Data Structure

Xia Tian
Email: xiat(at)ruc.edu.cn

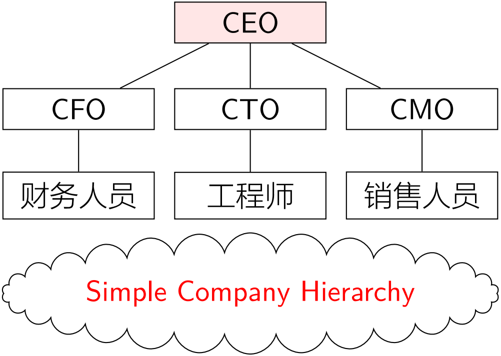
Renmin University of China

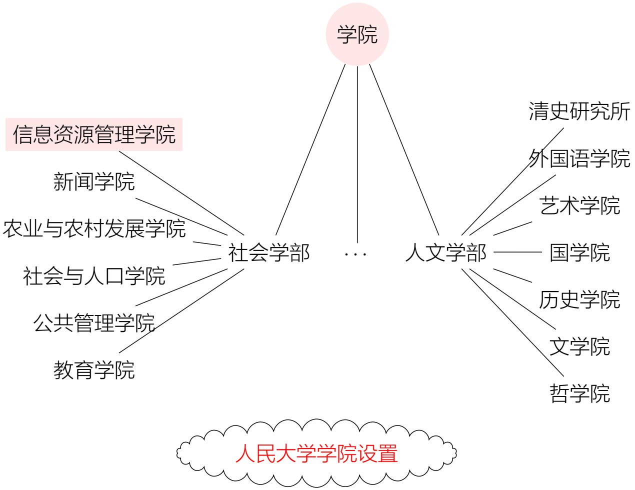
树和二叉树

树型结构是结点之间有分支，并且具有层次关系的结构，类似于自然界中的树。树有很多应用，比如 Unix 等操作系统中的目录结构。

```
➔ github tree course_ds
course_ds
├── clean.py
├── dot
│   ├── tree-judge1.dot
│   ├── tree-judge1.pdf
│   ├── tree-judge2.dot
│   ├── tree-judge2.pdf
│   ├── tree-judge3.dot
│   ├── tree-judge3.pdf
│   ├── tree-judge4.dot
│   ├── tree-judge4.pdf
│   ├── tree-judge.pdf
│   ├── tree-represent1.dot
│   ├── tree-represent1.pdf
│   └── tree-term-demo.dot
├── ds.pdf
├── ds.tex
├── figs
│   └── search-block.tex
├── graph.tex
├── imgs
│   └── merge-sort.jpg
├── introduction.tex
├── LICENSE
├── _minted-ds
├── README.md
├── ruc_logo.png
├── search.tex
```

例子




学院
社会学部
···
人文学部
信息资源管理学院
新闻学院
农业与农村发展学院
社会与人口学院
公共管理学院
教育学院
清史研究所
外国语学院
艺术学院
国学院
历史学院
文学院
哲学院
人民大学学院设置

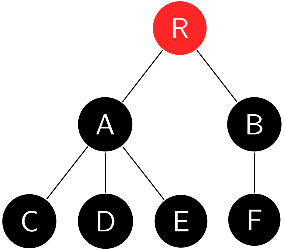
内容

- 树的基本术语
- 二叉树
- 遍历二叉树与线索二叉树
- 树和森林
- 哈夫曼树

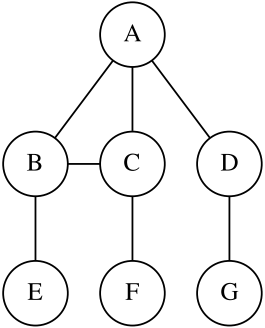
树 (TREE)

树 (Tree) 是 $n(n \geq 0)$ 个结点的有限集 T。T 为空时称为空树。当 $n > 0$ 时, 树有且仅有一个特定的称为根 (Root) 的结点，其余结点可分为 $m(m \geq 0)$ 个互不相交的子集 $T_1, T_2, \cdots, T_m$，其中每个子集又是一棵树, 称为子树 (Subtree)。

