Universidade Federal de Juiz de Fora

1º Trabalho de Controle

Alunos: Dylan Soares e Maicown José da Rocha.

05 de maio de 2024

Sumário:

Questão 1:

A questão 1 tem como objetivo a análise gráfica pelo método de frequências usando o diagrama de bode, esse já dado pela questão.

Estimamos a função de transferência G(s) do processo a partir do gráfico de bode. Em primeiro, analisamos suas assíntotas, verificando assim que temos decaimento de 20dB/década em 1 rad/s e 40 dB/década em 10 rad/s.

Diante disso, obtivemos:

$$\frac{K}{(s+1)(s+10)^2}$$

Foi calculado o ganho a partir dos 20dB continuo uma década antes de 20dB.

$$20\ log\ (K) = 20$$

$$K = 10.$$

Por conseguinte, foi analisado o Máximo sobressinal em aproximadamente 8dB.

Com isso utilizamos $20\ log\ (Mp)\ =\ 8$

$$Mp\ =\ 10^{\frac{8}{20}}\ \cong 2{,}51.$$

Em seguida comparamos com o fator de segunda ordem

$$\frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

Chegando em:

$$\frac{100}{(s^2 + 20s + 100)}$$

Tendo esse formato em mente e que o máximo sobressinal ocorre com 0≤ ζ ≤0.707, utilizou-se a fórmula:

$$Mp = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

E foi encontrado $\zeta \cong 0.2$.

Utilizando o critério de $2\zeta\omega_n$foi obtido o seguinte resultado:

$$2\zeta\omega_n = 4$$

Assim conseguimos a seguinte Função de Transferência:

$$\frac{1000}{(s+1)(s^2+4s+100)}$$

Em prosseguimento foi realizado a plotagem da função de transferência no MATLAB:

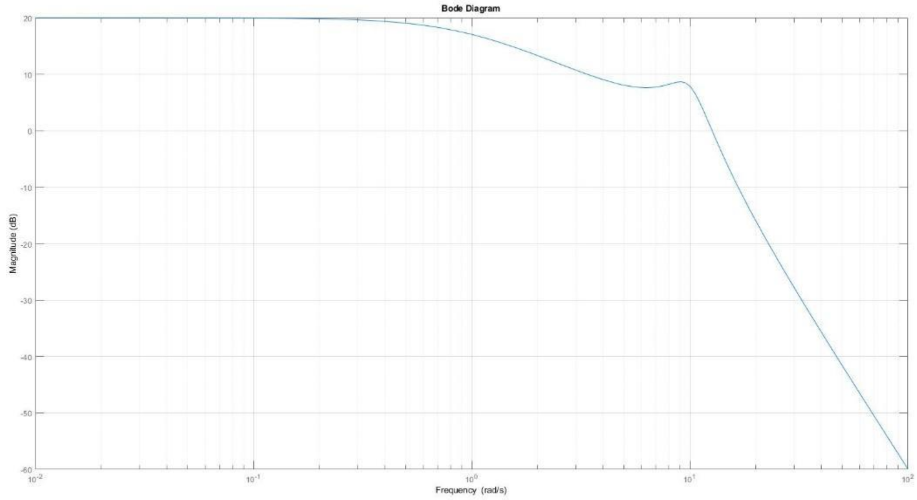

Figura 1: Gráfico de Bode Módulo da Questão 1.

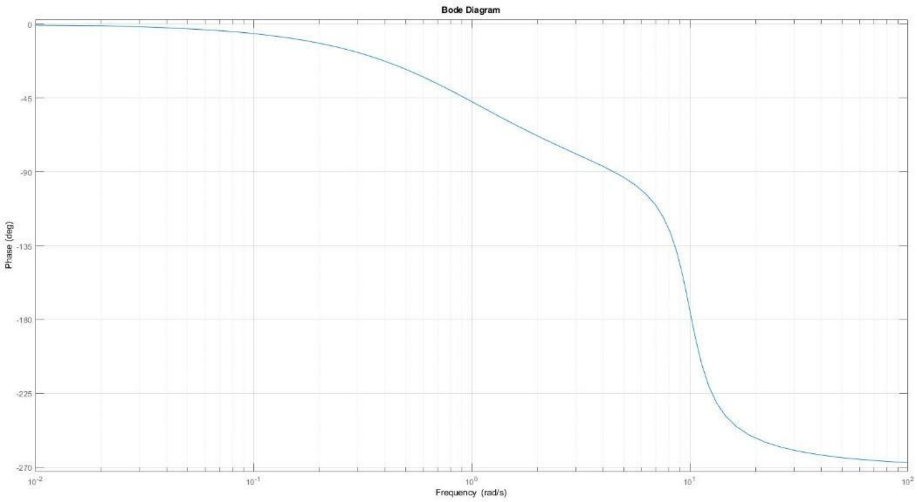

Figura 2: Gráfico de Bode Fase da Questão 1.

Código utilizado:

```
clc

clear

close all

% Definindo a função de Transferência:

num = 1000; % numerador
den = [1 5 104 100]; % denominador

% Função de transferência a partir da função tf
G = tf (num den);

bode(G);
```

Por fim determinamos a saída $y_\infty(t)$, na questão é adotado a entrada como:

$x(t)$ = 10 sen(10t).

Aplicamos o $|G(j\omega)|$, em $\omega = 10\ rad/s$

$$|G(j\omega)| = \frac{1000}{\sqrt{\omega^2+1} * \sqrt{(-\omega^2+100)^2+(4\omega)^2}}$$

$|G(j10)|$ = 2,487.

Utilizando agora para a fase:

$$\angle G(j\omega) = -arctg(\omega) - arctg(\frac{4\omega}{-\omega^2+100})$$

Assim chegamos em uma fase de -174,289°

Em fim obtemos a resposta:

$y_\infty(t)$ = X . $|G(j\omega)|$. sen $(\omega t + \emptyset)$

$y_\infty(t)$ = $24{,}87$ sen $(10t - 174{,}289°)$

Questão 2:

A questão 2 apresenta um sistema de controle com realimentação unitária, tendo em dois blocos do sistema duas variáveis que precisam ser definidas para a estabilidade do mesmo. A função de transferência de malha aberta está representada abaixo:

$$G(s) = \frac{K_1(sK_2 + 1)}{s(s-1)}$$

Como existe um polo na origem, o mapeamento do semiplano direito deve ser feito fazendo um pequeno desvio da origem, como um semicírculo. Tal mapeamento pode ser visualizado a seguir. O raio do semicírculo menor e maior tende a zero e infinito, respectivamente.

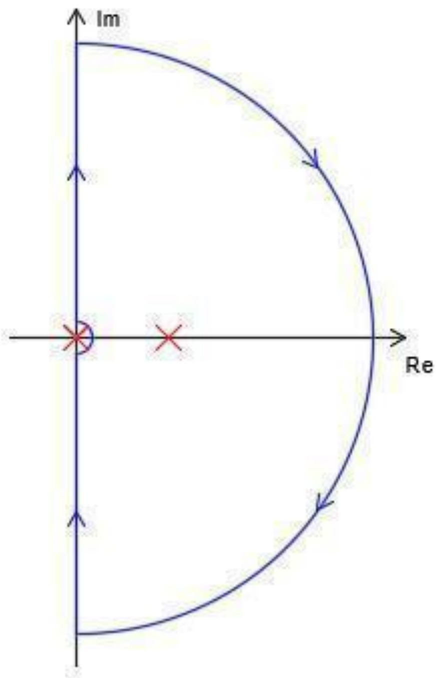

Figura 3: Desenho esquemático do contorno de Nyquist

Para o mapeamento, começou-se com $\omega \rightarrow 0$ pela direita e, aplicando o limite:

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{K_1(sK_2+1)}{s(s-1)}\Big|_{s=re^{j\theta}} \rightarrow \infty\angle 90°$$

Repetindo para $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow 0$ pela esquerda, obtém-se;

$$\lim_{r \to 0} \frac{K_1(sK_2+1)}{s(s-1)}\Big|_{s=re^{j\theta}} \rightarrow \infty\angle(-180°)$$

$$\lim_{r \to 0^-} \frac{K_1(sK_2+1)}{s(s-1)}\Big|_{s=re^{j\theta}} \rightarrow \infty\angle(-90°)$$

Para $\omega \rightarrow \infty$:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{K_1(sK_2+1)}{s(s-1)}\Big|_{s=re^{j\theta}} \rightarrow 0\angle 90°$$

O diagrama de Nyquist tem o seguinte formato:

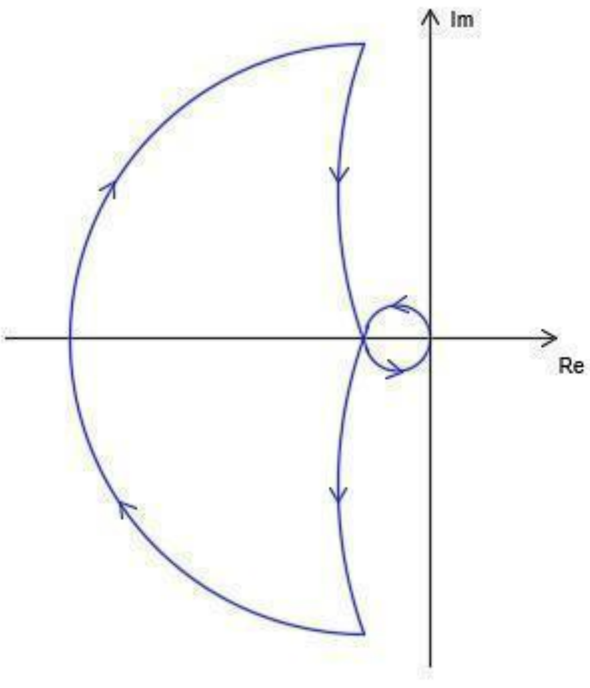

Figura 4: Diagrama Esquemático de Nyquist

Esse sistema possui um polo e nenhum zero no semiplano direito. Isso implica em que o número de voltas que se pode dar em torno do ponto (-1+j0) deve ser uma volta no sentido anti-horário. Para isso, deve-se encontrar a frequência ω em que o gráfico cruza o eixo real negativo, ou seja, a parte imaginária de G(jω) deve ser zero. Depois, substitui-se a frequência na parte real de G(jω) para encontrar o ponto em que o gráfico cruza o eixo real negativo. Assim, ao realizar as devidas manipulações, tem-se:

$$Im[G(j\omega)] = \frac{\omega K_1 - K_1 K_2 \omega^3}{\omega^4 - \omega^2} = 0$$

$$\omega = K_2^{-(1/2)}$$

Deste modo, substituindo-se ω na parte real de G(jω):

$$Re[G(j\omega)] = \frac{-\omega^2 K_1 - K_1 K_2 \omega^2}{\omega^4 + \omega^2}\Big|_{\omega = K_2^{-(1/2)}} = -K_1 K_2$$

Com isso, para que o sistema seja estável:

$$-K_1 K_2 \leq -1$$

$$K_1 K_2 \geq 1$$

O código utilizado foi:

```
clc
clear
close all

%Valores de k1 e k2 para estabilidade
% cont = 1;
k1e = 1.5;
k2e = 1.5;

%Valores de k1 e k2 para instabilidade
% cont = 2;
k1i = 0.8;
k2i = 1;

% Definir a função de transferência G(s) em malha aberta
disp ('estável = 1 ou instável = 2');
cont = input('selecione estável ou instável : ');

if cont==1
k1 = k1e;
```

```
k2 = k2e;
end

if cont==2
k1 = k1i;
k2 = k2i;
end

num = [k1*k2 k1];
den = [1 -1 0];
G = tf(num, den);

% a. Construir os diagramas de malha aberta
figure(1);
bode(G); % Diagrama de Bode de malha aberta
title('Diagrama de Bode de Malha
Aberta','Fontsize',14,'Fontname','Arial');

figure(2);
nyquist(G);

[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(G);

% Convertendo para malha fechada e plotando o diagrama de Bode
H = feedback(G, 1);
figure(3);
bode(H); % Diagrama de Bode de malha fechada
title('Diagrama de Bode de Malha
Fechada','Fontsize',14,'Fontname','Arial');

% c. Apresentar a resposta ao degrau em malha fechada
if cont==1
figure(4);
step(H); % Resposta ao degrau em malha fechada
title('Resposta ao degrau em malha fechada para sistema
estável','Fontsize',14,'Fontname','Arial');
end

if cont==2
figure(4);
step(H); % Resposta ao degrau em malha fechada
title('Resposta ao degrau em malha fechada para sistema
instável','Fontsize',14,'Fontname','Arial');
end
if Gm>=1
    fprintf('Sistema instável');
else
    fprintf('Sistema estável');
end
```

Para o sistema ser estável, o diagrama de Nyquist deve cruzar o eixo real negativo à esquerda do ponto (-1+j0) e, como o ganho é o inverso do módulo do valor do ponto que cruza o eixo, ele é um parâmetro que pode ser utilizado para determinar a estabilidade do sistema. Para os valores usados no código de Matlab acima mostrado, para k1 = k2 = 1,5, temos um Gm = 0,4444 e o diagrama de Nyquist corta o eixo real em (-2,25), demonstrando a estabilidade do sistema. Já para os valores de k1 = 0,8 e k2 = 1, temos um Gm = 1,25 e o diagrama de Nyquist corta o eixo real em (-0,8), demonstrando a instabilidade do sistema. Abaixo estão os gráficos de resposta ao degrau para ambos os casos.

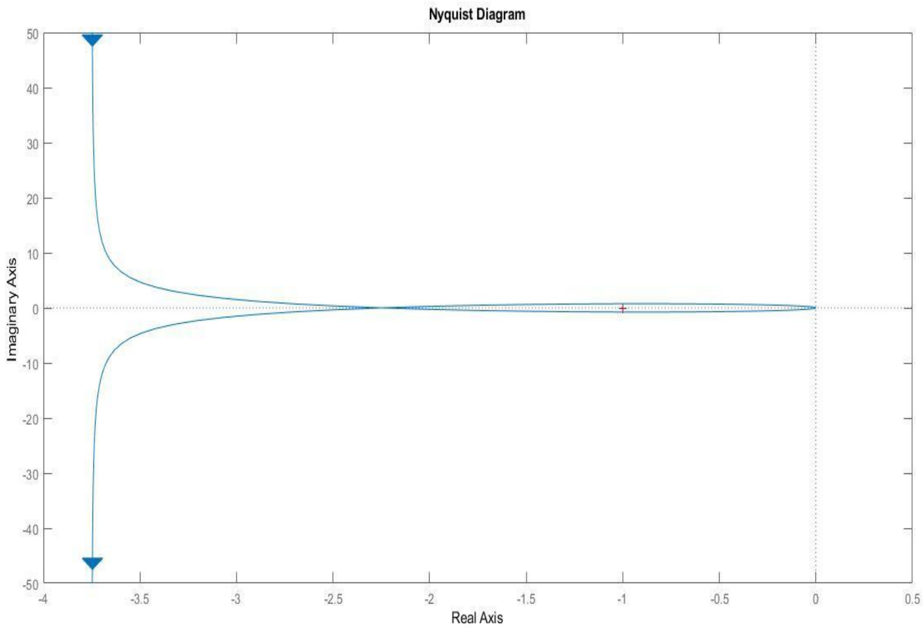

Figura 5: Diagrama de Nyquist para o Sistema Estável.

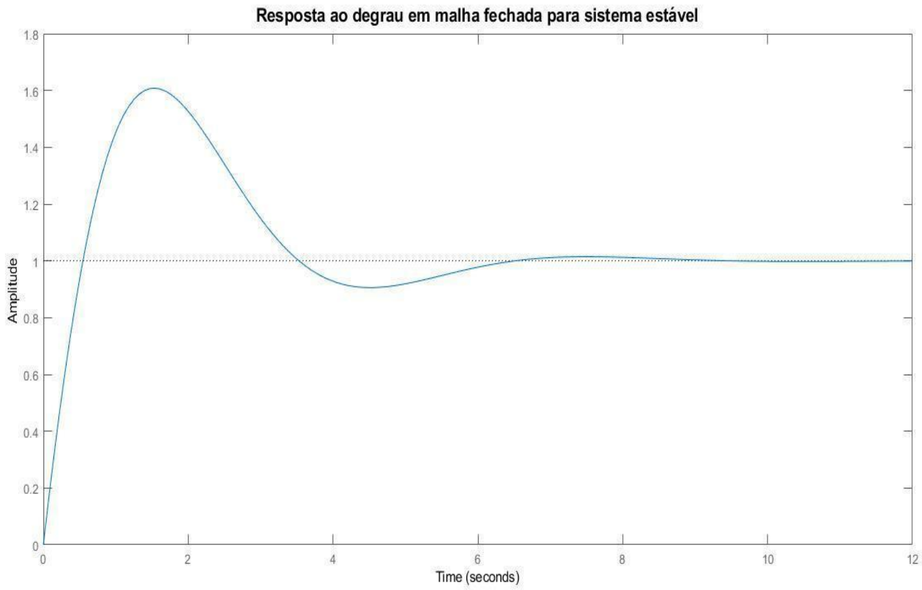

Figura 6: Resposta ao degrau em malha fechada para Sistema Estável.

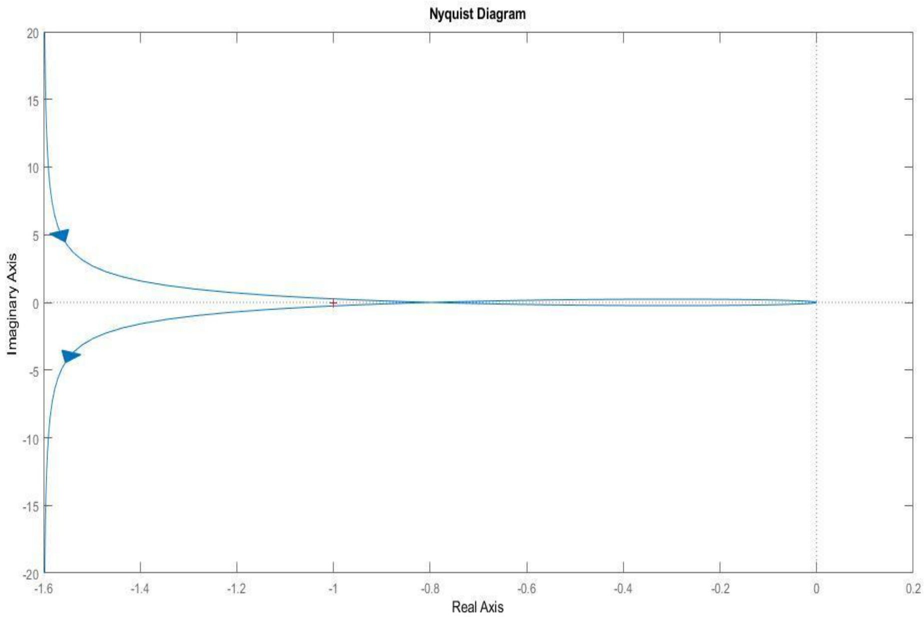

Figura 7: Diagrama de Nyquist para o Sistema Instável.

