

状态空间描述

状态空间方程是现代控制原理的内容，他相当于在古典控制理论的基础上引入了状态变量，同时又可以解决多输入多输出的问题

在连续系统中，状态空间描述如下所式:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t)\end{aligned}$$

第一行，我们称为状态方程，第二行，我们称为输出方程，二者和在一起称为状态空间描述又称动态方程
 $x(t)$ 称为状态变量， $u(t)$ 称为输入变量， $y(t)$ 称输出变量

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} & \text{状态方程} & \text{state equation} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} & \text{输出方程} & \text{output equation} \end{cases}$$

- x n 维状态矢量
- u r 维输入(或控制)矢量
- y m 维输出矢量
- A $n \times n$ 系统矩阵 state matrix
- B $n \times r$ 输入(或控制)矩阵 input matrix
- C $m \times n$ 输出矩阵 output matrix
- D $m \times r$ 直接传递矩阵 direct transmission matrix

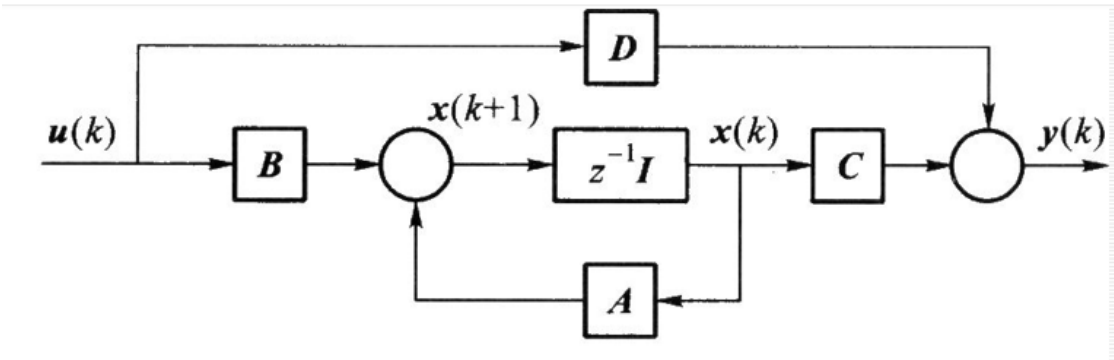
自然的，在离散系统中微分变成差分，那么离散系统中状态空间描述如下:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

注意:为了简便器件，我们上述方程省略了了 T ，实际上 $k+1 \rightarrow (k+1)T$ ，以此类推
二者之间系数有如下的关系:

$$A = e^{A_c T} \quad B = \int_0^T e^{A_c t} B_c dt \quad C = C_c \quad D = D_c$$

对应离散系统，结构图如图所示:



求离散状态空间描述

- 方法一:给你连续系统空间描述，利用下方系数矩阵关系求解

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(k+1) = A x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) + D u(k) \end{cases}$$

$$A = e^{A_c T} \quad B = \int_0^T e^{A_c t} B_c dt \quad C = C_c \quad D = D_c$$

- 方法二: 给你差分方程, 根据以下关系来求状态空间描述

多输入输出线性定常离散系统的差分方程为:

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \dots + b_n u(k)$$

仿照如下选取状态变量

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) - \beta_0 u(k) \\ x_2(k) = x_1(k+1) - \beta_1 u(k) = y(k+1) - \beta_0 u(k+1) - \beta_1 u(k) \\ \vdots \\ x_n(k) = x_{n-1}(k+1) - \beta_{n-1} u(k) = y(k+n-1) - \beta_0 u(k+n-1) - \dots - \beta_{n-1} u(k) \end{cases}$$

式中, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ 为 n 个待定系数。由下式确定:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + \beta_1 u(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) + \beta_2 u(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) + \beta_{n-1} u(k) \\ x_n(k+1) = -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \dots - a_1 x_n(k) + \beta_n u(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} = b_{n-1} - a_1 \beta_{n-2} - a_2 \beta_{n-3} - \dots - a_{n-1} \beta_0 \\ \beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - a_2 \beta_{n-2} - \dots - a_n \beta_0 \end{cases}$$

