

ÉQUILIBRES CORRÉLÉS

DYLAN LAPLACE MERMOUD

Brèves notes de cours adaptées du cours de Tristan Garrec et du livre intitulé “Bases mathématiques de la théorie des jeux” de Rida Laraki, Jérôme Renault et Sylvain Sorin.

1. PREMIERS EXEMPLES

Dans les cours précédents, nous avons plus ou moins toujours fait l’hypothèse que les choix des joueurs étant indépendants, ou simultanés, de ceux des autres. En pratique, il existe des situations où ce n’est pas forcément le cas. C’est le cas par exemple lorsqu’un automobiliste arrive à une intersection. Si les choix des conducteurs étaient indépendants et simultanés, il se pourrait que deux automobilistes cherchent à traverser au même moment, que ce soit en stratégies pures ou mixtes. Pour pallier à cela, des feux tricolores on était installé, indiquant à chaque conducteur quelle stratégie pure jouer. Il s’agit ici de *corrélér* les stratégies des joueurs.

Exemple 1 (Jeu de coordination). Considérons le jeu de coordination suivant :

	C	T
C	2, 1	0, 0
T	0, 0	1, 2

Le jeu a trois équilibres de Nash :

- ▷ en stratégies pures: (C, C) avec paiement $(2, 1)$ et (T, T) avec paiement $(1, 2)$;
- ▷ en stratégies mixtes : $(\frac{2}{3}C + \frac{1}{3}T, \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}T)$ avec paiement espéré $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Les deux premiers équilibres ne sont pas symétriques, et le troisième a des paiements bien insuffisants. Les jeux joueurs pourraient corrélér leurs actions de la façon suivante : lancer une pièce équilibrée, si c’est face jouer (C, C) et si c’est pile jouer (T, T) . Le paiement espéré serait alors de $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Puisque (C, C) et (T, T) sont des équilibres, aucun joueur n’a intérêt à dévier de la stratégie choisie par le lancer de pièce. \diamond

Grâce à l’exemple précédent, on remarque que si on autorise les joueurs à procéder à un tirage au sort commun et public avant le jeu, ils peuvent recevoir comme paiement d’équilibre toutes combinaison convexe des paiements d’équilibre du jeu d’origine. Est-il possible de créer un mécanisme de corrélation tel que l’ensemble des paiements d’équilibre inclue des paiements qui sont pas dans l’enveloppe convexe des paiements d’équilibre du jeu initial ?

Exemple 2. On considère les jeu suivant dans lequel j_1 choisit une ligne, j_2 choisit une colonne et j_3 choisit une matrice :

	G	D		G	D		G	D
H	0, 1, 3	0, 0, 0		2, 2, 2	0, 0, 0		0, 1, 0	0, 0, 0
B	1, 1, 1	1, 0, 0		2, 2, 1	2, 2, 2		1, 1, 1	1, 0, 3
	g			c			d	

On montre que le paiement d'équilibre est $(1, 1, 1)$, alors qu'il existe un mécanisme de corrélation qui induit un paiement d'équilibre $(2, 2, 2)$.

- ▷ Il existe une probabilité strictement positive que (G, c) ne soit pas joué par j_2 et j_3 : si j_2 joue G , alors g domine strictement c donc (G, c) ne peut pas être joué avec probabilité 1 ;
- ▷ On a que j_1 joue B car cette stratégie domine faiblement T . Depuis, comme (L, c) n'est pas joué avec probabilité 1, B donne un paiement strictement meilleur que T , donc T n'est pas joué à l'équilibre ;
- ▷ Comme T est éliminée, d domine strictement c , puis G domine strictement D , donc j_2 joue G et j_3 joue g ou d .

Il ne reste plus que (B, G, g) et (B, G, d) , qui chacun donne le paiement $(1, 1, 1)$.

