习题一解答

1．求下列复数的实部与虚部、共轭复数、模与辐角。

（1）$\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$；　（2）$\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；　（3）$\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$；　（4）$\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$

解　（1）$\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}=\dfrac{3-2\mathrm{i}}{(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}=\dfrac{1}{13}(3-2\mathrm{i})$

所以

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right\}=\frac{3}{13},\quad \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right\}=-\frac{2}{13},$$

$$\overline{\frac{1}{3+2\mathrm{i}}}=\frac{1}{13}(3+2\mathrm{i}),\quad \left|\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2+\left(-\frac{3}{13}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{13},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right)=\arg\left(\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right)+2k\pi$$

$$=-\arctan\frac{2}{3}+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

（2）$\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}-\dfrac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=-\mathrm{i}-\dfrac{1}{2}(-3+3\mathrm{i})=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}\mathrm{i},$

所以

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right\}=\frac{3}{2},$$

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right\}=-\frac{5}{2}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)}=\frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{5}{2},\quad \left|\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)=\arg\left(\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)+2k\pi$$

$$=-\arctan\frac{5}{3}+2k\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

（3）$\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}=\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})(-2\mathrm{i})}{(2\mathrm{i})(-2\mathrm{i})}=\dfrac{(26-7\mathrm{i})(-2\mathrm{i})}{4}$

$$=\frac{-7-26\mathrm{i}}{2}=-\frac{7}{2}-13\mathrm{i}$$

所以

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}\right\}=-\frac{7}{2},$$

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}\right\}=-13,$$

$$\overline{\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right]}=-\frac{7}{2}+13i$$

$$\left|\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right|=\frac{5\sqrt{29}}{2},$$

$$\operatorname{Arg}\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right]=\arg\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right]+2k\pi=2\arctan\frac{26}{7}-\pi+2k\pi$$

$$=\arctan\frac{26}{7}+(2k-1)\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

（4） $i^8-4i^{21}+i=(i^2)^4-4(i^2)^{10}i+i=(-1)^4-4(-1)^{10}i+i$

$$=1-4i+i=1-3i$$

所以

$$\operatorname{Re}\{i^8-4i^{21}+i\}=1,\operatorname{Im}\{i^8-4i^{21}+i\}=-3$$

$$\left(\overline{i^8-4i^{21}+i}\right)=1+3i，\ |i^8-4i^{21}+i|=\sqrt{10}$$

$$\operatorname{Arg}(i^8-4i^{21}+i)=\arg(i^8-4i^{21}+i)+2k\pi=\arg(1-3i)+2k\pi$$

$$=-\arctan 3+2k\pi\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

2．如果等式 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立，试求实数 x,y 为何值。

解：由于

$$\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=\frac{[x+1+i(y-3)](5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}$$

$$=\frac{5(x+1)+3(y-3)+i[-3(x+1)+5(y-3)]}{34}$$

$$=\frac{1}{34}[5x+3y-4]+i(-3x+5y-18)=1+i$$

比较等式两端的实、虚部，得

$$\begin{cases}5x+3y-4=34\\-3x+5y-18=34\end{cases}\text{或}\begin{cases}5x+3y=38\\-3x+5y=52\end{cases}$$

解得 $x=1,y=11$ 。

3．证明虚单位i有这样的性质：$-i=i^{-1}=\overline{i}$ 。

4．证明

$$1)\ |z|^2=z\overline{z}$$

$$\vdots$$

$$6)\ \operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}(\overline{z}+z),\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$$

证明：可设$z=x+\mathrm{i}y$，然后代入逐项验证。

5．对任何z，$z^2=|z|^2$是否成立？如果是，就给出证明。如果不是，对z那些值才成立？

解：设$z=x+\mathrm{i}y$，则要使$z^2=|z|^2$成立有

$x^2-y^2+2\mathrm{i}xy=x^2+y^2$，即$x^2-y^2=x^2+y^2, xy=0$。由此可得$z$为实数。

6．当$|z|\le 1$时，求$|z^n+a|$的最大值，其中n为正整数，a为复数。

解：由于$\left|z^n+a\right|\le|z|^n+|a|\le 1+|a|$，且当$z=e^{\mathrm{i}\frac{\arg a}{n}}$时，有

$$|z^n+a|=\left|\left(e^{\mathrm{i}\frac{\arg a}{n}}\right)^n+|a|e^{\mathrm{i}\arg a}\right|=\left|\left(1+|a|\right)e^{\mathrm{i}\arg a}\right|=1+|a|$$

故$1+|a|$为所求。

8．将下列复数化成三角表示式和指数表示式。

（1）i；　（2）-1；　（3）$1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$；

（4）$1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi(0\le\varphi\le\pi)$；　（5）$\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$；　（6）$\dfrac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}$

解：（1）$\mathrm{i}=\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$；

（2）$-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

（3）$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$；

（4）$1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi=2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}+\mathrm{i}2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}=2\sin\dfrac{\varphi}{2}\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)$

$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\varphi}{2}\right)=2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi-\varphi}{2}},(0\le\varphi\le\pi)；$$

（5）$\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}2\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})=1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

（6）$\dfrac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\varphi}\right)^2/\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi}\right)^3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}10\varphi}/\mathrm{e}^{-\mathrm{i}9\varphi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}19\varphi}$

$$=\cos 19\varphi+\mathrm{i}\sin 19\varphi$$

9．将下列坐标变换公式写成复数的形式：

1）平移公式：$\begin{cases} x=x_1+a_1, \\ y=y_1+b_1; \end{cases}$

2）旋转公式：$\begin{cases} x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha, \\ y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha. \end{cases}$

解：设 $A=a_1+\mathrm{i}b_1$， $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$， $z=x+\mathrm{i}y$，则有

1） $z=z_1+A$；2） $z=z_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=z_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 。

10．一个复数乘以-i，它的模与辐角有何改变?

解：设复数 $z=|z|e^{\mathrm{i}\operatorname{Arg}z}$，则 $z(-i)=|z|e^{\mathrm{i}\operatorname{Arg}z}\cdot e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=|z|e^{\mathrm{i}\left(\operatorname{Arg}z-\frac{\pi}{2}\right)}$，可知复数的模不变，辐角减少 $\frac{\pi}{2}$ 。

11．证明：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义。

证明：
$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \\ &= 2(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}) \\ &= 2(|z_1|^2+|z_2|^2)\end{aligned}$$

其几何意义平行四边形的对角线长度平方的和等于四个边的平方的和。

12．证明下列各题：

1）任何有理分式函数 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 可以化为 $X+\mathrm{i}Y$ 的形式，其中 X 与 Y 为具有实系数的 x 与 y 的有理分式函数；

2）如果 $R(z)$ 为 1）中的有理分式函数，但具有实系数，那么 $R(\overline{z})=X-\mathrm{i}Y$；

3）如果复数 $a+\mathrm{i}b$ 是实系数方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

的根，那么 $a-\mathrm{i}b$ 也是它的根。

证 1） $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{P(z)\overline{Q(z)}}{Q(z)\overline{Q(z)}}=\dfrac{\operatorname{Re}(P(z)\overline{Q(z)})}{q(x,y)}+\dfrac{\operatorname{Im}(P(z)\overline{Q(z)})}{q(x,y)}$；

2） $R(\overline{z})=\dfrac{P(\overline{z})}{Q(\overline{z})}=\dfrac{\overline{P(z)}}{\overline{Q(z)}}=\overline{\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right)}=\overline{X+\mathrm{i}Y}=X-\mathrm{i}Y$；

3）事实上

$$P(\overline{z})=a_0\overline{z}^n+a_1\overline{z}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n$$

$$=\overline{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}=\overline{P(z)}$$

13．如果 $z=e^{it}$ ，试证明

（1） $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos nt$ ； （2） $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2\mathrm{i}\sin nt$

解 （1） $z^n+\dfrac{1}{z^n}=e^{\mathrm{int}}+e^{-\mathrm{int}}=e^{\mathrm{int}}+e^{\overline{\mathrm{int}}}=2\sin nt$

（2） $z^n-\dfrac{1}{z^n}=e^{\mathrm{int}}-e^{-\mathrm{int}}=e^{\mathrm{int}}-\overline{e^{\mathrm{int}}}=2\mathrm{i}\sin nt$

14．求下列各式的值

（1） $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^5$ ； （2） $(1+\mathrm{i})^6$ ； （3） $\sqrt[6]{-1}$ ； （4） $(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$

解 （1） $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^5=\left[2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\right]^5=\left(2e^{-\mathrm{i}\pi/6}\right)^5=32e^{-\mathrm{i}5\pi/6}$

$$=32\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=-16\sqrt{3}-16\mathrm{i}$$

（2） $(1+\mathrm{i})^6=\left[\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\right]^6=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right)^6=8\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/2}=-8\mathrm{i}$ 。

（3） $\sqrt[6]{-1}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+2k\pi}\right)^{\frac{1}{6}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(2k+1)/6},k=0,1,2,3,4,5$ 。可知 $\sqrt[6]{-1}$ 的 6 个值分别是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=\mathrm{i}，\ \mathrm{ei}^{\mathrm{i}5\pi/6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}，\ e^{\mathrm{i}3\pi/2}=-\mathrm{i}，\ e^{\mathrm{i}11\pi/4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}。$$

（4） $(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}=\left[\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\right]^{\frac{1}{3}}=\left(\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\pi/4}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)/3},\qquad k=0,1,2$ 。

可知 $(1-\mathrm{i})^{1/3}$ 的 3 个值分别是

$$\sqrt[6]{2}e^{-\mathrm{i}\pi/2}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}7\pi/12}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}5\pi/4}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)。$$

15．若 $(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$ ，试求 n 的值。

解 由题意即$(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n=(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n, e^{in\pi/4}=e^{-in\pi/4}$， $\sin\frac{n}{4}\pi=0$，

故$n=4k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

16．（1）求方程$z^3+8=0$的所有根

（2）求微分方程$y'''+8y=0$的一般解。

解 （1） $z=(-8)^{\frac{1}{3}}=2e^{i\frac{\pi}{3}(1+2k)}$，k=0,1,2。

即原方程有如下三个解：

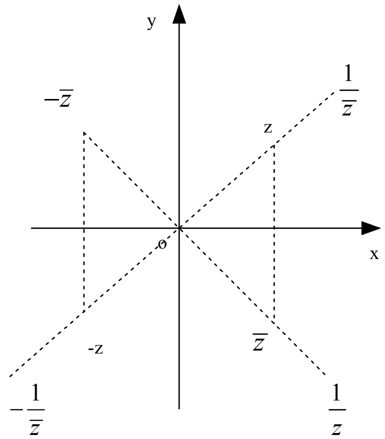
$$1+i\sqrt{3},\quad -2,\quad 1-i\sqrt{3}\text{ 。}$$

（2）原方程的特征方程$\lambda^3+8=0$有根$\lambda_1=1+\sqrt{3}i$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1-\sqrt{3}i$，故其一般形式为

$$y=C_1e^{-2x}+e^x\left(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x\right)$$

17．在平面上任意选一点z，然后在复平面上画出下列各点的位置：

$$-z,\overline{z},-\overline{z},\frac{1}{z},\frac{1}{\overline{z}},-\frac{1}{\overline{z}}\text{ 。}$$



18．已知两点z_1与z_2（或已知三点z_1,z_2,z_3）问下列各点位于何处?

（1） $z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$

（2） $z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$（其中$\lambda$为实数）；

（3） $z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$。

解 令$z_k=x_k+iy_k, k=1,2,3$，则

（1） $z=\frac{x_1+x_2}{2}+i\frac{y_1+y_2}{2}$，知点$z$位于$z_1$与$z_2$连线的中点。

（2）$z = x_2 - \lambda(x_2 - x_1) + \mathrm{i}[y_2 - \lambda(y_2 - y_1)]$，知点位于 z_1 与 z_2 连线上定比 $\lambda = \frac{|z - z_1|}{|z_2 - z_1|}$ 处。

（3） $z = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{\mathrm{i}}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$，由几何知识知点 z 位于 $\Delta z_1 z_2 z_3$ 的重心处。

19．设 z_1, z_2, z_3 三点适合条件： $z_1 + z_2 + z_3 = 0$，

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$。证明 z_1，z_2，z_3 是内接于单位圆 $|z| = 1$ 的一个正三角形的顶点。

证　由于 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$，知 $\Delta z_1 z_2 z_3$ 的三个顶点均在单位圆上。

因为

$$
\begin{aligned}
1 &= |z_3|^2 = z_3 \bar{z}_3 \\
&= [-(z_1 + z_2)][-(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)] = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\
&= 2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2
\end{aligned}
$$

所以， $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = -1$，又

$$
\begin{aligned}
|z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) \\
&= 2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = 3
\end{aligned}
$$

故

$|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$，同理 $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}$，知 $\Delta z_1 z_2 z_3$ 是内接于单位圆 $|z| = 1$ 的一个正三角形。

20．如果复数 z_1，z_2，z_3 满足等式

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

证明 $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$，并说明这些等式的几何意义。

由等式得

$$\arg(z_2 - z_1) - \arg(z_3 - z_1) = \arg(z_1 - z_3) - \arg(z_2 - z_3)$$

即 $\angle z_2 z_1 z_3 = \angle z_1 z_3 z_2$。又因为

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{(z_2 - z_1) + (z_1 - z_3)}{(z_3 - z_1) + (z_2 - z_3)} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

又可得 $\angle z_2 z_1 z_3 = \angle z_3 z_2 z_1$，所以知 $\Delta z_1 z_2 z_3$ 是正三角形，从而

$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$。

21．指出下列各题中点 z 的存在范围，并作图。

（1） $|z-5|=6$；（2） $|z+2\mathrm{i}|\geq 1$；

（3） $\mathrm{Re}(z+2)=-1$；（4） $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=3$；

（5） $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$；（6） $|z+3|+|z+1|=4$

（7） $\mathrm{Im}(z)\leq 2$；（8） $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geq 1$；

（9） $0<\arg z<\pi$；（10） $\arg(z-\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$

解:（1）以点 $z_0=5$ 为心，半径为 6 的圆周（见下图（a））;

（2）以点 $z_0=-2\mathrm{i}$ 为心，半径为 1 的圆周及外部（见下图（b））;

（3）由于 $\mathrm{Re}(z+2)=-1\Leftrightarrow x=-3$ 知点 z 的范围是直线 $x=-3$（见下图（c））;

（4） $\mathrm{i}\bar{z}=\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)=y+\mathrm{i}x$，故 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=3\Leftrightarrow y=3.$ 知点 z 的范围是直线 y=3（见下图（d））;

（5） $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|\Leftrightarrow |z+\mathrm{i}|^2=|z-\mathrm{i}|^2\Leftrightarrow (z+\mathrm{i})(\bar{z}-\mathrm{i})=(z-\mathrm{i})(\bar{z}+\mathrm{i})\Leftrightarrow$

$|z|^2-\mathrm{i}z+\mathrm{i}\,\bar{z}+1=|z|^2+\mathrm{i}z-\mathrm{i}\bar{z}+1\Leftrightarrow \mathrm{i}\bar{z}-\mathrm{i}z=0\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=0\Leftrightarrow 2y=0$

$\Rightarrow y=0.$ 知点 z 的范围是实轴（见下图（e））;

（6） $|z+3|+|z+1|=4\Leftrightarrow |z+3|^2=(4-|z+1|)^2\Leftrightarrow x-2=-2|z+1|\Leftrightarrow (x-2)^2=4|z+1|^2$

$\Leftrightarrow 3^2+12x+4y^2=0\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，即点 z 的范围是以（-3,0）和（-1,0）为焦点，长半轴为 2，短半轴为 $\sqrt{3}$ 的一椭圆（见下图（f））;

