

# JEUX SOUS FORME EXTENSIVE

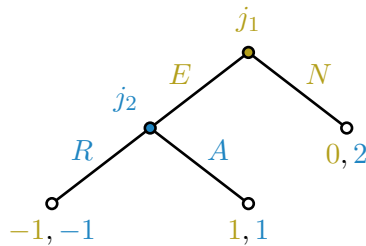
DYLAN LAPLACE MERMOUD

*Brèves notes de cours adaptées du cours de Tristan Garrec et du livre intitulé “Bases mathématiques de la théorie des jeux” de Rida Laraki, Jérôme Renault et Sylvain Sorin.*

## 1. PREMIÈRES DÉFINITIONS

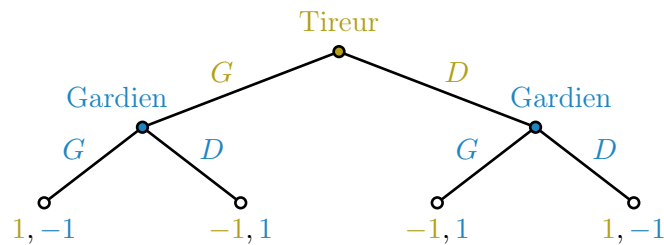
Depuis le début de ce cours, nous avons étudié les jeux sous forme normale, en stratégies pures ou mixtes, à somme nulle ou non. Dans chacun des cas, il n’était peu fait mention de la quantité d’information que chaque joueur détient avant de choisir son action, ou même de l’ordre dans lequel les actions sont prises. Pour tenir compte de l’information disponible pour un joueur à un certain moment du jeu, il nous faut changer de description.

**Exemple 1** (Jeu d’entrée). L’entreprise  $j_2$  est en situation de monopole. L’entreprise  $j_1$  peut choisir d’entrer ( $E$ ) sur le marché ou non ( $N$ ). Si  $j_1$  entre, l’entreprise  $j_2$  peut choisir de réagir ( $R$ ) agressivement ou de s’y accommoder ( $A$ ).



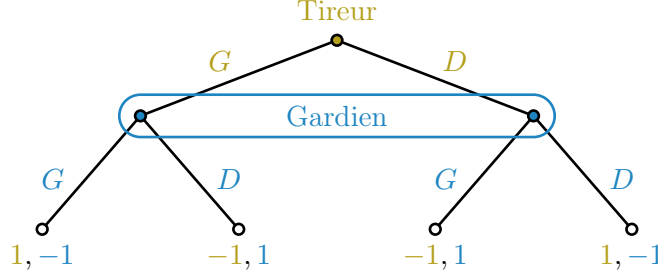
◇

**Exemple 2** (Matching pennies). Reprenons l’exemple du jeu “Tir de penalty”. Maintenant, le tireur  $j_2$  annonce où il va tirer. Le gardien  $j_1$  peut donc s’adapter et choisir le bon côté. Le jeu se décrit de la manière suivante :



Considérons maintenant le cas habituel, où le gardien ne sait pas où le tireur va tirer. Dans ce cas, le gardien ne sait pas sur quel nœud de l’arbre il se trouve, c’est-à-dire, si

le tireur a choisi gauche ( $G$ ) ou droite ( $D$ ). On représente cela de la façon suivante :



◇

Chaque jeu sous forme extensive est défini sur un arbre dirigé.

**Définition 1.** Un *arbre dirigé enraciné*  $\mathcal{A}$  est un triplet  $(Z, r, \theta)$  où

- ▷  $Z$  est un *ensemble fini de nœuds* ;
- ▷  $r \in Z$  est la *racine* ;
- ▷  $\theta : Z \setminus \{r\} \rightarrow Z$  est l'application prédécesseur.

On note par  $Sc(z) = \theta^{-1}(z)$  l'ensemble des successeurs immédiats de  $z$ . L'ensemble des nœuds sans successeurs est noté  $T$ , et sont appelés les *nœuds terminaux*.

