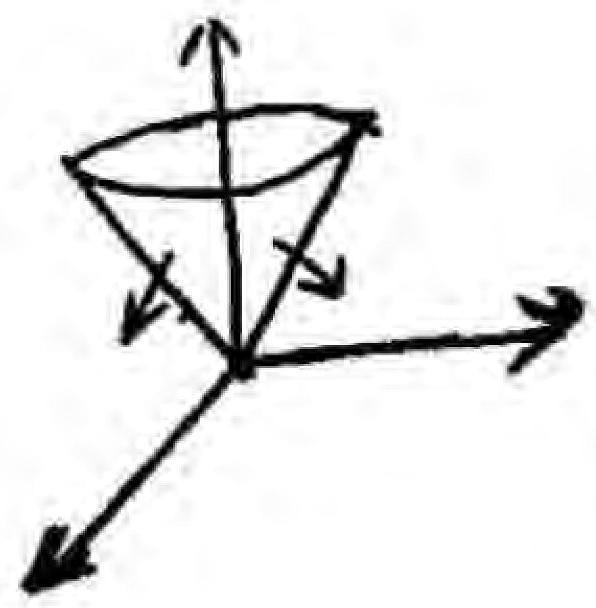
$D_{xz}: 0\le x\le 1, 0\le z\le 3$，则

$$\iint\limits_S y^2dzdx = \iint\limits_{左} + \iint\limits_{右} = \iint\limits_{D_{xz}} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dxdz + \left[-\iint\limits_{D_{xz}} \left(-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dxdz\right] = 0;$$

（3）$S_{前}: x=\sqrt{1-y^2}$，方向向前，$D_{yz}: -1\le y\le 1, 0\le z\le 3$，则

$$\iint\limits_S x^2zdydz = \iint\limits_{D_{yz}} \left(1-y^2\right)z\,dydz = \int_0^3 zdz\int_{-1}^1 \left(1-y^2\right)dy = 6$$

(2) $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dzdx + zdxdy$，其中 S：$z=\sqrt{x^2+y^2}\ \left(0\le z\le 1\right)$ 的下侧.



【解析】（1）$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$；

（2）$\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dzdx + zdxdy = \iint\limits_S \left[\left(x^2+y^2\right)\cos\beta + z\cos\gamma\right]dS$

$$= \iint\limits_S \left[\left(x^2+y^2\right)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + z\right]\cos\gamma dS$$

又 $\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$，则 $\vec{n}^0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$，

$$\text{则原式} = \iint\limits_S \left[\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy$$

$$= \iint\limits_S \left[(1-y)\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \left[(1-y)\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left[(y-1)\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r\sin\theta - 1)\cdot r\cdot rdr = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\sin\theta - \frac{1}{3}\right)d\theta = -\frac{2\pi}{3}$$

(3) $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

【解析】（1）由轮换对称性可知 $\iint\limits_S xdydz = \iint\limits_S ydzdx = \iint\limits_S zdxdy$，所以

$$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\iint\limits_S zdxdy\text{；}$$

（2）计算 $\iint\limits_S zdxdy$

$\sum_1: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上侧；$\sum_2: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，下侧；$D_{xy}: x^2+y^2\le R^2$；

则 $\iint\limits_S zdxdy = \iint\limits_{\sum_1} zdxdy + \iint\limits_{\sum_2} zdxdy$

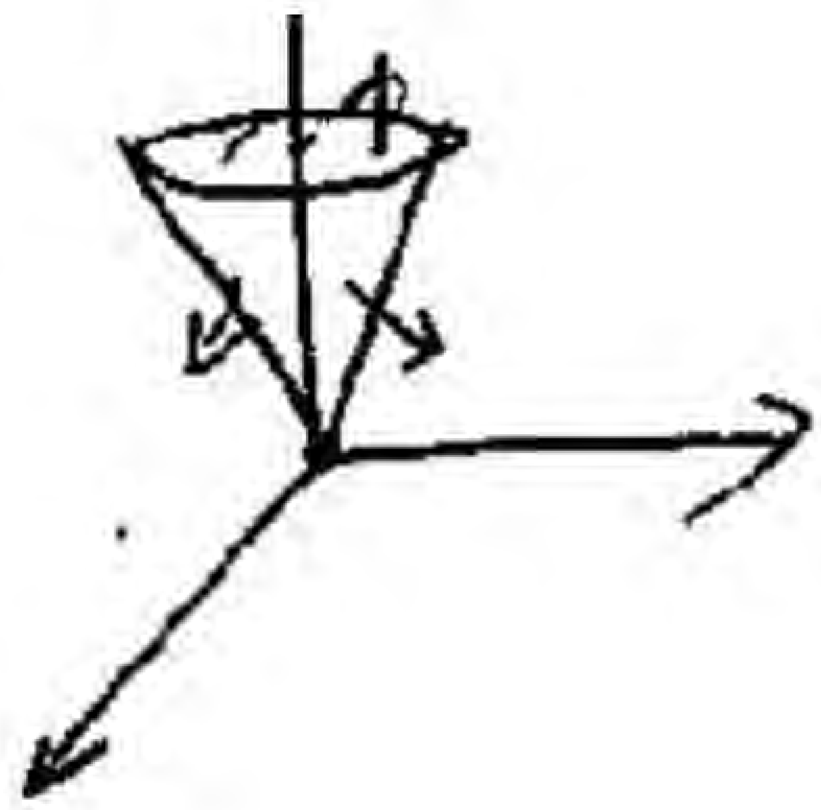
$$= \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} \left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)dxdy$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy = 2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R \sqrt{a^2-r^2}\cdot rdr = \frac{4}{3}\pi R^3$$

（3）$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$.

2. 已知速度场 $\vec{v}(x,y,z)=\{x,y,z\}$，求流体在单位时间内通过上半锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的
锥体表面向外流出的流量.（利用两类曲面积分关系计算）

【解析】（1）$\Phi=\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$；



（2）$S_1: z=\sqrt{x^2+y^2}$，$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，方向向下，

$S_2: z=1$，$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，方向向上，

则 $\Phi=\iint\limits_S=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}$

（3）$\iint\limits_{S_1}=\iint\limits_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS = \iint\limits_{S_1}\left(x\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+y\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+z\right)\cos\gamma dS$

又 $\vec{n}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$，则 $\vec{n}^0=\frac{1}{|\vec{n}|}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$，则

$$\iint\limits_{S_1}=\iint\limits_{S_1}\left(x\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+y\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+z\right)\cos\gamma dS$$

$$=\iint\limits_{S_1}\left[x\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+y\cdot\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\left[-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy = \iint\limits_{D_{xy}}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy = 0\text{；}$$

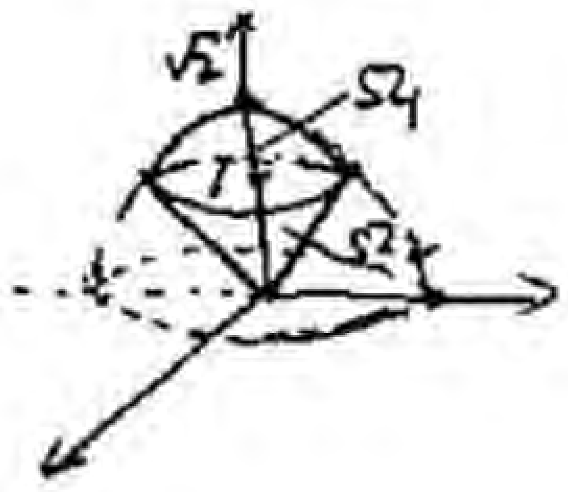
（4）$\iint\limits_{S_2} \overset{\text{垂直性}}{=} \iint\limits_{S_2} zdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} 1dxdy = \pi$；

（5）原式=π

习题 12.6　Gauss 公式

1. 计算曲面积分：$I=\oiint\limits_S 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中 S 是由曲面

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成立体的表面外侧.