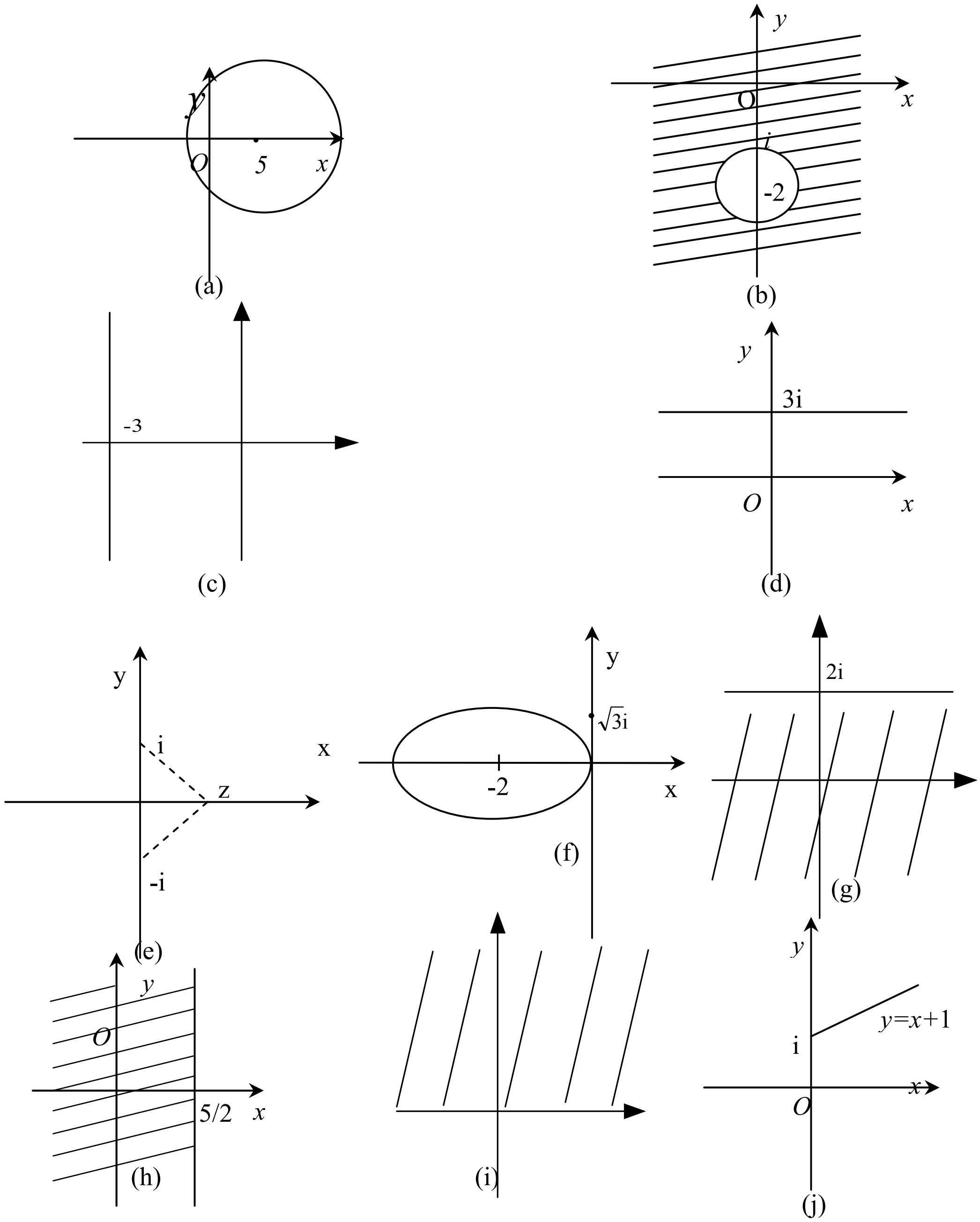
（7） $y\leq 2$，（见下图（g））;。

（8） $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geq 1\Leftrightarrow |z-3|^2\geq |z-2|^2\Leftrightarrow (z-3)(\bar{z}-3)\geq (z-2)(\bar{z}-2)\Leftrightarrow |z|^2-3z-3\bar{z}+9\geq$

$|z|^2-2z-2\bar{z}+4\Leftrightarrow z+\bar{z}\leq 5\Leftrightarrow x\leq\frac{5}{2}.$ 即点 z 的范围是直线 $x=\frac{5}{2}$ 以及 $x=\frac{5}{2}$ 为边界的左半平面（见下图（h））;

（9）不包含实轴上半平面（见下图（i））;

（10）以 i 为起点的射线 $y=x+1, x>0$（见下图（j））;



22．描出下列不等式所确定的区域，并指是有界的还是无界的，闭的还是开的，单连的还是多连的。

（1） $\operatorname{Im} z > 0$；　　（2） $|z-1| > 4$；

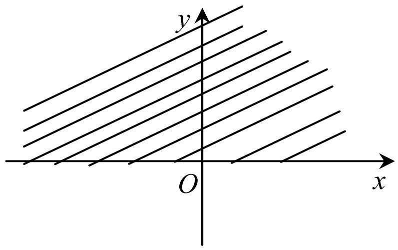
（3） $0 < \operatorname{Re} z < 1$；　　（4） $2 \le |z| \le 3$；

（5） $|z-1| < |z+3|$；　　（6） $-1 < \arg z < -1+\pi$；

（7） $|z-1|<4|z+1|$；　　　　　　　（8） $|z-2|+|z+2|\le 6$；

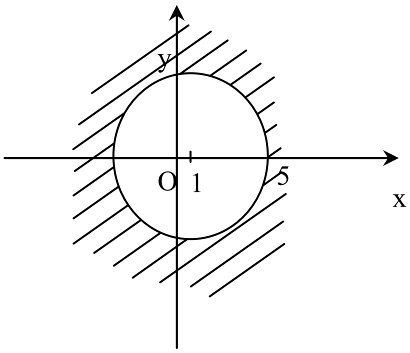
（9） $|z-2|-|z+2|>1$；　　　　　　　（10） $z\overline{z}-(2+\mathrm{i})z-(2-\mathrm{i})\overline{z}\le 4$。

解 （1） $\operatorname{Im} z>0$



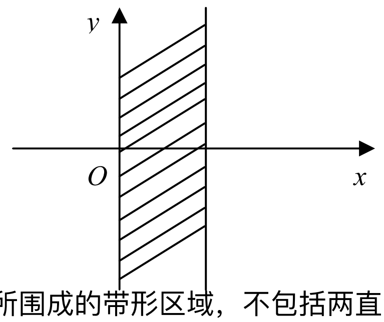
不包含实轴的上半平面，是无界的、开的单连通区域。

（2） $|z-1|>4$



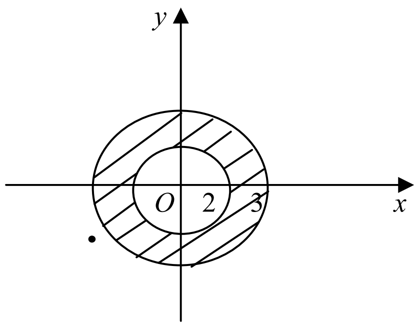
圆 $(z-1)^2+y^2=16$ 的外部（不包括圆周），是无界的、开的多连通区域。

（3） $0<\operatorname{Re} z<1$



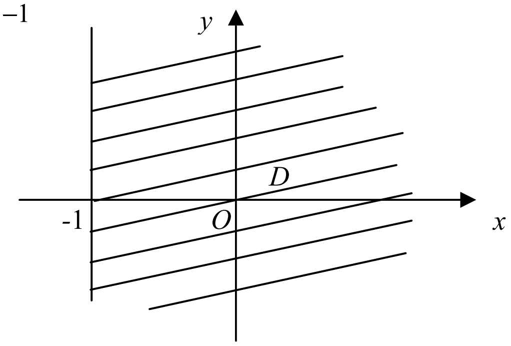
由直线 x = 0 与 x = 1 所围成的带形区域，不包括两直线在内，是无界的、开的单连通区域。

（4） $2\le|z|\le 3$



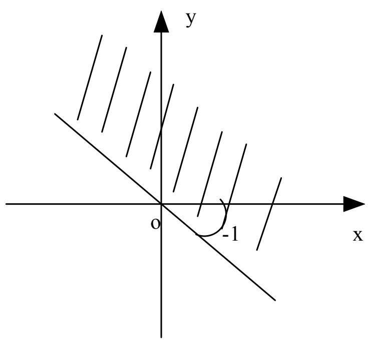
以原点为中心，2 与 3 分别为内、外半径的圆环域，不包括圆周，是有界的、开的多连通区域。

（5）$|z-1|<|z+3| \Leftrightarrow x>-1$



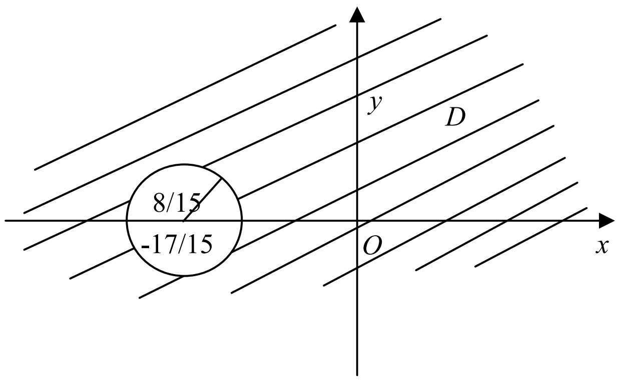
直线 $x=-1$ 右边的平面区域，不包括直线在内，是无界的、开的单连通的区域。

（6）$-1<\arg z<-1+\pi$



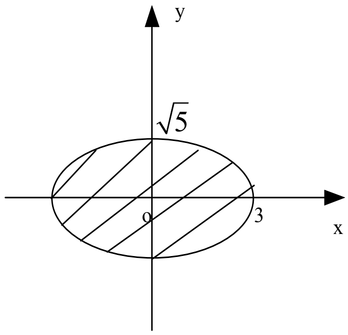
由射线 $\theta=1$ 及 $\theta=1+\pi$ 构成的角形域，不包括两射线在内，即为一半平面，是无界的、开的单连通区域。

（7）$|z-1|<4|z+1| \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{17}{15}\right)^2+y^2>\left(\dfrac{8}{15}\right)^2$



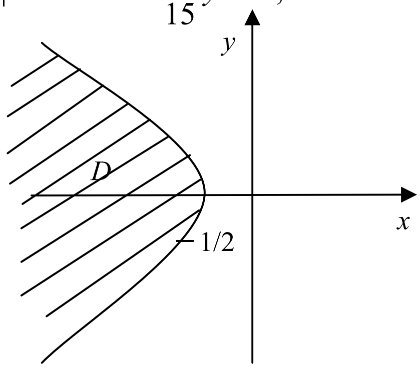
中心在点$z=-\frac{17}{15}$，半径为$\frac{8}{15}$的圆周的外部区域（不包括圆周本身在内），是无界的、开的多连通区域。

（8）$|z-2|+|z+2|\le 6$



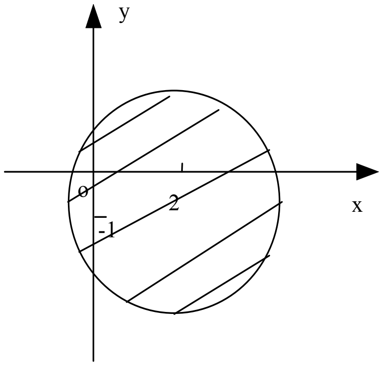
是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$及其围成的区域，是有界的、闭的单连通区域。

（9）$|z-2|-|z+2|>1\Leftrightarrow 4x^2-\frac{4}{15}y^2>1, x<0$



是双曲线$4x^2-\frac{4}{15}y^2=1$的左边分支的内部区域，是无界的、开的单连通区域。

（10）$z\overline{z}-(2+\mathrm{i})z-(2-\mathrm{i})\overline{z}\le 4$



是圆$(x-2)^2+(y+1)^2=9$及其内部区域，是有界的、闭的单连通区域。

23．证明：z 平面上的直线方程可以写成

$a\bar{z}+\bar{a}z=C$ （a 是非零复常数，C 是实常数）

证 设直角坐标系的平面方程为 $Ax+By=C$ 将 $x=\operatorname{Re}z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}), y=\operatorname{Im}z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$ 代入，得

$$\frac{1}{2}(A-\mathrm{i}B)z+\frac{1}{2}(A-\mathrm{i}B)\bar{z}=C$$

令 $a=\frac{1}{2}(A+\mathrm{i}B)$，则 $\bar{a}=\frac{1}{2}(A-\mathrm{i}B)$，上式即为 $a\bar{z}+\bar{a}z=C$ 。

24．证明复平面上的圆周方程可写成：

$$z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0,(\text{其中}\alpha\text{为复常数，}c\text{为实常数})。$$

证 $(z+a)\overline{(z+a)}=R^2 \Leftrightarrow z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{a}-R^2=0$，其中 $c=a\bar{a}-R^2$ 为实常数。

25．求下列方程（t 是实参数）给出的曲线。

（1） $z=(1+\mathrm{i})t$；　　（2） $z=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t$；

（3） $z=t+\frac{\mathrm{i}}{t}$；　　（4） $z=t^2+\frac{\mathrm{i}}{t^2}$，

（5） $z=a\operatorname{ch}t+\mathrm{i}b\operatorname{sh}t$　　（6） $z=ae^{\mathrm{i}t}+be^{-\mathrm{i}t}$

（7） $z=e^{\alpha t},(\alpha=a+b\mathrm{i}\text{为复数})$

解（1） $z=x+\mathrm{i}y=(1+\mathrm{i})t \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases},-\infty<t<\infty$ 。即直线 $y=x$ 。

（2） $z=x+\mathrm{i}y=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t \Leftrightarrow \begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},\quad 0<t\le 2\pi$，即为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

（3） $z=x+\mathrm{i}y=t+\frac{\mathrm{i}}{t} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\ y=\frac{1}{t}\end{cases}$，即为双曲线 $xy=1$；

（4） $z=x+\mathrm{i}y=t^2+\frac{\mathrm{i}}{t^2} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t^2\\ y=\frac{1}{t^2}\end{cases}$，即为双曲线 $xy=1$ 中位于第一象限中的一支。

（5） $z=a\operatorname{ch}t+\mathrm{i}b\operatorname{sh}t \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\operatorname{ch}t \\ y=b\operatorname{sh}t \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，双曲线

（6） $\dfrac{x^2}{(a+b)^2}+\dfrac{y^2}{(a-b)^2}=1$,椭圆

（7） $x^2+y^2=e^{\frac{2a}{b}\arctan\frac{y}{x}}$

26．函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 z 平面上的下列曲线变成 w 平面上的什么曲线 $(z=x+iy, w=u+iv)$？

（1） $x^2+y^2=6$；（2） $y=x$；

（3） $x=1$；（4） $(x-1)^2+y^2=1$

解 $w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$， $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}, v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，可得

（1） $u^2+v^2=\dfrac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{4}$，是 w 平面上一圆周；

（2） $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{y}{x^2+y^2}=\dfrac{-(-y)}{x^2+y^2}=-v$，是 w 平面上一直线；

（3）由 $\mathrm{x}=1$，知 $u=\dfrac{1}{1+y^2}, v=\dfrac{-y}{1+y^2}$，从而 $u^2+v^2=\dfrac{1}{1+y^2}=u$

此为 $\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+v^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ 是 w 平面上一圆周；

（4） $(x-1)^2+y^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=2x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$，于是 $u=\dfrac{1}{2}$，是 w 平面上一平行与 v 轴的直线。

27．已知映射 $w=z^3$，求

（1）点 $z_1=\mathrm{i}$， $z_2=1+\mathrm{i}$， $z_3=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 在 w 平面上的像。

（2）区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 在 w 平面上的像。

解 设 $z=re^{i\theta}$，则 $\omega=z^3=r^3e^{i3\theta}$。于是

（1） $z_1=\mathrm{i}=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, z_2=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$$z_3=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

经映射后在 w 平面上的像分别是

$$w_1 = e^{\mathrm{i}3\pi/3} = -\mathrm{i}\,,$$

$$w_2 = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 + \mathrm{i}\,2\,,$$

$$w_3 = 2^3 e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 8\mathrm{i}$$

（2）因为以原点为顶点的角形域的顶角张大三倍，所以为 $0 < \arg w < \pi$ 。

29．设函数f(z)在z$_0$处连续，且 $f(z_0) \neq 0$ ，证明存在z$_0$的邻域使 $f(z) \neq 0$ 。

证　因为 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ ，且 $f(z_0) \neq 0$ 。可取 $\varepsilon = \dfrac{|f(z_0)|}{2} > 0$ ，则 $\exists \delta > 0$ ，当 $|z - z_0| < \delta$ 时，有

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon = \frac{|f(z_0)|}{2}$$

从而 $|f(z_0)| - \dfrac{|f(z_0)|}{2} < |f(z)|$, 即 $|f(z)| > \dfrac{|f(z_0)|}{2} > 0$ 即点 $z \in U(z_0, \delta)$ 时, 则 $f(z) \neq 0$ 。

30．设 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$，证明 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域内是有界的。

证　取 $\varepsilon = 1$ ，则存在 $\delta > 0$ ，当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，$|f(z) - A| \leq 1$ 。故在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内，$|f(z)| = |f(z) - A + A| \leq |f(z) - A| + |A| \leq 1 + |A|$ 。

31．设 $f(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right), (z \neq 0)$ 试证当 $z \to 0$ 时 $f(z)$ 的极限不存在。

证　$f(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ ，显然。

32．试证 $\arg z (-\pi < \arg z \leq \pi)$ 在负实轴上（包括原点）不连续，除此而外在 z 平面上处处连续。

证　设 $f(z) = \arg z$ ，因为f(0)无定义，所以f(z)在原点 z=0 处不连续。

当z_0为负实轴上的点时，即 $z_0 = x_0 (x_0 < 0)$ ，有

$$\lim_{z \to z_0} \arg z = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0^+}} \left(\arctan\dfrac{y}{x} + \pi\right) \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0^-}} \left(\arctan\dfrac{y}{x} - \pi\right) \end{cases} = \begin{cases} \pi \\ -\pi \end{cases}$$

所以 $\lim\limits_{z \to z_0} \arg z$ 不存在，即 $\arg z$ 在负实轴上不连续。而 argz 在 z 平面上的其它点处的连续性显然。

习题二解答

书P47 1.(3)(4)

1．利用导数定义推出：

$1)(z^n)'=nz^{n-1},(n\text{是正整数});\qquad 2)\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$。

证 1）$(z^n)'=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}(nz^{n-1}+C_n^2z^{n-2}\Delta z+\cdots\Delta z^{n-1})=nz^{n-1}$