1. 各子树是互不相交的集合。
2. 除根结点, 其它结点有唯一前驱。
3. 一个结点可以有零个或多个后继。

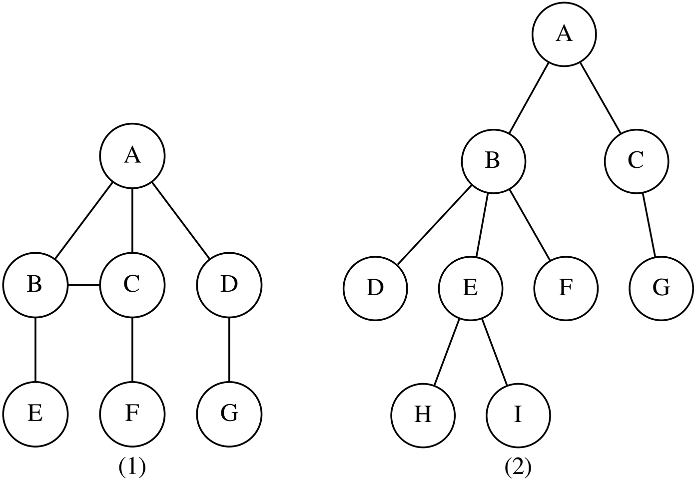


判断哪些是树结构

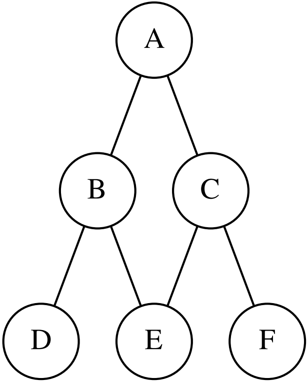


(1)

判断哪些是树结构

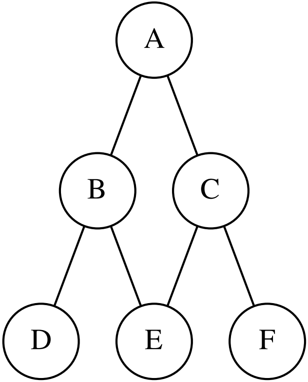


判断哪些是树结构

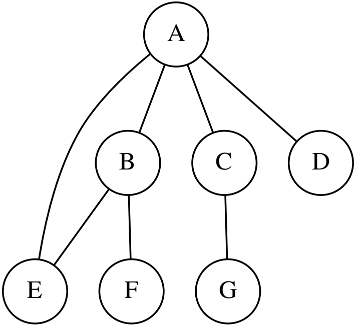


(3)

判断哪些是树结构

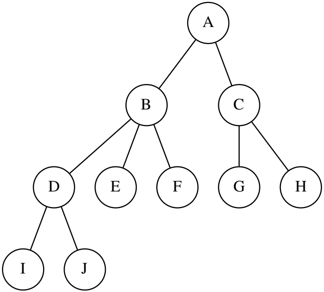


(3)



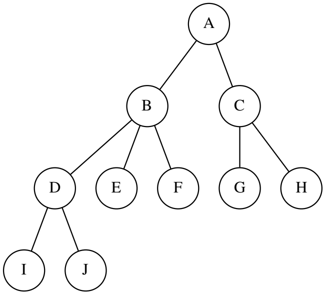
(4)

树的表示形式

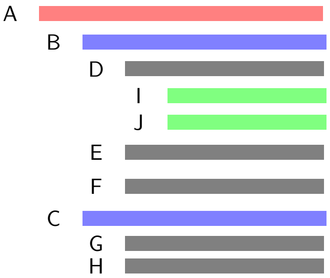


树形表示

树的表示形式

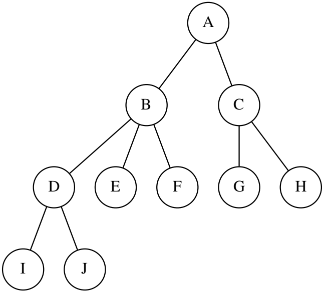


树形表示

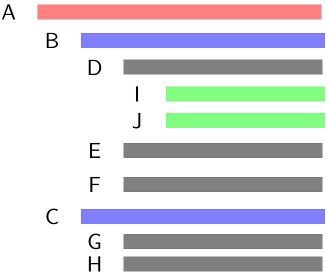


凹入表表示法

树的表示形式



树形表示

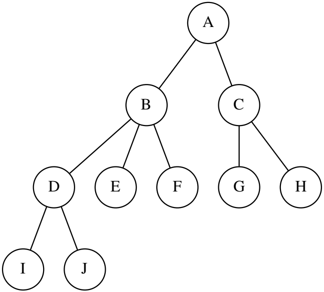


凹入表表示法

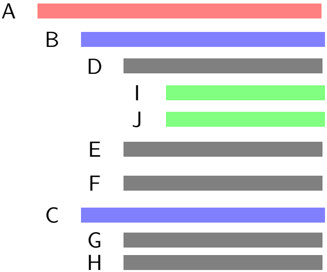
(A(B(D(I,J),E, F),C(G,H)))

