Universidade Federal de Juiz de Fora

2º Trabalho de Controle

Alunos: Dylan Soares e Maicown José da Rocha.

09 de junho de 2024

Sumário:

Questão 1:

Letra a)

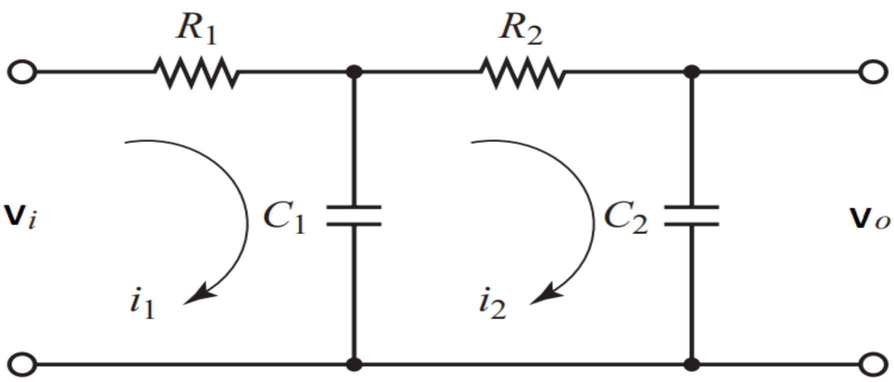

Figura 1: Circuito no Domínio do Tempo

A fim de obter a Função de Transferência do circuito acima, em primeira instância passou o circuito para o domínio da frequência de Laplace:

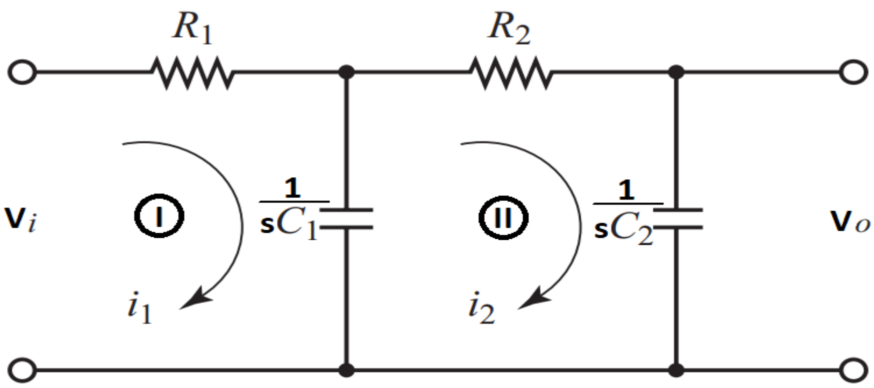

Figura 2: Circuito no Domínio da Frequência

Em seguida, foi feito pela Lei de Kirchhof das Tensões a seguinte análise:

Malha I:

$$V_i = R_1 I_1 + \frac{1}{sC_1}(I_1 - I_2)$$

Malha II:

$$R_2 I_2 + \frac{I_2}{sC_2} + \frac{1}{sC_1}(I_2 - I_1) = 0$$

Deve ser levado em consideração a relação de:

$$I_2 = V_o s C_2$$

Assim, realizando as simplificações da Malha II:

$$I_2\left(R_2 + \frac{1}{sC_2} + \frac{1}{sC_1}\right) = \frac{I_1}{sC_1}$$

$$I_1 = sC_1 I_2\left(R_2 + \frac{1}{sC_2} + \frac{1}{sC_1}\right)$$

$$I_1 = I_2\left(R_2 s C_1 + \frac{C_1}{C_2} + 1\right)$$

Substituindo na Malha I:

$$V_i = R_1\, I_2\left(R_2 s C_1 + \frac{C_1}{C_2} + 1\right) + \frac{1}{sC_1}\left(I_2\left(R_2 s C_1 + \frac{C_1}{C_2} + 1\right) - I_2\right)$$

$$V_i = R_1\, I_2\left(R_2 s C_1 + \frac{C_1}{C_2} + 1\right) + \frac{1}{sC_1}\left(\left(I_2 R_2 s C_1 + I_2\, \frac{C_1}{C_2}\right)\right)$$

$$V_i = \left(R_1\, I_2 R_2 s C_1 + R_1\, I_2 \frac{C_1}{C_2} + R_1\, I_2\right) + \left(\left(I_2 R_2 + I_2\, \frac{1}{sC_2}\right)\right)$$