【解析】（1）$I\overset{\text{高斯公式}}{=}\iiint\limits_\Omega[2z+z+(-2z)]dV=\iiint\limits_\Omega zdV$；

（2）$\iiint\limits_\Omega zdV=\iiint\limits_{\Omega_1} zdV+\iiint\limits_{\Omega_2} zdV$，其中 Ω_1,Ω_2 如图所示

（3）$\iiint\limits_{\Omega_1} zdV=\int_1^{\sqrt{2}}\left[\iint\limits_{D_z} zdxdy\right]dz\qquad D_z:x^2+y^2\le 2-z^2$

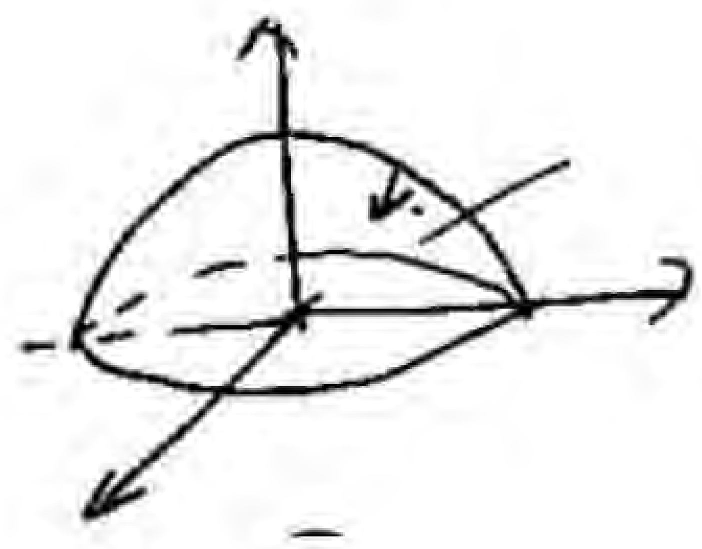
$$=\int_1^{\sqrt{2}} z\cdot\pi(2-z^2)dz=\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2z-z^3)dz=\frac{\pi}{4}；$$

（4）$\iiint\limits_{\Omega_2} zdV=\int_0^1\left[\iint\limits_{D_z} zdxdy\right]dz\qquad D_z:x^2+y^2\le z^2$

$$=\int_1^{\sqrt{2}} z\cdot\pi z^2dz=\pi\int_1^{\sqrt{2}} z^3dz=\frac{\pi}{4}；$$

（5）$I=\dfrac{\pi}{2}$

2. 计算 $\iint\limits_S xzdxdz+yzdzdx+x^2dxdy$，其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的内侧.



【解析】（1）添加辅助曲面 $S_1:z=0$，方向向上，$D_{xy}:x^2+y^2\le a^2$；

（2）$\iint\limits_S xzdxdz+yzdzdx+x^2dxdy=\oiint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1}$；

（3）$\oiint\limits_{S+S_1}=-\iiint\limits_\Omega(z+z+0)\,dV=-2\iiint\limits_\Omega z\,dV$

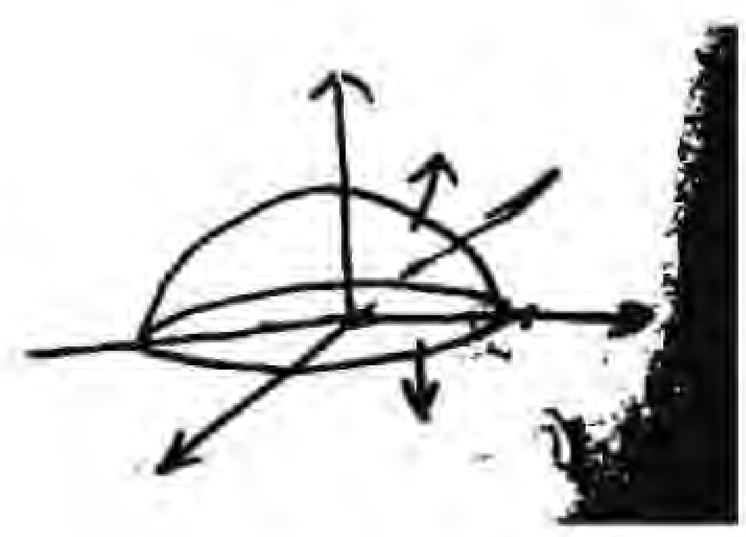
$$=-2\int_0^a\left[\iint\limits_{D_z} zdxdy\right]dz=-2\int_0^a z\cdot(a^2-z^2)dz=-\frac{\pi}{2}a^4；$$

（4）$\iint\limits_{S_1}\overset{\text{垂直性}}{=}\iint\limits_{S_1}x^2dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy\overset{\text{轮换对称}}{=}\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy\overset{\text{极坐标}}{=}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot r\,dr=\frac{\pi}{4}a^4$

（5）$\iint\limits_S xzdxdz+yzdzdx+x^2dxdy=-\dfrac{\pi}{2}a^4-\dfrac{\pi}{4}a^4=-\dfrac{3\pi}{4}a^4$

3. 计算 $\iint\limits_S\dfrac{xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 表示上半

球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧.



【解析】（1）$\iint\limits_S\dfrac{xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$

$$=\frac{1}{a^2}\iint\limits_S xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy\ ;$$

（2）添加辅助曲面 $S_1:z=0$，方向向下，$D_{xy}:x^2+y^2\le a^2$；

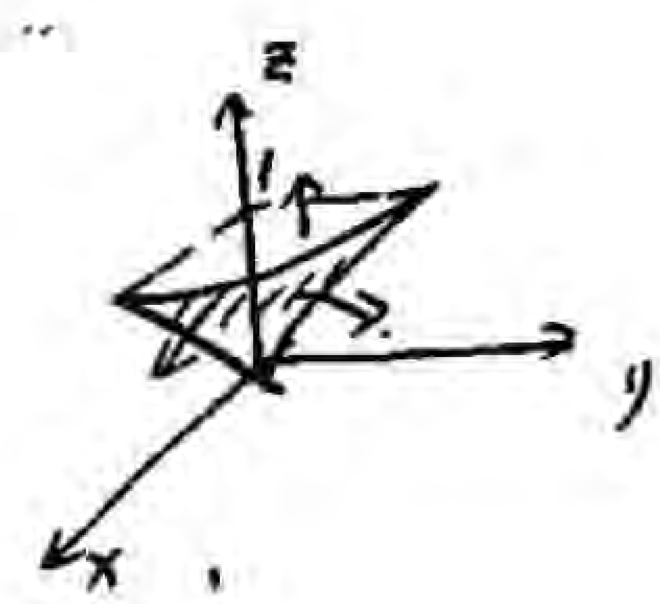
（3）$\iint\limits_S=\oiint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1}$ ；

（4）$\oiint\limits_{S+S_1}=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)\,dV\overset{\text{球坐标}}{=}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{2}{5}\pi a^5$ ；

（5）$\iint\limits_{S_1}\overset{\text{垂直性}}{=}\iint\limits_{S_1}(2xy+y^2z)dxdy=-2\iint\limits_{D_{xy}}xydxdy\overset{\text{对称性}}{=}0$ ；

