

## 习题一解答

1. 求下列复数的实部与虚部、共轭复数、模与辐角。

$$(1) \frac{1}{3+2i}; \quad (2) \frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}; \quad (3) \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}; \quad (4) i^8 - 4i^{21} + i$$

解 (1)  $\frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{1}{13}(3-2i)$

所以

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{3+2i}\right\} = \frac{3}{13}, \quad \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{3+2i}\right\} = -\frac{2}{13},$$

$$\overline{\frac{1}{3+2i}} = \frac{1}{13}(3+2i), \quad \left|\frac{1}{3+2i}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(-\frac{2}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{13},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{3+2i}\right) &= \arg\left(\frac{1}{3+2i}\right) + 2k\pi \\ &= -\arctan \frac{2}{3} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

$$(2) \frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = \frac{-i}{i(-i)} - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -i - \frac{1}{2}(-3+3i) = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i,$$

所以

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}\right\} = \frac{3}{2},$$

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}\right\} = -\frac{5}{2}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}\right)} = \frac{3}{2} + i\frac{5}{2}, \quad \left|\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}\right) &= \arg\left(\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}\right) + 2k\pi \\ &= -\arctan \frac{5}{3} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i} &= \frac{(3+4i)(2-5i)(-2i)}{(2i)(-2i)} = \frac{(26-7i)(-2i)}{4} \\ &= \frac{-7-26i}{2} = -\frac{7}{2} - 13i \end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right\} = -\frac{7}{2},$$

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right\} = -13,$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right] &= -\frac{7}{2} + 13i \\ \left|\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right| &= \frac{5\sqrt{29}}{2}, \\ \operatorname{Arg}\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right] &= \arg\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right] + 2k\pi = \arctan \frac{26}{7} - \pi + 2k\pi \\ &= \arctan \frac{26}{7} + (2k-1)\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad i^8 - 4i^{21} + i &= (i^2)^4 - 4(i^2)^{10}i + i = (-1)^4 - 4(-1)^{10}i + i \\ &= 1 - 4i + i = 1 - 3i\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{i^8 - 4i^{21} + i\} &= 1, \operatorname{Im}\{i^8 - 4i^{21} + i\} = -3 \\ \overline{(i^8 - 4i^{21} + i)} &= 1 + 3i, \quad |i^8 - 4i^{21} + i| = \sqrt{10} \\ \operatorname{Arg}(i^8 - 4i^{21} + i) &= \arg(i^8 - 4i^{21} + i) + 2k\pi = \arg(1 - 3i) + 2k\pi \\ &= -\arctan 3 + 2k\pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

2. 如果等式  $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$  成立, 试求实数  $x, y$  为何值。

解: 由于

$$\begin{aligned}\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} &= \frac{[x+1+i(y-3)](5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} \\ &= \frac{5(x+1)+3(y-3)+i[-3(x+1)+5(y-3)]}{34} \\ &= \frac{1}{34}[5x+3y-4] + i\frac{1}{34}[-3x+5y-18] = 1+i\end{aligned}$$

比较等式两端的实、虚部, 得

$$\begin{cases} 5x+3y-4=34 \\ -3x+5y-18=34 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 5x+3y=38 \\ -3x+5y=52 \end{cases}$$

解得  $x=1, y=11$ 。

3. 证明虚单位  $i$  有这样的性质:  $-i=i^{-1}=\bar{i}$ 。

4. 证明

$$\begin{aligned}1) \quad |z|^2 &= z\bar{z} \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$6) \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(\bar{z} + z), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

证明：可设  $z = x + iy$ ，然后代入逐项验证。

5. 对任何  $z$ ， $z^2 = |z|^2$  是否成立？如果是，就给出证明。如果不是，对  $z$  那些值才成立？

解：设  $z = x + iy$ ，则要使  $z^2 = |z|^2$  成立有

$x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2$ ，即  $x^2 - y^2 = x^2 + y^2, xy = 0$ 。由此可得  $z$  为实数。

6. 当  $|z| \leq 1$  时，求  $|z^n + a|$  的最大值，其中  $n$  为正整数， $a$  为复数。

解：由于  $|z^n + a| \leq |z|^n + |a| \leq 1 + |a|$ ，且当  $z = e^{i\frac{\arg a}{n}}$  时，有

$$|z^n + a| = \left| \left( e^{i\frac{\arg a}{n}} \right)^n + |a|e^{i\arg a} \right| = |(1 + |a|)e^{i\arg a}| = 1 + |a|$$

故  $1 + |a|$  为所求。

8. 将下列复数化成三角表示式和指数表示式。

$$\begin{array}{lll} (1) i; & (2) -1; & (3) 1 + \sqrt{3}i; \\ (4) 1 - \cos\varphi + i\sin\varphi (0 \leq \varphi \leq \pi); & (5) \frac{2i}{-1+i}; & (6) \frac{(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi)^3} \end{array}$$

解：(1)  $i = \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ；

(2)  $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$

(3)  $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ；

(4)  $1 - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\sin^2 \frac{\varphi}{2} + i2\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2\sin \frac{\varphi}{2} \left( \sin \frac{\varphi}{2} + i\cos \frac{\varphi}{2} \right)$   
 $= 2\sin \frac{\varphi}{2} \left( \cos \frac{\pi - \varphi}{2} + i\sin \frac{\pi - \varphi}{2} \right) = 2\sin \frac{\varphi}{2} e^{i\frac{\pi - \varphi}{2}}, (0 \leq \varphi \leq \pi)$ ；

(5)  $\frac{2i}{-1+i} = \frac{1}{2}2i(-1-i) = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$   
 $= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} - i\sin \frac{\pi}{4}\right)$   
 $= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(6)  $\frac{(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi)^3} = (e^{i5\varphi})^2 / (e^{-i3\varphi})^3 = e^{i10\varphi} / e^{-i9\varphi} = e^{i19\varphi}$

$$= \cos 19\varphi + i \sin 19\varphi$$

9. 将下列坐标变换公式写成复数的形式：

$$1) \text{ 平移公式: } \begin{cases} x = x_1 + a_1, \\ y = y_1 + b_1; \end{cases}$$

$$2) \text{ 旋转公式: } \begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

解：设  $A = a_1 + ib_1$ ， $z_1 = x_1 + iy_1$ ， $z = x + iy$ ，则有

$$1) z = z_1 + A; 2) z = z_1(\cos \alpha + i \sin \alpha) = z_1 e^{i\alpha}.$$

10. 一个复数乘以  $-i$ ，它的模与辐角有何改变？

解：设复数  $z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$ ，则  $z(-i) = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = |z| e^{i\left(\operatorname{Arg} z - \frac{\pi}{2}\right)}$ ，可知复数的模不变，辐角减少  $\frac{\pi}{2}$ 。

11. 证明： $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ ，并说明其几何意义。

$$\begin{aligned} \text{证明: } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= 2(z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2}) \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \end{aligned}$$

其几何意义平行四边形的对角线长度平方的和等于四个边的平方的和。

12. 证明下列各题：

1) 任何有理分式函数  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  可以化为  $X + iY$  的形式，其中  $X$  与  $Y$  为具有实系数的  $x$  与  $y$  的有理分式函数；

2) 如果  $R(z)$  为 1) 中的有理分式函数，但具有实系数，那么  $R(\bar{z}) = X - iY$ ；

3) 如果复数  $a + ib$  是实系数方程

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

的根，那么  $a - ib$  也是它的根。

$$\text{证 } 1) R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)\overline{Q(z)}}{Q(z)\overline{Q(z)}} = \frac{\operatorname{Re}(P(z)\overline{Q(z)})}{q(x, y)} + \frac{\operatorname{Im}(P(z)\overline{Q(z)})}{q(x, y)};$$

$$2) R(\bar{z}) = \frac{P(\bar{z})}{Q(\bar{z})} = \frac{\overline{P(z)}}{\overline{Q(z)}} = \overline{\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)} = \overline{X + iY} = X - iY;$$

3) 事实上

$$P(\bar{z}) = a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \bar{z} + a_n$$

$$= \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} = \overline{P(z)}$$

13. 如果  $z = e^{it}$ , 试证明

$$(1) \quad z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos nt; \quad (2) \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin nt$$

解 (1)  $z^n + \frac{1}{z^n} = e^{int} + e^{-int} = e^{int} + e^{\overline{int}} = 2 \cos nt$

(2)  $z^n - \frac{1}{z^n} = e^{int} - e^{-int} = e^{int} - \overline{e^{int}} = 2i \sin nt$

14. 求下列各式的值

$$(1) \quad (\sqrt{3} - i)^5; \quad (2) \quad (1+i)^6; \quad (3) \quad \sqrt[6]{-1}; \quad (4) \quad (1-i)^{\frac{1}{3}}$$

解 (1)  $(\sqrt{3} - i)^5 = \left[ 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) \right]^5 = (2e^{-i\pi/6})^5 = 32e^{-i5\pi/6}$

$$= 32 \left[ \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right] = -16\sqrt{3} - 16i$$

$$(2) \quad (1+i)^6 = \left[ \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^6 = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^6 = 8e^{3\pi i/2} = -8i.$$

$$(3) \quad \sqrt[6]{-1} = (e^{i\pi+2k\pi})^{\frac{1}{6}} = e^{i\pi(2k+1)/6}, k=0,1,2,3,4,5. \text{ 可知 } \sqrt[6]{-1} \text{ 的 6 个值分别是}$$

$$e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$e^{i7\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad e^{i3\pi/2} = -i, \quad e^{i11\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

$$(4) \quad (1-i)^{\frac{1}{3}} = \left[ \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)/3}, \quad k=0,1,2.$$

可知  $(1-i)^{1/3}$  的 3 个值分别是

$$\sqrt[3]{2}e^{-i\pi/12} = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right),$$

$$\sqrt[3]{2}e^{i7\pi/12} = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right),$$

$$\sqrt[3]{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

15. 若  $(1+i)^n = (1-i)^n$ , 试求  $n$  的值。

解 由题意即  $(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n = (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n, e^{in\pi/4} = e^{-in\pi/4}, \sin \frac{n}{4}\pi = 0$ ,

故  $n = 4k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

16. (1) 求方程  $z^3 + 8 = 0$  的所有根

(2) 求微分方程  $y''' + 8y = 0$  的一般解。

解 (1)  $z = (-8)^{\frac{1}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}(1+2k)}, k=0,1,2$ 。

即原方程有如下三个解：

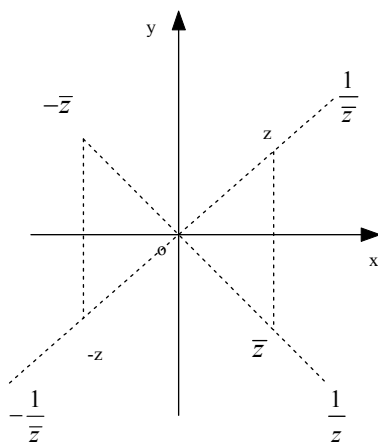
$$1+i\sqrt{3}, -2, 1-i\sqrt{3}。$$

(2) 原方程的特征方程  $\lambda^3 + 8 = 0$  有根  $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$ , 故其一般形式为

$$y = C_1 e^{-2x} + e^x (C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x)$$

17. 在平面上任意选一点  $z$ , 然后在复平面上画出下列各点的位置：

$$-z, \bar{z}, -\bar{z}, \frac{1}{z}, \frac{1}{\bar{z}}, -\frac{1}{\bar{z}}。$$



18. 已知两点  $z_1$  与  $z_2$  (或已知三点  $z_1, z_2, z_3$ ) 问下列各点位于何处？

(1)  $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$

(2)  $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2$  (其中  $\lambda$  为实数);

(3)  $z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ 。

解 令  $z_k = x_k + iy_k, k=1,2,3$ , 则

(1)  $z = \frac{x_1 + x_2}{2} + i \frac{y_1 + y_2}{2}$ , 知点  $z$  位于  $z_1$  与  $z_2$  连线的中点。

(2)  $z = x_2 - \lambda(x_2 - x_1) + i[y_2 - \lambda(y_2 - y_1)]$ , 知点位于  $z_1$  与  $z_2$  连线上定比  $\lambda = \frac{|z - z_1|}{|z_2 - z_1|}$

处。

(3)  $z = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{i}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$ , 由几何知识知点  $z$  位于  $\Delta z_1 z_2 z_3$  的重心

处。

19. 设  $z_1, z_2, z_3$  三点适合条件:  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ,

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ 。证明  $z_1, z_2, z_3$  是内接于单位圆  $|z| = 1$  的一个正三角形的顶点。

证 由于  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ , 知  $\Delta z_1 z_2 z_3$  的三个顶点均在单位圆上。

因为

$$\begin{aligned} 1 &= |z_3|^2 = z_3 \bar{z}_3 \\ &= [-(z_1 + z_2)][-(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)] = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ &= 2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \end{aligned}$$

所以,  $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = -1$ , 又

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) \\ &= 2 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = 3 \end{aligned}$$

故

$|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$ , 同理  $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}$ , 知  $\Delta z_1 z_2 z_3$  是内接于单位圆  $|z| = 1$  的一个正三角形。

20. 如果复数  $z_1, z_2, z_3$  满足等式

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

证明  $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ , 并说明这些等式的几何意义。

由等式得

$$\arg(z_2 - z_1) - \arg(z_3 - z_1) = \arg(z_1 - z_3) - \arg(z_2 - z_3)$$

即  $\angle z_2 z_1 z_3 = \angle z_1 z_3 z_2$ 。又因为

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{(z_2 - z_1) + (z_1 - z_3)}{(z_3 - z_1) + (z_2 - z_3)} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

又可得  $\angle z_2 z_1 z_3 = \angle z_3 z_2 z_1$ , 所以知  $\Delta z_1 z_2 z_3$  是正三角形, 从而

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|。$$

21. 指出下列各题中点  $z$  的存在范围, 并作图。

(1)  $|z-5|=6$ ; (2)  $|z+2i|\geq 1$ ;

(3)  $\operatorname{Re}(z+2)=-1$ ; (4)  $\operatorname{Re}(iz)=3$ ;

(5)  $|z+i|=|z-i|$ ; (6)  $|z+3|+|z+1|=4$

(7)  $\operatorname{Im}(z)\leq 2$ ; (8)  $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geq 1$ ;

(9)  $0<\arg z<\pi$ ; (10)  $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$

解: (1) 以点  $z_0=5$  为心, 半径为 6 的圆周 (见下图 (a));

(2) 以点  $z_0=-2i$  为心, 半径为 1 的圆周及外部 (见下图 (b));

(3) 由于  $\operatorname{Re}(z+2)=-1 \Leftrightarrow x=-3$  知点  $z$  的范围是直线  $x=-3$  (见下图 (c));

(4)  $i\bar{z}=i(x-iy)=y+ix$ , 故  $\operatorname{Re}(i\bar{z})=3 \Leftrightarrow y=3$ . 知点  $z$  的范围是直线  $y=3$  (见下图 (d));

(5)  $|z+i|=|z-i| \Leftrightarrow |z+i|^2=|z-i|^2 \Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}-i)=(z-i)(\bar{z}+i) \Leftrightarrow$

$$|z|^2-iz+i\bar{z}+1=|z|^2+iz-i\bar{z}+1 \Leftrightarrow i\bar{z}-iz=0 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(i\bar{z})=0 \Leftrightarrow 2y=0$$

$\Rightarrow y=0$ . 知点  $z$  的范围是实轴 (见下图 (e));

(6)  $|z+3|+|z+1|=4 \Leftrightarrow |z+3|^2=(4-|z+1|)^2 \Leftrightarrow x-2=-2|z+1| \Leftrightarrow (x-2)^2=4|z+1|^2$

$$\Leftrightarrow 3^2+12x+4y^2=0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \text{ 即点 } z \text{ 的范围是以 } (-3,0) \text{ 和 } (-1,0)$$

为焦点, 长半轴为 2, 短半轴为  $\sqrt{3}$  的一椭圆 (见下图 (f));

(7)  $y\leq 2$ , (见下图 (g));

(8)  $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geq 1 \Leftrightarrow |z-3|^2\geq |z-2|^2 \Leftrightarrow (z-3)(\bar{z}-3)\geq (z-2)(\bar{z}-2) \Leftrightarrow |z|^2-3z-3\bar{z}+9\geq$

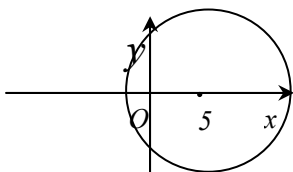
$$|z|^2-2z-2\bar{z}+4 \Leftrightarrow z+\bar{z}\leq 5 \Leftrightarrow x\leq \frac{5}{2}. \text{ 即点 } z \text{ 的范围是直线 } x=\frac{5}{2} \text{ 以及 } x=\frac{5}{2} \text{ 为边}$$

界的左半平面 (见下图 (h));

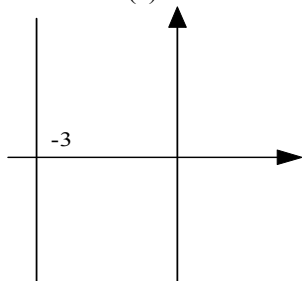
(9) 不包含实轴上半平面 (见下图 (i));

