直接设计法

计算机控制系统的直接设计法，是先将被控对象和保持器组成的连续部分离散化，然后应用离散控制理论的方法进行分析和综合，直接设计出满足控制指标的离散控制器，用计算机来实现
在此处，我们的间接设计法用的是**最少拍控制系统设计**

最少拍控制系统设计

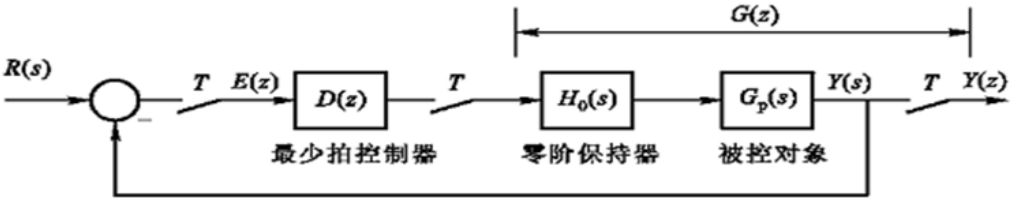
最少拍设计，是指系统在典型输入信号(阶跃、速度、加速度信号)作用下，经过最少拍(有限拍)，使系统输出的稳态误差为零

定义：最小拍控制为时间最优控制，即闭环控制系统在最少的采样周期内达到稳定，且在**采样点上**的输出能够准确地跟踪输入信号，不存在稳态误差

既然是在采样点上能够准确跟踪输入信号，那么不在采样点上呢?
此时，我们可以分为两种情况:

- 有波纹：对任意两次采样时刻间的输出不提任何要求，中间可以随便震荡，只保证系统输出在采样点上误差为0，而采样点之间不保证误差为0
- 无波纹：采样点上及采样点间均能保证误差为0

一般，我们用最少拍设计得到的整个系统是如下图所示:



我们为了保证设计简单，一般假设满足以下条件:

- $G(Z)$在单位圆上和圆外无极点，其中$(1,0j)$除外
- $G(Z)$在单位圆上和圆外无零点
- $H_0(Z)$不含纯滞后环节

$G(z)$就是我们前面介绍的广义脉冲传递函数，直接用前面的结论做z变换:

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$$

理论推导

根据上图的流程图，我们先计算传递函数:

$$\Phi(z) = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$$

我们也可以得到误差传递函数:

$$\Phi_e = \frac{E(z)}{R(z) =}\frac{1}{1+D(z)G(z)} = 1 - \Phi(z)$$

由于我们是设计控制器，即我们要求$D(z)$，那么根据上述等式，我们把$D(z)$导出来:

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{\Phi_e R(z)}$$

那么为我们的误差是什么呢？我们用误差传递函数来求:

$$E(z) = \Phi_e(z)R(z)$$

由于我们是在典型输入条件下，那么典型输入长成这样的($A(z)$为不包含$1-z^{-1}$项的多项式):

$$R(z)=\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^q}$$

带入误差，我们得到:

$$E(z)=1-\Phi(z)=\Phi_e(z)\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^q}$$

不要忘了，上面式子求的是z变换，我们要用终值定理才能真正求出误差:

$$e(\infty)=\lim_{z\to1}[(z-1)\Phi_e(z)\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^q}]=0$$

我们真要是让误差为0，那么$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^qF(z)$，为什么?
我得把分母搞掉才能将1带进去，最后值为0啊，不然带极点我怎么解？你要硬洛也行，但是我这里是在设计系统，我这么做不是好设计吗？这是最简单方法了

$$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^qF(z)$$

$F(z)$为不含零点z=1的z^{-1}多项式，我们将$F(z)$展开:

$$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^q(f_0+f_1z^{-1}+f_2z^{-2}\cdots+f_pz^{-p})$$

