

# Z变换

在计算机控制系统中，Z变换一般存在两种考察形式:

- $F(s) \rightarrow F(z)$ , 从s变换直接到z变换
- $F(z) \rightarrow F(kT)$ , 从z变换之间到时域

## 部分分式展开法

通常情况下，是直接查变换表进行计算

常见的变换对如下，具体可查看教材P71:(时域、s变换、z变换)

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 1$$

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{s} \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \leftrightarrow \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

## 留数法

留数的求法从数学上来说定义如下:

$$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)^n f(z)]^{n-1}$$

其中，n为极点级数

对此，我们不难发现，要是1级极点，那么留数求法就会变成异常简单

$$Res[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z)$$

而且，通常情况下， $(z-z_0)$ 是可以和 $f(z)$ 分母上多项式约掉的，会变得更简单

## $F(s) \rightarrow F(z)$ 的留数法

$$F(z) = \sum_{i=1}^n Res[F(s) \frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}] \Big|_{s=s_i}$$

也就是说，求 $F(z)$ 那么就将 $F(s)$ 乘上 $\frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}$ ，然后挨个极点求留数(每个极点也要跟着这个东西)就行了

值得注意的是，在遇到二阶以上极点要进行求导运算，这里求导是**对s求导**，那么**不要忘记** $\frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}$ **也要参与求导运算**

## $F(z) \rightarrow F(kT)$ 的留数法

$$F(kT) = \sum_{i=1}^n Res[F(z)z^{k-1}] \Big|_{z=z_i}$$

求 $F(kT)$ 那么就将 $F(z)$ 乘上 $z^{k-1}$ ，然后挨个极点求留数(每个极点也要跟着这个东西)就行了

同样的，对应高级点进行求导运算时，也**注意** $z^{k-1}$ **也是参与求导运算**