Le mécanisme de corrélation est le suivant. Les joueurs j_1 et j_2 lancent une pièce non-biaisée, et s'accordent à jouer (H, G) ou (B, D) selon l'issue, pendant que le joueur j_3 joue c . Ainsi, (H, G, c) et (B, D, c) sont choisis équiprobablement et donnent un paiement de $(2, 2, 2)$. Si j_3 choisit de dévier vers g ou d pour tenter de gagner 3, cela ne se produira qu'une fois sur deux, et son paiement serait alors de $\frac{3}{2}$, inférieur à celui qu'il obtient grâce au mécanisme de corrélation. De plus, ni j_1 ni j_2 ne souhaite dévier, car ils obtiennent chacun le plus grand paiement qu'il leur est possible d'obtenir. \diamond

Dans l'exemple précédent, il est nécessaire que le joueur j_3 ne connaissent pas l'issue du lancer de pièce, car il pourrait choisir exactement les bons moments pour dévier sur g ou sur d . Ainsi, tout paiement de l'enveloppe convexe de l'ensemble des paiements d'équilibre peut être atteint par un tirage au sort public, et pour atteindre d'autres paiements il faut que ce tirage au sort ne soit pas totalement public, auquel cas les joueurs reçoivent des informations différentes sur son résultat.

Exemple 3. Étudions le jeu suivant :

	G	D
H	6, 6	2, 7
B	7, 2	0, 0

Le jeu a trois équilibres :

- ▷ (H, D) avec paiement $(2, 7)$, et symétriquement (B, G) avec paiement $(7, 2)$;
- ▷ $(\frac{2}{3}H + \frac{1}{3}B, \frac{2}{3}G + \frac{1}{3}D)$ avec paiement espéré de $(\frac{14}{3}, \frac{14}{3})$.

On considère le mécanisme dans lequel un observateur extérieur choisit uniformément l'un des couples (H, G) , (H, D) et (B, G) , puis l'annonce à chaque joueur sa stratégie.

Si j_1 reçoit H , la probabilité conditionnelle que j_2 ait reçu G est $\frac{1/3}{1/3+1/3} = \frac{1}{2}$. Si j_1

a reçu B , il sait que j_2 a reçu G . Montrons qu'il n'y a pas de déviation unilatérale profitable de la recommandation.

- ▷ Si j_1 reçoit H , son paiement espéré en suivant H est $\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}2 = 4$. S'il dévie, son paiement espéré est $\frac{1}{2}7 + \frac{1}{2}0 = \frac{7}{2}$.
- ▷ Si j_1 reçoit B , son paiement espéré en suivant B est 7, alors qu'en déviant son paiement espéré est 6.

Le jeu étant symétrique, le joueur j_2 tient exactement le même raisonnement. Le paiement espéré en suivant le mécanisme de corrélation est

$$\frac{1}{3}(6, 6) + \frac{1}{3}(7, 2) + \frac{1}{3}(2, 7) = (5, 5),$$

qui n'est pas dans l'enveloppe convexe des paiements d'équilibre du jeu original. \diamond

2. DÉFINITIONS FORMELLES

Les exemples précédents montrent que pour obtenir des paiements élevés pour chaque joueur, il faut éviter les pires paiements (par exemple, $(0, 0)$ dans l'exemple précédent). Ceci ne peut pas être accompli dans ces cas-là si les joueurs jouent des stratégies mixtes indépendantes. On fait désormais les hypothèses suivantes :

- ▷ le jeu inclue un observateur, qui recommande des stratégies aux joueurs ;
- ▷ l'observateur choisit ses recommandations *aléatoirement*, suivant une distribution de probabilité *connue* des joueurs ;
- ▷ les recommandations sont privées ;
- ▷ ce mécanisme est *connaissance commune* parmi tous les joueurs : chaque joueur sait que le mécanisme est utilisé, que chaque joueur sait que le mécanisme est utilisé, et ainsi de suite.

