安徽大学 2013—2014 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》（A 卷）

考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、8；　2、$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$（或写成$\begin{cases}x+2z-8=0\\3x+2y-4=0\end{cases}$）；　3、$\dfrac{1}{2}$；

4、$\{-2,3,8\}$（或写成$-2\vec{i}+3\vec{j}+8\vec{k}$）；

5、$f(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right).$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6、A；　7、B；　8、D；　9、C；　10、D.

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11.解：令$F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$，则$F_x=y$，$F_y=x$，$F_z=e^z-1$.

故在$(2,1,0)$处曲面Σ的法向量为$\vec{n}=(F_x(2,1,0),F_y(2,1,0),F_z(2,1,0))=(1,2,0)$.

故在$(2,1,0)$处，曲面Σ的切平面方程为$1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)+0\cdot(z-0)=0$，

即$x+2y-4=0$.

法线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}\\ z=0\end{cases}.$$ （9 分）

12. 解：设$F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，则$F_x=-3yz$，$F_y=-3xz$，$F_z=3z^2-3xy$.

当$F_z\neq 0$时，有$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{yz}{z^2-xy}$；　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{xz}{z^2-xy}$；　（6 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)$$

$$=\frac{\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)(z^2-xy)-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)}{(z^2-xy)^2}=\frac{\left(z+\frac{xyz}{z^2-xy}\right)(z^2-xy)-yz\left(\frac{2xz^2}{z^2-xy}-x\right)}{(z^2-xy)^2}$$

$$=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}.$$ （9 分）

13. 解: V 由两个曲面所围成，先求两曲面的交线，由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$

得到 $x^2+y^2=1$， $z=1$.

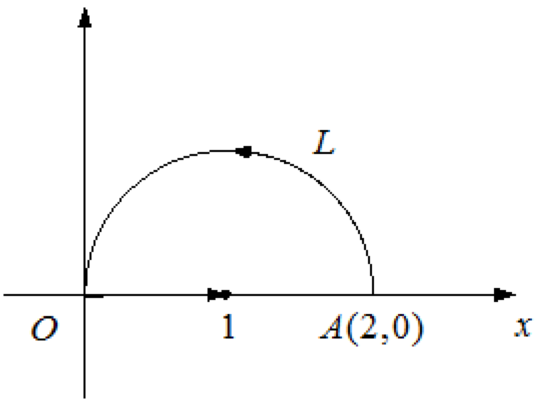
故 V 在 xOy 平面上的投影区域为 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$.

作柱面坐标变换 $x=r\cos q$， $y=r\sin q$， $z=z$，

则 V 可表示为 $V'=\{(r,q,z)\,|\,0\le r\le 1, 0\le q\le 2p, r^2\le z\le\sqrt{2-r^2}\}$.

故有 $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2p}dq\int_0^1 rdr\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}zdz=2p\int_0^1 rg\frac{1}{2}\left(2-r^2-r^4\right)dr=\frac{7p}{12}$. （9 分）

14. 解： 如图，L 为半圆周，方向为逆时针，现添加 $\overline{OA}$ 线段，这样 L 与 $\overline{OA}$ 刚好围成一个平面区域 D.



由 Green 公式有

$$\int_L [e^x\sin y-(x+y)]dx+(e^x\cos y-x)dy$$

$=\left(\int_L+\int_{\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}\right)[e^x\sin y-(x+y)]dx+(e^x\cos y-x)dy$

$=\oint_{L+\overline{OA}}[e^x\sin y-(x+y)]dx+(e^x\cos y-x)dy-\int_{\overline{OA}}[e^x\sin y-(x+y)]dx+(e^x\cos y-x)dy$

$=\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y-x)-\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y-(x+y))\right\}dxdy$

$-\int_0^2[e^x\sin 0-(x+0)]dx+(e^x\cos 0-x)d(0)$

$=0+\int_0^2 xdx=2$.（9 分）

15. 解： 在Σ上，$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，Σ在xOy面上的投影区域为

$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$.

由于积分曲面Σ关于yOz面和xOz面均对称，故有$\iint_\Sigma xdS=0$，$\iint_\Sigma ydS=0$.

故$\iint_\Sigma(x+y+z)dS=\iint_\Sigma zdS$

$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}dxdy$

$=2\iint_{D_{xy}}dxdy=6p$.（9 分）

16. 添加辅助曲面$\Sigma_1=\{(x,y,z)\,|\,z=1\}$，方向取下侧，则在由$\Sigma$和$\Sigma_1$所围成的空间闭区域$\Omega$上应用高斯公式，

原式

$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^2dydz+(y-1)^2dzdx+(z-1)dxdy-\iint_{\Sigma_1}(x-1)^2dydz+(y-1)^2dzdx+(z-1)dxdy$

$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^2dydz+(y-1)^2dzdx+(z-1)dxdy$

$=-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial((x-1)^2)}{\partial x}+\frac{\partial((y-1)^2)}{\partial y}+\frac{\partial(z-1)}{\partial z}\right)dv$

$=-\iiint_\Omega[2(x+y)-3]dv$

$=-\int_0^{2p}dq\int_0^1dr\int_{r^2}^1[2(r\cos q+r\sin q)-3]rdz$

$=\frac{3}{2}p$.（9 分）

17. 解：

解法 1：因为$[(1+x)\ln(1+x)]'=\ln(1+x)+1=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$， $x\in(-1,1)$，

将上式两端从 0 到 x 逐项积分得到

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n(n+1)}=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n-1)n},\quad x\in(-1,1),$$

显然，在 $x=1$ 处，上式右端的幂级数收敛，且函数 $(1+x)\ln(1+x)$ 连续，故

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)},\quad x\in(-1,1].$$

取 $x=1$，有 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=2\ln 2-1$. （9 分）

解法 2：利用 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$， $x\in(-1,1]$，得到

$$(1+x)\ln(1+x)=\ln(1+x)+x\ln(1+x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n-1}=x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n}{n-1}\right]x^n$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)},\quad x\in(-1,1].$$

取 $x=1$，有 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=2\ln 2-1$. （9 分）

四．应用题（每小题 6 分，共 12 分）

18.

解：构造拉格朗日函数

$L(x,y,l)=x^2+y^2-3+l(x-y+1)$

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + l = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - l = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

故得到

$x = -\dfrac{1}{2}, y = \dfrac{1}{2}$.

由几何意义知，$(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$ 为 L 的极小值点，即为函数 $z = x^2 + y^2 - 3$ 的极小值点，

对应的极小值为 $z|_{(-1/2,1/2)} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 3 = -\dfrac{5}{2}$. （6 分）

19.

解：弧微分

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,dt = \sqrt{a^2 + b^2}\,dt$$

故金属丝的质量

$$M = \int_L (x^2 + y^2 + z^2)ds$$

$$= \int_0^{2p} (a^2 + b^2 t^2)\sqrt{a^2 + b^2}\,dt$$

$$= \left(2p a^2 + \frac{8p^3 b^2}{3}\right)\sqrt{a^2 + b^2}\,.$$ （6 分）

五．证明题（每小题 5 分，共 5 分）

20.

证明：反证法

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则 $\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = 0$，$\lim_{n\to\infty} \cos u_n = 1$，

这与 $u_{n+1} = \cos u_n$ 矛盾，故假设不成立，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. （5 分）