(10) 以  $i$  为起点的射线  $y=x+1, x>0$  (见下图 (j));

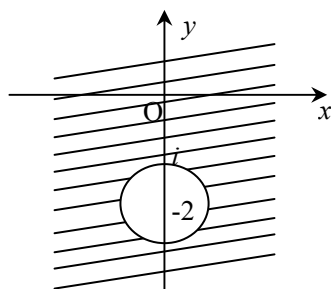




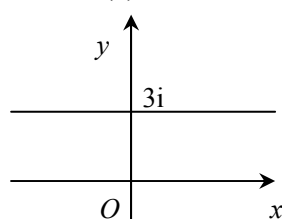
(a)



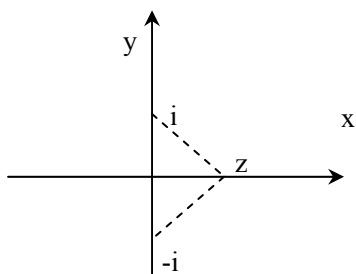
(c)



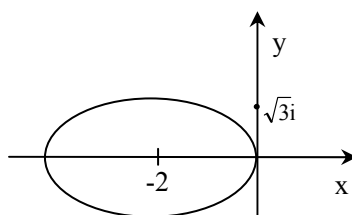
(b)



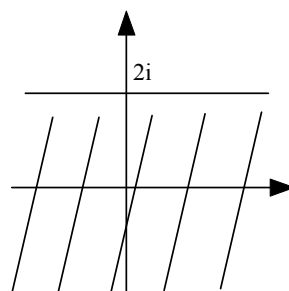
(d)



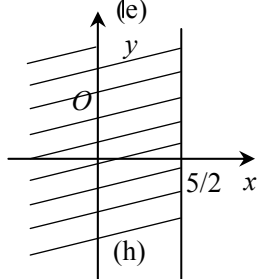
(e)



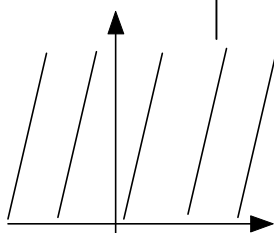
(f)



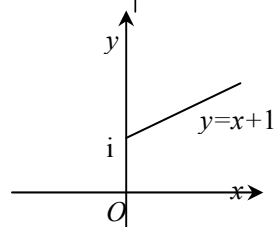
(g)



(h)



(i)



(j)

22. 描出下列不等式所确定的区域，并指是有界的还是无界的，闭的还是开的，单连的还是多连的。

(1)  $\text{Im } z > 0$  ;

(2)  $|z - 1| > 4$  ;

(3)  $0 < \text{Re } z < 1$  ;

(4)  $2 \leq |z| \leq 3$  ;

(5)  $|z - 1| < |z + 3|$  ;

(6)  $-1 < \arg z < -1 + \pi$  ;

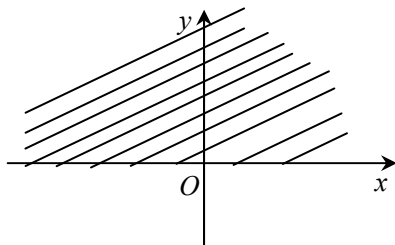
$$(7) |z-1| < 4|z+1|;$$

$$(8) |z-2| + |z+2| \leq 6;$$

$$(9) |z-2| - |z+2| > 1;$$

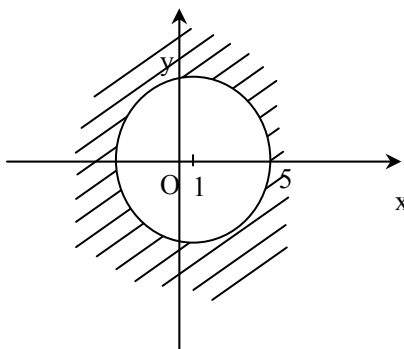
$$(10) z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} \leq 4.$$

解 (1)  $\text{Im } z > 0$



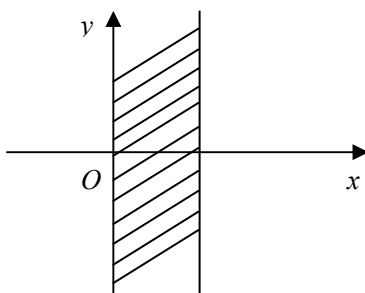
不包含实轴的上半平面，是无界的、开的单连通区域。

$$(2) |z-1| > 4$$



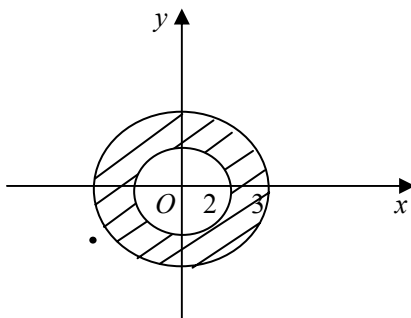
圆  $(z-1)^2 + y^2 = 16$  的外部（不包括圆周），是无界的、开的多连通区域。

$$(3) 0 < \text{Re } z < 1$$



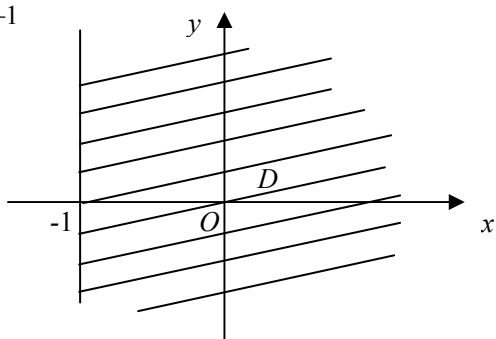
由直线  $x=0$  与  $x=1$  所围成的带形区域，不包括两直线在内，是无界的、开的单连通区域。

$$(4) 2 \leq |z| \leq 3$$



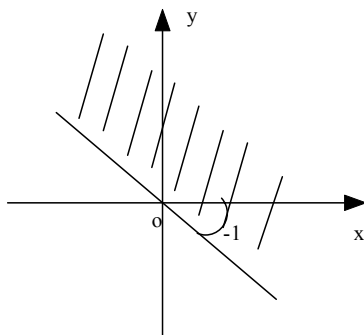
以原点为中心，2 与 3 分别为内、外半径的圆环域，不包括圆周，是有界的、开的多连通区域。

$$(5) |z-1| < |z+3| \Leftrightarrow x > -1$$



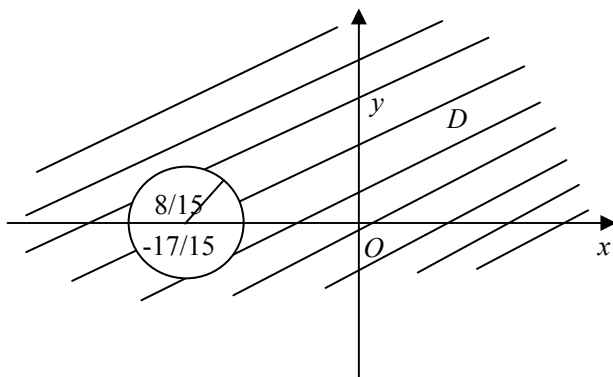
直线  $x = -1$  右边的平面区域，不包括直线在内，是无界的、开的单连通的区域。

$$(6) -1 < \arg z < -1 + \pi$$



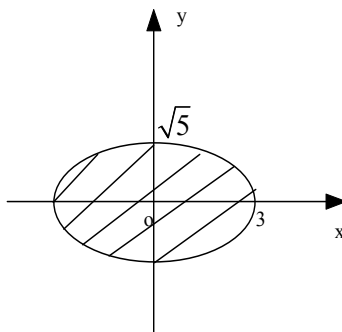
由射线  $\theta = 1$  及  $\theta = 1 + \pi$  构成的角形域，不包括两射线在内，即为一半平面，是无界的、开的单连通区域。

$$(7) |z-1| < 4|z+1| \Leftrightarrow \left(x + \frac{17}{15}\right)^2 + y^2 > \left(\frac{8}{15}\right)^2$$



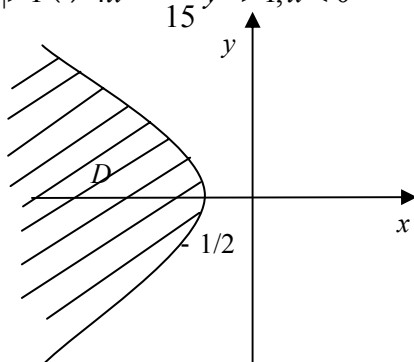
中心在点  $z = -\frac{17}{15}$ ，半径为  $\frac{8}{15}$  的圆周的外部区域（不包括圆周本身在内），是无界的、开的多连通区域。

$$(8) |z-2| + |z+2| \leq 6$$



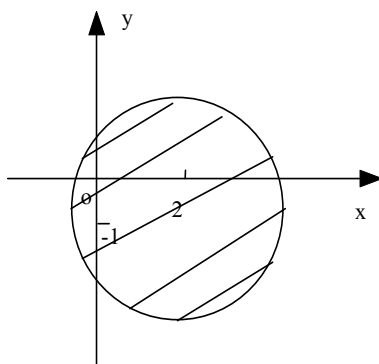
是椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$  及其围成的区域，是有界的、闭的单连通区域。

$$(9) |z-2| - |z+2| > 1 \Leftrightarrow 4x^2 - \frac{4}{15}y^2 > 1, x < 0$$



是双曲线  $4x^2 - \frac{4}{15}y^2 = 1$  的左边分支的内部区域，是无界的、开的单连通区域。

$$(10) z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} \leq 4$$



是圆  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$  及其内部区域, 是有界的、闭的单连通区域。

23. 证明:  $z$  平面上的直线方程可以写成

$$a\bar{z} + \bar{a}z = C \quad (a \text{ 是非零复常数}, C \text{ 是实常数})$$

证 设 直 角 坐 标 系 的 平 面 方 程 为  $Ax + By = C$  将

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \text{ 代入, 得}$$

$$\frac{1}{2}(A - iB)z + \frac{1}{2}(A + iB)\bar{z} = C$$

$$\text{令 } a = \frac{1}{2}(A + iB), \text{ 则 } \bar{a} = \frac{1}{2}(A - iB), \text{ 上式即为 } a\bar{z} + \bar{a}z = C.$$

24. 证明复平面上的圆周方程可写成:

$$z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + c = 0, (\text{其中 } \alpha \text{ 为复常数}, c \text{ 为实常数}).$$

证  $(z + a)\overline{(z + a)} = R^2 \Leftrightarrow z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{a} - R^2 = 0$ , 其中  $c = a\bar{a} - R^2$  为实常数。

25. 求下列方程 ( $t$  是实参数) 给出的曲线。

$$(1) z = (1+i)t;$$

$$(2) z = a \cos t + ib \sin t;$$

$$(3) z = t + \frac{i}{t};$$

$$(4) z = t^2 + \frac{i}{t^2},$$

$$(5) z = a \cosh t + ib \sinh t$$

$$(6) z = ae^{it} + be^{-it}$$

$$(7) z = e^{\alpha t}, (\alpha = a + bi \text{ 为复数})$$

解 (1)  $z = x + iy = (1+i)t \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, -\infty < t < \infty$ 。即直线  $y = x$ 。

$$(2) z = x + iy = a \cos t + ib \sin t \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, 0 < t \leq 2\pi, \text{ 即为椭圆}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$(3) z = x + iy = t + \frac{i}{t} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}, \text{ 即为双曲线 } xy = 1;$$

$$(4) z = x + iy = t^2 + \frac{i}{t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{t^2} \end{cases}, \text{ 即为双曲线 } xy = 1 \text{ 中位于第一象限中的一支。}$$

$$(5) z = a\cosh t + i b\sinh t \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 双曲线}$$

$$(6) \frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1, \text{ 椭圆}$$

$$(7) x^2 + y^2 = e^{\frac{2a}{b} \arctan \frac{y}{x}}$$

26. 函数  $w = \frac{1}{z}$  将  $z$  平面上的下列曲线变成  $w$  平面上的什么曲线  
( $z = x + iy, w = u + iv$ ) ?

$$(1) x^2 + y^2 = 6;$$

$$(2) y = x;$$

$$(3) x = 1;$$

$$(4) (x-1)^2 + y^2 = 1$$

解  $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$ ,  $u = \frac{x}{x^2+y^2}, v = \frac{-y}{x^2+y^2}$ , 可得

$$(1) u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{6}, \text{ 是 } w \text{ 平面上一圆周};$$

$$(2) u = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-(-y)}{x^2+y^2} = -v, \text{ 是 } w \text{ 平面上一直线};$$

$$(3) \text{ 由 } x=1, \text{ 知 } u = \frac{1}{1+y^2}, v = \frac{-y}{1+y^2}, \text{ 从而 } u^2 + v^2 = \frac{1}{1+y^2} = u$$

此为  $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$  是  $w$  平面上一圆周;

$$(4) (x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}, \text{ 于是 } u = \frac{1}{2}, \text{ 是 } w \text{ 平面上一}$$

平行与  $v$  轴的直线。

27. 已知映射  $w = z^3$ , 求

(1) 点  $z_1 = i$ ,  $z_2 = 1+i$ ,  $z_3 = \sqrt{3}+i$  在  $w$  平面上的像。

(2) 区域  $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$  在  $w$  平面上的像。

解 设  $z = re^{i\theta}$ , 则  $w = z^3 = r^3 e^{i3\theta}$ . 于是

$$(1) z_1 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}, z_2 = 1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_3 = \sqrt{3}+i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

经映射后在  $w$  平面上的像分别是

$$w_1 = e^{i3\pi/3} = -i,$$

$$w_2 = 2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -2 + i2,$$

$$w_3 = 2^3 e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$$

(2) 因为以原点为顶点的角形域的顶角张大三倍, 所以为  $0 < \arg w < \pi$ 。

29. 设函数  $f(z)$  在  $z_0$  处连续, 且  $f(z_0) \neq 0$ , 证明存在  $z_0$  的邻域使  $f(z) \neq 0$ 。

证 因为  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , 且  $f(z_0) \neq 0$ 。可取  $\varepsilon = \frac{|f(z_0)|}{2} > 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $|z - z_0| < \delta$  时, 有

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon = \frac{|f(z_0)|}{2}$$

从而  $|f(z_0)| - \frac{|f(z_0)|}{2} < |f(z)|$ , 即  $|f(z)| > \frac{|f(z_0)|}{2} > 0$  即点  $z \in U(z_0, \delta)$  时, 则  $f(z) \neq 0$ 。

30. 设  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ , 证明  $f(z)$  在  $z_0$  的某一去心邻域内是有界的。

证 取  $\varepsilon = 1$ , 则存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |z - z_0| < \delta$  时,  $|f(z) - A| \leq 1$ 。故在  $0 < |z - z_0| < \delta$  内,  $|f(z)| = |f(z) - A + A| \leq |f(z) - A| + |A| \leq 1 + |A|$ 。

31. 设  $f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$ , ( $z \neq 0$ ) 试证当  $z \rightarrow 0$  时  $f(z)$  的极限不存在。

证  $f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ , 显然。

32. 试证  $\arg z$  ( $-\pi < \arg z \leq \pi$ ) 在负实轴上 (包括原点) 不连续, 除此而外在  $z$  平面上处处连续。

证 设  $f(z) = \arg z$ , 因为  $f(0)$  无定义, 所以  $f(z)$  在原点  $z=0$  处不连续。

当  $z_0$  为负实轴上的点时, 即  $z_0 = x_0$  ( $x_0 < 0$ ), 有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z = \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0^+}} \left( \arctan \frac{y}{x} + \pi \right) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0^-}} \left( \arctan \frac{y}{x} - \pi \right) \end{cases} = \begin{cases} \pi \\ -\pi \end{cases}$$

所以  $\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z$  不存在, 即  $\arg z$  在负实轴上不连续。而  $\arg z$  在  $z$  平面上的其它点处的连续性显然。

## 习题二解答

1. 利用导数定义推出：

$$1) (z^n)' = nz^{n-1}, (n \text{ 是正整数}); \quad 2) \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}.$$

证 1)  $(z^n)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (nz^{n-1} + C_n^2 z^{n-2} \Delta z + \cdots \Delta z^{n-1}) = nz^{n-1}$

$$2) \left(\frac{1}{z}\right)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z + \Delta z} - \frac{1}{z}}{\Delta z} = -\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{z(z + \Delta z)} = -\frac{1}{z^2}$$

2. 下列函数何处可导？何处解析？

$$(1) f(z) = x^2 - iy$$

$$(2) f(z) = 2x^3 + 3y^3i$$

$$(3) f(z) = xy^2 + ix^2y$$

$$(4) f(z) = \sin xchy + i \cos xshy$$

解 (1) 由于  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = -1$

在  $z$  平面上处处连续，且当且仅当  $x = -\frac{1}{2}$  时， $u, v$  才满足 C-R 条件，故  $f(z) = u + iv = x - iy$  仅在直线  $x = -\frac{1}{2}$  上可导，在  $z$  平面上处处不解析。

$$(2) \text{ 由于 } \frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 9y^2$$