$x(k)$ 表示 n 维状态向量; A 、 B 、 C 分别为系数矩阵, 即:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \beta_0 u(k)$$

若你的输入比较特殊, 只有一个:

$$y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_0 u(k)$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

求解离散状态空间方程

此处我们默认给定系统是线性定常系统，即微分方程中各项系数都是与时间无关的常数，则称为定常系统，该类系统只要输入信号的形式不变，在不同时间输入下的输出响应形式是相同的

我们列出了状态空间方程的目的是要求出输出的脉冲序列，那么有：

- 方法一：令 $k = 0, 1, 2 \dots$ 带入，我们可得以下规律，相当于得到一个数值解

$$\text{即：} x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u(j) \longleftrightarrow x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^i B u(k-i-1)$$

若用记号 $\Phi(k) = A^k$ 表示的矩阵称为离散状态转移矩阵，且有

$$\begin{cases} \Phi(k+1) = A\Phi(k) \\ \Phi(0) = I \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(k) = \Phi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)Bu(j) \\ y(k) = C\Phi(k)x(0) + C\sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)Bu(j) + Du(k) \end{cases}$$

那么根据此规律我可以求解出任意时刻的状态空间方程

- 方法二：利用z变换求解，实际上我们有如下规律

■ 利用脉冲传递函数求解离散动态方程的方法

将离散状态方程 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ 两边取Z变换，得到

$$x(z) = (zI - A)^{-1}zx(0) + (zI - A)^{-1}BU(z)$$

对上面方程两端求z逆变换（零初始状态下），可得

$$x(k) = \mathbb{Z}^{-1} \left[(zI - A)^{-1}z \right] x(0) + \mathbb{Z}^{-1} \left[(zI - A)^{-1}BU(z) \right]$$

则有

$$\begin{aligned} A^k &= \mathbb{Z}^{-1} \left[(zI - A)^{-1}z \right] \\ \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1}BU(j) &= \mathbb{Z}^{-1} \left[(zI - A)^{-1}BU(z) \right] \end{aligned}$$

$$y(k) = \mathbb{Z}^{-1} \left[[C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) \right]$$

此时我们可以得到解析解

能控性与能观性

线性定常离散系统的能控性

能控性，本质是在有限时间内，控制作用能否使系统从初始状态转移到要求的状态，对于线性定常离散系统状态方程：

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

如果存在控制向量序列 $u(0), u(1), \dots, u(i-1)$ ，使系统从第0步的状态向量开始，在第i步到达零状态，即 $x(i) = 0$ ，那么就称此系统是能控的；如果对每一个k，系统的所有状态都是能控的，则称系统是状态完全能控的，简称能控

判断条件：

$$\text{rank} W_c = \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-2}B & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \Leftrightarrow \text{能控}$$

线性定常离散系统的能观性

能观性，本质是在有限时间内，能够通过对系统输出的测定来估计系统的初始状态，对于线性定常离散系统状态空间描述为：

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

在已知输入控制向量序列 $u(0), u(1), \dots, u(n-1)$ 的情况下，如果能根据有限个采样号 $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$ ，确定出系统的初始状态 x_0 ，则系统是状态完全能观测的，简称能观测

判断条件：

$$\text{rank} W_0 = \text{rank} \begin{bmatrix} C & CA & \cdots & CA^{n-2} & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = n \Leftrightarrow \text{能观}$$

性质

1. 对偶原理

系统 $S_1 = (A, B, C)$ ，系统 $S_2 = (A^T, B^T, C^T)$

$$\text{系统 } S_1: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

$$\text{系统 } S_2: \begin{cases} v(k+1) = A^T v(k) + C^T u_2(k) \\ w(k) = B^T v(k) \end{cases}$$

$$S_1 \text{ 能控} \rightarrow S_2 \text{ 能观}$$

$$S_1 \text{ 能观} \rightarrow S_2 \text{ 能控}$$

2. 非奇异性线性变化不改变系统的能控性和能观性

给定线性定常系统
$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

能控性矩阵： $W_c = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$

能观性矩阵： $W_o = [C, CA, \dots, CA^{n-1}]^T$

非奇异非线性变换： $x(k) = T\bar{x}(k)$

变换后的动态方程为：
$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = T^{-1}AT\bar{x}(k) + T^{-1}Bu(k) \\ \bar{y}(k) = CT\bar{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