Substituindo $I_2 = V_o s C_2$:

$$V_i = \left(R_1\, V_o s C_2 R_2 s C_1 + R_1 V_o s C_2 \frac{C_1}{C_2} + R_1\, V_o s C_2\right) + \left(\left(V_o s C_2 R_2 + V_o s C_2\, \frac{1}{sC_2}\right)\right)$$

$$V_i = V_o\left\{\left(R_1\, sC_2 R_2 s C_1 + R_1 s C_2 \frac{C_1}{C_2} + R_1\, sC_2\right) + \left(\left(sC_2 R_2 + sC_2\, \frac{1}{sC_2}\right)\right)\right\}$$

$$V_i = V_o\left\{(s^2 R_1\, C_2 R_2 C_1 + R_1 s C_1 + R_1\, sC_2) + \left((sC_2 R_2 + 1)\right)\right\}$$

$$V_i = V_o\{(s^2 R_1\, C_2 R_2 C_1 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1\}$$

Assim obtivemos a seguinte Função de Transferência:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 R_1 R_2\, C_2 C_1 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1}$$

Letra b):

Para obter a representação no espaço de estados a partir dos dados:

$$R_1 = 1\ \Omega\ , R_2 = 10\ \Omega, C_1 = 0{,}5\ F\ , C_2 = 0{,}1\ F$$

Colocando $R_1R_2\ C_2C_1$ em evidência:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{\frac{s^2R_1R_2\ C_2C_1}{R_1R_2\ C_2C_1} + \frac{(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)s}{R_1R_2\ C_2C_1} + \frac{1}{R_1R_2\ C_2C_1}}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R_1R_2\ C_2C_1(s^2 + \frac{(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)}{R_1R_2\ C_2C_1}s + \frac{1}{R_1R_2\ C_2C_1})}$$

Substituindo os valores pelos dados apresentados obtivemos:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{2}{s^2 +\ 3{,}2s + 2}$$

$$V_o(s)(s^2 +\ 3{,}2s + 2) =\ 2V_i(s)$$

Passando para o domínio do tempo:

$$\ddot{v_o}(t) +\ 3{,}2\dot{v_o}(t) + 2v_o(t) =\ 2v_i(t)$$

Atribuindo $\boldsymbol{x_1} =\ v_o(t)$ e $\boldsymbol{x_2} = \dot{v_o}(t)$, com isso temos que y = $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{\dot{x}_1} = \boldsymbol{x_2}$**.**

$$\boldsymbol{\dot{x_2}} \mathbf{=} 2v_i(t) -\ 2\boldsymbol{x_1} -\ 3{,}2\boldsymbol{x_2}$$

Tendo isso em mente chegamos em:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\dot{x}_1} \\ \boldsymbol{\dot{x_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} v_i$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{bmatrix} + [0]\ v_i$$

Com a finalidade de atingir a matriz desejada na questão, devemos atribuir uma matriz de transformação.

$$\bar{A} =\ Q^{-1}A\ Q\ ,\ \bar{B} =\ Q^{-1}B\ ,\ \bar{C} =\ CQ,\ \bar{D} = D$$

$$\text{Sendo } Q = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix};$$

$$Q\bar{B} = B$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = 0$$

$$p_{21} = 2$$

$$Q\bar{A} = A\,Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{12} \\ 2 & p_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -3{,}2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3{,}2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & p_{12} \\ 2 & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$p_{12} = 2$$

$$2 * (-3{,}2) + p_{22} = -6{,}4$$

$$p_{22} = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = Q^{-1} A\,Q$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3{,}2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como $D = 0$ então $\overline{D} = 0$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}} \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_i$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}} \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}} \end{bmatrix} + [0]\, v_i$$

letra c)

Resolvendo as variáveis de estado com a resposta ao degrau, e assumindo condições inicias nulas, temos que:

Pelo método clássico:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

Pelo método de Laplace:

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{L}^{-1}\{[(\mathrm{sI}-\mathrm{A})^{-1}]\big(\mathrm{x}(0)+\mathrm{BU(s)}\big)]\}$$

$$\mathrm{y(t)} = \mathrm{L}^{-1}\{[\mathrm{C}(\mathrm{sI}-\mathrm{A})^{-1}]\big(\mathrm{x}(0)+\mathrm{BU(s)}\big)+\mathrm{DU(s)}]\}$$

