稳定性分析

线性离散控制系统稳定的充要条件是:
闭环系统特征方程的所有根的模$|z_i| < 1$，即闭环脉冲传递函数的极点均位于z平面的单位圆内

稳定判据

w变换及w域的劳斯稳定判据

劳斯判据是在自动控制原理提出的，本质上他是在s平面上判断方程的根是否在左半轴。而z变换后，是将是s平面上的点对应到z平面上一个个圆上了，稳定判据从特征方程的根都在左半平面变为都在单位圆内
那么，我能不能想办法通过某种对应方式将z平面上点对应到类似的s平面上，然后通过劳斯判据进行判断呢?
实际上，这种对应关系就是我们的w变换

$$w\text{变换(双线性变换)} \quad \begin{cases} z = \frac{1+w}{1-w} \\ w = \frac{z-1}{z+1} \end{cases}$$

实际上，对于双线性变换还可以有好多组

$$\begin{cases} z = \frac{w+1}{w-1} \\ w = \frac{z+1}{z-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} \\ w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \end{cases}$$

将在z平面的式子通过w变换变为w变换后，就可利用劳斯判据判断稳定性了，而且判断过程，结论与s平面上的劳斯判据如出一辙

假设我们有一特征方程为:$z^2 - z + 0.632 = 0$
那么我们利用最后一组的双线性变换，可以得到:

$$0.658w^2 + 0.368w + 0.632 = 0$$

然后利用劳斯判据，那么劳斯表如下所示:

$$\begin{array}{lll} \omega^2 & a_2 & a_0 \\ \omega^1 & a_1 & \\ \omega^0 & b_1 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lll} \omega^2 & 0.658 & 0.632 \\ \omega^1 & 0.368 & \\ \omega^0 & 0.632 & \end{array}$$

二阶系统z域直接判定法

我们有如下二阶**闭环**系统:

$$W(z) = z^2 + a_1 z + a_0$$

满足全部以下条件，则系统稳定:

1. $|W(0)|=a_0=1$
2. $W(1)>0$
3. $W(-1)>0$

z域中朱利稳定判据

我们将特征方程记为$D(z)$,$D(z)$若是稳定的，那么需要**满足以下全部**条件:
在此处我们以$D(z)=-39+119z-117z^2+45z^3$为例:

1. $D(1)>0$，$D(1)=8>0$
2. $\begin{cases} D(-1)>0 & \text{最高次项幂为偶数} \\ D(-1)<0 & \text{最高次项幂为奇数} \end{cases}$
   $D(-1)=-320<0$，最高次幂系数是3为奇数
3. 列出朱利表，然后判断

Jurry	z^0	z^1	z^2	z^3
1	-39	119	-117	45
2	45	-117	119	-39
3	$\begin{vmatrix}-39 & 45\\ 45 & -39\end{vmatrix}=-504$	$\begin{vmatrix}-39 & -117\\ 45 & 119\end{vmatrix}=624$	$\begin{vmatrix}-39 & 119\\ 45 & -117\end{vmatrix}=-792$	
4	-792	624	-504	

   i. 将$D(z)$升序排列，将其系数写在第一行
   ii. 将第一行反过来，写在第二行
   iii. 取第一行第二列的值，取最右侧第一行第二行值，放到一起，求行列式，放到第三行第一个。行列式最左侧的数不动，从右侧挪一个位置，取右侧倒数第二第一行第二行值，求行列式，依此类推，求出第三行
   iv. 将第三行反过来，写在第四号
   v. 第五行第六行重复步骤3、4，知道最后一行剩下三个数为止
   此例子中，第四行已经只剩下三个数了，所有只算到第四号行可

Jurry	z^0	z^1	z^2	z^3
1	$\lvert -39 \rvert$	119	-117	45
2	45	-117	119	-39
3	$\begin{vmatrix}-39 & 45\\ 45 & -39\end{vmatrix}=-504$	$\begin{vmatrix}-39 & -117\\ 45 & 119\end{vmatrix}=624$	$\begin{vmatrix}-39 & 119\\ 45 & -117\end{vmatrix}=-792$	
4	$\lvert -792 \rvert$	624	-504	

判断条件:
6. 仅看第一列，对第一列的数取模(绝对值)

7. **第一行的数要小于第二行**
8. 从第三行起，每两行为一组，不可以有交集，前一行的要大于后一行，即**第三行的数要大于第四行，第五行的数要大于第六行**，依次类推都是大于

在此例子中，第三行的绝对值没有大于第四号的绝对值，所以系统不稳定

z域中根轨迹法

在z平面中画根轨迹与在s平面中画根轨迹方法完全相同，只不过在s平面上，我们说在左半轴内的规矩是稳定的，而在z平面上，是在单位圆内是稳定的
也就是说，按照自动控制原理中根轨迹画法画出根轨迹，然后再画一个单位圆，在圆内稳定，圆上临界稳定，圆外不稳定

修尔-科恩稳定判据

已知特征方程为$1+G(z)=0$，我们取特征方程的分子为:

$$W(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z^1+a_0=0$$

那么可以根据下表写出一些行列式:

$$\Delta_m=\begin{vmatrix}
a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-m+1} \\
a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-m+2} \\
a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_n & \cdots & a_{n-m+3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\
\bar{a}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_{m-1} \\
\bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_{m-2} \\
\bar{a}_{n-2} & \bar{a}_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \cdots & \bar{a}_{m-3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\bar{a}_{n-m+1} & \bar{a}_{n-m+2} & \bar{a}_{n-m+3} & & \bar{a}_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_0
\end{vmatrix}$$

我们令$m=1,2,\cdots,n$，n为特征方程阶数，$\bar{a_n}$为a_n的共轭复数
实际上，我们的Δ_m是$2m\times 2m$的行列式，我们可以写出n个，即$\Delta_n\Delta_{m-1},\cdots,\Delta_1$
这些Δ改变符号的次数就是稳定根的数目，即系统稳定，那么改变符号的次数就是特征方程的阶数

$$\begin{cases}\Delta_m>0 & m为偶数\\ \Delta_m<0 & m为奇数\end{cases}$$