线性方程组 迭代法案例

1 问题背景

科学与工程生产中大多数实际问题都归结为偏微分方程的定解问题，由于很难求得这些定解问题的解析解，或者解析解的形式过于复杂，有的在经典意义下甚至没有解，所以人们开始转向求解其数值近似解. 常用的数值解法包括有限差分法、有限元方法和有限体积法等. 在这些方法的作用下，解偏微分方程的问题最终转化为解线性代数方程组的问题.

以 2018 年高教社全国大学生数学建模竞赛 A 题题目为例(节选). 在高温环境下工作时，人们要穿着专用服装以避免灼伤，为设计专用服装，将体内温度控制在$37^{\circ}C$的假人放置在实验室的高温环境中，测量假人皮肤外侧的温度，为降低研发成本、缩短研发周期，需要利用数学模型确定假人皮肤外侧的温度变化情况. 为阐述简单起见，我们对问题进行简化，改变部分数据，仅考虑专用服装只有I层，其材料参数值如下表 4-1，实验持续$600s$，过程中设定假人温度恒为$37^{\circ}C$，环境温度恒为$70^{\circ}C$，试分析服装温度分布情况.

图 4-1 高温作业图

表 4-1

分层	密度 $\left(kg/m^3\right)$	比热 $\left(J/\left(kg\cdot {}^{o}C\right)\right)$	热传导率 $\left(W/\left(m\cdot {}^{o}C\right)\right)$	厚度 $\left(mm\right)$
I 层	300	1377	0.082	6

2 数学模型

记$u=u\left(x,t\right)$为关于位置和时间的温度函数, 分析作业服的传热过程, 综合考虑各种传热方式、边界和初始条件, 建立非稳态一维传热模型

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \left(x,t\right)\in\left[a,b\right]\times\left[0,T\right],$$

其初值条件为

$$u(x,0)=\varphi(x)\ \ x\in\left[a,b\right],$$

边值条件为

$$u(a,t)=\alpha(x)\ \ t\in\left[0,T\right],$$
$$u(b,t)=\beta(x)\ \ t\in\left[0,T\right].$$

其中常数$k^2=\dfrac{\lambda}{c\rho}$, 且$\lambda,c,\rho$分别表示介质的热传导率、介质的比热以及介质密度.结合第一部分问题背景中的数据, 我们有$\left[a,b\right]=\left[0,6\right]$, $T=600$, $k^2=0.198499$, $\varphi\left(x\right)=37$, $\alpha\left(t\right)=37$, $\beta\left(t\right)=70$.

3 计算方法

利用有限差分法解上述非稳态一维传热模型. 有限差分法解偏微分方程的步骤主要分为如下三步：第一步, 区域离散, 即将微分方程的求解区域细分成有限个格点组成的网格, 这些离散点称为网格节点；第二步,近似替代, 即利用有限差分公式替代每一个格点的导数；第三步, 逼近求解, 原问题转化为求解一个线性代数方程组问题, 最后再利用一个插值多项式及其微分来替代微分方程解的过程. 下面简单介绍这三个步骤.

a.区域离散

首先对空间区域$\left[a,b\right]$进行n等分, 得到一组离散后的自变量点, 记作$x_0\left(=a\right),x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\left(=b\right)$,相邻两点之间的距离$h=\dfrac{b-a}{n}$称为空间步长；其次对时间区间$\left[0,T\right]$进行$m$等分, 得到一组离散后的自变量点, 记作$t_0\left(=0\right),t_1,\cdots,t_{m-1},t_m\left(=T\right)$, 相邻两点之间的距离$\tau=\dfrac{T}{m}$称为时间步长. $u\left(x_i,t_j\right)$表

示温度函数在时间与空间网格节点$\left(x_i,t_j\right) i=0,1,\cdots,n, j=0,1,\cdots,m$处的值.