能控性矩阵： $\bar{W}_c = [T^{-1}B \quad (T^{-1}AT)(T^{-1}B) \quad \cdots \quad (T^{-1}AT)^{n-1}(T^{-1}B)] = T^{-1}[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$

能观性矩阵： $\bar{W}_o = [CT \quad (CT)(T^{-1}AT) \quad \cdots \quad (CT)(T^{-1}AT)^{n-1}]^T = T^T[C \quad CA \quad \cdots \quad CA^{n-1}]^T$

3. 脉冲传递函数与能控性能观性关系

单输入单输出线性定常离散系统完全能控和完全能观的充分必要条件是脉冲传递函数不存在着零极点对消

如果存在着零极点对消，系统状态是不完全能控，或者是不完全能观，或者既不完全能控又不完全能观。



输出能观性

- 线性定常离散系统的输出能控性定义：对于 n 阶线性定常离散系统，输入向量为 r 维，输出向量为 m 维。

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

- 若存在有限个输入向量序列 $\{u(0), u(1), \dots, u(q-1)\} (q \leq n)$ 能将系统输出从某个初始状态 $y(0)=y_0$ ，在第 q 步控制到任意最终输出 $Y(q)$ ，则称此系统是输出完全能控的，简称输出能控。

$$\mathbf{y}(q) = C\mathbf{x}(q) = C(A^q\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{q-1} A^{q-j-1}B\mathbf{u}(j)) + D\mathbf{u}(q)$$

判断条件:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} D & CB & \dots & CA^{q-1}B \end{bmatrix} = m \Leftrightarrow \text{能观}$$