2）$\left(\dfrac{1}{z}\right)'=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{z+\Delta z}-\dfrac{1}{z}}{\Delta z}=-\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{1}{z(z+\Delta z)}=-\dfrac{1}{z^2}$

2．下列函数何处可导？何处解析？

（1） $f(z)=x^2-\mathrm{i}\,y$　　　（2） $f(z)=2x^3+3y^3\mathrm{i}$

（3） $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$　　　（4） $f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh}y$

解　（1）由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=u+\mathrm{i}\,v=x-\mathrm{i}\,y$ 仅在直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 上可导，在 z 平面上处处不解析。

（2）由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=6x^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=9y^2$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当 $2x^2=3y^2$,即$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$时，u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=u+\mathrm{i}\,v=2x^3+3y^3\mathrm{i}$ 仅在直线 $\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$ 上可导，在 z 平面上处处不解析。

（3）由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2xy$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=x^2$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当 z=0 时，u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=xy^2+\mathrm{i}\,x^2y$ 仅在点 $z=0$ 处可导，在 z 平面处处不解析。

（4）由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x\operatorname{ch}y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin x\operatorname{sh}y$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\operatorname{sh}y$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\cos x\operatorname{ch}y$

在 z 平面上处处连续，且在整个复平面 u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh}y$ 在 z 平面处处可导，在 z 平面处处不解析。

3．指出下列函数 $f(z)$ 的解析性区域，并求出其导数。

1） $(z-1)^5$；　　　（2） $z^3+2\mathrm{i}z$；

3） $\dfrac{1}{z^2-1}$；　　　（4） $\dfrac{az+b}{cz+d}(c,d\text{中至少有一个不为}0)$

解　（1）由于 $f'(z)=5(z-1)^4$，故 $f(z)$ 在 z 平面上处处解析。

（2）由于 $f'(z)=3z^2+2\mathrm{i}$，知 $f(z)$ 在 z 平面上处处解析。

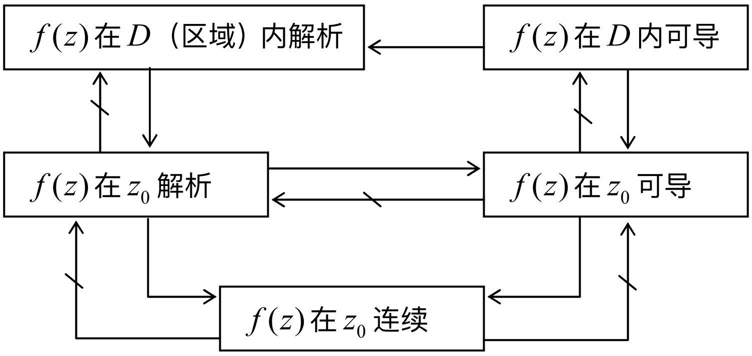
（3）由于 $f'(z)=\dfrac{-2z}{(z^2-1)^2}=-\dfrac{2z}{(z-1)^2(z+1)^2}$

知 $f(z)$ 在除去点 $z=\pm1$ 外的 z 平面上处处可导。处处解析，　$z=\pm1$ 是 $f(z)$ 的奇点。

（4）由于 $f'(z)=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$，知 $f(z)$ 在除去 $z=-d/c(c\neq 0)$ 外在复平面上处处解析。

5．复变函数的可导性与解析性有什么不同？判断函数的解析性有那些方法？

答：



判定函数解析主要有两种方法：1）利用解析的定义：要判断一个复变函数在 z_0 是否解析，只要判定它在 z_0 及其邻域内是否可导；要判断该函数在区域 D 内是否解析，只要判定它在 D 内是否可导；2）利用解析的充要条件，即本章§ 2 中的定理二。

6．判断下述命题的真假，并举例说明。

假

（1）如果 $f(z)$ 在 z_0 点连续，那么 $f'(z_0)$ 存在。

（2）如果 $f'(z_0)$ 存在，那么 $f(z)$ 在 z_0 点解析。

（3）如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导。

（4）如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点，那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点。

（5）如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导（指偏导数存在），那么 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 亦可导。

（6）设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域内是解析的。如果 u 是实常数，那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；如果 v 是实常数，那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；

解

（1）命题假。如函数 $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ 在 z 平面上处处连续，除了点 z=0 外处处不可导。

（2）命题假，如函数 $f(z)=|z|^2$ 在点 z=0 处可导，却在点 z=0 处不解析。

（3）命题假，如果 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，则 z_0 称为 $f(z)$ 的奇点。如上例。

（4）命题假，如 $f(z)=\sin x\operatorname{ch} y, g(z)=\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh} y$，$z=(\pi/2,0)$ 为它们的奇点，但不是 $f(z)+g(z)$ 的奇点。

（5）命题假。如函数 $f(z)=z\operatorname{Re} z=x^2+\mathrm{i}xy$ 仅在点 z=0 处满足 C-R 条件，故 $f(z)$ 仅在点 z=0 处可导。

（6）命题真。由 u 是实常数，根据 C-R 方程知 v 也是实常数，故 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；后面同理可得。

7．如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是 z 的解析函数，证明：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2$$

证　$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$，于是

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|=\frac{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \frac{\partial}{\partial y}|f(z)|=\frac{u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

由于 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 为解析函数，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

从而

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=\frac{1}{u^2+v^2}\left[u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u^2\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$\left.+v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+2uv\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left\{u^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]+v^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}(u^2+v^2)|f(z)|^2=|f(z)|^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

9．证明：柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

θ是无关变量 直接提

证　令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，利用复合函数求导法则和 u,v 满足 C-R 条件，得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dr}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dr}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dr\cos\theta}{dr}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dr\sin\theta}{dr}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\cos\theta\,\cancel{dr}}{\cancel{dr}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\sin\theta\,\cancel{dr}}{\cancel{dr}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta=\frac{\partial u}{\partial y}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta=r\frac{\partial u}{\partial r}$$

即 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$。又

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dr\cos\theta}{d\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dr\sin\theta}{d\theta}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}r\cdot\frac{-\sin\theta\,\cancel{d\theta}}{\cancel{d\theta}}+\frac{\partial u}{\partial y}r\cdot\frac{\cos\theta\,\cancel{d\theta}}{\cancel{d\theta}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta=-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta$$

$$=-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

总之，有 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$，$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$。

10．证明：如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并满足下列条件之一，那么 $f(z)$ 是常数。

$\Downarrow$ u.v都是常数 $\Downarrow$

（1）$f(z)$ 恒取实值。

（2）$\overline{f(z)}$ 在 D 内解析。

（3）$|f(z)|$ 在 D 内是一个常数。

（4）$\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数。

根据题目条件列等式 $\xrightarrow{\text{对x,y求偏导}}$ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

（5）$au+bv=c$，其中 a、b 与 c 为不全为零的实常数。

解　（1）若 $f(z)$ 恒取实值，则 $v=0$，又根据 $f(z)$ 在区域 D 内解析，知 C-R 条件成立，于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

故 u 在区域 D 内为一常数，记 $u=C$(实常数)，则 $f(z)=u+iv=C$ 为一常数。

（2）若 $\overline{f(z)}=\overline{u+iv}=u-iv$ 在区域 D 内解析，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

又 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

结合（1）、（2）两式，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{vy}=0,$$

故 u,v 在 D 内均为常数，分别记之为

$$u_1=C_1,u_2=C_2(C_1,C_2\text{为实常数}),$$

则

$$f(z)=u+iv=C_1+iC_2=C$$

为一复常数。

（3）若 $|f(z)|$ 在 D 内为一常数，记为 C_1，则 $u^2+v^2=C_1^2$，两边分别对于 x 和 y 求偏导，得

$$\begin{cases}2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

由于 $f(z)$ 在 D 内解析，满足 C-R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 代入上式又可写得

$$\begin{cases}u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\ v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$。同理，可解得 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{vy}=0$ 故 u,v 均为常数，分别记为 $u=C_1,v=C_2$，则 $f(z)=u+iv=C_1+iC_2=C$ 为一复常数。

（4）若 $\arg z$ 在 D 内是一个常数 C_1，则 $f(z)\neq 0$，从而 $f(z)=u+iv\neq 0$，且

$$\arg f(z)=\begin{cases}\arctan\dfrac{v}{u}, & u>0\\ \arctan\dfrac{v}{u}+\pi, & u<0,v>0\\ \arctan\dfrac{v}{u}-\pi, & u<0,v<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}C_1 & u>1\\ C_1+\pi & u<0,v>0\\ C_1-\pi & u<0,v<0\end{cases}$$

总之对 $\arg f(z)$ 分别关于 x 和 y 求偏导，得

$$\frac{\frac{1}{u^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}=\frac{u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2+v^2}=0$$

$$\frac{\frac{1}{u^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}=\frac{u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}}{u^2+v^2}=0$$

化简上式并利用 $f(z)$ 解析，其实、虚部满足 C-R 条件，得

$$\begin{cases}-v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，同理也可求得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，即 u 和 v 均为实常数，分别记为 C_2 和 C_3，从而 $f(z)=u+iv=C_2+iC_3=C$ 为一复常数。

(5) 若 $au+bv=c$，其中 a、b 和 c 为不全为零的实常数，这里 a 和 b 不全为 0，即 $a^2+b^2\neq 0$，否则此时 a、b 和 c 全为零。对方程 $au+bv=c$ 分别对于 x 和 y 求偏导，得

$$\begin{cases}a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

再利用解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实、虚部 u 和 v 满足 C-R 条件，得

$$\begin{cases}a\frac{\partial u}{\partial x}-b\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，同理也可求得 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，知函数 $f(z)$ 为一常数。

11.下列关系是否正确?

(1) $\overline{e^z}=e^{\bar z}$；　　(2) $\overline{\cos z}=\cos\bar z$；　　(3) $\overline{\sin z}=\sin\bar z$

解 (1) $\overline{e^z}=e^x\overline{(\cos y+\mathrm{i}\sin y)}=e^x(\cos y-\mathrm{i}\sin y)=e^{x-\mathrm{i}y}=e^{\bar z}$

(2) $\overline{\cos z}=\overline{\left(\frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(\overline{e^{\mathrm{i}z}}+\overline{e^{-\mathrm{i}z}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-\mathrm{i}\bar z}+e^{\mathrm{i}\bar z}\right)=\cos\bar z$。

(3) $\overline{\sin z}=\overline{\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}\right)}=\frac{1}{\overline{2\mathrm{i}}}\left(\overline{e^{\mathrm{i}z}}-\overline{e^{-\mathrm{i}z}}\right)=\frac{1}{-2\mathrm{i}}(e^{-\mathrm{i}\bar z}-e^{\mathrm{i}\bar z})$

$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}\bar z}-e^{-\mathrm{i}\bar z}\right)=\sin\bar z$。

12．找出下列方程的全部解。

(3) $1+e^z=0$；　　(4) $\sin z+\cos z=0$；

解 (3) 原方程等价于 $e^z=-1$，于是它的解为：

$$z=\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+\mathrm{i}[\arg(-1)+2k\pi]=\mathrm{i}\,\pi(1+2k) \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

（4）由于 $\sin z=-\cos z$, $\quad \dfrac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}\right)$，故

$$e^{2\mathrm{i}z}-1=-\mathrm{i}\left(e^{2\mathrm{i}z}+1\right)$$

$$e^{2\mathrm{i}z}=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

$$z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\ln|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg(-\mathrm{i})+2k\pi)]$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\left(k-\frac{1}{4}\right)\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

13．证明：

（1） $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$；

$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2-\cos z_1\sin z_2$；

（2） $\sin^2 z+\cos^2 z=1$；（3） $\sin 2z=2\sin z\cos z$；（4） $\tan 2z=\dfrac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$；

（5） $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$， $\quad \cos(z+\pi)=-\cos z$；

（6） $|\cos z|^2=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y, |\sin z|^2=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$

证 （1）左 $=\cos(z_1+z_2)=\dfrac{1}{2}\left[e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}\right]$

右 $=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

$$=\frac{e^{\mathrm{i}z_1}+e^{-\mathrm{i}z_1}}{2}\frac{e^{\mathrm{i}z_2}+e^{-\mathrm{i}z_2}}{2}-\frac{e^{\mathrm{i}z_1}-e^{-\mathrm{i}z_1}}{2\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}z_2}-e^{-\mathrm{i}z_2}}{2\mathrm{i}}$$

$$=\frac{e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{4}$$

$$=\frac{e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{2}$$

可见左=右，即 $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$；

左= $\sin(z_1+z_2)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$

右 $=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z_1}-e^{-\mathrm{i}z_1}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z_2}-e^{-\mathrm{i}z_2}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z_1}+e^{-\mathrm{i}z_1}\right)\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z_2}-e^{-\mathrm{i}z_2}\right)$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]+\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[2e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-2e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$$

可见左=右，即 $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$

（2） $\sin^2 z+\cos^2 z=\left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2+\left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2$

$$=-\frac{1}{4}\left(e^{2iz}-2+e^{-2iz}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{2iz}+2+e^{-2iz}\right)=1$$

（3）左$=\sin 2z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}2z}-e^{-\mathrm{i}2z}\right)$

右$=2\sin z\cos z=2\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}\right)$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}2z}+1-1-e^{-\mathrm{i}2z}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}2z}-e^{-\mathrm{i}2z}\right)$$

可见左=右，即 $\sin 2z=2\cos z\sin z$ 。

（4） $\tan 2z=\frac{\sin 2z}{\cos 2z}=\frac{2\sin z\cos z}{\cos^2 z-\sin^2 z}=2\frac{\sin z}{\cos z}\Big/\left[1-\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)^2\right]=\frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$

（5）由（1）知

$$\begin{cases}\cos(x+iy)=\cos x\,\mathrm{ch}y-i\sin x\,\mathrm{sh}y\\ \sin(x+iy)=\sin x\,\mathrm{ch}y+i\cos x\,\mathrm{sh}y\end{cases}$$

$$\mathrm{ch}^2y-\mathrm{sh}^2y=1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+(-z)\right]=\sin\frac{\pi}{2}\cos(-z)+\cos\frac{\pi}{2}\sin(-z)$$

$$=\cos(-z)=\frac{1}{2}\left(e^{i(-z)}+e^{-i(-z)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$$

$$=\cos z$$

由（1）得 $\cos(z+\pi)=\cos z\cos\pi-\sin z\sin\pi=-\cos z$

（6）左$=|\cos z|^2=|\cos x\,\mathrm{ch}\,y-\mathrm{i}\sin x\,\mathrm{sh}\,y|^2=\cos^2 x\,\mathrm{ch}^2 y+\sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 y$

$$=\cos^2 x(1+\mathrm{sh}^2 y)+\sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 y=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y$$

左$=|\sin z|^2=|\sin x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}\,y|^2=\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2 y+\cos^2 x\,\mathrm{sh}^2 y$

$$=\sin^2 x(1+\mathrm{sh}^2 y)+\cos^2 x\,\mathrm{sh}^2 y=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$$ 。

14．说明：1）当 $y\to\infty$ 时，$|\sin(x+\mathrm{i}y)|$ 和 $|\cos(x+\mathrm{i}y)|$ 趋于无穷大；

2）当 t 为复数时，$|\sin t|\le 1$ 和 $|\cos t|\le 1$ 不成立。

解 1）$|\sin z|=\left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right|\ge\frac{|e^{-y}-e^{y}|}{2}$；$|\cos z|$ 同理。

2）设 $t=\mathrm{i}y, y\in R$，则 $|\sin t|=\frac{|e^{-y}-e^{y}|}{2}$，则当 $y\to\infty$ 时显然题设不成立。

15．求 $\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})$，$\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})$ 和它们的主值。

解 $\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})=\mathrm{Ln}|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg(-\mathrm{i})+2k\pi)=\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$$=\mathrm{i}\pi\left(2k-\frac{1}{2}\right),k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\ln(-\mathrm{i})=\ln|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}\arg(-\mathrm{i})=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$$

$$\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})=\ln|-3+4\mathrm{i}|+\mathrm{i}[\arg(-3+4\mathrm{i})+2k\pi]$$

$$=\ln 5+\mathrm{i}\left[\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)+2k\pi\right]$$

$$=\ln 5-\mathrm{i}\left[\left(\arctan\frac{4}{3}-(2k+1)\pi\right)\right], k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\ln(-3+4\mathrm{i})=\ln|-3+4\mathrm{i}|+\mathrm{i}\arg(-3+4\mathrm{i})=\ln 5+\mathrm{i}\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)。$$

16．证明对数的下列性质：1） $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$；2） $\mathrm{Ln}(z_1/z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$。

证明 1） $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\ln(|z_1z_2|)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1z_2=\ln z_1+\ln z_2+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_2=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$；

2） $\mathrm{Ln}(z_1/z_2)=\ln(|z_1/z_2|)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1/z_2=\ln z_1-\ln z_2+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_2=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$。

17．说明下列等式是否正确：1） $\mathrm{Ln}\,z^2=2\,\mathrm{Ln}\,z$；2） $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,z$。

解：两式均不正确。1） $\mathrm{Ln}\,z^2=2\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(2z)$，而$2\,\mathrm{Ln}\,z=2\ln|z|+2\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$；

2） $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(\sqrt{z})$，而$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,z=\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Arg}(z)$。