（6）$\iint\limits_S\frac{xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2}{5}\pi a^5=\frac{2}{5}\pi a^3$

4. 已知流体的流速 $\vec{v}\left(x,y,z\right)=\left\{xy,yz,zx\right\}$，求由平面 $z=1,x=0,y=0$ 和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体 Ω 向外流出的流量.（设流体密度为 1）



【解析】（1）$\Phi=\oiint\limits_S xydydz+yzdzdx+zxdxdy$ ；

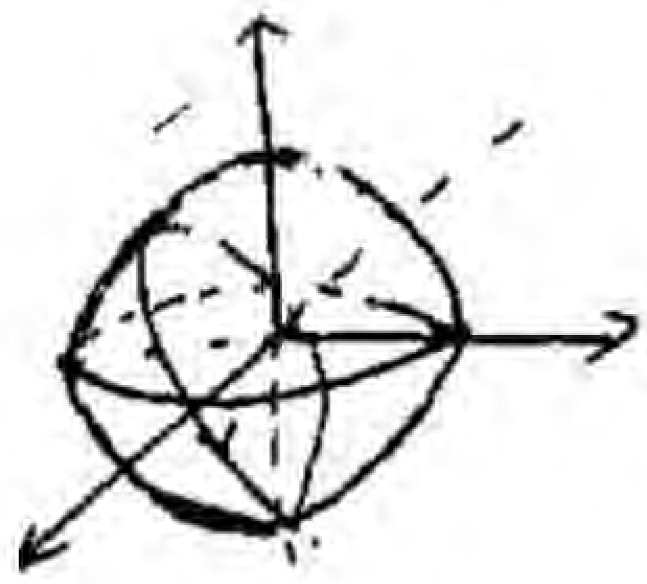
（2）$\Phi\overset{\text{高斯公式}}{=}\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,dV\overset{\text{轮换对称性}}{=}2\iiint\limits_{\Omega}xdV+\iiint\limits_{\Omega}zdV\quad\left(\iiint\limits_{\Omega}xdV=\iiint\limits_{\Omega}ydV\right)$

（3）$\iiint\limits_{\Omega}xdV\overset{\text{柱坐标}}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\cos\theta\cdot rdr\int_r^1 zdz=\int_0^1 r^2(1-r)dr=\frac{1}{12}$；

（4）$\iiint\limits_{\Omega}zdV\overset{\text{截面法}}{=}\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^1 z\cdot\frac{\pi}{4}z^2dz=\frac{\pi}{16}$；

（5）$\Phi=\frac{1}{6}+\frac{\pi}{16}$

习题 12.7　Stokes 公式



1. 利用 Stokes 公式计算 $\oint_L ydx+zdy+xdz$，其中 L 为圆周

$L: x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$ 从 z 轴正向看

去沿逆时针方向.

【解析】(1) $\sum: z=-x-y$，方向向上；$\vec{n}=(1,1,1),\ \vec{n}^0=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$；

(2) $$\oint_L ydx+zdy+xdz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma [(0-1)-(1-0)+(0-1)]\,dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma 1dS=-\sqrt{3}\pi a^2$$

2. 计算 $I=\oint_L xydx+z^2dy+zxdz$，其中 L 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $x^2+y^2=2ax\left(a>0\right)$ 的交线，从 z 轴正向看去沿逆时针方向.

【解析】$\sum: z=\sqrt{x^2+y^2}$，方向向上；

$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & z^2 & zx \end{vmatrix}=\iint_\Sigma (-2z)dydz-zdzdx-xdxdy$$

$$=-\iint_\Sigma 2zdydz+zdzdx+xdxdy \qquad \vec{n}=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right),\ \vec{n}^0=\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}$$

$$=-\iint_\Sigma (2z\cos\alpha+z\cos\beta+x\cos\gamma)dS=-\iint_\Sigma\left(2z\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+z\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+x\right)\cos\gamma dS$$

$$=-\iint_\Sigma\left(2z\cdot\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}+z\cdot\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dxdy=\iint_\Sigma(2x+y-x)dxdy=\iint_\Sigma(x+y)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x+y)dxdy \qquad D_{xy}: x^2+y^2\le a^2\ (a>0)$$

$$\overset{\text{对称性}}{=}\iint_{D_{xy}}xdxdy\overset{\text{极坐标}}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\cos\theta\cdot rdr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\left(\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2a\cos\theta}\right)d\theta=\frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{16a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{16a^3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi a^3$$

习题 12.8　场论初步

1. 求函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数和梯度.

【解析】(1) $\overline{AB}=(2,-2,1)$，$l=\overline{AB}^0=\frac{1}{3}(2,-2,1)$，即 $\cos\alpha=\frac{2}{3},\cos\beta=-\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{1}{3}$；

(2) $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma\right)\right|_A$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\left.\left[1\cdot\frac{2}{3}+\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{1}{3}\right]\right|_A=\frac{1}{2}；$$

(3) $$\left.gradu\right|_A=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_A=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\left.\left(1,\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)\right|_A=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$

2. 设 $u(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$，问 $u(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处朝何方向的方向导数最大？

并求此时方向导数.

【解析】(1) 由方向导数与梯度关系可知 $u(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处沿梯度方向的方向导数最大，且方向导数为

该梯度的模；

(2) $gradu=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$，则 $\frac{\partial u}{\partial l}=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$

3. 设数量导数 $u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数，求

(1) $\mathbf{grad}u$ ；　　(2) $div(\mathbf{grad}u)$ ；　　(3) $rot(\mathbf{grad}u)$.

【解析】(1) $gradu=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$；

(2) $div(gradu)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$；

(3) $$rot(gradu)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=(0,0,0)=\vec{0}$$

自 测 题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则

$\int_L\left(x^2+y-z\right)ds=$____________.

【解析】$\int_L\left(x^2+y-z\right)ds=\int_L x^2ds+\int_L yds-\int_L zds$

$$=\frac{1}{3}\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)ds+\frac{1}{3}\int_L(x+y+z)ds-\frac{1}{3}\int_L(x+y+z)ds$$

$$=\frac{1}{3}\int_L a^2ds=\frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a=\frac{2\pi a^3}{3}$$

2. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 按逆时针方向绕行，则

$\oint_L\frac{(2xy-3y)dx+\left(x^2-5x\right)dy}{x^2+y^2}=$____________.

【解析】添加辅助曲线 $l:x^2+y^2\le\varepsilon^2(\varepsilon>0)$，方向逆时针方向；

$$\oint_L=\oint_{L+l}-\oint_l=0-\oint_l=\oint_{l^-}\frac{(2xy-3y)dx+\left(x^2-5x\right)dy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{l^-}(2xy-3y)dx+\left(x^2-5x\right)dy=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D'}(-2)dxdy=-2\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\varepsilon^2=-2\pi$$

3. 设 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=2$ 所割下的有限部分，则

$\iint_S\left(xy+yz+z^2\right)dS=$__________.

【解析】由对称性可知

$$\iint_S\left(xy+yz+z^2\right)dS=\iint_S z^2dS=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cdot rdr=8\sqrt{2}\pi$$

4. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，则 $\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=$__________.