注意:系统的状态能控性和输出能控性是两个不同的概念，二者之间没有什么必然的联系

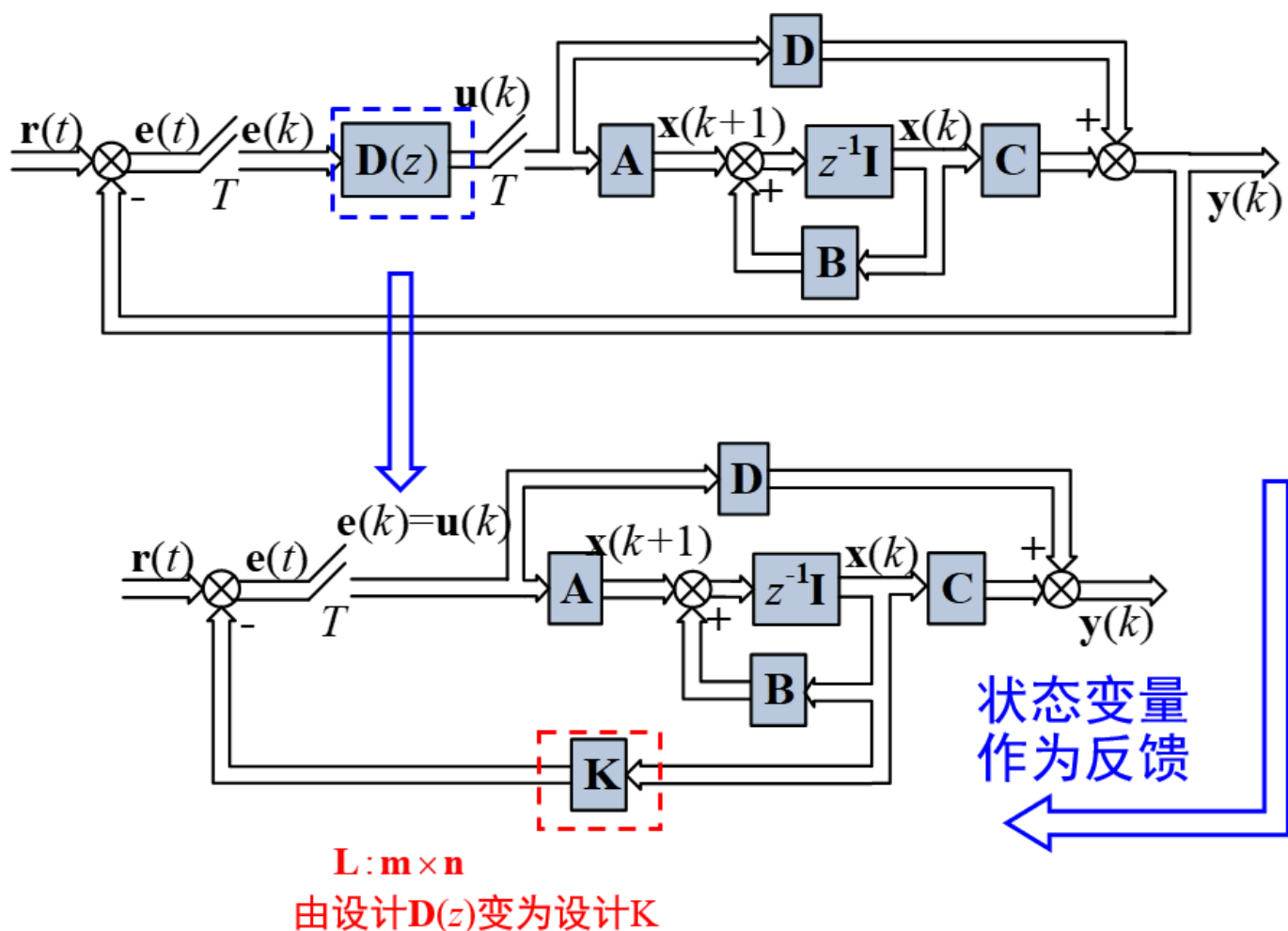
状态反馈设计法与输出反馈设计法

二者的设计思路十分相似，只不过一个是用状态变量作为反馈，一个利用输出作为反馈，且二者都是要求将全部结果测到，然后进入反馈

状态反馈设计法

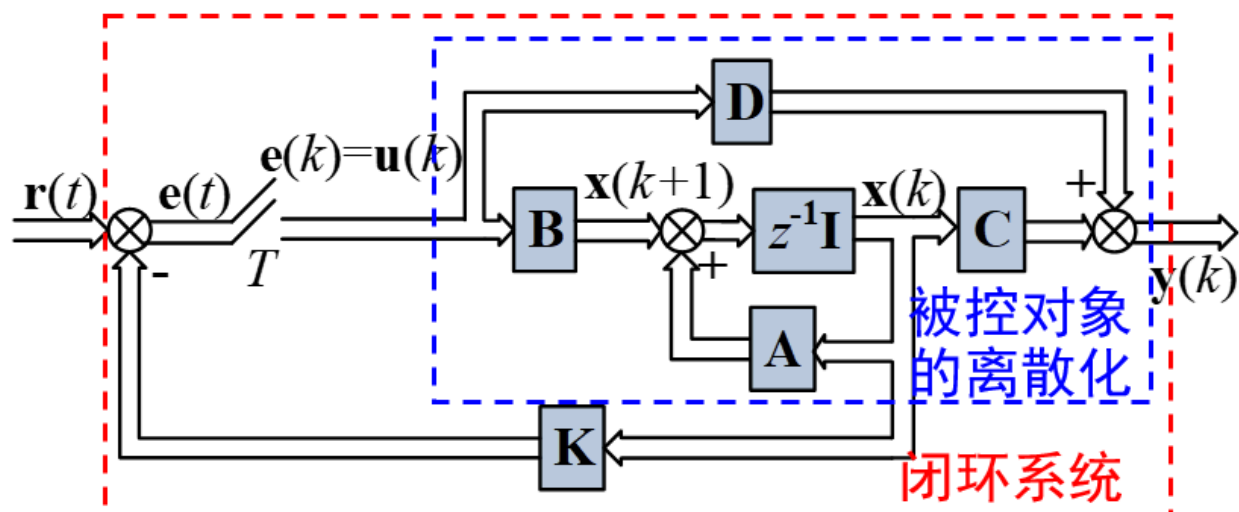
基于状态反馈的极点配置的主要思想是，将系统的**所有**状态变量信息通过**反馈增益矩阵**反馈到输入端与参考输入相作用，其结果作为受控系统的控制输入