Foi escolhido a resolução pelo método de Laplace:

$$A = \begin{bmatrix} -3,2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontrando $(\mathrm{sI}-\mathrm{A})^{-1}$:

$$(\mathrm{sI}-\mathrm{A})^{-1} = \frac{1}{s^2+3,2s+2}\begin{bmatrix} s+3,2 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1}$$

$$(\mathrm{sI}-\mathrm{A})^{-1} = \frac{1}{s^2+3,2s+2}\begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3,2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{sI}-\mathrm{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+3,2s+2} & \frac{-2}{s^2+3,2s+2} \\ \frac{1}{s^2+3,2s+2} & \frac{s+3,2}{s^2+3,2s+2} \end{bmatrix}$$

Aplicando a resposta ao degrau para as variáveis de estado:

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{L}^{-1}\{\begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+3,2s+2} & \frac{-2}{s^2+3,2s+2} \\ \frac{1}{s^2+3,2s+2} & \frac{s+3,2}{s^2+3,2s+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s} \end{bmatrix}]\}$$

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{L}^{-1}\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+3{,}2s+2} \\ \frac{1}{s(s^2+3{,}2s+2)} \end{bmatrix}\}$$

utilizando frações parciais:

$$a_{11} = \mathrm{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+3{,}2s+2}\}$$

$$a_{11} = \mathrm{L}^{-1}\{\frac{0{,}66827}{(s+0{,}8516)} - \frac{0{,}66827}{(s+2{,}348)}\}$$

$$a_{11} = 0{,}66827e^{-0{,}8516t} - 0{,}66827e^{-2{,}348t}$$

$$a_{21} = \mathrm{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+3{,}2s+2)}\}$$

$$a_{21} = \mathrm{L}^{-1}\{\frac{1}{2s} + \frac{-0{,}78468}{(s+0{,}8516)} + \frac{0{,}28468}{(s+2{,}348)}\}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2} + -0{,}78468e^{-0{,}8516t} + 0{,}28468e^{-2{,}348t}$$

$$\mathrm{x(t)} = \begin{bmatrix} 0{,}66827e^{-0{,}8516t} - 0{,}66827e^{-2{,}348t} \\ \frac{1}{2} + -0{,}78468e^{-0{,}8516t} + 0{,}28468e^{-2{,}348t} \end{bmatrix}$$

Em seguida aplicando a resposta ao degrau a saída:

$$\mathrm{y(t)} = \mathrm{L}^{-1}\{[0 \quad 2]\begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+3{,}2s+2} \\ \frac{1}{s(s^2+3{,}2s+2)} \end{bmatrix}\}$$

$$\mathrm{y(t)} = \mathrm{L}^{-1}\{\begin{bmatrix} \frac{2}{s(s^2+3{,}2s+2)} \end{bmatrix}\}$$

$$\mathrm{y(t)} = \begin{bmatrix} 2(\frac{1}{2} + -0{,}78468e^{-0{,}8516t} + 0{,}28468e^{-2{,}348t}) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{y(t)} = [1 - 1{,}56936e^{-0{,}8516t} + 0{,}56936e^{-2{,}348t})]$$

Letra d) Código do Matlab para plotar os gráficos questão 1:

```
clc
close all
clear

%% x1
t_start = 0; % tempo inicial em segundos
t_end = 10;  % tempo final em segundos
n_points = 100; % número de pontos
t = linspace(t_start, t_end, n_points);
x1 = 0.66827 * exp(-0.8516 * t) -0.66827*exp(-2.348 * t);
figure;
plot(t, x1);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
title('Função Exponencial x1');
grid on;
%% x2

t_start = 0; % tempo inicial em segundos
t_end = 10;  % tempo final em segundos
n_points = 100; % número de pontos
t = linspace(t_start, t_end, n_points);
x2 = -0.78468* exp(-0.8516 * t) +0.28468 * exp(-2.348 * t)+ (0.5);
figure;
plot(t, x2);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
title('Função Exponencial x2');
grid on;

%% y
t_start = 0; % tempo inicial em segundos
t_end = 10;  % tempo final em segundos
n_points = 100; % número de pontos
t = linspace(t_start, t_end, n_points);
y = -(1.56936)* exp(-0.8516 * t) +(0.56936) * exp(-2.348 * t)+ (1);
figure;
plot(t, y);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
title('Função Exponencial y');
grid on;
```

