位置与姿态表示

一般的矩阵表示

- 位置

$$^{A}p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

  上述表示为点P在A坐标系下的位置
- 姿态(可以简单理解为在三维空间中角度)

$$^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} ^{A}X_B & ^{A}Y_B & ^{A}Z_B \end{bmatrix}$$

  上述表示为在以刚体B建立空间坐标系，那么这个坐标系三个两两正交的单位矢量，在A坐标系下位置，分别记为X Y Z，也就是说，X Y Z其实是个三维列向量
  某种角度来说，$^{A}_{B}R$其实也是一种旋转矩阵，而且这种矩阵的正定的，即:

$$(^{A}_{B}R)^T = (^{A}_{B}R)^{-1}$$

坐标变换

基坐标与连体坐标

从通俗角度来理解，基坐标就是指我每次进行变换的时候都用同一个坐标系；而连体坐标系是每次变换的时候用的是不同的坐标系，这些不同的坐标系之间含有某种联系

> 例如，一个物体在A坐标系下先平移，然后又在该坐标系下旋转，那么这就是基坐标；而另一物体在A坐标系下先绕X旋转，然后再绕旋转后坐标系的Z轴旋转，此时就是连体坐标

- 坐标变换是有**顺序之分**的，不可随意调换(矩阵乘法没有交换律)，如先平移后旋转和先旋转后平移结果不同
- **右乘连体左乘基**
- 若是旋转，那么就是矩阵乘法；若是平移，则是对矩阵进行加法运算

> 我们可以看到，在这种变换算法下矩阵的旋转和平移是分开的，并不是仅仅通过矩阵乘法来进行计算的，而齐次坐标变换解决了这个问题

变换规律

- 平移:对于平移而言，点p在A坐标系下位置等于点p在B坐标系下位置加上A，B坐标系间相对值(也就是你要平移的量)，角标也相当于可约
  换句话硕，平移就等于原来的矩阵加上平移后的矩阵

$$^{A}p =^{B} p +^{A} p_B$$

- 旋转:旋转要遵守右乘连体左乘基的规则，要注意其角标是可以**约掉的**

$$^{B}p =^{B}_{A} R \quad ^{A}p$$

绕XYZ轴的旋转变换矩阵

$$R(x,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

$$R(y,\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & \sin(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

$$R(z,\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

齐次坐标变换

齐次坐标变换是可以将平移旋转放到一个矩阵来解决问题的，由于用的是矩阵乘法，那么同样遵守**右乘连体左乘基**的规则
正常情况下，我们进行坐标变换是这样的:

$$^{A}p=^{A}_{B}R\quad ^{B}p+^{A}P_{B}$$

在齐次变换中，我们将最后得到^{A}p转化为下述形式:

$$^{A}p\Rightarrow ^{A}p^{'}=\begin{bmatrix}^{A}p\\ 1\end{bmatrix}$$

众所周知在三位空间中，我们可以用一个三维列向量来表示一个点，所以这里是一个4×1矩阵；同时所有的点都可按照上面的规则变为齐次坐标

那么整个运算的过程与参与运算的矩阵如下所示:

$$\begin{bmatrix}^{A}p\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}^{A}_{B}R & ^{A}P_{B}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}^{B}p\\ 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}\text{变换后的坐标}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{旋转变换矩阵} & \text{平移矩阵}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{变换前坐标}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$^{A}p^{'}=^{A}_{B}T\quad ^{B}p^{'}$$

我们称$^{A}p^{'}$为点的齐次坐标，$^{A}_{B}T$为齐次坐标变换矩阵，因此有:

$$\text{变换后齐次坐标}=\text{齐次坐标变换矩阵}\times\text{变换前齐次坐标}$$

> 值得注意的是，这里齐次坐标变换矩阵是一个4×4矩阵

同时，我们的齐次坐标变换矩阵还有以下性质:

$$(^{A}_{B}T)^{-1}=^{B}_{A}T$$

在齐次坐标下，我们将平移从原来矩阵的加法变为矩阵的乘法，旋转仍然是矩阵的乘法，实现了运算方法的统一
虽然在齐次坐标变换矩阵中既有旋转又有平移，但是遇到平移和旋转的时候，仍然需要分开进行计算，也就是分开进行矩阵乘法，他们齐次坐标变换矩阵如下:

$$\text{旋转}\begin{bmatrix}^{A}_{B}R & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad\text{平移}\begin{bmatrix}1 & ^{A}P_{B}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

因为矩阵乘法没有交换律存在，所以导致先旋转后平移其齐次坐标变换矩阵为$\begin{bmatrix} {}^A_BR & {}^AP_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，而先平移后旋转则变成$\begin{bmatrix} {}^A_BR & {}^A_BR^AP_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，所以我们一定要分开来计算

一些遇到的写法

- 平移:$Trans(x,y,z)$
- 旋转:$Rot(x,\theta)$(前面绕着旋转轴，后面为旋转角度)
- 欧拉角:$Euler(\phi,\theta,\varphi)=Rot(x,\varPhi)Rot(y,\theta)Rot(x,\phi)$
  > 注意:这里欧拉角部分用的是联体坐标