通过对状态反馈矩阵的选择，使闭环系统的极点设置在所期望的位置上，
采用状态反馈任意配置闭环系统极点的充分必要条件是系统状态**完全能控**



状态反馈控制系统

状态反馈控制系统的框图：



系统的离散状态空间表达式为： $u(k) = -Kx(k) + r(k)$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B[\mathbf{r}(k) - K\mathbf{x}(k)] \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + D[\mathbf{r}(k) - K\mathbf{x}(k)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = (A - BK)\mathbf{x}(k) + B\mathbf{r}(k) \\ \mathbf{y}(k) = (C - DK)\mathbf{x}(k) + D\mathbf{r}(k) \end{cases}$$

性质：

1. 加入状态反馈后，不改变系统的可控性
2. 加入状态反馈后，闭环系统可能失去能观性

闭环Z特征方程

状态反馈控制系统的状态方程为：

$$x(k+1) = (A - BK)x(k) + Br(k)$$

左右同时进行z变换，有：

$$\begin{aligned} zX(z) - zX(0) &= (A - Bk)X(z) + BR(Z) \\ X(z) &= (zI - A + BK)^{-1}(BR(Z) + ZX(0)) \end{aligned}$$

我们称

$$\Delta = |zI - A + BK| = 0$$

叫做状态反馈系统的闭环Z特征方程

状态反馈矩阵K的求法

对于m维度输入n阶系统来说，K为 $m \times n$ ，而n阶系统只有n个极点，所以要想通过期望的极点来确定K的全部参数是不可能的，有 $m \times n - n$ 个元素可自由确定

当考虑只有一个输入的n阶系统，那么k为 $1 \times n$ ，可由n个极点唯一确定，具体做法是利用系数匹配法，即：

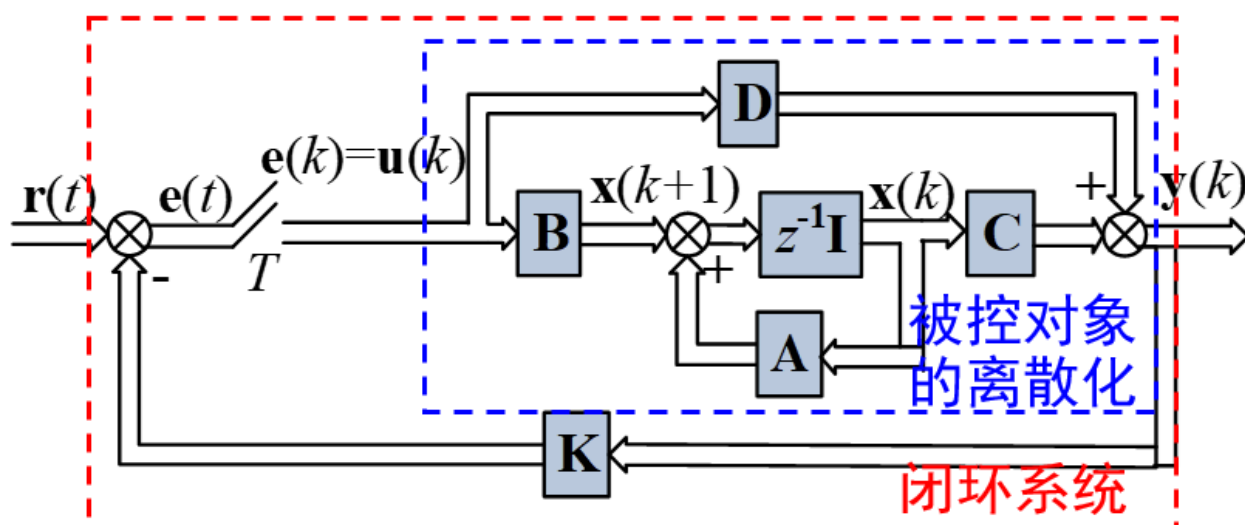
$$(z - z_0)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = |zI - A + BK|$$