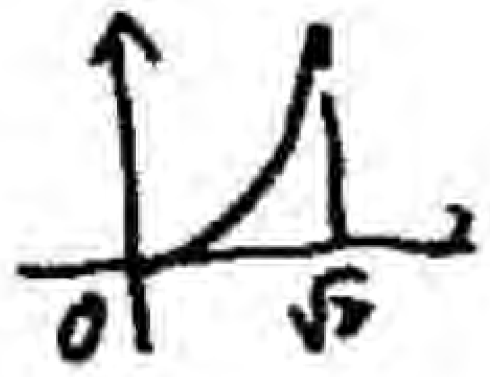
【解析】利用高斯公式得 $\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dV\overset{\text{球坐标}}{=}\frac{12}{5}\pi$

5. 设 $\overline{F}(x,y,z)=\left\{e^x\sin y,2xy^2+z,xzy^2\right\}$，则 $div\overline{F}\big|_{(1,0,1)}=$____________，

$rot\overline{F}\big|_{(1,0,1)}=$__________.

【解析】利用公式计算得 $div\overline{F}\big|_{(1,0,1)}=0$，$rot\overline{F}\big|_{(1,0,1)}=(-1,0,-e)$

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.



6. 已知曲线$L: y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$，则$\int_L xds=$（　　）.

$(A)\ 2$　　　　$(B)\ 0$　　　　$(C)\ \frac{13}{6}$　　　　$(D)\ \frac{5}{6}$

【解析】$\int_L xds=\int_0^{\sqrt{2}}x\cdot\sqrt{4x^2+1}dx=\frac{13}{6}$

7. 设L是柱面方程$x^2+y^2=1$与平面$z=x+y$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，则曲线

积分$\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$（　　）.

$(A)\ \pi$　　　　$(B)\ 2\pi$　　　　$(C)\ 0$　　　　$(D)\ 1$

【解析】$\sum: z=x+y;\quad D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，方向向上

原式=$\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz & x & \frac{y^2}{2}\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(-y-x+1)dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{D_{xy}}(-y-x+1)\cdot\sqrt{3}dxdy=\pi$

8.设曲线积分$\oint_L\left[f(x)-e^x\right]\sin ydx-f(x)\cos ydy$与路径无关，其中$f(x)$具有一阶连续导数，且

$f(0)=0$，则$f(x)$等于（　　）.

$(A)\ \frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^x\right)$　　$(B)\ \frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$　　$(C)\ \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)-1$　　$(D)\ 1-\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

【解析】$P=\left(f(x)-e^x\right)\sin y,\ Q=-f(x)\cos y$，因为积分与路径无关，则

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow f'(x)+f(x)=e^x$，

解一阶非齐次线性微分方程得：$f(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)$；又$f(0)=0\Rightarrow C=-\frac{1}{2}$，则选 B

9. 设S为曲面$x^2+2y^2+z^2=1$，在下面积分中，积分值均为 0 的是（　　）.

$(A)\ \iint\limits_S z^2dS$与$\iint\limits_S z^2dxdy$　　　　$(B)\ \iint\limits_S zdS$与$\iint\limits_S zdxdy$

$(C)\ \iint\limits_S zdS$与$\iint\limits_S z^2dxdy$　　　　$(D)\ \iint\limits_S yzdS$与$\iint\limits_S xdydz$

【解析】由对称性可知 $\iint\limits_S zdS=\iint\limits_S yzdS=0$，$\iint\limits_S z^2dS\neq 0$，$\iint\limits_S zdxdy\neq 0,\iint\limits_S xdxdy\neq 0$，$\iint\limits_S z^2dxdy=0$，所以答案选 C

10. 设函数 $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2-z$ 在点 $P\left(1,1,1\right)$ 处沿单位向量 $\vec{v}$ 的方向增加最快，则 $\vec{v}$=（　）.

$(A)\ \frac{1}{3}(2,2,-1)$　　$(B)\ \frac{1}{3}(-2,-2,1)$　　$(C)\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$　　$(D)\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

【解析】(1) 该方向为梯度方向，梯度 $\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right|_P=(2,2,-1)$；

(2) $\vec{v}$ 为梯度的单位向量 $\frac{1}{3}\left(2,2,-1\right)$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11.已知一非均匀金属丝 L 的方程为 $L:x=a\left(t-\sin t\right),y=a\left(1-\cos t\right),0\le t\le 2\pi$，它在点 $\left(x,y\right)$ 处的线密度

为 $\rho\left(x,y\right)=\left|y\right|$，求该金属丝的质量.

【解析】(1) $M=\int_L\rho(x,y)ds=\int_L|y|ds$；

(2) $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+[a\sin t]^2}dt=2a\sin\frac{t}{2}dt$；

(3)

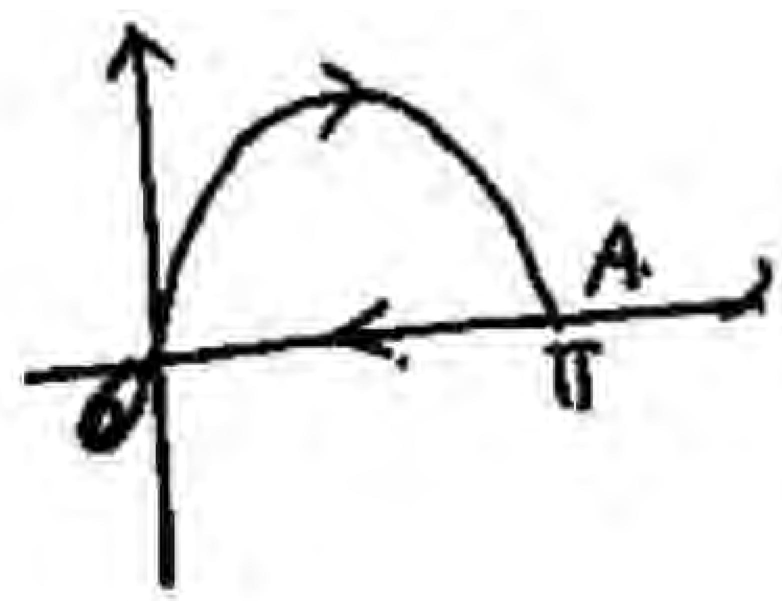
$$M=\int_0^{2\pi}|a(1-\cos t)|\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt=2a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=2a^2\int_0^{2\pi}\left[1-(1-2\sin^2\frac{t}{2})\right]\cdot\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt\overset{\frac{t}{2}=u}{=}8a^2\int_0^{\pi}\sin^3 udu=8a^2\int_0^{\pi}(1-\cos^2u)d(-\cos u)=\frac{32}{3}a^2$$

12. 计算曲线积分 $\int_L\sin 2xdx+2\left(x^2-1\right)ydy$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 从 $\left(0,0\right)$ 到 $\left(\pi,0\right)$ 的一段.