18．求$e^{1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$，$\exp\left(\frac{1+\mathrm{i}\pi}{4}\right)$，$3^{\mathrm{i}}$和$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$的值。

解：

$$e^{1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=ee^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=e\left(\cos\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{i}\,e$$

$$\exp\left(\frac{1+\mathrm{i}\pi}{4}\right)=e^{\frac{1}{4}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=e^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{4}}(1+\mathrm{i})$$

$$3^{\mathrm{i}}=e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,3}=e^{\mathrm{i}[\ln 3+\mathrm{i}(\arg 3+2k\pi)]}=e^{-2k\pi}e^{\mathrm{i}\ln 3}=e^{-2k\pi}(\cos\ln 3+\mathrm{i}\sin\ln 3),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}=e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})}=e^{\mathrm{i}[\ln|1+\mathrm{i}|]+\mathrm{i}(\arg(1+\mathrm{i})+2k\pi)}$$

$$=e^{\mathrm{i}\frac{\ln 2}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}=e^{-\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)}\left(\cos\frac{\ln 2}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\ln 2}{2}\right),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

19．证明$(z^a)'=az^{a-1}$，其中a为实数。

证明 $\quad (z^a)'=(e^{a\ln z+2k\pi i})'=a(\ln z)'e^{a\ln z+2k\pi i}=a\frac{1}{z}z^a=az^{a-1}$。

20．证明1） $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=1$；2） $\mathrm{sh}^2 z+\mathrm{ch}^2 z=\mathrm{ch}\,2z$；

3） $\mathrm{sh}(z_1+z_2)=\mathrm{sh}\,z_1\,\mathrm{ch}\,z_2+\mathrm{ch}\,z_1\,\mathrm{sh}\,z_2$；$\mathrm{ch}(z_1+z_2)=\mathrm{ch}\,z_1\,\mathrm{ch}\,z_2+\mathrm{sh}\,z_1\,\mathrm{sh}\,z_2$。

证明 1） $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=(\frac{e^z+e^{-z}}{2})^2-(\frac{e^z-e^{-z}}{2})^2=1$；

2） $\mathrm{sh}^2 z+\mathrm{ch}^2 z=(\frac{e^z-e^{-z}}{2})^2+(\frac{e^z+e^{-z}}{2})^2=\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}=1$；

3） $\mathrm{sh}\,z_1\,\mathrm{ch}\,z_2+\mathrm{ch}\,z_1\,\mathrm{sh}\,z_2=\frac{(e^{z_1}-e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})}{4}+\frac{(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}-e^{-z_2})}{4}=\frac{e^{z_1+z_2}-e^{-z_1-z_2}}{2}$

$$=\mathrm{sh}(z_1+z_2)。$$

21．解下列方程：1） $\operatorname{sh} z=0$；2） $\operatorname{ch} z=0$；3） $\operatorname{sh} z=\mathrm{i}$。

解　1）由 $\operatorname{sh} z=0$ 得 $e^{2z}=1$， $z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}1=\mathrm{i}k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

2）由 $\operatorname{ch} z=0$ 得 $e^{2z}=-1$， $z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}(-1)=\dfrac{(2k+1)}{2}\mathrm{i}\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

3）由 $\operatorname{sh} z=\mathrm{i}$ 得 $e^{z}=\mathrm{i}$， $z=\operatorname{Ln}\mathrm{i}=\mathrm{i}(2k+\dfrac{1}{2})\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

23．证明: $\operatorname{sh} z$ 的反函数 $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$。

证　设 $\operatorname{sh} w=z$，即 $\dfrac{e^w-e^{-w}}{2}=z\Rightarrow e^{2w}-2ze^w-1=0$ 解得 $e^w=z+\sqrt{z^2+1}$，

故 $w=\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$。

24．已知平面流速场的复势 $f(z)$ 为

（1） $(z+\mathrm{i})^2$；　　（2） z^3；　　（3） $\dfrac{1}{z^2+1}$；

求流动的速度以及流线和等势线的方程。

解（1） $V(z)=\overline{f'(z)}=\overline{2(z+\mathrm{i})}=2(\bar{z}-\mathrm{i})$ 为流速，又

$$f(z)=(z+\mathrm{i})^2=[x+\mathrm{i}(y+1)]^2=x^2-(y+1)^2+\mathrm{i}\,2x(y+1)$$

知流线和等势线方程分别为 $x(y+1)=C_1$ 和 $x^2-(y+1)^2=C_2$。

（2）流速 $V(z)=\overline{f'(z)}=\overline{3z^2}=3\bar{z}^2$，又 $f(z)=z^3=x(x^2-3y^2)+\mathrm{i}\,y(3x^2-y^2)$，

流线方程： $(3x^2-y^2)y=C_1$，　　等势线方程： $x(x^2-3y^2)=C_2$。

（3）流速　　$V(z)=\overline{f'(z)}=\overline{\left(\dfrac{1}{z^2+1}\right)'}=\overline{\left(\dfrac{-2z}{z^2+1}\right)'}=\dfrac{-2\bar{z}}{(\bar{z}^2+1)^2}$

又 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{1}{x^2-y^2+1+\mathrm{i}\,2xy}=\dfrac{x^2-y^2+1-\mathrm{i}\,2xy}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}$，

流线方程为　　$\dfrac{xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}=C_1$，

等势线方程为　　$\dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}=C_2$。

习题三解答

1.沿下列路线计算积分 $\int_0^{3+i} z^2 dz$ 。

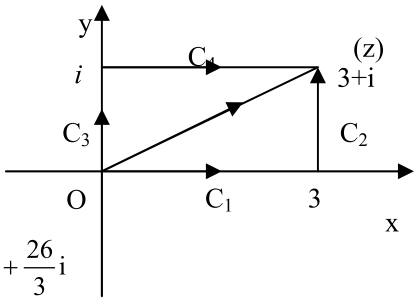
（1）自原点到 $3+\mathrm{i}$ 的直线段

（2）自原点沿实轴至 3，再由 3 沿垂直向上至 $3+\mathrm{i}$；

（3）自原点沿虚轴至 i，再由 i 沿水平方向右至 $3+\mathrm{i}$ 。

解（1）$\begin{cases} x=3t, \\ y=t, \end{cases}$ $0\le t\le 1$，故 $z=3t+\mathrm{i}\,t$， $0\le t\le 1$ 。$dz=(3+\mathrm{i})dt$

于是



$$\int_0^{3+1} z^2 dz = \int_0^1 (3t+\mathrm{i}\,t)^2 (3+\mathrm{i})dt$$

$$=(3+\mathrm{i})^3 \int_0^1 t^2 dt$$

$$=\frac{1}{3}(3+\mathrm{i})^3 t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(3+\mathrm{i})^3 = 6+\frac{26}{3}\mathrm{i}$$

（2）$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz + \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz$ 。C_1 之参数方程为 $\begin{cases} x=3t, \\ y=t, \end{cases}$ $(0\le t\le 1)$；C_2 之参数方程为

$$\begin{cases} x=3, \\ y=t, \end{cases} (0\le t\le 1)$$

故 $$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_0^1 9t^2\cdot 3dt + \int_0^1 (3+\mathrm{i}\,t)^2\cdot \mathrm{i}\,dt = 6+\frac{26}{3}\mathrm{i} 。$$

（3）$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_0^{\mathrm{i}} z^2 dt + \int_{\mathrm{i}}^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_{C_3} z^2 dz + \int_{C_4} z^2 dz$ 。

$C_3 : z=\mathrm{i}\,t(0\le t\le 1)$； $C_4 : z=3t+\mathrm{i}$ $(0\le t\le 1)$,

故 $$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_0^1 -t^2\cdot \mathrm{i}\,dt + \int_0^1 (3t+\mathrm{i})^2\cdot 3dt = 6+\frac{26}{3}\mathrm{i}$$

2．分别沿 $y=x$ 与 $y=x^2$ 算出、积分 $\int_0^{1+i}(x^2+\mathrm{i}\,y)dz$ 的值。

解（1）沿 $y=x$ 。此时 $z=t+\mathrm{i}\,t(0\le t\le 1)$。$dz=(1+\mathrm{i})dt$，于是

$$\int_0^{1+\mathrm{i}}(x^2+\mathrm{i}\,y)dz = \int_0^1 (t^2+\mathrm{i}\,t)(1+\mathrm{i})dt = (1+\mathrm{i})\int_0^1 (t^2+\mathrm{i}\,t)dt = (1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{3}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = -\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i} 。$$

（2）沿 $y=x^2$，此时 $z=t+\mathrm{i}\,t^2(0\le t\le 1)$。$dz=(1+\mathrm{i}\,2t)dt$，故

$$\int_0^{1+\mathrm{i}}(x^2+\mathrm{i}\,y)dz = \int_0^1 (t^2+\mathrm{i}\,t^2)(1+\mathrm{i}\,2t)dt = (1+\mathrm{i})\int_0^1 t^2(1+\mathrm{i}\,2t)dt = (1+\mathrm{i})\int_0^1 (t^2+\mathrm{i}\,2t^3)dt$$

$$=(1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{3}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = -\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i} 。$$

3．设 $f(z)$ 在单连域 D 内解析，C 为 D 内任何一条正向简单闭曲线，问

$$\oint_C \operatorname{Re}[f(z)]dz = \oint_C \operatorname{Im}[f(z)]dz = 0$$

是否成立，如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明。

解　未必成立。令 $f(z)=z$，$C:|z|=1$，则 $f(z)$ 在全平面上解析，但是

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]dz = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}[e^{i\theta}]de^{i\theta} = \int_0^{2\pi}\cos\theta(-\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta)d\theta = \pi\,\mathrm{i} \neq 0$$

$$\oint_C \mathrm{Im}[f(z)]dz = \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}[e^{\mathrm{i}\theta}]de^{\mathrm{i}\theta} = \int_0^{2\pi}\sin\theta(-\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta)d\theta = -\pi \neq 0$$

4．利用单位圆上$\overline{z} = \dfrac{1}{z}$的性质，及柯西积分公式说明$\oint\limits_C \overline{z}dz = 2\pi\mathrm{i}$，其中$C$为正向单位圆周$|z|=1$。

解　$\oint\limits_C \overline{z}dz = \oint\limits_C \dfrac{1}{z}dz = 2\pi\mathrm{i}$，（利用柯西积分公式）

5．计算积分$\oint_C \dfrac{\overline{z}}{|z|}dz$的值，其中 C 为正向圆周：（1）$|z|=2$；（2）$|z|=4$

解　（1）因在$|z|=2$上有$|z|=2$，$z\cdot \overline{z} = |z|^2 = 4$，从而有$\overline{z} = \dfrac{4}{z}$，故有

$$\oint_C \frac{\overline{z}}{|z|}dz = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{4}{z}}{2}dz = \oint_{|z|=2} \frac{2}{z}dz = 4\pi\,\mathrm{i}$$

（2）因在C上有$|z|=4$，$z\cdot\overline{z} = |z|^2 = 16$，从而有$\overline{z} = \dfrac{16}{z}$，故有

$$\oint_C \frac{\overline{z}}{|z|}dz = \oint_{|z|=4} \frac{\frac{16}{z}}{4}dz = \oint_{|z|=4} \frac{4}{z}dz = 8\pi\,\mathrm{i}$$

6．利用观察法得出下列积分的值。

解　利用柯西－古萨基本定理和柯西积分公式。

7．沿指定曲线的正向计算下列各积分。

（1）$\oint_C \dfrac{e^z}{z-2}dz$，$C:|z-2|=1$　　（2）$\oint_C \dfrac{dz}{z^2-a^2}$，$C:|z-a|=a$

（3）$\oint\limits_C \dfrac{e^{\mathrm{i}z}dz}{z^2+1}$，$C:|z-2\mathrm{i}|=3/2$　　（4）$\oint\limits_C \dfrac{zdz}{z-3}$，$C:|z|=2$

（5）$\oint_C \dfrac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}$，$C:|z|=r<1$　　（6）$\oint_C z^3\cos z dz$，C为包围z=0的闭曲线

（7）$\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$，$C:|z|=3/2$　　（8）$\oint_C \dfrac{\sin z dz}{z}$，$C:|z|=1$

（9）$\oint_C \dfrac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$，$C:|z|=2$　　（10）$\oint_C \dfrac{e^z dz}{z^5}$，$C:|z|=1$

解　（1）由 Cauchy 积分公式，$\oint_C \dfrac{e^z}{z-2}dz = 2\pi\,\mathrm{i}\, e^z\big|_{z=2} = 2\pi e^2\,\mathrm{i}$

（2）　解 1：$\oint_C \dfrac{dz}{z^2-a^2} = \oint_C \dfrac{\frac{1}{z+a}}{z-a}dz = 2\pi\,\mathrm{i}\left.\dfrac{1}{z+a}\right|_{z=a} = \dfrac{\pi}{a}\mathrm{i}$，

解 2：$\oint_C \dfrac{dz}{z^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\left[\oint_C \dfrac{1}{z-a}dz - \oint_C \dfrac{1}{z+a}dz\right] = \dfrac{1}{2a}[2\pi\,\mathrm{i} - 0] = \dfrac{\pi}{a}\mathrm{i}$

（3）由 Cauchy 积分公式，$\oint\limits_C \dfrac{e^{\mathrm{i}z}dz}{z^2+1} = \oint\limits_C \dfrac{e^{\mathrm{i}z}dz/(z+\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}\left.\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z+\mathrm{i}}\right|_{z=\mathrm{i}} = \pi/e$

（4）（5）（6）由柯西基本定理知：其结果均为 0

（7）因被积函数的奇点 $z=\pm\mathrm{i}$ 在 C 的内部，$z=\pm 2\mathrm{i}$ 在 C 的外部，故由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式有：

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}=\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{3}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}+\oint_{|z+\mathrm{i}|=\frac{1}{3}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

$$=\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z^2+4)}}{z-\mathrm{i}}dz+\oint_{|z+\mathrm{i}|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z^2+4)}}{z+\mathrm{i}}dz$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z^2+4)}\right|_{z=\mathrm{i}}+2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z^2+4)}\right|_{z=-\mathrm{i}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=0$$

（8）由 Cauchy 积分公式，$\oint_C \frac{\sin z dz}{z}=2\pi\mathrm{i}\sin z\,|_{z=0}=0$

（9）由高阶求导公式，$\oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz=2\pi\mathrm{i}(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0$

（10）由高阶求导公式，$\oint_C \frac{e^z dz}{z^5}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{4!}(e^z)^{(4)}\,|_{z=0}=\frac{\pi\mathrm{i}}{12}$

8．计算下列各题：

1）$\int_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}}e^{2z}dz$； 2）$\int_{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}^{0}\operatorname{ch}3zdz$； 3）$\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}\sin^2 zdz$； 4）$\int_0^1 z\sin zdz$；

5）$\int_0^{\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})e^{-z}dz$； 6）$\int_1^{\mathrm{i}}\frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz$(沿1到i的直线段)。

解 1）$\int_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}}e^{2z}dz=\left.\frac{e^{2z}}{2}\right|_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}}=0$ 2）$\int_{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}^{0}\operatorname{ch}3zdz=\frac{1}{3}\operatorname{sh}3z\,|_{\pi\mathrm{i}/6}^{0}=-\mathrm{i}/3$

3）$\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}\sin^2 zdz=\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}\frac{1-\cos 2z}{2}dz=(\frac{z}{2}-\frac{\sin 2z}{4})\,|_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}=(\pi-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\pi)\mathrm{i}$

4）$\int_0^1 z\sin zdz=(\sin z-z\cos z)\,|_0^1=\sin 1-\cos 1$

5）$\int_0^{\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})e^{-z}dz=(\mathrm{i}-1-z)e^{-z}\,|_0^{\mathrm{i}}=1-\cos 1+\mathrm{i}(\sin 1-1)$

6）$\int_1^{\mathrm{i}}\frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz=(\tan z+\tan^2 z/2)\,|_1^{\mathrm{i}}=-(\tan 1+\frac{1}{2}\tan^2 1+\frac{1}{2}\operatorname{th}^2 1)+\mathrm{i}\operatorname{th}1$

9．计算下列积分：

1）$\oint_C(\frac{4}{z+1}+\frac{3}{z+2\mathrm{i}})dz$,其中$C:|z|=4$为正向

2）$\oint_C\frac{2\mathrm{i}}{z^2+1}dz$,其中$C:|z-1|=6$为正向

3）$\oint_{C=C_1+C_2}\frac{\cos z}{z^3}dz$,其中$C_1:|z|=2$为正向，$C_2:|z|=3$为负向

4） $\oint_C \frac{dz}{z-i}$,其中C为以$\pm\frac{1}{2},\pm\frac{6}{5}$i为顶点的正向菱形

5） $\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz$,其中$a$为$|a|\neq 1$的任何复数，$C:|z|=1$为正向

解 1） $\oint_C (\frac{4}{z+1}+\frac{3}{z+2\mathrm{i}})dz=2\pi\mathrm{i}(4+3)=14\pi\mathrm{i}$

2） $\oint_C \frac{2\mathrm{i}}{z^2+1}dz=\oint_{|z-\mathrm{i}|=1}\frac{2i/(z+\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}}dz+\oint_{|z+\mathrm{i}|=1}\frac{2i/(z-\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}dz=0$

3） $\oint_{C=C_1+C_2}\frac{\cos z}{z^3}dz=\oint_{C_1}\frac{\cos z}{z^3}dz-\oint_{C_2^-}\frac{\cos z}{z^3}dz=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}(\cos z)''|_{z=0}-\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}(\cos z)''|_{z=0}=0$

4） $\oint_C \frac{dz}{z-\mathrm{i}}=2\pi\mathrm{i}$

5） 当$|a|>1$时，$1/(z-a)^3$在$|z|\le 1$上解析，故$\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz=0$；

当$|a|<1$时，$\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}(e^z)''|_{z=a}=\pi\mathrm{i}e^a$

10．证明：当C为任何不通过原点的简单闭曲线时，$\oint_C \frac{1}{z^2}dz=0$。

证明　当原点在曲线C内部时，$\oint_C \frac{1}{z^2}dz=2\pi\mathrm{i}(1)'|_{z=0}=0$；当原点在曲线$C$外部时，$1/z^2$在$C$内解析，故$\oint_C \frac{1}{z^2}dz=0$。

11．下列两个积分的值是否相等？积分 2）的值能否利用闭路变形原理从 1）的值得到？为什么？

1） $\oint_{|z|=2}\frac{\bar{z}}{z}dz$；　　2） $\oint_{|z|=4}\frac{\bar{z}}{z}dz$

解 $\oint_{|z|=2}\frac{\bar{z}}{z}dz=\int_0^{2\pi}2\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}d\theta=0$；$\oint_{|z|=4}\frac{\bar{z}}{z}dz=\int_0^{2\pi}4\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}d\theta=0$，故两个积分的值相等。但不能利用闭路变形原理从 1）的值得到，因$\frac{\bar{z}}{z}$不是一个解析函数。

12．设区域D为右半平面，z为D内圆周$|z|=1$上的任意一点，用在D内的任意一条曲线C连结原点与z，证明$\mathrm{Re}\left[\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta\right]=\frac{\pi}{4}$.