Définition 1. Une *structure d'information* \mathcal{I} est la donnée de

- ▷ un ensemble d'aléas représenté par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$;
- ▷ une famille d'applications mesurables θ_i de (Ω, \mathcal{A}) dans S_i .

Cette définition peut se comprendre de la manière suivante : un observateur extérieur choisit la variable aléatoire $\omega \in \Omega$ suivant la mesure de probabilité \mathbb{P} , qui définit ensuite pour chaque joueur la recommandation reçue $\theta_i(\omega)$.

Soit $\Gamma = (N, S, g)$ un jeu sous forme normale.

Définition 2. Le jeu Γ étendu par \mathcal{I} , noté $[\Gamma, \mathcal{I}]$ est le jeu sous forme extensive joué en deux étapes :

- (1) la variable aléatoire ω est tirée suivant \mathbb{P} et $\theta_i(\omega)$ est envoyé au joueur j_i ;
- (2) les joueurs jouent dans le jeu Γ selon la recommandation reçue.

Une stratégie (pure) du joueur j_i dans le jeu $[\Gamma, \mathcal{I}]$ est une fonction

$$\tau_i : S_i \rightarrow S_i,$$

qui a chaque recommandation s_i de l'observateur associe une action $\tau_i(s_i) \in S_i$.

La probabilité que le joueur j_i reçoive la recommandation s_i est donnée par

$$\sum_{t_{-i} \in S_{-i}} \mathbb{P}(s_i, t_{-i}).$$

La probabilité conditionnelle que l'observateur ait choisi (s_i, s_{-i}) est

$$\mathbb{P}(s_{-i} \mid s_i) = \frac{\mathbb{P}(s_i, s_{-i})}{\sum_{t_{-i} \in S_{-i}} \mathbb{P}(s_i, t_{-i})}$$

si le dénominateur est strictement positif, et est non-définie sinon.

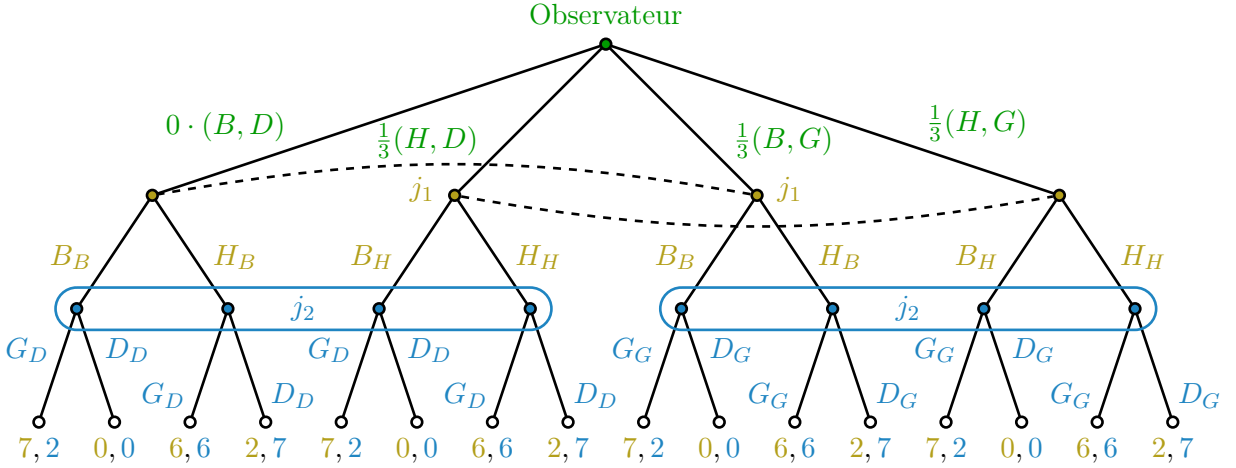


FIGURE 1. Forme extensive de l'extension de l'exemple 3.

On note τ_i^* la stratégie du joueur j_i qui consiste à suivre la recommandation de l'observateur, c'est-à-dire, $\tau_i^*(s_i) = s_i$ pour tout $s_i \in S_i$.