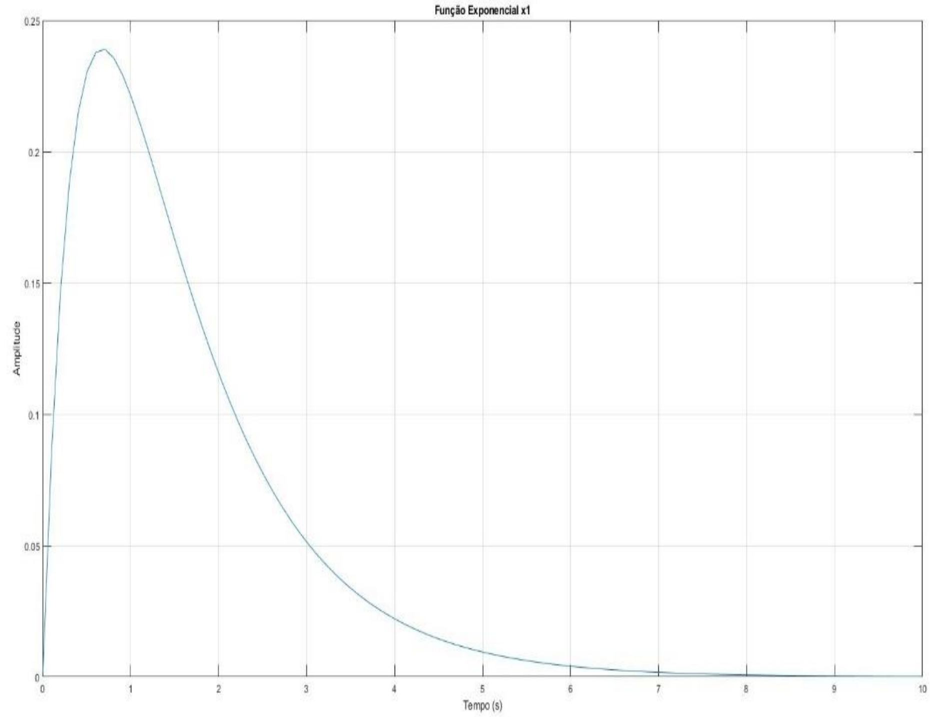

Figura 3: Variável de Estado x_1 resposta ao degrau

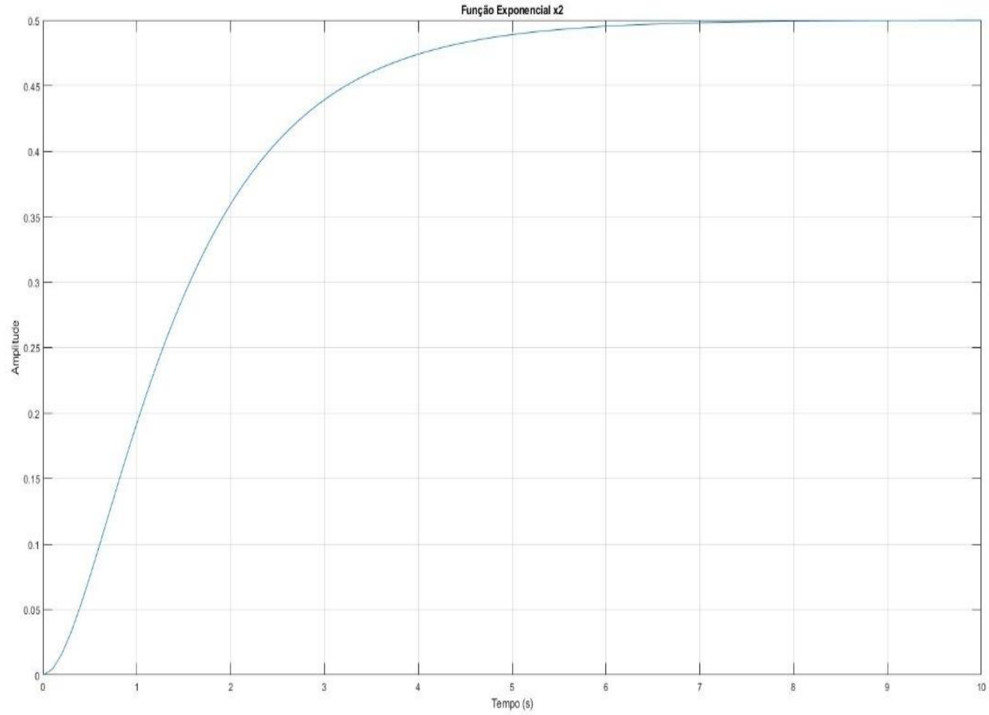

Figura 4: Variável de Estado x_2 resposta ao degrau

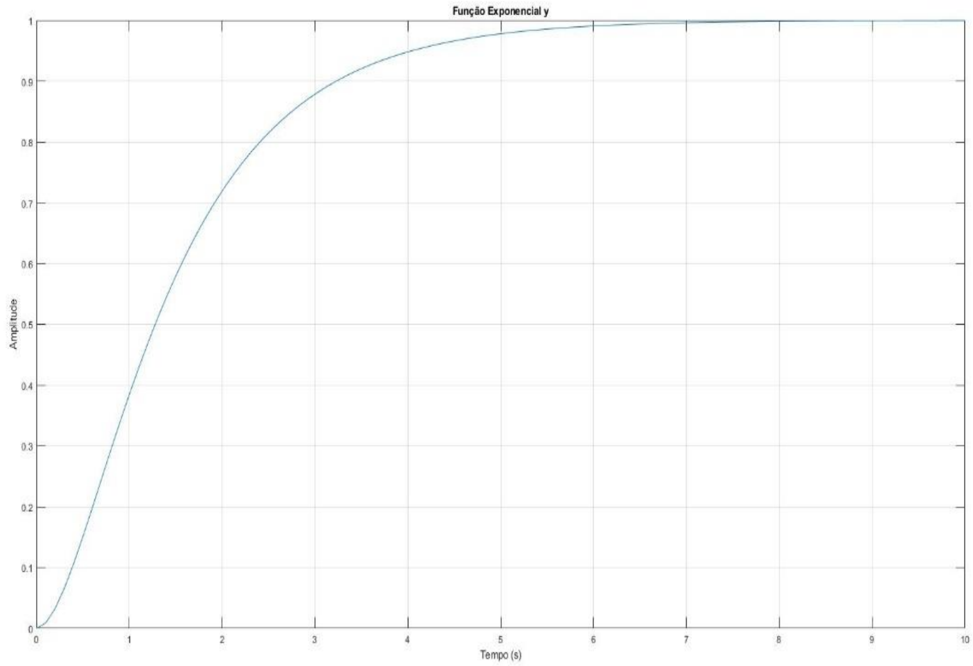

Figura 5: saída y do sistema em resposta ao degrau

Letra e):

