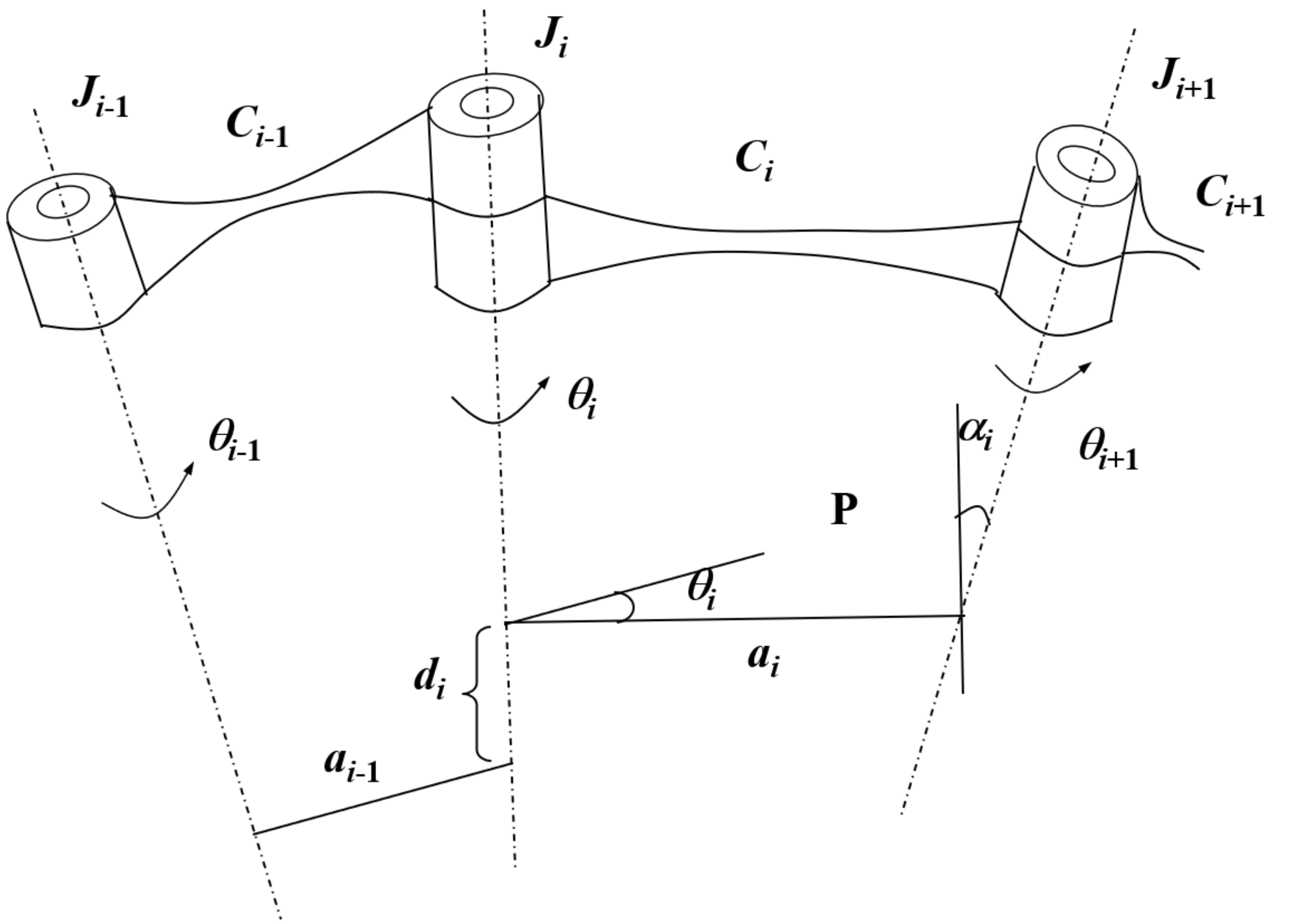
连杆变换

D-H参数

关节轴线:第i个关节的轴线记为J_i
连杆参数:

- 连杆长度:两个关节的关节轴线J_i与J_{i+1}的公垂线距离为连杆长度，记为a_i
- 连杆扭转角:由J_i与公垂线组成平面P，J_{i+1} 与平面P的夹角为连杆扭转角，记为α_i
  这里的公垂线指的是J_i与J_{i+1}间的公垂线
- 连杆偏移量:除第一和最后连杆外，中间的连杆的两个关节轴线J_i与J_{i+1}间都有一条公垂线，一个关节的相邻两条公垂线a_i与a_{i-1}的距离为连杆偏移量，记为d_i
- 关节角:关节J_i的相邻两条公垂线a_i与a_{i-1}在以J_i为法线的平面上的投影的夹角为关节角，记为θ_i

