

自动控制原理笔记 (第一版)

编著：陈傲

前言

这本笔记是在我完成于最后一节自控理论课后的晚上。在我打下这份笔记的第一个符号时，我也没有想到我能完整的写完。在面对大量数学公式与图片时我也想过放弃。笔记中涉及的PPT绝大部分来自于课上的PPT，少部分来自于B站卢潮京老师视频中的PPT。

我一直坚信笔记是用来于未来的自己进行对话的工具。所以在笔记中我尽量用我自己能够理解、通俗易懂的语言来对这门课的知识进行一个阐述。

我一直坚信知识是没有什么好隐藏的，只有大家在一起学习，才会学的更好。与我的其他笔记相同，这本由Markdown和LaTeX混合书写的笔记我也已经全部开源。笔记中的内容可能存在错误或不严谨的情况，还请大家斧正。

陈傲

于槐园

2023.12.25

拉普拉斯变换从入门到入土

拉普拉斯变换定义

$$F(S)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

常见的拉普拉斯变换对

时域	S域
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{S}$
e^{-at}	$\frac{1}{S+a}$
t	$\frac{1}{S^2}$
t^2	$\frac{2}{S^3}$
$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{S^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\frac{S}{S^2+\omega^2}$

拉普拉斯变换性质

$$f(t)\leftrightarrow F(S)$$

$$f'(t)\leftrightarrow SF(S)-f(0_-)$$

$$f''(t)\leftrightarrow S^2F(S)-Sf(0_-)-f'(0_-)$$

$$\int_{-\infty}^tf(t)dt\leftrightarrow\frac{1}{S}F(S)+\frac{1}{S}f'(0_-)$$

$$f(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}F(S)$$

$$f(t)e^{-\alpha t}\leftrightarrow F(S+\alpha)$$

$$f(at)\leftrightarrow\frac{1}{a}F(\frac{S}{a})$$

$$-tf(t) \leftrightarrow F'(S)$$

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_0^\infty F(S)ds$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(S)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(S)$$

传递函数

传递函数是在**初始条件为0条件下**，即所有的0₋为0

传递函数为输出比输入，即

$$G(S) = \frac{C(S)}{R(S)}$$

值得注意的是，想要写出一个系统的传递函数，则该系统必须是线性定长系统

两种标准格式

首一型:形如 $\frac{4(s-1)}{s(s+1)(s-1)}$,即s的系数为1，常数可不为1

尾一型:形如 $\frac{2(s+1)}{s(s+1)(\frac{1}{2}s+1)}$,即常数都是1，s系数可不为1

在尾一型中，提出来的系数叫增益，记为K，上式中 $K = 2$

结构图的等效变换

结构图等效变换规则

表 2-1 结构图简化(等效变换)规则

原方框图	等效方框图	等效运算关系
		(1) 串联等效 $C(s) = G_1(s)G_2(s)R(s)$
		(2) 并联等效 $C(s) = [G_1(s) \pm G_2(s)]R(s)$
		(3) 反馈等效 $C(s) = \frac{G_1(s)R(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)}$
		(4) 等效单位反馈 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{G_2(s)} \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$
		(5) 比较点前移 $C(s) = R(s)G(s) \pm Q(s)$ $= [R(s) \pm \frac{Q(s)}{G(s)}]G(s)$
		(6) 比较点后移 $C(s) = [R(s) \pm Q(s)]G(s)$ $= R(s)G(s) \pm Q(s)G(s)$
		(7) 引出点前移 $C(s) = R(s)G(s)$
		(8) 引出点后移 $R(s) = R(s)G(s) \frac{1}{G(s)}$ $C(s) = R(s)G(s)$

续表

原方框图	等效方框图	等效运算关系
		(9) 交换或合并比较点 $C(s) = E_1(s) \pm R_3(s)$ $= R_1(s) \pm R_2(s) \pm R_3(s)$ $= R_1(s) \pm R_3(s) \pm R_2(s)$
		(10) 交换比较点或引出点 (一般不采用) $C(s) = R_1(s) - R_2(s)$
		(11) 负号在支路上移动 $E(s) = R(s) - H(s)C(s)$ $= R(s) + H(s) \times (-1)C(s)$

梅森增益公式

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{K=1}^n p_k \Delta_k$$

特征式: $\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f$, 第一个为单独回路增益, 第二个为两两互不接触的回路增益, 第三个为三个互不接触的回路增益

有几个前向通路 n 就是几

p_k 为当前前向通路的增益

Δ_k 就是特征值减去与当前前向通路有关的回路增益项, 称为余项式

线性系统快速性分析

动态性能指标

1. t_r : 上升时间, 输出响应从0第一次上升到稳态值所用的时间
2. t_P : 峰值时间, 输出响应第一次到达最大值时间
3. t_s : 调节时间, 在稳态值附近取误差带($\pm 5\%$), 响应开始进入误差带到保持在误差带所用最短时间
4. $\sigma\%$: 超调量, 响应曲线超出稳态值比上稳态值

$$\sigma\% = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\%$$

5. t_d : 延迟时间, 第一次到达稳态值50%所用时间
6. e_{ss} : 静态误差, 系统期望值与实际稳态值之间差值

一阶系统快速性分析

一阶系统模型

一阶系统的时间响应及动态性能-阶跃响应

◆ 一阶系统 $\Phi(s)$ 标准形式及 $h(t)$

➤ 开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{s}$

➤ 开环增益: K

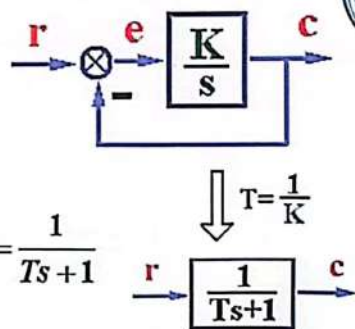
➤ 闭环传递函数: $\Phi(s) = \frac{\frac{K}{s}}{1 + \frac{K}{s}} = \frac{K}{s + K} \stackrel{r = \frac{1}{K}}{=} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} = \frac{1}{Ts + 1}$

➤ 闭环增益: 1

➤ 闭环极点: $\lambda_1 = -\frac{1}{T}$

➤ 阶跃响应: $C(s) = \Phi(s) \cdot R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T}$

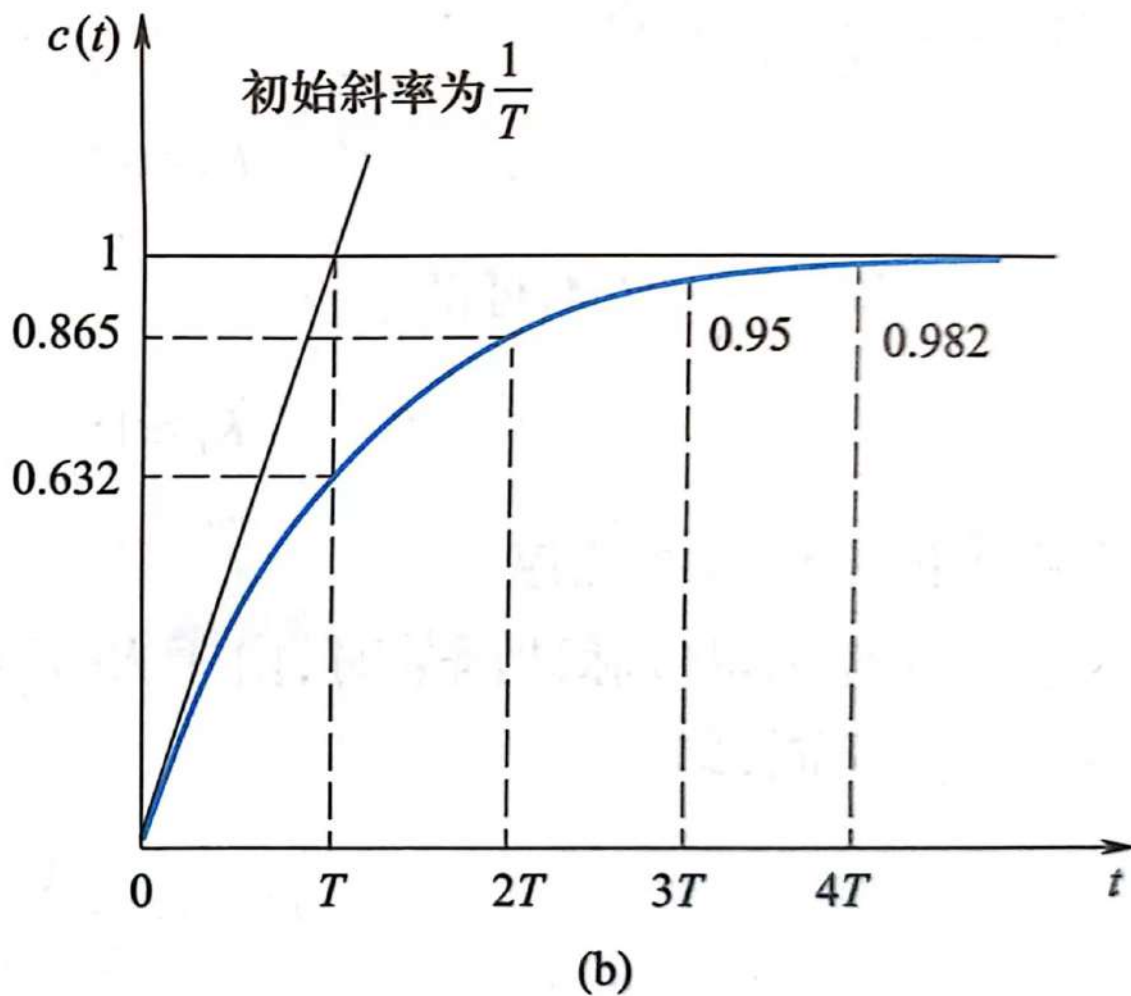
➤ 阶跃响应微分方程: $h(t) = L^{-1}[C(s)] = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$



T — 时间常数



一阶系统的单位阶跃响应($\frac{1}{s}$)



$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

此式子中 T 称为**时间常数**，同时该函数在 $t = 0$ 处导数为 $\frac{1}{T}$ ，这意味着 T 可通过实验来测量

$$t_r = \infty$$

$$t_P = \infty$$

$$t_s = 3T$$

这是一阶系统单位阶跃响应最重要的指标，它表示系统过渡的快慢

$$\sigma\% = 0$$

$$e_{ss} = 0$$

一阶系统的单位脉冲响应(1)

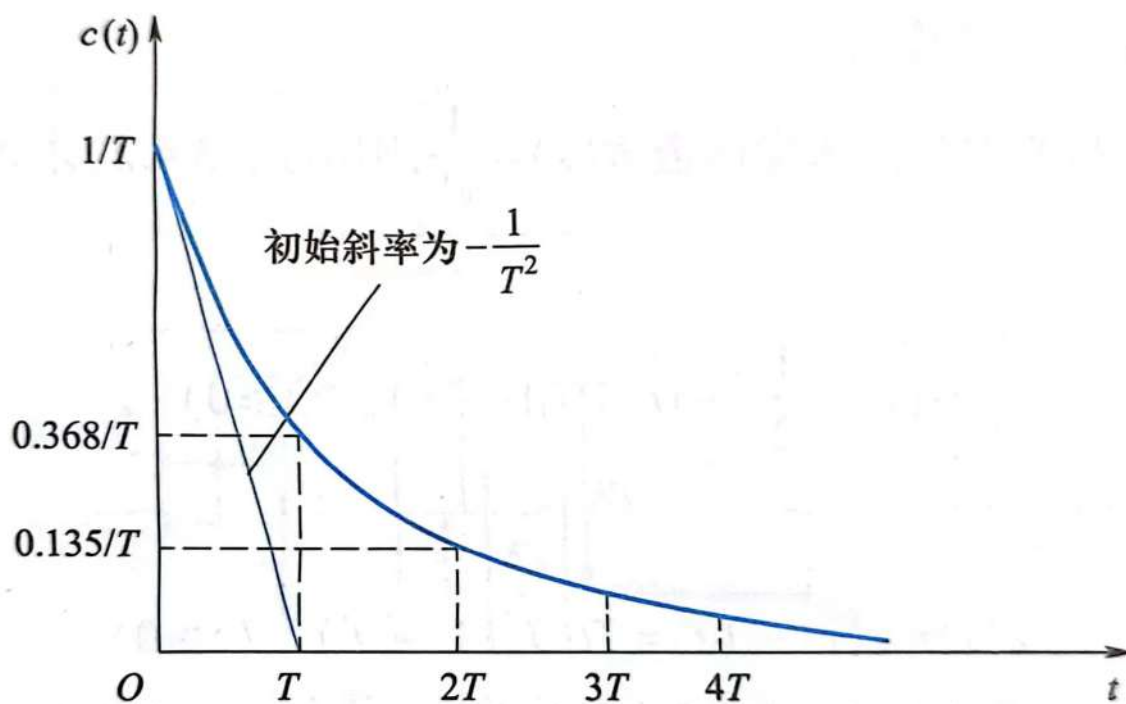


图 3.4.4 一阶系统的单位脉冲响应曲线

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$c(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

一阶系统的单位斜坡响应($\frac{1}{s^2}$)

