Z变换与逆Z变换

Z变换

z变换本质上是将采样后的拉式变换中e^{-Ts}代换为z，即:

$$z = e^{-Ts}$$
$$E(z) = \sum_{0}^{\infty} e(nT) z^{-n}$$

部分分式展开

通常情况下，那么就可以直接部分分式展开然后查表变换，常用的变换对如下:

序号	时间函数$e(t)$	拉普拉斯变换$E(s)$	z变换$E(z)$
1	$\delta(t-nT)$	e^{-snT}	z^{-n}
2	$\delta(t)$	1	1
3	$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$a^{t/T}$	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$\frac{z}{z-a}$
7	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}$
8	$t\mathrm{e}^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tz\mathrm{e}^{-aT}}{(z-\mathrm{e}^{-aT})^2}$
9	$\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{T^2 z\mathrm{e}^{-aT}}{2(z-\mathrm{e}^{-aT})^2} + \frac{T^2 z\mathrm{e}^{-2aT}}{(z-\mathrm{e}^{-aT})^3}$
10	$1-\mathrm{e}^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
11	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
12	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
13	$1-\cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
14	$\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z\mathrm{e}^{-at}\sin\omega T}{z^2-2z\mathrm{e}^{-at}\cos\omega T+\mathrm{e}^{-2aT}}$
15	$\mathrm{e}^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-z\mathrm{e}^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2z\mathrm{e}^{-aT}\cos\omega T+\mathrm{e}^{-2aT}}$

留数法

留数的求法从数学上来说定义如下:

$$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^n f(z)]^{n-1}$$

其中，n为极点级数
对此，我们不难发现，要是1级极点，那么留数求法就会变成异常简单

$$Res[f(z), z_0] = lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

而且，通常情况下，$(z-z_0)$是可以和$f(z)$分母上多项式约掉的，会变得更简单

用留数法求z变换，就用下述公式:

$$F(z)=\sum_{i=1}^{n}Res[F(s)\frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}]\Bigg|_{s=s_i}$$

也就是说，求$F(z)$那么就将$F(s)$乘上$\frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}$，然后挨个极点求留数(每个极点都要跟着这个东西)就行了
值得注意的是，在遇到二阶以上极点要进行求导运算，这里求导是**对s求导**，那么**不要忘记$\frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}$也要参与求导运算**

逆Z变换

部分分式展开法

多项式展开与快速计算系数

我们以下述式子为例:

$$\frac{1}{(z^2+1)(z+1)}=\frac{Az+B}{z^2+1}+\frac{C}{z+1} \tag{1}$$

拆分前是分母是多项式相乘的样子，拆分后就是把分母单独提出来作为一个式子，而分子的系数为次数分母的最高系数减1一直到0(常数)
若是:

$$\frac{1}{(z^2+1)^2}=\frac{Az+B}{(z^2+1)^2}+\frac{Cz+D}{z^2+1} \tag{2}$$

若分母中的括号为n次，那么拆开后分母从n至n-1次都要写出来，分子的次数对应上一条规则来写
对于快速计算系数，我们以式子(1)为例，其原理如下:
若想求$z-1$对应系数，则有左右同乘$z-1$:

$$\frac{1}{(z^2+1)}=\frac{Az+B}{z^2+1}(z-1)+C$$

然后将$z_0=1$带入有(就是上述同乘的式子等于0的解):

$$\frac{1}{(z^2+1)}\Bigg|_{z_0=1}=\frac{Az+B}{z^2+1}(z-1)\Bigg|_{z_0=1}+C$$
$$\frac{1}{(z^2+1)}\Bigg|_{z_0=1}=C$$
$$c=2$$