广义表表示

树的表示形式



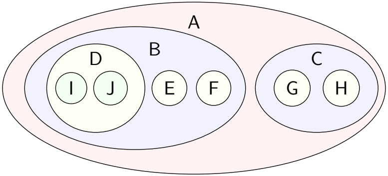
树形表示



凹入表表示法

(A(B(D(I,J),E, F),C(G,H)))

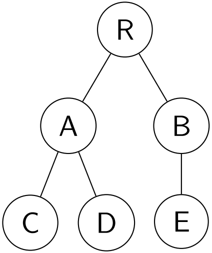
广义表表示



嵌套集合表示

基本术语

- 树 (tree)
- 子树 (sub-tree)
- 结点 (node)
- 结点的度 (degree)
- 叶子 (leaf)
- 孩子 (child)
- 父亲 (parents)
- 兄弟 (sibling)
- 祖先
- 子孙
- 树的度 (degree)
- 结点的层次 (level)
- 树的深度 (depth)
- 有序树
- 无序树
- 森林



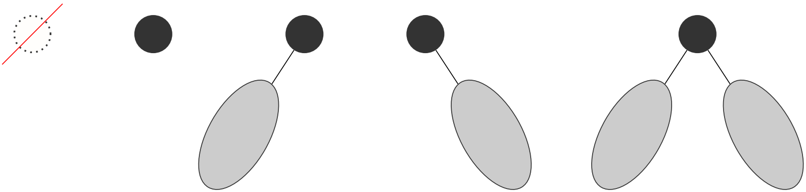
二叉树 (Binary Tree)

- 二叉树是一种树型结构，它的每个结点至多只有两个子树，分别称为左子树和右子树。二叉树是有序树。
- 二叉树是 $n(n \geq 0)$ 个结点构成的有限集合。二叉树或为空，或是由一个根结点及两棵互不相交的左右子树组成，并且左右子树都是二叉树。
- 在二叉树中要区分左子树和右子树，即使只有一棵子树。这是二叉树与树的最主要的差别。

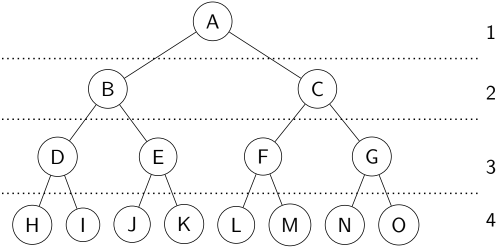
二叉树的一个重要应用是在查找中的应用。当然，它还有许多与搜索无关的重要应用，比如在编译器的设计领域。

二叉树的五种形态

1. 空二叉树;
2. 只有根结点 (左右子树都为空);
3. 只有左子树 (右子树为空);
4. 只有右子树 (左子树为空);
5. 左右子树均不空。



请观察二叉树，并回答下列问题



1. 二叉树的第 i 层最多有多少个结点?
2. 二叉树深度为 k，则它最多有多少个结点?
3. 二叉树有 n 个节点，请问它最小深度是几?
4. 二叉树叶子的数目和度为 2 的节点的数目是否相等? 如果不等，又是什么关系?