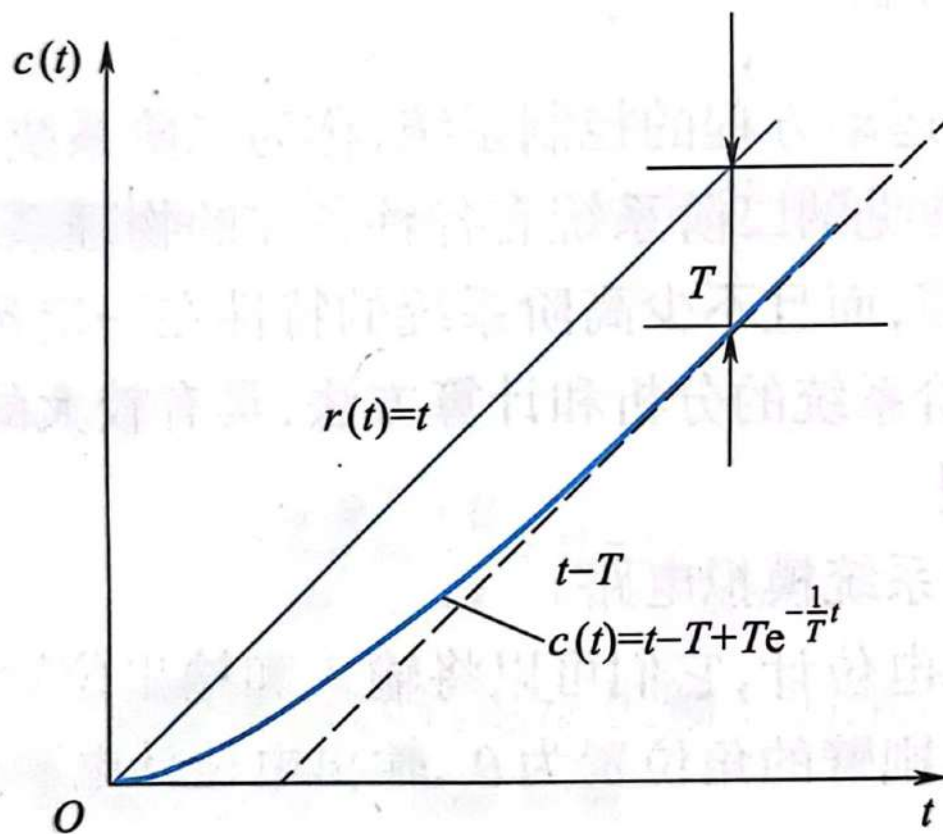


图 3.4.5 一阶系统的单位斜坡响应曲线

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1}$$

$$c(t) = t - T + Te^{-\frac{1}{T}t}$$

$$e_{ss} = T$$

注意:这里的响应始终不能跟踪到输入信号, T 越小, 跟踪误差越小, 输出量相对于输入信号迟滞越少

二阶系统快速性分析

二阶系统模型

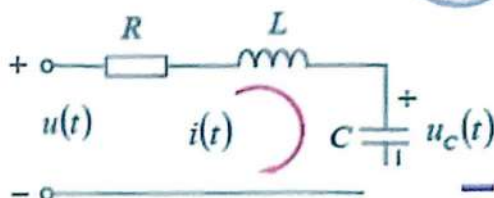
□ 二阶系统的时间响应及动态性能



◆ 二阶系统数学模型

微分方程

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u$$



闭环传递函数

$$\frac{U_c(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

用二阶微分方程描述的系统

闭环传递函数分母s最高次为2次的系统

典型二阶系统传递函数

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

特征根
(闭环极点)

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

1、

$$\xi > 1$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

过阻尼二阶系统

两个不相等的负实根

2、

$$\xi = 1$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n$$

临界阻尼二阶系统

两个相等的负实根

3、

$$0 < \xi < 1$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

欠阻尼二阶系统

一对负实部的共轭复根

4、

$$\xi = 0$$

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

无阻尼二阶系统

一对纯虚根

□ 二阶系统的时间响应及动态性能



➤ 闭环传递函数:

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

闭环特征方程:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

闭环特征根
闭环极点

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

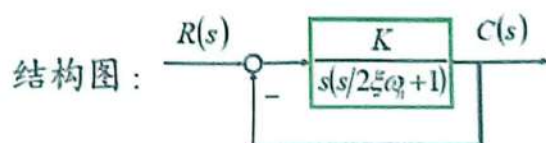
ξ — 阻尼比

ω_n — 无阻尼自然振荡频率

➤ 开环传递函数:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} = \frac{K}{s(s/2\xi\omega_n + 1)}$$

“尾一”



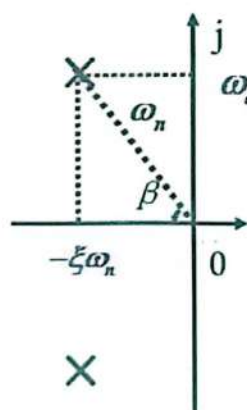
$$K = \frac{\omega_n^2}{2\xi}$$

欠阻尼系统(阶跃响应)

□ 二阶系统的时间响应及动态性能



❖ 欠阻尼二阶系统动态性能指标计算



$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad 0 < \xi < 1$$

$$\cos \beta = \xi$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

$$\sigma = \xi\omega_n$$

衰减系数

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

阻尼振荡频率

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$$

□ 二阶系统的时间响应及动态性能



❖ 动态指标计算公式

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$

$$t_s \approx \begin{cases} \frac{3}{\xi\omega_n} & \Delta = \pm 5\% \\ \frac{4}{\xi\omega_n} & \Delta = \pm 2\% \end{cases}$$

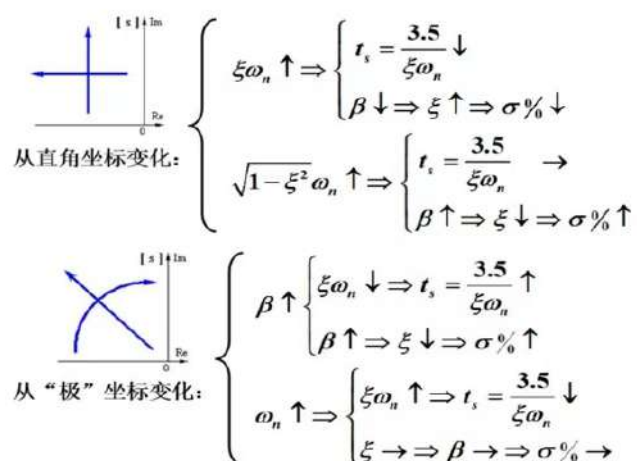
二阶线性系统拓展

规律总结

□ 二阶系统的时间响应及动态性能



➤ 欠阻尼二阶系统动态性能随极点位置变化规律小结



非典型二阶线性系统

在部分二阶线性系统中可能不能化成典型形式，但是可以化成如下形式

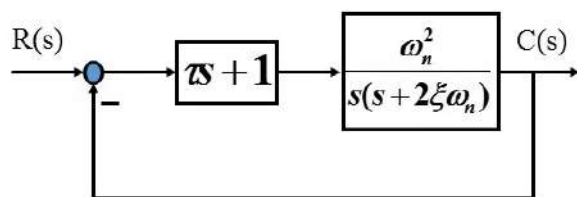
$$\Phi(s) = \frac{k'\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega^2}$$

那么，实际上我们有以下结论

1. $t_r, t_p, t_s, \sigma\%$ 相比于典型二阶线性系统，不变
2. 稳态值变为原来的 k' 倍

改善二阶线性系统性能

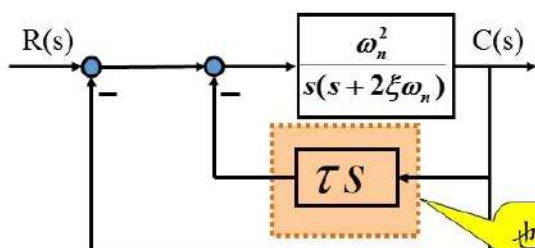
比例微分



比例微分控制的二阶系统

- 开环传递函数 $G(s) = \frac{(\tau s + 1)\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$
- 开环增益: $K = \frac{\omega_n}{2\xi}$ 不变
- 闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{(\tau s + 1)\omega_n^2}{s^2 + 2(\xi + \frac{\tau\omega_n}{2})\omega_n s + \omega_n^2}$
- 等效阻尼比: $\xi' = \xi + \frac{\tau\omega_n}{2}$ 阻尼比增大了

微分



微分负反馈的二阶系统

也称速度反馈，与PD控制有何区别？

- 开环传递函数: $G(s) = \frac{\omega_n^2/s(s + 2\xi\omega_n)}{1 + \tau s \cdot \omega_n^2/s(s + 2\xi\omega_n)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n + \tau\omega_n^2)}$
- 开环传递函数: $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2(\xi + \frac{\tau\omega_n}{2})\omega_n s + \omega_n^2}$
- 开环增益: $K = \frac{\omega_n}{2\xi + \tau\omega_n}$ 减小

等效阻尼比:

$$\xi' = \xi + \frac{\tau\omega_n}{2}$$

阻尼比增大了

总结

动态性能

微分负反馈控制能否用前述公式计算动态性能指标？
能

微分负反馈控制没有使系统增加闭环零点

$\xi' \uparrow, \omega_n$ 不变 $t_s \downarrow \sigma\% \downarrow$

动态性能更好！

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\xi\omega_n + \tau\omega_n^2)s + \omega_n^2}$$

稳态性能

稳态误差与开环增益成反比

系统的开环增益减小， $K = \frac{\omega_n}{2\xi + \tau\omega_n}$

所以，稳态误差变大，稳态性能降低

总结

调整 τ ，改善动态性能

调整 K ，改善稳态性能

$$\xi' = \xi + \frac{\tau\omega_n}{2}$$

线性系统稳定性分析

稳定，稳定，还他妈是稳定

系统的初始条件为零，输入一个理想单位脉冲响应，若 $\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = 0$ ，那么该系统是稳定的
从闭环传递函数角度来看，系统的所有特征根实部小于零，该系统稳定

特征根全部具有负实部，他的必要条件是：

- 1. 特征方程各项系数 $a_i \neq 0$ ，即每阶项都得有
- 2. 特征方程的各项系数的符号要全部相同

必要条件是，全部具有负实部必须满足这些条件，而满足这些条件不一定全部具有负实部；但是对于二阶系统而言，这是个充要条件，即满足以上条件，该系统稳定

劳斯稳定判据

一般情况

线性系统的稳定性分析-劳斯稳定判据



例1: $D(s) = s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 2s + 10 = 0$

解，列劳斯表

s^4	1	7	10
s^3	5	2	
s^2	$\frac{33}{5}$	10	
s^1	$-\frac{184}{33}$		
s^0	10		

$$\frac{5 \times 7 - 2}{5} = \frac{33}{5} \quad \frac{5 \times 10 - 1 \times 0}{5} = 10$$

$$\frac{33/5 \times 2 - 5 \times 10}{33/5} = -\frac{184}{33}$$

$$\frac{-184/33 \times 10}{-184/33} = 10$$

劳斯表第一列元素变号2次，有2个正根，系统不稳定。

劳斯表第一列元素均大于零时系统稳定，否则系统不稳定；
且第一列元素符号改变的次数等于特征方程中正实部根的个数

第一列为零

将为0的数设为 ϵ ， ϵ 是一个无限接近于0的正数，计算过程中由 ϵ 替代0进行正常计算

一行全部为零

将全部为0的上一行对应的方程写出来，然后求导，得出的数据作为全为0的那一行的数，然后正常运算

线性系统准确性分析

系统误差与稳态误差

系统误差:系统输出的期望量与实际值之差

$$e(t) = c_r(t) - c(t)$$

注意:这里面是从输出角度定义的

稳态误差: $t \rightarrow \infty$ 时, 系统误差的稳态分量

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [c_r(t) - c(t)]$$

从另一种角度来说, 稳态误差又是期望输出的稳态值与实际输出的稳态值之差

计算稳态误差

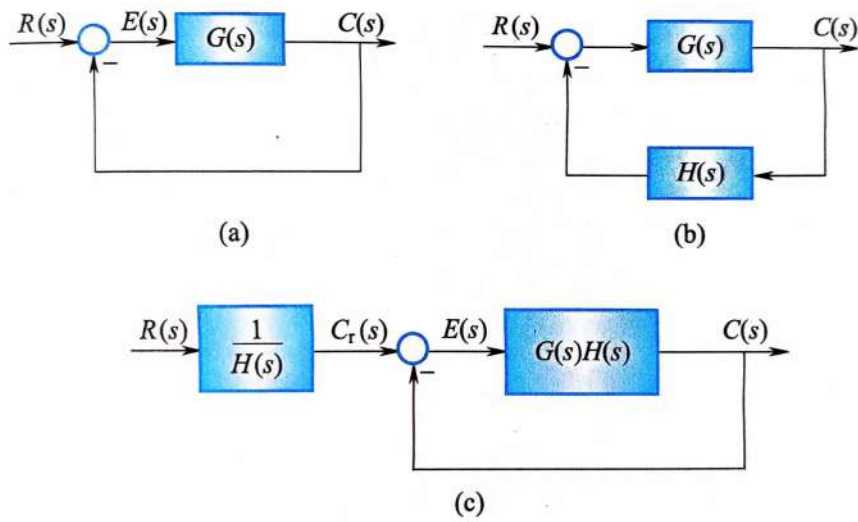


图 3.5.1 控制系统的典型结构

(a) 单位反馈系统;(b) 非单位反馈系统;(c) 等效的单位反馈系统结构图

我们误差的值是反馈与输入的差值, 根据图(a)而言

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

那么, 根据上述定义, 若是针对非单位反馈系统而言, 就变成了

$$E(s) = R(s) - C(s)H(s)$$

而同时(c)作为(b)的变换, 那么又有

$$E'(s) = \frac{R(s)}{H(s)} - C(s)$$

同一个结构, 为什么两个误差值不一样?

