说明：21 级为线上考试，此为雨课堂记录（WA2114001 王晗宇）

99/ 100

试卷得分

选择题 (共 15 题，满分 45.0 分)

1.单选题 (3分)

下列说法错误的是( ).

A 实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $\|A\|_F=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$

B 矩阵 A 的谱半径与算子范数满足 $\rho(A)\le\|A\|$

C A 为非奇异矩阵，$B=A^TA$，则 $Cond_2(B)=(Cond_2(A))^2$

D 设 Q 为正交矩阵，则 $\|QA\|_F=\|AQ\|_F=\|A\|_F$

本题得分：3分
正确答案：A

2.单选题 (3分)

求解线性方程组 $Ax=b$ 的LU分解法中，A一般应满足的条件是

A 各阶顺序主子式均不为零

B 三对角矩阵

C 对称阵

D 正定矩阵

本题得分：3分
正确答案：A

3.单选题 (3分)

关于列主元 Gauss 消去法能够顺利进行的条件,下列说法正确的是( )

A 只有系数矩阵的各阶顺序主子式大于零时，列主元 Gauss 消去法才能够顺利进行.

B 只有系数矩阵对称正定时，列主元 Gauss 消去法才能够顺利进行.

C 只有系数矩阵的各阶顺序主子式小于零时，列主元 Gauss 消去法才能够顺利进行.

D 只要系数矩阵的行列式不等于零，列主元 Gauss 消去法就能够顺利进行.

本题得分：3分
正确答案：D

4.单选题 (3分)

设准确值 $x=\dfrac{2}{300}$ 以 $x^{*}=0.006666$ 作为 x 的近似值，其有效数字是多少？

A 1

B 2

C 3

D 5

本题得分：3分

正确答案：C

查看解析

5.单选题 (3分)

关于简化的牛顿迭代法，下列说法正确的是 （ ）

A 简化的牛顿迭代法通常没有牛顿迭代法收敛速度快

B 简化的牛顿迭代法通常具有平方收敛速度

C 简化的牛顿迭代法比牛顿迭代法收敛速度更快

D 简化的牛顿迭代法和牛顿迭代法收敛速度相同

本题得分：3分

正确答案：A

6.单选题 (3分)

求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

的jacobi方法迭代矩阵的谱半径等于多少?

A $\frac{5}{2}$

B $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D $\frac{3}{2}$

本题得分: 3分
正确答案: B

7.单选题 (3分)

下列关于范数的说法，错误的是（ ）

A 若矩阵A为对称矩阵，则$\|A\|_2=\rho(A)$

B 若$\rho(A)<1$，则存在某种矩阵范数$\|\cdot\|$，使得$\|A\|<1$

C 矩阵 A 的所有相容范数以$\|A\|_2$为其下界

D 对任何矩阵A，其所有相容范数的下确界为其谱半径

本题得分: 3分
正确答案: C

8.单选题 (3分)

关于解非线性方程的迭代法的收敛条件，下列命题正确的是

A 迭代法收敛与否却决于迭代函数

B 迭代法收敛与否只和迭代函数有关，和处值选取无关

C 迭代法收敛与否和迭代函数有关以及初值选取均有关

D 迭代法收敛与否只和初值选取有关，和迭代函数无关

本题得分: 3分
正确答案: C

9.单选题 (3分)

$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & a\\ 0 & a & 2\end{bmatrix}$，为使A可做Cholesky分解，则$a$的可能取值为(　)。

A 2

B -2

C 0

D 3

本题得分：3分
正确答案：C

10.单选题 (3分)

设$\|\bullet\|$是$R^{n\times n}$上的一种矩阵范数，则对$A,B\in R^{n\times n}$下列表达式错误的是(　)。

A $\|\alpha A\|=\alpha\|A\|$

B $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$

C $\|A\|\ge 0$

D $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$

本题得分：3分
正确答案：A

11.单选题 (3分)

方程组$\begin{cases}-3x_1+2x_2+6x_3=4\\ 10x_1-7x_2=7\\ 5x_1-x_2+5x_3=6\end{cases}$的列主元是多少？

A 7

B -7

C 5

D 10

本题得分：3分
正确答案：D
查看解析

12.单选题 (3分)

对线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, a_{11}a_{22}\neq 0$$

用J迭代法和G-S迭代法求解，那么这两种方法（）

- A 要么同时收敛，要么同时发散
- B 同时收敛
- C 不确定
- D 同时发散

本题得分：3分
正确答案： A

13.单选题 (3分)

写出方程$x^3-x-1=0$的牛顿迭代公式。

- A $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-x_k-1}{3x_k^2-1}$
- B $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-x_k-1}{3x_k^3-1}$
- C $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1}$
- D $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-x_k}{3x_k^3-1}$

本题得分：3分
正确答案： C

14.单选题 (3分)

用迭代法求方程 $f(x)=0$ 的根，将方程表示为同解方程 $x=\varphi(x)$，则 $f(x)=0$ 的根是（ ）.