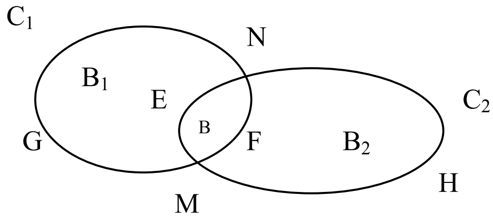
证明　函数$\frac{1}{1+\zeta^2}$在右半平面解析，故在计算从 0 到z沿任意一条曲线C的积分时与积分路径无关。则$\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^\theta \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\eta}}{1+e^{2\mathrm{i}\eta}}d\eta=\frac{\pi}{4}+\int_0^\theta \frac{2\mathrm{i}\cos\eta}{2+2\cos 2\eta}d\eta$.（分子分母同乘以$1+e^{-2\mathrm{i}\eta}$），

故 $\operatorname{Re}\left[\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta\right]=\frac{\pi}{4}.$

13．设 C_1 与 C_2 为相交于 M、N 两点的简单闭曲线，它们所围的区域分别为 B_1 与 B_2 。B_1 与 B_2 的公共部分为 B 。如果 $f(z)$ 在 B_1-B 与 B_2-B 内解析，在 C_1 、C_2 上也解析，证明：$\oint\limits_{C_1} f(z)dz=\oint\limits_{C_2} f(z)dz$ 。

证明　在 B_1-B 上 $f(z)$ 为解析函数，则由柯西基本定理 $\oint\limits_{MENGM} f(z)dz=0$；同理 $\oint\limits_{MHNFM} f(z)dz=0$

则 $\int\limits_{NGM} f(z)dz+\int\limits_{MEN} f(z)dz=\int\limits_{MHN} f(z)dz+\int\limits_{NFM} f(z)dz$，即 $\oint\limits_{C_1} f(z)dz=\oint\limits_{C_2} f(z)dz$ 。



14．设 C 为不经过 a 与-a 的正向简单闭曲线，a 为不等于零的任何复数，试就 a 与-a 同 C 的各种不同位置，计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^2-a^2}dz$ 。

解　(i) 当 a 在 C 的内部而-a 在 C 的外部时

$$\oint_C \frac{z}{z^2-a^2}dz=\oint_C \frac{\frac{z}{z+a}}{z-a}dz=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{z}{z+a}\right|_{z=a}=\pi\mathrm{i}\ 。$$

(ii) 当 $-a$ 在 C 的内部而 a 在 C 的外部时，

$$\oint_c \frac{z}{z^2-a^2}dz=\oint_c \frac{\frac{z}{z-a}}{z+a}dz=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{z}{z-a}\right|_{z=-a}=\pi\mathrm{i}$$

(iii) 当 a 与 $-a$ 在 C 的内部时，设 C_1,C_2 分别为以 $a,-a$ 为心半径充分小的圆周使 C_1,C_2 均在 C 的内部且互不相交也互不包含，则由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式得

$$\oint_c \frac{z}{z^2-a^2}dz=\oint_{c_1}\frac{\frac{z}{z+a}}{z-a}dz+\oint_{c_2}\frac{\frac{z}{z-a}}{z+a}dz=\pi i+\pi i=2\pi i$$

(iv) 当 a 与 $-a$ 都在 C 的外部时，由 Cauchy-Goursat 定理得

$$\oint_C \frac{z}{z^2-a^2}dz=0\ 。$$

15．设 C_1 与 C_2 为两条互不包含，也互不相交的正向简单闭曲线，证明：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint\limits_{C_1}\frac{z^2dz}{z-z_0}+\oint\limits_{C_2}\frac{\sin zdz}{z-z_0}\right]=\begin{cases} z_0^2, & 当z_0在C_1内时, \\ \sin z_0, & 当z_0在C_2内时. \end{cases}$$

证明　利用 Cauchy 积分公式，当 z_0 在 C_1 内时，$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{C_1}\frac{z^2dz}{z-z_0}=z^2|_{z=z_0}=z_0^2$，而 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{C_2}\frac{\sin zdz}{z-z_0}=0$；

当 z_0 在 C_2 内时，$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{C_1}\frac{z^2dz}{z-z_0}=0$，而 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{C_2}\frac{\sin zdz}{z-z_0}=\sin z|_{z=z_0}=\sin z_0$ 。故结论成立。

16．设函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 C：$|z|=r$，$0<r<1$ 的积分为零，问 $f(z)$ 是否需在 z=0 处解析？试举例说明之。

解　不一定。如令 $f(z)=\frac{1}{z^2}$，则其在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 C：$|z|=r$，$0<r<1$ 的积分

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{|z|=r} \frac{1}{z^2} dz = 0$$

但显然 $f(z)=\frac{1}{z^2}$ 在 z=0 处不解析。

17.设 $f(z)$与 $g(z)$在区域 D 内处处解析，C 为 D 内任何一条简单光滑闭曲线，它的内部全属于 D。如果 $f(z)=g(z)$在 C 上所有点都成立，试证在 C 的内部所有点处 $f(z)=g(z)$也成立。

证　因 $f(z), g(z)$在 D 内处处解析故在 C 上及其内部也处处解析，设 z_0 为 C 的内部的任一点，则由 Cauchy 积分公式有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz, \qquad g(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz\ ,$$

又因在 C 上 $f(z)=g(z)$，故

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz\ ,$$

从而 $f(z_0)=g(z_0)$,由 z_0 的任意性，在 C 的内部均有 $f(z)=g(z)$。

18．设区域 D 是圆环域，$f(z)$ 在 D 内解析，以圆环的中心为中心作正向圆周 K_1与K_2，K_2包含K_1，z_0 为 K_1, K_2 之间任一点，试证（3.5.1）仍成立，但C要换成$K_1^- + K_2$(见图).

证明　　参照 78 页闭路变形定理的证明方法。

19. 设 $f(z)$在 单连通区域 D 内解析, 且不为零, C 为 D 内任何一条简单光滑闭曲线, 问积分 $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 是否为零？为什么？

解　等于零。因 $f(z)$ 在 D 内解析，故 $f(z)$ 具有各阶导数且仍为解析函数，从而 $f'(z)$在 D 内也解析，又因在 D 内 $f(z)\neq 0$，故 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 D 内解析，从而在 C 上及 C 的内部也解析，于是由 Cauchy-Goursat 定理，有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0\ 。$$

20．试说明柯西－古萨基本定理中的 C 为什么可以不是简单闭曲线？

21．设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 内的任意一条正向简单闭曲线，证明：对在 D 内但不在 C 上的任意一点 z_0，等式：$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$ 成立。

证明　　利用 Cauchy 积分公式，有 $\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f'(z)|_{z=z_0} = 2\pi i f'(z_0)$；而由高阶导数公式 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(z)|_{z=z_0} = 2\pi i f'(z_0)$，故所证等式成立。

22. 如果 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 都具有二阶连续偏导数, 且适合拉普拉斯方程, 而 $s=\varphi_y-\psi_x$，$t=\varphi_x+\psi_y$ 那么 $s+\mathrm{i}t$ 是 $x+\mathrm{i}y$ 的解析函数。

证明　　由 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 都具有二阶连续偏导数，而 $s=\varphi_y-\psi_x$，$t=\varphi_x+\psi_y$ 知，s,t 具有一阶连续的偏导数，在证 s,t 满足 C－R 方程即可。注意 $\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0$，$\psi_{xx}+\psi_{yy}=0$，则

$s_x=\varphi_{yx}-\psi_{xx}=\varphi_{xy}+\psi_{yy}=t_y$；$s_y=\varphi_{yy}-\psi_{xy}=-\varphi_{xx}-\psi_{yx}=-t_x$，故 s,t 满足 C－R 方程，即

$s+\mathrm{i}t$ 是 $x+\mathrm{i}y$ 的解析函数。

23．设 u 为区域 D 内的调和函数及 $f=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}$，问 f 是不是 D 内的解析函数？为什么？

解　f 是 D 内的解析函数。因 u 为区域 D 内的调和函数，故 u_x 和 $-u_y$ 在 D 内有一阶连续的偏导数。又 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_x=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_y$；$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_y=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\left(-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_x$，即满足 C－R 方程。

24．函数 $v=x+y$ 是 $u=x+y$ 的共轭调和函数吗？为什么？

解　不是。因 $u+\mathrm{i}v$ 不能构成一解析函数。

25．设 u 和 v 都是调和函数，如果 v 是 u 的共轭调和函数，那么 u 也是 v 的共轭调和函数。这句话对吗？为什么？

解　不对。参考 27 题的第二问。

26．证明：一对共轭调和函数的乘积仍是调和函数。

证明　设 v 是 u 的共轭调和函数，则 $u_{xx}+u_{yy}=0$，$v_{xx}+v_{yy}=0$，$u_x=v_y$，$u_y=-v_x$。又

$(uv)_{xx}=u_{xx}v+2u_xv_x+uv_{xx}$，$(uv)_{yy}=u_{yy}v+2u_yv_y+uv_{yy}$，故 $(uv)_{xx}+(uv)_{yy}=0$，即一对共轭调和函数的乘积仍是调和函数。

27．如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数，试证：

1）$\overline{\mathrm{i}f(z)}$ 也是解析函数；　2）$-u$ 是 v 的共轭调和函数；

3）$\dfrac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial y^2}=4(u_x^2+v_x^2)=4|f'(z)|^2$。

证明　1）$\overline{\mathrm{i}f(z)}=v-\mathrm{i}u$，而 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数，故 u,v 满足 C－R 方程，进而 $v_x=(-u)_y$，$v_y=-(-u)_x$。故 $\overline{\mathrm{i}f(z)}$ 也是解析函数。

2）由 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数，$\overline{\mathrm{i}f(z)}=v-\mathrm{i}u$。故 $-u$ 是 v 的共轭调和函数。

3）
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial y^2}&=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2+v^2)\\&=2u_x^2+2v_x^2+2u_y^2+2v_y^2+2u(u_{xx}+u_{yy})+2v(v_{xx}+v_{yy})\\&=4(u_x^2+v_x^2)=4|f'(z)|^2\end{aligned}$$

28．证明：$u=x^2-y^2$ 和 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 都是调和函数，但是 $u+\mathrm{i}v$ 不是解析函数。

证明　$u_x=2x$，$u_y=-2y$，$v_x=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$v_y=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，

$$v_{xx}=\frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^3}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},\quad v_{yy}=\frac{8y^3}{(x^2+y^2)^3}-\frac{6y}{(x^2+y^2)^2}，则$$

$$u_{xx}+u_{yy}=2+(-2)=0,\quad v_{xx}+v_{yy}=\frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^3}+\frac{8y^3}{(x^2+y^2)^3}-\frac{8y}{(x^2+y^2)^2}=0。$$

29．求具有下列形式的所有调和函数u：1）$u=f(ax+by),a与b为常数$；2）$u=f\left(\frac{y}{x}\right)$。

解　1）由$u_x=af',u_{xx}=a^2f'',u_{yy}=b^2f''$，而$u_{xx}+u_{yy}=0$，则$f''=0$，即$f=c_1(ax+by)+c_2$。

2）由$u_x=-\frac{y}{x^2}f',u_{xx}=2\frac{y}{x^3}f'+\frac{y^2}{x^4}f'',u_y=\frac{1}{x}f',u_{yy}=\frac{1}{x^2}f''$，而$u_{xx}+u_{yy}=0$，则

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)f''+2\frac{y}{x}f'=0,\text{即}f=c_1\arctan\frac{y}{x}+c_2。$$

30．由下列各已知调和函数求解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$：

1）$u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$；　　2）$v=\frac{y}{x^2+y^2},f(2)=0$；

3）$u=2(x-1)y,f(2)=-\mathrm{i}$；　　4）$v=\arctan\frac{y}{x},x>0$。

解　1）$u_x=3x^2+6xy-3y^2,u_y=3x^2-6xy-3y^2$，则

$$f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=3x^2+6xy-3y^2-\mathrm{i}(3x^2-6xy-3y^2)=3(1-i)z^2，\text{故}$$

$$f(z)=(1-i)z^3+\mathrm{i}c,c\in\mathbb{R}；$$

2）$f'(z)=v_y+\mathrm{i}v_x=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\mathrm{i}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2-2\mathrm{i}xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\bar{z}^2}{(z\bar{z})^2}=\frac{1}{z^2}$，故

$$f(z)=-\frac{1}{z}+c,\text{又}f(2)=0,\ \text{则}f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}；$$

3）$f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=2y-2\mathrm{i}(x-1)=-2\mathrm{i}(x-1+\mathrm{i}y)=-2\mathrm{i}(z-1)$，故

$$f(z)=-\mathrm{i}(z-1)^2+c,\text{又}f(2)=-\mathrm{i},\ \text{则}f(z)=-\mathrm{i}(z-1)^2；$$

4）$f'(z)=v_y+\mathrm{i}v_x=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{1}{z}$，故$f(z)=\ln z+c,c\in\mathbb{R}$。

31．设$v=e^{px}\sin y$，求p的值使v为调和函数，并求出解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$。

解　$v_{xx}+v_{yy}=e^{px}\sin y(p^2-1)=0$，知$p=\pm1$。当$p=1$时，$f(z)=e^z+c,c\in\mathbb{R}$；当$p=-1$时，$f(z)=-e^{-z}+c,c\in\mathbb{R}$。

32．如果$u(x,y)$是区域D内的调和函数，C为D内以z_0为中心的任何一个正向圆周：$|z-z_0|=r$，它的内部完全含于D。试证：

1）$u(x,y)$在(x_0,y_0)的值等于$u(x,y)$在圆周C上的平均值，即

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)d\varphi；$$

2）$u(x,y)$在(x_0,y_0)的值等于$u(x,y)$在圆域$|z-z_0|\le r_0$上的平均值，即

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)rd\varphi dr。$$

证明　1）由平均值公式（P86）

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+R\,\mathrm{e}^{i\theta})d\theta$$

只取其实部有： $u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)d\varphi$；

2）由 1）知 $\dfrac{1}{\pi r_0^2}\displaystyle\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)rd\varphi dr=\dfrac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}2\pi u(x_0,y_0)rdr=u(x_0,y_0)$。

33．如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的正向圆周：$|z|=R$，它的内部完全含于 D。设 z 为 C 内一点，并令 $\tilde{z}=R^2/\overline{z}$，试证

$$\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}d\zeta=\oint_C\frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z}-R^2}d\zeta=0。$$

证明　因 z 为 C 内一点，$|\tilde{z}|=|R^2/\overline{z}|=R^2/|z|=\dfrac{R}{|z|}R>R$，故 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}$ 在 C 及其内部解析。由 Cauchy 基本定理知：$\displaystyle\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}d\zeta=\oint_C\frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z}-R^2}d\zeta=0$。

34．根据柯西积分公式与习题 33 的结果，证明

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\left[\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}}{R^2-\zeta\overline{z}}\right]f(\zeta)d\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(R^2-z\overline{z})f(\zeta)}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}d\zeta,$$

其中 C 为 $|z|=R|$.