【解析】(1) 添加 $\overline{AO}:y=0$，从 $A\to O$；



(2) $\int_L=\oint_{L+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}}$；

(3) $\oint_{L+\overline{AO}}\overset{\text{格林公式}}{=}-\iint\limits_D 4xydxdy=-4\int_0^{\pi}xdx\int_0^{\sin x}ydy$

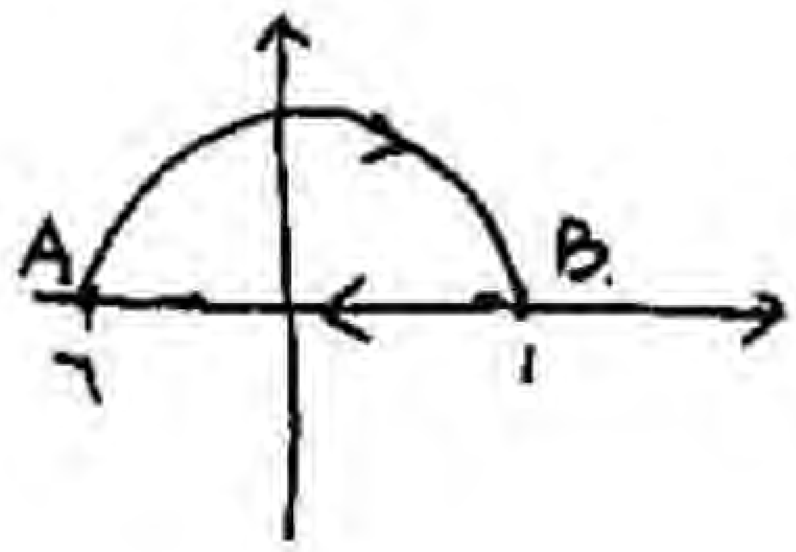
$$=-4\int_0^{\pi} x\cdot\frac{1}{2}\sin^2 x dx=-\frac{1}{2}\pi^2\ ;$$

（4）$\int_{\overline{AO}}=\int_{\pi}^{0}\sin 2xdx=0$；

（5）$\int_L=\oint_{L+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}}=-\frac{1}{2}\pi^2$

13.计算曲线积分 $\int_L\frac{\left(xe^x+5y^3x^2+x-4\right)dx-\left(3x^5+\sin y\right)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为从点 $A(-1,0)$ 沿

曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$



到点 $B(1,0)$ 一段弧.

【解析】（1）原式$=\int_L\left(xe^x+5y^3x^2+x-4\right)dx-\left(3x^5+\sin y\right)dy$；

（2）添加 $\overline{BA}: y=0$，$x:1\to -1$；

（3）$\int_L=\oint_{L+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}$ ；

（4）$\oint_{L+\overline{BA}}=-\iint\limits_D(-15x^4-15x^2y^2)dxdy=15\iint\limits_D(x^4+x^2y^2)dxdy$

$$=15\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1(r^4\cos^4\theta+r^4\cos^2\theta\sin^2\theta)\cdot rdr=15\int_0^{\pi}(\cos^4\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta)\cdot\frac{1}{6}d\theta$$

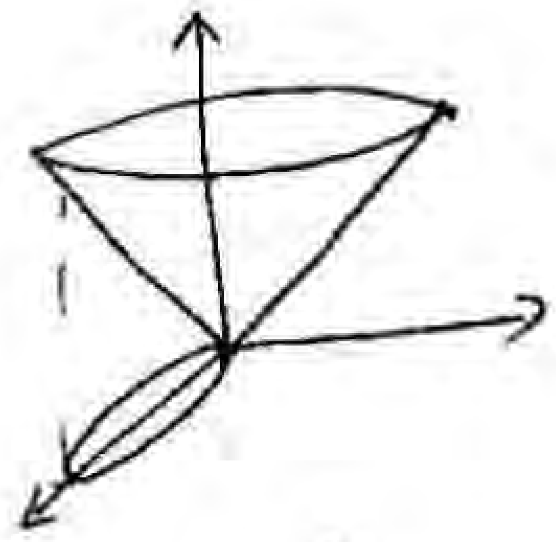
$$=\frac{5}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos^4\theta+\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)\right]d\theta=\frac{5}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta=\frac{5\pi}{4}\ ;$$

（5）$\int_{\overline{BA}}=\int_1^{-1}(xe^2+x-4)dx=-2e^{-1}+8$；

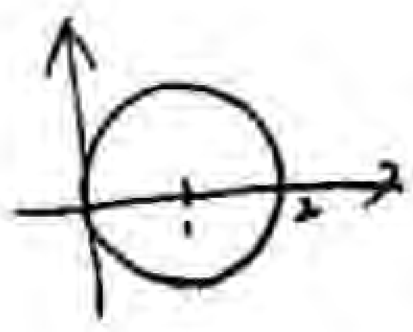
（6）原式$=\frac{5\pi}{4}-8+2e^{-1}$

14. 计算曲面积分 $\iint\limits_S zdS$，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱面 $x^2+y^2\le 2x$ 内部分.

【解析】（1）$\iint\limits_S z\,dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$



$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cdot rdr=\frac{8\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{32\sqrt{2}}{9}$



15. 计算曲面积分 $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中 S 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分前侧.

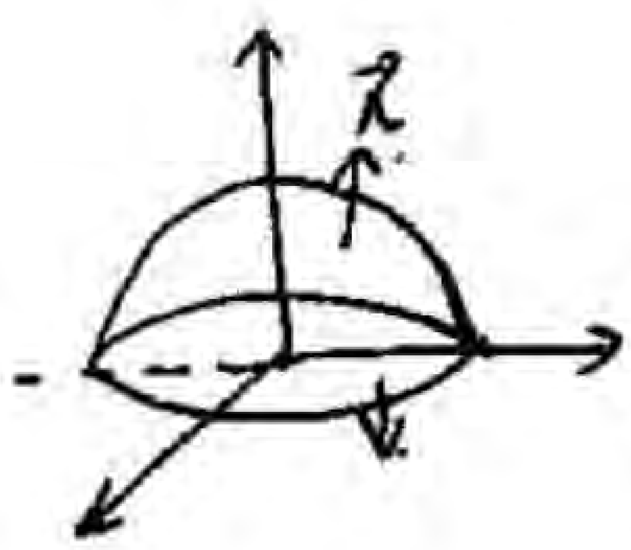
【解析】（1）由垂直线可知 $\iint\limits_S zdxdy = 0$，则原式 $=\iint\limits_S xdydz + ydzdx$；

（2）$\iint\limits_S xdydz = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2}dydz = \int_0^1 dy\int_0^3 \sqrt{1-y^2}dz = 3\int_0^3 \sqrt{1-y^2}dz = \frac{3\pi}{4}$；

（3）$\iint\limits_S ydzdx = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-x^2}dxdz = \int_0^1 dx\int_0^3 \sqrt{1-x^2}dz = 3\int_0^3 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{3\pi}{4}$；

（4）原式 $=\frac{3\pi}{2}$

16.计算曲面积分 $\iint\limits_S \left(x^3+az^2\right)dydz + \left(y^3+ax^2\right)dzdx + \left(z^3+ay^2\right)dxdy$，其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.



【解析】（1）添加 $S_1: z=0$，方向向下；

（2）$\iint\limits_S = \oiint\limits_{S+S_1} - \iint\limits_{S_1}$；

（3）$\oiint\limits_{S+S_1} = \iiint\limits_{\Omega} (3x^2+3y^2+3z^2)\,dV = 3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dV$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2\cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{6\pi}{5}a^5;$$

（4）$\iint\limits_{S_1} \overset{\text{垂直性}}{=} \iint\limits_{S_1} (z^3+ay^2)\,dxdy = \iint\limits_{S_1} ay^2\,dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} ay^2\,dxdy \qquad D_{xy}: x^2+y^2 \le a^2$

$$= -a\iint\limits_{D_{xy}} y^2\,dxdy = -a\cdot\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy = -\frac{a}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a r\cdot r^2 dr = -\frac{\pi}{4}a^5;$$

（5）$\iint\limits_S = \frac{6\pi}{5}a^5 + \frac{\pi}{4}a^5 = \frac{29}{20}\pi a^5$

第十三章　无穷级数

习题 13.1　数项级数的概念

1. 根据级数收敛与发散的定义判别下列级数敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$；

【解析】（1）$\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$；

（2）$S_n=\dfrac{1}{3}\left[\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{3}$，则级数收敛

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$；

【解析】（1）$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$；

（2）$S_n=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n+1}-1$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，则级数发散

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$；

【解析】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{9}{10}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{9}{10}=\dfrac{9}{10}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}$，

由于公比 $q=-\dfrac{9}{10}$，$|q|<1$，所以原级数收敛

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n}{6}\pi$

【解析】$u_{12n+k}=\sin\left(\dfrac{12n+k}{6}\pi\right)=\sin\left(2n\pi+\dfrac{k}{6}\pi\right)=\sin\dfrac{k}{6}\pi=u_k$，所以

$$u_{12n}=u_{12}=0，而\ u_{12n+1}=u_1=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{12n}=0\neq\lim\limits_{n\to\infty}u_{12n+1}=\dfrac{1}{2}$，极限不存在，所以原级数发散.

