

离散系统的性能分析

稳定判据

线性离散控制系统稳定的充要条件是：
闭环系统特征方程的所有根的模 $|z_i| < 1$ ，即闭环脉冲传递函数的极点均位于z平面的单位圆内
众所周知，求出所有的根是十分痛苦且很多情况是不可能的，那么就连续系统一样，有一些判据来判断系统是不是稳定的

w变换及w域的劳斯稳定判据

劳斯判据是在自动控制原理提出的，本质上他是在s平面上判断方程的根是否在左半轴。而z变换后，是将是s平面上的点对应到z平面上一个圆上了，稳定判据从特征方程的根都在左半平面变为都在单位圆内
那么，我能不能想办法通过某种对应方式将z平面上点对应到类似的s平面上，然后通过劳斯判据进行判断呢？
实际上，这种对应关系就是我们的w变换

$$w\text{变换(双线性变换)} \quad \begin{cases} z = \frac{1+w}{1-w} \\ w = \frac{z-1}{z+1} \end{cases}$$

同时，对于双线性变换还可以有好多组，你可以任选一组你喜欢的进行变换:

$$\begin{cases} z = \frac{w+1}{w-1} \\ w = \frac{z+1}{z-1} \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} \\ w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \end{cases}$$

将在z平面的式子通过w变换变为w变换后，就可利用劳斯判据判断稳定性了，而且判断过程，结论与s平面上的劳斯判据如出一辙

实际上，当采样周期无限小的时候，w平面近似为s平面

假设我们有一特征方程为: $z^2 - z + 0.632 = 0$

那么我们利用最后一组的双线性变换，可以得到:

$$0.658w^2 + 0.368w + 0.632 = 0$$

然后利用劳斯判据，那么劳斯表如下所示:

$$\begin{array}{ccc} \omega^2 & a_2 & a_0 \\ \omega^1 & a_1 & \\ \omega^0 & b_1 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} \omega^2 & 0.658 \\ \omega^1 & 0.368 \\ \omega^0 & 0.632 \end{array}$$

二阶系统z域直接判定法

我们有如下二阶闭环系统:

$$W(z) = z^2 + a_1z + a_0$$

满足全部以下条件，则系统稳定:

1. $|W(0)| = a_0 = 1$
2. $W(1) > 0$
3. $W(-1) > 0$

z域中朱利稳定判据

我们将特征方程记为 $D(z)$, $D(z)$ 若是稳定的，那么需要满足以下全部条件:

在此处我们以 $D(z) = -39 + 119z - 117z^2 + 45z^3$ 为例:

1. $D(1) > 0$, $D(1) = 8 > 0$
2. $\begin{cases} D(-1) > 0 & \text{最高次项幂为偶数} \\ D(-1) < 0 & \text{最高次项幂为奇数} \end{cases}$
 $D(-1) = -320 < 0$, 最高次幂系数是3为奇数
3. 列出朱利表，然后判断

Jury	z^0	z^1	z^2	z^3
1	-39	119	-117	45
2	45	-117	119	-39
3	$\begin{vmatrix} -39 & 45 \\ 45 & -39 \end{vmatrix} = -504$ $\begin{vmatrix} -39 & -117 \\ 45 & 119 \end{vmatrix} = 624$ $\begin{vmatrix} -39 & 119 \\ 45 & -117 \end{vmatrix} = -792$			
4	-792	624	-504	

- i. 将 $D(z)$ 升序排列，将其系数写在第一行
- ii. 将第一行反过来，写在第二行
- iii. 取第一行第二列的值，取最右侧第一行第二行值，放到一起，求行列式，放到第三行第一个。行列式最左侧的数不动，从右侧挪一个位置，取右侧倒数第二第一行第二行值，求行列式，依此类推，求出第三行
- iv. 将第三行反过来，写在第四号
- v. 第五行第六行重复步骤3、4，知道最后一行剩下三个数为止
 此例子中，第四行已经只剩下三个数了，所有只算到第四号行可

Jury	z^0	z^1	z^2	z^3
1	-39	119	-117	45
2	45	-117	119	-39
3	$\begin{vmatrix} -39 & 45 \\ 45 & -39 \end{vmatrix} = -504$ $\begin{vmatrix} -39 & -117 \\ 45 & 119 \end{vmatrix} = 624$ $\begin{vmatrix} -39 & 119 \\ 45 & -117 \end{vmatrix} = -792$			
4	-792	624	-504	