证明　由柯西积分公式有：　$f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$；而由 33 题结果知 $\displaystyle\oint_C\frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z}-R^2}d\zeta=0$，故将这两式相减即得。

35 如果令 $\zeta=R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},z=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，验证

$$\frac{d\zeta}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}=\frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}=\frac{\mathrm{i}d\theta}{\mathrm{R}^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

并由 34 题的结果，证明

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta.$$

取其实部，得

$$u(x,y)=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(R\cos\theta,R\sin\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

这个积分称为泊松（Poisson）积分。通过这个公式，一个调和函数在一个圆内得值可用它在圆周上的值来表示。

证明　$\dfrac{R^2}{\zeta}=R\dfrac{R}{\zeta}=R\cdot e^{-\mathrm{i}\theta}=\overline{\zeta}$，故 $\dfrac{d\zeta}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}=\dfrac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\dfrac{R^2}{\zeta}-\overline{z})}=\dfrac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}$.又

$\dfrac{d\zeta}{\zeta}=\dfrac{iR\cdot e^{i\theta}d\theta}{R\cdot e^{i\theta}}=id\theta$，$(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})=R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2$，故

$$\frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}=\frac{\mathrm{i}d\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}。$$

又由 34 题知 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\oint_C\frac{(R^2-z\overline{z})f(\zeta)}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{(R^2-r^2)f(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})d\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$。

36．设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 内及 C 上解析，且不恒为常数，n 为正整数.

1）试用柯西积分公式证明：

$$[f(z)]^n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta\,.$$

2）设 M 为 $|f(\zeta)|$ 在 C 上的最大值，L 为 C 的长，d 为 z 到 C 的最短距离，试用积分估值公式（3.1.10）于 1）中的等式，证明不等式：

$$|f(z)|\le M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{1/n}.$$

3）令 $n\to+\infty$，对 2）中的不等式取极限，证明：$|f(z)|\le M$。这个结果表明：在闭区域内不恒为常数的解析函数的模的最大值只能在区域的边界上取得（最大模原理）。

证明　1）在柯西积分公式中将里面的函数 $f(z)$ 换成 $[f(z)]^n$ 即得。

2）由 1）知 $|f(z)|^n=|[f(z)]^n|\le\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\oint_C\left|\frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}\right|ds\le\frac{L}{2\pi d}M^n$，故

$$|f(z)|\le\left(\frac{L}{2\pi d}M^n\right)^{1/n}=M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{1/n}。$$

3）对 2）中的不等式取极限（$n\to+\infty$），即得。

习题四解答

1．下列数列$\{\alpha_n\}$是否收敛？如果收敛，求出它们的极限：

1） $\alpha_n=\dfrac{1+n\mathrm{i}}{1-n\mathrm{i}}$； 2） $\alpha_n=\left(1+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)^{-n}$；3） $\alpha_n=(-1)^n+\dfrac{\mathrm{i}}{n+1}$；4） $\alpha_n=e^{-n\pi\mathrm{i}/2}$； 5） $\alpha_n=\dfrac{1}{n}e^{-n\pi\mathrm{i}/2}$

解　1）$\alpha_n=\dfrac{1+n\mathrm{i}}{1-n\mathrm{i}}=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}+\dfrac{2n}{1+n^2}\mathrm{i}$，又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{1+n^2}=-1,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{1+n^2}=0$，故$\alpha_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=-1$

2） $\alpha_n=\left(1+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)^{-n}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}e^{-i\theta}\right)^n$，又$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}e^{-i\theta}\right)^n=0$，故$\alpha_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

3）由于α_n的实部$\left\{(-1)^n\right\}$发散，故α_n发散

4）由于$\alpha_n=e^{-n\pi\mathrm{i}/2}=\cos\dfrac{n\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\dfrac{n\pi}{2}$，其实部、虚部数列均发散，故$\alpha_n$发散

5） $\alpha_n=\dfrac{1}{n}e^{-n\pi\mathrm{i}/2}=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$，知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$，故$\alpha_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

2．证明：

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\begin{cases}0, & |\alpha|<1,\\ \infty, & |\alpha|>1,\\ 1, & \alpha=1,\\ \text{不存在}, & |\alpha|=1,\alpha\neq1.\end{cases}$$

3．判断下列级数的绝对收敛性与收敛性：

1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$；　2） $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{\ln n}$；　3） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(6+5\mathrm{i})^n}{8^n}$； 4） $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos\mathrm{i}n}{2^n}$。

解　1）由$\mathrm{i}^n=\cos\dfrac{n\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{n\pi}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$为收敛的交错项实级数，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$收敛，但$\left|\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}\right|$发散，原级数条件收敛；

2）与 1）采用同样的方法，并利用 $\frac{1}{\ln n} \ge \frac{1}{n} (n \ge 2)$；

3）因 $\left|\frac{(6+5\mathrm{i})^n}{8^n}\right| = \left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(6+5\mathrm{i})^n}{8^n}$ 绝对收敛；

4）因 $\cos \mathrm{i}n = \mathrm{ch}n$，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{ch}n}{2^n} \ne 0$，故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos \mathrm{i}n}{2^n}$ 发散。

4．下列说法是否正确？为什么？

（1）每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛；

（2）每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点；

（3）每一个在 z_0 连续的函数一定可以在 z_0 的邻域内展开成 Taylor 级数。

解（1）不对。如 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在收敛圆 $|z| < 1$ 内收敛，但在收敛圆周 $|z| = 1$ 上并不收敛；

（2）不对。幂级数的和函数在收敛圆内为解析函数，不能有奇点；

(3)不对。如 $f(z) = \bar{z}$ 在全平面上连续,但它在任何点的邻域内均不能展开成 Taylor 级数。

5.幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛而在 $z=3$ 发散?

解　不能。因如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$ 在 $z=0$ 收敛，则由 Abel 定理其收敛半径 $R \ge |0-2| = 2$，而 $|3-2| = 1 < 2$ 即 $z=3$ 在其收敛圆 $|z-2| < 2$ 内，故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$ 在 $z=3$ 收敛，矛盾。

6．求下列幂级数的收敛半径：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$ (p为正整数)；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n} z^n$；　（3）$\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n$；　（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)(z-1)^n$；　（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln \mathrm{i}n}\right)^n$。

解　（1）$R = 1/\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p} = 1$；

（2） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^n}{n+1}=0$；

（3） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}1/|1+\mathrm{i}|=1/\sqrt{2}$；

（4） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$；

（5） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\mathrm{ch}\left(\dfrac{i}{n}\right)\right|}=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos\dfrac{1}{n}}=1$；

（6） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}|\ln \mathrm{i}n|=\infty$；

7．如果$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$的收敛半径为 R，证明级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}\,c_n)z^n$的收敛半径$\geq R$。

证明　对于圆$|z|<R$内的任意一点 z，由已知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$绝对收敛即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n||z|^n$收敛，又因$|\mathrm{Re}\,c_n|\leq|c_n|$，从而$|\mathrm{Re}\,c_n||z|^n\leq|c_n||z|^n$，故由正项级数的比较判别法$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\mathrm{Re}\,c_n||z|^n$也收敛即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}\,c_n)z^n$在$|z|<R$内绝对收敛，于是其收敛半径$\geq R$。

8．证明：如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$存在（$\neq\infty$），下列三个幂级数有相同的收敛半径

$$\sum c_nz^n;\qquad \sum\frac{c_n}{n+1}z^{n+1};\qquad \sum nc_nz^{n-1}。$$

证明　　设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\rho$，则幂级数$\sum c_nz^n$的收敛半径为$1/|\rho|$；

幂级数$\sum\dfrac{c_n}{n+1}z^{n+1}$的收敛半径为$R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n/(n+1)}{c_{n+1}/(n+2)}\right|=1/|\rho|$；

幂级数$\sum nc_nz^{n-1}$的收敛半径为$R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{nc_n}{(n+1)c_{n+1}}\right|=1/|\rho|$；

故以上三个幂级数有相同的收敛半径。

9．设级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$收敛，而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|$发散，证明$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$的收敛半径为 1。

证明　由级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n$收敛，知幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$在$z=1$处收敛，由 Abel 定理知$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$的收敛半径$R\ge 1$；而$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$发散知$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n z^n|$在$|z|=1$处发散，故$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$的收敛半径$R\le 1$。所以$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$的收敛半径为 1。

10．如果级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$在它的收敛圆的圆周上一点$z_0$处绝对收敛，证明它在收敛圆所围的闭区域上绝对收敛。

证明　由 Abel 定理知$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$在其收敛圆内绝对收敛，再证其在圆周上绝对收敛即可。在圆周上任取一点η，$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n\eta^n|=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n z_0^n|$，知$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\eta^n$绝对收敛，故结论成立。

11．把下列各函数展开成 z 的幂级数，并指出它们的收敛半径。

（1）$\dfrac{1}{1+z^3}$；（2）$\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$；（3）$\cos z^2$；（4）$\operatorname{sh} z$；

（5）$\operatorname{ch} z$；（6）$e^{z^2}\sin z^2$；（7）$e^{\frac{z}{z-1}}$；（8）$\sin\dfrac{1}{1-z}$

解　（1）由$\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots,|z|<1$，故

$$\frac{1}{1+z^3}=1-z^3+z^6-z^9+\ldots+(-1)^n z^{3n}+\ldots,\quad |z|<1,$$

而收敛半径 R=1；

（2）因$\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots,\quad |z|<1,$

故
$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4+\ldots+(-1)^n z^{2n}+\ldots,\quad |z|<1,$$

又因
$$\left(\frac{1}{1+z^2}\right)'=\frac{-2z}{(1+z^2)^2},$$

$$\frac{1}{(1+z^2)^2}=-\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)'=1-2z^2+3z^4-4z^6+\ldots,\quad |z|<1,$$

而$R=1$；

（3）因$\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\ldots,|z|<\infty$，故　$\cos z^2=1-\dfrac{z^4}{2!}+\dfrac{z^8}{4!}-\dfrac{z^{12}}{6!}+\cdots$

$|z|<+\infty$ 而其收敛半径 $R=+\infty$；

（4）因 $\operatorname{sh} z=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}, e^{z}=1+z+\dfrac{z^{2}}{2!}+\dfrac{z^{3}}{3!}+\ldots,|z|<+\infty,\ e^{-z}=1-z+\dfrac{z^{2}}{2!}-\dfrac{z^{3}}{3!}+\ldots,|z|<+\infty,$

故 $\qquad \operatorname{sh} z=z+\dfrac{z^{3}}{3!}+\dfrac{z^{3}}{5!}+\ldots,|z|<+\infty,\qquad$ 而收敛半径 $R=+\infty$；

（5）$\operatorname{ch} z=1+\dfrac{z^{2}}{2!}+\dfrac{z^{4}}{4!}+\ldots,|z|<+\infty,$

（6）因 $e^{z^{2}}=1+z^{2}+\dfrac{z^{4}}{2!}+\dfrac{z^{6}}{3!}+\ldots,|z|<+\infty,\ \sin z^{2}=z^{2}-\dfrac{z^{6}}{3!}+\dfrac{z^{10}}{5!}+\ldots,|z|<+\infty,$

故 $e^{z^{2}}\sin z^{2}=\left(1+z^{2}+\dfrac{z^{4}}{2!}+\dfrac{z^{6}}{3!}+\ldots\right)\cdot\left(z^{2}-\dfrac{z^{6}}{3!}+\dfrac{z^{10}}{5!}+\ldots\right)=z^{2}+z^{4}+\dfrac{z^{6}}{3}+\ldots,|z|<+\infty,$

而收敛半径 $R=+\infty;$

（7）因 $e^{z}=1+z+\dfrac{z^{2}}{2!}+\dfrac{z^{3}}{3!}+\ldots,|z|<+\infty,$

$$\frac{z}{z-1}=-z-z^{2}-z^{3}-\ldots=-\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1},|z|<1,$$

故 $e^{\frac{z}{z-1}}=1-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}+\frac{(\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1})^{2}}{2!}-\frac{(\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1})^{3}}{3!}+\cdots=1-z-\frac{z^{2}}{2!}-\frac{z^{3}}{3!}+\cdots,|z|<1,$

而收敛半径 R=1。

（8）因 $\sin\dfrac{1}{1-z}=\sin\left(1+\dfrac{z}{1-z}\right)=\sin 1\cos\dfrac{z}{1-z}+\cos 1\sin\dfrac{z}{1-z},$

$$\frac{z}{1-z}=z+z^{2}+z^{3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1},|z|<1,$$

故 $\sin\dfrac{z}{1-z}=\left(z+z^{2}+z^{3}+\ldots\right)-\dfrac{1}{3!}\left(z+z^{2}+z^{3}+\ldots\right)^{3}+\ldots=z+z^{2}+\dfrac{5}{6}z^{3}+\ldots,\quad |z|<1,$

$\cos\dfrac{z}{1-z}=1-\dfrac{1}{2}\left(z+z^{2}+z^{3}+\ldots\right)^{2}-\dfrac{1}{4!}\left(z+z^{2}+z^{3}+\ldots\right)^{4}+\ldots=1-\dfrac{1}{2}z^{2}-z^{3}+\ldots,\quad |z|<1,$

故 $\quad \sin\dfrac{1}{1-z}=\sin 1\left(1-\dfrac{1}{2}z^{2}-z^{3}+\ldots\right)+\cos 1\left(z+z^{2}+\dfrac{5}{6}z^{3}+\ldots\right)$

$$=\sin 1+(\cos 1)z+\left(\cos 1-\frac{1}{2}\sin 1\right)z^{2}+\left(\frac{5}{6}\cos 1-\sin 1\right)z^{3}+\cdots,|z|<1,$$

而收敛半径 R=1。

12．求下列各函数在指定点 z_0 处的 Taylor 展开式，并指出它们的收敛半径：

(1) $\frac{z-1}{z+1}$， $z_0=1$ (2) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$， $z_0=2$

(3) $\frac{1}{z^2}$， $z_0=-1$ (4) $\frac{1}{4-3z}$， $z_0=1+\mathrm{i}$

(5) $\tan z$， $z_0=\pi/4$ (6) $\arctan z$， $z_0=0$

解 (1) 因 $\frac{z-1}{z+1}=(z-1)\frac{1}{(z-1+2)}=\frac{z-1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$

及 $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots,|z|<1$。故

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{z-1}{2}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1}+\cdots\right]$$

$$=\frac{z-1}{2}-\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(z-1)^n, \qquad |z-1|<2$$

于是收敛半径 R=2。

(2) 因 $\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{z+2}-\frac{2}{z+1}\right)=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}$

及 $$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4+(z-2)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}}=\frac{1}{4}\left[1-\frac{z-2}{4}+\left(\frac{z-2}{4}\right)^2-\cdots\right], \qquad |z-2|<4$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{3+(z-2)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-2}{3}+\left(\frac{z-2}{3}\right)^2-\cdots\right], \qquad |z-2|<3$$

故原式 $=\frac{2}{4}\left[1-\frac{z-2}{2^2}+\frac{1}{2^{2\cdot 2}}(z-2)^2-\cdots\right]-\frac{1}{3}\left(1-\frac{z-2}{3}+\frac{(z-2)^2}{3^2}-\cdots\right)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{2n}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}(z-2)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n$$ ， $|z-2|<3$，而 $R=3$。

(3) 因 $\frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'$ 及 $\frac{1}{z}=-\frac{1}{1-(z+1)}=-\left[1+(z+1)+(z+1)^2+\cdots\right]$， $|z+1|<1$，

故 $$\frac{1}{z^2}=1+2(z+1)+\cdots+n(z+1)^{n-1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n$$ ， $|z+1|<1$，

而 R=1。

（4）因 $$\frac{1}{4-3z}=\frac{1}{4-3[z-(1+\mathrm{i})]-3-3\mathrm{i}}=\frac{1}{1-3\mathrm{i}-3[z-(1+\mathrm{i})]}$$

$$=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}\frac{1}{1-\frac{3}{1-3\mathrm{i}}[z-(1+\mathrm{i})]}=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}\left\{1+\frac{3}{1-3\mathrm{i}}[z-(1+\mathrm{i})]+\left(\frac{3}{1-3\mathrm{i}}\right)^2[z-(1+\mathrm{i})]^2+\cdots\right\},$$

其中$\left|\frac{3}{1-3\mathrm{i}}[z-(1+\mathrm{i})]\right|<1$，故

$$\frac{1}{4-3z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3\mathrm{i})^{n+1}}[z-(1+\mathrm{i})]^n,\quad |z-(1+\mathrm{i})|<\left|\frac{1-3\mathrm{i}}{3}\right|=\frac{\sqrt{10}}{3},$$

且收敛半径 $R=\frac{\sqrt{10}}{3}$。

（5）因 $\tan z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2}{15}z^5+\cdots,|z|<\frac{\pi}{2}$，又 $\tan z=\frac{1+\tan(z-\frac{\pi}{4})}{1-\tan(z-\frac{\pi}{4})}$，故

$\tan z=[1+\tan(z-\frac{\pi}{4})](1+\tan(z-\frac{\pi}{4})+\tan^2(z-\frac{\pi}{4})+\cdots)$

$=1+2(z-\frac{\pi}{4})+2(z-\frac{\pi}{4})^2+\frac{8}{3}(z-\frac{\pi}{4})^3+\cdots,$ 且收敛半径 $R=\frac{\pi}{4}$。

（6）因 $(\arctan z)'=\frac{1}{1+z^2}$，又 $\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-\cdots,|z|<1$，故

$$\arctan z=\int_0^z\frac{1}{1+z^2}dz=\int_0^z\sum_0^{\infty}(-1)^n z^{2n}dz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\quad |z|<1,$$

且收敛半径 $R=1$。

13．为什么在区域 $|z|<R$ 内解析且在区间 $(-R,R)$ 取实数值的函数 $f(z)$ 展开成 z 的幂级数时，展开式的系数都是实数?