值得注意的是，我们在求C的值时候，C前面是没有Z的，也就是说实际上可简写为(示例，不一定与上面的一致):

$$F(z)(z-2)\Bigg|_{z_0=2}=C$$

而不是:

$$F(z)(z-2)\Bigg|_{z_0=2}=zC \tag{3}$$

$$\frac{F(z)(z-2)}{z}\Bigg|_{z_0=2}=C$$

若是遇到式子(3)情况，一定要注意z的值，**左侧带入z_0后求解的其实是z_0C而非c**
假设我们遇到式子(2)类似的分母带系数的情况:

$$\frac{1}{(z+1)^2(z+3)}=\frac{A}{(z+1)^2}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z+3}$$

那么就需要求导，对于最高阶对应的系数(A)实际上就是:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{(z+1)^2(z+3)}(z+1)^2 = A + B(z+1) + \frac{C}{z+3}(z+1)^2\Big|_{Z_0=-1} \\
\frac{1}{(z+3)}\Big|_{Z_0=-1} = A
\end{gathered}
$$

而剩下的系数(B)就分别对应求导:

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dz}[\frac{1}{(z+1)^2(z+3)}(z+1)^2] = \frac{d}{dz}[A + B(z+1) + \frac{C}{z+3}(z+1)] \\
\frac{d}{dz}[\frac{1}{(z+3)}]\Big|_{Z_0=-1} = B + \frac{C}{z+3}2(z+1)\Big|_{Z_0=-1} \\
\frac{d}{dz}[\frac{1}{(z+3)}]\Big|_{Z_0=-1} = B
\end{gathered}
$$

而其他的系数(C)正常求即可

对于快速求系数的结论就是:

1. 将展开后的分母乘到展开前的式子，带入极点就是对应分母的分子系数
2. 遇到分母外括号带系数的，最高阶按照1正常算，剩下的依次求导计算

逆变换的计算

在这里，最主要变换对为:

$$
\frac{z}{z-a} \leftrightarrow z^k
$$

最主要用到性质为平移性质，既:

$$
\begin{gathered}
z^{-n}F(z) \qquad 右移n \\
z^{n}F(z) \qquad 左移n
\end{gathered}
$$

我们以此为例:

$$
F(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-0.2)}
$$

我们可以直接展开，即为:

$$
F(z) = \frac{12.5}{z-1} - \frac{2.5}{z-0.2}
$$

我们想要按照变换对进行逆变换，很明显分子少z，那我们就乘z:

$$
zF(z) = \frac{12.5z}{z-1} - \frac{2.5z}{z-0.2} \leftrightarrow 12.5(1)^k - 2.5(0.2)^k
$$

注意，我们求出来的是$zF(z)$的逆变换，而不是$F(z)$逆变换，前者右移一个即为后者:

$$
F(z) = 12.5(1)^{k-1} - 2.5(0.2)^{k-1} = 12.5 - 12.5(0.2)^k
$$

但是此题仍然有第二种解法:

$$
\begin{gathered}
\frac{F(z)}{z} = \frac{10}{(z-1)(z-0.2)} \\
\frac{F(z)}{z} = \frac{12.5}{z-1} - \frac{12.5}{z-0.2} \\
F(z) = \frac{12.5z}{z-1} - \frac{12.5z}{z-0.2} \leftrightarrow 12.5 - 12.5(0.2)^k
\end{gathered}
$$

值得注意的是，右移是不需要进行额外的加减的，只需要将k-n带入即可，如果是左移，那么就需要减去移走的值了:

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{2z}{z-1}-\frac{2z}{z-0.5}\leftrightarrow 2(1)^k-2(0.5)^k$$
$$F(z)\leftrightarrow 2(1)^{k+1}-2(0.5)^{k+1}-2+2=2-0.5^k$$

留数法

而用留数法求$F(kT)$也比较简单:

$$F(kT)=\sum_{i=1}^{n}Res[F(z)z^{k-1}]\Big|_{z=z_i}$$

求$F(kT)$那么就将$F(z)$乘上z^{k-1}，然后挨个极点求留数(每个极点也要跟着这个东西)就行了
同样的，对应高阶级点进行求导运算时，也要**注意z^{k-1}也是参与求导运算**
$F(kT)$可简写为$F(k)$