在  $z$  平面上处处连续，且当且仅当  $2x^2 = 3y^2$ ，即  $\sqrt{2}x \pm \sqrt{3}y = 0$  时， $u, v$  才满足 C-R 条件，故  $f(z) = u + iv = 2x^3 + 3y^3i$  仅在直线  $\sqrt{2}x \pm \sqrt{3}y = 0$  上可导，在  $z$  平面上处处不解析。

$$(3) \text{ 由于 } \frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial v}{\partial y} = x^2$$

在  $z$  平面上处处连续，且当且仅当  $z=0$  时， $u, v$  才满足 C-R 条件，故  $f(z) = xy^2 + ix^2y$  仅在点  $z=0$  处可导，在  $z$  平面处处不解析。

$$(4) \text{ 由于 } \frac{\partial u}{\partial x} = \cos xchy, \frac{\partial u}{\partial y} = \sin xshy, \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin xshy, \frac{\partial v}{\partial y} = \cos xchy$$

在  $z$  平面上处处连续，且在整个复平面  $u, v$  才满足 C-R 条件，故  $f(z) = \sin xchy + i \cos xshy$  在  $z$  平面处处可导，在  $z$  平面处处不解析。

3. 指出下列函数  $f(z)$  的解析性区域，并求出其导数。

$$1) (z-1)^5;$$

$$(2) z^3 + 2iz;$$

$$3) \frac{1}{z^2 - 1};$$

$$(4) \frac{az+b}{cz+d} (c, d \text{ 中至少有一个不为 } 0)$$

解 (1) 由于  $f'(z) = 5(z-1)^4$ ，故  $f(z)$  在  $z$  平面上处处解析。

(2) 由于  $f'(z) = 3z^2 + 2i$ ，知  $f(z)$  在  $z$  平面上处处解析。

$$(3) \text{ 由于 } f'(z) = \frac{-2z}{(z^2-1)^2} = -\frac{2z}{(z-1)^2(z+1)^2}$$

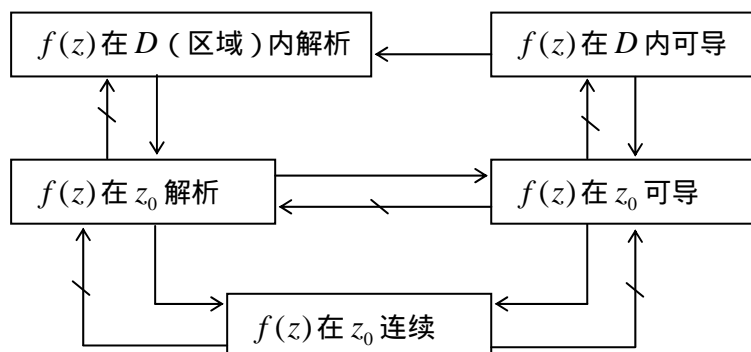
知  $f(z)$  在除去点  $z = \pm 1$  外的  $z$  平面上处处可导。处处解析， $z = \pm 1$  是  $f(z)$  的奇点。



(4) 由于  $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ , 知  $f(z)$  在除去  $z = -d/c (c \neq 0)$  外在复平面上处处解析。

5. 复变函数的可导性与解析性有什么不同? 判断函数的解析性有那些方法?

答:



判定函数解析主要有两种方法: 1) 利用解析的定义: 要判断一个复变函数在  $z_0$  是否解析, 只要判定它在  $z_0$  及其邻域内是否可导; 要判断该函数在区域  $D$  内是否解析, 只要判定它在  $D$  内是否可导; 2) 利用解析的充要条件, 即本章 §2 中的定理二。

6. 判断下述命题的真假, 并举例说明。

(1) 如果  $f(z)$  在  $z_0$  点连续, 那么  $f'(z_0)$  存在。

(2) 如果  $f'(z_0)$  存在, 那么  $f(z)$  在  $z_0$  点解析。

(3) 如果  $z_0$  是  $f(z)$  的奇点, 那么  $f(z)$  在  $z_0$  不可导。

(4) 如果  $z_0$  是  $f(z)$  和  $g(z)$  的一个奇点, 那么  $z_0$  也是  $f(z) + g(z)$  和  $f(z)/g(z)$  的奇点。

(5) 如果  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  可导 (指偏导数存在), 那么  $f(z) = u + iv$  亦可导。

(6) 设  $f(z) = u + iv$  在区域内是解析的。如果  $u$  是实常数, 那么  $f(z)$  在整个  $D$  内是常数; 如果  $v$  是实常数, 那么  $f(z)$  在整个  $D$  内是常数;

解

(1) 命题假。如函数  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$  在  $z$  平面上处处连续, 除了点  $z=0$  外处处不可导。

(2) 命题假, 如函数  $f(z) = |z|^2$  在点  $z=0$  处可导, 却在点  $z=0$  处不解析。

(3) 命题假, 如果  $f(z)$  在  $z_0$  点不解析, 则  $z_0$  称为  $f(z)$  的奇点。如上例。

(4) 命题假, 如  $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y, g(z) = i \cos x \operatorname{sh} y, z = (\pi/2, 0)$  为它们的奇点, 但不是  $f(z) + g(z)$  的奇点。

(5) 命题假。如函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z = x^2 + ixy$  仅在点  $z=0$  处满足 C-R 条件, 故  $f(z)$  仅在点  $z=0$  处可导。

(6) 命题真。由  $u$  是实常数, 根据 C-R 方程知  $v$  也是实常数, 故  $f(z)$  在整个  $D$  内是常数; 后面同理可得。

7. 如果  $f(z) = u + iv$  是  $z$  的解析函数, 证明:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} |f(z)| \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} |f(z)| \right)^2 = |f'(z)|^2$$

证  $|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}$ , 于是

$$\frac{\partial}{\partial x} |f(z)| = \frac{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} |f(z)| = \frac{u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

由于  $f(z) = u + iv$  为解析函数，故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

从而

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} |f(z)| \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} |f(z)| \right)^2 &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left[ u^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u^2 \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + v^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2uv \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2uv \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left\{ u^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + v^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2} (u^2 + v^2) |f'(z)|^2 = |f'(z)|^2 \end{aligned}$$

9. 证明：柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

证 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ，利用复合函数求导法则和  $u, v$  满足 C-R 条件，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \theta = \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x} r \cos \theta = r \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned}$$

即  $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$ 。又

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta = -\frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta \\ &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}$$

总之，有  $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$ 。

10. 证明：如果函数  $f(z) = u + iv$  在区域  $D$  内解析，并满足下列条件之一，那么  $f(z)$  是常数。

- (1)  $f(z)$  恒取实值。
- (2)  $\overline{f(z)}$  在  $D$  内解析。
- (3)  $|f(z)|$  在  $D$  内是一个常数。
- (4)  $\arg f(z)$  在  $D$  内是一个常数。
- (5)  $au + bv = c$ ，其中  $a, b$  与  $c$  为不全为零的实常数。

解 (1) 若  $f(z)$  恒取实值, 则  $v=0$ , 又根据  $f(z)$  在区域  $D$  内解析, 知 C-R 条件成立, 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

故  $u$  在区域  $D$  内为一常数, 记  $u=C$  (实常数), 则  $f(z)=u+iv=C$  为一常数。

(2) 若  $\overline{f(z)} = \overline{u+iv} = u-iv$  在区域  $D$  内解析, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

又  $f(z)=u+iv$  在区域  $D$  内解析, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

结合 (1) (2) 两式, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

故  $u, v$  在  $D$  内均为常数, 分别记之为

$$u_1 = C_1, u_2 = C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为实常数}),$$

则

$$f(z) = u + iv = C_1 + iC_2 = C$$

为一复常数。

(3) 若  $|f(z)|$  在  $D$  内为一常数, 记为  $C_1$ , 则  $u^2 + v^2 = C_1^2$ , 两边分别对于  $x$  和  $y$  求偏导, 得

$$\begin{cases} 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

由于  $f(z)$  在  $D$  内解析, 满足 C-R 条件  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  代入上式又可写得

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

解得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ 。同理, 可解得  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  故  $u, v$  均为常数, 分别记为  $u = C_1, v = C_2$ , 则

$f(z) = u + iv = C_1 + iC_2 = C$  为一复常数。

(4) 若  $\arg z$  在  $D$  内是一个常数  $C_1$ , 则  $f(z) \neq 0$ , 从而  $f(z) = u + iv \neq 0$ , 且

$$\arg f(z) = \begin{cases} \arctan \frac{v}{u}, & u > 0 \\ \arctan \frac{v}{u} + \pi, & u < 0, v > 0 \\ \arctan \frac{v}{u} - \pi, & u < 0, v < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} C_1 & u > 0 \\ C_1 + \pi & u < 0, v > 0 \\ C_1 - \pi & u < 0, v < 0 \end{cases}$$

总之对  $\arg f(z)$  分别关于  $x$  和  $y$  求偏导, 得

$$\frac{\frac{1}{u^2} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{1 + \left( \frac{v}{u} \right)^2} = \frac{u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}}{u^2 + v^2} = 0$$

$$\frac{\frac{1}{u^2} \left( u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right)}{1 + \left( \frac{v}{u} \right)^2} = \frac{u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}}{u^2 + v^2} = 0$$

化简上式并利用  $f(z)$  解析，其实、虚部满足 C-R 条件，得

$$\begin{cases} -v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

解得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ，同理也可求得  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ，即  $u$  和  $v$  均为实常数，分别记为  $C_2$  和  $C_3$ ，从而

$f(z) = u + iv = C_2 + iC_3 = C$  为一复常数。

(5) 若  $au + bv = c$ ，其中  $a$ 、 $b$  和  $c$  为不全为零的实常数，这里  $a$  和  $b$  不全为 0，即  $a^2 + b^2 \neq 0$ ，否则此时  $a$ 、 $b$  和  $c$  全为零。对方程  $au + bv = c$  分别对于  $x$  和  $y$  求偏导，得

$$\begin{cases} a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ a \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

再利用解析函数  $f(z) = u + iv$  的实、虚部  $u$  和  $v$  满足 C-R 条件，得

$$\begin{cases} a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ b \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

解得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ，同理也可求得  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ，知函数  $f(z)$  为一常数。

11. 下列关系是否正确？

$$(1) \overline{e^z} = e^{\bar{z}}; \quad (2) \overline{\cos z} = \cos \bar{z}; \quad (3) \overline{\sin z} = \sin \bar{z}$$

解 (1)  $e^{\bar{z}} = e^{x - iy} = e^x (\cos y - i \sin y) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^{x + iy} = e^z$

$$(2) \overline{\cos z} = \overline{\left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)} = \frac{1}{2} (\overline{e^{iz}} + \overline{e^{-iz}}) = \frac{1}{2} (e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}) = \cos \bar{z}。$$

$$(3) \overline{\sin z} = \overline{\frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})} = \frac{1}{2i} (\overline{e^{iz}} - \overline{e^{-iz}}) = \frac{1}{-2i} (e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}) \\ = \frac{1}{2i} (e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}) = \sin \bar{z}。$$

12. 找出下列方程的全部解。

$$(3) 1 + e^z = 0; \quad (4) \sin z + \cos z = 0;$$

解 (3) 原方程等价于  $e^z = -1$ ，于是它的解为：

$$z = \operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i[\arg(-1) + 2k\pi] = i\pi(1+2k) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(4) 由于  $\sin z = -\cos z$ ,  $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ , 故

$$e^{2iz} - 1 = -i(e^{2iz} + 1)$$

$$e^{2iz} = \frac{1-i}{1+i}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}(-i) = \frac{1}{2i} [\ln|-i| + i(\arg(-i) + 2k\pi)] \\ &= \frac{i}{2i} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \left(k - \frac{1}{4}\right)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

13. 证明:

(1)  $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ ;

$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$ ;

(2)  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ; (3)  $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ ; (4)  $\tan 2z = \frac{2 \tan z}{1 - \tan^2 z}$ ;

(5)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$ ,  $\cos(z + \pi) = -\cos z$ ;

(6)  $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ ,  $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$

证 (1) 左 =  $\cos(z_1 + z_2) = \frac{1}{2} [e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}]$

右 =  $\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{4} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} \end{aligned}$$

可见左=右, 即  $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ ;

左 =  $\sin(z_1 + z_2) = \frac{1}{2i} [e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}]$

右 =  $\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i} (e^{iz_1} - e^{-iz_1}) \frac{1}{2} (e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \frac{1}{2} (e^{iz_1} + e^{-iz_1}) \frac{1}{2i} (e^{iz_2} - e^{-iz_2}) \\ &= \frac{1}{4i} [e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}] + \frac{1}{4i} [e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}] \\ &= \frac{1}{4i} [2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}] = \frac{1}{2i} [e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}] \end{aligned}$$

可见左=右, 即  $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

(2)  $\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}\right)^2$

$$= -\frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) + \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) = 1$$

$$(3) \text{ 左} = \sin 2z = \frac{1}{2i}(e^{i2z} - e^{-i2z})$$

$$\begin{aligned} \text{右} &= 2 \sin z \cos z = 2 \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{i2z} + 1 - 1 - e^{-i2z}) = \frac{1}{2i}(e^{i2z} - e^{-i2z}) \end{aligned}$$

可见左=右, 即  $\sin 2z = 2 \cos z \sin z$ 。

$$(4) \tan 2z = \frac{\sin 2z}{\cos 2z} = \frac{2 \sin z \cos z}{\cos^2 z - \sin^2 z} = 2 \frac{\sin z}{\cos z} \Big/ \left[ 1 - \left( \frac{\sin z}{\cos z} \right)^2 \right] = \frac{2 \tan z}{1 - \tan^2 z}$$

(5) 由(1)知

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \sin\left[\frac{\pi}{2} + (-z)\right] = \sin \frac{\pi}{2} \cos(-z) + \cos \frac{\pi}{2} \sin(-z) \\ &= \cos(-z) = \frac{1}{2}(e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ &= \cos z \end{aligned}$$

由(1)得  $\cos(z + \pi) = \cos z \cos \pi - \sin z \sin \pi = -\cos z$

$$\begin{aligned} (6) \text{ 左} &= |\cos z|^2 = |\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y|^2 = \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y \\ &= \cos^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y) + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{左} &= |\sin z|^2 = |\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y|^2 = \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y \\ &= \sin^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y) + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y. \end{aligned}$$

14. 说明: 1) 当  $y \rightarrow \infty$  时,  $|\sin(x + iy)|$  和  $|\cos(x + iy)|$  趋于无穷大;

2) 当  $t$  为复数时,  $|\sin t| \leq 1$  和  $|\cos t| \leq 1$  不成立。

$$\text{解 } 1) |\sin z| = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right| \geq \frac{|e^{-y} - e^y|}{2}; |\cos z| \text{ 同理}.$$

$$2) \text{ 设 } t = iy, y \in R, \text{ 则 } |\sin t| = \frac{|e^{-y} - e^y|}{2}, \text{ 则当 } y \rightarrow \infty \text{ 时显然题设不成立}.$$

15. 求  $\operatorname{Ln}(-i)$ ,  $\operatorname{Ln}(-3 + 4i)$  和它们的主值。

$$\text{解 } \operatorname{Ln}(-i) = \operatorname{Ln}|-i| + i(\arg(-i) + 2k\pi) = i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$= i\pi\left(2k - \frac{1}{2}\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\ln(-i) = \ln|-i| + i \arg(-i) = -\frac{\pi i}{2}$$

$$\operatorname{Ln}(-3 + 4i) = \ln|-3 + 4i| + i[\arg(-3 + 4i) + 2k\pi]$$

$$= \ln 5 + i\left[\left(\pi - \arctan \frac{4}{3}\right) + 2k\pi\right]$$

$$= \ln 5 - i \left[ \arctan \frac{4}{3} - (2k+1)\pi \right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\ln(-3+4i) = \ln|-3+4i| + i \arg(-3+4i) = \ln 5 + i \left( \pi - \arctan \frac{4}{3} \right).$$

16. 证明对数的下列性质：1)  $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ ；2)  $\operatorname{Ln}(z_1 / z_2) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$ 。

证明 1)  $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln(|z_1 z_2|) + i \operatorname{Arg} z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2 + i \operatorname{Arg} z_1 + i \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ ；

2)  $\operatorname{Ln}(z_1 / z_2) = \ln(|z_1 / z_2|) + i \operatorname{Arg} z_1 / z_2 = \ln z_1 - \ln z_2 + i \operatorname{Arg} z_1 - i \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$ 。

17. 说明下列等式是否正确：1)  $\operatorname{Ln} z^2 = 2 \operatorname{Ln} z$ ；2)  $\operatorname{Ln} \sqrt{z} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} z$ 。

解：两式均不正确。1)  $\operatorname{Ln} z^2 = 2 \ln |z| + i \operatorname{Arg}(2z)$ , 而  $2 \operatorname{Ln} z = 2 \ln |z| + 2i \operatorname{Arg}(z)$ ；