二叉树的性质

- 性质 1: 二叉树的第 i 层至多有 2^{i-1} 个结点。
- 性质 2: 深度为 k 的二叉树至多有 $2^k - 1$ 个结点 $(k \geq 1)$。
- 性质 3: 二叉树中终端结点数为 n_0, 度为 2 的结点数为 n_2, 则有 $n_0 = n_2 + 1$ (试证明)

二叉树的性质

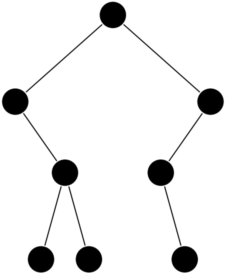
二叉树中终端结点数为 n_0, 度为 2 的结点数为 n_2, 则有 $n_0 = n_2 + 1$

- 设二叉树中度为 1 的结点数为 n_1, 二叉树中总结点数为 N, 则有:

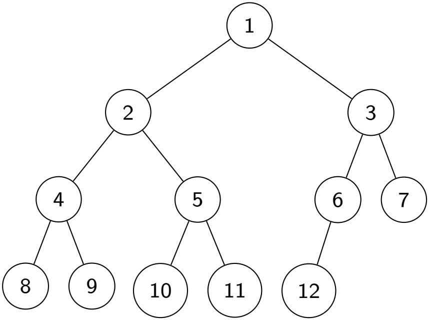
  $N = n_0 + n_1 + n_2$
- 再考虑二叉树中的分支数 (每个节点有唯一一个入的分支, 根节点除外; 再考虑出的分支数量), 则有:

  $N - 1 = n_1 + 2 \times n_2$
- 整理可得:

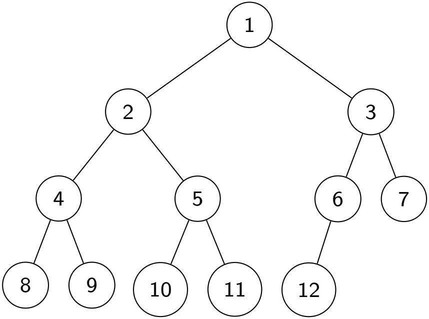
  $n_0 = n_2 + 1$



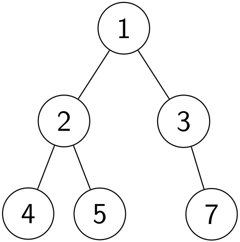
完全二叉树



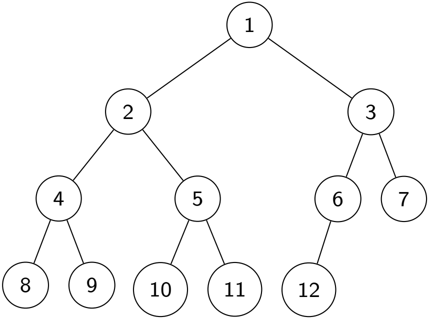
完全二叉树



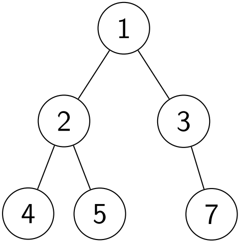
是否完全二叉树?

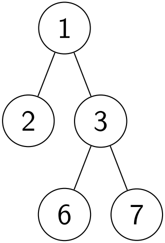


完全二叉树

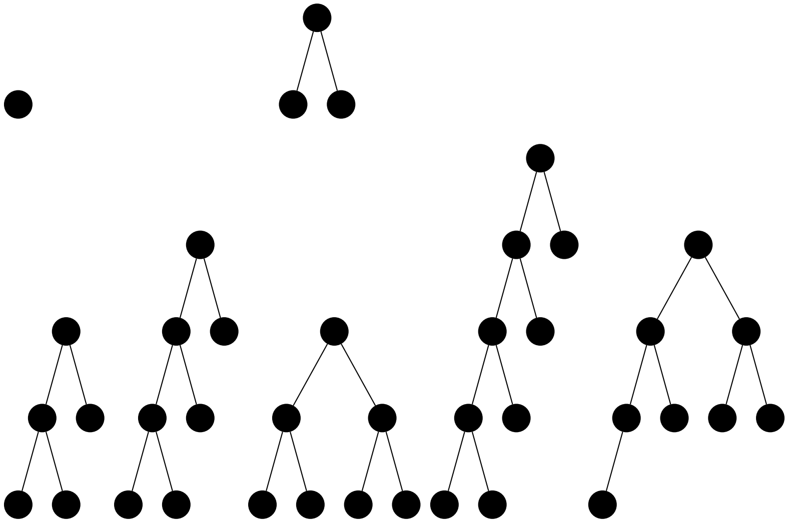


是否完全二叉树?