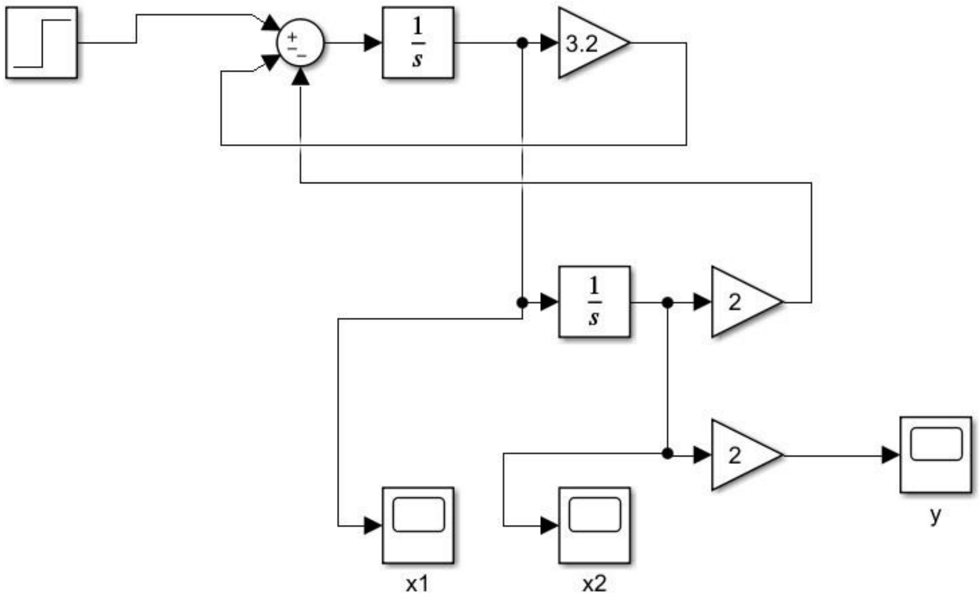

Figura 6: Simulink - Diagrama de Simulação

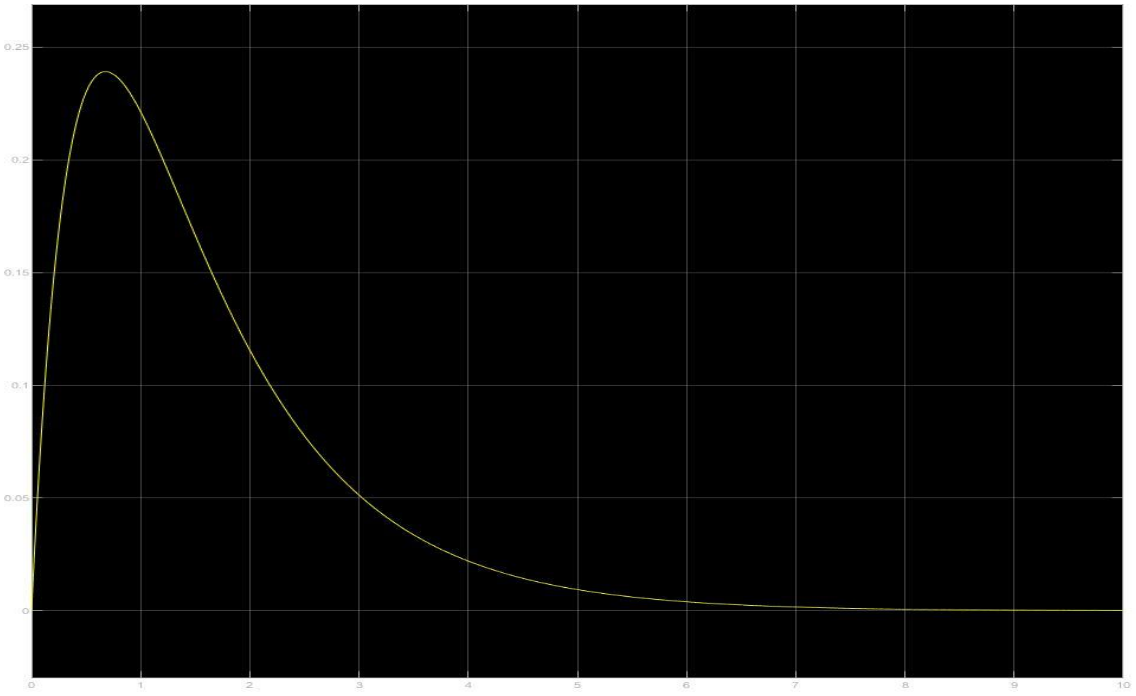