2)  $\operatorname{Ln} \sqrt{z} = \frac{1}{2} \ln |z| + i \operatorname{Arg}(\sqrt{z})$ , 而  $\frac{1}{2} \operatorname{Ln} z = \frac{1}{2} \ln |z| + \frac{i}{2} \operatorname{Arg}(z)$ 。

18. 求  $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$ ,  $\exp\left(\frac{1+i\pi}{4}\right)$ ,  $3^i$  和  $(1+i)^i$  的值。

解：

$$e^{1-i\frac{\pi}{2}} = e e^{-i\frac{\pi}{2}} = e \left( \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right) = -i e$$

$$\exp\left(\frac{1+i\pi}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{1}{4}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{4}} (1+i)$$

$$3^i = e^{i \operatorname{Ln} 3} = e^{i[\ln 3 + i(\arg 3 + 2k\pi)]} = e^{-2k\pi} e^{i \ln 3} = e^{-2k\pi} (\cos \ln 3 + i \sin \ln 3), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(1+i)^i = e^{i \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{i[\ln|1+i| + i(\arg(1+i) + 2k\pi)]}$$

$$= e^{\frac{i \ln 2}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)} = e^{-\pi\left(\frac{1}{4} + 2k\right)} \left( \cos \frac{\ln 2}{2} + i \sin \frac{\ln 2}{2} \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

19. 证明  $(z^a)' = a z^{a-1}$ , 其中  $a$  为实数。

$$\text{证明} \quad (z^a)' = (e^{a \operatorname{Ln} z + 2k\pi i})' = a(\operatorname{Ln} z)' e^{a \operatorname{Ln} z + 2k\pi i} = a \frac{1}{z} z^a = a z^{a-1}.$$

20. 证明 1)  $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ ；2)  $\operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z = \operatorname{ch} 2z$ ；

3)  $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$ ； $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$ 。

$$\text{证明 1) } \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 = 1;$$

$$2) \operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z = \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2} = 1;$$

$$\begin{aligned} 3) \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2 &= \frac{(e^{z_1} - e^{-z_1})(e^{z_2} + e^{-z_2})}{4} + \frac{(e^{z_1} + e^{-z_1})(e^{z_2} - e^{-z_2})}{4} = \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1-z_2}}{2} \\ &= \operatorname{sh}(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

21. 解下列方程：1)  $\operatorname{sh} z = 0$  ; 2)  $\operatorname{ch} z = 0$  ; 3)  $\operatorname{sh} z = i$ 。

解 1) 由  $\operatorname{sh} z = 0$  得  $e^{2z} = 1$  ,  $z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} 1 = i k \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

2) 由  $\operatorname{ch} z = 0$  得  $e^{2z} = -1$  ,  $z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(-1) = \frac{(2k+1)}{2} i \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

3) 由  $\operatorname{sh} z = i$  得  $e^z = i$  ,  $z = \operatorname{Ln} i = i(2k + \frac{1}{2})\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

23. 证明:  $\operatorname{sh} z$  的反函数  $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$ 。

证 设  $\operatorname{sh} w = z$  , 即  $\frac{e^w - e^{-w}}{2} = z \Rightarrow e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0$  解得  $e^w = z + \sqrt{z^2 + 1}$  ,

故  $w = \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$ 。

24. 已知平面流速场的复势  $f(z)$  为

$$(1) (z+i)^2 ; \quad (2) z^3 ; \quad (3) \frac{1}{z^2+1} ;$$

求流动的速度以及流线和等势线的方程。

解 (1)  $V(z) = \overline{f'(z)} = \overline{2(z+i)} = 2(\bar{z}-i)$  为流速, 又

$$f(z) = (z+i)^2 = [x+i(y+1)]^2 = x^2 - (y+1)^2 + i2x(y+1)$$

知流线和等势线方程分别为  $x(y+1) = C_1$  和  $x^2 - (y+1)^2 = C_2$ 。

(2) 流速  $V(z) = \overline{f'(z)} = \overline{3z^2} = 3\bar{z}^2$  , 又  $f(z) = z^3 = x(x^2 - 3y^2) + i y(3x^2 - y^2)$ ,

流线方程:  $(3x^2 - y^2)y = C_1$  , 等势线方程:  $x(x^2 - 3y^2) = C_2$ 。

$$(3) \text{ 流速 } V(z) = \overline{f'(z)} = \overline{\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'} = \overline{\left(\frac{-2z}{z^2+1}\right)'} = \frac{-2\bar{z}}{(\bar{z}^2+1)^2}$$

$$\text{又 } f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{x^2 - y^2 + 1 + i2xy} = \frac{x^2 - y^2 + 1 - i2xy}{(x^2 - y^2 + 1) + 4x^2y^2} ,$$

$$\text{流线方程为 } \frac{xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} = C_1 ,$$

$$\text{等势线方程为 } \frac{x^2 - y^2 + 1}{(x^2 - y^2 + 1) + 4x^2y^2} = C_2 .$$



## 习题三解答

1. 沿下列路线计算积分  $\int_0^{3+i} z^2 dz$ 。

(1) 自原点到  $3+i$  的直线段

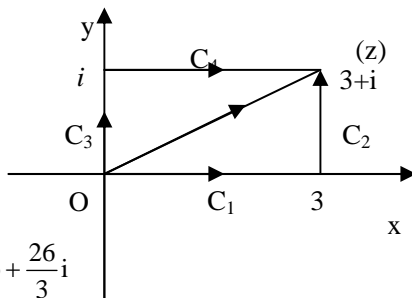
(2) 自原点沿实轴至 3, 再由 3 沿垂直向上至  $3+i$ ;

(3) 自原点沿虚轴至  $i$ , 再由  $i$  沿水平方向右至  $3+i$ 。

解 (1)  $\begin{cases} x=3t, \\ y=t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$ , 故  $z=3t+it$ ,  $0 \leq t \leq 1$ 。  $dz=(3+i)dt$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^{3+i} z^2 dz &= \int_0^1 (3t+it)^2 (3+i) dt \\ &= (3+i)^3 \int_0^1 t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} (3+i)^3 t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (3+i)^3 = 6 + \frac{26}{3}i \end{aligned}$$



(2)  $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^{3+i} z^2 dz + \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz$ 。  $C_1$  之参数方程为  $\begin{cases} x=3t, \\ y=t, \end{cases} (0 \leq t \leq 1)$ ;  $C_2$  之参数方程为  $\begin{cases} x=3, \\ y=t, \end{cases} (0 \leq t \leq 1)$

故  $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 9t^2 \cdot 3dt + \int_0^1 (3+it)^2 \cdot i dt = 6 + \frac{26}{3}i$ 。

(3)  $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^i z^2 dz + \int_i^{3+i} z^2 dz = \int_{C_3} z^2 dz + \int_{C_4} z^2 dz$ 。

$C_3: z=it (0 \leq t \leq 1)$ ;  $C_4: z=3t+i (0 \leq t \leq 1)$ ,

故  $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 -t^2 \cdot i dt + \int_0^1 (3t+i)^2 \cdot 3dt = 6 + \frac{26}{3}i$

2. 分别沿  $y=x$  与  $y=x^2$  算出、积分  $\int_0^{1+i} (x^2+iy) dz$  的值。

解 (1) 沿  $y=x$ 。此时  $z=t+it (0 \leq t \leq 1)$ 。  $dz=(1+i)dt$ , 于是

$$\int_0^{1+i} (x^2+iy) dz = \int_0^1 (t^2+it)(1+i) dt = (1+i) \int_0^1 (t^2+it) dt = (1+i) \left( \frac{1}{3} + \frac{i}{2} \right) = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$$

(2) 沿  $y=x^2$ , 此时  $z=t+it^2 (0 \leq t \leq 1)$ 。  $dz=(1+2it)dt$ , 故

$$\begin{aligned} \int_0^{1+i} (x^2+iy) dz &= \int_0^1 (t^2+it^2)(1+2it) dt = (1+i) \int_0^1 t^2(1+2it) dt = (1+i) \int_0^1 (t^2+2it^3) dt \\ &= (1+i) \left( \frac{1}{3} + \frac{i}{2} \right) = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i \end{aligned}$$

3. 设  $f(z)$  在单连域  $D$  内解析,  $C$  为  $D$  内任何一条正向简单闭曲线, 问

$$\oint_C \operatorname{Re}[f(z)] dz = \oint_C \operatorname{Im}[f(z)] dz = 0$$

是否成立, 如果成立, 给出证明; 如果不成立, 举例说明。

解 未必成立。令  $f(z)=z$ ,  $C: |z|=1$ , 则  $f(z)$  在全平面上解析, 但是

$$\oint_C \operatorname{Re}[f(z)]dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[e^{i\theta}]de^{i\theta} = \int_0^{2\pi} \cos\theta(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta = \pi i \neq 0$$

$$\oint_C \operatorname{Im}[f(z)]dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[e^{i\theta}]de^{i\theta} = \int_0^{2\pi} \sin\theta(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta = -\pi \neq 0$$

4. 利用单位圆上  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  的性质, 及柯西积分公式说明  $\oint_C \bar{z}dz = 2\pi i$ , 其中  $C$  为正向单位圆周  $|z|=1$ 。

解  $\oint_C \bar{z}dz = \oint_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i$ , (利用柯西积分公式)

5. 计算积分  $\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz$  的值, 其中  $C$  为正向圆周: (1)  $|z|=2$ ; (2)  $|z|=4$

解 (1) 因在  $|z|=2$  上有  $|z|=2$ ,  $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 4$ , 从而有  $\bar{z} = \frac{4}{z}$ , 故有

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{4}{z}}{2}dz = \oint_{|z|=2} \frac{2}{z}dz = 4\pi i$$

(2) 因在  $C$  上有  $|z|=4$ ,  $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 16$ , 从而有  $\bar{z} = \frac{16}{z}$ , 故有

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz = \oint_{|z|=4} \frac{\frac{16}{z}}{4}dz = \oint_{|z|=4} \frac{4}{z}dz = 8\pi i$$

6. 利用观察法得出下列积分的值。

解 利用柯西 - 古萨基本定理和柯西积分公式。

7. 沿指定曲线的正向计算下列各积分。

$$(1) \oint_C \frac{e^z}{z-2}dz, C: |z-2|=1$$

$$(2) \oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}, C: |z-a|=a$$

$$(3) \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz, C: |z-2i|=3/2$$

$$(4) \oint_C \frac{zdz}{z-3}, C: |z|=2$$

$$(5) \oint_C \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}, C: |z|=r<1$$

$$(6) \oint_C z^3 \cos z dz, C \text{ 为包围 } z=0 \text{ 的闭曲线}$$

$$(7) \oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}, C: |z|=3/2$$

$$(8) \oint_C \frac{\sin z dz}{z}, C: |z|=1$$

$$(9) \oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz, C: |z|=2$$

$$(10) \oint_C \frac{e^z dz}{z^5}, C: |z|=1$$

解 (1) 由 Cauchy 积分公式,  $\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz = 2\pi i e^z|_{z=2} = 2\pi e^2 i$

$$(2) \quad \text{解 1: } \oint_C \frac{dz}{z^2-a^2} = \oint_C \frac{\frac{1}{z+a}}{z-a}dz = 2\pi i \frac{1}{z+a}\bigg|_{z=a} = \frac{\pi}{a} i,$$

$$\text{解 2: } \oint_C \frac{dz}{z^2-a^2} = \frac{1}{2a} \left[ \oint_C \frac{1}{z-a}dz - \oint_C \frac{1}{z+a}dz \right] = \frac{1}{2a} [2\pi i - 0] = \frac{\pi}{a} i$$

$$(3) \text{ 由 Cauchy 积分公式, } \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = \oint_C \frac{e^{iz}dz/(z+i)}{z-i} = 2\pi i \frac{e^{iz}}{z+i}\bigg|_{z=i} = \pi/e$$

(4)(5)(6) 由柯西基本定理知：其结果均为 0

(7) 因被积函数的奇点  $z = \pm i$  在  $C$  的内部， $z = \pm 2i$  在  $C$  的外部，故由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式有：

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} &= \oint_{|z-i|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} + \oint_{|z+i|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} \\&= \oint_{|z-i|=\frac{1}{3}} \frac{1}{(z+i)(z^2+4)} dz + \oint_{|z+i|=\frac{1}{3}} \frac{1}{(z-i)(z^2+4)} dz \\&= 2\pi i \frac{1}{(z+i)(z^2+4)} \Big|_{z=i} + 2\pi i \frac{1}{(z-i)(z^2+4)} \Big|_{z=-i} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0\end{aligned}$$

(8) 由 Cauchy 积分公式， $\oint_C \frac{\sin z dz}{z} = 2\pi i \sin z \Big|_{z=0} = 0$

(9) 由高阶求导公式， $\oint_C \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz = 2\pi i (\sin z)' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$

(10) 由高阶求导公式， $\oint_C \frac{e^z dz}{z^5} = \frac{2\pi i}{4!} (e^z)^{(4)} \Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{12}$

8. 计算下列各题：

1)  $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz$  ; 2)  $\int_{\frac{\pi i}{6}}^0 \operatorname{ch} 3z dz$  ; 3)  $\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz$  ; 4)  $\int_0^1 z \sin z dz$  ;

5)  $\int_0^i (z-i)e^{-z} dz$  ; 6)  $\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z} dz$  (沿 1 到  $i$  的直线段)。

解 1)  $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz = \frac{e^{2z}}{2} \Big|_{-\pi i}^{3\pi i} = 0$       2)  $\int_{\frac{\pi i}{6}}^0 \operatorname{ch} 3z dz = \frac{1}{3} \operatorname{sh} 3z \Big|_{\frac{\pi i}{6}}^0 = -i/3$

3)  $\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz = \int_{-\pi i}^{\pi i} \frac{1-\cos 2z}{2} dz = \left(\frac{z}{2} - \frac{\sin 2z}{4}\right) \Big|_{-\pi i}^{\pi i} = (\pi - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\pi) i$

4)  $\int_0^1 z \sin z dz = (\sin z - z \cos z) \Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1$

5)  $\int_0^i (z-i)e^{-z} dz = (i-1-z)e^{-z} \Big|_0^i = 1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)$

6)  $\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z} dz = (\tan z + \tan^2 z / 2) \Big|_1^i = -(\tan 1 + \frac{1}{2} \tan^2 1 + \frac{1}{2} \operatorname{th}^2 1) + i \operatorname{th} 1$

9. 计算下列积分：

1)  $\oint_C \left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right) dz$ , 其中  $C: |z|=4$  为正向

2)  $\oint_C \frac{2i}{z^2+1} dz$ , 其中  $C: |z-1|=6$  为正向

3)  $\oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3} dz$ , 其中  $C_1: |z|=2$  为正向,  $C_2: |z|=3$  为负向

4)  $\oint_C \frac{dz}{z-i}$ , 其中  $C$  为以  $\pm \frac{1}{2} \pm \frac{6}{5}i$  为顶点的正向菱形

5)  $\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3} dz$ , 其中  $a$  为  $|a| \neq 1$  的任何复数,  $C: |z|=1$  为正向

解 1)  $\oint_C (\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}) dz = 2\pi i(4+3) = 14\pi i$

2)  $\oint_C \frac{2i}{z^2+1} dz = \oint_{|z-i|=1} \frac{2i/(z+i)}{z-i} dz + \oint_{|z+i|=1} \frac{2i/(z-i)}{z+i} dz = 0$

3)  $\oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3} dz = \oint_{C_1} \frac{\cos z}{z^3} dz - \oint_{C_2} \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)'|_{z=0} - \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)'|_{z=0} = 0$

4)  $\oint_C \frac{dz}{z-i} = 2\pi i$

5) 当  $|a| > 1$  时,  $1/(z-a)^3$  在  $|z| \leq 1$  上解析, 故  $\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3} dz = 0$ ;

当  $|a| < 1$  时,  $\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (e^z)''|_{z=a} = \pi i e^a$

10. 证明: 当  $C$  为任何不通过原点的简单闭曲线时,  $\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$ 。

证明 当原点在曲线  $C$  内部时,  $\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i(1)'|_{z=0} = 0$ ; 当原点在曲线  $C$  外部时,  $1/z^2$  在  $C$  内

解析, 故  $\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$ 。

11. 下列两个积分的值是否相等? 积分 2) 的值能否利用闭路变形原理从 1) 的值得到? 为什么?