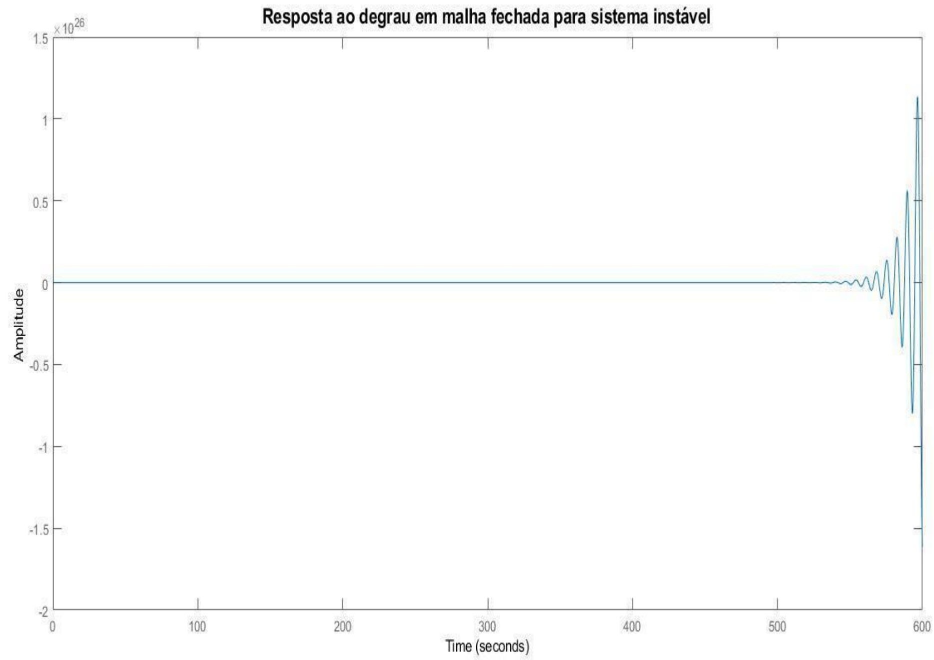

Figura 8:Resposta ao degrau em malha fechada para o sistema instável

Questão 3:

Nessa questão a análise foi feita no MATLAB e com auxílio de cálculos a fim de comparação, analisando dois sistemas de funções de transferência:

$$\frac{100(s+2)}{s(s+1)(s+4)} \text{ e } \frac{50(s+3)(s+5)}{s(s+2)(s+4)(s+6)}$$

Vale salientar que as bibliotecas stepinfo e lsim foram usadas para conseguir a comparação dos dados.

Os gráficos obtidos para o sistema 1:

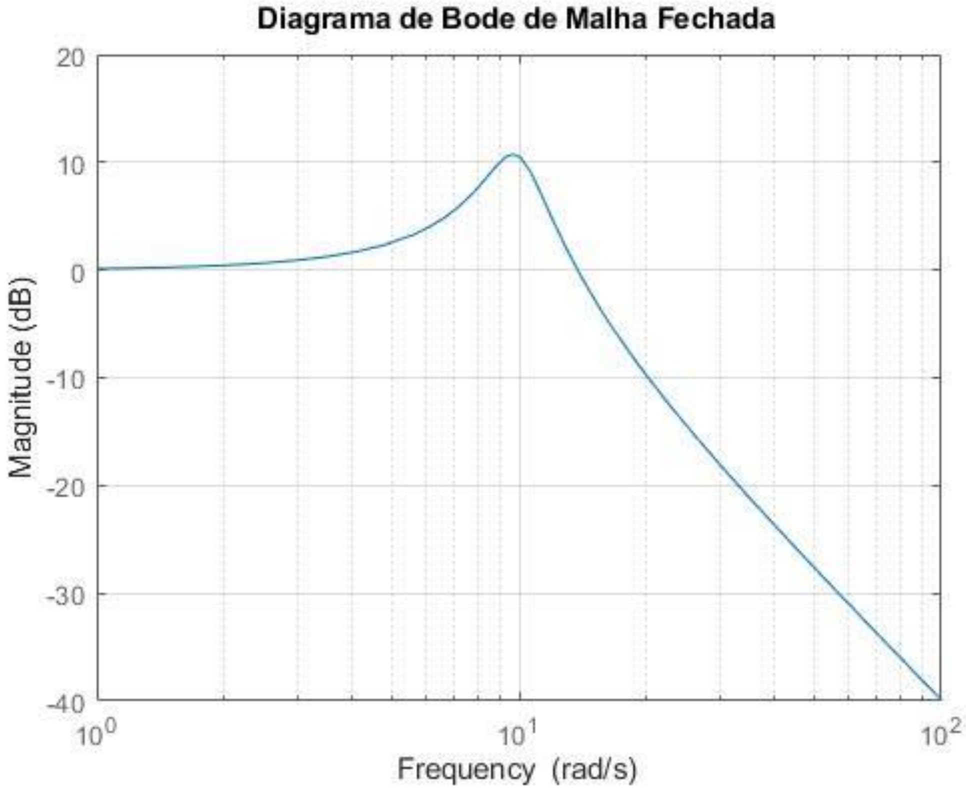

Figura 9: Módulo Malha Fechada Sistema 1

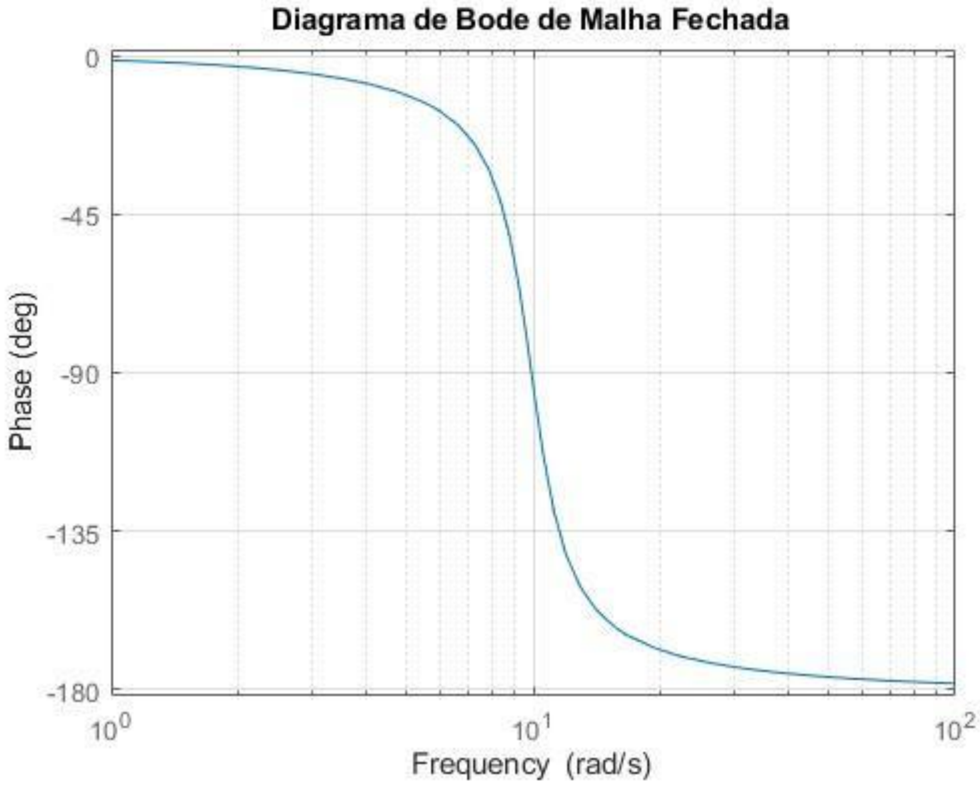

Figura 10: Fase Malha Fechada Sistema 1

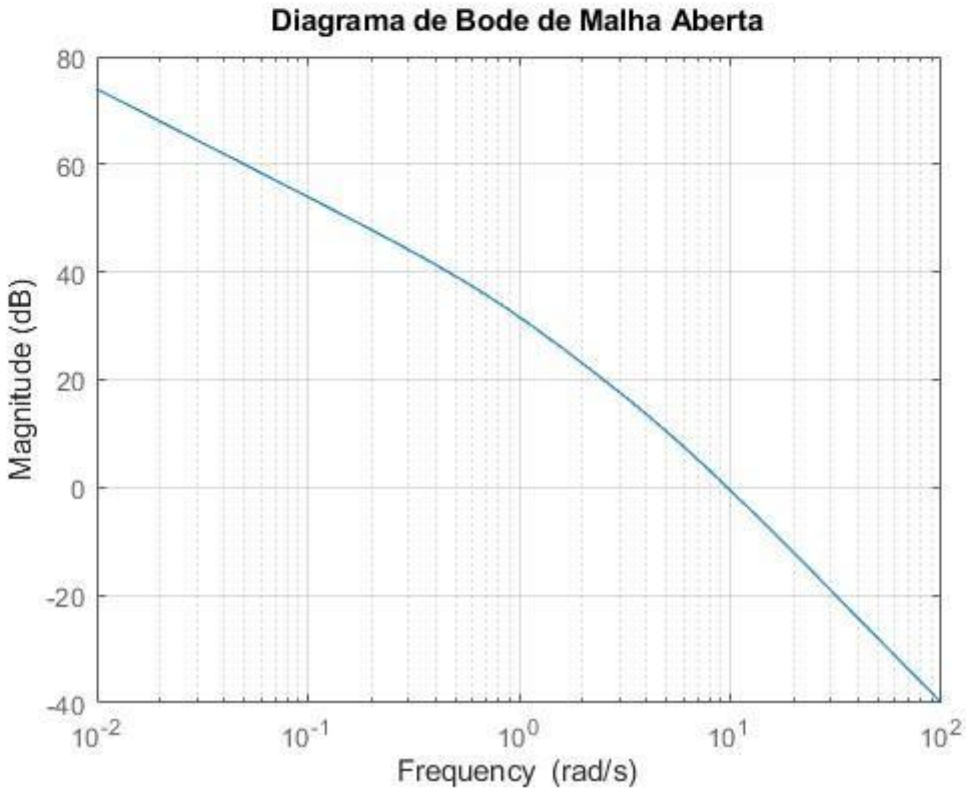

Figura 11: Módulo Malha Aberta Sistema 1

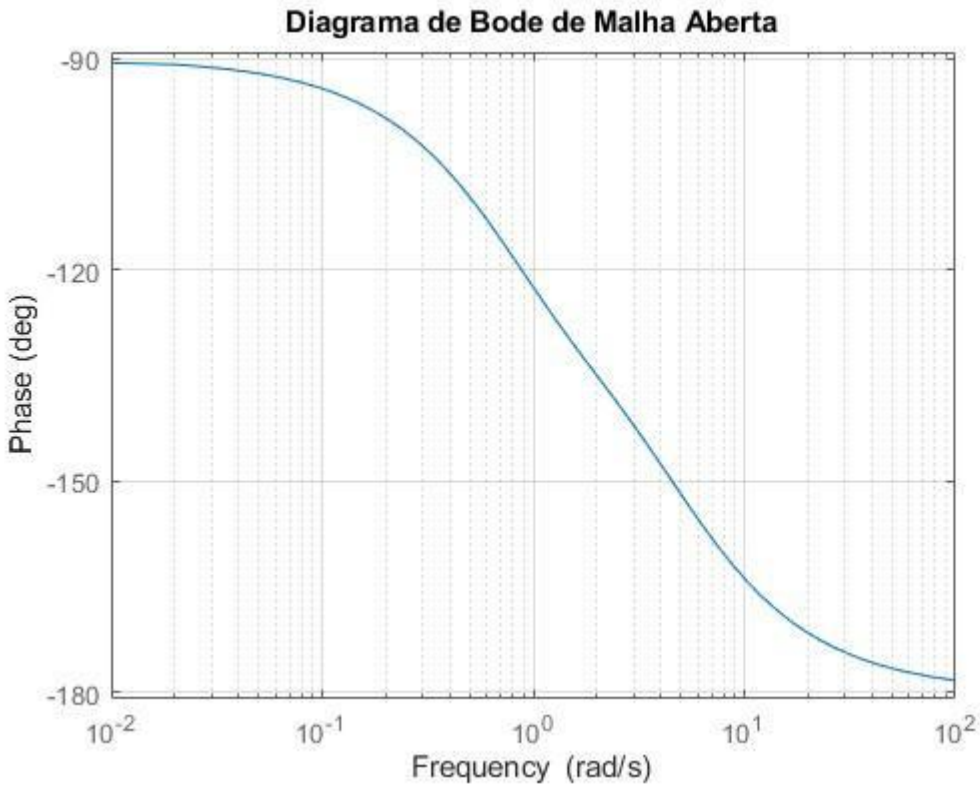

Figura 12: Fase Malha Aberta Sistema 1

Figura 13: Resposta ao Degrau Sistema 1

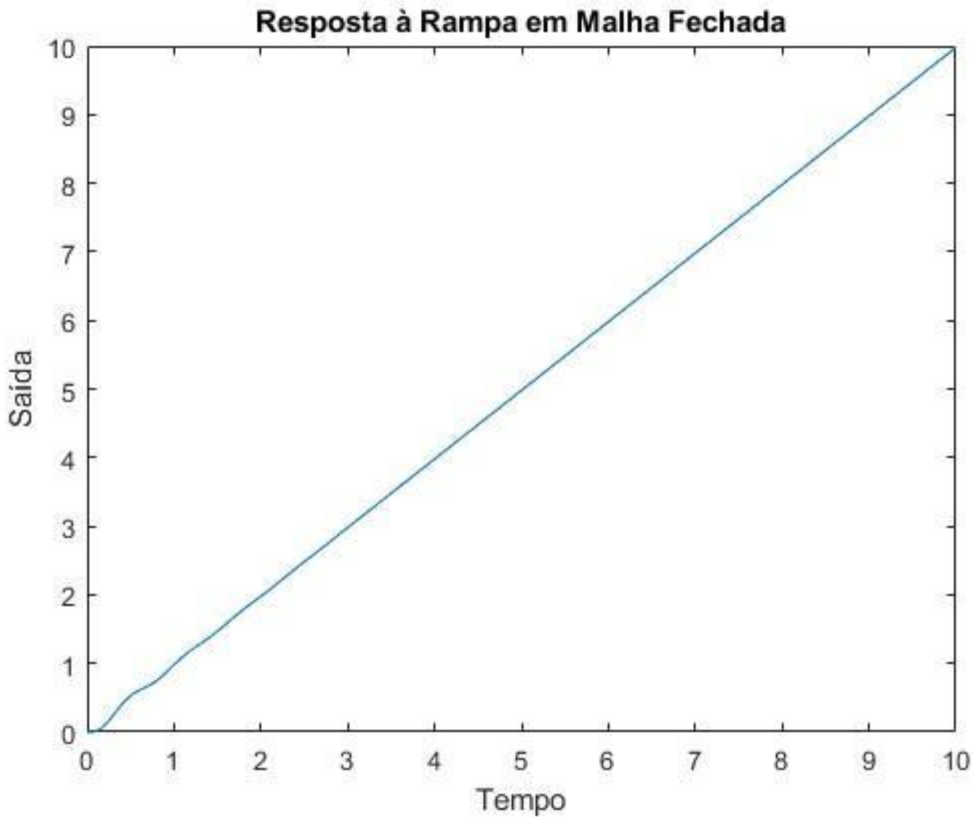

Figura 14: Resposta a Rampa Sistema 1

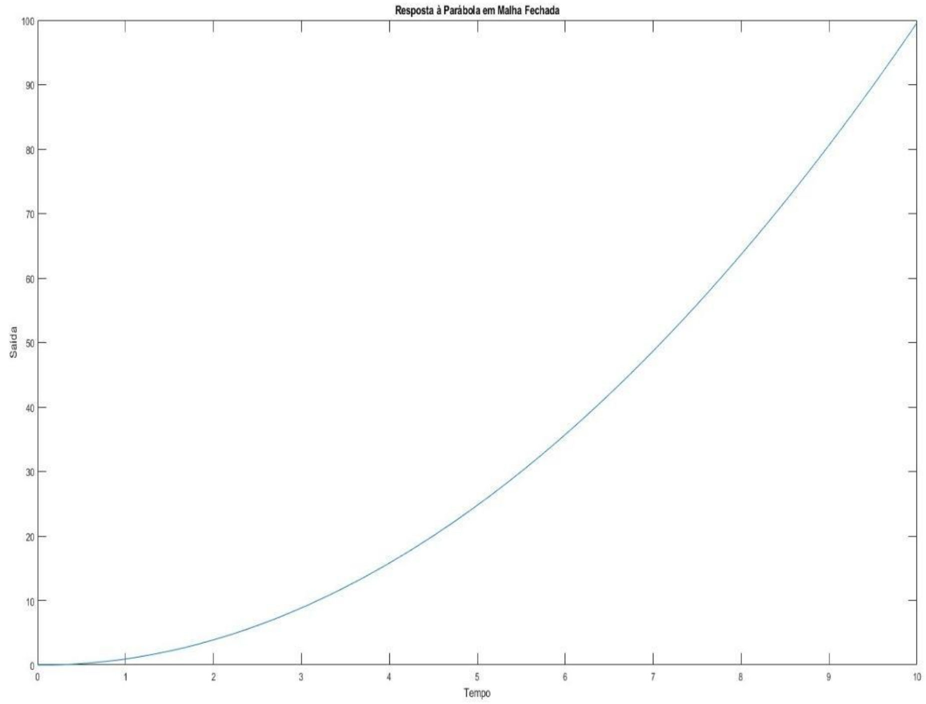

Figura 15: Resposta a Parábola Sistema 1

```
Ultrapassagem percentual: 64.38%
Tempo de acomodação: 2.62
Instante de pico: 0.31
Erro em regime permanente resposta ao degrau: 0.5000
Erro em regime permanente resposta a rampa: Inf
Erro em regime permanente resposta a parabola: Inf
```

Os gráficos obtidos para o sistema 2:

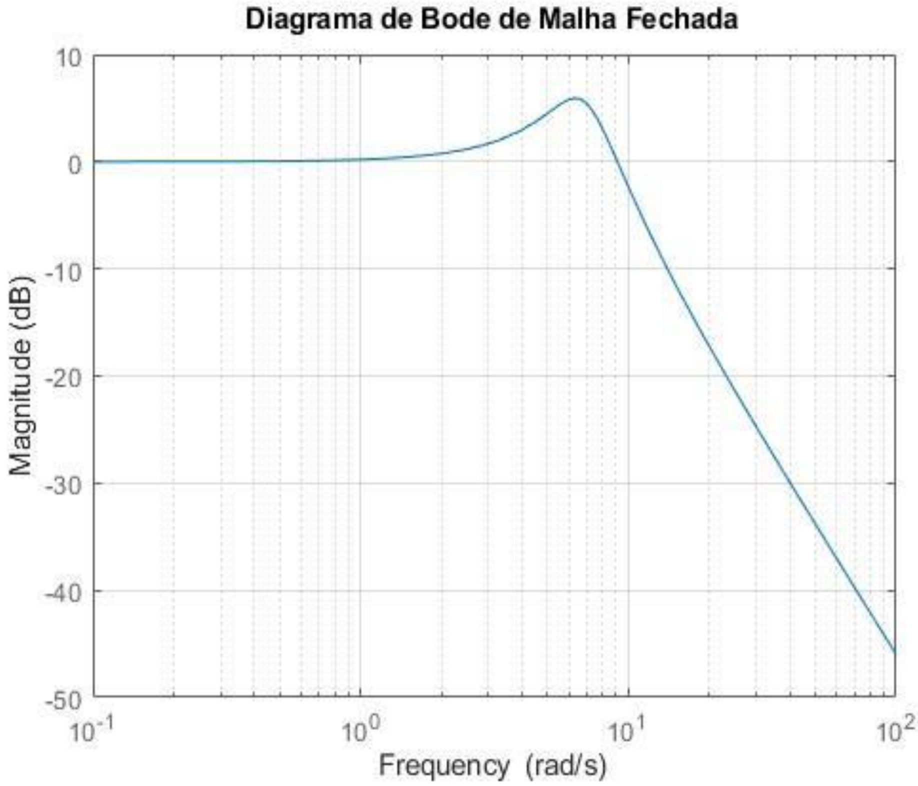

Figura 16: Módulo Malha Fechada Sistema 2

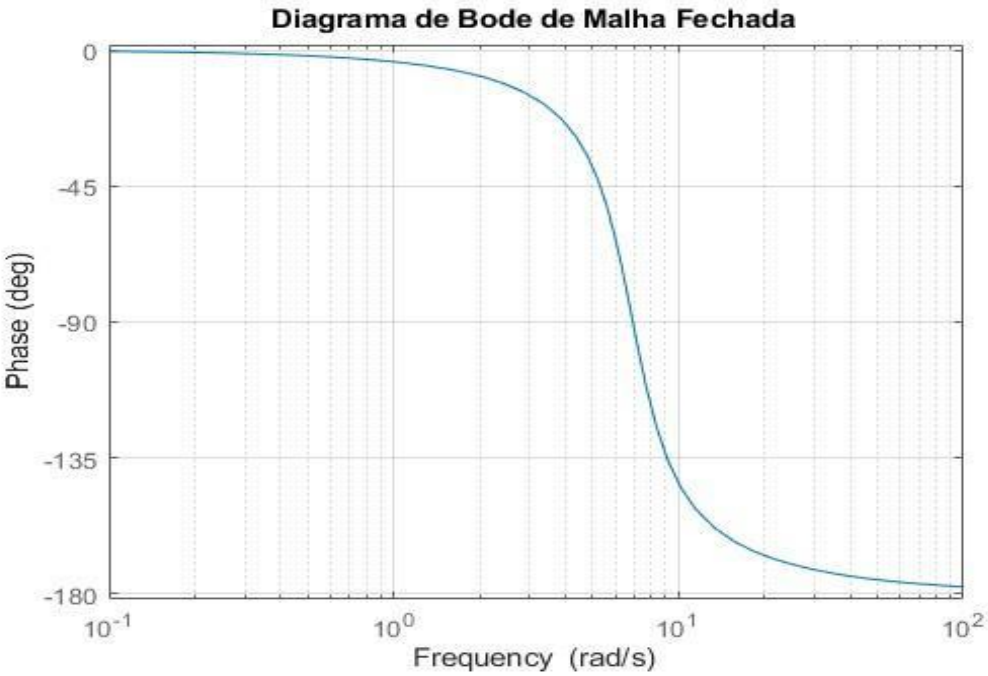

Figura 17: Fase Malha Fechada Sistema 2

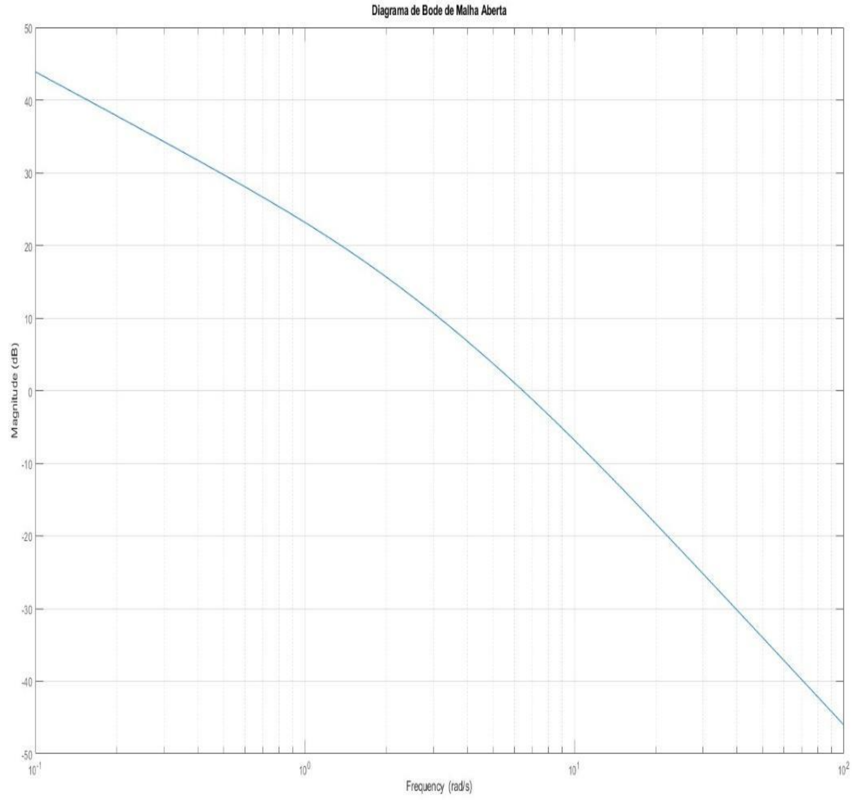

Figura 18: Módulo Malha Aberta Sistema 2

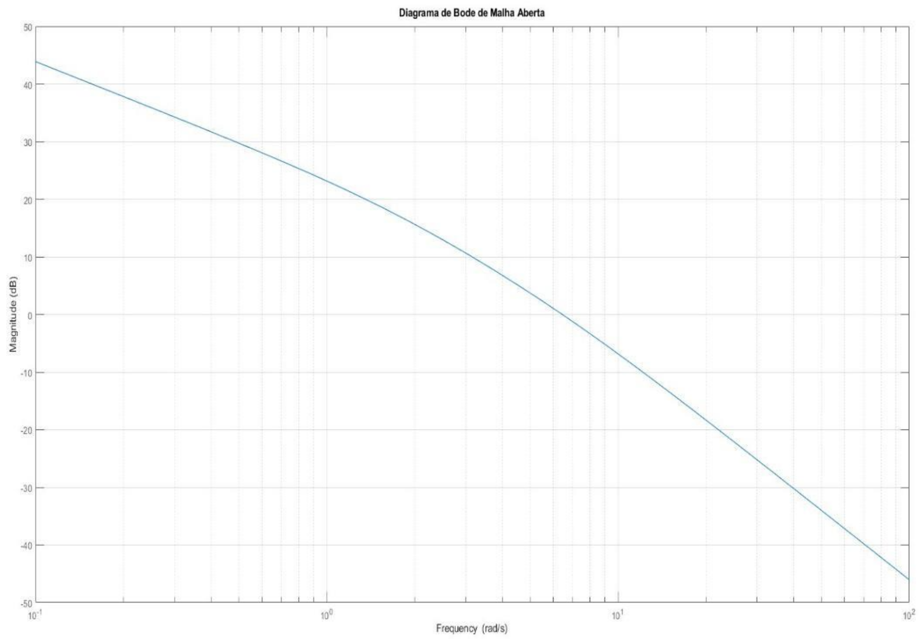

Figura 19: Fase Malha Aberta Sistema 2

Figura 20: Resposta ao Degrau Sistema 2

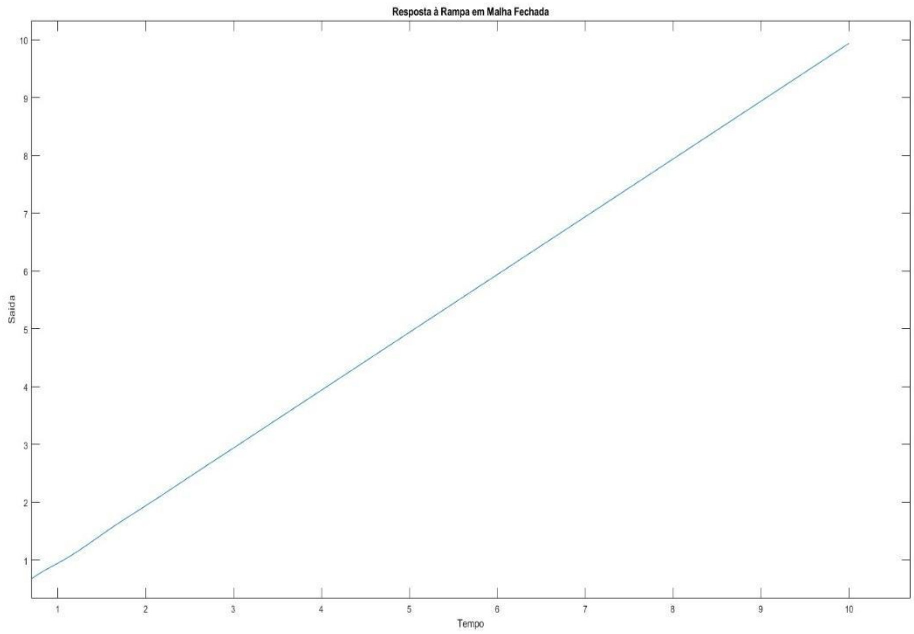

Figura 21: Resposta a Rampa Sistema 2

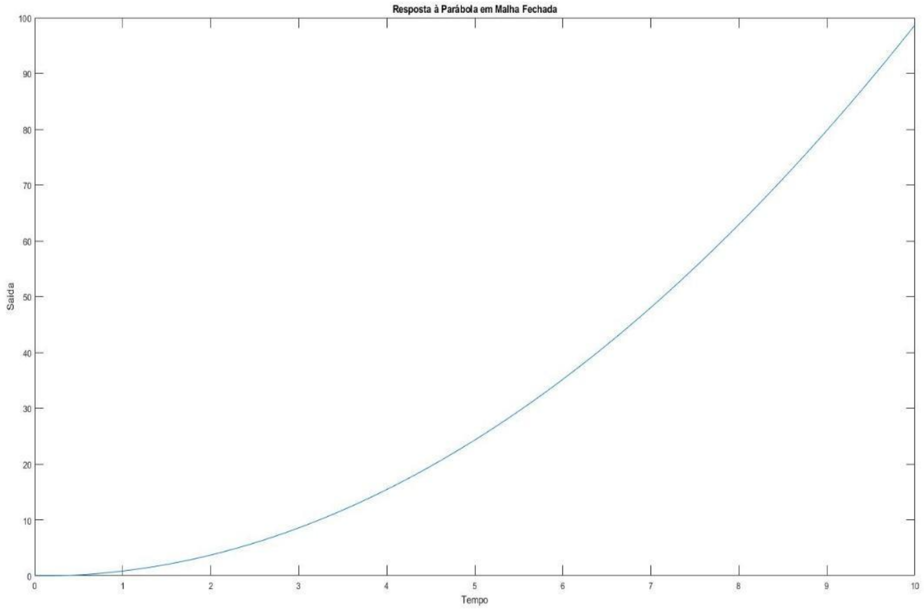

Figura 22: Resposta a Parábola Sistema 2

```
Ultrapassagem percentual: 44.26%
Tempo de acomodação: 2.03
Instante de pico: 0.47
Erro em regime permanente resposta ao degrau: 0.5000
Erro em regime permanente resposta a rampa: Inf
Erro em regime permanente resposta a parabola: Inf
```

A fim de comparação foi calculado a ultrapassagem percentual, tempo de acomodação, instante de pico e o erro em regime permanente para cada sistema:

Fórmulas usadas:

$$\%UP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} * 100$$