2. 判别下列级数敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3^n}{n^2\bullet 3^n}$；

【解析】（1） $\frac{n^2+3^n}{n^2\cdot 3^n}=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{n^2}$；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$， $q=\frac{1}{3}<1$，该级数收敛；又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$， $p=2>1$，该级数收敛；

（3）由性质可知原级数收敛

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{n}$.

【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}n\tan\frac{\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{\pi}{n}=\pi\neq 0$

3. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，证明$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_{n+1}-a_n)$收敛.

【解析】 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$部分和数列为S_n， $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_{n+1}-a_n)$部分和数列为$\sigma_n$；

因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$；

又因为$\sigma_n=2(a_2-a_1)+3(a_3-a_2)+\cdots+(n+1)(a_{n+1}-a_n)=-a_1-S_n+(n+1)a_{n+1}$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=-a_1-S$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_{n+1}-a_n)$收敛

习题 13.2　数项级数的收敛判别法

1. 用比较判别法收敛或其极限形式判别下列级数敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$.

【解析】（1） $n\to\infty,\ 1-\cos\frac{2}{n}\sim\frac{2}{n^2}$，又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以原级数收敛；

（2） $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}=0$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，则原级数发散；

（3） $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，则原级数发散；

（4） ① $0<a<1$ 时， $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1\neq 0$，发散；

② $a=1$ 时， $\frac{1}{1+a^n}=\frac{1}{2}$，通项极限不区域零，则发散；

③ $a>1$ 时， $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{1+a^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a^n}+1\right)=1$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，所以原级数收敛.

2. 用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}$.

【解析】（1） $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{(2n)!}{[2(n+1)]!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0<1$，原级数收敛；

（2） $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1$，原级数收敛；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3+(-1)^n}{2^n}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+(-1)^n}=\dfrac{1}{2}<1$，原级数收敛；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}=2>1$，原级数发散

3. 判别下列级数敛散性，若收敛，说明是条件收敛还是绝对收敛.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-n}}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

【解析】（1）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-n}}\right|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}$，而$\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}>\dfrac{1}{n}$，又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以由比较判别法可知$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}$发散；而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-n}}$中$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}=0$，且$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}$随$n$的增大而减小，由莱布尼兹判别法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-n}}$收敛；综上所述原级数条件收敛.

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3}\cdot\dfrac{3^{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n}=\dfrac{1}{3}<1$，原级数绝对收敛.

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{2^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+1}}{n+1}\to\infty$，原级数发散.

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{\ln(n+1)}}=0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$发散；

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$中中$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0$，且$u_n=\dfrac{1}{\ln(n+1)}$随$n$的增大而减小，由莱布尼兹判别法得

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$收敛；综上所述原级数条件收敛.

4. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，且$a_n\neq-1(n=1,2,\cdots)$，试证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{1+a_n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n^{\ 2}}{1+a_n^{\ 2}}$都收敛，

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$发

散.

【证明】(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$都收敛且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)=1$，$\exists\varepsilon=\frac{1}{2},\exists N\in \mathrm{N},\forall n>N,1+a_n>\frac{1}{2}$，$\left|\frac{1}{1+a_n}\right|\le 2,\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right|\le 2|a_n|$,

而$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，由比较判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$必收敛；

(3) $\left|\frac{{a_n}^2}{1+{a_n}^2}\right|\le|a_n|^2$，而$\lim_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow\exists M>0$，$|a_n|\le M\Rightarrow|a_n|^2\le M\,|a_n|$，由比较判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{a_n}^2}{1+{a_n}^2}$绝对收敛，则原级数比收敛；

(4)(反证法)假设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$收敛，则$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n}=0$，进而$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$与已知$\lim_{n\to\infty}a_n=0$矛盾，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$

发散.

习题 13.3　幂级数

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n5^n}$；

【解析】（1）

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{n\cdot 5^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{5}(x-2)\right|=\frac{1}{5}|(x-2)|<1\Rightarrow |x-2|<5\ ,$$

$R=5$；

（2）解得收敛区间为$(-3,7)$；

（3）当$x=-3$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛；当$x=7$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散；

（4）收敛域为$[-3,7)$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\bullet 2^n\bullet x^{2n}$.

【解析】（1）$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\cdot 2^{n+1}\cdot x^{2n+2}}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot 2^n\cdot x^{2n}}\right|=2|x|^2<1\Rightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$R=\frac{1}{\sqrt{2}}$；

（2）收敛区间为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$；

（3）$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot 2^n\cdot\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$发散（因为部分和极限不存在）；

（4）收敛域为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. 求下列幂级数的和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n\quad\left(|x|<1\right)$；

【解析】（1）计算得收敛域为$(-1,1)$；

（2）$\forall x\in(-1,1)$，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+1\right)x^n=1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$，

$$S(x)=x(1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\cdots)=x(x^2+x^3+x^4+\cdots)''=x\cdot\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2x}{(1-x)^3}.$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\quad\left(\left|x\right|<1\right)$，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n$的和.

【解析】（1）计算得收敛域为$[-1,1]$；

（2）$\forall x\in(-1,1)$，令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots$，$S(0)=0$；

$S'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\frac{1}{1+x^2}$；

（3）$\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$，$S(x)-S(0)=\arctan x\Rightarrow S(x)=\arctan x$，

$x\in[-1,1]$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2n+1\right)x^{2n}}{n!}$，并求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!2^n}$的和.

【解析】（1）计算得收敛域为R

（2）$\forall\ x\ \in\ R$，$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2n+1\right)x^{2n}}{n!}$，则$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{n!}=xe^{x^2}$；

两边求导，得

$S(x)=(1+2x^2)e^{x^2}$，$\forall x\in R$

（3）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=S_1'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left[1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=2e^{\frac{1}{2}}$.

3. 将函数$f\left(x\right)=\left(1+x\right)\ln\left(1+x\right)$展开成$x$的幂级数.

【解析】（1）$f'\left(x\right)=1+\ln\left(1+x\right), f''\left(x\right)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$x\in(-1,1)$；

（2）逐项积分得：

$$f'(x)-f'(0)=\int_0^x f''(t)dt=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

又 $f'(0)=1$，则 $f'(x)=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$；

（3）逐项积分得：

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\right]dt=x+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}dt$$

$$=x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)(n+2)}x^{n+2},$$

又 $f(0)=0$，则 $f(x)=x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}$， $x\in(-1,1)$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(n-1)}x^n, \qquad x\in(-1,1);$$

（4） $x=1$ 时，收敛；$x=-1$ 时，收敛，所以 $f(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(n-1)}x^n$， $x\in[-1,1]$.

4. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

【解析】（1） $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2+(x-1)}-\frac{1}{4+(x-1)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{4}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)\cdot(x-1)^n;$$

（2） $\begin{cases}\left|-\frac{x-1}{2}\right|<1\Rightarrow|x-1|<2\\ \left|-\frac{x-1}{4}\right|<1\Rightarrow|x-1|<4\end{cases}\Rightarrow|x-1|<2$；

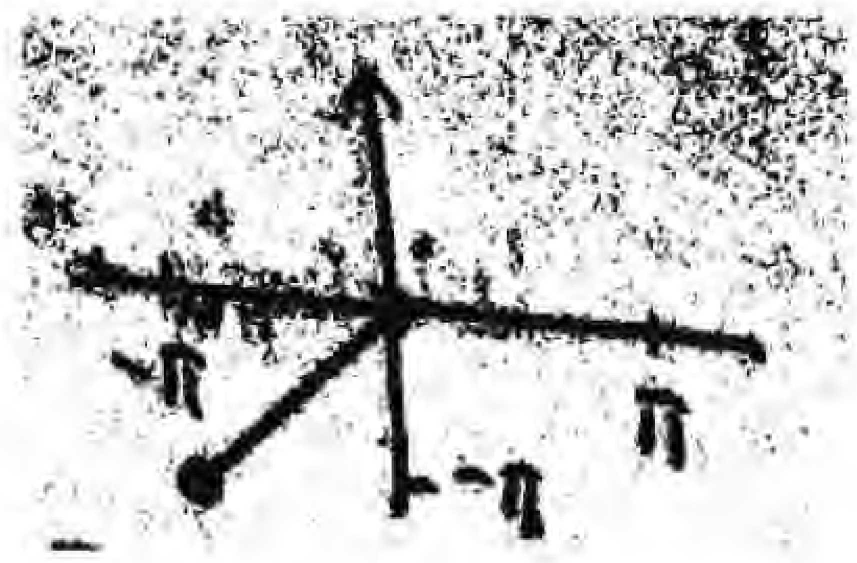
（3） $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{2n+1}}\right)\cdot(x-1)^n \qquad (|x-1|<2)$.

习题 13.4　Fourier 级数

1. 设 $f\left(x\right)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x & -\pi<x<0; \\ 0 & 0\le x\le\pi. \end{cases}$$

将 $f\left(x\right)$ 展开成以 2π 为周期的 Fourier 级数.



【解析】（1）间断点 $x=k\pi(k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots)$ 处收敛于 $-\dfrac{\pi}{2}$；

（2）$x\neq k\pi(k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots)$ 收敛于 $f(x)$；

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,dx=-\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}x\,d(\sin nx)=\frac{1-\cos n\pi}{\pi n^2}=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi n^2}, & n=1,3,5,\cdots \\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}x\,d(\cos nx)=-\frac{1}{n}\cos n\pi=\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right].$$

2. 将函数 $f\left(x\right)=x-1\left(0\le x\le 2\right)$ 展开成以 4 为周期的余弦级数.

【解析】所给函数定义在半周期上，因此作偶延拓及周期延拓展成余弦函数.

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\int_0^2(x-1)dx=0;$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\dfrac{8}{\pi^2n^2}, & n=1,3,5,\cdots \\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

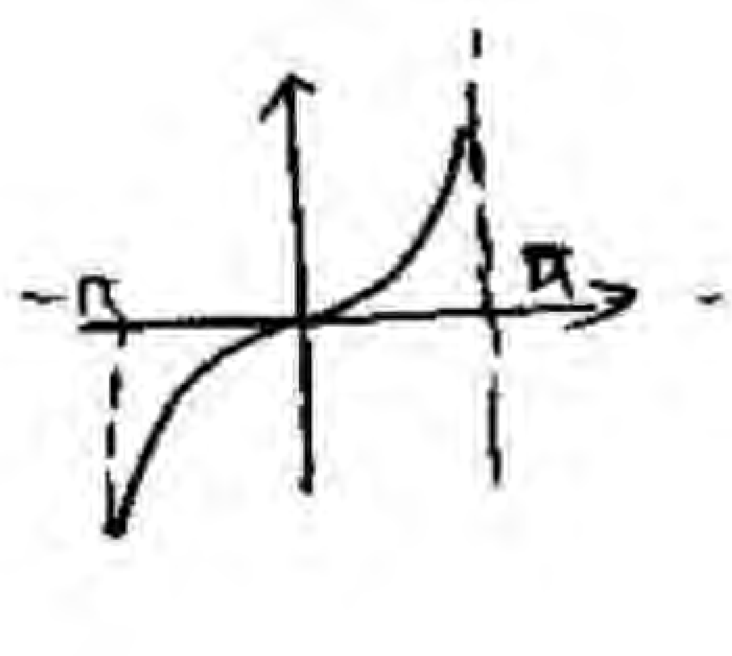
；

则 $f(x)=-\dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\qquad x\in[0,2]$

3. 将函数 $f\left(x\right)=x^2\left(0\le x\le\pi\right)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

【解析】（1）正弦级数

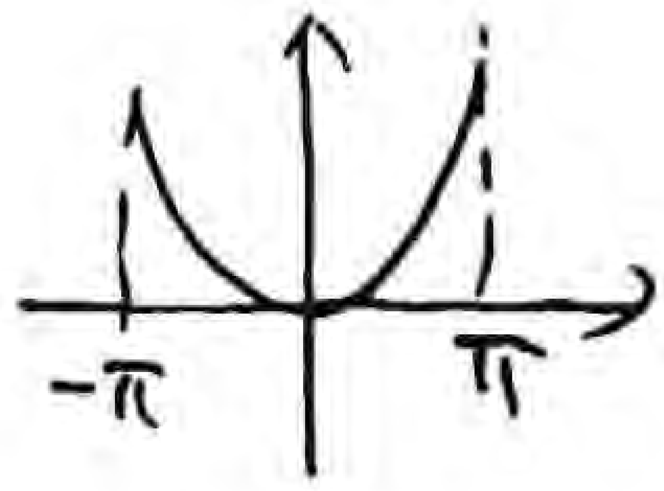
$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$；



$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n - 1];$$

所以 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n - 1]\right\}\cdot \sin nx \qquad x \in (0,\pi)$；

（2）余弦级数



$b_n = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots)$；

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = (-1)^n \frac{4}{n^2};$$

所以 $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2}\cdot \cos nx \qquad x \in [0,\pi]$

自 测 题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$___$\sqrt{3}$___.

【解析】$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{(-3)^{n+1}+2^{n+1}}x^{2n+1}}{\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{(-3)^n+2^n}{(-3)^{n+1}+2^{n+1}}\cdot x^2\right|=\frac{1}{3}|x|<1\Rightarrow|x|<\sqrt{3}$

2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为___$(-2,4)$____.

【解析】逐项求导和逐项求积分不改变级数的收敛半径和收敛区间，由 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，可得数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径也为 3，即数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛半径也为 3，则 $-3<x-1<3$，解得 $(-2,4)$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$__4___.

【解析】考查幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，在收敛区间内，记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，

则 $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=S\left(\frac{1}{2}\right)=4$.

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x\le 0\\ 1+x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$，以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于__$\frac{\pi^2}{2}$__.

【解析】函数在点 $x=\pi$ 处是间断点，由狄里克莱收敛定理可知在点 $x=\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{1+\pi^2+(-1)}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$

5. $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式中系数 $b_3=$__$\frac{2}{3}\pi$__.

【解析】$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,dx=\frac{2}{3}\pi$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 下列选项正确的是（A）.

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛； (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛；

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $a_n \geq \frac{1}{n}$； (D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $a_n \geq \frac{1}{n}$.