1)  $\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z} dz$ ; 2)  $\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z} dz$

解  $\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z} dz = \int_0^{2\pi} 2ie^{-i\theta} d\theta = 0$ ;  $\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z} dz = \int_0^{2\pi} 4ie^{-i\theta} d\theta = 0$ , 故两个积分的值相等。但不能利用闭路

变形原理从 1) 的值得到, 因  $\frac{\bar{z}}{z}$  不是一个解析函数。

12. 设区域  $D$  为右半平面,  $z$  为  $D$  内圆周  $|z|=1$  上的任意一点, 用在  $D$  内的任意一条曲线  $C$  连结原点与  $z$ , 证明  $\operatorname{Re} \left[ \int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta \right] = \frac{\pi}{4}$ 。

证明 函数  $\frac{1}{1+\zeta^2}$  在右半平面解析, 故在计算从 0 到  $z$  沿任意一条曲线  $C$  的积分时与积分路径无

关。则  $\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^\theta \frac{ie^{i\eta}}{1+e^{2i\eta}} d\eta = \frac{\pi}{4} + \int_0^\theta \frac{2i \cos \eta}{2+2 \cos 2\eta} d\eta$ . (分子分母同乘以  $1+e^{-2i\eta}$ ),

故  $\operatorname{Re} \left[ \int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta \right] = \frac{\pi}{4}.$

13. 设  $C_1$  与  $C_2$  为相交于  $M$ 、 $N$  两点的简单闭曲线, 它们所围的区域分别为  $B_1$  与  $B_2$ 。  $B_1$  与  $B_2$  的公共部分为  $B$ 。如果  $f(z)$  在  $B_1 - B$  与  $B_2 - B$  内解析, 在  $C_1$ 、 $C_2$  上也解析, 证明:  $\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$ 。

证明 在  $B_1 - B$  上  $f(z)$  为解析函数, 则由柯西基本定理  $\oint_{MENG} f(z) dz = 0$ ; 同理  $\oint_{MHNFM} f(z) dz = 0$

则  $\int_{NGM} f(z) dz + \int_{MEN} f(z) dz = \int_{MHN} f(z) dz + \int_{NFM} f(z) dz$ , 即  $\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$ 。

14. 设  $C$  为不经过  $a$  与  $-a$  的正向简单闭曲线,  $a$  为不等于零的

任何复数, 试就  $a$  与  $-a$  同  $C$  的各种不同位置, 计算积分  $\oint_C \frac{z}{z^2 - a^2} dz$ 。

解 (i) 当  $a$  在  $C$  的内部而  $-a$  在  $C$  的外部时

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - a^2} dz = \oint_C \frac{z+a}{z-a} dz = 2\pi i \frac{z}{z+a} \Big|_{z=a} = \pi i.$$

(ii) 当  $-a$  在  $C$  的内部而  $a$  在  $C$  的外部时,

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - a^2} dz = \oint_C \frac{z-a}{z+a} dz = 2\pi i \frac{z}{z-a} \Big|_{z=-a} = \pi i$$

(iii) 当  $a$  与  $-a$  在  $C$  的内部时, 设  $C_1, C_2$  分别为以  $a, -a$  为心半径充分小的圆周使  $C_1, C_2$  均在  $C$  的内部且互不相交也互不包含, 则由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式得

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - a^2} dz = \oint_{C_1} \frac{z+a}{z-a} dz + \oint_{C_2} \frac{z-a}{z+a} dz = \pi i + \pi i = 2\pi i$$

(iv) 当  $a$  与  $-a$  都在  $C$  的外部时, 由 Cauchy-Goursat 定理得

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - a^2} dz = 0.$$

15. 设  $C_1$  与  $C_2$  为两条互不包含, 也互不相交的正向简单闭曲线, 证明:

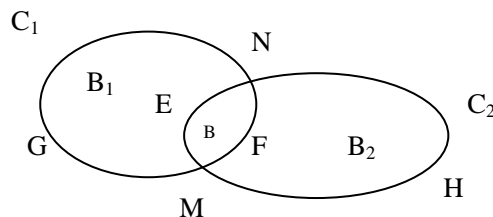
$$\frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{C_1} \frac{z^2 dz}{z - z_0} + \oint_{C_2} \frac{\sin z dz}{z - z_0} \right] = \begin{cases} z_0^2, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_1 \text{ 内时,} \\ \sin z_0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_2 \text{ 内时.} \end{cases}$$

证明 利用 Cauchy 积分公式, 当  $z_0$  在  $C_1$  内时,  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{z^2 dz}{z - z_0} = z^2 \Big|_{z=z_0} = z_0^2$ , 而  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\sin z dz}{z - z_0} = 0$ ;

当  $z_0$  在  $C_2$  内时,  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{z^2 dz}{z - z_0} = 0$ , 而  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\sin z dz}{z - z_0} = \sin z \Big|_{z=z_0} = \sin z_0$ 。故结论成立。

16. 设函数  $f(z)$  在  $0 < |z| < 1$  内解析, 且沿任何圆周  $C: |z| = r, 0 < r < 1$  的积分为零, 问  $f(z)$  是否需在  $z=0$  处解析? 试举例说明之。

解 不一定。如令  $f(z) = \frac{1}{z^2}$ , 则其在  $0 < |z| < 1$  内解析, 且沿任何圆周  $C: |z| = r, 0 < r < 1$  的积分



$$\oint_C f(z) dz = \oint_{|z|=r} \frac{1}{z^2} dz = 0$$

但显然  $f(z) = \frac{1}{z^2}$  在  $z=0$  处不解析。

17. 设  $f(z)$  与  $g(z)$  在区域  $D$  内处处解析,  $C$  为  $D$  内任何一条简单光滑闭曲线, 它的内部全属于  $D$ 。如果  $f(z) = g(z)$  在  $C$  上所有点都成立, 试证在  $C$  的内部所有点处  $f(z) = g(z)$  也成立。

证 因  $f(z), g(z)$  在  $D$  内处处解析故在  $C$  上及其内部也处处解析, 设  $z_0$  为  $C$  的内部的任一点, 则由 Cauchy 积分公式有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{z - z_0} dz,$$

又因在  $C$  上  $f(z) = g(z)$ , 故

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{g(z)}{z - z_0} dz,$$

从而  $f(z_0) = g(z_0)$ , 由  $z_0$  的任意性, 在  $C$  的内部均有  $f(z) = g(z)$ 。

18. 设区域  $D$  是圆环域,  $f(z)$  在  $D$  内解析, 以圆环的中心为中心作正向圆周  $K_1$  与  $K_2$ ,  $K_2$  包含  $K_1$ ,  $z_0$  为  $K_1, K_2$  之间任一点, 试证 (3.5.1) 仍成立, 但  $C$  要换成  $K_1^- + K_2$  (见图)。

证明 参照 78 页闭路变形定理的证明方法。

19. 设  $f(z)$  在单连通区域  $D$  内解析, 且不为零,  $C$  为  $D$  内任何一条简单光滑闭曲线, 问积分  $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

是否为零? 为什么?

解 等于零。因  $f(z)$  在  $D$  内解析, 故  $f(z)$  具有各阶导数且仍为解析函数, 从而  $f'(z)$  在  $D$  内也解析, 又因在  $D$  内  $f(z) \neq 0$ , 故  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  在  $D$  内解析, 从而在  $C$  上及  $C$  的内部也解析, 于是由 Cauchy-Goursat 定理,

有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

20. 试说明柯西 - 古萨基本定理中的  $C$  为什么可以不是简单闭曲线?

21. 设  $f(z)$  在区域  $D$  内解析,  $C$  为  $D$  内的任意一条正向简单闭曲线, 证明: 对在  $D$  内但不在  $C$  上的任意一点  $z_0$ , 等式:  $\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$  成立。

证明 利用 Cauchy 积分公式, 有  $\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f'(z)|_{z=z_0} = 2\pi i f'(z_0)$ ; 而由高阶导数公式

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(z)|_{z=z_0} = 2\pi i f'(z_0), \text{ 故所证等式成立。}$$

22. 如果  $\varphi(x, y)$  和  $\psi(x, y)$  都具有二阶连续偏导数, 且适合拉普拉斯方程, 而  $s = \varphi_y - \psi_x$ ,  $t = \varphi_x + \psi_y$ , 那么  $s + it$  是  $x + iy$  的解析函数。

证明 由  $\varphi(x, y)$  和  $\psi(x, y)$  都具有二阶连续偏导数, 而  $s = \varphi_y - \psi_x$ ,  $t = \varphi_x + \psi_y$  知,  $s, t$  具有一阶连续的偏导数, 在证  $s, t$  满足 C - R 方程即可。注意  $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ ,  $\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$ , 则

$$s_x = \varphi_{yx} - \psi_{xx} = \varphi_{xy} + \psi_{yy} = t_y; \quad s_y = \varphi_{yy} - \psi_{xy} = -\varphi_{xx} - \psi_{yx} = -t_x, \text{ 故 } s, t \text{ 满足 C - R 方程, 即}$$

$s+it$  是  $x+iy$  的解析函数。

23. 设  $u$  为区域  $D$  内的调和函数及  $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ , 问  $f$  是不是  $D$  内的解析函数? 为什么?

解  $f$  是  $D$  内的解析函数。因  $u$  为区域  $D$  内的调和函数, 故  $u_x$  和  $-u_y$  在  $D$  内有一阶连续的偏导数。

又  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y$ ;  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x$ , 即满足 C - R 方程。

24. 函数  $v = x + y$  是  $u = x + y$  的共轭调和函数吗? 为什么?

解 不是。因  $u + iv$  不能构成一解析函数。

25. 设  $u$  和  $v$  都是调和函数, 如果  $v$  是  $u$  的共轭调和函数, 那么  $u$  也是  $v$  的共轭调和函数。这句话对吗? 为什么?

解 不对。参考 27 题的第二问。

26. 证明: 一对共轭调和函数的乘积仍是调和函数。

证明 设  $v$  是  $u$  的共轭调和函数, 则  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $v_{xx} + v_{yy} = 0$ ,  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ 。又

$(uv)_{xx} = u_{xx}v + 2u_xv_x + uv_{xx}$ ,  $(uv)_{yy} = u_{yy}v + 2u_yv_y + uv_{yy}$ , 故  $(uv)_{xx} + (uv)_{yy} = 0$ , 即一对共轭调和函数的乘积仍是调和函数。

27. 如果  $f(z) = u + iv$  是一解析函数, 试证:

1)  $\overline{if(z)}$  也是解析函数; 2)  $-u$  是  $v$  的共轭调和函数;

$$3) \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial y^2} = 4(u_x^2 + v_x^2) = 4|f'(z)|^2.$$

证明 1)  $\overline{if(z)} = v - iu$ , 而  $f(z) = u + iv$  是一解析函数, 故  $u, v$  满足 C - R 方程, 进而  $v_x = (-u)_y$ ,  $v_y = -(-u)_x$ 。故  $\overline{if(z)}$  也是解析函数。

2) 由  $f(z) = u + iv$  是一解析函数,  $\overline{if(z)} = v - iu$ 。故  $-u$  是  $v$  的共轭调和函数。

$$\begin{aligned} 3) \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2 + v^2) \\ &= 2u_x^2 + 2v_x^2 + 2u_y^2 + 2v_y^2 + 2u(u_{xx} + u_{yy}) + 2v(v_{xx} + v_{yy}) \\ &= 4(u_x^2 + v_x^2) = 4|f'(z)|^2 \end{aligned}$$

28. 证明:  $u = x^2 - y^2$  和  $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$  都是调和函数, 但是  $u + iv$  不是解析函数。

证明  $u_x = 2x$ ,  $u_y = -2y$ ,  $v_x = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $v_y = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ,

$$v_{xx} = \frac{8x^2y}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v_{yy} = \frac{8y^3}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{6y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{则}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = \frac{8x^2y}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{8y^3}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{8y}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

29. 求具有下列形式的所有调和函数  $u$  : 1)  $u = f(ax+by)$ ,  $a$  与  $b$  为常数 2)  $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 。

解 1) 由  $u_x = af'$ ,  $u_{xx} = a^2 f''$ ,  $u_{yy} = b^2 f''$ , 而  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , 则  $f'' = 0$ , 即  $f = c_1(ax+by) + c_2$ 。

2) 由  $u_x = -\frac{y}{x^2} f'$ ,  $u_{xx} = 2\frac{y}{x^3} f' + \frac{y^2}{x^4} f''$ ,  $u_y = \frac{1}{x} f'$ ,  $u_{yy} = \frac{1}{x^2} f''$ , 而  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , 则

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) f'' + 2\frac{y}{x} f' = 0, \text{ 即 } f = c_1 \arctan \frac{y}{x} + c_2.$$

30. 由下列各已知调和函数求解析函数  $f(z) = u + iv$  :

1)  $u = (x-y)(x^2 + 4xy + y^2)$  ; 2)  $v = \frac{y}{x^2 + y^2}, f(2) = 0$  ;

3)  $u = 2(x-1)y, f(2) = -i$  ; 4)  $v = \arctan \frac{y}{x}, x > 0$ 。

解 1)  $u_x = 3x^2 + 6xy - 3y^2, u_y = 3x^2 - 6xy - 3y^2$ , 则

$$f'(z) = u_x - iu_y = 3x^2 + 6xy - 3y^2 - i(3x^2 - 6xy - 3y^2) = 3(1-i)z^2, \text{ 故}$$

$$f(z) = (1-i)z^3 + ic, c \in \mathbb{R};$$

2)  $f'(z) = v_y + iv_x = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\bar{z}^2}{(z\bar{z})^2} = \frac{1}{z^2}$ , 故

$$f(z) = -\frac{1}{z} + c, \text{ 又 } f(2) = 0, \text{ 则 } f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{z};$$

3)  $f'(z) = u_x - iu_y = 2y - 2i(x-1) = -2i(x-1+iy) = -2i(z-1)$ , 故

$$f(z) = -i(z-1)^2 + c, \text{ 又 } f(2) = -i, \text{ 则 } f(z) = -i(z-1)^2;$$

4)  $f'(z) = v_y + iv_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x-iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$ , 故  $f(z) = \ln z + c, c \in \mathbb{R}$ 。

31. 设  $v = e^{px} \sin y$ , 求  $p$  的值使  $v$  为调和函数, 并求出解析函数  $f(z) = u + iv$ 。

解  $v_{xx} + v_{yy} = e^{px} \sin y (p^2 - 1) = 0$ , 知  $p = \pm 1$ 。当  $p = 1$  时,  $f(z) = e^z + c, c \in \mathbb{R}$ ; 当  $p = -1$  时,  $f(z) = -e^{-z} + c, c \in \mathbb{R}$ 。

32. 如果  $u(x, y)$  是区域  $D$  内的调和函数,  $C$  为  $D$  内以  $z_0$  为中心的任何一个正向圆周:  $|z - z_0| = r$ , 它的内部完全含于  $D$ 。试证:

1)  $u(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的值等于  $u(x, y)$  在圆周  $C$  上的平均值, 即

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) d\varphi;$$

2)  $u(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的值等于  $u(x, y)$  在圆域  $|z - z_0| \leq r_0$  上的平均值, 即

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) r d\varphi dr.$$

证明 1) 由平均值公式 (P86)



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\theta}) d\theta$$

只取其实部有：  $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) d\varphi$  ;

2) 由 1) 知  $\frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) r d\varphi dr = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} 2\pi u(x_0, y_0) r dr = u(x_0, y_0)$ 。

33. 如果  $f(z) = u + iv$  在区域  $D$  内处处解析,  $C$  为  $D$  内的正向圆周:  $|z| = R$ , 它的内部完全含于  $D$ 。

设  $z$  为  $C$  内一点, 并令  $\bar{z} = R^2 / \bar{z}$ , 试证

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} d\zeta = \oint_C \frac{\bar{z} f(\zeta)}{\zeta \bar{z} - R^2} d\zeta = 0。$$

证明 因  $z$  为  $C$  内一点,  $|\bar{z}| = |R^2 / \bar{z}| = R^2 / |z| = \frac{R}{|z|} R > R$ , 故  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}}$  在  $C$  及其内部解析。由

Cauchy 基本定理知:  $\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} d\zeta = \oint_C \frac{\bar{z} f(\zeta)}{\zeta \bar{z} - R^2} d\zeta = 0。$

34. 根据柯西积分公式与习题 33 的结果, 证明

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[ \frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - \zeta \bar{z}} \right] f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z}) f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta \bar{z})} d\zeta,$$

其中  $C$  为  $|z| = R$ 。

证明 由柯西积分公式有:  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ ; 而由 33 题结果知  $\oint_C \frac{\bar{z} f(\zeta)}{\zeta \bar{z} - R^2} d\zeta = 0$ , 故

将这两式相减即得。

35 如果令  $\zeta = R e^{i\theta}$ ,  $z = r e^{i\varphi}$ , 验证

$$\frac{d\zeta}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta \bar{z})} = \frac{d\zeta / \zeta}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})} = \frac{id\theta}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2}.$$

并由 34 题的结果, 证明

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(R e^{i\theta})}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

取其实部, 得

$$u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) u(R \cos \theta, R \sin \theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta$$

这个积分称为泊松 (Poisson) 积分。通过这个公式, 一个调和函数在一个圆内得值可用它在圆周上的值来表示。

证明  $\frac{R^2}{\zeta} = R \frac{R}{\zeta} = R \cdot e^{-i\theta} = \bar{\zeta}$ , 故  $\frac{d\zeta}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta \bar{z})} = \frac{d\zeta / \zeta}{(\zeta - z)(\frac{R^2}{\zeta} - \bar{z})} = \frac{d\zeta / \zeta}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})}$ . 又

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{iR \cdot e^{i\theta} d\theta}{R \cdot e^{i\theta}} = id\theta, (\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z}) = R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2, \text{ 故}$$

$$\frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{z})} = \frac{id\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}.$$

$$\text{又由 34 题知 } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})f(\zeta)}{(\zeta-z)(R^2 - \zeta\bar{z})} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{i\theta})d\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}.$$

36. 设  $f(z)$  在简单闭曲线  $C$  内及  $C$  上解析, 且不恒为常数,  $n$  为正整数.