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_n = \frac{4}{T_s\,\zeta}$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$K_p = G(s)$$

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{K_p}$$

Sistema 1:

A partir do gráfico de bode obteve-se o pico e calculou o ζ, subsequente a ultrapassagem percentual, o tempo de acomodação, o instante de pico e o erro de regime permanente.

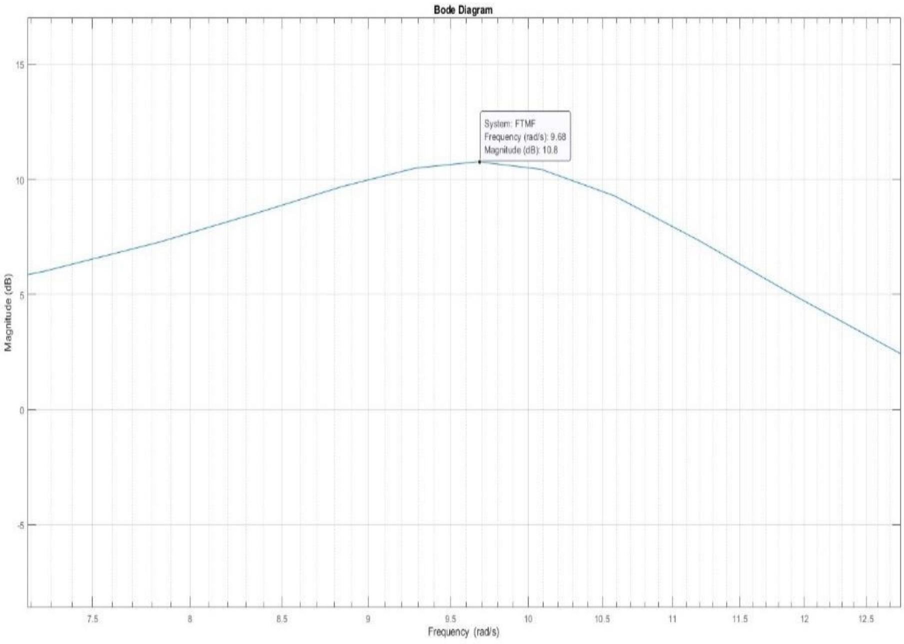

Figura 23: Ganho e frequência usado no sistema 1

$$M_p = 10{,}8\ dB$$

$$\omega_n = 9{,}67\ rad/s$$

Convertendo:

$$20\ log\ (M_p) = 10{,}8$$

$$M_p = 10^{\left(\frac{10{,}8}{20}\right)}$$

Em sequência utilizou-se as fórmulas levando em consideração,

$$0 \leq \zeta \leq 0{,}707.$$

%UP = 63,31%

T_s = 2,87s

T_p = 0.328s

$$K_p = 1$$

$$e_{ss}(t) = 0.5$$

Logo, em comparação aos dados obtidos pelo MATLAB, presencia uma boa aproximação com o sistema de segunda ordem.

Sistema 2:

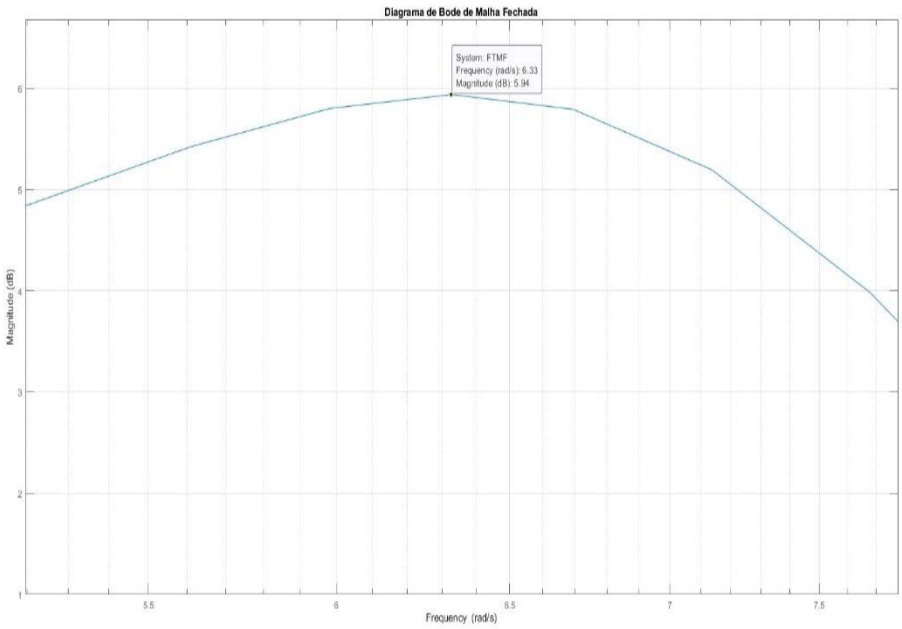

Figura 24: Ganho e frequência usado no sistema 2

$$M_p = 5{,}94\ dB$$

$$\omega_n = 6{,}33\ rad/s$$

Convertendo:

$$20\ log\ (M_p) = 5{,}94$$

$$M_p = 10^{(\frac{5{,}94}{20})}$$

$$M_p = 10^{(\frac{10{,}8}{20})}$$

Em sequência utilizou-se as fórmulas levando em consideração,

$$0 \leq \zeta \leq 0{,}707.$$

%UP = 44,12%

T_s = 2,507s

$$T_p = 0.512\text{s}$$

$$K_p = 1$$

$$e_{ss}(t) = 0.5$$

Em sequência, fez-se um código para que servisse para qualquer função de transferência de malha aberta:

```
clc
clear
close all

% Definir a função de transferência G(s) em malha aberta
disp('Deve ser digitado entre [] e do maior grau para o menor');
disp('Obs: não esquecer do zero');
num = input('Digite o numerador da função de transferência: ');
den = input('Digite o denominador da função de transferência: ');
G = tf(num, den);

% a. Construir os diagramas de Bode de malha aberta e malha fechada
figure;
bode(G); % Diagrama de Bode de malha aberta
title('Diagrama de Bode de Malha Aberta');

% Convertendo para malha fechada e plotando o diagrama de Bode
FTMF = feedback(G, 1);
figure;
bode(FTMF); % Diagrama de Bode de malha fechada
title('Diagrama de Bode de Malha Fechada');

% b. Utilizar métodos de resposta em frequência para estimar a ultrapassagem
% percentual, o tempo de acomodação e o instante de pico.
% função stepinfo
info = stepinfo(FTMF);
Ultrapassagem = info.Overshoot;
Tempo_de_acomodacao = info.SettlingTime;
instante_de_pico = info.PeakTime;

fprintf('Ultrapassagem percentual: %.2f%%\n', Ultrapassagem);
fprintf('Tempo de acomodação: %.2f\n', Tempo_de_acomodacao);
fprintf('Instante de pico: %.2f\n', instante_de_pico);

% c. Apresentar a resposta ao degrau em malha fechada
figure;
step(FTMF); % Resposta ao degrau em malha fechada
title('Resposta ao Degrau em Malha Fechada');

% d. Utilizar métodos de resposta em frequência para estimar o erro em regime
% permanente.
```

```
num1 = [1, 0];
den1 = 1;
derivador = tf(num1, den1);

% Obtendo as informações da resposta ao degrau
info_degrau = stepinfo(FTMF, 'SettlingTimeThreshold', 0.05);
Kp = dcgain(FTMF);
error_ssdegrau = 1 / (1 + Kp);

% Obtendo as informações da resposta à rampa
info_rampa = stepinfo(derivador * FTMF, 'SettlingTimeThreshold', 0.05);
Kv = dcgain(derivador * FTMF);
error_ssrampa = 1 / Kv;

% Obtendo as informações da resposta à parábola
info_parabola = stepinfo(derivador * derivador * FTMF, 'SettlingTimeThreshold',
0.05);
Ka = dcgain(derivador * derivador * FTMF);
error_ssparabola = 1 / Ka;

fprintf('Erro em regime permanente resposta ao degrau: %.4f\n',
error_ssdegrau);
fprintf('Erro em regime permanente resposta a rampa: %.4f\n', error_ssrampa);
fprintf('Erro em regime permanente resposta a parabola: %.4f\n',
error_ssparabola);

% e. Apresentar a resposta à rampa em malha fechada
%Usou Lsim
figure;
t = 0:0.01:10;
rampa = t;
[y_rampa, t_rampa] = lsim(FTMF, rampa, t);
plot(t_rampa, y_rampa); % Resposta à rampa em malha fechada
title('Resposta à Rampa em Malha Fechada');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Saída');

% Apresentar a resposta à parábola em malha fechada
figure;
t = 0:0.01:10;
parabola = t.^2;
[y_parabola, t_parabola] = lsim(FTMF, parabola, t);
plot(t_parabola, y_parabola); % Resposta à parábola em malha fechada
title('Resposta à Parábola em Malha Fechada');
xlabel('Tempo');
ylabel('Saída');
```

Questão 4:

Nessa última questão foi feita uma análise a partir dos dados de função de transferência, margem de fase e de ganho e erro, para se obter um compensador de avanço de fase.

Diante disso, segue o código feito para a realização do compensador.

```
clc
clear
close all

aux = 0;% correção de fase
esst = (input("erro(%): ")/100);% erro definido%0.25
MF = input("Margem de Fase(º): ");% Margem de Fase definida(45)
MG = (input("Margem de Ganho(dB): ")); %Magem de Ganho definida

% Definindo a Função de Transferencia.
num  = 10;
den = [1 11 10 0];
G = tf(num,den);


% Calculo de ganho a partir do erro de 25%
Kv =1/esst;
derivador = tf([1 0],1);
GKv = G*derivador;
K = Kv/dcgain(GKv);

%Diagrama de Bode
[ganho,fase] = margin(K*G);
ganho = squeeze(ganho); % magnitude do ganho
valores_db = 20*log10(ganho); %convertendo para dB
while fase < MF || valores_db < MG
   % Margem de ganho e Margem de fase

   MFutil = MF-fase+aux;
   alfa = ((1- sind(MFutil))/(1+sind(MFutil)));

   ganho_desejado_dB = -20*log10(1/sqrt(alfa));
   [GANHO_KG,FASE_KG,w] = bode(K*G);
   % Encontrando o índice da frequência mais próxima da desejada
   [~, indice_frequencia] = min(abs(20*log10(GANHO_KG) -
ganho_desejado_dB));

   % Obtendo o ganho correspondente à frequência desejada
   Wn = w(indice_frequencia);

   T = 1/(sqrt(alfa)*Wn);
   Wz = 1/T;
```

```
    Wp = 1/(alfa*T);

    % Compensador Avanço de Fase
    Kc = K/alfa;

    num_Gc = [Kc,Kc*Wz];
    den_Gc = [1,Wp];
    Gc = tf(num_Gc,den_Gc);
    [ganho,fase] = margin(Gc*G);
    aux = aux +0.01;

end

disp('ganho do compensado = ');
disp((20*log10(ganho)));
disp('fase do compensado = ');
disp(fase);

% Gráficos de Bode
 hold on;
 bode(G);
 hold on;
 bode(K*G);
 hold on;
 bode(Gc/K);
 hold on;
 bode(Gc*G);
 hold on;

 legend('G(s)','K*G(s)','Gc(s)/K','Gc(s)*G(s)');

% Simulação e obtenção das respostas
t = 0:0.01:10; % Tempo de simulação
u_step = ones(size(t)); % Degrau unitário
u_ramp = t; % Rampa unitária


G_malha_fechada = feedback(G,1);


% Sistema não compensado
[y_step_nao_compensado, ~] = step(G_malha_fechada, t);
[y_rampa_nao_compensado, ~] = lsim(G_malha_fechada, u_ramp, t);

Sist_comp_malha_fechada = feedback(Gc*G,1);
% Sistema compensado
[y_step_compensado, ~] = step(Sist_comp_malha_fechada, t);
[y_rampa_compensado, ~] = lsim(Sist_comp_malha_fechada, u_ramp, t);

Q = 1 + 0.*t;
```

```
% Plotagem dos gráficos
figure;
subplot(2,1,1);
plot(t, y_step_nao_compensado, 'b', t, y_step_compensado, 'r',t,Q,'g');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Resposta ao Degrau');
legend('Não Compensado', 'Compensado','Entrada degrau unitário','Localition');

subplot(2,1,2);
plot(t, y_rampa_nao_compensado, 'b', t, y_rampa_compensado, 'r',t,t,'g');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Resposta à Rampa');
legend('Não Compensado', 'Compensado','Entrada rampa
unitária','Location','southeast');
```

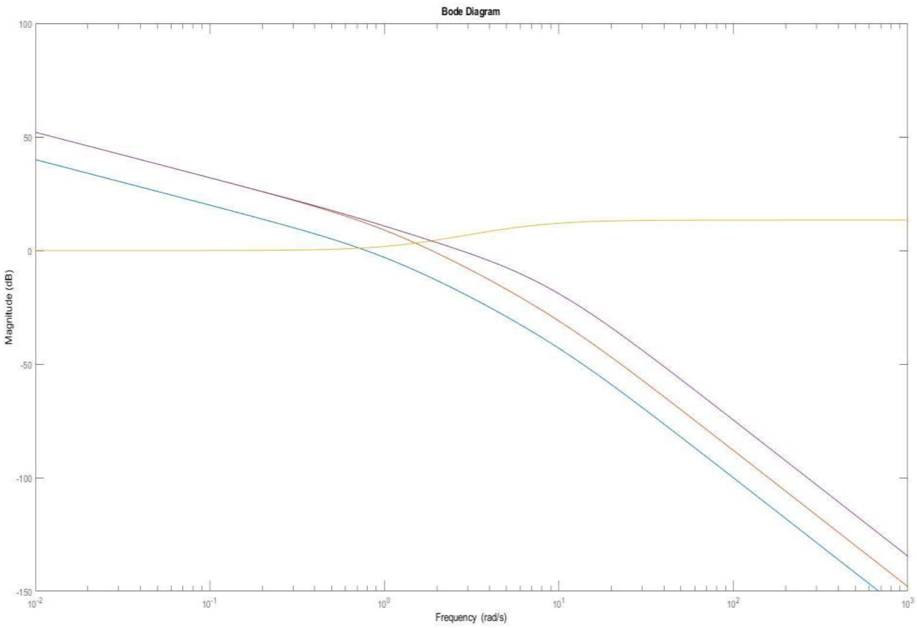

Figura 25: Diagrama de Bode (Módulo) de G(s), K*G(s), Gc(s)/K, Gc(s)G(s).