**Définition 2.** Un *jeu sous forme extensive*  $\Gamma$  est la donnée de

- ▷ un ensemble fini de *joueurs*  $N$ , plus un joueur  $j_0$  appelé la *Nature* ;
- ▷ un arbre  $\mathcal{A} = (Z, r, \theta)$  ;
- ▷ une partition de  $Z \setminus T$  indiquant, pour chaque nœud, le joueur qui doit jouer.  
On note  $Z_i$  l'ensemble des nœuds sur lesquels le joueur  $i \in N \cup \{0\}$  joue ;
- ▷ pour chaque nœud  $z \in Z_0$ , un vecteur de probabilité  $D(z)$  sur  $Sc(z)$  ;
- ▷ pour chaque  $Z_i$ , une partition en blocs appelés *ensembles d'information* ;
- ▷ une fonction de paiement  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

La définition formelle d'un jeu sous forme extensive peut paraître longue et complexe, mais peut s'interpréter très facilement de la manière suivante :

- ▷ chaque nœud de l'arbre représente un état possible et temporaire du jeu. Le fait que le graphe sous-jacent du jeu soit un arbre reflète la non-réversibilité du passage du temps ;
- ▷ à chaque état du jeu, il est nécessaire de décrire quel joueur doit jouer, ce qui est représenté par la partition  $\{Z_i \mid i \in N \cup \{0\}\}$  ;
- ▷ enfin, lorsque le jeu est dans un état précis, le joueur  $j_i$  qui doit jouer peut ne pas avoir une information complète du passé. Ainsi, il ne sait pas nécessairement où exactement il se situe sur l'arbre. Cela est représenté par les ensembles d'information qui partitionnent  $Z_i$  : le joueur connaît simplement la classe d'équivalence dans laquelle il se trouve, mais pas le nœud exact.

Les ensembles d'information sont représentés par les contours entourant plusieurs nœuds du jeu, comme lors de l'exemple précédent. En particulier, si deux nœuds  $z_1$  et  $z_2$  se trouvent dans le même ensemble d'information, alors  $Sc(z_1) \simeq Sc(z_2)$ . Voici comment les jeux sous forme extensives sont joués :

- (1) notons  $i$  le joueur tel que  $r \in Z_i$ . Alors
  - (a) si  $i = 0$ , cela signifie que l'action est aléatoire, ainsi la position suivante est choisie en fonction de  $D(r)$  ;
  - (b) sinon,  $j_i$  choisit un nœud parmi  $Sc(r)$  qui devient le nœud actuel ;
- (2) le même processus se répète avec le nouveau sélectionné à l'étape précédente, tant que le nœud en cours n'est pas un nœud terminal ;
- (3) lorsqu'un des joueurs, ou la Nature, choisit un nœud terminal  $z_* \in T$ , le jeu s'arrête, et chaque joueur  $i \in N$  reçoit un paiement égal à  $g_i(z_*)$ .

La suite de nœuds visités  $(r, z_1, \dots, z_*)$  est appelée une *partie* du jeu.

**Définition 3.** Un jeu sous forme extensive est à *information parfaite* si tous les ensembles d'information sont des singletons.

**Exemple 3.** Le jeu d'échecs, de Go, le jeu d'entrée évoqué plus tôt, sont tous des jeux à information complète.  $\diamond$

## 2. STRATÉGIES ET FORME NORMALE

La notion de stratégie dans les jeux sous forme extensive est relativement différentes de celle des jeux sous forme normale, car elles doivent prendre en compte l'information disponible du joueur, ainsi que la position actuelle du jeu.

**Définition 4.** Une stratégie  $s_i$  de  $j_i$  associe à chaque ensemble d'information de  $Z_i$  un de ses successeurs. On note  $S_i$  l'ensemble des stratégies (pures) du joueur  $j_i$ .

On voit bien dans cette définition d'une stratégie pour un jeu sous forme extensive la nature des ensembles d'information. Comme le joueur ne peut pas distinguer les nœuds qui les composent, sa réaction à chaque des nœuds d'un même ensemble d'information va être la même. Cependant, lorsque le joueur est capable de distinguer deux ensembles d'information distincts, il peut choisir deux réactions différentes.

L'ensemble de stratégie  $S_i$  de  $j_i$  est alors le produit cartésien de chacun des ensembles de nœuds qui sont successeurs directs de ses ensembles d'information. Si  $u_1, \dots, u_p$  sont ses ensembles d'information, et pour chacun de ses ensembles, le nombre de successeurs est donné par  $n_1, \dots, n_p$ , alors le nombre de stratégies (pures) pour  $j_i$  est  $n_1 \times \dots \times n_p$ .

**Définition 5.** Un profil de stratégies pures  $s \in S = \prod_{i \in N} S_i$  induit une partie, et donc un paiement. On note  $g(s) \in \mathbb{R}^n$  l'espérance de paiement. On appelle *réduction sous forme normale* le triplet  $(N, S, g)$ .