1) 试用柯西积分公式证明:

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta.$$

2) 设  $M$  为  $|f(\zeta)|$  在  $C$  上的最大值,  $L$  为  $C$  的长,  $d$  为  $z$  到  $C$  的最短距离, 试用积分估值公式 (3.1.10) 于 1) 中的等式, 证明不等式:

$$|f(z)| \leq M \left( \frac{L}{2\pi d} \right)^{1/n}.$$

3) 令  $n \rightarrow +\infty$ , 对 2) 中的不等式取极限, 证明:  $|f(z)| \leq M$ . 这个结果表明: 在闭区域内不恒为常数的解析函数的模的最大值只能在区域的边界上取得 (最大模原理).

证明 1) 在柯西积分公式中将里面的函数  $f(z)$  换成  $[f(z)]^n$  即得。

$$2) \text{ 由 1) 知 } |f(z)|^n = |[f(z)]^n| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \left| \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z} \right| ds \leq \frac{L}{2\pi d} M^n, \text{ 故}$$

$$|f(z)| \leq \left( \frac{L}{2\pi d} M^n \right)^{1/n} = M \left( \frac{L}{2\pi d} \right)^{1/n}.$$

3) 对 2) 中的不等式取极限 ( $n \rightarrow +\infty$ ), 即得。

## 习题四解答

1. 下列数列  $\{\alpha_n\}$  是否收敛？如果收敛，求出它们的极限：

$$1) \alpha_n = \frac{1+ni}{1-ni} ; 2) \alpha_n = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-n} ; 3) \alpha_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1} ; 4) \alpha_n = e^{-n\pi i/2} ; 5)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{n} e^{-n\pi i/2}$$

解 1)  $\alpha_n = \frac{1+ni}{1-ni} = \frac{1-n^2}{1+n^2} + \frac{2n}{1+n^2}i$ , 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{1+n^2} = -1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1+n^2} = 0$ , 故  $\alpha_n$  收敛,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -1$$

2)  $\alpha_n = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-n} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i\theta}\right)^n$ , 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i\theta}\right)^n = 0$ , 故  $\alpha_n$  收敛,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

3) 由于  $\alpha_n$  的实部  $\{(-1)^n\}$  发散, 故  $\alpha_n$  发散

4) 由于  $\alpha_n = e^{-n\pi i/2} = \cos \frac{n\pi}{2} - i \sin \frac{n\pi}{2}$ , 其实部、虚部数列均发散, 故  $\alpha_n$  发散

5)  $\alpha_n = \frac{1}{n} e^{-n\pi i/2} = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} - i \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$ , 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = 0$ ,

故  $\alpha_n$  收敛,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

2. 证明：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = \begin{cases} 0, & |\alpha| < 1, \\ \infty, & |\alpha| > 1, \\ 1, & \alpha = 1, \\ \text{不存在}, & |\alpha| = 1, \alpha \neq 1. \end{cases}$$

3. 判断下列级数的绝对收敛性与收敛性：

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} ; 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n} ; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6+5i)^n}{8^n} ; 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}.$$

解 1) 由  $i^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$  为收敛的交错项实级数,

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$  收敛, 但  $\left| \frac{i^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n} \right|$  发散, 原级数条件收敛;

2) 与 1) 采用同样的方法, 并利用  $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n} (n \geq 2)$ ;

3) 因  $\left| \frac{(6+5i)^n}{8^n} \right| = \left( \frac{\sqrt{61}}{8} \right)^n$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{61}}{8} \right)^n$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6+5i)^n}{8^n}$  绝对收敛;

4) 因  $\cos in = \operatorname{ch} n$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} n}{2^n} \neq 0$ , 故  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$  发散。

4. 下列说法是否正确? 为什么?

(1) 每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛;

(2) 每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点;

(3) 每一个在  $z_0$  连续的函数一定可以在  $z_0$  的邻域内展开成 Taylor 级数。

解 (1) 不对。如  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  在收敛圆  $|z| < 1$  内收敛, 但在收敛圆周  $|z| = 1$  上并不收敛;

(2) 不对。幂级数的和函数在收敛圆内为解析函数, 不能有奇点;

(3) 不对。如  $f(z) = \bar{z}$  在全平面上连续, 但它在任何点的邻域内均不能展开成 Taylor 级数。

5. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$  能否在  $z=0$  收敛而在  $z=3$  发散?

解 不能。因如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$  在  $z=0$  收敛, 则由 Abel 定理其收敛半径

$R \geq |0-2| = 2$ , 而  $|3-2| = 1 < 2$  即  $z=3$  在其收敛圆  $|z-2| < 2$  内, 故级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$  在

$z=3$  收敛, 矛盾。

6. 求下列幂级数的收敛半径:

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  ( $p$  为正整数); (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} z^n$ ; (3)  $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ ;

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n$ ; (5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \left( \frac{i}{n} \right) (z-1)^n$ ; (6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{\ln in} \right)^n$ 。

解 (1)  $R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$ ;

$$(2) R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n+1} = 0;$$

$$(3) R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 / |1+i| = 1 / \sqrt{2};$$

$$(4) R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1;$$

$$(5) R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\operatorname{ch}\left(\frac{i}{n}\right)} = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos \frac{1}{n}} = 1;$$

$$(6) R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\ln n| = \infty;$$

7. 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为  $R$ , 证明级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} c_n) z^n$  的收敛半径  $\geq R$ 。

证明 对于圆  $|z| < R$  内的任意一点  $z$ , 由已知  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  绝对收敛即  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z|^n$  收敛, 又

因  $|\operatorname{Re} c_n| \leq |c_n|$ , 从而  $|\operatorname{Re} c_n| |z|^n \leq |c_n| |z|^n$ , 故由正项级数的比较判别法  $\sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{Re} c_n| |z|^n$  也

收敛即  $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} c_n) z^n$  在  $|z| < R$  内绝对收敛, 于是其收敛半径  $\geq R$ 。

8. 证明: 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$  存在 ( $\neq \infty$ ), 下列三个幂级数有相同的收敛半径

$$\sum c_n z^n; \quad \sum \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}; \quad \sum n c_n z^{n-1}.$$

证明 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \rho$ , 则幂级数  $\sum c_n z^n$  的收敛半径为  $1/|\rho|$ ;

幂级数  $\sum \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$  的收敛半径为  $R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n / (n+1)}{c_{n+1} / (n+2)} \right| = 1 / |\rho|$ ;

幂级数  $\sum n c_n z^{n-1}$  的收敛半径为  $R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n c_n}{(n+1) c_{n+1}} \right| = 1 / |\rho|$ ;

故以上三个幂级数有相同的收敛半径。

9. 设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  收敛, 而  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$  发散, 证明  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为 1。

证明 由级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  收敛, 知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在  $z=1$  处收敛, 由 Abel 定理知  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径  $R \geq 1$ ; 而  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$  发散知  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$  在  $|z|=1$  处发散, 故  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径  $R \leq 1$ 。所以  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为 1。

10. 如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在它的收敛圆的圆周上一点  $z_0$  处绝对收敛, 证明它在收敛圆所围的闭区域上绝对收敛。

证明 由 Abel 定理知  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在其收敛圆内绝对收敛, 再证其在圆周上绝对收敛即可。在圆周上任取一点  $\eta$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \eta^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n|$ , 知  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \eta^n$  绝对收敛, 故结论成立。

11. 把下列各函数展开成  $z$  的幂级数, 并指出它们的收敛半径。

$$(1) \frac{1}{1+z^3}; (2) \frac{1}{(1+z^2)^2}; (3) \cos z^2; (4) \operatorname{sh} z;$$

$$(5) \operatorname{ch} z; (6) e^{z^2} \sin z^2; (7) e^{\frac{z}{z-1}}; (8) \sin \frac{1}{1-z}$$

解 (1) 由  $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, |z| < 1$ , 故

$$\frac{1}{1+z^3} = 1 - z^3 + z^6 - z^9 + \dots + (-1)^n z^{3n} + \dots, |z| < 1,$$

而收敛半径  $R=1$ ;

$$(2) \text{ 因 } \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots, |z| < 1,$$

$$\text{故 } \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots + (-1)^n z^{2n} + \dots, |z| < 1,$$

$$\text{又因 } \left( \frac{1}{1+z^2} \right)' = \frac{-2z}{(1+z^2)^2},$$

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2z} \left( \frac{1}{1+z^2} \right)' = 1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + \dots, |z| < 1,$$

而  $R=1$ ;

$$(3) \text{ 因 } \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots, |z| < \infty, \text{ 故 } \cos z^2 = 1 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{12}}{6!} + \dots$$

$|z| < +\infty$  而其收敛半径  $R = +\infty$  ;

$$(4) \text{ 因 } \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots, |z| < +\infty, e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots, |z| < +\infty,$$

故  $\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots, |z| < +\infty$ , 而收敛半径  $R = +\infty$  ;

$$(5) \operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, |z| < +\infty,$$

$$(6) \text{ 因 } e^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots, |z| < +\infty, \sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + \dots, |z| < +\infty,$$

$$\text{故 } e^{z^2} \sin z^2 = \left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots\right) \left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + \dots\right) = z^2 + z^4 + \frac{z^6}{3} + \dots, |z| < +\infty,$$

而收敛半径  $R = +\infty$ ;

$$(7) \text{ 因 } e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots, |z| < +\infty,$$

$$\frac{z}{z-1} = -z - z^2 - z^3 - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}, |z| < 1,$$

$$\text{故 } e^{\frac{z}{z-1}} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!} + \frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}\right)^3}{3!} + \dots = 1 - z - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots, |z| < 1,$$

而收敛半径  $R=1$ 。

$$(8) \text{ 因 } \sin \frac{1}{1-z} = \sin \left(1 + \frac{z}{1-z}\right) = \sin 1 \cos \frac{z}{1-z} + \cos 1 \sin \frac{z}{1-z},$$

$$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}, |z| < 1,$$

$$\text{故 } \sin \frac{z}{1-z} = \left(z + z^2 + z^3 + \dots\right) - \frac{1}{3!} \left(z + z^2 + z^3 + \dots\right)^3 + \dots = z + z^2 + \frac{5}{6} z^3 + \dots, |z| < 1,$$

$$\cos \frac{z}{1-z} = 1 - \frac{1}{2} \left(z + z^2 + z^3 + \dots\right)^2 - \frac{1}{4!} \left(z + z^2 + z^3 + \dots\right)^4 + \dots = 1 - \frac{1}{2} z^2 - z^3 + \dots, |z| < 1,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \sin \frac{1}{1-z} &= \sin 1 \left(1 - \frac{1}{2} z^2 - z^3 + \dots\right) + \cos 1 \left(z + z^2 + \frac{5}{6} z^3 + \dots\right) \\ &= \sin 1 + (\cos 1)z + \left(\cos 1 - \frac{1}{2} \sin 1\right)z^2 + \left(\frac{5}{6} \cos 1 - \sin 1\right)z^3 + \dots, |z| < 1, \end{aligned}$$

而收敛半径  $R=1$ 。

12. 求下列各函数在指定点  $z_0$  处的 Taylor 展开式, 并指出它们的收敛半径:

$$(1) \frac{z-1}{z+1}, z_0=1 \quad (2) \frac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=2$$

$$(3) \frac{1}{z^2}, z_0=-1 \quad (4) \frac{1}{4-3z}, z_0=1+i$$

$$(5) \tan z, z_0=\pi/4 \quad (6) \arctan z, z_0=0$$

解 (1) 因  $\frac{z-1}{z+1} = (z-1) \frac{1}{(z-1+2)} = \frac{z-1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$

及  $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, |z| < 1$ 。故

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} &= \frac{z-1}{2} \left[ 1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1} + \dots \right] \\ &= \frac{z-1}{2} - \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} (z-1)^n, \quad |z-1| < 2 \end{aligned}$$

于是收敛半径  $R=2$ 。

(2) 因  $\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{z+2} - \frac{2}{z+1} \right) = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}$

及  $\frac{1}{z+2} = \frac{1}{4+(z-2)} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{z-2}{4}} = \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{z-2}{4} + \left(\frac{z-2}{4}\right)^2 - \dots \right], \quad |z-2| < 4$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3+(z-2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{z-2}{3}} = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{z-2}{3} + \left(\frac{z-2}{3}\right)^2 - \dots \right], \quad |z-2| < 3$$

$$\begin{aligned} \text{故原式} &= \frac{2}{4} \left[ 1 - \frac{z-2}{2^2} + \frac{1}{2^{22}} (z-2)^2 - \dots \right] - \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{z-2}{3} + \frac{(z-2)^2}{3^2} - \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{2^{2n}} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} (z-2)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (z-2)^n, \quad |z-2| < 3, \text{ 而 } R=3. \end{aligned}$$

(3) 因  $\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)'$  及  $\frac{1}{z} = -\frac{1}{1-(z+1)} = -\left[ 1 + (z+1) + (z+1)^2 + \dots \right], \quad |z+1| < 1,$

故  $\frac{1}{z^2} = 1 + 2(z+1) + \dots + n(z+1)^{n-1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n, \quad |z+1| < 1,$

而  $R=1$ 。



$$\begin{aligned}
 (4) \text{ 因 } \frac{1}{4-3z} &= \frac{1}{4-3[z-(1+i)]-3-3i} = \frac{1}{1-3i-3[z-(1+i)]} \\
 &= \frac{1}{1-3i} \frac{1}{1-\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]} = \frac{1}{1-3i} \left\{ 1 + \frac{3}{1-3i}[z-(1+i)] + \left( \frac{3}{1-3i} \right)^2 [z-(1+i)]^2 + \cdots \right\},
 \end{aligned}$$

其中  $\left| \frac{3}{1-3i}[z-(1+i)] \right| < 1$ , 故

$$\frac{1}{4-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}} [z-(1+i)]^n, \quad |z-(1+i)| < \left| \frac{1-3i}{3} \right| = \frac{\sqrt{10}}{3},$$

且收敛半径  $R = \frac{\sqrt{10}}{3}$ 。

$$(5) \text{ 因 } \tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 + \cdots, |z| < \frac{\pi}{2}, \text{ 又 } \tan z = \frac{1 + \tan(z - \frac{\pi}{4})}{1 - \tan(z - \frac{\pi}{4})}, \text{ 故}$$

$$\tan z = [1 + \tan(z - \frac{\pi}{4})](1 + \tan(z - \frac{\pi}{4}) + \tan^2(z - \frac{\pi}{4}) + \cdots)$$

$$= 1 + 2(z - \frac{\pi}{4}) + 2(z - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(z - \frac{\pi}{4})^3 + \cdots, \text{ 且收敛半径 } R = \frac{\pi}{4}.$$

$$(6) \text{ 因 } (\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2}, \text{ 又 } \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots, |z| < 1, \text{ 故}$$

$$\arctan z = \int_0^z \frac{1}{1+z^2} dz = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1,$$

且收敛半径  $R = 1$ 。

13. 为什么在区域  $|z| < R$  内解析且在区间  $(-R, R)$  取实数值的函数  $f(z)$  展开成  $z$  的幂级数时, 展开式的系数都是实数?

解  $f(z)$  展开成  $z$  的幂级数时, 展开式的系数为  $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ , 而函数  $f(z)$  在区间

$(-R, R)$  取实数值, 可知  $f^{(n)}(0)$  也为实数。故展开式的系数都是实数。

14. 证明在  $f(z) = \cos(z + \frac{1}{z})$  以  $z$  的各幂表出的洛朗展开式中的各系数为

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta) \cos n\theta d\theta, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

证明  $f(z) = \cos(z + \frac{1}{z})$  在复平面内出去点  $z = 0$  外解析, 所以在  $0 < |z| < +\infty$  内可

展开成洛朗级数  $\cos(z + \frac{1}{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ , 其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{\cos(z + \frac{1}{z})}{z^{n+1}} dz, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, 0 < r < +\infty)$$

与要证明式子中  $c_n$  的表示式相比较, 我们取  $r = 1$  并利用复积分的计算公式可得

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\cos(z + \frac{1}{z})}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{e^{in\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$- \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta) \cos n\theta d\theta$$

因  $\int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta) \sin n\theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\cos\theta) \sin n\theta d\theta$ , 而  $\cos(2\cos\theta) \sin n\theta$  为  $\theta$  的奇函数。

15. 下列结论是否正确?