试找出非完全二叉树

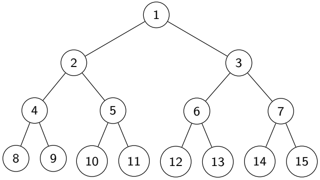


二叉树的性质

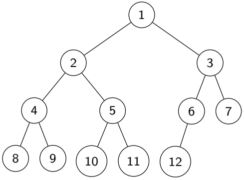
- 性质 4: 具有 n 个结点的完全二叉树的深度为:

$$\lfloor log_2 n \rfloor + 1$$

对于完全二叉树，设深度为 k, 由 $2^{k-1} - 1 < n \leq 2^k - 1$ 可知, $2^{k-1} \leq n < 2^k$, 则 $k - 1 \leq log_2 n < k$ (参考性质 2)



满二叉树

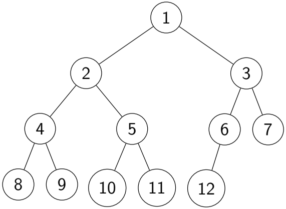


完全二叉树

测试

对于完全二叉树:

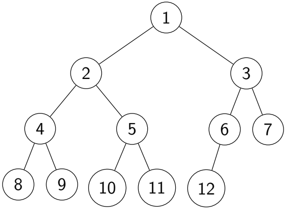
1. 若完全二叉树有叶子结点出现在第 k 层, 它可能还有 (   ) 层的叶子结点;
2. 若某结点的右子树的最大层次为 L, 则其左子树的最大层次为 (   );
3. 若按如图所示的编号方式, 试求出编号为 i 的节点的父节点和子节点的编号.



测试

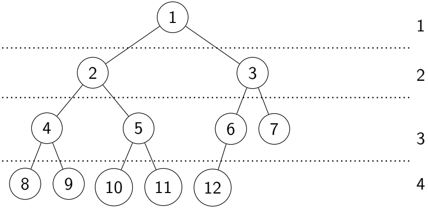
对于完全二叉树:

1. 若完全二叉树有叶子结点出现在第 k 层, 它可能还有 (　　) 层的叶子结点;
2. 若某结点的右子树的最大层次为 L, 则其左子树的最大层次为 (　　　);
3. 若按如图所示的编号方式, 试求出编号为 i 的节点的父节点和子节点的编号.



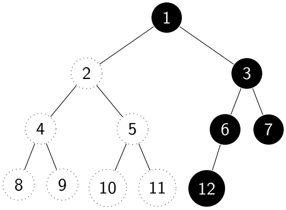
1. $k-1$, $k+1$
2. L or $L+1$

二叉树的性质



- 性质 5: 对具有 n 个结点的完全二叉树的结点按层次顺序编号, 对任意结点 i 有:
  - (有关结点 i 的双亲) 若 $i = 1$, 则为二叉树的根结点, 没有双亲; 否则双亲结点的编号为: $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$
  - (有关结点 i 的孩子) 若 $n < 2 \cdot i$, 则结点 i 无左孩子; 否则左孩子编号是 $2 \cdot i$。
  - 若 $n < 2 \cdot i + 1$, 则结点 i 无右孩子; 否则右孩子编号为 $2 \cdot i + 1$

二叉树的存储结构：顺序存储




```
#define MAX_SIZE 100
typedef int SqBiTree[MAX_SIZE];
SqBiTree bt;
```

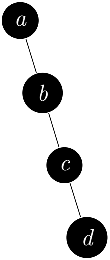
```
class SqBiTree {
 //static int MAX_SIZE = 100;
 //int[] data = new int[MAX_SIZE];
 List<Integer> data = new ArrayList<Integer>();
}
```

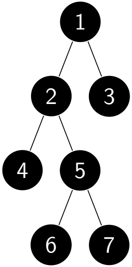
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

- 把结点安排成一个恰当的序列 (编号), 存储在数组中
- 便于“随机存取”

二叉树的存储结构：顺序存储

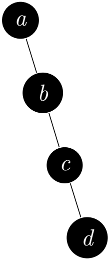
- 适用于完全二叉树

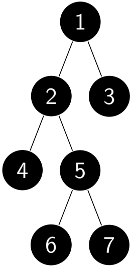




二叉树的存储结构：顺序存储

- 适用于完全二叉树

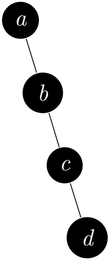


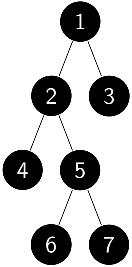


a	0	b	0	0	0	c	0	0	0	0	0	0	0	d
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