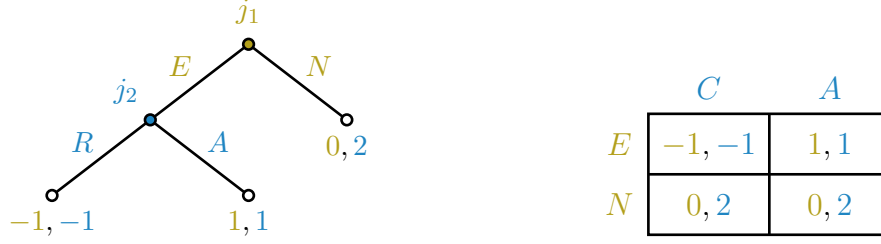
On remarquera que, même lorsque le profil est uniquement composé de stratégies pures, l'issue de ce jeu peut être aléatoire si  $Z_0 \neq \emptyset$ .

Comme on a défini un jeu sous forme normale, on peut définir des équilibres de Nash.

**Définition 6.** Un *équilibre de Nash*, en stratégies pures ou en stratégies mixtes, d'un jeu sous forme extensive est un équilibre de Nash de la forme normale associée.

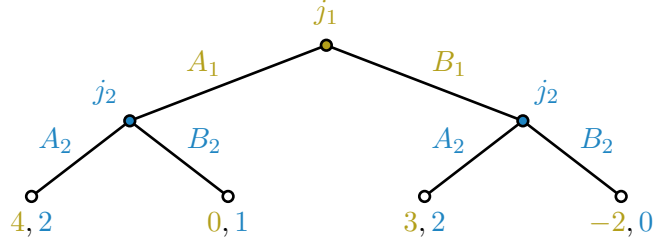
Ainsi, tout jeu sous forme extensive admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

**Exemple 4.** La réduction sous forme normale du jeu d'entrée est donnée par



Il y a deux équilibres de Nash en stratégies pures:  $(E, A)$  et  $(N, C)$ . De plus, tout profil  $(N, pC + (1-p)A)$  avec  $p \geq 0.5$  est un équilibre de Nash en stratégies mixtes.  $\diamond$

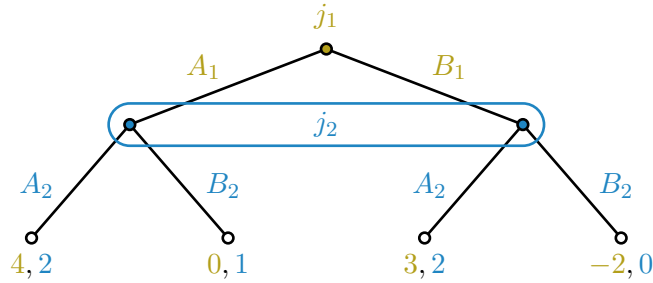
**Exemple 5.** Prenons le jeu à information complète suivant.



On a alors la réduction sous forme normale suivante.

	$A_2 A_2$	$A_2 B_2$	$B_2 A_2$	$B_2 B_2$
$A_1$	4, 2	4, 2	0, 1	0, 1
$B_1$	3, 2	-2, 0	3, 2	-2, 0

Considérons maintenant que les deux joueurs simultanément, c'est-à-dire que les deux nœuds intérieurs forment un unique ensemble d'information pour le deuxième joueur :



La réduction sous forme normale prend une autre forme :

	$A_2$	$B_2$
$A_1$	4, 2	0, 1
$B_1$	3, 2	-2, 0

$\diamond$

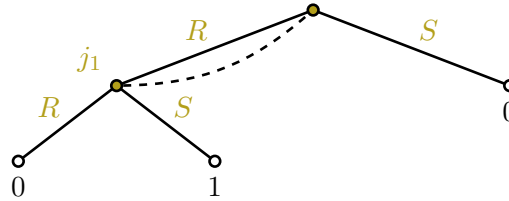
Il est possible mixer les stratégies autrement qu'à l'aide des stratégies mixtes.

**Définition 7.** Une *stratégie de comportement* du joueur  $j_i$  associe à chaque ensemble d'information une probabilité sur ses successeurs.

À la différence des stratégies mixtes qui sont des combinaisons convexes de stratégies pures, une stratégie de comportement est un ensemble de combinaisons convexes de réponses à un ensemble d'information particulier.

Comme avec les stratégies pures ou mixtes, un profil de stratégie de comportement induit une probabilité sur l'ensemble des nœuds terminaux, donc un paiement. Comment cela diffère des stratégies mixtes ?