b.近似替代

在节点$\left(x_i,t_j\right), i=1,2,\cdots,n-1, j=0,1,\cdots,m-1$处，利用中心差商公式近似替代对空间的二阶导数, 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{(x_i,t_j)}=\frac{1}{h^2}\left[u(x_{i+1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i-1},t_j)\right],$$

利用向前差分公式近似代替对时间的一阶导数, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{(x_i,t_j)}=\frac{1}{\tau}\left[u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)\right].$$

用u_i^j表示函数值$u\left(x_i,t_j\right)$的近似值. 特别地, 根据已知的初始条件和边界条件, 当$j=0$时, $u_i^0=\varphi\left(x_i\right)$, 当$i=0$时, $u_0^j=\alpha\left(t_j\right)$, 当$i=n$时, $u_n^j=\beta\left(t_j\right)$. 由此, 可得到如下差分方程

$$\frac{1}{\tau}\left[u_i^{j+1}-u_i^j\right]=\frac{k^2}{h^2}\left[u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j\right],$$

整理得如下方程

$$u_i^{j+1}=\gamma u_{i-1}^j+\left(1-2\gamma\right)u_i^j+\gamma u_{i+1}^j$$

其中$\gamma=\dfrac{k^2\tau}{h^2}$, $i=1,2,\cdots,n-1, j=0,1,\cdots,m-1.$

c.逼近求解

将上述代数方程组写成矩阵形式如下：

$$\begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ u_{n-2}^{j+1} \\ u_{n-1}^{j+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-2\gamma & \gamma & & & \\ \gamma & 1-2\gamma & \gamma & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ & & & \gamma & 1-2\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ u_{n-2}^j \\ u_{n-1}^j \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \gamma u_0^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma u_n^j \end{bmatrix}$$

给定初始向量$\left[u_1^0,u_2^0,\cdots,u_{n-2}^0,u_{n-1}^0\right]^{\mathrm{T}}$, 代入方程右端, 得到$\left[u_1^1,u_2^1,\cdots,u_{n-2}^1,u_{n-1}^1\right]^{\mathrm{T}}$, 再将$\left[u_1^1,u_2^1,\cdots,u_{n-2}^1,u_{n-1}^1\right]^{\mathrm{T}}$代入方程右端, 得到$\left[u_1^2,u_2^2,\cdots,u_{n-2}^2,u_{n-1}^2\right]^{\mathrm{T}}$, 以此类推, 这实际上就是解线性方程组的迭代法.

4 算法与结果实现

不妨假定 $h=1,\tau=1$, 即 $n=60,m=600$, 在 Matlab 中编程计算, 求出服装温度场随时间空间的分布情况, 三维图像展示如下:

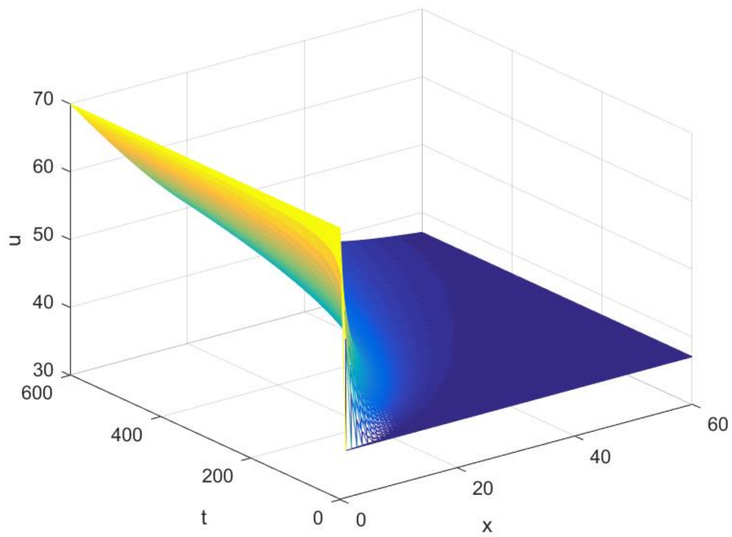

图 4-2 温度分布图