二叉树的存储结构：顺序存储

- 适用于完全二叉树

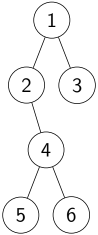


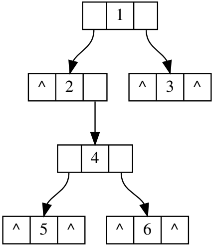


a	0	b	0	0	0	c	0	0	0	0	0	0	0	d
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

1	2	3	4	5	0	0	0	0	6	7
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

二叉树的链式存储: 二叉链表



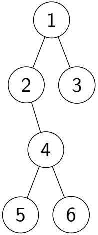


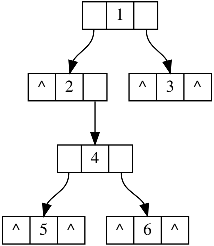

```c
typedef struct BiTNode  { // C Code
  ElemType data;
  struct BiTNode *lchild, *rchild;
} BiTNode, *BiTree;
```

```java
class BiTNode<T> { //Java Code
  T data;
  BiTNode lchild, rchild;
}
```

思考: 含 n 个结点的二叉链表中有多少个空指针?

二叉树的链式存储: 二叉链表






```c
typedef struct BiTNode { // C Code
  ElemType data;
  struct BiTNode *lchild, *rchild;
} BiTNode, *BiTree;
```

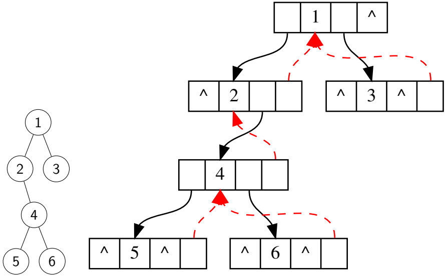
```java
class BiTNode<T> { //Java Code
  T data;
  BiTNode lchild, rchild;
}
```

思考: 含 n 个结点的二叉链表中有多少个空指针?

指针域一共有 $2*n$ 个，分支共有 $N-1$, 每个分支占用一个指针域，所以空指针数量为: $2*n-(n-1)=n+1$

二叉树的链式存储: 三叉链表

- 二叉链表不便查找父节点, 可加一个指向双亲的指针



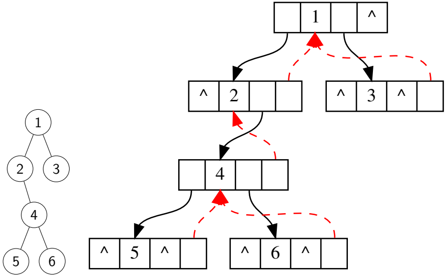

```c
typedef struct BiTNode  {// C Code
  ElemType data;
  struct BiTNode *lchild, *rchild, *parent;
} BiTNode, *BiTree;
```

```java
class BiTNode<T> { //Java Code
  T data;
  BiTNode lchild, rchild, parent;
}
```

思考: 有 n 个结点的三叉链表有多少个空指针?

二叉树的链式存储: 三叉链表

- 二叉链表不便查找父节点, 可加一个指向双亲的指针




```
typedef struct BiTNode  {// C Code
  ElemType data;
  struct BiTNode *lchild, *rchild, *parent;
} BiTNode, *BiTree;
```

```
class BiTNode<T> { //Java Code
  T data;
  BiTNode lchild, rchild, parent;
}
```

思考: 有 n 个结点的三叉链表有多少个空指针?

对于二叉链表，指针域一共有 $2*n$ 个，分支共有 $N-1$, 每个分支占用一个指针域，所以空指针数量为 $2*n-(n-1)=n+1$; 对于 parent，根节点无父节点，所以共有 $n+1+1=n+2$

遍历二叉树和线索二叉树

在二叉树的一些应用中，常常要求在树中查找具有某种特征的结点，或者对树中全部结点逐一进行某种处理。这就引入了遍历二叉树的问题，即如何按某条搜索路径巡访树中的每一个结点，使得每一个结点均被访问一次且仅访问一次。

