速度运动学

学过大物的都知道，对位移微分是速度，对速度微分是加速度。我们在前面章节算的矩阵是代表一个位姿，相当于是一个位移，那么我对这个矩阵求微分是不是就是代表了速度呢？
从某种角度来说，是这样的，所以首先我们来看看怎么微分，这些微分有哪些性质？

微分运动与微分变换

为解决两个不同坐标系之间的微小位移关系问题，需要讨论机器人杆件在作微小运动时的位姿变化，而这种微小变化在数学上可以用微分变化表示
那么一个矩阵该怎么求微分呢？
很简单，如下图所示:

$$dT=\begin{bmatrix} \frac{\partial t_{11}}{\partial x} & \frac{\partial t_{12}}{\partial x} & \frac{\partial t_{13}}{\partial x} & \frac{\partial t_{14}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{21}}{\partial x} & \frac{\partial t_{22}}{\partial x} & \frac{\partial t_{23}}{\partial x} & \frac{\partial t_{24}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{31}}{\partial x} & \frac{\partial t_{32}}{\partial x} & \frac{\partial t_{33}}{\partial x} & \frac{\partial t_{34}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{41}}{\partial x} & \frac{\partial t_{42}}{\partial x} & \frac{\partial t_{43}}{\partial x} & \frac{\partial t_{44}}{\partial x} \end{bmatrix} dx$$

矩阵对一个元素求微分，那么对矩阵当中每个元素都求微分就行了

微分运动与性质

机器人某一杆件相对于基座坐标系的位姿为T，经过微分运动后该杆件相对基座坐标系的位姿变为$T+dT$，那么有

$$dT = \Delta \cdot T$$
$$\Delta = Trans(d_X, d_y, d_z)Rot(r, d\theta) - I_{4\times4}$$

微分运动的性质:

1. 在忽略高次项的前提下，微分变换与次序无关，即微分变换具有无序性(另一PPT说微分旋转变换具有无序性)

$$Rot(x,\delta x)\,Rot(y,\delta y)\,Rot(z,\delta z) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 微分旋转具有可加性，有$Rot(dx, dy, dz), Rot'(dx', dy', dz')$，那么$Rot(dx, dy, dz)Rot'(dx', dy', dz')$的结果就是两个矩阵轴的元素相加

$$Rot(\delta x,\delta y,\delta z)\,Rot(\delta x',\delta y',\delta z') = \begin{bmatrix} 1 & -(\delta z+\delta z') & \delta y+\delta y' & 0 \\ \delta z+\delta z' & 1 & -(\delta x+\delta x') & 0 \\ -(\delta y+\delta y') & \delta x+\delta x' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意，是矩阵的轴元素相加，**不是矩阵相加**

雅可比矩阵

数学上，我们把多元函数的偏导矩阵称为雅可比矩阵，也就是说，对一个矩阵求多元偏导就叫雅可比矩阵了

速度

通过一系列复杂的数学推导过程，我们知道速度雅可比矩阵$J(q)$为操作空间速度(基坐标系的)与关节空间速度(带关节变量的)之间的线性变换，写成数学公式就是:

$$\frac{dx}{dt}=J(q)\frac{dq}{dt}$$

如果说人话，就是我求出带关节参数的矩阵，求个偏导带入上面式子去，就得到了这个变换

举个例子，我知道机器人的的坐标和关节参数关系了:

$$\begin{cases} x=l_1cos\theta_1+l_2cos(\theta_1+\theta_2) \\ y=l_1sin\theta_1+l_2sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

我门假设，这个机器人只有关节可以旋转，那么实际上只有$\theta_1\theta_2$是变量，然后我对这两个求偏导:

$$\begin{cases} dx=\frac{\partial x}{\partial\theta_1}d\theta_1+\frac{\partial x}{\partial\theta_2}d\theta_2 \\ dy=\frac{\partial y}{\partial\theta_1}d\theta_1+\frac{\partial y}{\partial\theta_2}d\theta_2 \end{cases}$$

如果我们每行除dt实际上，每行就代表一个速度，只不过这个速度表示的是在坐标系下X轴与Y轴的速度，我们先不着急除dt
如果你听过汤家凤考研线代课，那么你一定能知道，线性代数本质上在解方程，一行一方程，线性方程组是可以用矩阵来表示的，上述那组方程可用矩阵表示为:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta_1} & \frac{\partial x}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta_1} & \frac{\partial y}{\partial\theta_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$$

我们管中间那个矩阵叫速度雅可比矩阵，对应一开始提到的$J(q)$，这里就是$J(\theta)$了，q只是代表你矩阵里面连杆是哪个量发生变化:

$$\text{速度雅可比矩阵}\quad J=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta_1} & \frac{\partial x}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta_1} & \frac{\partial y}{\partial\theta_2} \end{bmatrix}$$

如果我们对两边的矩阵都除个dt呢?
那么就变成这样:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}=J(\theta)\begin{bmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} \end{bmatrix}$$

还记得吗，我们说位移的微分就是速度，这么说速度不就出来了吗?

$$V=\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}=J(\theta)\begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix}=J(\theta)\dot\theta$$

$$V=J(\theta)\dot\theta$$

这里的$\dot\theta$、$\dot\theta_1$、$\dot\theta_2$实际上是角速度，还记得我们高数学过，字母上加一点代表微分吗？一个角度的微分就是角速度
还是线代的知识，我们在表示线性方程组的系数矩阵的时候，通常习惯用列向量来表示，那么就可以写为:

$$V=\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix}$$

所以，有:

$$V=J_1\dot{\theta}_1+J_2\dot{\theta}_2$$

可以看出，我们的速度求出来的，第一个是第一个关节引起的速度，第二个是第二个关节引起的速度，两个速度相加是**矢量加法**，而且这里表示的意思是每个关节的速度矢量合成，而不是X轴Y轴的速度矢量合成

反之，给我末端的速度，我也能求出关节的速度:

$$\dot{\theta}=J^{-1}V$$

有人可能会问，兄弟，道理我都懂，可是矩阵的逆怎么求啊?
我说，兄弟，复习一下考研线代吧，别真考不上了，$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

总结一下，我们的速度用矩阵表示就是这样的:

$$V=\begin{bmatrix}V_x\\V_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\theta_1} & \frac{\partial x}{\partial\theta_2}\\\frac{\partial y}{\partial\theta_1} & \frac{\partial y}{\partial\theta_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\\dot{\theta}_2\end{bmatrix}$$

对应成线性方程，**矩阵相乘后**的一行代表了一个方向上的速度
不知道你有没有发现速度雅可比矩阵的规律?
每行上偏导对应一个方向上的变量，每列上偏导对应一个关节变量