**Exemple 6** (Le conducteur distrait). Un conducteur doit rentrer chez lui en prenant la deuxième sortie d'autoroute. Lorsqu'il doit prendre la décision de sortir ( $S$ ) ou de rester ( $R$ ), il ne sait plus où il est.



Ici, le segment pointillé représente les ensembles d'information. Toute stratégie pure donne un paiement de 0, car soit il sort immédiatement, soit il ne sort jamais. Par linéarité, toute stratégie mixte donne également un paiement nul. La stratégie de comportement  $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}R$  à chaque nœud donne le paiement  $\frac{1}{4}$ .  $\diamond$

Nous allons voir par la suite que cette différence entre les stratégies de comportement et les stratégies mixtes n'est pas si courante. On note par  $h_i(z)$  la suite des ensembles d'information et des actions du joueur  $j_i$  avant d'arriver au nœud  $z \in Z$ , et par  $u(z)$  l'ensemble d'information auquel  $z$  appartient.

**Définition 8.** Un jeu sous forme extensive est à *mémoire parfaite* si pour tout joueur  $j_i$  et pour tout  $z, z' \in Z_i$  tels que  $u(z) = u(z')$ , on a  $h_i(z) = h_i(z')$ .

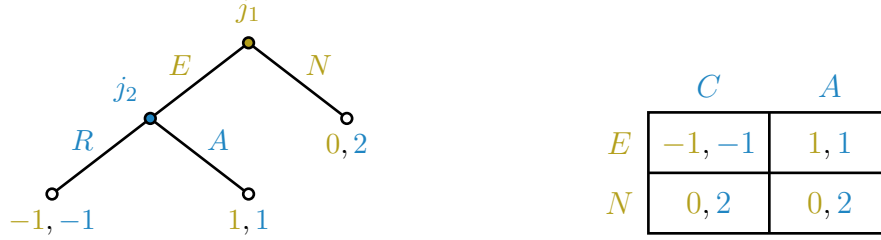
La condition de mémoire parfaite impose certaines conditions sur l'étendu du défaut de complétude de l'information dans le jeu. Lorsque celle-ci est respectée, les stratégies mixtes et de comportement sont équivalentes.

**Définition 9.** Deux stratégies  $\sigma_i$  et  $\sigma_i^*$  pures, mixtes ou de comportement sont *équivalentes* si pour tout profil partiel  $\sigma_{-i}$  pur, mixte, ou de comportement, les profils  $(\sigma_i, \sigma_{-i})$  et  $(\sigma_i^*, \sigma_{-i})$  donnent la même probabilité sur les nœuds terminaux.

**Théorème 1** (Kuhn, 1953 & Isbell, 1957). *Dans un jeu à mémoire parfaite, toute stratégie mixte admet une stratégie de comportement équivalente, et inversement.*

## 3. SOUS-JEUX ET ÉQUILIBRE PARFAIT EN SOUS-JEUX

**Exemple 7.** Reprenons l'exemple du jeu d'entrée donné par



Nous avons vu plus tôt que  $(N, C)$  est un équilibre de Nash : le joueur  $j_2$  menace le joueur  $j_1$  de représailles s'il cherche à entrer sur le marché. Pourtant, si le joueur  $j_1$  décide d'entrer tout de même sur le marché, la menace n'est plus crédible, car le joueur  $j_2$  aurait plutôt intérêt à s'en accommoder.  $\diamond$

Un raffinement de la notion d'équilibre de Nash est donc nécessaire.

**Définition 10.** Soit  $z \in Z \setminus T$  et notons par  $\Gamma[z]$  l'ensemble des nœuds composant le plus grand sous-arbre dont la racine est  $z$ . Si  $z \in Z_0$  ou  $u(z') \subseteq \Gamma[z]$  pour tout  $z' \in \Gamma[z]$ , alors le jeu sous forme extensive associé à ce sous-arbre est appelé *sous-jeu* partant de  $z$ .

**Définition 11.** Un profil de stratégies  $\sigma$  est un *équilibre parfait en sous-jeux* si la restriction de  $\sigma$  à chacun des sous-jeux est un équilibre de Nash pour ce sous-jeu.