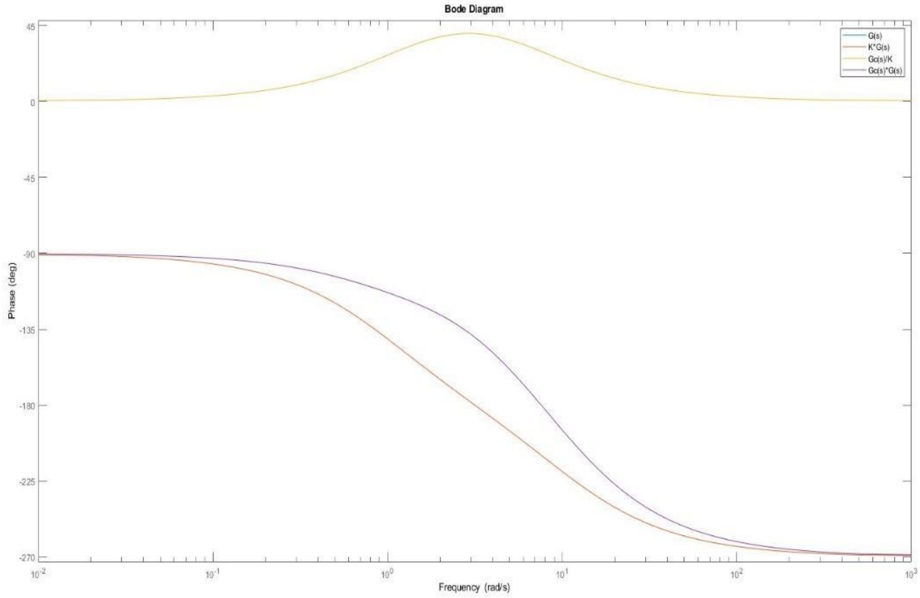

Figura 26: Diagrama de Bode (Fase) de G(s), K*G(s), Gc(s)/K, Gc(s)G(s).

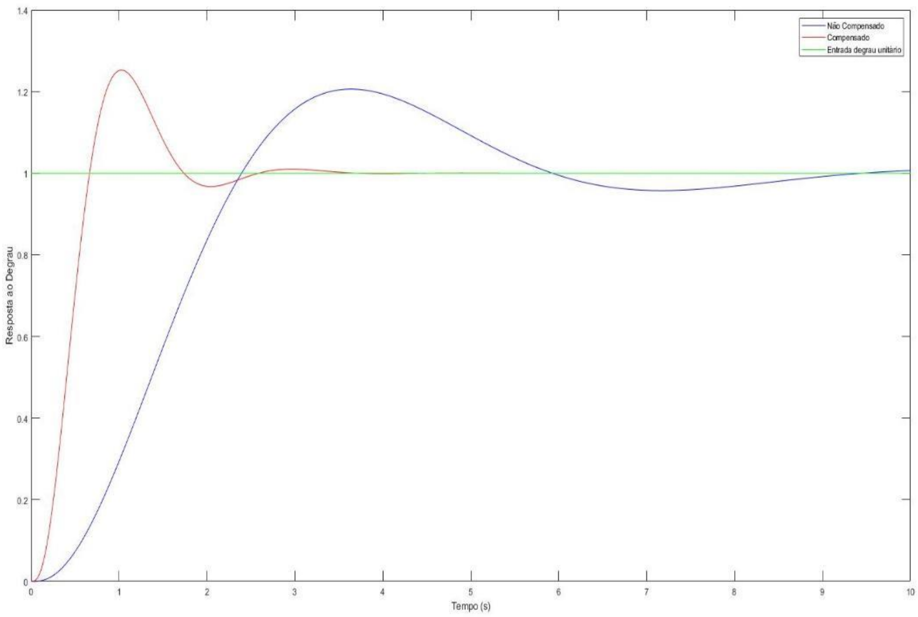

Figura 27: Resposta ao Degrau Compensado e Não Compensado.

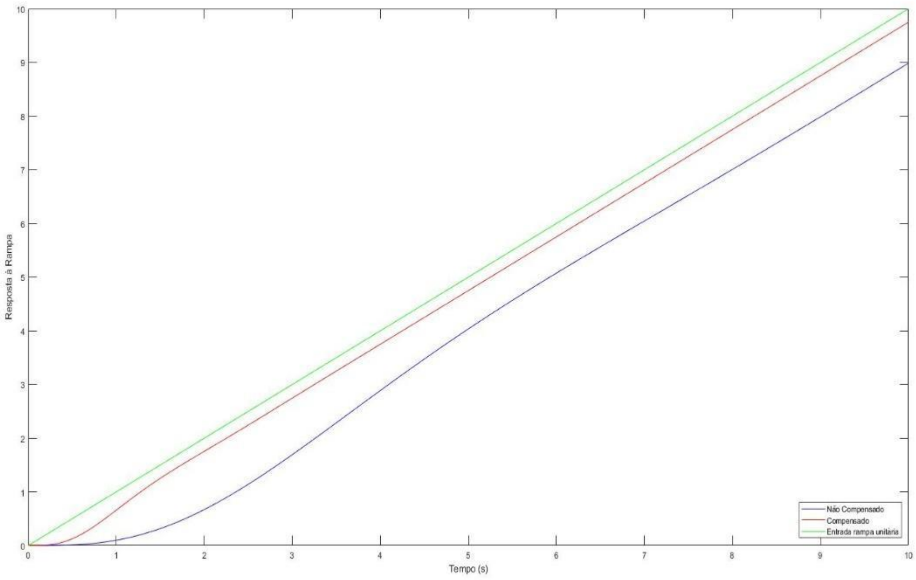

Figura 28: Resposta a Rampa Compensado e Não Compensado.

É notório que na figura 26 o gráfico de fase de G(s) não está plotado no gráfico, isso ocorre pois o K*G(s) e G(s) possuem a mesma onda de fase.

A fim de provar isso, temos esse outro gráfico de bode plotado apenas de G(s):

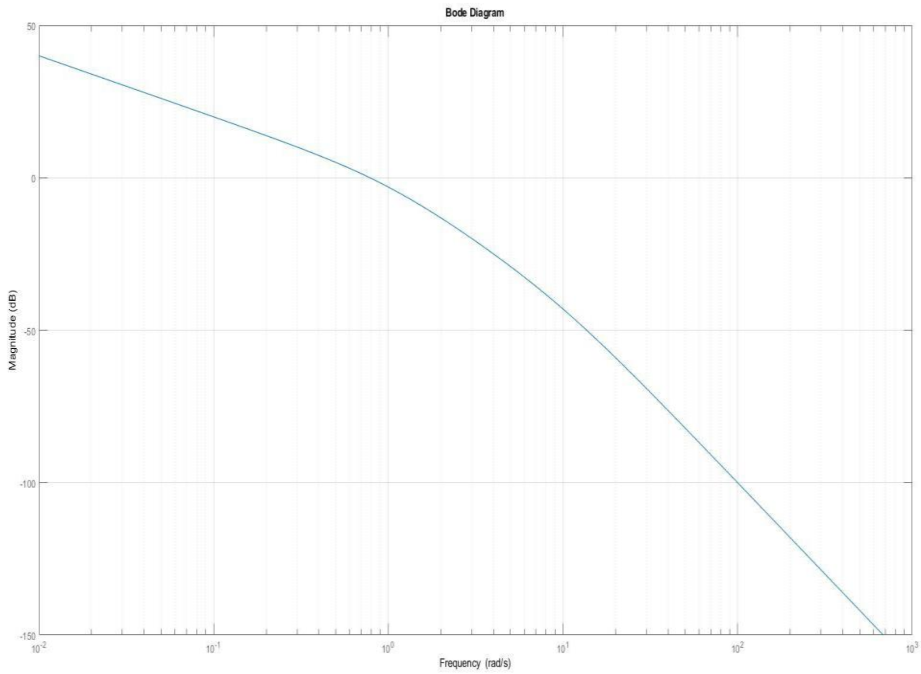

Figura 29: Diagrama de Bode G(s) Módulo

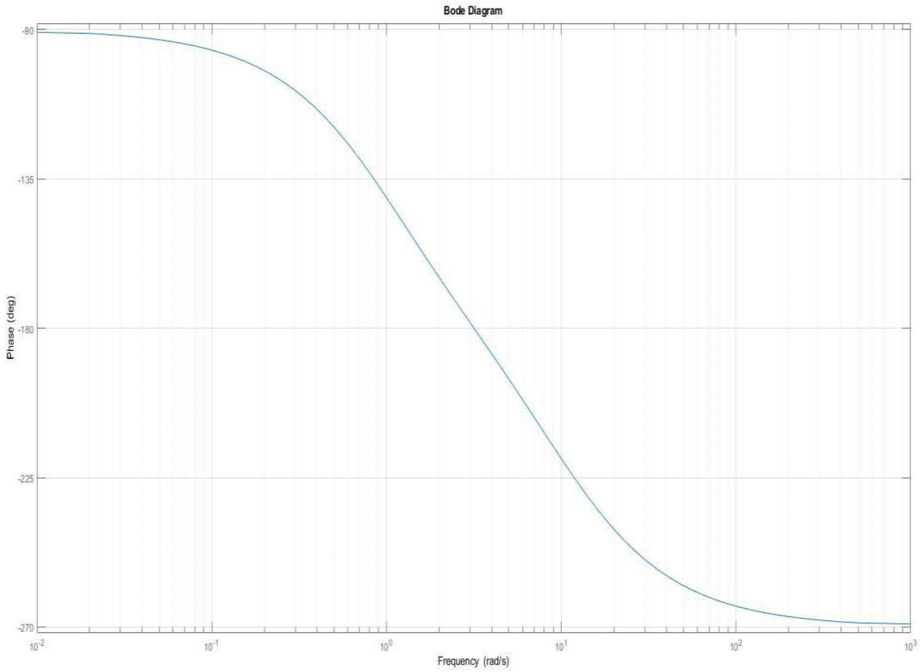

Figura 30: Diagrama de Bode G(s) Fase.