我们想要达到最少拍，而且要尽可能简单，干脆$p=0$好了，就留f_0，并令$f_0=1$，这样我不就完美的消掉了分母？即:

$$E(z)=A(z)$$
$$e(\infty)=\lim_{z\to1}[(z-1)A(z)]=0$$

最少拍有波纹系统设计

前面的其实你完全可以不看，直接看这里，我们在此进行总结，对于典型输入，我们进行设计有:

$$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^q$$
$$\Phi(z)=1-\Phi_e(z)=1-(1-z^{-1})^q$$
$$D(z)=\frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)}=\frac{1}{G(z)}\frac{\Phi(z)}{1-\Phi(z)}$$
$$U(z)=\frac{R(z)\Phi(z)}{G(z)}$$

q为你输入信号的的阶数加1，也是你系统误差为0时经过的最少拍数；$U(z)$为控制器的输出

三种典型输入信号形式下的最少拍控制器设计结果

$r(t)$	$\phi_e(z)$	$\phi(z)$	$D(z)$	t_s
$1(t)$	$1-z^{-1}$	z^{-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})G(z)}$	T
$t\cdot 1(t)$	$(1-z^{-1})^2$	$2z^{-1}-z^{-2}$	$\frac{z^{-1}(2-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2G(z)}$	$2T$
$\frac{1}{2}t^2 1(t)$	$(1-z^{-1})^3$	$3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}$	$\frac{z^{-1}(3-3z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^3G(z)}$	$3T$

也就是说给定你输入信号，对照表里数据无脑带上面的公式就可以了，就完成了控制器的设计

很多情况下，我们需要保证控制量$U(z)$是稳定的，即他要收敛，那么根据$U(z)=\frac{R(z)\Phi(z)}{G(z)}$，需要$G(z)$所有**零点**都在单位圆内

- 零点都在单位圆内，一定稳定
- 零点有在单位圆上和单位圆外，分别为z_i，有k个
  那么我的$\Phi(z)$要想办法包含这些零点(根据$U(z)$表达式)，即:

$$\Phi(z)=(1-z_1z^{-1})\cdots(1-z_kz^{-1})M(z)$$

  $M(z)$为你上边本来就应该求得的$\Phi(z)$乘上系数，每一项都乘，如z^{-1}变为m_1z^{-1}，$2z^{-1}-z^{-2}$变为$m_1z^{-1}-m_2z^{-2}$
  $\Phi(z)$与$\Phi_e(z)$中z^{-1}次数应该是匹配的，所以$\Phi_e(z)$中的$F(z)$不能仅取第一项，而是要多取一项进行匹配

例题:圆外零点为-2.78，单位阶跃输入
$\Phi(z)=(1+2.78z^{-1})m_1z^{-1}$
$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})(1+f_1z^{-1})$(注意:$f_0$我们始终取1)
由$\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$将上述两式带入后待定系数求得未知数

对于不稳定的被控对象设计最小拍，那么就在$\Phi_e(z)$包含被控对象单位圆外与上的极点

$$\Phi_e(z)=(1-z_1z^{-1})\cdots(1-z_kz^{-1})A(z)$$

$A(z)$为你本应该求的$\Phi_e(z)$，令$\Phi(z)$为对应次数的$M(z)$，待定系数求未知数

最少拍无波纹系统设计

无波纹系统设计上与保证控制量稳定类似，只不过$\Phi(z)$不仅仅要包含不稳定的极点，还要包含单位圆内非0的极点，即:

$$\Phi(z)=(1-z_1z^{-1})\cdots(1-z_kz^{-1})M(z)$$

然后$\Phi_e(z)$中$F(z)$要根据$\Phi(z)$中z^{-1}次数多取几项，使其次数匹配，最后待定系数求解未知数
实际上，你也不一定非得要待定系数求解，而是可以采取以下公式:

$$\Phi(1)=1$$

$$\Phi'(1)=\left.\frac{d\Phi(z)}{dz}\right|_{z=1}=0$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Phi^{q-1)}(1)=\left.\frac{d^{q-1}\Phi(z)}{dz^{q-1}}\right|_{z=1}=0$$

$$\phi(a_j)=1 \qquad (j=1,2,3,\cdots,v)$$