实际上，前者是通过**输入端**来定义的，后者是通过**输出端**来定义的
二者的关系是

$$E'(s) = \frac{E(s)}{H(s)}$$

值得注意的是在**单位反馈系统**中(也是根据上式)，两个定义得出结果是**完全一样的**，在这里我们统一使用输出端来定义
那么顺理成章的就有以下的式子了

1. 单位反馈系统

$$e_{ssr} = \lim_{t \rightarrow \infty} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s[R(s) - C(s)]$$

2. 非单位反馈系统

$$e_{ssr} = \lim_{t \rightarrow \infty} sE'(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s[\frac{R(s)}{H(s)} - C(s)]$$

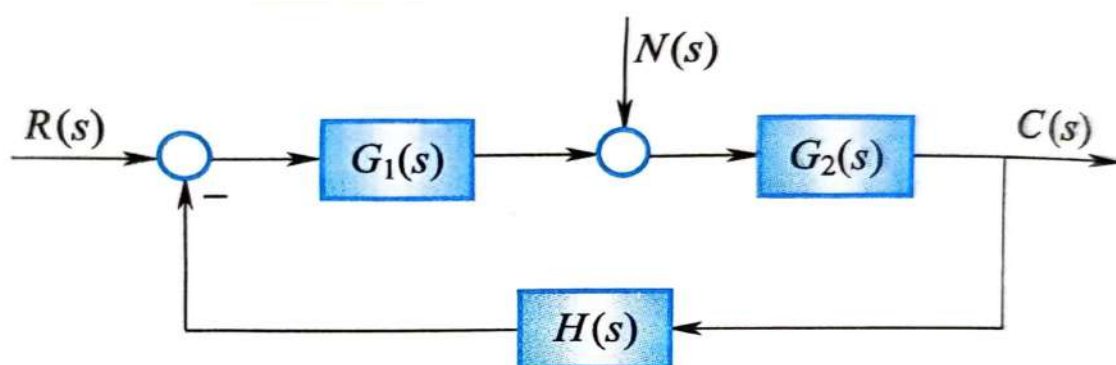


图 3.5.2 扰动作用下控制系统结构图

针对于带扰动情况，相当于没有输入 $R(s)$ ，那么

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s[0 - C_n(s)]$$

最后就有

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn}$$

私货

请注意:这一小段所讲述内容是基于我自己的理解，可能并不正确

针对于上图中(a)而言，这里**系统期望的输出的稳态值**是 $C_r(s) = R(s)$

$$e_{ssr} = \lim_{t \rightarrow \infty} [C_r(t) - C(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} s[R(s) - C(s)]$$

针对于上图中(b)而言，这里**系统期望的输出的稳态值**是 $\frac{R(s)}{H(s)}$ ，原因在于等效为(c)图后，其比较点输入量是 $C_r(s) = \frac{R(s)}{H(s)}$ ，而非是 $R(s)$

实际上，上述表达的意思是稳态误差的值**不能**直接理解为:理想输入-实际输出

$$e_{ssr} = \lim_{t \rightarrow \infty} [C_r(t) - C(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} s[\frac{R(s)}{H(s)} - C(s)]$$

针对于带扰动情况，这里**系统期望的输出的稳态值**是0

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s[0 - C_n(s)]$$

一般计算方法

1. 判断系统的稳定性，只有稳定系统才会计算误差
2. 求误差传递函数
 - 由输入引起

$$\Phi_r(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$$

此误差对应时域为 e_{ssr}

- 由扰动引起

$$\Phi_n(s) = \frac{E(s)}{N(s)}$$

此误差对应时域为 e_{ssn}

3. 总误差

$$E_{ss}(s) = \Phi_r(s)R(s) + \Phi_n(s)N(s)$$

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn}$$

4. 终值定理

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_{ss}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

静态误差系数法

□ 线性系统的稳态误差分析



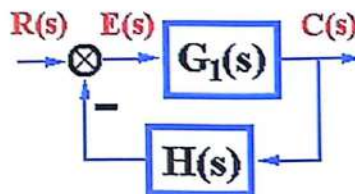
➤ 静态误差系数法 —— $r(t)$ 作用时 e_{ss} 的计算规律

$$G(s) = G_1(s)H(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^v (T_1 s + 1) \cdots (T_{n-v} s + 1)} = \frac{K}{s^v} G_0(s) \quad \begin{cases} \mathbf{K}: \text{开环增益} \\ \mathbf{v}: \text{型别 (类型)} \end{cases}$$

$$G_0(s) = \frac{(\tau_1 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1) \cdots (T_{n-v} s + 1)} \quad \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = 1$$

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K}{s^v} G_0(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot R(s) \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{s^v} G_0(s)}$$



稳态误差 e_{ss} 与 $\begin{cases} \text{输入 } r(t) \text{ 的形式} \\ \text{系统结构参数 } (K, v) \end{cases}$ 有关

□ 线性系统的稳态误差分析



$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s R(s) \frac{1}{1 + G_1(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot R(s) \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{s^v} G_0(s)}$$

$$r(t) = A \cdot 1(t) \quad e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s} \cdot \frac{1}{1 + G_1(s)H(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)H(s)} = \frac{A}{1 + K_p}$$

$$\text{静态位置误差系数 } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^v}$$

$$r(t) = A \cdot t \quad e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + G_1(s)H(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s)H(s)} = \frac{A}{K_v}$$

$$\text{静态速度误差系数 } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-1}}$$

$$r(t) = \frac{A}{2} t^2 \quad e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s^3} \cdot \frac{1}{1 + G_1(s)H(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_1(s)H(s)} = \frac{A}{K_a}$$

$$\text{静态加速度误差系数 } K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_1(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-2}}$$

□ 线性系统的稳态误差分析



型别	静态误差系数			稳态误差计算		
V	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_1 H = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^v}$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_1 H = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-1}}$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_1 H = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-2}}$	$r = A \cdot 1(t)$ $e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$	$r = A \cdot t$ $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$r = A \cdot t^2/2$ $e_{ss} = \frac{A}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{A}{1 + K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$

注意事项:

1. V: 开环函数中**纯积分项**个数, 也称V型系统
K: 开环**增益**
2. 以上求得误差仅是 e_{ssr}
3. 纯积分项放在主反馈口与干扰误差之间, 才可降低 e_{ssn} ; 放在任何位置都会降低 e_{ssr}
4. $G_1(s)H(s)$ 本质上就是开环传递函数
5. 在求误差前要判稳(闭环传递函数分母为特征方程)

根轨迹

基本概念

系统中某个参数从0变化到无穷时,闭环特征根在S平面上移动的路径
根轨迹增益:开环函数首1型增益

为什么不画闭环零点的根轨迹图?
因为闭环零点根轨迹就俩点,不变化

闭环零点=前向通道开环零点+反馈通道开环极点

根轨迹条件

□ 轨迹方程

➤ 一般情况下

❖ 开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s-z_1) \cdots (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \cdots (s-p_n)} = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)}$$

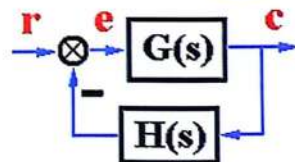
❖ 闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

❖ 特征方程 $G(s)H(s) = \frac{K^* (s-z_1) \cdots (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \cdots (s-p_n)} = -1$

$$|G(s)H(s)| = \frac{K^* |s-z_1| \cdots |s-z_m|}{|s-p_1| |s-p_2| \cdots |s-p_n|} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m |(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s-p_j)|} = 1 \quad \text{— 模值条件}$$

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s-z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s-p_j) = (2k+1)\pi \quad \text{— 相角条件}$$



$$K = K^* \frac{\prod_{i=1}^m |z_i|}{\prod_{j=1}^n |p_j|}$$

根轨迹上的点必须满足模值条件与相角条件,模值条件是一定满足的,主要是看相角条件,即

- 判断一个点是否在根轨迹上就是带入相角条件判断
- 求K就是带入模值条件

根轨迹的基本法则

规则一

根轨迹的分支数等于开环极点数,根轨迹都是起于开环极点终止于开环零点;若没有对应开环零点,则到无穷

根轨迹的分支数等于闭环特征方程阶数

规则二

根轨迹是**连续的对称的**,且对称于实轴

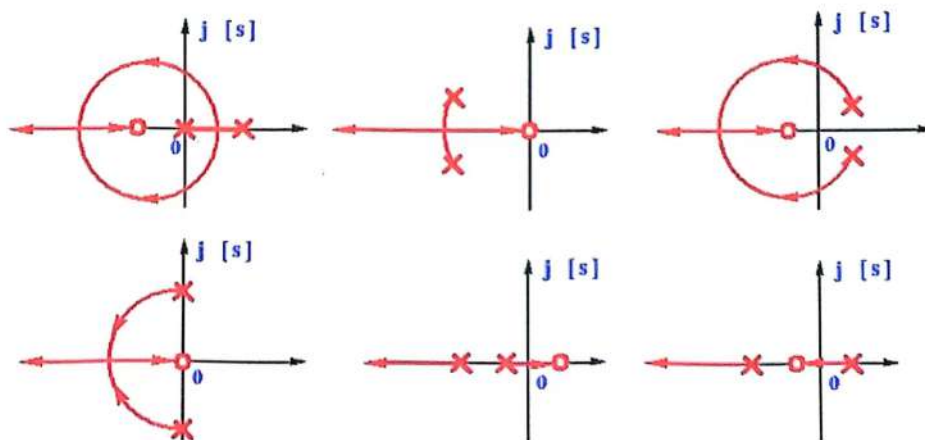
规则三

从实轴上最右端开环零极点算起,奇数开环零极点到偶数开环零极点间区域,是实轴上根轨迹

下标是从1开始数,不是从0开始

绘制轨迹的基本法则

定理: 若系统有2个开环极点, 1个开环零点, 且在复平面存在根轨迹, 则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。



上图中第二和第三个其实就利用了规则三与规则一判断出的

规则四

闭环根之和为一个常数,即根轨迹上相应的点加起来是常数

根之和,闭环极点之和等于开环极点之和,等于常数

当极点数-零点数大于等于2时成立

规则五

渐近线

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

$$\varphi_{\alpha} = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}$$

n:开环极点数;m:开环零点数;p开环极点;z开环零点

这条规则是用来画区域无穷时候的根轨迹的,这时候根轨迹只能画出一个大体形状,且这个形状要根据其他规则进行判断是否正确

规则六

分离点d

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{d - z_i}$$

若是没有零点，右边为0

分离点是若是解不出，则采用试根法，挨个试

在分离点处 K_d 的值

$$K_d^* = \frac{\prod_{i=1}^n |d - p_i|}{\prod_{i=1}^m |d - z_i|}$$

这个式子实际上就是根据模值条件来的，若是没有零点则分母为1

规则七

与虚轴交点

- 方法1:写出劳斯表中的辅助方程，辅助方程的解就是交点
- 方法2:将 $j\omega$ 带入开环分母，求解即是交点

规则八

入射角与出射角

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi$$

s即为所求点，入射角的未知量在前面，是出射角的未知量在后面，最后的 $\pm\pi$ 根据式子中角度大小来判断(即等式的左边)

上述式子本质上来讲就是算各点之间的角度，那么就有自己和自己之间角度就是你所求的角度，一般设为未知量，自己与其他点之间角度正常计算即可(即复平面上两点之间计算角度，参考复变函数课程，要注意求角度的方向)

□ 总结



➤ 法则1 根轨迹的起点和终点:

根轨迹起始于开环极点, 终止于开环零点; 当开环极点个数 n 大于开环零点个数 m 时, 有 $n-m$ 条根轨迹分支趋向于无穷远处。

➤ 法则2 根轨迹的分支数, 对称性和连续性:

根轨迹的分支数 = 系统阶数; 根轨迹连续且对称于实轴。

➤ 法则3 实轴上的根轨迹:

从实轴上最右端的开环零点或极点向左算起, 奇数开环零、极点, 到偶数开环零、极点之间的区域必是根轨迹。

➤ 法则4 根之和:

$n-m \geq 2$ 时, 闭环根之和为常数。

定理: 若系统有2个开环极点, 1个开环零点, 且在复平面存在根轨迹, 则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。

□ 绘制轨迹的基本法则



➤ 法则5 渐近线

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} \quad \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$n > m$ 时, $n-m$ 条根轨迹趋于无穷远处的规律。

➤ 法则6 分离点 d :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$$

➤ 法则7 与虚轴交点:

$$\begin{cases} 1) \text{ 系统临界稳定点} \\ 2) s = j\omega \text{ 是根的点} \end{cases}$$

➤ 法则8 出射角/入射角

$$\sum_{j=1}^m \angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i) = (2k+1)\pi$$

(起始角/终止角)

广义根轨迹

绘制系统的根轨迹时，并不是只以 k ， k^* 为可变参数，而是用任意可变参数进行绘制，这时就是广义根轨迹

参数根轨迹

利用**等效开环传递函数**，进行根轨迹的绘制

等效传递函数只用作画根轨迹

普通参数

利用结论：闭环传递函数 = $\frac{\text{开环分子}}{\text{开环分子} + \text{开环分母}}$ ，同时分母也是特征方程，构造新的等效传递函数