用长除法  $\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$ ,  $\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots$

因为  $\frac{z}{1-z} + \frac{z}{z-1} = 0$ , 所以  $\dots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = 0$ 。

解 不正确。因为长除法所得到的两式, 使它们成立的  $z$  值的范围不同 (分别为  $|z| < 1$ ;  $|z| > 1$ ), 因此不能相加。

16. 把下列各函数在指定的圆环域内展开成 Laurent 级数。

$$(1) \frac{1}{(z^2+1)(z-2)}, 1 < |z| < 2; \quad (2) \frac{1}{z(1-z)^2}, 0 < |z| < 1, 0 < |z-1| < 1;$$

$$(3) \frac{1}{(z-1)(z-2)}, 0 < |z-1| < 1, 1 < |z-2| < +\infty \quad (4) e^{\frac{1}{1-z}}, 1 < |z| < +\infty$$

$$(5) \frac{1}{z^2(z-i)}, \text{在以 } i \text{ 为中心的圆环域内} \quad (6) \sin \frac{1}{1-z}, 0 < |z-1| < +\infty$$

$$(7) \frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}, 3 < |z| < 4, 4 < |z| < +\infty$$

解 (1) 因 
$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)} = \frac{-\frac{1}{5}z}{z^2+1} + \frac{-\frac{2}{5}}{z^2+1} + \frac{\frac{1}{5}}{z-2}$$

故 
$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)} = -\frac{1}{5}z \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} - \frac{2}{5} \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} - \frac{1}{10} \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{5}z \cdot \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \frac{2}{5} \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \\
&= -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2(n+1)}} - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \\
&= \cdots + \frac{2}{5} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{5} \frac{1}{z^3} - \frac{2}{5} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{5} \frac{1}{z} - \frac{1}{10} - \frac{z}{20} - \frac{z^2}{40} - \frac{z^3}{80} - \cdots \quad 1 < |z| < 2 ;
\end{aligned}$$

(2) 在  $0 < |z| < 1$  内,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)^2} &= \frac{1}{z} (1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots)^2 = \frac{1}{z} (1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots) \\
&= \frac{1}{z} + 2+3z+\cdots+(n+1)z^{n-1}+\cdots = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+2)z^n
\end{aligned}$$

在  $0 < |z-1| < 1$  内,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)^2} &= \frac{1}{(1-z)^2} \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{(1-z)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-2}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n ;
\end{aligned}$$

(3)  $0 < |z-1| < 1$  内,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)-1} - \frac{1}{z-1} \\
&= -\frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n - \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty} (z-1)^n
\end{aligned}$$

在  $1 < |z-2| < +\infty$  内

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{(z-2)+1} \\
&= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2} \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^n} \\
&= \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(z-2)^{n+1}} = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(z-2)^n}
\end{aligned}$$

(4) 在  $1 < |z| < +\infty$  内, 因

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{-1}{z} \left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right) = -\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$$\begin{aligned}\text{故 } e^{\frac{1}{1-z}} &= 1 - \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right) + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right)^2 - \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right)^3 + \cdots ; \\ &= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^4} + \cdots\end{aligned}$$

$$(5) \text{ 在 } 0 < |z-i| < 1 \text{ 内, 因 } \frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n z^{n-1}, |z| < 1, \text{ 故}$$

$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{1}{i^2(z-i)(1+\frac{z-i}{i})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(z-i)^{n-2}}{i^{n+1}}$$

$$\text{在 } 1 < |z-i| < +\infty \text{ 内, 因 } \frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{1}{(z-i)^3(1+\frac{i}{z-i})^2}, \text{ 故}$$

$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n i^{n-1}}{(z-i)^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1) i^n}{(z-i)^{n+3}}$$

$$(6) \text{ 因 } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, |z| < +\infty, \text{ 故}$$

$$\sin \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(1-z)^{2n+1}} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}}, \quad 0 < |z-1| < +\infty$$

$$(7) \text{ 在 } 3 < |z| < 4 \text{ 内, 因 } \frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} = (z^2-3z+2) \left( \frac{1}{3-z} - \frac{1}{4-z} \right), \text{ 故}$$

$$\begin{aligned}\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} &= -(z^2-3z+2) \left( \frac{1}{z(1-\frac{3}{z})} + \frac{1}{4(1-\frac{z}{4})} \right) \\ &= -(z^2-3z+2) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}} \right) = 1 - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n} - 2 \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}\end{aligned}$$

$$\text{在 } 4 < |z| < +\infty \text{ 内, } \frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} = (z^2-3z+2) \left( \frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-3} \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} &= (z^2-3z+2) \left( \frac{1}{z(1-\frac{4}{z})} - \frac{1}{z(1-\frac{3}{z})} \right) \\ &= (z^2-3z+2) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (3 \cdot 2^{2n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}) z^{-n}\end{aligned}$$

17. 函数  $\tan \frac{1}{z}$  能否在圆环域  $0 < |z| < R$  ( $0 < R < +\infty$ ) 内展开成洛朗级数?

为什么?

解 不能展成洛朗级数。因在圆环域  $0 < |z| < R$  内  $\tan \frac{1}{z}$  不解析。

18. 如果  $k$  为满足关系  $k^2 < 1$  的实数, 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta = \frac{\sin \theta}{1 - 2k \cos \theta + k^2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos(n+1)\theta = \frac{\cos \theta - k}{1 - 2k \cos \theta + k^2}.$$

证明  $\frac{1}{z-k}$  在  $|z| > k$  内为解析函数, 将其展成洛朗级数有

$$\frac{1}{z-k} = \frac{1}{z(1-\frac{k}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{z^{n+1}}$$

在上式中令  $z = e^{i\theta}$ ,

$$\frac{1}{e^{i\theta} - k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{(e^{i\theta})^{n+1}}, \text{ 即 } \frac{\cos \theta - k - i \sin \theta}{1 - 2k \cos \theta + k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (k^n \cos(n+1)\theta - i k^n \sin(n+1)\theta)$$

分离实部和虚部即得结论。

19. 如果  $C$  为正向圆周  $|z| = 3$ , 求积分  $\int_C f(z) dz$  的值. 设  $f(z)$  为

1)  $\frac{1}{z(z+2)}$ ; 2)  $\frac{z+2}{(z+1)z}$ ; 3)  $\frac{1}{z(z+1)^2}$ ; 4)  $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ 。

解  $\int_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$

1)  $\frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z(1+\frac{2}{z})} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}} \right), |z| > 2。$

故  $\int_C f(z) dz = 0。$

2)  $\frac{z+2}{(z+1)z} = (z+2) \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z(1+\frac{1}{z})} \right) = (z+2) \left( \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}} \right), |z| > 1$

故  $\int_C f(z) dz = 2\pi i。$

3)  $\frac{1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{z^3(1+\frac{1}{z})^2} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{z^{n-1}}, |z| > 1。故 \int_C f(z) dz = 0。$

$$4) \frac{z}{(z+1)(z+2)} = z \left( \frac{1}{z(1+\frac{1}{z})} - \frac{1}{z(1+\frac{2}{z})} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{z^n}, |z| > 2$$

$$\text{故 } \int_C f(z) dz = 2\pi i。$$

20. 试求积分  $\oint_C (\sum_{n=-2}^{\infty} z^n) dz$  的值, 其中  $C$  为单位圆  $|z|=1$  内的任何一条不经过

原点的简单闭曲线。

解  $\sum_{n=-2}^{\infty} z^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}, 0 < |z| < 1$ 。而  $C$  为单位圆  $|z|=1$  内的任何一条不经过

原点的简单闭曲线, 故  $\oint_C (\sum_{n=-2}^{\infty} z^n) dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i$ 。

## 习题五解答

1、下列函数有什么奇点？如果是极点，指出它的级。

$$(1) \frac{1}{z(z^2+1)^2};$$

$$(2) \frac{\sin z}{z^3};$$

$$(3) \frac{1}{z^3 - z^2 - z + 1};$$

$$(4) \frac{\ln(z+1)}{z};$$

$$(5) \frac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})};$$

$$(6) e^{\frac{1}{1-z}};$$

$$(7) \frac{1}{z^2(e^z-1)};$$

$$(8) \frac{z^{2n}}{1+z^n};$$

$$(9) \frac{1}{\sin z^2}.$$

解 (1)  $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)^2}$  是有理函数，故奇点只是极点，满足  $z(z^2+1)^2=0$ ，故  $z=0$ ，与  $z=\pm i$  为

其奇点， $z=0$  为一级极点，而  $z=\pm i$  为其二级极点。

(2) 因  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z^3} = \infty$  则  $z=0$  为其极点。再确定极点的级，有两种方法：

a.  $z=0$  为  $\sin z$  为的一级零点；而  $z=0$  为  $z^3$  的三级零点。故  $z=0$  为  $\frac{\sin z}{z^3}$  的二级极点。

b.  $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{\sin z}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$ ，故  $z=0$  为其二级极点，

(3) 原式  $= \frac{1}{(z^2-1)(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}$ ，故  $z=1$  为其二级极点，而  $z=-1$  为一级极点。

(4) a.  $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ ， $0 < |z| < 1$ ， $\frac{\ln(1+z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n+1}$  无负幂项，故  $z=0$  为其可去奇点。

b.  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1+z} = 1$ ，故  $z=0$  为可去奇点。

(5) 由  $1+z^2=0$  得  $z=\pm i$  为  $(1+z^2)$  的一级零点，由  $1+e^{\pi z}=0$  得  $z_k=(2k+1)i$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为  $(1+e^z)$  的零点，又  $(1+e^{\pi z})'|_{z_k} = \pi e^{\pi z_k} = -\pi \neq 0$ ，所以  $z_k$  为  $(1+e^z)$  的一级零点，因此， $z=\pm i$  为二级极点；

$z_k=(2k+1)i$ ，( $k=1, \pm 2, \dots$ ) 为一级极点。

(6) 由  $e^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}$ ，知  $z=1$  为本性奇点。

(7) 因  $e^z - 1 = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = z(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \dots)$ ，故  $z=0$  为  $z^2(e^z-1)$  的三级零点，因而是  $\frac{1}{z^2(e^z-1)}$

的三级极点，而  $z=2k\pi i$  ( $k=\pm 1, \pm 2, \dots$ ) 均为一级极点。

(8) 由  $z^n+1=0$ ， $z^n=-1$ ，得  $z_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$  ( $k=0, 1, \dots, n-1$ ) 为原式一级极点。

(9)  $\sin z^2=0 \Rightarrow z=\pm\sqrt{k\pi}$ ， $z=\pm i\sqrt{k\pi}$ ， $k=0, 1, 2, \dots$  由

$(\sin z^2)'|_{z^2=k\pi} = 2z \cos z^2|_{z^2=k\pi} = \begin{cases} 0 & k=0 \\ \neq 0 & k \neq 0 \end{cases}$ ,  $(\sin z^2)''|_{z=0} = 2$ , 知  $z=0$  是  $\frac{1}{\sin z^2}$  的二级极点,

$z = \pm\sqrt{k\pi}$ ,  $z = \pm i\sqrt{k\pi}$  ( $k=1,2,3,\dots$ ) 均为  $\frac{1}{\sin z^2}$  一级极点。

2. 求证: 如果  $z_0$  是  $f(z)$  是  $m$  ( $m > 1$ ) 级零点, 那么  $z_0$  是  $f'(z)$  的  $m-1$  级零点。

证 由题知:  $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$ , 则有

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} \varphi(z) + (z - z_0)^m \varphi'(z) = (z - z_0)^{m-1} [m\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)]$$

故  $z_0$  是  $f'(z)$  的  $m-1$  级零点。

3. 验证:  $z = \frac{\pi i}{2}$  是  $\operatorname{ch} z$  的一级零点。

解 由  $\operatorname{ch} \frac{\pi i}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $(\operatorname{ch} z)'|_{z=\frac{\pi i}{2}} = \operatorname{sh} \frac{\pi i}{2} = i \sin \frac{\pi}{2} = i$ , 知  $z = \frac{\pi i}{2}$  是  $\operatorname{ch} z$  的一级零点。

4.  $z=0$  是函数  $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)^{-2}$  的几级极点?

解  $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)|_{z=0} = 0$ ,  $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)'|_{z=0} = (\cos z + \operatorname{ch} z - 2)|_{z=0} = 0$ ,

$(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)''|_{z=0} = (-\sin z + \operatorname{sh} z)|_{z=0} = 0$ ,  $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)'''|_{z=0} = (-\cos z + \operatorname{ch} z)|_{z=0} = 0$ ,

$(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)^{(4)}|_{z=0} = (\sin z + \operatorname{sh} z)|_{z=0} = 0$ ,  $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)^{(5)}|_{z=0} = (\cos z + \operatorname{ch} z)|_{z=0} = 2$ ,

故  $z=0$  是函数  $\sin z + \operatorname{sh} z - 2z$  的五级零点, 也即为  $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)^{-2}$  的十级极点。

5. 如果  $f(z)$  和  $g(z)$  是以  $z_0$  为零点的两个不恒等于零的解析函数, 那么

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad (\text{或两端均为 } \infty).$$

证 因  $f(z)$  和  $g(z)$  是以  $z_0$  为零点的两个不恒等于零的解析函数, 可设  $f(z) = (z - z_0)\varphi(z)$ ,

$g(z) = (z - z_0)\psi(z)$ ,  $\varphi(z), \psi(z)$  为解析函数, 则

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z - z_0)\varphi(z)}{(z - z_0)\psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)}{\psi(z) + (z - z_0)\psi'(z)},$$

故  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)}{\psi(z) + (z - z_0)\psi'(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , 即

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad (\text{或两端均为 } \infty)$$

6. 若  $\varphi(z)$  与  $\psi(z)$  分别以  $z=a$  为  $m$  级与  $n$  级极点 (或零点), 那么下列三个函数在  $z=a$  处各有什么性质?

(1)  $\varphi(z)\psi(z)$ ; (2)  $\varphi(z)/\psi(z)$ ; (3)  $\varphi(z)+\psi(z)$

解 由题意,  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}$ ,  $\psi(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$ , 其中  $f(z), g(z)$  在  $a$  点解析且  $f(a) \neq 0$ ,

$g(a) \neq 0$ 。



(1)  $z=a$  是  $\varphi(z) \cdot \psi(z)$  的  $m+n$  级极点。

(2) 对于  $\varphi(z)/\psi(z)$  , 当  $m < n$  时,  $a$  是  $n-m$  级零点; 当  $m > n$  时,  $a$  是  $m-n$  级极点; 当  $m=n$  时,  $a$  是可去奇点。

(3) 当  $m \neq n$  时, 点  $a$  是  $\varphi(z) + \psi(z)$  的  $\max\{m, n\}$  级极点, 当  $m=n$  时, 点  $a$  是  $\varphi(z) + \psi(z)$  的极点。  
(可退化为可去), 其级不高于  $m$ , 点  $a$  也可能是  $\varphi(z) + \psi(z)$  的可去奇点(解析点)。

7. 函数  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$  在  $z=1$  处有一个二级极点, 这个函数又有下列洛朗展开式

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \cdots + \frac{1}{(z-1)^5} - \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^3}, |z-1| > 1, |z-2| > 1$$

所以“ $z=1$  又是  $f(z)$  的本性奇点”, 又其中不含  $(z-2)^{-1}$  幂项, 因此  $\text{Res}[f(z), 1] = 0$ , 这些说法对吗?