其中 $z_0, z_1 \cdots z_n$ 为闭环系统期望的极点

输出反馈设计法

输出反馈就是将系统的输出量经过一定的比例缩放后反馈到输入端与参考输入相作用，其结果作为受控系统的控制输入

输出反馈系统



系统的离散状态空间表达式为：

$$u(k) = -K y(k) + r(k)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B[\mathbf{r}(k) - K\mathbf{y}(k)] \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = (A - BKC)\mathbf{x}(k) + B\mathbf{r}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

特征方程与K矩阵求法

$$\Delta = |zI - A + BKC| = 0$$

在仅考虑单输入系统条件下：

$$(z - z_0)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = |zI - A + BKC|$$

其中 $z_0, z_1 \cdots z_n$ 为**闭环系统**期望的极点

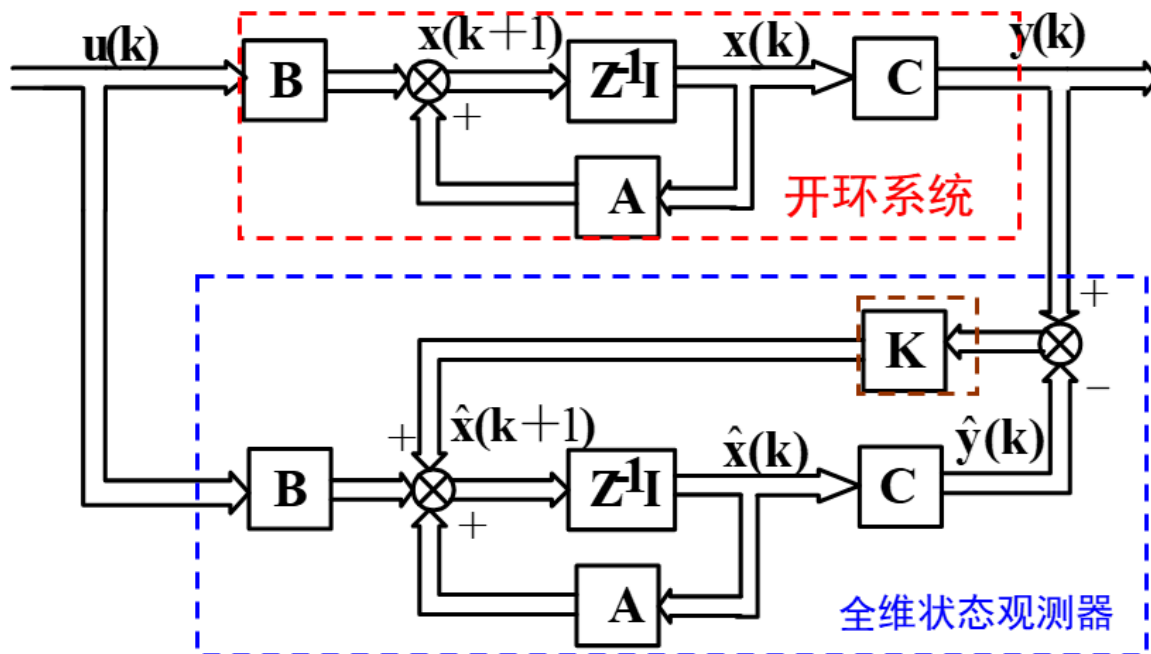
状态观测器设计及反馈应用

在上节中基于状态反馈设计中，是对系统的全状态进行反馈，但是在实际中测量系统所有的状态向量是困难的，甚至是不可能的。那么我能否想办法得到一个**预估值**来近似代替我测不到的状态向量呢？

状态观测器的主要思想:对系统进行重构，通过构建观测器，利用系统的控制变量和输出变量，得出系统状态变量的**估计值**

状态观测器的设计

全维状态观测器



全维状态观测器的误差方程为:

$$\begin{aligned} \text{观测误差} &= \text{实际值} - \text{观测值} \\ \tilde{x}(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\ &= Ax(k) + Bu(k) - [(A - KC)\hat{x}(k) + Bu(k) + KCx(k)] \\ &= (A - KC)\tilde{x}(k) \end{aligned}$$