例如 $G(s) = \frac{(s+a)/4}{s^2(s+1)}$ ， $D(s) = s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}a$

那么，新的等效传递函数就是 $G(s)^* = \frac{\frac{1}{4}a}{s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s}$

特殊情况

由于我们分析系统都是线性**因果**系统，所以写出来的等效传递函数都极点数大于等于零点数，但有些参数按照上述方法会出现非因果现象

如 $G(s) = \frac{625(s+26)}{s^2(Ts+1)}$ ， $D(s) = Ts^3 + s^2 + 615s + 15990$ ，按照上面方法显然会出现上述情况

- 方法1: $G(s)^* = \frac{\frac{1}{T}(s^2+615s+15990)}{s^3}$
- 方法2: $G(s)^* = \frac{Ts^3}{(s+27.7)(s+587.7)(\frac{s}{\infty}+1)}$

零度根轨迹

处于正反馈的的系统画出来的根轨迹叫零度根轨迹

叫零度根轨迹原因是模值条件不变，相角条件改为0度，那么相应的与相角有关的法则也发生变化

□ 广义根轨迹



❖ 绘制零度根轨迹的基本法则

法则 1 根轨迹的起点和终点

法则 2 根轨迹的分支数，对称性和连续性

★ 法则 3 实轴上的根轨迹

法则 4 根之和 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = c \quad (n-m \geq 2)$

★ 法则 5 渐近线 $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} \quad \phi_a = \frac{2k\pi}{n-m}$

法则 6 分离点 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$

法则 7 与虚轴交点 $\text{Re}[D(j\omega)] = \text{Im}[D(j\omega)] = 0$

★ 法则 8 出射角/入射角 $\sum_{j=1}^m \angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i) = 2k\pi$

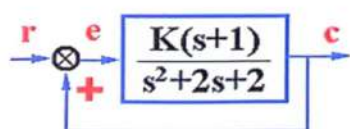
实际上实轴上的根轨迹就是180度根轨迹互补后状态，出射角与入射角0度与180度是对称的

180度与0度根轨迹关系

□ 广义根轨迹



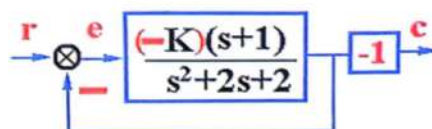
➤ 0° 根轨迹和180° 根轨迹的关系



✓ 特征方程 $1 - \frac{K(s+1)}{s^2+2s+2} = 0$

$$\rightarrow \frac{K(s+1)}{s^2+2s+2} = 1$$

K从0→∞变化，画0° 根轨迹



$1 + \frac{(-K)(s+1)}{s^2+2s+2} = 0$

$$\frac{-K(s+1)}{s^2+2s+2} = -1$$

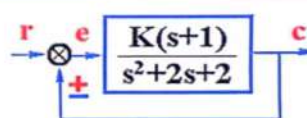
-K从0→∞变化，画180° 根轨迹

K从0→-∞变化，画0° 根轨迹

□ 广义根轨迹



例4 系统结构图如图所示, $K^* = 0 \rightarrow \infty$, 变化, 试分别绘制 0° 、 180° 根轨迹。



解. $G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2+2s+2} = \frac{K(s+1)}{(s+1+j)(s+1-j)} \begin{cases} K_k = K/2 \\ \nu = 0 \end{cases}$

(1) 180° 根轨迹

① 实轴轨迹: $(-\infty, -1]$

② 出射角: $90^\circ - [\theta + 90^\circ] = -180^\circ$
 $\Rightarrow \theta = 180^\circ$

③ 分离点: $\frac{1}{d+1+j} + \frac{1}{d+1-j} = \frac{2(d+1)}{d^2+2d+2} = \frac{1}{d+1}$

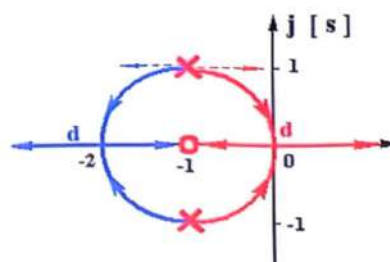
整理得: $d^2 + 2d = d(d+2) = 0$

解根: $\begin{cases} d_1 = -2 \\ K_{d_1} = \frac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|} \stackrel{d=-2}{=} 2 \end{cases} \quad \begin{cases} d_2 = 0 \\ K_{d_2} = \frac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|} \stackrel{d=0}{=} 2 \end{cases}$

(2) 0° 根轨迹

$[-1, \infty)$

$90^\circ - [\theta + 90^\circ] = 0^\circ$
 $\Rightarrow \theta = 0^\circ$



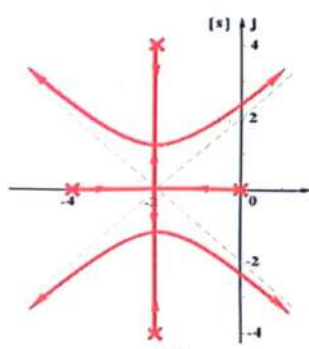
根轨迹对称性定理

□ 广义根轨迹

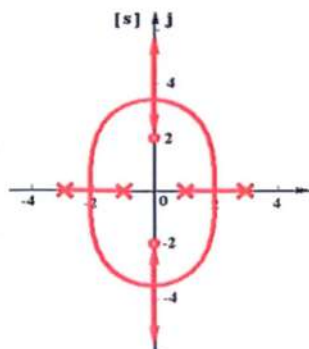


关于根轨迹对称性的一个定理:

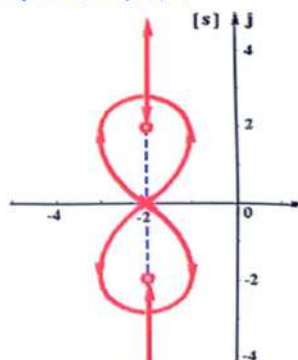
若开环零极点均为偶数个, 且关于一条平行于虚轴的直线左右对称分布, 则根轨迹一定关于该直线左右对称。



$\frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$



$\frac{K^*(s^2+4)}{(s^2-1)(s^2-9)}$

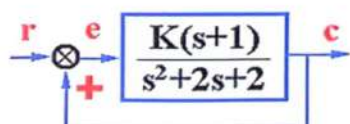


$\frac{K^*(s^2+4s+8)}{(s+2)^4}$

180度与0度根轨迹间关系

□ 广义根轨迹

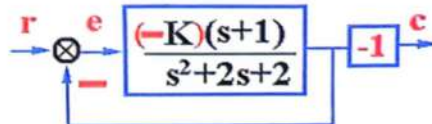
➤ 0° 根轨迹和180° 根轨迹的关系



✓ 特征方程 $1 - \frac{K(s+1)}{s^2+2s+2} = 0$

→ $\frac{K(s+1)}{s^2+2s+2} = 1$

K从0→∞变化, 画0° 根轨迹



$1 + \frac{(-K)(s+1)}{s^2+2s+2} = 0$

$\frac{-K(s+1)}{s^2+2s+2} = -1$

-K从0→∞变化, 画180° 根轨迹

K从0→-∞变化, 画0° 根轨迹

概述

绘制根轨迹的条件

想要以常规的方法绘制根轨迹, 都是要确保以下条件必须满足

1. 根轨迹增益必须是从0 → +∞变化
2. 开环传递函数分母写成 $(as+b)(cs+d)\dots$ 形式后, s 的系数必须是正数

常规方法是指可以按照所教的方法正常求解, 绘制出根轨迹

绘制根轨迹类型判断法则

如何判断绘制0度根轨迹还是180度根轨迹?

1. 写出特征方程, 写成上述例题形式
2. 根据上述2个条件, 调整符号形成新的特征方程, 也要写成例题根轨迹的形式
3. 观察中间符号(1与多项式之间), 为-则是0度根轨迹, 为+则是180度根轨迹

二者关系

根据上面的例题所示:

1. 左侧所求的是0度根轨迹, 在将特征方程写成要求形式后满足绘制根轨迹的条件, 故正常绘制0度根轨迹
2. 右侧所求的是180度根轨迹, 再将特征方程写成

$$1 + \frac{(-k)(s+1)}{s^2+2s+2} = 0$$

此形式是绘制180度根轨迹形式, 若想满足绘制根轨迹的条件, 即根轨迹增益 $-k: 0 \rightarrow +\infty$ (条件1), 那么需要将 $-k$ 看成一个整体, 即 $-k: 0 \rightarrow +\infty$ 画180度根轨迹

3. 右侧若想绘制0度根轨迹，那么特征方程有(下式与上式完全相同)

$$1 - \frac{k(s+1)}{s^2 + 2s + 2} = 0$$

需要注意的是，此系统的**根轨迹增益是 $-k$** ，我们按照正常方法绘制根轨迹时，都要求**根轨迹增益是 $0 \rightarrow +\infty$ (条件1)**。上述式子虽然符合0度根轨迹的形式，但是若 $k : 0 \rightarrow +\infty$ 变化,则不符合条件1，那么就需要将 $k : 0 \rightarrow -\infty$ ，即有 $-k : 0 \rightarrow +\infty$ ，此时符合条件1，才能**正常绘制0度根轨迹**

根轨迹特殊类型题

稳定性

稳定性判断

- 根在实轴负半轴：单调收敛(指数形式)
- 根在实轴正半轴：单调发散(指数形式)
- 根在左侧平面上：振荡收敛(三角函数)
- 根在右侧平面上：振荡发散(三角函数)
- 在虚轴上：临界稳定(也是不稳定)

稳态误差

即正常求稳态误差，常用静态误差系数方法来计算(因为快)，不稳定时候就没有稳态误差

即在平面上就是振荡，在实轴上就是单调，在虚轴上就是最高与最低点连起来直线；在左半平面即稳定，右半平面即不稳定，在虚轴上临界稳定(不稳定)

动态性能指标

动态性能指标的分析

一般只分析靠近虚轴的根，我们称其为主根，可以利用二阶系统的动态性能指标进行分析

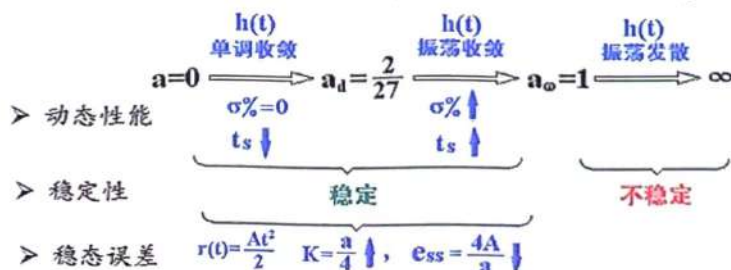
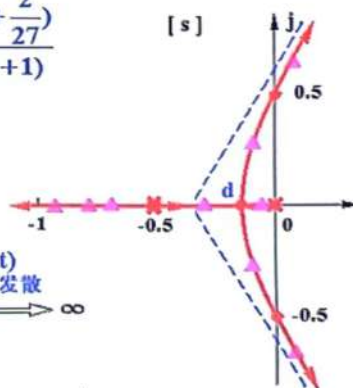
例题如下，我们只分析上面靠近虚轴的根

□ 广义根轨迹

解. (2) $\xi=1$ 时, 对应于分离点d, $a_d=2/27$

$$G^*(s) = \frac{a/4}{s(s+0.5)^2} \quad G(s) = \frac{\frac{1}{4}(s+a)}{s^2(s+1)} \stackrel{a=2/27}{=} \frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{s^2(s+1)}$$

$$\Phi(s) = \frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{s^2(s+1) + \frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})} = \frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{(s+\frac{1}{6})^2(s+\frac{2}{3})}$$



通常来讲，让你分析根轨迹的动态性能指标一般只有这几条路线

1. 实轴上水平从右到左(对应例题中第一段)

此时超调量为0，因为它是过阻尼系统(在实轴上)；调节时间变小(分母对应实轴上的绝对值，增大)

若根不在实轴上运动，那么此时超调量变小((ξ 变小))

2. 向上(对应例题中第二段)

此时超调量变大(ξ 变大)，调节时间变大(分母对应实轴上的绝对值，变小)

- 调节时间要看是向左(变小)、向右(变大)、还是不变(不变)
- 超调量在实轴上为0不变，除此之外向左变小，向右变大

K^* 与动态性能指标

以下内容均默认有三个根，其中两个为共轭副根，另一个为负实数

给动态性能指标求 K^*

1. 根据 β 角可设出一个复根，即 $\lambda_1 = -\xi\omega + j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n$ ，此时第二个根 λ_2 也可求出(共轭复根)，在利用根之和，可求出第三个根 λ_3 与 ω_n 关系
2. 将三个根带入特征方程 $D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)$ 中，同时特征方程又等于 $D(s) = \frac{\text{分子}}{\text{分母}}$ (即用普通方法求得展开后的特征方程)，让二者相等，待定系数求解即可

给 K^* 求动态性能指标

1. 通过 K^* 利用模值条件 $K^* = |\lambda_3 - P_1||\lambda_3 - P_2||\lambda_3 - P_3|$ ，求出负实数根 λ_3 的值
2. 已知 $D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)$ ，利用长除法可求得 $\frac{D(s)}{(s - \lambda_3)} = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)$ (这里求出来的是括号打开后结果)，已知 λ_1, λ_2 为共轭复根，即可通过二元一次方程求根公式求出
3. 利用共轭复根求动态性能指标

