离散系统的性能分析

s平面到z平面

若在s平面中，一个点的坐标为$s=\sigma+\omega j$，映射到z平面后用极坐标表示，即$|z|$为映射后点的模值，θ为映射后角度:

$$
z=e^{Ts}
$$
$$
|z|=e^{T\sigma} \qquad \theta=T\omega
$$

注意，上述式子中ω是s平面上点的y坐标，若是题目给你采样频率ω_c，那么实际上给的是T，即为$T=\frac{2\pi}{\omega}$

在s平面中，在特征方程的根在平面左侧为系统稳定，那么根据上述式子我们发现，z平面实际上就是把s平面中竖线掰弯，形成一个圆，那么y轴掰弯后形成的是单位圆，即特征方程的根都在单位圆内，则系统稳定

稳定判据

由上述变换关系，我们得出结论，线性离散控制系统稳定的充要条件是:
闭环系统特征方程的所有根的模$|z_i|<1$，即闭环脉冲传递函数的极点(特征方程的根)均位于z平面的单位圆内
众所周知，求出所有的根是十分痛苦且很多情况是不可能的，那么就和连续系统一样，有一些判据来判断系统是不是稳定的

w变换及w域的劳斯稳定判据

劳斯判据是在自动控制原理提出的，本质上他是在s平面上判断方程的根是否在左半轴。而z变换后，是将是s平面上的点对应到z平面上一个个圆上了，稳定判据从特征方程的根都在左半平面变为都在单位圆内
那么，我能不能想办法通过某种对应方式将z平面上点对应到类似的s平面上，然后通过劳斯判据进行判断呢?
实际上，这种对应关系就是我们的w变换

$$
w\text{变换(双线性变换)} \quad \begin{cases} z=\frac{1+w}{1-w} \\ w=\frac{z-1}{z+1} \end{cases}
$$

同时，对于双线性变换还可以有好多组，你可以任选一组你喜欢的进行变换:

$$
\begin{cases} z=\frac{w+1}{w-1} \\ w=\frac{z+1}{z-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} \\ w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \end{cases}
$$

将在z平面的式子通过w变换变为w变换后，就可利用劳斯判据判断稳定性了，而且判断过程，结论与s平面上的劳斯判据如出一辙

实际上，当采样周期无限小的时候，w平面近似为s平面

假设我们有一特征方程为:$z^2-z+0.632=0$
那么我们利用最后一组的双线性变换，可以得到:

$$
0.658w^2+0.368w+0.632=0
$$

然后利用劳斯判据，那么劳斯表如下所示:

$$
\begin{array}{lll} \omega^2 & a_2 & a_0 \\ \omega^1 & a_1 & \\ \omega^0 & b_1 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lll} \omega^2 & 0.658 & 0.632 \\ \omega^1 & 0.368 & \\ \omega^0 & 0.632 & \end{array}
$$

二阶系统z域直接判定法

我们有如下二阶**闭环**系统:

$$
W(z)=z^2+a_1z+a_0
$$

满足全部以下条件，则系统稳定:

1. $|W(0)| = a_0 = 1$
2. $W(1) > 0$
3. $W(-1) > 0$

z域中朱利稳定判据

我们将特征方程记为$D(z)$,$D(z)$若是稳定的，那么需要**满足以下全部**条件:
在此处我们以$D(z) = -39 + 119z - 117z^2 + 45z^3$为例:

1. $D(1) > 0$，$D(1) = 8 > 0$
2. $\begin{cases} D(-1) > 0 & \text{最高次项幂为偶数} \\ D(-1) < 0 & \text{最高次项幂为奇数} \end{cases}$
   $D(-1) = -320 < 0$，最高次幂系数是3为奇数
3. 列出朱利表，然后判断

Jurry	z^0	z^1	z^2	z^3
1	-39	119	-117	45
2	45	-117	119	-39
3	$\begin{vmatrix} -39 & 45 \\ 45 & -39 \end{vmatrix} = -504$	$\begin{vmatrix} -39 & -117 \\ 45 & 119 \end{vmatrix} = 624$	$\begin{vmatrix} -39 & 119 \\ 45 & -117 \end{vmatrix} = -792$	
4	-792	624	-504	

   i. 将$D(z)$升序排列，将其系数写在第一行
   ii. 将第一行反过来，写在第二行
   iii. 取第一行第二列的值，取最右侧第一行第二行值，放到一起，求行列式，放到第三行第一个。行列式最左侧的数不动，从右侧挪一个位置，取右侧倒数第二第一行第二行值，求行列式，依此类推，求出第三行
   iv. 将第三行反过来，写在第四号
   v. 第五行第六行重复步骤3、4，知道最后一行剩下三个数为止
   此例子中，第四行已经只剩下三个数了，所有只算到第四号行可

Jurry	z^0	z^1	z^2	z^3
1	$\lvert -39 \rvert$	119	-117	45
2	$\lvert 45 \rvert$	-117	119	-39
3	$\begin{vmatrix} -39 & 45 \\ 45 & -39 \end{vmatrix} = -504$	$\begin{vmatrix} -39 & -117 \\ 45 & 119 \end{vmatrix} = 624$	$\begin{vmatrix} -39 & 119 \\ 45 & -117 \end{vmatrix} = -792$	
4	$\lvert -792 \rvert$	624	-504	