Définition 3. Une structure d'information \mathcal{I} définit un équilibre corrélé si le profil τ^* est un équilibre de Nash du jeu $[\Gamma, \mathcal{I}]$.

Théorème 1. Le profil τ^* est un équilibre dans le jeu $[\Gamma, \mathcal{I}]$ si et seulement si, pour tout joueur $i \in N$, pour toutes stratégies $s_i, s'_i \in S_i$, on a

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mathbb{P}(s_i, s_{-i}) g_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mathbb{P}(s_i, s_{-i}) g_i(s'_i, s_{-i}).$$

Tout profil de stratégies σ induit une probabilité \mathbb{P}_σ sur S :

$$\mathbb{P}_\sigma(s_1, \dots, s_n) = \sigma_1(s_1) \times \dots \times \sigma_n(s_n).$$

Théorème 2. Pour tout équilibre de Nash σ^* , \mathbb{P}_{σ^*} définit un équilibre corrélé.

Corollaire 1. Tout jeu fini admet un équilibre corrélé.

Contrairement aux équilibres de Nash, les équilibres corrélés d'un jeu sont relativement facile à calculer du point de vue de la complexité algorithmique.

Exemple 4. Reprenons le jeu de coordination suivant :

	<i>C</i>	<i>T</i>
<i>C</i>	2, 1	0, 0
<i>T</i>	0, 0	1, 2

Calculons les équilibres corrélés. Notons

$$\alpha = \mathbb{P}(C, C), \quad \beta = \mathbb{P}(C, T), \quad \gamma = \mathbb{P}(T, C), \quad \text{et} \quad \delta = \mathbb{P}(T, T).$$

On a les contraintes suivantes :

$$\alpha g_1(C, C) + \beta g_1(C, T) \geq \alpha g_1(T, C) + \beta g_1(T, T)$$

$$\gamma g_1(T, C) + \delta g_1(T, T) \geq \gamma g_1(C, C) + \delta g_1(C, T)$$

$$\alpha g_2(C, T) + \gamma g_2(T, C) \geq \alpha g_2(C, C) + \gamma g_2(T, T)$$

$$\beta g_2(C, T) + \delta g_2(T, T) \geq \beta g_2(C, C) + \delta g_2(T, C)$$

en addition de celles définissant une mesure de probabilité :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \quad \text{et} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0.$$

Évaluer les différents paiements simplifient les expressions des contraintes :

$$\alpha \geq 2\beta, \quad 2\delta \geq \gamma, \quad \delta \geq 2\beta, \quad 2\alpha \geq \gamma,$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1, \quad \text{et} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0.$$

L'ensemble défini par ces inégalités est la combinaison convexe de ces trois points :

$$(1, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 0, 1) \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9} \right).$$

Ses sommets donnent, respectivement, les paiements suivants :

$$(1, 2), \quad (2, 1) \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Comme nous avons déjà vu, l'ensemble des paiement d'équilibre corrélé est donc égale à l'enveloppe convexe des paiements d'équilibre de Nash. Dans l'exemple 3, ces ensembles étaient différents. \diamond

3. PROLONGEMENTS

Dans ce cours, nous avons abordé les notions suivantes :

- ▷ *jeux sous forme normale* : stratégies pures et mixtes, domination, équilibre de Nash ;
- ▷ *jeux à somme nulle* : maxmin, minmax, valeur, point-selle, propriétés de l'opérateur valeur, lien avec la dualité des programmes linéaires ;
- ▷ *jeux sous forme extensive* : information parfaite et imparfaite, stratégies pures, mixtes et de comportement, réduction sous forme normale, mémoire parfaite, équilibres parfaits en sous-jeux, induction amont et algorithme de Kuhn ;
- ▷ *équilibres corrélés* : liens avec l'équilibre de Nash, paiements ;
- ▷ *appariements stables* : algorithme de Gale-Shapley, etc.