附加零点极点与动态性能指标

1. 额外附加闭环零点，导致超调量变大，上升时间变小
2. 额外附加闭环极点，导致超调量变小，上升时间变大

阻尼系数

$\xi > 1$ 即处于过阻尼状态，那么要求全部根都是负数实根，且都不相等(即根在实轴负半轴上，一般一直求到到分离点)

$\xi = 1$ 即处于临界阻尼状态，那么就要求根是相等**负实数**的状态(一般是求分离点，即有两个根相等且为负实数)

$0 < \xi < 1$ 即处于欠阻尼状态，那么要求有共轭副根(有负实部，一般是从虚轴到分离点这一段)

$\xi = 0$ 即处于无阻尼状态，那么要求都是**纯虚根**

根轨迹类型证明

□ 绘制轨迹的基本法则



例4 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$
 $K^* = 0 \rightarrow \infty$, 证明复平面的根轨迹为圆弧。

➤ 开环传递函数 $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$ $\begin{cases} K = 2K^* \\ v = 1 \end{cases} \quad [s]$

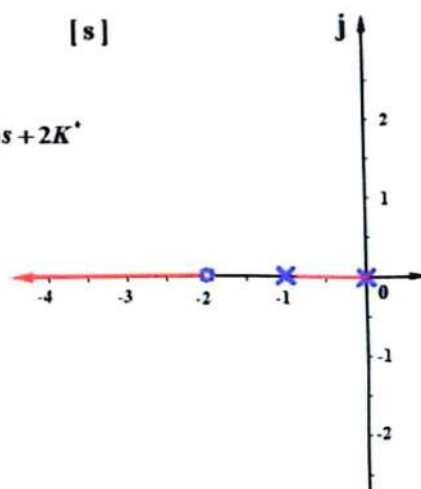
➤ 闭环特征方程 $D(s) = s(s+1) + K^*(s+2) = s^2 + (1+K^*)s + 2K^*$

$$s_{1,2} = \frac{-(1+K^*) \pm \sqrt{(1+K^*)^2 - 8K^*}}{2}$$
$$= \frac{-(1+K^*)}{2} \pm j \sqrt{\frac{8K^* - (1+K^*)^2}{4}} = \sigma \pm j\omega$$

$$\sigma = \frac{-(1+K^*)}{2} \Rightarrow K^* = -2\sigma - 1$$

$$\omega^2 = \frac{8K^* - (1+K^*)^2}{4} = \frac{-8(2\sigma+1) - 4\sigma^2}{4} = -\sigma^2 - 4\sigma - 2$$

$$\sigma^2 + 4\sigma + 4 + \omega^2 = 2 \quad (\sigma+2)^2 + \omega^2 = \sqrt{2}^2$$



频率特性基本概念

频率响应

频率响应：线性系统稳态正弦响应的幅值、相角随输入频率变化的规律性

就是求幅值比与相角差

在线性系统中，输入正弦信号 $\sin \omega t$ ，输出也是正弦信号，其幅值与相位角之于 ω 有关

频率特性 $G(j\omega)$

频率特性 $r(t) = A \sin \omega t \rightarrow \frac{1}{Ts+1} \rightarrow c_s(t) = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$

➤ 频率特性 $G(j\omega)$ 的定义

$G(j\omega)$ 定义一： $G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$

$\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{|c_s(t)|}{|r(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \\ \angle G(j\omega) = \angle c_s(t) - \angle r(t) = -\arctan \omega T \end{cases}$ 幅频特性 相频特性

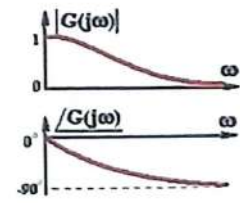
$G(j\omega)$ 定义二： $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$

$\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \angle -\arctan \omega T = \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| \angle \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{Ts+1} \Big|_{s=j\omega}$

$G(j\omega)$ 定义三：

$G(s) = C(s)/R(s)$
 $C(s) = G(s)R(s)$
 $C(j\omega) = G(j\omega) \cdot R(j\omega)$

$c(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(s)R(s) \cdot e^{st} ds$
 $= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} G(j\omega)R(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d(j\omega)$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)R(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$



- 定义一是其物理意义
- 从定义二可知，求任何系统的频率特性，只要把传递函数(闭环) s 换成 $j\omega$
 - i. 取模就幅值比

$$\text{取模} = \frac{\text{输出幅值}}{\text{输入幅值}}$$

- ii. 取相角就是相角差

$$\text{取相角} = \text{输出相角} - \text{输入相角}$$

- iii. 输出信号 = 输出幅值 $\sin(\omega t + \text{输出相角})$

- 定义三就是输出的傅里叶变换就是频率特性与输入的傅里叶变换乘积，然后可导出频率特性

画图表示

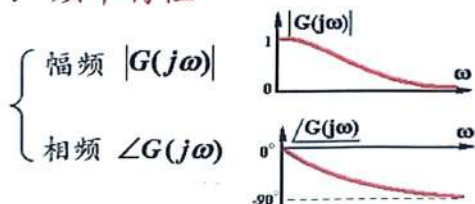
频率特性的基本概念

以 $G(j\omega) = \frac{1}{Ts+1} \Big|_{s=j\omega}$ 为例。

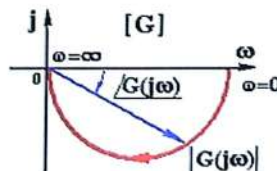


➤ 频率特性 $G(j\omega)$ 的表示方法

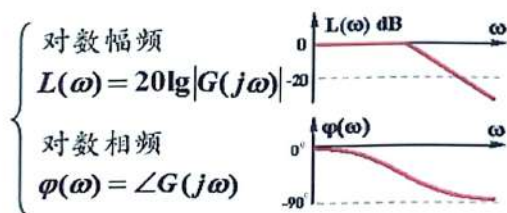
I. 频率特性



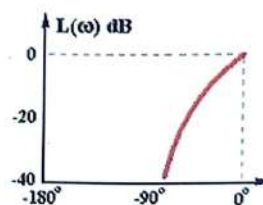
II. 幅相特性 (Nyquist)



III. 对数频率特性 (Bode)



IV. 对数幅相特性 (Nichols)



Nyquist图

经典环节Nyquist图

幅相频率特性-Nyquist图

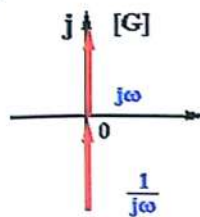


典型环节的幅相频率特性曲线

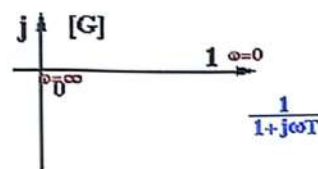
(1) 比例环节 $G(s) = K$ $G(j\omega) = K$ $\begin{cases} |G| = K \\ \angle G = 0^\circ \end{cases}$



(2) 微分环节 $G(s) = s$ $G(j\omega) = j\omega$ $\begin{cases} |G| = \omega \\ \angle G = 90^\circ \end{cases}$



(3) 积分环节 $G(s) = \frac{1}{s}$ $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ $\begin{cases} |G| = 1/\omega \\ \angle G = -90^\circ \end{cases}$

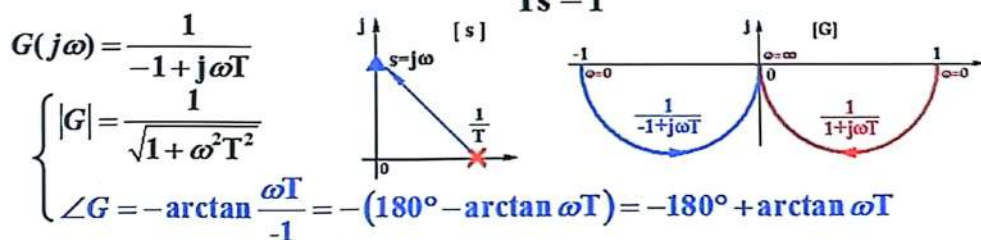


(4) 惯性环节 $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ $\begin{cases} |G| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \\ \angle G = -\arctan \omega T \end{cases}$
 $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$

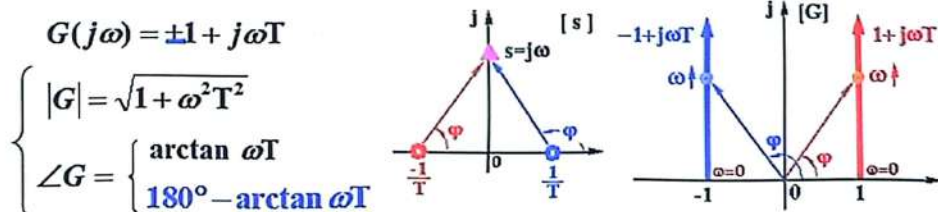
幅相频率特性-Nyquist图



不稳定惯性环节 $G(s) = \frac{1}{Ts-1}$



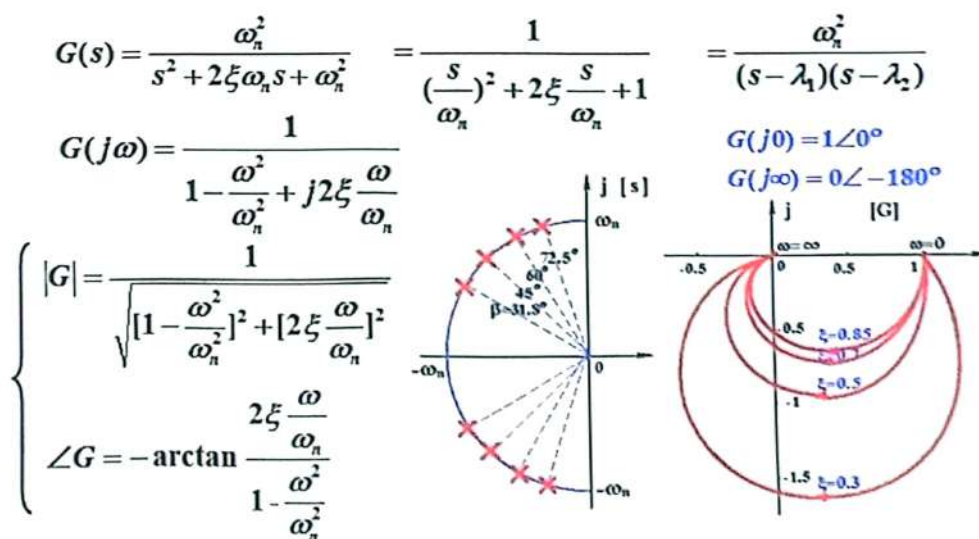
(5) 一阶复合微分 $G(s) = Ts \pm 1$



□ 幅相频率特性-Nyquist图



(6) 振荡环节



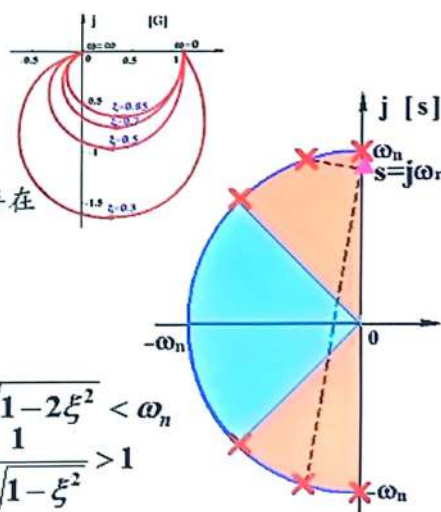
□ 幅相频率特性-Nyquist图



谐振频率 $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$

谐振峰值 $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$

$$\begin{cases} \xi > 0.707 & (\beta < 45^\circ) & 1 - 2\xi^2 < 0 & \omega_r, M_r \text{ 不存在} \\ \xi = 0.707 & (\beta = 45^\circ) & 1 - 2\xi^2 = 0 & \begin{cases} \omega_r = 0 \\ M_r = 1 \end{cases} \\ 0 < \xi < 0.707 & (45^\circ < \beta < 90^\circ) & 1 - 2\xi^2 > 0 & \begin{cases} \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_n \\ M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} > 1 \end{cases} \\ \xi = 0 & (\beta = 90^\circ) & 1 - 2\xi^2 = 1 & \begin{cases} \omega_r = \omega_n \\ M_r = \infty \end{cases} \end{cases}$$



幅相频率特性-Nyquist图



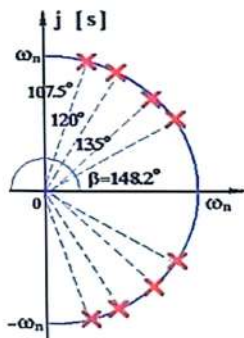
➤ 不稳定振荡环节

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{1}{(\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