$(ai, \alpha_i, di, \theta_i)$这组参数称为D-H参数



连杆变换矩阵

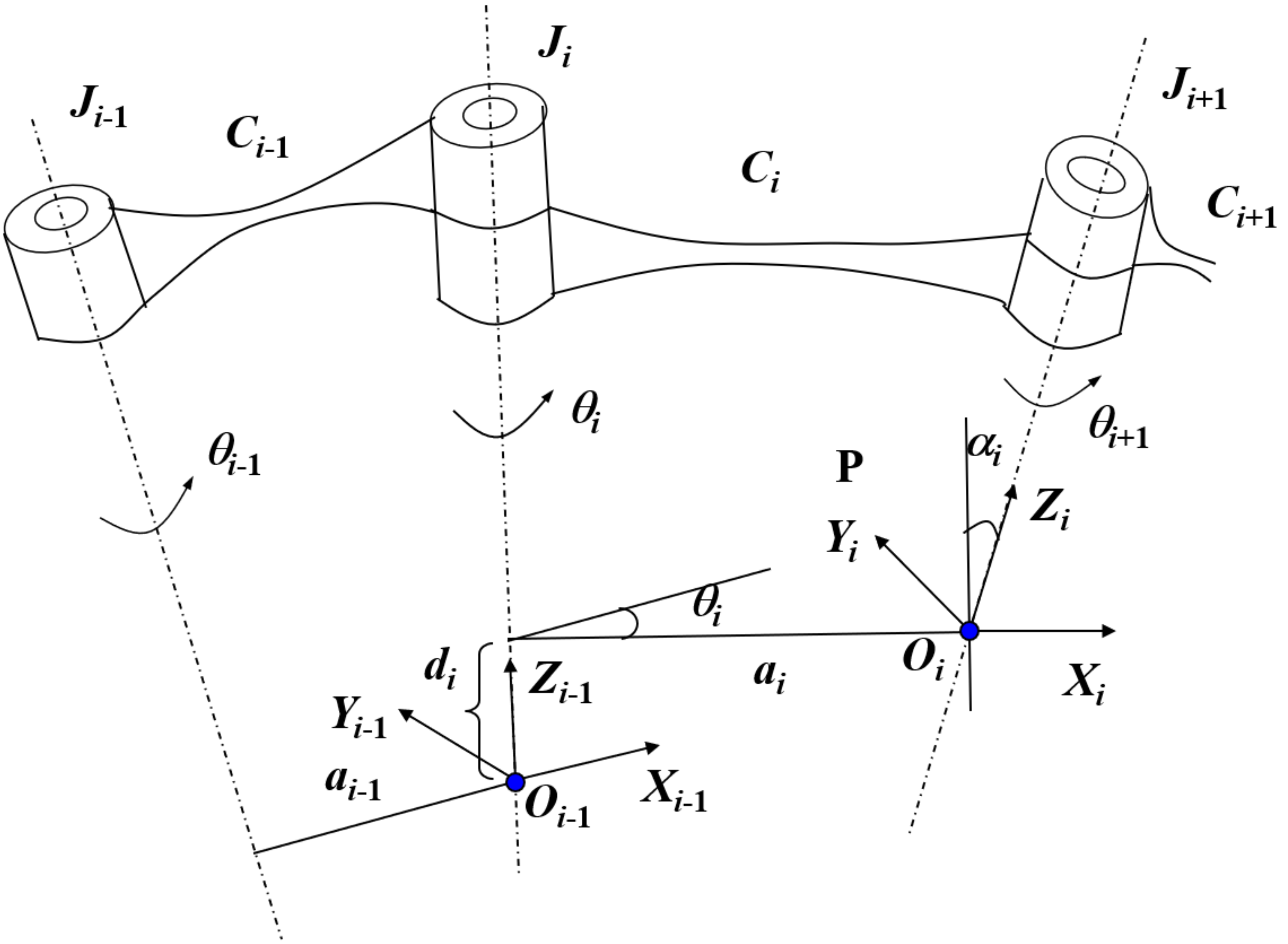
坐标系的建立

以上图为例，我们有两个连杆，三个关节，那么坐标系的建立无非就有三种情况:

1. 在非首尾连杆C_i处建立坐标系
   - 原点O_i:取关节轴线J_i与J_{i+1}与公垂线交点作为原点。由于交点有两个，也有两种原地取法，在这里是在J_{i+1}处建立原点
   - Z_i 轴:取关节轴线方向作为 Z_i 轴，这里就是取J_{i+1}
   - X_i 轴:取公垂线指向方向，即沿着公垂线指向下一个连杆的方向
   - Y_i 轴:根据右手定则确定，个人理解为四指环绕方向为X到Y方向，拇指指向Z的方向

2. 在第一连杆C_1建立坐标系
    - 原点O_i:取基坐标系原点
    - Z_i 轴:取J_1方向
    - X_i 轴:任选
    - Y_i 轴:根据右手定则确定
3. 在最后连杆C_n建立坐标系
    - 原点O_i:取末端抓手中心点
    - Z_i 轴:取抓手朝向
    - X_i 轴:抓手一个指尖到另一个指尖
    - Y_i 轴:根据右手定则确定

下图展示的是在J_{i+1}处建立原点的示意图，实际上我们只需要掌握在C_i处建立坐标系就可以了



请注意，上图是在J_{i+1}处建立原点，也就是说我的C_i坐标系是在J_{i+1}处建立原点的原点。对应上图，J_i处原点是C_{i-1}的，J_{i+1}处原点是C_i的

矩阵的形成

那么我要想将C_{i-1}坐标系变为C_i坐标系，需要经历如下几个变换步骤:

1. 以Z_{i-1}轴为转轴，旋转θ_i角度，使旋转后的的X_{i-1}轴与X_i轴同向
2. 沿Z_{i-1}轴平移d_i，使移动后的O_{i-1}移动到关节轴线J_i与J_{i+1}的公垂线在与J_i的交点。其实就是往上移动了一下，移动到O_i一个高度去了
3. 沿新的(旋转后)的X_{i-1}轴平移a_i，使新的O_{i-1}移动到O_i
4. 以X_i轴为转轴，旋转α_i角度，使新的Z_{i-1}轴与Z_i轴同向

我们按照上述步骤，可以得到旋转变换矩阵，值得注意的是，每次进行变换的时候他们都不是在一个坐标系下进行的，所以是连体坐标系，他们之间是右乘的关系

$$T_i = \mathrm{Rot}(z,\theta_i)\mathrm{Trans}(0,0,d_i)\mathrm{Trans}(a_i,0,0)\mathrm{Rot}(x,\alpha_i)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$