Figura 7: Simulink- variável de estado x_1 resposta ao degrau

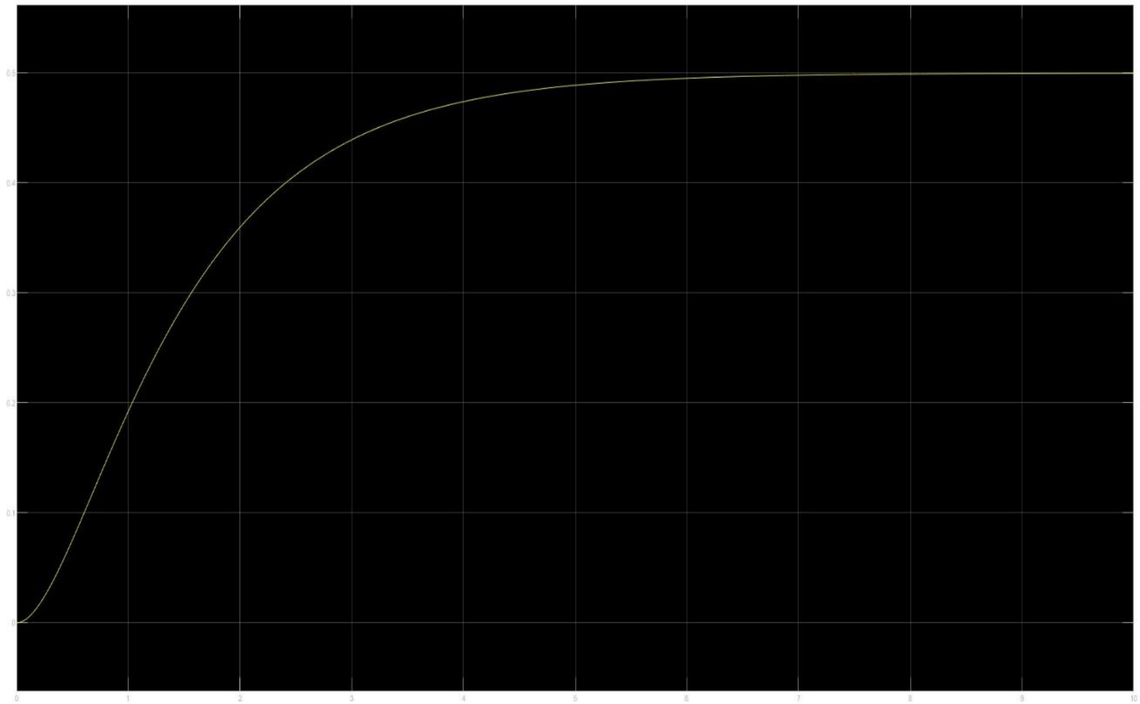

Figura 8: Simulink - variável de estado x_2 resposta ao degrau.