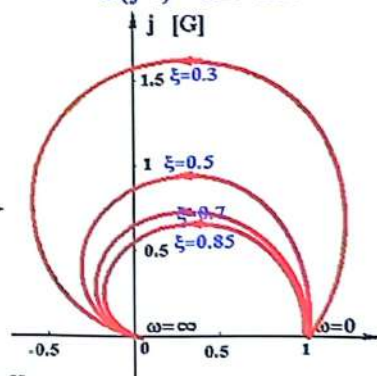
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\begin{cases} |G| = \frac{1}{\sqrt{[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}]^2 + [2\xi \frac{\omega}{\omega_n}]^2}} \\ \angle G = -\arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = -360^\circ + \arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{cases}$$



$$G(j0) = 1 \angle -360^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$$



幅相频率特性-Nyquist图

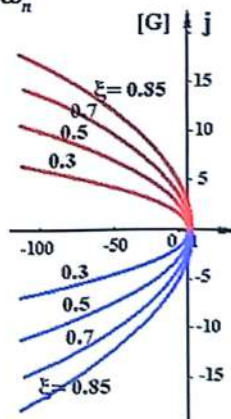
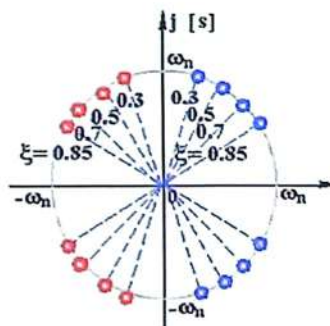


(7) 二阶复合微分

$$G(s) = T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1 = (\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1$$

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\begin{cases} |G| = \sqrt{[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}]^2 + [2\xi \frac{\omega}{\omega_n}]^2} \\ \angle G^+ = \arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \\ \angle G^- = \arctan \frac{-2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = 360 - \arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{cases}$$



幅相频率特性-Nyquist图

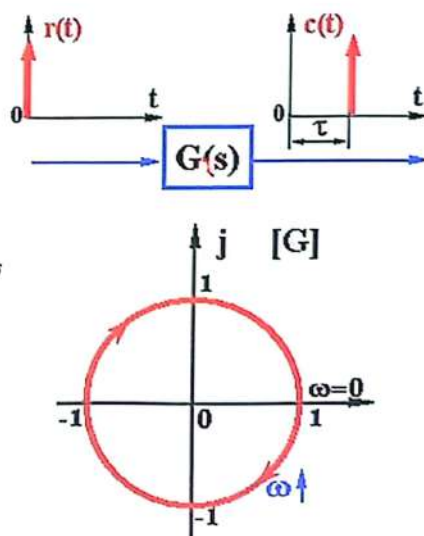


(8) 延迟环节 $G(s) = e^{-\tau s}$

$$\begin{cases} r(t) = \delta(t) \\ c(t) = k(t) = \delta(t - \tau) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R(s) = 1 \\ C(s) = e^{-\tau s} \end{cases} \quad G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}$$

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \quad \begin{cases} |G| = 1 \\ \angle G = -\tau\omega \end{cases}$$



经典环节Nyquist全图

幅相频率特性-Nyquist图



典型环节的幅相频率特性

(1) $G(j\omega) = K$

(2) $G(j\omega) = j\omega$

(3) $G(j\omega) = 1/j\omega$

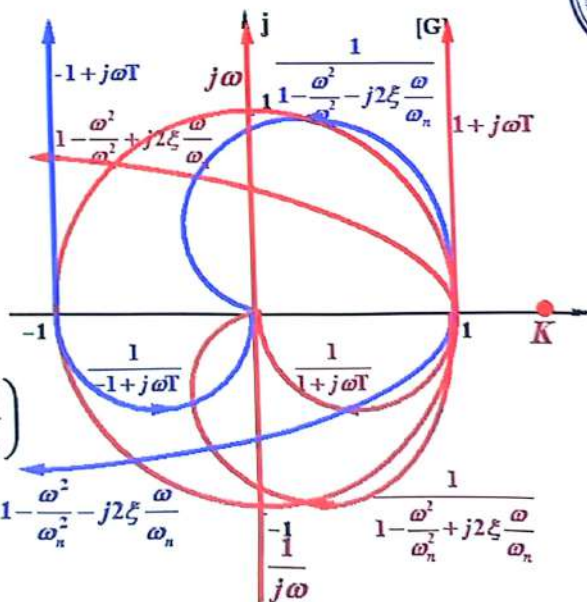
(4) $G(j\omega) = 1/(1 + j\omega T)$

(5) $G(j\omega) = \pm 1 + j\omega T$

(6) $G(j\omega) = 1 / \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)$

(7) $G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}$

(8) $G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$



补充说明

1. 角度 = $\frac{\text{虚部}}{\text{实部}}$
2. 角度 = 分子 - 分母
3. 若是两点重合，这两点间角度为90度
4. 谐振频率即幅值最大时候频率，是求得出来的

绘制开环环节Nyquist图步骤

1. 将传递函数写成乘积形式，并在**复平面**上画出零点、极点，此时可以看成有从零点、极点到y轴上 $j\omega$ 的向量，即求这些向量的角度、幅值
2. 求出起始点和终止点角度、模值，要注意分母的情况
3. $j\omega$ 向上移动，观察角度、模值变化趋势
4. 按照趋势大概画图(G平面)
5. 必要时候可求与X, Y轴交点
 - 与X轴交点
虚部为0
 - 与Y轴交点
实部为0

Bode图

Bode图基本概念

Y轴坐标(幅值部分)是取20倍lg, 即

$$L(\omega) = 20 \lg(\omega)$$

X轴坐标是按照lg ω 刻画的, 但是习惯上仍写 ω , 也就是说写的数字都是 ω

Bode图中形如0.1到1, 1到10称为十倍频, 也叫一个旬距

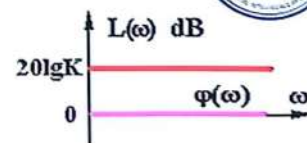
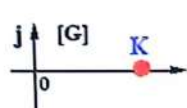
典型环节Bode图

开环频率特性-对数频率特性(Bode图)

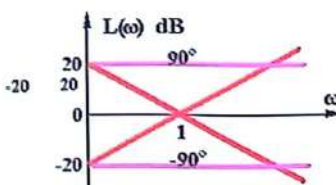
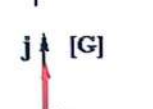


典型环节的Bode图

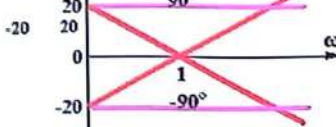
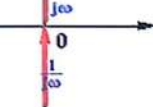
(1) 比例环节 $G(j\omega) = K$ $\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg K \\ \varphi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$



(2) 微分环节 $G(j\omega) = j\omega$ $\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = 90^\circ \end{cases}$

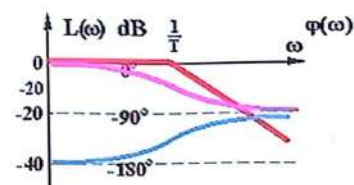
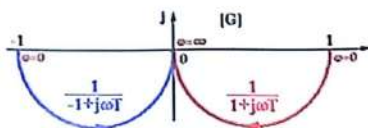


(3) 积分环节 $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ $\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$



(4) 惯性环节 $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$

$$\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan \omega T \\ -180^\circ \end{cases} \end{cases}$$



□ 开环频率特性-对数频率特性 (Bode 图)

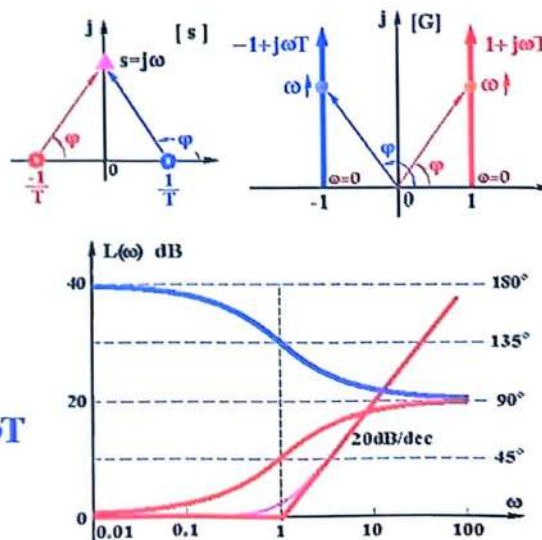


(5) 一阶复合微分

$$G(s) = Ts + 1$$

$$G(j\omega) = +1 + j\omega T$$

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} \arctan \omega T \\ 180^\circ - \arctan \omega T \end{cases} \end{cases}$$



□ 开环频率特性-对数频率特性 (Bode 图)

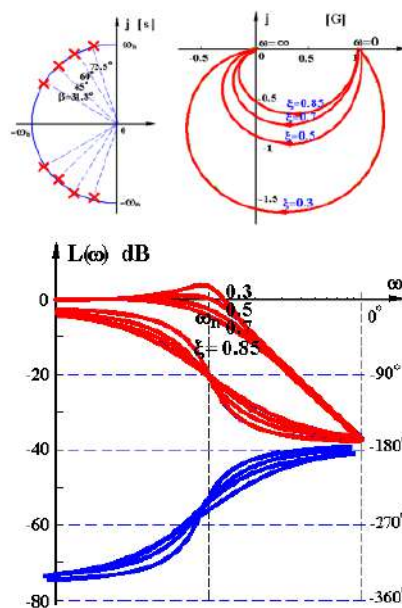


(6) 振荡环节 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan \left[\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right] \\ -360^\circ + \arctan \left[\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right] \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 & \begin{cases} L(\omega) \approx 0 \\ \varphi(\omega) \approx 0^\circ / -360^\circ \end{cases} \\ \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 & \begin{cases} L(\omega) \approx -40 \lg(\omega/\omega_n) \\ \varphi(\omega) \approx -180^\circ \end{cases} \end{aligned}$$



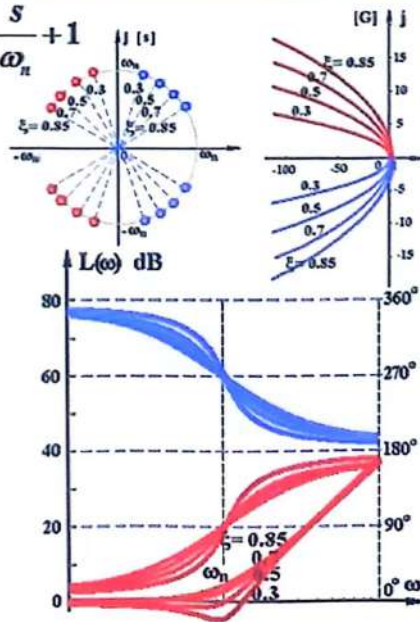
□ 开环频率特性-对数频率特性 (Bode 图)



(7) 二阶复合微分 $G(s) = \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1$

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\left\{ \begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg \sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \\ \varphi(\omega) &= \begin{cases} \arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \\ 360 - \arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{cases} \end{aligned} \right.$$



□ 开环频率特性-对数频率特性 (Bode 图)

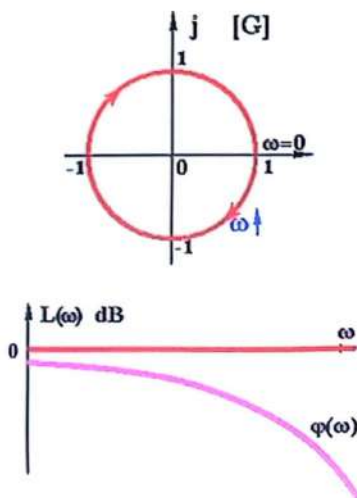


(8) 延迟环节

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$

$$\left\{ \begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg 1 = 0 \\ \varphi(\omega) &= -57.3^\circ \times \tau \omega \end{aligned} \right.$$



转折频率

惯性环节

惯性环节的对数频率特性为

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

当 $\omega < \frac{1}{T}$, 则可将 $\omega^2 T^2$ 忽略, 即有 $L(\omega) \approx -20 \lg 1 = 1$; 当 $\omega > \frac{1}{T}$, 则可将1忽略, 即有 $L(\omega) \approx 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2} = \lg \omega T$, 此时 $\frac{1}{T}$ 称为转折频率

振荡环节

振荡环节的对数频率特性为

$$L(\omega) = -20 \lg \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)$$

当 $\omega < \omega_n$, 则可将 $\frac{\omega}{\omega_n}$ 忽略, 即有 $L(\omega) \approx -20 \lg 1 = 1$; 当 $\omega > \omega_n$, 则可将1忽略, 由于前面式子是四次方, 那么也可将 $(2\xi \frac{\omega}{\omega_n})^2$ 忽略, 即为 $L(\omega) = -40 \lg \frac{\omega}{\omega_n}$, 此时 ω_n 称为转折频率

实际上利用上述近似条件, 会使在转折频率时图像不准确

注意: 以转折频率的角度为中心, 角度的那条线是中心对称的

斜率

由于X轴坐标是 $\lg \omega$, 那对于形如 $L(\omega) = 20 \lg(\omega)$, 其在Bord图上斜率就是20。相当于是一个旬距上升20分贝, 那么想要快速画出不同斜率直线时候, 只要在一个旬距里面上升(+)或下降(-)对应距离就可以快速做出对应的直线了。

典型环节的斜率如下:

1. 微分环节: 20
2. 积分环节: -20
3. 惯性环节: -20
4. 一阶复合微分: 20
5. 振荡环节: -40
6. 二阶符合微分: 40

Bord图与Nyquist图之间关系

□ 开环频率特性-对数频率特性(Bode图)