解 不对,  $z=1$  不是  $f(z)$  的本性奇点, 这是因为函数的洛朗展开式是在  $|z-2| > 1$  内得到的, 而不是在  $z=2$  的圆环域内的洛朗展开式。

$$\text{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{1}{z(z-1)^2} \right] = -1$$

孤立奇点的分类必须根据在这个奇点邻域内洛朗展开式来决定。

8. 求下列各函数  $f(z)$  在有限奇点处的留数:

$$1) \frac{z+1}{z^2-2z}; \quad 2) \frac{1-e^{2z}}{z^4}; \quad 3) \frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}; \quad 4) \frac{z}{\cos z};$$

$$5) \cos \frac{1}{1-z}; \quad 6) z^2 \sin \frac{1}{z}; \quad 7) \frac{1}{z \sin z}; \quad 8) \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z}.$$

$$\text{解 } 1) \text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z+1}{z^2-2z} = -\frac{1}{2}, \quad \text{Res}[f(z), 2] = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{z+1}{z^2-2z} = \frac{3}{2}$$

2)  $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$ ,  $z=0$  为分母的四级零点, 是分子的一级零点, 所以是  $f(z)$  的三级极点。

$$\text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[ z^3 \cdot \frac{1-e^{2z}}{z^4} \right] = -\frac{4}{3}$$

或展开洛朗级数

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \left[ 1 - 1 - 2z - \frac{1}{2!} 4z^2 - \frac{1}{3!} 8z^3 \cdots \right]$$

$$\text{知 } \text{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = -\frac{4}{3}$$

$$3) \text{Res}[f(z), i] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[ (z-i)^3 \frac{1+z^4}{(z^2+1)^3} \right] = -\frac{3}{8}i,$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), -i\right] = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[ (z+i)^3 \frac{1+z^4}{(z^2+1)^3} \right] = \frac{3}{8}i$$

$$4) \operatorname{Res}\left[f(z), k\pi + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{z}{(\cos z)'} \Big|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}} = (-1)^{k+1} \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$5) \cos \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}}, \quad |z-1| > 0, \quad \text{知 } \operatorname{Res}[f(z), 1] = c_{-1} = 0$$

$$6) z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)! z^{2n-1}}, \quad |z| > 0, \quad \text{知 } \operatorname{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = -\frac{1}{6}$$

$$7) \operatorname{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[ z^2 \frac{1}{z \sin z} \right] = 0, \quad \operatorname{Res}[f(z), k\pi] = \frac{1}{(z \sin z)'} \Big|_{z=k\pi} = \frac{(-1)^k}{k\pi}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$8) \operatorname{Res}\left[f(z), \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i\right] = \frac{\operatorname{sh} z}{(\operatorname{ch} z)'} \Big|_{z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i} = 1, \quad k \text{ 为整数}。$$

9. 计算下列各积分 (利用留数; 圆周均取正向)

$$(1) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin z}{z} dz; \quad (2) \oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} dz; \quad (3) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1-\cos z}{z^m} dz, \quad (\text{其中 } m \text{ 为整数});$$

$$(4) \oint_{|z-2i|=1} \operatorname{th} z dz; \quad (5) \oint_{|z|=3} \tan(\pi z) dz; \quad (6) \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n} dz \quad (\text{其中 } n \text{ 为正整数},$$

且  $|a| \neq 1, |b| \neq 1, |a| < |b|$ )

解 (1)  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$  故  $z=0$  为  $f(z)$  的可去奇点则

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = 0$$

故原积分=0。

(2) 在  $C$  内,  $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$  以  $z=1$  为其二级极点, 则  $\operatorname{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} (e^{2z})' = 2e^2$  由留数基本

定理有原积分  $= 4\pi e^2 i$ 。

(3)  $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^m} = \frac{1}{z^{m-2}} \left( \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots \right)$  故以  $z=0$  为其  $m-2$  级极点。设  $I = \int_C f(z) dz$

当  $m \leq 2$  时,  $\operatorname{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = 0$ ,  $I = 0$ ;

当  $m = 2n > 2$  时,  $\operatorname{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = 0$ ,  $I = 0$ ;

当  $m = 2n+1 > 2$  时,  $\operatorname{Res}[f(z), 0] = (-1)^{n-1} / 2n! = (-1)^{\frac{m-3}{2}} / (m-1)!$

由此  $I = (-1)^{\frac{m-3}{2}} 2\pi i / (m-1)!$  或说  $m$  为大于或等于 3 的奇数时,  $I = (-1)^{\frac{m-3}{2}} 2\pi i / (m-1)!$

(4)  $f(z) = \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ ,  $z_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$  为其一级极点 ( $k=0, \pm 1, \dots$ )  $k=0$  时,  $z_0 = \frac{\pi}{2}i$  在  $|z-2i|=1$  内, 则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \operatorname{sh} z_0 = 1 \quad \text{故} \quad I = \oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f(z), \frac{\pi i}{2}\right] = 2\pi i$$

(5)  $f(z) = \tan \pi z$  在  $|z| = 3$  内有一级极点  $z_k = k + \frac{1}{2}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, -3$ ), 共 6 个。故

$$\operatorname{Res}\left[\tan \pi z, k + \frac{1}{2}\right] = \frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'} \bigg|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi}, \text{ 由留数定理}$$

$$\oint_C \tan \pi z dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}[f(z), z_k] = 2\pi i \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) = -12i$$

(6) 当  $1 < |a| < |b|$  时, 被积函数在单位圆内解析, 故积分为 0;

$$\text{当 } |a| < |b| < 1 \text{ 时, } \operatorname{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n \frac{1}{(z-a)^n (z-b)^n} = \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{[(n-1)!]^2 (a-b)^{2n-1}}$$

$$\operatorname{Res}[f(z), b] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow b} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-b)^n \frac{1}{(z-a)^n (z-b)^n} = \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{[(n-1)!]^2 (b-a)^{2n-1}}, \text{ 故积分为 0;}$$

$$\text{当 } |a| < 1 < |b| \text{ 时, 积分} = \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{[(n-1)!]^2 (a-b)^{2n-1}}$$

10. 判定  $z = \infty$  是下列各函数的什么奇点? 并求出在  $\infty$  的留数。

$$1) e^{\frac{1}{z^2}}; \quad 2) \cos z - \sin z; \quad 3) \frac{2z}{3+z^2}.$$

解 1) 可去奇点,  $\infty$  的留数为零。  $\varphi(t) = f(z) = f\left(\frac{1}{t}\right) = e^{t^2}$ ;

$$2) \varphi(t) = f(z) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ 故 } z = \infty \text{ 为函数的本性奇点, 又由于}$$

$\cos z - \sin z$  在整个复平面解析, 故  $\infty$  的留数为零。

$$3) \frac{2z}{3+z^2} = \frac{2}{z} \left(1 - \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^4} + \cdots\right) \text{ 不含正幂项, 故为可去奇点, 留数为 } c_{-1} = 2$$

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{2}{z(1+3z^2)}, 0\right] = 2.$$

11. 求  $\operatorname{Res}[f(z), \infty]$  的值, 如果

$$(1) f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 1} \quad (2) f(z) = \frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$$

解 (1)  $f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 1}$  有两个一级极点  $z = 1, z = -1$ , 故由全部留数和为零的定理, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), \infty] &= -\operatorname{Res}[f(z), 1] - \operatorname{Res}[f(z), -1] = -\lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z}{z+1} - \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z}{z-1} \\ &= -\frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} = -\operatorname{sh} 1 \end{aligned}$$

$$(2) f(z) = \frac{1}{z(z+1)^4(z-4)} \text{ 以 } z = 0 \text{ 为一级极点, } z = -1 \text{ 为四级极点, } z = 4 \text{ 为一级极点, 用有限奇点}$$

留数和来求无穷远点的留数, 计算过程太麻烦, 一般采用直接在  $z = \infty$  的圆环域 (解析)  $4 < |z| < \infty$  内展开为洛朗级数的方式, 则有

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)^4(z-4)} = \frac{1}{z \cdot z^4 \left(1 + \frac{1}{z}\right)^4 \cdot z \left(1 - \frac{4}{z}\right)} = \frac{1}{\left[z^6 \left(1 + \frac{1}{z}\right)^4 \left(1 - \frac{4}{z}\right)\right]} = \frac{1}{z^6} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} \right]^4 \cdot \left[ \frac{1}{1 - \frac{4}{z}} \right]$$

$$= \frac{1}{z^6} \left( 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right)^4 \left( 1 + \frac{4}{z} + \frac{16}{z^2} + \dots \right)$$

显见  $c_{-1} = 0$ , 故  $\text{Res}[f(z), \infty] = 0$ . (注也可利用规则 IV)

12. 计算下列各积分,  $C$  为正向圆周。

$$1) \oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz, \quad C: |z|=3; \quad 2) \oint_C \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz, \quad C: |z|=2;$$

$$3) \oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n} dz \quad (n \text{ 为一整数}), \quad C: |z|=r>1.$$

解 1) 函数  $\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$  在  $|z|=3$  的外部, 除  $\infty$  点外没有其他奇点, 因此根据定理二与规则 IV,

$$\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz = -2\pi i \text{Res}[f(z), \infty] = 2\pi i \text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

$$= 2\pi i \text{Res}\left[\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3}, 0\right] = 2\pi i$$

2)  $f(z) = \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}$  有奇点,  $z = -1$ ,  $z = 0$ ,  $z = -1$  为一级极点, 而  $z = 0$  为本性奇点, 在  $2 < |z| < +\infty$  内展

开  $f(z)$ , 则

$$f(z) = \frac{z^3}{z\left(1 + \frac{1}{z}\right)} e^{\frac{1}{z}} = \frac{z^2}{\left(1 + \frac{1}{z}\right)} \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \dots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots\right)$$

$$= \left(z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \dots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots\right) = z^2 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!z} + \dots$$

得  $-c_{-1} = \frac{1}{3}$ , 故原积分  $= 2\pi i(c_{-1}) = -\frac{2}{3}\pi i$ .

3) 当  $n=1$  时,  $\oint_C \frac{z^2}{1+z} dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), -1] = 2\pi i$ ; 当  $n \neq 1$  时,

$$\frac{z^{2n}}{1+z^n} = \frac{z^n}{1+z^{-n}} = z^n \left(1 - \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{2n}} + \dots\right) = z^n - 1 + \frac{1}{z^n} + \dots$$

知  $c_{-1} = 0$ , 故  $\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n} dz = 0$ .

13 计算下列积分

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin\theta} d\theta; \quad 2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta} d\theta \quad (a>b>0); \quad 3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx;$$

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx ; \quad 5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4x+5} dx ; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx。$$

解 1) 由于被积函数的分母  $5+3\sin\theta$  在  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  内不为零, 因而积分有意义。

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{5+3\frac{z^2-1}{2iz}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2}{3z^2+10iz-3} dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), -\frac{i}{3}] \\ &= 2\pi i \frac{2}{6z+10i} \Big|_{z=-\frac{i}{3}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2) 由于被积函数的分母  $a+b\cos\theta$  在  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  内不为零, 因而积分有意义。

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{(\frac{z^2-1}{2iz})^2}{a+b\frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{i(z^2-1)^2}{2z^2(bz^2+2az+b)} dz = 2\pi i \{ \operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}] \}$$

$$\text{又 } \operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{(-1+z^2)(a+3az^2+bz(3+z^2))}{(b+2az+bz^2)^2} \Big|_{z=0} = -\frac{ai}{b^2},$$

$$\operatorname{Res}[f(z), \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}] = \frac{i(z^2-1)^2}{4z(b+3az+2bz^2)} \Big|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = \frac{i\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

$$\text{故 } I = \frac{2\pi}{b^2} (a - \sqrt{a^2-b^2}).$$

3) 函数  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$  在上半平面内只有 2 级极点  $i$ , 且

$$\operatorname{Res}[f(z), i] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z-i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{i}{4},$$

$$\text{故 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), i] = \frac{\pi}{2}。$$

4) 注意到被积函数为偶函数,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

函数  $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$  在上半平面内只有一级极点  $e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}$ , 且

$$\operatorname{Res}[f(z), \frac{\pi i}{4}] = \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}; \quad \operatorname{Res}[f(z), \frac{3\pi i}{4}] = \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

$$\text{故 } I = \frac{1}{2} 2\pi i (\operatorname{Res}[f(z), \frac{\pi i}{4}] + \operatorname{Res}[f(z), \frac{3\pi i}{4}]) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}。$$

5) 对于  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5} dx$ , 令  $R(z) = \frac{1}{z^2+4z+5}$ , 则  $z = -2+i$  为上半平面内的  $R(z)$  的一级极

点, 故有:  $\text{Res}[R(z)e^{iz}, i] = \frac{e^{iz}}{2z+4} \Big|_{z=-2+i} = -\frac{e^{-1}(\sin 2 + i \cos 2)}{2}$ ,

则原积分 =  $\text{Re}\{2\pi i \text{Res}[R(z)e^{iz}, -2+i]\} = \pi e^{-1} \cos 2$ 。

6) 对于  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{1+x^2} dx$ , 令  $R(z) = \frac{z}{1+z^2}$ , 则  $z=i$  为上半平面内的  $R(z)$  的一级极点, 故有:

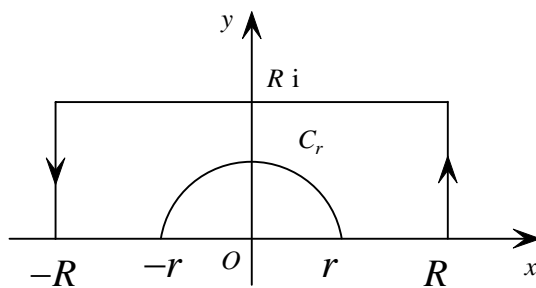
$$\text{Res}[R(z)e^{iz}, i] = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{ze^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-1}}{2}$$

$I = 2\pi i \text{Res}[R(z)e^{iz}, i] = \pi e^{-1} i$ , 则原积分 =  $\text{Im}\{I\} = \pi e^{-1}$

14. 试用下图中的积分路线, 求例 4 中的积分:  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 。

解  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ , 采用  $e^{iz}/z$  沿如图所示闭曲线来计算上式右端的积分 ( $z=0$  为  $e^{iz}/z$

的一级极点, 且在实轴上)。由 Cauchy 基本定理, 有



第 14 题图

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_R^{R+Ri} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{R+Ri}^{-R+Ri} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R+Ri}^{-R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = 0,$$

令  $x = -t$ , 则有  $\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx$ , 所以  $\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$ 。

$$\left| \int_{R+Ri}^{-R+Ri} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_R^{-R} \frac{e^{i(x+Ri)}}{x+Ri} dx \right| \leq \int_R^{-R} \frac{e^{-R}}{\sqrt{x^2+R^2}} dx \leq 2e^{-R}, \text{ 知 } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{R+Ri}^{-R+Ri} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0;$$

$$\left| \int_R^{R+Ri} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^R \frac{e^{i(R+iy)}}{R+iy} i dy \right| \leq \int_0^R \frac{e^{-y}}{\sqrt{R^2+y^2}} dy \leq \frac{1-e^{-R}}{R}, \text{ 同理 } \left| \int_{-R+Ri}^{-R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \frac{1-e^{-R}}{R}, \text{ 知}$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \int_R^{R+Ri} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R+Ri}^{-R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right\} = 0$$

和例 4 采用同样的方法得到  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\pi i$ 。

故  $2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi i$ , 即  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 。

15. 利用公式 (5.4.1) 计算下列积分:

1)  $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ ;      2)  $\oint_{|z|=3} \frac{z}{z^2-1} dz = 2\pi i$ ;

$$3) \oint_{|z|=3} \tan z dz = -4\pi i; \quad 4) \oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)} dz = 0.$$

16. 设  $C$  为区域  $D$  内的一条正向简单闭曲线,  $z_0$  为  $C$  内一点。如果  $f(z)$  在  $D$  内解析, 且  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ 。在  $C$  内  $f(z)$  无其他零点。试证:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = z_0.$$

证  $f(z)$  在  $C$  内只有一级零点  $z_0$ , 而  $\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)} + \frac{z_0 f'(z)}{f(z)}$ , 知  $z_0$  为函数  $\frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)}$  的

可去奇点, 故由留数定理和 (5.4.1) 知

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z_0 f'(z)}{f(z)} dz = 0 + z_0 = z_0.$$

17. 若  $\varphi(z)$  在  $C: |z|=1$  上及其内部解析, 且在  $C$  上  $|\varphi(z)| < 1$ , 证明在  $C$  内只有一个点  $z_0$  使  $\varphi(z) = z_0$ 。

证 令  $f(z) = -z$ , 则在  $C$  上,  $|f(z)| = 1$ , 而  $|\varphi(z)| < 1$ , 故由路西定理, 知方程  $z = \varphi(z)$  与方程  $f(z) = 0$

在  $C$  内有相同个数的根, 从而  $\varphi(z) = z$  在  $|z| < 1$  只有一根。

18. 证明: 当  $|a| > e$ , 则方程  $e^z = az^n$  在圆  $|z|=1$  内有  $n$  个根。

证 设  $f(z) = -az^n$ ,  $g(z) = e^z$ , 在  $|z| \leq 1$  内均解析, 且当  $|z|=1$  时,  $|-az^n| = |a|$ ,  $|e^z| = e^{\cos \varphi} \leq e$  而  $|a| > e$ , 故  $|f(z)| = |a| > |e^z| = |g(z)|$ 。

根据路西定理知,  $f(z)$  与  $f(z) + g(z)$  在  $C: |z|=1$  内的零点个数相同, 即  $e^z = az^n$  的根的个数与  $-az^n = 0$  的根的个数相同, 即为  $n$ 。

19. 证明方程  $z^7 - z^3 + 12 = 0$  的根都在圆环域  $1 \leq |z| \leq 2$  内。

证 当  $|z| < 2$  时, 取  $f(z) = z^7$ ,  $g(z) = 12 - z^3$ , 当  $|z|=2$  时,

$$|g(z)| = |12 - z^3| \leq 12 + |z^3| \leq 20 < |z^7| = |f(z)|$$

所以  $z^7 - z^3 + 12 = 0$  的根的个数与  $z^7$  的根的个数相同, 因此,  $z^7 - z^3 + 12 = 0$  的根全部在  $|z|=2$  的内部。

当  $|z| < 1$  时, 取  $f(z) = 12$ ,  $g(z) = z^7 - z^3$ , 当  $|z|=1$  时,  $|f(z)| = 12 > |z^7 - z^3| = |g(z)|$ , 故  $z^7 - z^3 + 12 = 0$  的

根与  $f(z) = 12$  的根的个数相同, 即在  $|z|=1$  内无根, 综上所述,  $z^7 - z^3 + 12 = 0$  的根全在  $1 \leq |z| \leq 2$  内。