经Z变换有:

$$\tilde{x}(z) = (zI - A + KC)^{-1} z\tilde{x}(0)$$

我们称观测器系统的特征方程为:

$$\Delta = |zI - A + KC|$$

我们设计观测器的目标是选择合适的输出误差反馈矩阵K使得状态估计误差系统的所有极点均位于z平面单位圆内，则误差可在有限拍内趋于零，即状态估计值在有限拍内可以跟踪上真实状态，且极点越靠近单位圆状态估计误差趋于零的速度越快，反之越慢

在仅考虑单输入系统条件下:

$$(z - z_0)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = |zI - A + KC|$$

其中 $z_0, z_1 \cdots z_n$ 为**观测器**期望的极点

实际上我观测器是想得到 $\hat{x}_1(k+1)$ 的值，这个预测值为:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = A\hat{\mathbf{x}}(k) + B\mathbf{u}(k) + K[\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)]$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = A\hat{\mathbf{x}}(k) + B\mathbf{u}(k) + K[\mathbf{y}(k) - C\hat{\mathbf{x}}(k)]$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (A - KC)\hat{\mathbf{x}}(k) + B\mathbf{u}(k) + K\mathbf{y}(k)$$

降维状态观测器

在系统的全部状态中，可能有一部分状态 x_2 ，是可以直接在输出端获取其测量值；而另一部分 x_1 ，则必须通过观测器来重构以获得估计值，在此处，我们不估计全部的状态而只估计一部分状态，那么这样的观测器就叫降维状态观测器

那么原系统就可以分为如下几个部分：

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_1(k) \text{ } p \text{ 维不可测} \\ \mathbf{x}_2(k) \text{ } q = n - p \text{ 维可测} \end{array} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

我们将第一行写出来：

$$x_1(k+1) = A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + b_1u(k)$$

由于 $x_2(k)$ ， $x_2(k)$ 均是可以直接测量的，我们可以把二者当作一个整体作为新系统的 $u(t)$

我们将第二行写出来，并做一个简单的变形：

$$\begin{aligned} x_2(k+1) &= A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + b_2u(k) \\ A_{21}x_1(k) &= x_2(k+1) - A_{22}x_2(k) - b_2u(k) \end{aligned}$$

由于 $x_2(k+1)$ ， $x_2(k)$ ， $u(k)$ 都是可以测量的，那么 $A_{21}x_1(k)$ 相当于是新系统的 $z(k)$

即设计降维状态观测器相当于设计下述系统的全维状态观测器：

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + b_1u(k) \\ z(k) &= x_2(k+1) - A_{22}x_2(k) - b_2u(k) \end{aligned}$$