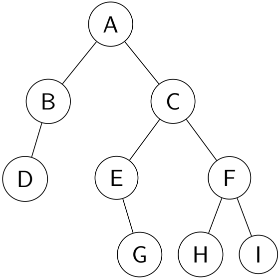
二叉树的遍历

- 遍历是指按某种方式访问所有结点，使每个结点被访问一次且只被访问一次。
- 二叉树的遍历是按一定规则将二叉树的结点排成一个线性序列，即非线性序列线性化。
- 遍历的方式：深度优先和广度优先，深度优先又分为三种：
  - 先序次序
  - 中序次序 (对称序次序)
  - 后序次序

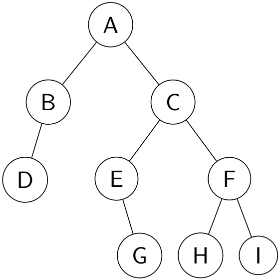
二叉树的遍历

- 1、先序遍历二叉树的操作定义为: 若二叉树为空, 则空操作; 否则
  - (1) 访问根结点;
  - (2) 先序遍历左子树;
  - (3) 先序遍历右子树。
- 2、中序遍历二叉树的操作定义为: 若二叉树为空, 则空操作; 否则
  - (1) 中序遍历左子树;
  - (2) 访问根结点;
  - (3) 中序遍历右子树。
- 3、后序遍历二叉树的操作定义为: 若二叉树为空, 则空操作; 否则
  - (1) 后序遍历左子树;
  - (2) 后序遍历右子树;
  - (3) 访问根结点。

示例



示例

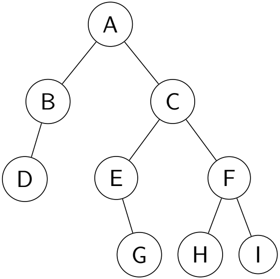


- 先序:ABDCEGFHI
- 中序:DBAEGCHFI
- 后序:DBGEHIFCA
- 广度优先：ABCDEFGHI

二叉树的遍历

//先序遍历二叉树递归算法 C 伪代码

```
status preOrderTraverse(BiTree T){
  if(T){
    printf(T->data);
    preOrderTraverse(T->lchild);
    preOrderTraverse(T->rchild);
  }
}
```

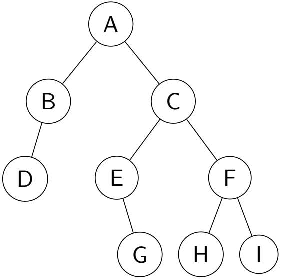


- status 代表什么?
- printf 代表什么?

二叉树的遍历

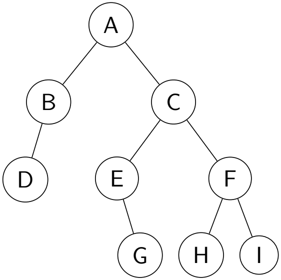
先序遍历递归算法的 Java 实现

```java
class Node {
  String data;
  Node left, right;
}
class Tree {
  void preOrderTraverse(Node node) {
    if(node != null) {
      System.out.println(node.data);
      preOrderTraverse(node.left);
      preOrderTraverse(node.right);
    }
  }
}
```



如下将得到树的什么序列?

```
status traverse(BiTree T) {
 InitStack(S);
 p = T;
 while(p || !StackEmpty(S)) {
  if(p) {
    push(S, p); p = p->lchild;
  } else {
    pop(S, p);
    printf(p->data);
    p = p->rchild;
  }
 }
 return OK;
}
```

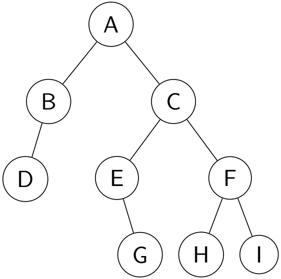


二叉树的遍历: 广度优先

算法步骤:

- 访问节点
- 从左到右依次访问儿子节点
- 重复前一步骤

A						
	B	C				
		C	D			



....

课堂练习：编程实现广度优先遍历。

补充

- 由一棵给定的二叉树可以获得三种遍历序列，同样，也可以由这些遍历序列来重新构造二叉树。
- 举例
  先序:ABCDEFGHIJ
  中序:CBDEAFHIGJ
- 由于不能从遍历序列中区分二叉树的左、右子树，因此单用一个遍历序列是无法构造二叉树的。利用中序遍历序列，并结合先序遍历序列或后序遍历序列就能重新构造二叉树。