安徽大学 2012—2013 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》（A 卷）

考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、 $x-3y-z+4=0$　　2、2　　3、 $\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}f(x,y)dy$

4、 $1-\sqrt{3}$　　5、 $\dfrac{\pi}{2}$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6、C　　7、A　　8、B　　9、D　　10、C

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11、解：令 $F(x,y,z)=x^2+xy+yz+x+1$，则 $F_x=2x+y+1$， $F_y=x+z$， $F_z=y$.

因此在点 $(0,1,-1)$ 处曲面 Σ 的法向量为

$$\vec{n}=(F_x(0,1,-1),F_y(0,1,-1),F_z(0,1,-1))=(2,-1,1),$$

故在点 $(0,1,-1)$ 处曲面 Σ 的切平面方程为

$$2\bullet(x-0)-1\bullet(y-1)+1\bullet(z+1)=0,$$

即 $2x-y+z+2=0$.　　......（6 分）

法线方程为 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$.　　......（9 分）

12、 解：因为 $z=f(x^2+y^2)$，

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2)$； $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2)$.　　......（3 分）

故 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=2(xdx+ydy)f'(x^2+y^2)$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf''(x^2+y^2)\bullet 2y=4xyf''(x^2+y^2)$.　　......（9 分）

13、 **解**：（解法 1）做球坐标变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta$， $y=r\sin\varphi\sin\theta$， $z=r\cos\varphi$，

其中 $0\le r\le 1$， $0\le\theta\le 2\pi$， $0\le\varphi\le\pi/2$，于是

原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 r^2\cos^2\varphi\bullet r^2\sin\varphi dr=\frac{2}{15}\pi$ . ... (9 分)

（解法 2）因为 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 1-z^2, 0\le z\le 1\}$，

所以原式 $=\int_0^1 z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy$，其中 D_z 为 z 固定情况下的圆

$x^2+y^2\le 1-z^2$，其面积为 $\pi(1-z^2)$ . ... (6 分)

于是原式 $=\pi\int_0^1 z^2(1-z^2)dz=\frac{2}{15}\pi$ . ... (9 分)

14、**解**：由于三角形 Σ 的方程为 $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$，定向取为上侧，

可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-3$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3}{2}$，

故 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\left\{-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right\}=\left\{\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7}\right\}$.

...... (4 分)

注意到 Σ 的面积为 $\frac{7}{2}$，由 Stokes 公式知，

$$\oint_L ydx+zdy+xdz=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$

$$=-\iint\limits_{\Sigma}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS ,$$

$$=-\frac{11}{7}\iint\limits_{\Sigma}dS=-\frac{11}{7}\times\frac{7}{2}=-\frac{11}{2}.$$ ...... (9 分)

15、**解：** 在Σ上，$z=4-2x-\frac{4}{3}y$，Σ在xOy面上的投影区域D_{xy}为由x轴、y轴和直线$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$所围成的三角形闭区域，故

$$\iint_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[\left(4-2x-\frac{4}{3}y\right)+2x+\frac{4}{3}y\right]\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}dxdy \qquad \cdots\cdots (5\text{分})$$

$$=\iint_{D_{xy}}4\bullet\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_{D_{xy}}dxdy$$

$$=\frac{4\sqrt{61}}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times3\right)=4\sqrt{61}. \qquad \cdots\cdots (9\text{分})$$

16、**解：** 添加辅助曲面$\Sigma_1=\{(x,y,z)\,|\,z=1,x^2+y^2\le1\}$，方向取上侧，则在由$\Sigma$和$\Sigma_1$所围成的空间闭区域$\Omega$上应用高斯公式，得到

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial(y^2-z)}{\partial x}+\frac{\partial(z^2-x)}{\partial y}+\frac{\partial(x^2-y)}{\partial z}\right)dv$$

$$=\iiint_{\Omega}0dv=0. \qquad \cdots\cdots (4\text{分})$$

故原式$=-\iint_{\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$

$$=-\iint_{\Sigma_1}(x^2-y)dxdy=-\iint_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy,$$

这里$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1\}$.

由对称性得到$\iint_{D_{xy}}ydxdy=0$，又$\iint_{D_{xy}}x^2dxdy=\iint_{D_{xy}}y^2dxdy$，故

原式$=-\iint_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy=-\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r^2\bullet rdr=-\frac{\pi}{4}. \qquad \cdots\cdots (9\text{分})$$

17、**解**：因为$\ln(2+x)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}，\quad (-2<x\le 2) \qquad \ldots\ldots (6\text{分})$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\bullet 2^{n}}=f(1)-\ln 2=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$. ...... (9 分)

四、应用题（每小题 6 分，共 12 分）

18、 解：构造拉格朗日函数$L(x,y,\lambda)=x^2+2y^2+\lambda(x+y-1)$，

令$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=4y+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y-1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{1}{3}\end{cases}$. ...... (3 分)

又因为$A=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2,C=\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=4,B=\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0$，所以$AC-B^2=8>0$，

且$A>0$，因此$(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$为$L$的极小值点，即为函数$z=x^2+2y^2$的极小值

点，z的极小值为$\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$. ...... (6 分)

19、**解**：因为弧的微分$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}dt=atdt$，

...... (2 分)

故金属丝的质量

$$M=\int_L(x^2+y^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]atdt$$

$$=\int_0^{2\pi}a^3(1+t^2)tdt=2\pi^2a^3(1+2\pi^2)\,. \qquad \ldots\ldots (6\text{分})$$

五、证明题（每小题 5 分，共 5 分）

20、证明：因为$\dfrac{|u_n|}{n} \le \dfrac{1}{2}\left(u_n{}^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$，…… (2 分)

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$均收敛，

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|u_n|}{n}$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$绝对收敛，故必收敛. …… (5 分)