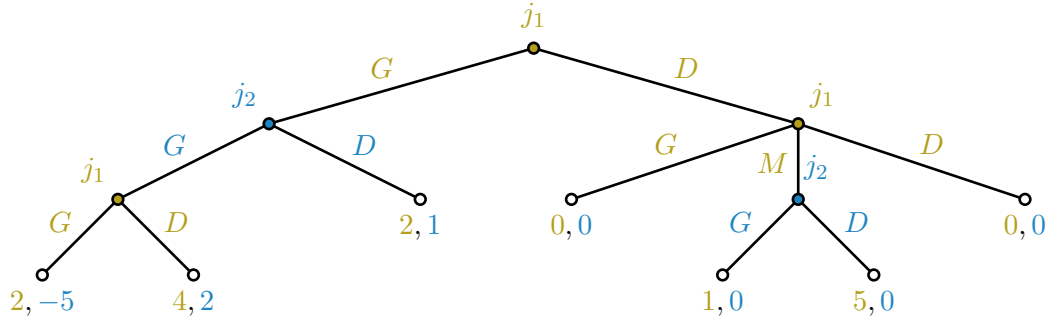
**Exemple 8.** Dans le jeu d'entrée, le seul équilibre parfait en sous-jeux est  $(E, A)$ .  $\diamond$

Comme nous nous sommes placés dans le cas fini, nous avons les résultats suivants.

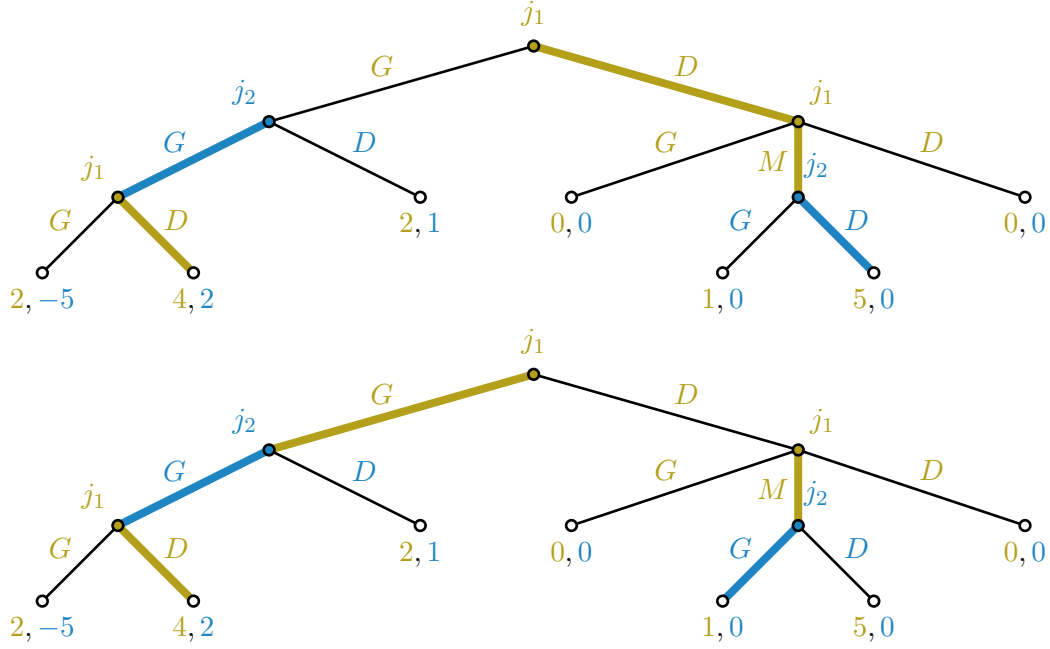
**Théorème 2** (Zermelo, 1913). *Tout jeu sous forme extensive à information parfaite admet un équilibre parfait en sous-jeux en stratégies pures.*

La démonstration de ce résultat se base sur l'algorithme de Kuhn, aussi appelée induction amont, ou backward induction. Dans un jeu à information parfaite, on considère tous les sous-jeux qui ont un seul nœud non-terminal. Le seul joueur actif choisit l'action qu'il préfère. On remplace ensuite ce sous-jeu par le nœud terminal correspondant au paiement choisi par l'unique joueur du jeu. Ainsi, on obtient un jeu plus court qui le jeu initial. On poursuit la procédure jusqu'à ce que le jeu devienne un unique nœud terminal, qui nous donne le paiement d'un équilibre parfait en sous-jeux.

**Exemple 9.** Étudions le jeu suivant.



On a alors deux équilibres parfaits en sous-jeux, donnés par les actions en couleur.



◇

Ce résultat se généralise dans le cas où l'information est incomplète, mais la preuve, et l'identification des sous-jeux minimaux est bien plus complexe.

**Théorème 3.** *Tout jeu sous forme extensive à information imparfaite admet un équilibre parfait en sous-jeux en stratégie mixtes.*