判断条件:

6. 仅看第一列，对第一列的数取模(绝对值)

7. **第一行的数要小于第二行**

8. 从第三行起，每两行为一组，不可以有交集，前一行的要大于后一行，即**第三行的数要大于第四行，第五行的数要大于第六行**，依次类推都是大于

在此例子中，第三行的绝对值没有大于第四行的绝对值，所以系统不稳定

修尔-科恩稳定判据

已知特征方程为 $1 + G(z) = 0$ ，我们取特征方程的分子为：

$$W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0 = 0$$

那么可以根据下表写出一些行列式：

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-m+1} \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-m+2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_n & \dots & a_{n-m+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \dots & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ \bar{a}_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \dots & \bar{a}_{m-1} \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_{m-2} \\ \bar{a}_{n-2} & \bar{a}_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \dots & \bar{a}_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{n-m+1} & \bar{a}_{n-m+2} & \bar{a}_{n-m+3} & & \bar{a}_n & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_0 \end{vmatrix}$$

我们令 $m = 1, 2, \dots, n$ ， n 为特征方程阶数， \bar{a}_n 为 a_n 的共轭复数

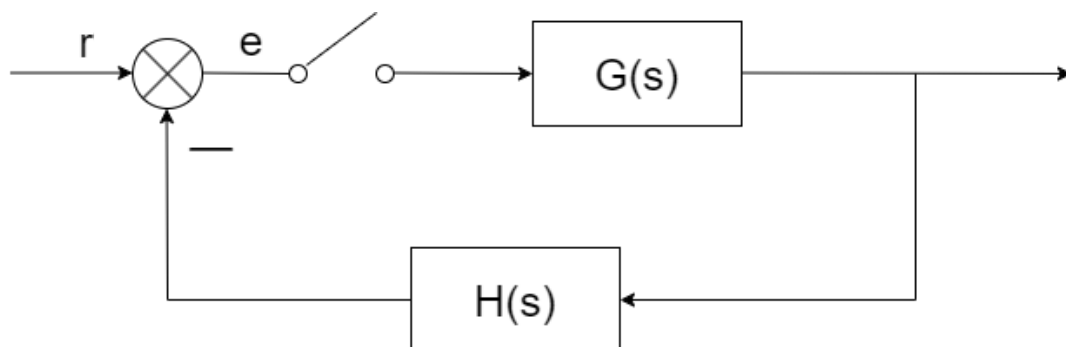
实际上，我们的 Δ_m 是 $2m \times 2m$ 的行列式，我们可以写出 n 个，即 $\Delta_n, \Delta_{m-1}, \dots, \Delta_1$

这些 Δ 改变符号的次数就是稳定根的数目，即系统稳定，那么改变符号的次数就是特征方程的阶数

$$\begin{cases} \Delta_m > 0 & m \text{ 为偶数} \\ \Delta_m < 0 & m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

稳态误差

求解稳态误差的一般方法



根据所示系统环节，求**开环**脉冲传递函数(注意采样开关的设置)：

$$GH(z) = \frac{1}{(z-1)^v} GH_0(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} GH_0(z) = k$$

其中，上述式子中的 v 为系统的型数
那么，计算稳态误差步骤如下：

1. 判定稳定性
2. 求误差脉冲传递函数

$$\phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + GH(z)}$$

3. 利用终值定理求 $e(\infty)$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \phi_e(z) R(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) R(z) \frac{1}{1 + GH(z)}$$

静态误差系数法

$$\text{静态位置误差系数 } k_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)$$

$$\text{静态速度误差系数 } k_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) GH(z)$$

$$\text{静态加速度误差系数 } k_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z)$$

系统型别	位置误差 $r(t)=1(t)$	速度误差 $r(t)=t$	加速度误差 $r(t)=t^2/2$
0型	$1 / (1 + K_p)$	∞	∞
I型	0	$1 / K_v$	∞
II型	0	0	$1 / K_a$
III型	0	0	0

根轨迹法

在 z 平面中画根轨迹与在 s 平面中画根轨迹方法**完全相同**，只不过在 s 平面上，我们说在左半轴内的规矩是稳定的，而在 z 平面上，是在单位圆内是稳定的

也就是说，按照自动控制原理中根轨迹画法画出根轨迹，然后再画一个单位圆，在圆内稳定，圆上临界稳定，圆外不稳定