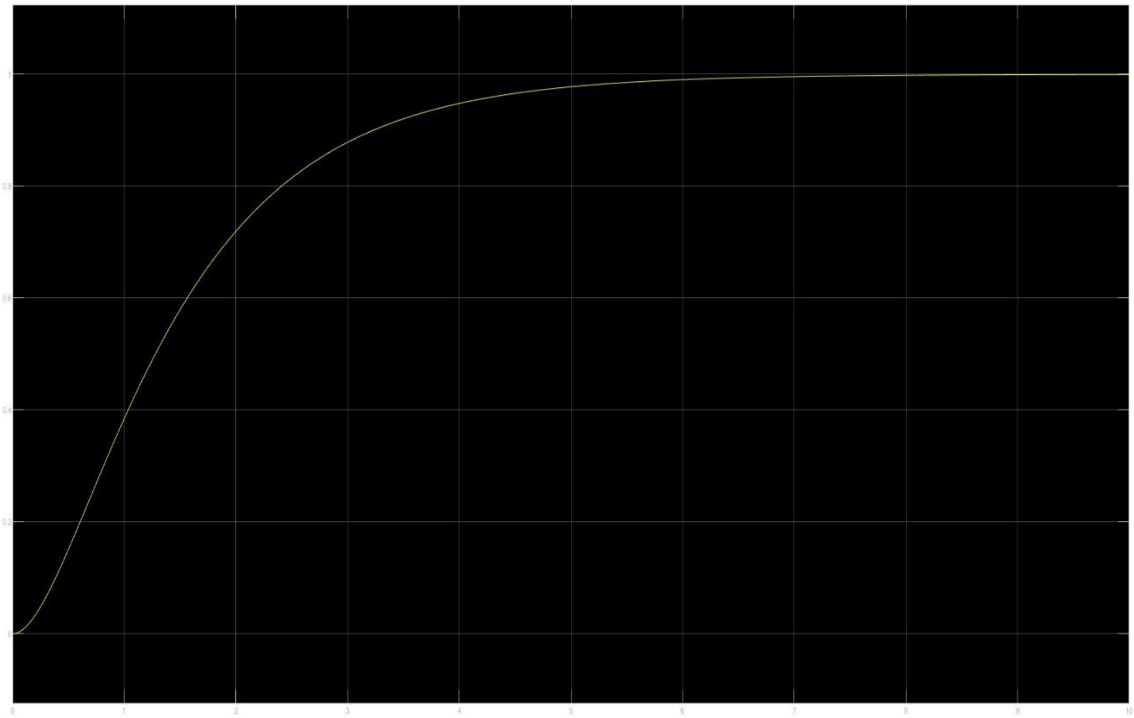

Figura 9: Simulink - saída y do sistema em resposta ao degrau.

Questão 2:

Para o desenvolvimento dessa questão, é necessário aplicar a transformação de similaridade no espaço de estados, a partir disso tiramos pelo modelo de matrizes de estados suas matrizes e calculamos os autovalores para podermos encontrar os autovetores e conseguir diagonalizar:

$$\dot{x} = A\mathbf{x} + Bu$$

$$y = C\mathbf{x} + Du$$

A questão nos fornece A = $\begin{bmatrix} -10 & -3 & 7 \\ 18,25 & 6,25 & -11,75 \\ -7,25 & -2,25 & 5,75 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculando seus autovalores, det $(\lambda I - A) = 0$:

$$\begin{bmatrix} \lambda + 10 & 3 & -7 \\ -18,25 & \lambda - 6,25 & 11,75 \\ 7,25 & 2,25 & \lambda - 5,75 \end{bmatrix}$$

Temos:

$(\lambda+10)(\lambda-6{,}25)(\lambda-5{,}75)+255{,}5625+287{,}4375$ +54,75($\lambda-5{,}75$) – 26,4375($\lambda+10$) + 50,75($\lambda-6{,}25$).

simplificando chegamos em:

$$\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=0$$

Calculando suas raízes obtivemos: $\lambda_1=-2,\lambda_2=3,\lambda_3=1$.

