安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《线性代数 A》期中考试试卷答案详解

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. D　**2.** C　**3.** A　**4.** D　**5.** C

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 8　**7.** 6　**8.** 1　**9.** -2　**10.** $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11.【解】 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1).$$ 10 分

12.【解】 $D_n=\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \cdots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1+\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)x & x & x & \cdots & x \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{vmatrix}=\frac{1}{n!}\left(1+\frac{n(n+1)}{2}x\right).$$ 10 分

13.【解】 $3A_{11}+2A_{12}-3A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}3&2&-3&1\\0&1&2&3\\3&2&1&0\\0&0&3&2\end{vmatrix}$ 7 分

$$=\begin{vmatrix}3&2&-3&1\\0&1&2&3\\0&0&4&-1\\0&0&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2\\0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4&-1\\3&2\end{vmatrix}=33$$ 10 分

14.【解】（1） $A^2=\left(E-XX^T\right)\left(E-XX^T\right)=E-2XX^T+X\left(X^TX\right)X^T$

$$=E-2XX^T+XX^T=E-XX^T=A;$$ 4 分

（2）由（1）可知 $A^2=A$，得 $A^2-A-2E=-2E\Rightarrow(A-2E)(A+E)=-2E$，有

$\left[-\frac{1}{2}(A-2E)\right](A+E)=E$，由定义可知 $(A+E)^{-1}=-\frac{1}{2}(A-2E)$. 10 分

15. 由 $AB+E=A^2+B$，可得 $(A-E)B=A^2-E=(A-E)(A+E)$ 5 分

而 $A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以 $A-E$ 可逆; 8 分

$B=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 10分

16.【解】

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1&-1&2\\1&4&-1&0&2\\-1&-4&2&-1&0\\2&8&1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-1&0&2\\0&0&-1&-1&2\\-1&-4&2&-1&0\\2&8&1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-1&0&2\\0&0&-1&-1&2\\0&0&1&-1&2\\0&0&3&1&-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&4&-1&0&2\\0&0&-1&-1&2\\0&0&0&-2&4\\0&0&0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-1&0&2\\0&0&-1&-1&2\\0&0&0&-2&4\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$$ 5 分

$$\to\begin{pmatrix}1&4&-1&0&2\\0&0&1&1&-2\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

8 分

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$ 10 分

四、分析题（每小题 12 分，共 12 分）

17.【解】方法一：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&1&a-2&2\\0&2&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&0&a-1&2-b\\0&0&0&4-2b\end{vmatrix}=|A_1|=(a-1)(4-2b),$$ 6 分

下面分四种情况讨论：

（1）当$a\neq1$且$b\neq2$时，$|A|\neq0$，则$r(A)=4$；

（2）当$a\neq1$，$b=2$时，$|A_1|$中已有一个三阶行列式$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&a-1\end{vmatrix}\neq0$，但四阶行列式等于零，则$r(A)=3$；

（3）当$a=1$，$b\neq2$时，$|A_1|$中已有一个三阶行列式$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&b\\0&0&2-b\end{vmatrix}\neq0$，但$|A_1|$中第 3 行与第 4 行成比例，有$|A_1|=0$，则$r(A)=3$；

（4）当$a=1$，$b=2$时，$|A|$的第 3 行和第 4 行全为 0，故$r(A)=2$. 10 分

方法二：$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&1&a-2&2\\0&2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&0&a-1&2-b\\0&0&0&4-2b\end{pmatrix}=A_1$$ 6 分

由A_1可以看出，

（1）当$a\neq1$且$b\neq2$时，A_1中非零行有 4 行，则$r(A)=4$；

（2）当$a\neq1$，$b=2$时，A_1中非零行有 3 行，则$r(A)=3$；

（3）当$a=1$，$b\neq2$时，$A_1\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&0&0&2-b\\0&0&0&0\end{pmatrix}=A_2$，$A_2$中非零行有 3 行，则

$r(A)=3$；

（4）当 $a=1$，$b=2$ 时，A_1 中非零行仅有 2 行，故 $r(A)=2$.　　　　10 分

五、证明题（每小题 8 分，共 8 分）

18.【证明】

（1）$\left(A+A^T\right)^T=A^T+\left(A^T\right)^T=A^T+A$，故 $A+A^T$ 是对称阵；

$\left(A-A^T\right)^T=A^T-\left(A^T\right)^T=A^T-A=-(A-A^T)$，故 $A-A^T$ 是反对称阵；　　6 分

（2）由（1）可知，对于任意方阵 A，可得 $\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)$ 是对称阵，$\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$ 是反对称阵，故有 $A=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)+\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$.　　8 分