A $y=x$ 与 $y=\varphi(x)$ 的交点

B $y=x$ 与 $y=\varphi(x)$ 的交点的横坐标

C $y=x$ 与 x 轴的交点的横坐标

D $y=\varphi(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标

本题得分：3分
正确答案：B

15.单选题 (3分)

已知 $\sqrt{20}$ 近似数 x 相对误差为 0.5%，试问 x 至少有几位有效数字？

A 1

B 2

C 4

D 6

本题得分：3分
正确答案：B
查看解析

填空题 (共 5 题，满分 20.0 分)

1.填空题 (4分)

设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

则 $\rho(A)$ 的值为 7

本题得分：4分

正确答案:

填空1 : 7

2.填空题 (4分)

$$A=\begin{bmatrix} a^2\text{-}1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

为使方程组 $Ax=b$ 可用顺序高斯消去法求解，则a的可能取值为 a≠±1且a≠±2

本题得分：4分

正确答案:

填空1 : 3

Ps:这题正确答案写错了（不是 3），我写的才是对的（ a≠±1且a≠±2 ） ——王晗宇

3.填空题 (4分)

设 $A \in R^{n\times n}$ 是对称矩阵， λ_1 和 λ_n 分别是A的按模最大和最小特征值 $(\lambda_n \neq 0)$ ，则 $Cond(A)_2$ = |λ1/λn|

本题得分： 4分
正确答案:
填空1 : |λ1/λn| / 来莫大1/来莫大n的绝对值
查看解析

4.填空题 (4分)

给定矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

则 $\|A\|_1=$ 4 ， $\|A\|_2=$ 4 ，

$\|A\|_\infty=$ 4 ， $\|A\|_F=$ 4 .

本题得分： 3分
正确答案:
填空1 : 4
填空2 : 2
填空3 : 4
填空4 : 4

5.填空题 (4分)

向量 $X=(1,-2)^T$ ，矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $\|AX\|_1=$ 16

本题得分： 4分
正确答案:
填空1 : 16

简答题 (共 1 题，满分 5.0 分)

1.简答题 (5分)

对方程$\begin{cases} -x_1+8x_2=7 \\ -x_1+9x_3=8 \\ 9x_1-x_2-x_3=7 \end{cases}$作简单调整后，

用高斯-赛德尔迭代法求解时对任意初始向量是否都收敛？为什么？

我的答案

解：系数矩阵 $\begin{bmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

$\because \begin{cases} 9>1+1 \\ 8>1+0 \\ 9>1+0 \end{cases}$ $\therefore$ 为严格对角占优阵

$\therefore$ 高斯-赛德尔方法求解时对任意向量都收敛。

本题得分： 5分

收起解析 ^

解

将第三个方程调到第一行后有

$$\begin{cases} 9x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ -x_1 + 8x_2 = 7 \\ -x_1 + 9x_3 = 8 \end{cases}$$

这是主对角线严格对角占优方程组,

故用高斯-赛德尔迭代法求解对任意初始向量 $x^{(0)}$ 都收敛。

计算题 (共 3 题，满分 30.0 分)

1.计算题 (10分)

给定数表

x	1	2	3	4	5
f(x)	0	-5	-6	3	2

（1）写出差商表;

（2）用一次Newton插值多项式计算f(4.5)的近似值;

（3）用两次Newton插值多项式计算f(4.5)的近似值;

我的答案

1. (1)

x	f(x)	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
1	0	-5	2	1	$-\frac{13}{12}$
2	-5	-1	5	$-\frac{10}{3}$	
3	-6	9	-5		
4	3	-1			
5	2				

(2) 取 $x_0=4,\ x_1=5$

$\therefore N_1(x)=3-(x-4)=-x+7$

$f(4.5)\approx N_1(4.5)=2.5$

(2) 取 $x_0=3,\ x_1=4,\ x_2=5$

$\therefore N_2(x)=-6+9(x-3)-5(x-3)(x-4)$

$=-5x^2+44x-93$

$f(4.5)\approx N_2(4.5)\doteq 3.75$

本题得分：10分

收起解析

（1）差商表

x	函数值	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
1	0				
2	-5	-5			
3	-6	-1	2		
4	3	9	5	1	
5	2	-1	-5	-10/3	-13/12

(2)

$$取N_1(x)=f(4)+f[4,5](x-4)$$
$$=3-(x-4)=7-x,$$
$$f(4.5)\approx N_1(4.5)=2.5$$

(3)