   判断条件:
   6. 仅看第一列，对第一列的数取模(绝对值)
   7. **第一行的数要小于第二行**
   8. 从第三行起，每两行为一组，不可以有交集，前一行的要大于后一行，即**第三行的数要大于第四行，第五行的数要大于第六行**，依次类推都是大于

在此例子中，第三行的绝对值没有大于第四号的绝对值，所以系统不稳定

修尔-科恩稳定判据

已知特征方程为$1+G(z)=0$，我们取特征方程的分子为:

$$W(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z^1+a_0=0$$

那么可以根据下表写出一些行列式:

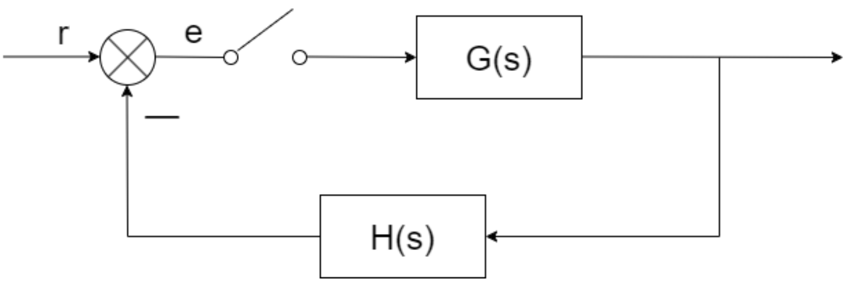
$$\Delta_m=\begin{vmatrix}
a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-m+1} \\
a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-m+2} \\
a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_n & \cdots & a_{n-m+3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\
\bar{a}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_{m-1} \\
\bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_{m-2} \\
\bar{a}_{n-2} & \bar{a}_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \cdots & \bar{a}_{m-3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\bar{a}_{n-m+1} & \bar{a}_{n-m+2} & \bar{a}_{n-m+3} & & \bar{a}_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_0
\end{vmatrix}$$

我们令$m=1,2,\cdots,n$，n为特征方程阶数，$\bar{a}_n$为a_n的共轭复数
实际上，我们的Δ_m是$2m\times 2m$的行列式，我们可以写出n个，即$\Delta_n\Delta_{m-1},\cdots,\Delta_1$
这些Δ改变符号的次数就是稳定根的数目，即系统稳定，那么改变符号的次数就是特征方程的阶数

$$\begin{cases}\Delta_m>0 & m\text{为偶数}\\ \Delta_m<0 & m\text{为奇数}\end{cases}$$

稳态误差

求解稳态误差的一般方法



根据所示系统环节，求**开环**脉冲传递函数(注意采样开关的设置):

$$GH(z)=\frac{1}{(z-1)^v}GH_0(z)$$
$$\lim_{z\to 1}GH_0(z)=k$$

其中，上述式子中的v为系统的型数
那么，计算稳态误差步骤如下:

1. 判定稳定性
2. 求误差脉冲传递函数

$$\phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+GH(z)}$$

3. 利用终值定理求$e(\infty)$

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\phi_e(z)R(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)R(z)\frac{1}{1+GH(z)}$$

静态误差系数法

与连续系统相同，在离散系统中我们也可以得到静态误差系数来求解稳态误差，在上面我们知道了系统的型数为**开环脉冲传递函数**中的v:

$$GH(z)=\frac{1}{(z-1)^v}GH_0(z)$$

那么类比连续系统，我们就有:

$$\begin{aligned}\text{静态位置误差系数}\quad k_p&=\lim_{z\to1}GH(z)\\ \text{静态速度误差系数}\quad k_v&=\frac{1}{T}\lim_{z\to1}(z-1)GH(z)\\ \text{静态加速度误差系数}\quad k_p&=\frac{1}{T^2}\lim_{z\to1}(z-1)^2GH(z)\end{aligned}$$

系统型别	位置误差 r(t)=1(t)	速度误差r(t)=t	加速度误差 r(t)=$t^2/2$
0型	$1/(1+K_p)$	∞	∞
I型	0	$1/K_v$	∞
II型	0	0	$1/K_a$
III型	0	0	0

根轨迹法

利用根轨迹法可以分析系统的动态性能，在z平面中画根轨迹与在s平面中画根轨迹方法**完全相同**，只不过在s平面上，我们说在左半轴内的规矩是稳定的，而在z平面上，是在单位圆内是稳定的
也就是说，按照自动控制原理中根轨迹画法画出根轨迹，然后再画一个单位圆，在圆内稳定，圆上临界稳定，圆外不稳定

极点分布对动态性能影响

1. 闭环极点最好分布在z平面单位圆的右半部，最为理想的是分布在靠近原点的地方，由于这时 $|z_j|$ 值较小，所以相应的瞬态过程较快，即离散系统对输入具有快速响应的性能
2. 和连续系统中相同，离散系统中也有主导极点，统响应主要由这一对主导极点决定，其他极点在分析时可忽略不计。主导极点是最靠见单位圆的极点