例1 根据Bode图确定系统传递函数。

解. 依图有 $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$

$$20 \lg K = 30 \Rightarrow K = 10^{\frac{30}{20}} = 31.6$$

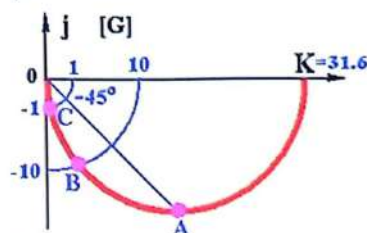
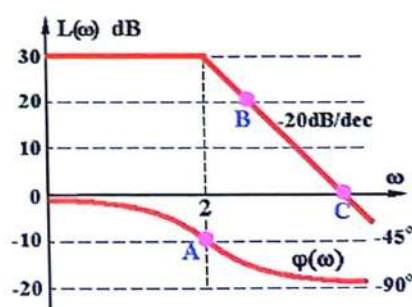
$$\text{转折频率 } \omega = 2 = 1/T \quad G(s) = \frac{31.6}{\frac{s}{2} + 1}$$

• Bode图与Nyquist图之间的对应关系:

• 截止频率 ω_c : $|G(j\omega_c)| = 1$

$$30\text{dB} = 20(\lg \omega_c - \lg 2) = 20 \lg \frac{\omega_c}{2}$$

$$\lg \frac{\omega_c}{2} = \frac{30}{20} = 1.5 \quad \omega_c = 2 \times 10^{1.5} = 63.2 \text{ rad/s}$$



1. 已知角度, 那么就在Nyquist图找到对应角度画一条线, 与其交点即是所求点
2. 已知模值, 那么就在Nyquist图中以原点为心, 以模值为角度画圆, 与其交点即是所求点

3. 截止频率是模值为1的点，也是Bord图中与X交点，它有两种求解方法
 - 解模值等于1方程(不推荐)
 - 根据Bord图中三角形，解三角形求解(用过都说好)

绘制开环环节Bord图步骤

幅频特性曲线

1. 将 $G(s)$ 化为尾1标准型
2. 按照顺序写出转折频率
3. 确定基准线
 - 基准点(基准线过的点): $(\omega = 1, L(1) = 20 \lg K)$ ，即经过点 $(1, 20 \lg K)$
 - 斜率 $-20v$

K为增益，v为几阶系统

如果我们将所有复杂的环节去掉，只剩下形如 $\frac{K}{s^v}$ 时候，我们发现，图一开始是条斜线，这条斜线可由上述方法确定由于 $20\lg$ 有叠加的特性，其他的复杂的环节都是依次叠加在这条斜线上的，所以这个斜线是基准线

4. 叠加作图

其他环节在没有到达**转折频率**时，就按照基准线或基准线叠加其他转折频率比他小环节后的图像画；经过转折频率后，就在**原有斜率基础上，叠加**自己的斜率，画出斜线
5. 修正
 - 两个惯性环节转折频率比较接近时
 - 振荡环节 $\xi < 0.38$ 需要有向上鼓包， $\xi > 0.8$ 会向下比较平
6. 检查
 - 最右端斜率为 $-20(n - m)$
 - 转折点数=惯性+一阶复合微分+振荡+二阶复合微分
 - $\varphi \rightarrow -90(n - m)$

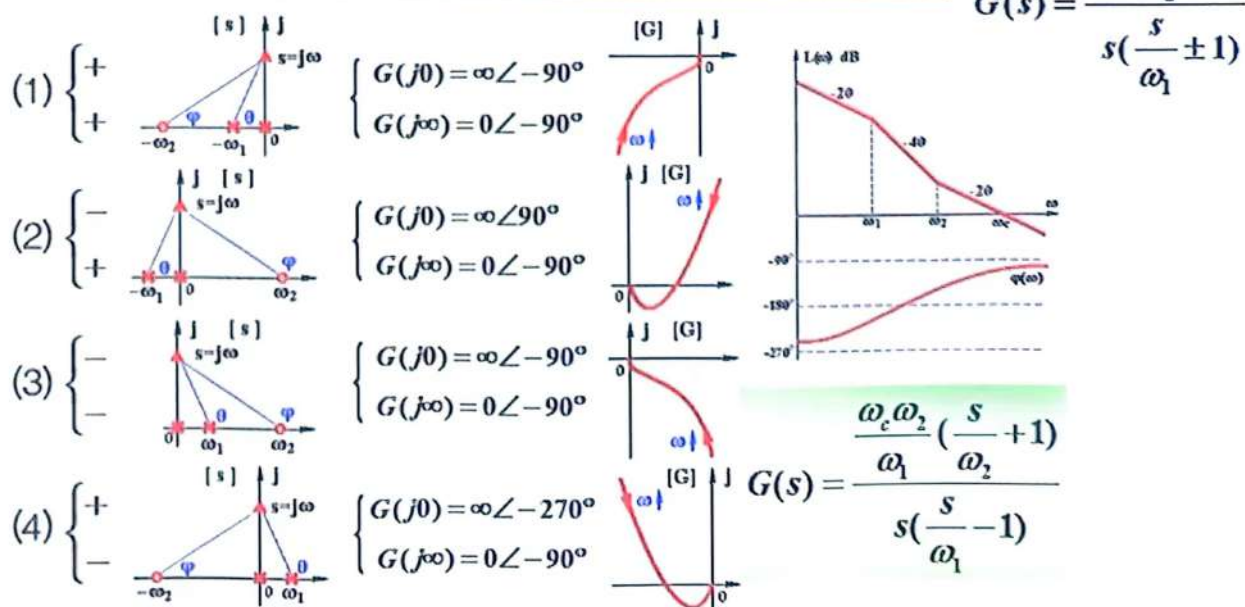
n为极点数，m为零点数

相频特性曲线

1. 依次画出每个环节的相频特性曲线(也包括 $\frac{K}{s^v}$)
2. 转折频率处应为45度
3. 叠加所有相频特性曲线

非最小项系统

□ 最小相角系统和非最小相角系统 (2)



□ 最小相角系统和非最小相角系统 (3)

非最小相角系统

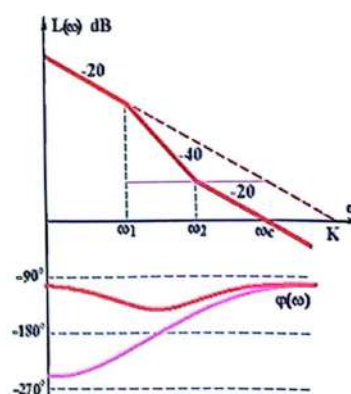
—— 在右半s平面存在开环零、极点或带纯延时环节的系统

★ 非最小相角系统相角变化的绝对值一般比最小相角系统的大

★ 非最小相角系统未必不稳定

★ 最小相角系统由 $L(\omega)$ 可以唯一确定 $G(s)$

非最小相角系统由 $L(\omega)$ 不能唯一确定 $G(s)$



实际上，当你通过Bode图要写出系统的开环传递函数式，会发现Bode图对应角度部分是对不上的，这时候就需要考虑每个环节的**不稳定**情况，依次列举判断出环节中的正负号



Nyquist判据与对数稳定判据

□ 频域稳定判据



系统稳定的充要条件 — 全部闭环极点均具有负的实部

代数稳定判据 — **Ruoth判据**

- 由闭环特征多项式系数（不解根）判定系统稳定性
- 不能用于研究如何调整系统结构来改善系统稳定性的问题

频域稳定判据 — **Nyquist 判据**
对数稳定判据

- 由开环频率特性直接判定闭环系统的稳定性
- 可以研究包含延迟环节的系统的稳定性问题
- 可研究如何调整系统结构参数改善系统稳定性及性能问题

Nyquist稳定判据

$$Z = P - 2N$$

其中 Z 为闭环函数右半平面极点个数； P 为开环传递函数右半平面极点个数； N 为开环传递函数画出的Nyquist图，绕 $(-1, 0)$ 点转的圈数

注意事项：

- 右半平面不包含0点
- 顺时针为负圆，符号为—
逆时针为正圆，符号为+
- 允许有半圆，即 N 可为 $\pm\frac{1}{2}$ ，且 $\frac{1}{2}$ 是最小单位

对数稳定判据

若是在Bode图中，可以有以下结论：

$$N = N_+ - N_-$$

他们满足以下规则：

- 只看Bode图中 $L(\omega) > 0$ 时对应的相角图像
- N_+ 为由下向上穿过-180度次数； N_- 为由上向下穿过-180度次数
- 从接近-180出去为 $+\frac{1}{2}$ ，靠近-180为 $-\frac{1}{2}$

特殊情况

针对s平面而言，若是开环极点出现在虚轴上，一般是在0的情况，那么在算 $j0(j\omega)$ 是需要计算两个：

1. $j0$ ，此时该点($j\omega$)相当于在X正半轴上
2. $j0^+$ ，此时该点($j\omega$)相当于在Y正半轴上

在Nyquist图中用虚线表示 $j0$ 到 $j0^+$ 变化，这条虚线也计算绕 $(-1, 0)$ 点转的圈数

在Bord图中相角部分也是要画出该虚线，这条虚线也参与计算 N^+ 与 N^- 情况

奈氏判据的应用

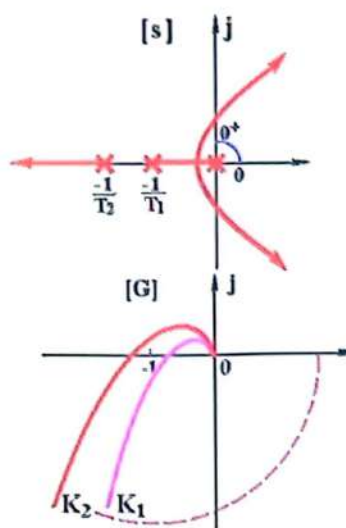
例3 已知单位反馈系统开环传递函数，分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

解：依题有

$$\begin{cases} G(j0) = \infty \angle 0^\circ \\ G(j0^+) = \infty \angle -90^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} K_1 \text{ (小)} & N=0 & \text{(稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0 \\ K_2 \text{ (大)} & N=-1 & \text{(不稳定)} \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2 \end{cases}$$



稳定裕度

稳定裕度

在时域内，一般用阻尼比 ξ 来描述系统的稳定程度，越靠近虚轴代表、 ξ 越小，调节时间就越大，一般取 $\xi = 0.707$ 最好

而在频域内一般取到(-1,0)点的距离作为衡量系统稳定程度，那么他有如下两种定义：

□ 稳定裕度

➤ 稳定裕度的定义

截止频率 ω_c $|G(j\omega_c)| = 1$

相角裕度 γ $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)$

相角交界频率 ω_g $\angle G(j\omega_g) = -180^\circ$

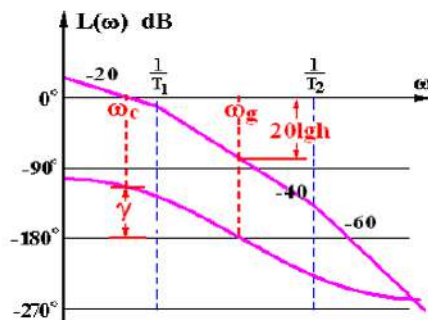
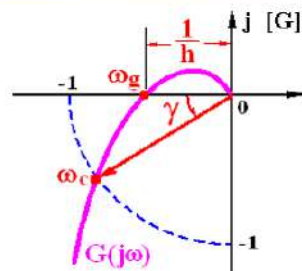
幅值裕度 h $h = \frac{1}{|G(j\omega_g)|}$

γ, h 的几何意义

γ, h 的物理意义

$\begin{cases} \gamma \\ h \end{cases}$ 系统在 $\begin{cases} \text{相角} \\ \text{幅值} \end{cases}$ 方面的稳定储备量

一般要求 $\begin{cases} \gamma > 40^\circ \\ h > 2 \end{cases}$



□ 稳定裕度



稳定裕度的概念 (开环频率指标)

稳定裕度的定义

$$\begin{cases} \text{截止频率 } \omega_c & |G(j\omega_c)| = 1 \\ \text{相角裕度 } \gamma & \gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) \\ \text{相角交界频率 } \omega_g & \angle G(j\omega_g) = -180^\circ \\ \text{幅值裕度 } h & h = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} \end{cases}$$

稳定裕度的意义

$$\begin{cases} \gamma, h \text{ 的几何意义} \\ \gamma, h \text{ 的物理意义} \end{cases}$$

稳定裕度计算方法

$$\begin{cases} L(\omega) \Rightarrow \omega_c \Rightarrow \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) \\ \varphi(\omega) = -180^\circ \Rightarrow \omega_g \Rightarrow h = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} \end{cases}$$

利用开环频率特性分析系统的性能

□ 利用开环频率特性分析系统的性能



➤ 三频段理论

1. $L(\omega)$ 低频段 \Leftrightarrow 系统稳态误差 ess

$$G_0(s) = \frac{K}{s^v} \begin{cases} 20 \lg |G_0| = 20 \lg K - v \cdot 20 \lg \omega \\ \angle G_0 = -v \cdot 90^\circ \end{cases}$$

2. $L(\omega)$ 中频段 \Leftrightarrow 系统动态性能 ($s\%$, t_s)

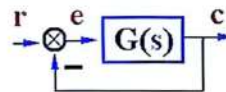
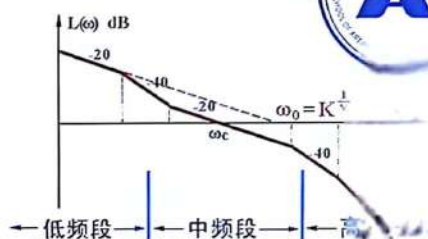
最小相角系统 $L(\omega)$ 曲线斜率与 $\Phi(\omega)$ 的对应关系

$$\begin{array}{lll} -20\text{dB/dec} & -90^\circ & \gamma = 90^\circ \\ -40\text{dB/dec} & -180^\circ & \gamma = 0^\circ \\ -60\text{dB/dec} & -270^\circ & \gamma = -90^\circ \end{array}$$