解　$f(z)$ 展开成 z 的幂级数时，展开式的系数为 $c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，而函数 $f(z)$ 在区间 $(-R,R)$ 取实数值，可知 $f^{(n)}(0)$ 也为实数。故展开式的系数都是实数。

14．证明在 $f(z)=\cos(z+\frac{1}{z})$ 以 z 的各幂表出的洛朗展开式中的各系数为

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

证明　$f(z)=\cos(z+\frac{1}{z})$ 在复平面内出去点 $z=0$ 外解析, 所以在 $0<|z|<+\infty$ 内可展开成洛朗级数 $\cos(z+\frac{1}{z})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$，其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{\cos(z+\frac{1}{z})}{z^{n+1}}dz,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots,0<r<+\infty)$$

与要证明式子中c_n的表示式相比较，我们取$r=1$并利用复积分的计算公式可得

$$c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\cos(z+\frac{1}{z})}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta})}{e^{\mathrm{i}n\theta}}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$$

因$\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta$，而$\cos(2\cos\theta)\sin n\theta$为$\theta$的奇函数。

15．下列结论是否正确?

用长除法 $\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+\cdots$，$\frac{z}{z-1}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots$

因为$\frac{z}{1-z}+\frac{z}{z-1}=0$，所以$\cdots+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\cdots=0$。

解　不正确。因为长除法所得到的两式，使它们成立的z值的范围不同（分别为$|z|<1$；$|z|>1$），因此不能相加。

16．把下列各函数在指定的圆环域内展开成 Laurent 级数。

（1）$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$，$1<|z|<2$；

（2）$\frac{1}{z(1-z)^2}$，$0<|z|<1,0<|z-1|<1$；

（3）$\frac{1}{(z-1)(z-2)},0<|z-1|<1,1<|z-2|<+\infty$

（4）$e^{\frac{1}{1-z}}$，$1<|z|<+\infty$

（5）$\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}$，在以 i 为中心的圆环域内

（6）$\sin\frac{1}{1-z}$，$0<|z-1|<+\infty$

（7）$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)},3<|z|<4,4<|z|<+\infty$

解　（1）因
$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=\frac{-\frac{1}{5}z}{z^2+1}+\frac{-\frac{2}{5}}{z^2+1}+\frac{\frac{1}{5}}{z-2}$$

故
$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=-\frac{1}{5}z\cdot\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}-\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{5}z\cdot\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)z^{\frac{1}{2n}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}}-\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2(n+1)}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$=\cdots+\frac{2}{5}\frac{1}{z^4}+\frac{1}{5}\frac{1}{z^3}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^2}-\frac{1}{5}\frac{1}{z}-\frac{1}{10}-\frac{z}{20}-\frac{z^2}{40}-\frac{z^3}{80}-\cdots\ 1<|z|<2\ ;$$

（2）在$0<|z|<1$内，

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{z}\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right)^2=\frac{1}{z}\left(1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}+2+3z+\cdots+(n+1)z^{n-1}+\cdots=\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n$$

在$0<|z-1|<1$内，

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{(1-z)^2}\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{(1-z)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

$$=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\ ;$$

（3） $0<|z-1|<1$内，

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-1)-1}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

在$1<|z-2|<+\infty$内

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)+1}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}$$

$$=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-2)^{n+1}}=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(z-2)^n}$$

（4）在$1<|z|<+\infty$内，因

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\frac{-1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

故 $e^{\frac{1}{1-z}}=1-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^3+\cdots$；

$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}+\cdots$$

（5）在$0<|z-\mathrm{i}|<1$内，因$\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1},|z|<1$，故

$$\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{\mathrm{i}^2(z-\mathrm{i})(1+\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(z-\mathrm{i})^{n-2}}{\mathrm{i}^{\mathrm{n+1}}}$$

在$1<|z-\mathrm{i}|<+\infty$内，因$\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^3(1+\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}})^2}$，故

$$\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\mathrm{i}^{n-1}}{(z-\mathrm{i})^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+1)\mathrm{i}^{n}}{(z-\mathrm{i})^{n+3}}$$

（6）因$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},|z|<+\infty$,故

$$\sin\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(1-z)^{2n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}},\qquad 0<|z-1|<+\infty$$

（7）在$3<|z|<4$内，因$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=(z^2-3z+2)(\frac{1}{3-z}-\frac{1}{4-z})$，故

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=-(z^2-3z+2)(\frac{1}{z(1-\frac{3}{z})}+\frac{1}{4(1-\frac{z}{4})})$$

$$=-(z^2-3z+2)(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}})=1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n}-2\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

在$4<|z|<+\infty$内，$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=(z^2-3z+2)(\frac{1}{z-4}-\frac{1}{z-3})$

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=(z^2-3z+2)(\frac{1}{z(1-\frac{4}{z})}-\frac{1}{z(1-\frac{3}{z})})$$

$$=(z^2-3z+2)(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}})=1+\sum_{n=1}^{\infty}(3\cdot 2^{2n-1}-2\cdot 3^{n-1})z^{-n}$$

17. 函数$\tan\frac{1}{z}$能否在圆环域$0<|z|<R$（$0<R<+\infty$）内展开成洛朗级数？为什么？

解　不能展成洛朗级数。因在圆环域$0<|z|<R$内$\tan\frac{1}{z}$不解析。

18. 如果k为满足关系$k^2<1$的实数，证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}；$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos(n+1)\theta=\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}。$$

证明　$\frac{1}{z-k}$在$|z|>k$内为解析函数，将其展成洛朗级数有

$$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{z(1-\frac{k}{z})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}$$

在上式中令$z=e^{\mathrm{i}\theta}$，

$\frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{(e^{\mathrm{i}\theta})^{n+1}}$，即$\frac{\cos\theta-k-\mathrm{i}\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(k^n\cos(n+1)\theta-\mathrm{i}k^n\sin(n+1)\theta\right)$

分离实部和虚部即得结论。

19. 如果C为正向圆周$|z|=3$，求积分$\int_C f(z)dz$的值. 设$f(z)$为

1）$\frac{1}{z(z+2)}$；　2) $\frac{z+2}{(z+1)z}$；　3) $\frac{1}{z(z+1)^2}$；　4) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$。

解

$$\int_C f(z)dz=2\pi\mathrm{i}c_{-1}$$

1）$\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z(1+\frac{2}{z})}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}\right),|z|>2$。

故$\int_C f(z)dz=0$。

2) $\frac{z+2}{(z+1)z}=(z+2)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}\right)=(z+2)\left(\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}\right),|z|>1$

故$\int_C f(z)dz=2\pi\mathrm{i}$。

3) $\frac{1}{z(z+1)^2}=\frac{1}{z^3(1+\frac{1}{z})^2}=\frac{1}{z^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{z^{n-1}},|z|>1$。故$\int_C f(z)dz=0$。

4) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}=z\left(\dfrac{1}{z(1+\frac{1}{z})}-\dfrac{1}{z(1+\frac{2}{z})}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{z^n},|z|>2$

故$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}$。

20. 试求积分$\oint\limits_C(\sum\limits_{n=-2}^{\infty}z^n)dz$的值，其中$C$为单位圆$|z|=1$内的任何一条不经过原点的简单闭曲线。

解 $\sum\limits_{n=-2}^{\infty}z^n=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{1-z},0<|z|<1$。而$C$为单位圆$|z|=1$内的任何一条不经过原点的简单闭曲线，故$\oint\limits_C(\sum\limits_{n=-2}^{\infty}z^n)dz=2\pi\mathrm{i}c_{-1}=2\pi\mathrm{i}$。

习题五解答

1、下列函数有些什么奇点？如果是极点，指出它的级。

（1）$\dfrac{1}{z\left(z^2+1\right)^2}$；（2）$\dfrac{\sin z}{z^3}$；（3）$\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$；

（4）$\dfrac{\ln(z+1)}{z}$；（5）$\dfrac{z}{\left(1+z^2\right)\left(1+e^{\pi z}\right)}$；（6）$e^{\frac{1}{1-z}}$；

（7）$\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$；（8）$\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$；（9）$\dfrac{1}{\sin z^2}$.

解（1）$f(z)=\dfrac{1}{z\left(z^2+1\right)^2}$是有理函数，故奇点只是极点，满足$z\left(z^2+1\right)^2$=0，故$z=0$，与$z=\pm\mathrm{i}$为其奇点，$z=0$为一级极点，而$z=\pm\mathrm{i}$为其二级极点。

（2）因$\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin z}{z^3}=\infty$则$z=0$为其极点。再确定极点的级，有两种方法：

a. $z=0$为$\sin z$为的一级零点；而$z=0$为z^3的三级零点。故$z=0$为$\dfrac{\sin z}{z^3}$的二级极点。

b. $\lim\limits_{z\to0}z^2\dfrac{\sin z}{z^3}=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin z}{z}=1\neq0$，故$z=0$为其二级极点，

（3）原式=$\dfrac{1}{(z^2-1)(z-1)}=\dfrac{1}{(z-1)^2(z+1)}$，故$z=1$为其二级极点，而$z=-1$为一级极点。

（4）a. $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$，$0<|z|<1$，$\dfrac{\ln(1+z)}{z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{n+1}$无负幂项，故$z=0$为其可去奇点。

b. $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{1}{(1+z)}=1$，故$z=0$为可去奇点。

（5）由$1+z^2=0$得$z=\pm\mathrm{i}$为$\left(1+z^2\right)$的一级零点，由$1+e^{\pi z}=0$得$z_k=(2k+1)\mathrm{i}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为$\left(1+e^z\right)$的零点，又$\left(1+e^{\pi z}\right)'\Big|_{z_k}=\pi e^{\pi z_k}=-\pi\neq0$，所以$z_k$为$\left(1+e^z\right)$的一级零点，因此，$z=\pm\mathrm{i}$为二级极点；$z_k=(2k+1)\mathrm{i}$，$(k=1,\pm2,\cdots)$为一级极点。

（6）由$e^{\frac{1}{1-z}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}$，知$z=1$为本性奇点。

（7）因$e^z-1=z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{(n+1)!}=z(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{3!}+\cdots)$，故$z=0$为$z^2(e^z-1)$的三级零点，因而是$\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$的三级极点，而$z=2k\pi\mathrm{i},(k=\pm1,\pm2,\cdots)$均为一级极点。

（8）由$z^n+1=0$，$z^n=-1$，得$z_k=e^{\mathrm{i}\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k=0,1,\cdots n-1)$为原式一级极点。

（9）$\sin z^2=0\Rightarrow z=\pm\sqrt{k\pi},z=\pm\mathrm{i}\sqrt{k\pi}$，$k=0,1,2,\cdots$由

$\left(\sin z^2\right)'\big|_{z^2=k\pi}=2z\cos z^2\big|_{z^2=k\pi}=\begin{cases}0 & k=0\\ \neq 0 & k\neq 0\end{cases}$，$(\sin z^2)''\big|_{z=0}=2$，知 $z=0$ 是 $\dfrac{1}{\sin z^2}$ 的二级极点，$z=\pm\sqrt{k\pi}$，$z=\pm \mathrm{i}\sqrt{k\pi}$（$k=1,2,3,\cdots$）均为 $\dfrac{1}{\sin z^2}$ 一级极点。

2．求证：如果 z_0 是 $f(z)$ 是 m（$m>1$）级零点，那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点。

证　由题知：$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z_0)\neq 0$，则有

$$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)=(z-z_0)^{m-1}\left[m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)\right]$$

故 z_0 是 $f'(z)$ 的 m-1 级零点。

3．验证：$z=\dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的一级零点。

解　由 $\operatorname{ch}\dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，$(\operatorname{ch} z)'\big|_{z=\frac{\pi \mathrm{i}}{2}}=\operatorname{sh}\dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}=\mathrm{i}$，知 $z=\dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的一级零点。

4．$z=0$ 是函数 $(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{-2}$ 的几级极点?

解　$(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)\big|_{z=0}=0,(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)'\big|_{z=0}=(\cos z+\operatorname{ch} z-2)\big|_{z=0}=0$，

$(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)''\big|_{z=0}=(-\sin z+\operatorname{sh} z)\big|_{z=0}=0,(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)'''\big|_{z=0}=(-\cos z+\operatorname{ch} z)\big|_{z=0}=0$，

$(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{(4)}\big|_{z=0}=(\sin z+\operatorname{sh} z)\big|_{z=0}=0,(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{(5)}\big|_{z=0}=(\cos z+\operatorname{ch} z)\big|_{z=0}=2$，

故 $z=0$ 是函数 $\sin z+\operatorname{sh} z-2z$ 的五级零点，也即为 $(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{-2}$ 的十级极点。

5．如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，那么

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\quad(\text{或两端均为}\infty)。$$

证　因 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，可设 $f(z)=(z-z_0)\varphi(z)$，$g(z)=(z-z_0)\psi(z)$，$\varphi(z),\psi(z)$ 为解析函数，则

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(z-z_0)\varphi(z)}{(z-z_0)\psi(z)}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}，\quad \frac{f'(z)}{g'(z)}=\frac{\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)}，$$

故　$\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，$\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，即

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\quad(\text{或两端均为}\infty)$$

6．若 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点（或零点），那么下列三个函数在 $z=a$ 处各有什么性质?

（1）$\varphi(z)\psi(z)$；（2）$\varphi(z)/\psi(z)$；（3）$\varphi(z)+\psi(z)$

解　由题意，$\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m}$，$\psi(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^n}$，其中 $f(z)$，$g(z)$ 在 a 点解析且 $f(a)\neq 0$，$g(a)\neq 0$。

（1） $z=a$ 是 $\varphi(z)\cdot\psi(z)$ 的 $m+n$ 级极点。

（2）对于 $\varphi(z)/\psi(z)$，当 $m<n$ 时，a 是 $n-m$ 级零点；当 $m>n$ 时，a 是 $m-n$ 级极点；当 $m=n$ 时，a 是可去奇点。

（3）当 $m\neq n$ 时，点 a 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 $\max\{m,n\}$ 级极点，当 $m=n$ 时，点 a 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的极点。（可退化为可去），其级不高于 m，点 a 也可能是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的可去奇点（解析点）。

7．函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处有一个二级极点，这个函数又有下列洛朗展开式

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\cdots+\frac{1}{(z-1)^5}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{1}{(z-1)^3},|z-1|>1.,\ |z-2|>1$$

所以“ $z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点”，又其中不含 $(z-2)^{-1}$ 幂项，因此 $\operatorname{Res}\left[f(z),1\right]=0$，这些说法对吗?

解　不对，$z=1$ 不是 $f(z)$ 的本性奇点，这是因为函数的洛朗展开式是在 $|z-2|>1$ 内得到的，而不是在 $z=2$ 的圆环域内的洛朗展开式。

$$\operatorname{Res}\left[f(z),1\right]=\lim_{z\to1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{1}{z(z-1)^2}\right]=-1$$

孤立奇点的分类必须根据在这个奇点邻域内洛朗展开式来决定。

8．求下列各函数 $f(z)$ 在有限奇点处的留数：

1） $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$；　2） $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$；　3） $\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$；　4） $\dfrac{z}{\cos z}$；

5） $\cos\dfrac{1}{1-z}$；　6） $z^2\sin\dfrac{1}{z}$；　7） $\dfrac{1}{z\sin z}$；　8） $\dfrac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}$。

解　1） $\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=\lim\limits_{z\to0}z\dfrac{z+1}{z^2-2z}=-\dfrac{1}{2}$， $\operatorname{Res}\left[f(z),2\right]=\lim\limits_{z\to2}(z-2)\dfrac{z+1}{z^2-2z}=\dfrac{3}{2}$

2） $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$， $z=0$ 为分母的四级零点，是分子的一级零点，所以是 $f(z)$ 的三级极点。

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3\cdot\frac{1-e^{2z}}{z^4}\right]=-\frac{4}{3}$$

或展开洛朗级数

$$f(z)=\frac{1}{z^4}\left[1-1-2z-\frac{1}{2!}4z^2-\frac{1}{3!}8z^3\cdots\right]$$

知 $\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=-\dfrac{4}{3}$

3） $\operatorname{Res}\left[f(z),\mathrm{i}\right]=\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{dz^2}\left[(z-\mathrm{i})^3\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}\right]=-\dfrac{3}{8}\mathrm{i}$，

$$\text{Res}\left[f(z),-\text{i}\right]=\lim_{z\to-\text{i}}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+\text{i})^3\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}\right]=\frac{3}{8}\text{i}$$

4） $\text{Res}\left[f(z),k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]=\left.\dfrac{z}{(\cos z)'}\right|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=(-1)^{k+1}(k\pi+\dfrac{\pi}{2})$， $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

5） $\cos\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}},|z-1|>0$，知 $\text{Res}\left[f(z),1\right]=c_{-1}=0$

6） $z^2\sin\dfrac{1}{z}=z^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!z^{2n-1}},|z|>0$，知 $\text{Res}\left[f(z),0\right]=c_{-1}=-\dfrac{1}{6}$

7） $\text{Res}\left[f(z),0\right]=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{d}{dz}\left[z^2\dfrac{1}{z\sin z}\right]=0$， $\text{Res}\left[f(z),k\pi\right]=\left.\dfrac{1}{(z\sin z)'}\right|_{z=k\pi}=\dfrac{(-1)^k}{k\pi},k=\pm1,\pm2,\cdots$

8） $\text{Res}\left[f(z),(k+\dfrac{1}{2})\pi\text{i}\right]=\left.\dfrac{\text{sh}\,z}{(\text{ch}\,z)'}\right|_{z=(k+\frac{1}{2})\pi\text{i}}=1,k$为整数。

9．计算下列各积分（利用留数；圆周均取正向）

（1） $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{\sin z}{z}dz$；　　（2） $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$；　　（3） $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{1-\cos z}{z^m}dz$，（其中 m 为整数）；

（4） $\oint\limits_{|z-2\text{i}|=1}\text{th}\,zdz$；　　（5） $\oint\limits_{|z|=3}\tan(\pi z)dz$；　　（6） $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}dz$（其中 n 为正整数，且 $|a|\neq1,|b|\neq1,|a|<|b|$）。

解（1） $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$， $\lim\limits_{z\to0}f(z)=1$ 故 $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点则

$$\text{Res}[f(z),0]=c_{-1}=0$$

故原积分=0。

（2）在 C 内， $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ 以 $z=1$ 为其二级极点，则 $\text{Res}\left[f(z),1\right]=\lim\limits_{z\to1}(e^{2z})'_{z=1}=2e^2$ 由留数基本定理有原积分=4 $\pi e^2\,\text{i}$.