On pourrait prolonger le cours avec les notions suivantes, qui souvent impliquent un aspect dynamique, ou un abandon de l'aspect unilatéral des prises de décisions.

Jeux coopératifs – Un jeu coopératif est la donnée d'un ensemble de joueurs, et d'une mesure non-additive sur les coalitions. Les valeurs affectées aux coalitions peuvent être définies par un mécanisme stratégique, provenant par exemple de stratégies corrélés, ou non. L'étude des jeux coopératifs se focalise sur les répartitions des gains entre les membres d'une même coalition, et sur les conditions de formation des structures combinatoires de joueurs en fonction de la mesure non-additive.

Jeux répétés – Un jeu sous forme normale est répété un certain nombre de fois. À chaque étape, les joueurs se souviennent des actions jouées par tous les joueurs aux étapes précédentes. Le paiement d'un joueur à la fin du jeu est la moyenne des paiements qu'il a obtenu à chaque répétition.

Jouer à chaque étape un équilibre du jeu en un coup est un équilibre du jeu répété. Y a-t-il d'autres équilibres ? Quels sont les paiements d'équilibres atteignables ?

Jeux stochastiques – Soient n jeux sous forme normale, les joueurs commencent en l'un de ces jeux. Ils y choisissent une action, et reçoivent un paiement. Les actions choisies induisent également une probabilité de transition vers l'un des n jeux qui est joué à l'étape suivante, et ainsi de suite.

Il y a pour chaque joueur un compromis entre obtenir un bon paiement dans le jeu en cours, et maximiser ses chances d'être dans un bon jeu dans les étapes suivantes.

Jeux à information incomplète – Deux joueurs s'affrontent. Deux états du monde (c'est-à-dire, deux jeux) sont possibles, l'un étant sélectionné suivant une probabilité uniforme avant le début du jeu et fixé pour toute la suite. Le joueur j_1 connaît l'état du monde mais pas le joueur j_2 . Les joueurs jouent de manière répétée et observent les actions de l'adversaire, mais pas les paiements.

Le joueur j_1 fait face au compromis suivant : bien jouer dans le correspondant à l'état du monde qu'il connaît. Il prend ainsi le risque de révéler cet état au joueur j_2 , ce qui peut lui être préjudiciable, ou cacher l'état du monde au joueur j_2 .

Jeux différentiels – Les jeux différentiels sont à l'intersection entre la théorie des jeux et la théorie du contrôle. Par exemple, un objet x_1 est à la poursuite d'un objet x_2 , qui cherche à échapper à l'objet qui le poursuit. À chaque instant, chaque objet choisit son vecteur vitesse. Ainsi, la dynamique des joueurs est modélisée par des équations différentielles contrôlées. Combien de temps faut-il à l'objet x_1 pour rattraper l'objet x_2 . S'il ne peut l'attraper, peut-il s'en approcher aussi près qu'il le souhaite ?

Jeux à champ moyen – Un jeu à champ moyen est un jeu différentiel avec un grand nombre de joueurs qui ont chacun peu d'influence individuelle sur le système dans son ensemble. Ils ont été nommés ainsi en référence aux modèles de champs moyens en physique mathématique, qui étudient le comportement de nombreuses particules. Ils ont été entre autres utilisés pour les applications suivantes : modélisation de production optimale d'une ressource naturelle épuisable, comme le pétrole, modélisation de

croissance avec distribution hétérogène de richesses, simulation de comportement des foules, etc.

Il existe bien d'autres modèles, comme

- ▷ les jeux de Stackelberg ;
- ▷ les jeux de recherche-dissimulation ;
- ▷ les jeux d'inspection ;
- ▷ les jeux combinatoires ;
- ▷ les jeux d'emplacements ;
- ▷ les systèmes de vote et la théorie du choix social ;
- ▷ les jeux d'évolutions ;
- ▷ les jeux d'apprentissages, etc.