希望 $L(\omega)$ 以 -20dB/dec 斜率穿越 0dB 线, 并保持较宽的频段

3. $L(\omega)$ 高频段 \Leftrightarrow 系统抗高频噪声能力

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \xrightarrow{|G(s)| \ll 1} |\Phi(s)| \approx |G(s)| \ll 1$$



□ 利用开环频率特性分析系统的性能

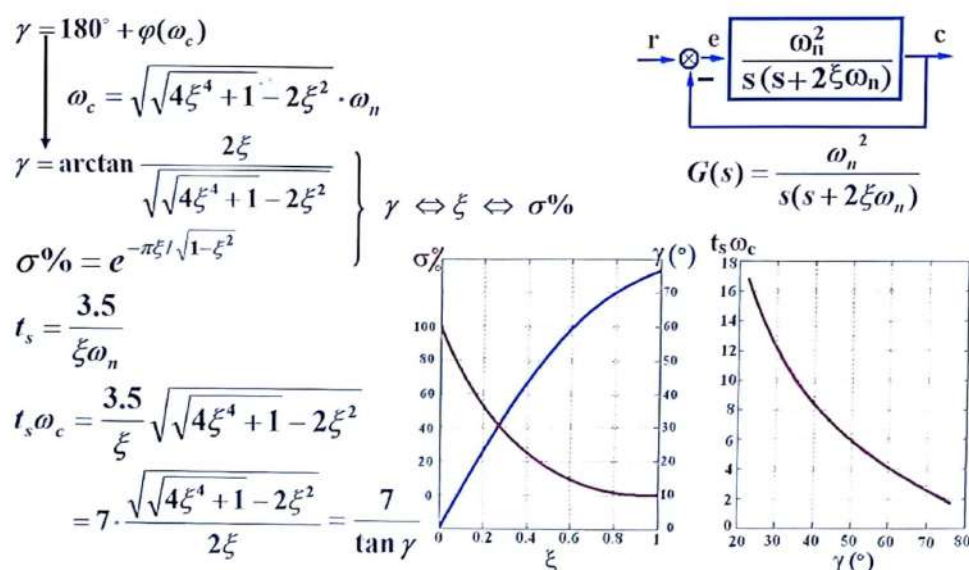


频段	对应性能	希望形状
$L(\omega)$	低频段 $\left\{ \begin{array}{l} \text{开环增益 } K \\ \text{系统型别 } \nu \end{array} \right.$	稳态误差 e_{ss} 陡, 高
	中频段 $\left\{ \begin{array}{l} \text{截止频率 } \omega_c \\ \text{相角裕度 } g \end{array} \right.$	动态性能 $\left\{ \begin{array}{l} \sigma\% \\ t_s \end{array} \right.$ 缓, 宽
	高频段	系统抗高频干扰的能力 低, 陡

三频段理论并没有为我们提供设计系统的具体步骤, 但它给出了调整系统结构、改善系统性能的原则和方向

针对二阶系统而言, 在中频段中动态性能指标可以按照如下计算并查表求出:

□ 利用开环频率特性分析系统的性能



快速绘制Nyquist图相频特性曲线

1. 绘制出幅频特性曲线
2. 计算要趋近的角度

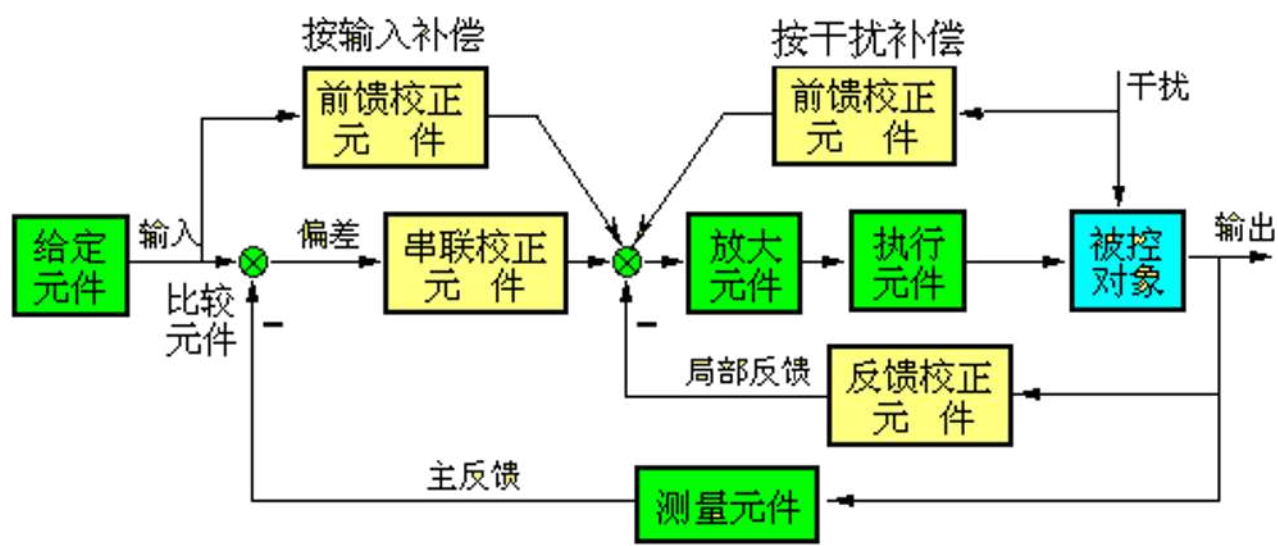
$$\text{要趋近的角度} = \frac{\text{斜率}}{20} \times 90$$

值得注意的是, 纯积分微分环节不是趋近的, 而是一开始就画在上述公式所算出角度, 其他环节则是趋近的

3. 根据要趋近的角度画图，但是要在转折频率前就要有所变化(上升/下降)

超前串联校正

串联超前校正，就是在原有系统的开环传递函数 $G(s)$ 的前面串联一个新的环节(元件)， $G_c(s) = \frac{aTs+1}{Ts+1}$ 。串联后二者为一个整体，来分析新的系统是否满足我需要的特性。



校正方式： 串联校正， 反馈校正， 复合校正

网络特性

频率法串联校正



超前串联校正-超前网络特性

$$G_c(s) = \frac{aTs+1}{Ts+1} \quad (a > 1)$$

$$H = 20 \lg \frac{1/T}{1/aT} = 20 \lg a$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(aT\omega) - \arctan(T\omega) = \arctan \frac{T\omega(a-1)}{1+aT^2\omega^2}$$

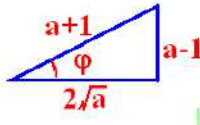
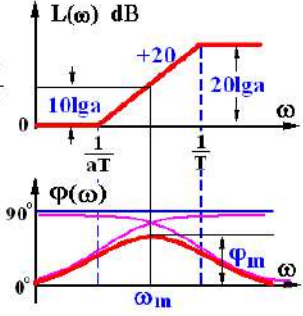
$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\omega} [\tan \varphi(\omega)] = 0$$

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{T\omega(a-1)}{1+aT^2\omega^2} \right] = \frac{T(a-1)[1-aT^2\omega^2]}{(1+aT^2\omega^2)^2} = 0$$

$$\omega_m = 1/\sqrt{aT}$$

$$\tan \varphi(\omega_m) = \frac{T\omega_m(a-1)}{1+aT^2\omega_m^2} \bigg|_{\omega_m = 1/\sqrt{aT}} = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$$

$$\varphi_m = \varphi(\omega_m) = \arctan \frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$$



可解出

$$\begin{cases} a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \\ L(\omega_m) = 10 \lg a \end{cases}$$

串联超前校正实际上就是对增大幅值，扩大相角；前者为乘的关系，后者为加的关系。即校正后的幅值是乘上串联的环节，校正后的相角

是加上串联的相角。

要想**完美的利用**增加的相角，以满足稳定裕度的条件，那么就应该把**串联环节最大的相角**加到**校正后的截止频率**处(因为截止频率是用来计算相角裕度)

注意：是校正后的截止频率，而不是校正前的截止频率

而串联环节最大的相角处对应的频率就是上图中的 ω_c ，对应幅值是 $10 \lg a$ ，也恰好是三角形的几何中点；同时我们也可以导出 ω_c 与其他参数的关系

串联环节最大相角处的幅值是 $10 \lg a$ ，最大处的频率也是对应校正后的系统截止频率

设计超前串联校正

方法1

□ 频率法串联校正

➤ 超前网络特性

实质 — 利用超前网络相角超前特性提高系统的相角裕度

超前校正步骤（设给定指标 $e_{ss}^*, \omega_c^*, \gamma^*$ ）

① 由 $e_{ss}^* \rightarrow K$

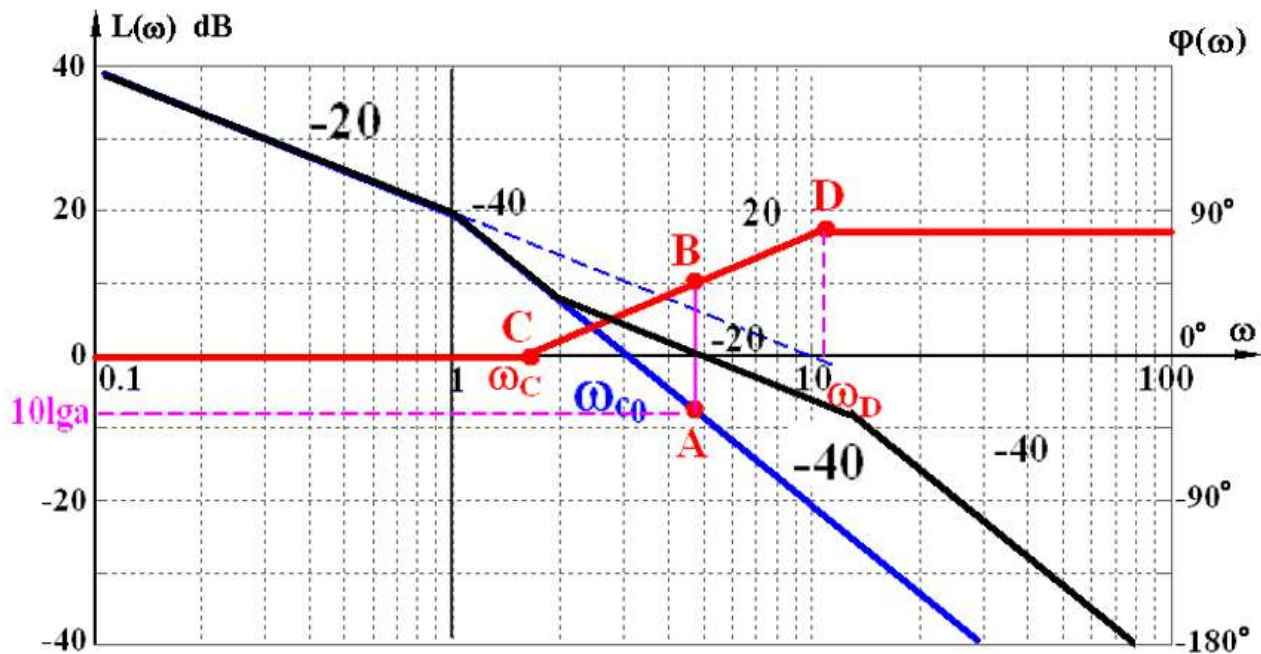
② 由 $G_0(s) \rightarrow L_0(\omega) \rightarrow \omega_{c0} \rightarrow \gamma_0 \left\{ \omega_{c0}, \gamma_0 \text{ 均不足} \right.$

③ 确定 $\varphi_m = \gamma^* - \gamma_0 + (5^\circ \sim 10^\circ) \left\{ a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}, 10 \lg a \right.$

④ 作图设计 $A - B - C - D \Rightarrow G_c(s)$

⑤ $G(s) = G_c(s) \cdot G_0(s)$ 验算 $\left\{ \begin{matrix} \omega_c \\ \gamma \end{matrix} \right.$ 是否满足要求





为什么计算串联环节要提供的 φ_m 要加上5到10度?

在上文中我们强调, 我们应该把**串联环节最大的相角**加到**校正后的截止频率**处, 而在上图中我们计算的是**原系统的截止频率**对应的相角, 而不是校正后的。而加上5到10度基本上是两个相角之间的差值

方法2

1. 设计开环增益(K), 满足稳态要求
2. 检验系统的指标(若是满足, 那就不用设计了)
3. 设计串联超前网络参数

- 截止频率取**要求的截止频率**

要求的截止频率对应应在原系统(未校正)对应的幅值必是负数, 而我们串联超前校正, 正是要通过串联环节加上一个幅值, 来使**校正后的系统**在此处**幅值恰好为0**(因为在校正后的系统中, 此处恰好是截止频率对应的幅值), 而这个加上的幅值大小是等于 $10 \lg a$ (串联环节最大相角处的幅值为此值, 也是对应校正后的系统截止频率)

- 求出 a 的值, T 的值, 并验算相角裕度是否满足
- 由于串联超前校正网络有 $\frac{1}{a}$ 衰减, 所以第一步求出的K值应该乘上 a , 即最终 $K =$ 第一步求出 $K \times a$