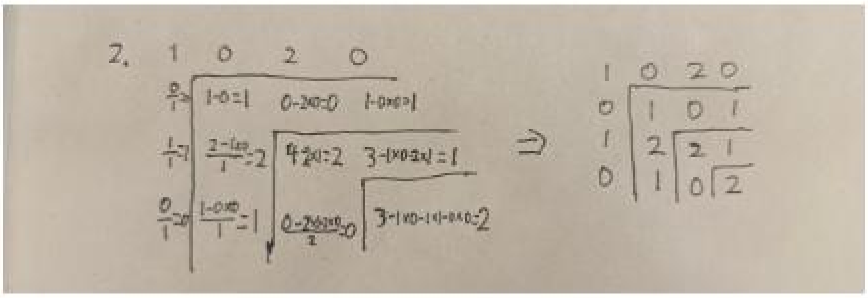
$$取N_2(x)=f(3)+f[3,4](x-3)+f[3,4,5](x-3)(x-4)$$
$$=-6+9(x-3)-5(x-3)(x-4)=-5x^2+44x-93$$
$$f(4.5)\approx N_2(4.5)=3.75$$

2.计算题 (10分)

写出下面矩阵的紧凑格式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$

我的答案



本题得分： 10分

查看解析

本题得分：10分

收起解析 ^

方法1：直接三角分解法

设

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&l_{32}&1&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}$$

由矩阵乘法可逐行、逐列分别求出 u_{ij} 和 l_{ij}

$$\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&l_{32}&1&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\1&2&1&\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&1&0&1\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}$$

解下三角方程组

$$\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\1&2&1&\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\17\\7\end{bmatrix}$$

有 $y_1=5, y_2=3, y_3=6, y_4=4$.再解上三角方程组

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&1&0&1\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\6\\4\end{bmatrix}$$

得原方程组的解为：$x_4=2,\ x_3=2,\ x_2=1,\ x_1=1$

紧凑格式.png

紧凑格式2.png

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r(3)-①\times r(1)}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\0&2&2&3\\0&1&0&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r(4)-①r(2)]{r(3)-②r(2)}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

∴紧凑格式为

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&2&1\\0&1&0&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\l_{21}&1&0&0\\l_{31}&l_{32}&1&0\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\0&0&u_{33}&u_{34}\\0&0&0&u_{44}\end{bmatrix}$$

解得 $L=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\1&2&1&\\0&1&0&1\end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&1&0&1\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}$

则紧凑格式为 $\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&2&1\\0&1&0&2\end{bmatrix}$

3.计算题 (10分)

给定函数f(x)指定节点处的函数值（如下表）

x	3	5	7	9
f(x)	2	7	3	-2

（1）写出f(x)的Lagrange插值函数 $L_3(x)$

（2）将 $L_3(x)$ 写成降幂形式： $L_3(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

我的答案

3. (1) $L_3(x)=2\cdot\frac{(x-5)\cdot(x-7)(x-9)}{(3-5)\cdot(3-7)\cdot(3-9)}+7\cdot\frac{(x-3)(x-7)(x-9)}{(5-3)\cdot(5-7)\cdot(5-9)}+3\frac{(x-3)(x-5)(x-9)}{(7-3)(7-5)\cdot(7-9)}-2\cdot\frac{(x-3)(x-5)(x-7)}{(9-3)(9-5)\cdot(9-7)}$

(2) $L_3(x)=2\times\frac{x^3-21x^2+143x-315}{(-2)\times(-4)\times(-6)}+7\times\frac{x^3-19x^2+111x-189}{2\times(-2)\times(-4)}+3\times\frac{x^3-17x^2+87x-135}{4\times2\times(-2)}-2\times\frac{x^3-15x^2+71x-105}{6\times4\times2}$

$=\frac{-2x^3+42x^2-286x+630}{48}+\frac{21x^3-399x^2+2331x-3969}{48}+\frac{-9x^3+153x^2-783x+1215}{48}+\frac{-2x^3+30x^2-142x+210}{48}$

$=\frac{8x^3-174x^2+1120x-1914}{48}$

$=\frac{1}{6}x^3-\frac{29}{8}x^2+\frac{70}{3}x-\frac{319}{8}$

本题得分： 10分

查看解析

本题得分： 10分

收起解析

$$L_3(x)=l_0(x)f(3)+l_1(x)f(5)+l_2(x)f(7)+l_3(x)f(9)$$

$$l_0(x)=-\frac{1}{48}(x-5)(x-7)(x-9),\quad l_1(x)=\frac{1}{16}(x-3)(x-7)(x-9)$$

$$l_2(x)=-\frac{1}{16}(x-3)(x-5)(x-9),\quad l_4(x)=\frac{1}{48}(x-3)(x-5)(x-7)$$

$$L_3(x)=2l_0(x)+7l_1(x)+3l_2(x)-2l_3(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{29}{8}x^2+\frac{70}{3}x-\frac{319}{8}$$