【解析】A 正确，$(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n$，又 $a_n b_n \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$，由比较判别法可得级数收敛；

B 错误，反例取 $a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, b_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$；

C 错误，正项级数的比较判别法只是充分而非充要条件；

D 错误，反例 $a_n = \frac{0.5}{n}$

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$（$a$ 为常数）(C).

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 收敛性与 a 有关

【解析】$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2}$：$\left|\frac{\sin na}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$，由比较判别法，该级数绝对收敛；

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$：由 $p-$级数可知该级数发散；再由级数的性质，可知原级数发散.

8. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \bullet \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}} (\alpha > 0)$ (A).

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 收敛性与 α 有关

【解析】$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \bullet \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}}$，而 $\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}} \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2+\alpha}\right)$，由级数的性质、$p-$级数以及比较判别法可知原级数绝对收敛.

9. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，该幂级数在 $x=2$ 处 (B).

(A) 条件收敛 (B) 绝对收敛 (C) 发散 (D) 敛散性不定

【解析】由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t=-2$ 处收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 在 $(-2,2)$ 的开区间内绝对收敛，则当 $x=2$ 处 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 绝对收敛.

10. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n \bullet 2^n}$ 的收敛域为 (C).

(A) $(1,5)$ (B) $[1,5)$ (C) $(1,5]$ (D) $[1,5]$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}\dfrac{(x-3)^{n+1}}{2(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{(-1)^{n}\dfrac{(x-3)^{n}}{2n\cdot 2^{n}}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2n}{2(n+1)}\cdot\dfrac{2^{n}}{2^{n+1}}\cdot(x-3)\right|=\dfrac{1}{2}|x-3|<1\Rightarrow|x-3|<2$

则收敛半径为2，收敛区间为$(1,5)$；验证可知在$x=1$点处$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{(-2)^{n}}{2n\cdot 2^{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$发散，而在$x=5$点处

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{(2)^{n}}{2n\cdot 2^{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{2n}$，由交错级数的判别法可知收敛，所以收敛域为$\left(1,5\right]$

三、解答题（每小题10分，共60分）.

11. 判别下列级数敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{2}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}$ ；

【解析】该级数是正项级数，利用根值判别法进行判别：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^{2}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^{2}}}{n+\dfrac{1}{n}}=0<1$，级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n}\sin\dfrac{\pi}{3^{n}}$.

【解析】该级数是正项级数，利用比较判别法的极限形式

$n\to\infty,2^{n}\sin\dfrac{\pi}{3^{n}}\sim 2^{n}\cdot\dfrac{\pi}{3^{n}}=\pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}$收敛，所以原级数收敛.

12. 讨论下列级数是绝对收敛，还是条件收敛，或发散.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$；

【解析】$\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)=(-1)^{n}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ ，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right|\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{n}$，发散；而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{\pi}{n}$为交错级数，收敛，所以该级数条件收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

【解析】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$，

而$\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}=\dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n}\le\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$，由比较判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$收敛，则原级数绝对收敛.

13. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$在收敛区间内和函数$S(x)$，并计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$的值.

【解析】（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\dfrac{1}{2}|x|^2<1\Rightarrow|x|<\sqrt{2}$，则$R=2$，收敛区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$；

当$x=\pm\sqrt{2}$时，$\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)$发散，则收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$；

（2）$\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\dfrac{1}{x^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$，

$$\text{而}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+2}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'$$

$$=x^2\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=x^2\cdot\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$$

$$\text{所以}S(x)=\frac{1}{x^2}f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}{\left[1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^2}=\frac{x^2+2}{(2-x^2)^2}$$

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}=S(1)=3$

14. 将函数$f(x)=\ln\left(4-3x-x^2\right)$展开成$x$的幂级数.

【解析】（1）$f(x)=\ln\left(4-3x-x^2\right)=\ln[(4+x)(1-x)]=\ln(4+x)+\ln(1-x)$；

（2）$\ln(4+x)=\ln 4+\ln\left(1+\dfrac{x}{4}\right)=2\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{4}\right)^n$

$$=2\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 4^n}x^n\qquad\left(-1<\frac{x}{4}\le 1\Rightarrow -4<x\le 4\right)$$

（3）$\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}(-x)^n=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n\qquad(-1<-x\le 1\Rightarrow -1\le x<1)$

（4）$f(x)=\ln\left(4-3x-x^2\right)=2\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 4^n}x^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n=2\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{(-1)^n}{4^n}-1\right]x^n$

(5) $\begin{cases} -4 < x \le 4 \\ -1 \le x < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \le x < 1$

(6) $f(x) = 2\ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{(-1)^n}{4^n} - 1\right]x^n \qquad (-1 \le x < 1)$.

15. 将函数 $f\left(x\right) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

【解析】 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2} = \dfrac{(x+2)+(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2}$

$$= \frac{1}{1+(x-2)} + \frac{1}{4+(x-2)} = \frac{1}{1+(x-2)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-2}{4}}$$

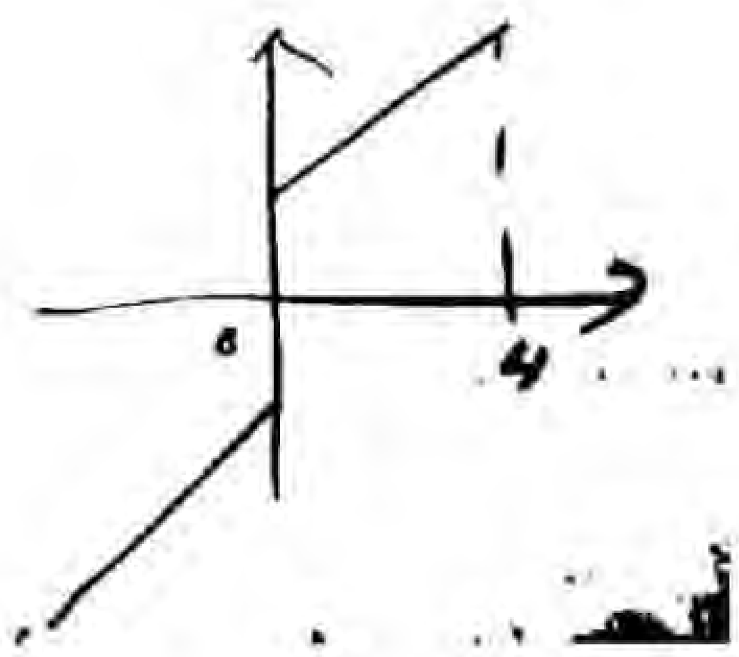
$$= \sum_{n=0}^{\infty}[-(x-2)]^n + \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{x-2}{4}\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[1+\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right](x-2)^n;$$

(2) $\begin{cases} \left|-(x-2)\right| < 1 \\ \left|-\dfrac{x-2}{4}\right| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-2| < 1 \\ |x-2| < 4 \end{cases} \Rightarrow |x-2| < 1$;

(3) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[1+\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right](x-2)^n \qquad (|x-2|<1)$

16. 将函数 $f\left(x\right) = x+2$ 在区间 $[0,4]$ 上展开成正弦级数.



【解析】 $a_n = 0$;

$b_n = \dfrac{2}{4}\int_0^4 (x+2)\sin\dfrac{n\pi}{4}x\,dx = \dfrac{4}{n\pi}[1-3(-1)^n]$;

则 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4}{n\pi}[1-3(-1)^n]\sin\dfrac{n\pi x}{4} \qquad (0 < x < 4)$