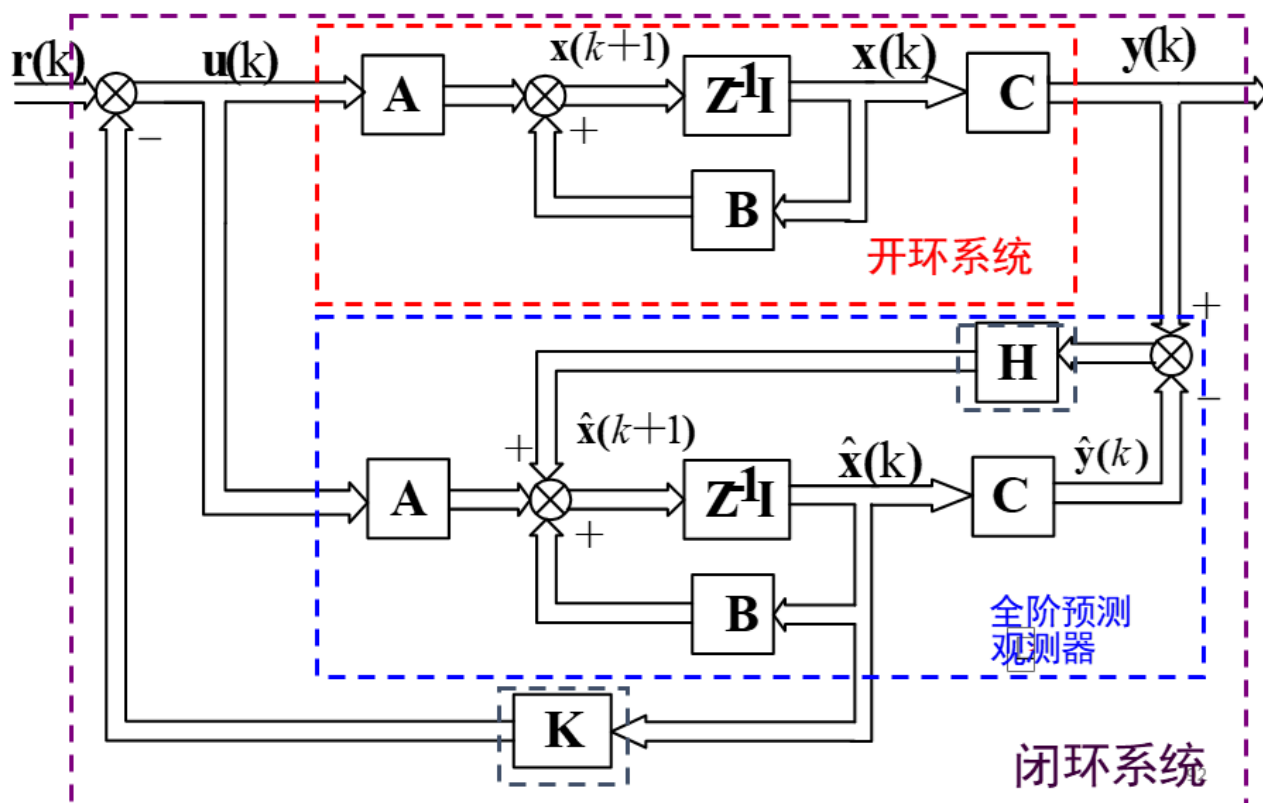
同样的，误差为：

$$\tilde{x}_1(k+1) = x_1(k+1) - \hat{x}_1(k+1) = (A_{11} - KA_{21})\hat{x}_1(k)$$

实际上我观测器是想得到 $\hat{x}_1(k+1)$ 的值，这个预测值为：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_1(k+1) &= A_{11}\hat{\mathbf{x}}_1(k) + A_{12}\mathbf{x}_2(k) + b_1u(k) + K[\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k)] \\ &= (A_{11} - KA_{21})\hat{\mathbf{x}}_1(k) + A_{12}\mathbf{x}_2(k) + b_1u(k) + K\mathbf{z}(k) \\ &= (A_{11} - KA_{21})\hat{\mathbf{x}}_1(k) + A_{12}\mathbf{x}_2(k) + b_1u(k) + K\mathbf{x}_2(k+1) - KA_{22}\mathbf{x}_2(k) - Kb_2u(k) \\ &= (A_{11} - KA_{21})\hat{\mathbf{x}}_1(k) + (A_{12} - KA_{22})\mathbf{x}_2(k) + (b_1 - Kb_2)u(k) + K\mathbf{x}_2(k+1) \end{aligned}$$

带状态观测器的状态反馈系统



在此处，我们为了区分矩阵的区别我们称：

1. 状态反馈增益矩阵为 K
2. 观测器输出误差反馈矩阵为 H

此系统对应的特征方程为：

$$|zI - A + BK| \cdot |zI - A + HC| = 0$$

闭环系统的 $2n$ 个极点由两部分组成，一部分是按极点配置设计的控制规律给定的 n 个极点，称为控制极点，另一部分是按极点配置设计的状态观测器给定的 n 个极点，称为观测器极点。两部分相互独立，可分别设计

分离原理：设计基于观测状态的状态反馈控制系统时，对观测器和控制器的设计是分别独立进行的，分别找到状态观测器的特征根方程和闭环系统的特征方程，根据给定的期望极点，分别得到观测器反馈增益矩阵 H 和状态反馈增益矩阵 K