(3) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^m}=\dfrac{1}{z^{m-2}}(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{z^2}{4!}+\dfrac{z^4}{6!}-...)$ 故以 $z=0$ 为其 $m-2$ 级极点。设 $I=\int_C f(z)dz$

当 $m\le2$ 时， $\text{Res}[f(z),0]=c_{-1}=0$， $I=0$；

当 $m=2n>2$ 时， $\text{Res}[f(z),0]=c_{-1}=0$， $I=0$；

当 $m=2n+1>2$ 时， $\text{Res}[f(z),0]=(-1)^{n-1}/2n!=(-1)^{\frac{m-3}{2}}/(m-1)!$

由此 $I=(-1)^{\frac{m-3}{2}}2\pi\,\text{i}/(m-1)!$ 或说 m 为大于或等于 3 的奇数时， $I=(-1)^{\frac{m-3}{2}}2\pi\,\text{i}/(m-1)!$

（4） $f(z)=\text{th}\,z=\dfrac{\text{sh}\,z}{\text{ch}\,z},z_k=\left(k+\dfrac{1}{z}\right)\pi\,\text{i}$ 为其一级极点 $(k=0,\pm1,\cdots)$ $k=0$ 时， $z_0=\dfrac{\pi}{2}\text{i}$ 在 $|z-2\text{i}|=1$ 内，则

$$\text{Res}[f(z),z_0]=\text{sh}\,z_0=1\text{故}\quad I=\oint_C f(z)dz=2\pi\,\text{i}\,\text{Res}\left[f(z),\frac{\pi\,\text{i}}{2}\right]=2\pi\,\text{i}$$

（5） $f(z)=\tan\pi z$ 在 $|z|=3$ 内有一级极点 $z_k=k+\frac{1}{2}$ （$k=0,\pm1,\pm2,-3$），共 6 个。故

$\mathrm{Res}\left[\tan\pi,k+\frac{1}{2}\right]=\left.\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\right|_{z=k+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\pi}$，由留数定理

$$\oint_C \tan\pi z dz=2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}\left[f\left(z\right),z_k\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right)=-12\mathrm{i}$$

（6）当 $1<|a|<|b|$ 时，被积函数在单位圆内解析，故积分为 0；

当 $|a|<|b|<1$ 时， $\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(z-a)^n\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$

$\mathrm{Res}[f(z),b]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(z-b)^n\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(b-a)^{2n-1}}$，故积分为 0；

当 $|a|<1<|b|$ 时，积分 $=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$

10．判定 $z=\infty$ 是下列各函数的什么奇点？并求出在 ∞ 的留数。

1） $e^{\frac{1}{z^2}}$；　　2） $\cos z-\sin z$；　　3） $\frac{2z}{3+z^2}$。

解　1）可去奇点，∞ 的留数为零。$\varphi(t)=f(z)=f(\frac{1}{t})=e^{t^2}$；

2） $\varphi(t)=f(z)=f(\frac{1}{t})=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$，故 $z=\infty$ 为函数的本性奇点，又由于 $\cos z-\sin z$ 在整个复平面解析，故 ∞ 的留数为零。

3） $\frac{2z}{3+z^2}=\frac{2}{z}(1-\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z^4}+\cdots)$ 不含正幂项，故为可去奇点，留数为 $c_{-1}=2$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]=\mathrm{Res}[\frac{2}{z(1+3z^2)},0]=2\text{ 。}$$

11．求 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$ 的值，如果

（1） $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$　　（2） $f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$

解（1） $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$ 有两个一级极点 $z=1,z=-1,$ 故由全部留数和为零的定理，则

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}[f(z),1]-\mathrm{Res}[f(z),-1]=-\lim_{z\to1}\frac{e^z}{z+1}-\lim_{z\to-1}\frac{e^z}{z-1}$$

$$=-\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}=-\mathrm{sh}1$$

（2） $f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$ 以 $z=0$ 为一级极点， $z=-1$ 为四级极点， $z=4$ 为一级极点，用有限奇点留数和来求无穷远点的留数，计算过程太麻烦，一般采用直接在 $z=\infty$ 的圆环域（解析） $4<|z|<\infty$ 内展开为洛朗级数的方式，则有

$$f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}=\frac{1}{z\cdot z^4\left(1+\frac{1}{z}\right)^4\cdot z\left(1-\frac{4}{z}\right)}=\frac{1}{\left[z^6\left(1+\frac{1}{z}\right)^4\left(1-\frac{4}{z}\right)\right]}=\frac{1}{z^6}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right]^4\cdot\left[\frac{1}{1-\frac{4}{z}}\right]$$

$$=\frac{1}{z^6}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)^4\left(1+\frac{4}{z}+\frac{16}{z^2}+\ldots\right)$$

显见 $c_{-1}=0$, 故 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=0$.（注也可利用规则 IV）。

12．计算下列各积分，C 为正向圆周。

1）$\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz$，$C:|z|=3$；　　2）$\oint_C \frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$，$C:|z|=2$；

3）$\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}dz$　（n 为一整数），$C:|z|=r>1$。

解　1）函数 $\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z|=3$ 的外部，除 ∞ 点外没有其他奇点，因此根据定理二与规则 IV,

$$\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz=-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3},0]=2\pi\mathrm{i}$$

2）$f(z)=\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}$ 有奇点，$z=-1$，$z=0$，$z=-1$ 为一级极点，而 $z=0$ 为本性奇点，在 $2<|z|<+\infty$ 内展开 $f(z)$，则

$$f(z)=\frac{z^3}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}e^{\frac{1}{z}}=\frac{z^2}{\left(1+\frac{1}{z}\right)}\cdot e^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\ldots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots\right)$$

$$=\left(z^2-z+1-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\ldots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots\right)=z^2+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3}\frac{1}{z}+\ldots$$

得 $-c_{-1}=\frac{1}{3}$, 故原积分 $=2\pi i(c_{-1})=-\frac{2}{3}\pi i$.

3）当 $n=1$ 时，$\oint_C \frac{z^2}{1+z}dz=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),-1]=2\pi\mathrm{i}$；当 $n\neq 1$ 时,

$$\frac{z^{2n}}{1+z^n}=\frac{z^n}{1+z^{-n}}=z^n(1-\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{2n}}+\cdots)=z^n-1+\frac{1}{z^n}+\cdots$$

知 $c_{-1}=0$，故 $\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}dz=0$。

13 计算下列积分

1）$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}d\theta$；　　2）$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta\quad(a>b>0)$；　　3）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$；

4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$； 5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx$； 6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$。

解 1）由于被积函数的分母$5+3\sin\theta$在$0\le\theta\le 2\pi$内不为零，因而积分有意义。

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+3\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}}\frac{dz}{\mathrm{i}z}=\oint_{|z|=1}\frac{2}{3z^2+10\mathrm{i}z-3}dz=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),-\frac{\mathrm{i}}{3}]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{2}{6z+10\mathrm{i}}\right|_{z=-\frac{\mathrm{i}}{3}}=\frac{\pi}{2}$$

2）由于被积函数的分母$a+b\cos\theta$在$0\le\theta\le 2\pi$内不为零，因而积分有意义。

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{(\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z})^2}{a+b\frac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{\mathrm{i}z}=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{i}(z^2-1)^2}{2z^2(bz^2+2az+b)}dz=2\pi\mathrm{i}\{\mathrm{Re}\,s[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}]\}$$

又 $\mathrm{Res}[f(z),0]=\left.\frac{(-1+z^2)(a+3az^2+bz(3+z^2))}{(b+2az+bz^2)^2}\right|_{z=0}=-\frac{a\mathrm{i}}{b^2}$，

$$\mathrm{Res}[f(z),\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}]=\left.\frac{\mathrm{i}(z^2-1)^2}{4z(b+3az+2bz^2)}\right|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}=\frac{\mathrm{i}\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

故$I=\frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2})$。

3）函数$f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}$在上半平面内只有 2 级极点i，且

$$\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{d}{dz}(z-\mathrm{i})^2f(z)=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}=-\frac{2}{(2\mathrm{i})^3}=-\frac{\mathrm{i}}{4},$$

故 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]=\frac{\pi}{2}。$$

4）注意到被积函数为偶函数，

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$$

函数$f(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$在上半平面内只有一级极点$e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}},e^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}$，且

$$\mathrm{Res}[f(z),\frac{\pi\mathrm{i}}{4}]=\left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}}=\frac{1-\mathrm{i}}{4\sqrt{2}}；\ \mathrm{Res}[f(z),\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}]=\left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}}=-\frac{1+\mathrm{i}}{4\sqrt{2}}$$

故 $$I=\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}[f(z),\frac{\pi\mathrm{i}}{4}]+\mathrm{Res}[f(z),\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}])=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}。$$

5）对于$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x^2+4x+5}dx$，令$R(z)=\frac{1}{z^2+4z+5}$，则$z=-2+\mathrm{i}$为上半平面内的$R(z)$的一级极

点，故有：$\operatorname{Res}\left[R(z)e^{\mathrm{i}z},\mathrm{i}\right]=\left.\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{2z+4}\right|_{z=-2+\mathrm{i}}=-\dfrac{e^{-1}(\sin 2+\mathrm{i}\cos 2)}{2}$，

则原积分 $=\operatorname{Re}\{2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[R(z)e^{\mathrm{i}z},-2+\mathrm{i}]\}=\pi e^{-1}\cos 2$。

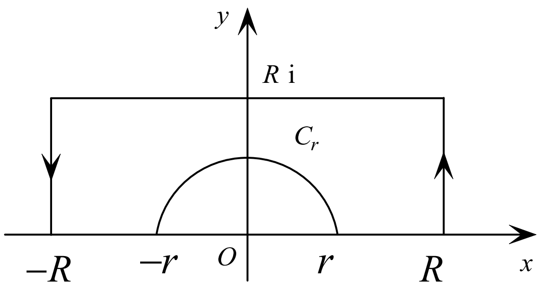
6）对于 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{xe^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}dx$，令 $R(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$，则 $z=\mathrm{i}$ 为上半平面内的 $R(z)$ 的一级极点，故有：

$$\operatorname{Res}\left[R(z)e^{\mathrm{i}z},\mathrm{i}\right]=\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{ze^{\mathrm{i}z}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}=\frac{e^{-1}}{2}$$

$I=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[R(z)e^{\mathrm{i}z},\mathrm{i}\right]=\pi e^{-1}\mathrm{i}$，则原积分 $=\operatorname{Im}\{I\}=\pi e^{-1}$

14．试用下图中的积分路线，求例 4 中的积分：$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$。

解　$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$，采用 $e^{\mathrm{i}z}/z$ 沿如如图所示闭曲线来计算上式右端的积分（$z=0$ 为 $e^{\mathrm{i}z}/z$ 的一级极点，且在实轴上）。由 Cauchy 基本定理，有



第 14题 图

$$\int_{C_r}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz+\int_r^R\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx+\int_R^{R+R\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz+\int_{R+R\mathrm{i}}^{-R+R\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz+\int_{-R+R\mathrm{i}}^{-R}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx=0,$$

令 $x=-t$，则有 $\int_{-R}^{-r}\dfrac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx=-\int_r^R\dfrac{e^{-\mathrm{i}x}}{x}dx$，所以 $\int_r^R\dfrac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx+\int_{-R}^{-r}\dfrac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx=2\mathrm{i}\int_r^R\dfrac{\sin x}{x}dx$。

又 $\left|\int_{R+R\mathrm{i}}^{-R+R\mathrm{i}}\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz\right|=\left|\int_R^{-R}\dfrac{e^{\mathrm{i}(x+R\mathrm{i})}}{x+R\mathrm{i}}dx\right|\le\int_R^{-R}\dfrac{e^{-R}}{\sqrt{x^2+R^2}}dx\le 2e^{-R}$，知 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{R+R\mathrm{i}}^{-R+R\mathrm{i}}\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz=0$；

$\left|\int_R^{R+R\mathrm{i}}\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz\right|=\left|\int_0^R\dfrac{e^{\mathrm{i}(R+\mathrm{i}y)}}{R+\mathrm{i}y}\mathrm{i}\,dy\right|\le\int_0^R\dfrac{e^{-y}}{\sqrt{R^2+y^2}}dy\le\dfrac{1-e^{-R}}{R}$，同理 $\left|\int_{-R+R\mathrm{i}}^{-R}\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz\right|\le\dfrac{1-e^{-R}}{R}$，知

$$\lim_{R\to+\infty}\left\{\int_R^{R+R\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz+\int_{-R+R\mathrm{i}}^{-R}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz\right\}=0$$

和例 4 采用同样的方法得到　　$\lim\limits_{r\to0}\int_{C_r}\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz=-\pi\mathrm{i}$。

故 $2\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\pi\mathrm{i}$，即 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\pi}{2}$。

15．利用公式（5.4.1）计算下列积分：

1）$\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{1}{z}dz=2\pi\mathrm{i}$；　　　　2）$\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z}{z^2-1}dz=2\pi\mathrm{i}$；

3） $\oint\limits_{|z|=3} \tan z dz = -4\pi \mathrm{i}$； 4） $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)} dz = 0$ 。

16．设 C 为区域 D 内的一条正向简单闭曲线， z_0 为 C 内一点。如果 $f(z)$ 在 D 内解析，且 $f(z_0)=0$ ，$f'(z_0)\neq 0$ 。在 C 内 $f(z)$ 无其他零点。试证：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = z_0 。$$

证 $f(z)$ 在 C 内只有一级零点 z_0 ，而 $\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)} + \frac{z_0 f'(z)}{f(z)}$，知 z_0 为函数 $\frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)}$ 的可去奇点，故由留数定理和（5.4.1）知

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{z_0 f'(z)}{f(z)} dz = 0 + z_0 = z_0 。$$

17．若 $\varphi(z)$ 在 $C:|z|=1$ 上及其内部解析，且在 C 上 $|\varphi(z)|<1$ ，证明在 C 内只有一个点 z_0 使 $\varphi(z_0)=z_0$ 。

证 令 $f(z)=-z$ ，则在 C 上，$|f(z)|=1$，而 $|\varphi(z)|<1$ ，故由路西定理，知方程 $z=\varphi(z)$ 与方程 $f(z)=0$ 在 C 内有相同个数的根，从而 $\varphi(z)=z$ 在 $|z|<1$ 只有一根。

18．证明：当 $|a|>e$，则方程 $e^z = az^n$ 在圆 $|z|=1$ 内有 n 个根。

证 设 $f(z)=-az^n$ ，$g(z)=e^z$ ，在 $|z|\le 1$ 内均解析，且当 $|z|=1$ 时，$|-az^n|=|-a||z^n|=|a|$，$|e^z|=e^{\cos\varphi}\le e$ 而 $|a|>e$，故 $|f(z)|=|-az^n|=|a|>|e^z|=|g(z)|$ 。

根据路西定理知， $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 $C:|z|=1$ 内的零点个数相同，即 $e^z = az^n$ 的根的个数与 $-az^n=0$ 的根的个数相同，即为 n。

19．证明方程 $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根都在圆环域 $1\le|z|\le 2$ 内。

证 当 $|z|<2$ 时，取 $f(z)=z^7$， $g(z)=12-z^3$，当 $|z|=2$ 时，

$$|g(z)| = |12-z^3| \le 12 + z^3 \le 20 < |z^7| = |f(z)|$$

所以 $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根的个数与 z^7 的根的个数相同，因此， $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根全部在|z|=2 的内部。

当 $|z|<1$ 时，取 $f(z)=12$ ， $g(z)=z^7-z^3$ ，当 $|z|=1$ 时，$|f(z)|>|z^7|+|z^3|\ge|z^7-z^3|=|g(z)|$，故 $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根与 $f(z)=12$ 的根的个数相同，即在 $|z|=1$ 内无根，综上所述， $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根全在 $1\le|z|\le 2$ 内。