Assim pudemos calcular os autovetores para a transformação de similaridade:

$$Av_1=\lambda_1 v_1$$

$$\begin{bmatrix}-10 & -3 & 7\\ 18{,}25 & 6{,}25 & -11{,}75\\ -7{,}25 & -2{,}25 & 5{,}75\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2a\\ -2b\\ -2c\end{bmatrix}$$

$$-10a-3b+7c=-2a$$

$$18{,}25a+6{,}25b-11{,}25c=-2b$$

$$-7{,}25a-2{,}25b+5{,}75c=-2c$$

$$Av_2=\lambda_2 v_2$$

$$\begin{bmatrix}-10 & -3 & 7\\ 18{,}25 & 6{,}25 & -11{,}75\\ -7{,}25 & -2{,}25 & 5{,}75\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a\\ 3b\\ 3c\end{bmatrix}$$

$$-10a-3b+7c=3a$$

$$18{,}25a+6{,}25b-11{,}25c=3b$$

$$-7{,}25a-2{,}25b+5{,}75c=3c$$

$$Av_3=\lambda_3 v_3$$

$$\begin{bmatrix}-10 & -3 & 7\\ 18{,}25 & 6{,}25 & -11{,}75\\ -7{,}25 & -2{,}25 & 5{,}75\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$$

$$-10a - 3b + 7c = a$$

$$18{,}25a + 6{,}25b - 11{,}25c = b$$

$$-7{,}25a - 2{,}25b + 5{,}75c = c$$

Resolvendo os sistemas para cada autovalor associado ao seu autovetor conseguimos os seguintes resultados:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2c \\ -3c \\ c \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} c \\ -2c \\ c \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}c \\ c \end{bmatrix}$$

Selecionando c =1, chegamos na seguinte matriz de transformação, e sua inversa:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 0{,}25 & -0{,}75 \\ -1{,}75 & -0{,}75 & 1{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte, encontramos seu novo modelo diagonalizado e aplicado as devidas transformações:

$$\bar{A} = Q^{-1}A\,Q\ ,\ \bar{B} = Q^{-1}B\ ,\ \bar{C} = CQ,\ \bar{D} = D$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 0{,}25 & -0{,}75 \\ -1{,}75 & -0{,}75 & 1{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -10 & -3 & 7 \\ 18{,}25 & 6{,}25 & -11{,}75 \\ -7{,}25 & -2{,}25 & 5{,}75 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 0{,}25 & -0{,}75 \\ -1{,}75 & -0{,}75 & 1{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 12 & 9 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

A fim de provar que ambas representam o mesmo espaço de estados, foi calculado a função de transferência de ambas pelo MATLAB, a partir de

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Ambos resultaram na seguinte Função de Transferência:

$$F(s) = \frac{3s^2 - 48s - 18}{s^3 - 2s^2 - 5s + 6}$$

Código da questão 2:

```
clc;
clear;
close all;


%% Função de Transferência
% Para a primeira representação no espaço de estados

I = eye(3);
A = [-10 -3 7;18.25 6.25 -11.75;-7.25 -2.25 5.75];
B = [1;3;2];
C = [1 -2 4];
[num,den]= ss2tf(A,B,C,0);
F = tf(num,den);

% Exibir a função de transferência
disp('Função de Transferência F:');
[num_F, den_F] = tfdata(F, 'v'); % 'v' para vetor
fprintf('F(s) = (%s) / (%s)\n', poly2str(num_F, 's'), poly2str(den_F, 's'));

%%
% segunda TF
A1 = [-2 0 0;0 3 0; 0 0 1];
B1 = [1/2;-3/2;3];
C1 = [12 9 7/2];
[num1,den1] = ss2tf(A1,B1,C1,0);
F1 = tf(num1,den1);

% Exibir a função de transferência
disp('Função de Transferência F1:');
[num_F1, den_F1] = tfdata(F1, 'v'); % 'v' para vetor
fprintf('F(s) = (%s) / (%s) \n', poly2str(num_F1, 's'), poly2str(den_F1, 's'));
```

Questão 3:

Para a solução desse problema, deve ser levado a seguinte relação em consideração, os autovalores se estiverem no semiplano esquerdo, representam a estabilidade. Visto que eles possuem a característica de serem polos de uma função de transferência, ou seja, um espectro da matriz ($\sigma(A)$) , $polos(F(s)) \subset \sigma(A)$.

No problema é nos fornecido a seguinte representação de variáveis de estados:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & K & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

A partir dela, com o auxílio da programação em MATLAB, obtivemos em quais valores de K o sistema apresentado é estável e um gráfico que relaciona os autovalores em função de K.

Valores de K para um sistema estável:

$$1 \leq K \leq 100$$

Em seguida é apresentado o gráfico dos autovalores em função de K:

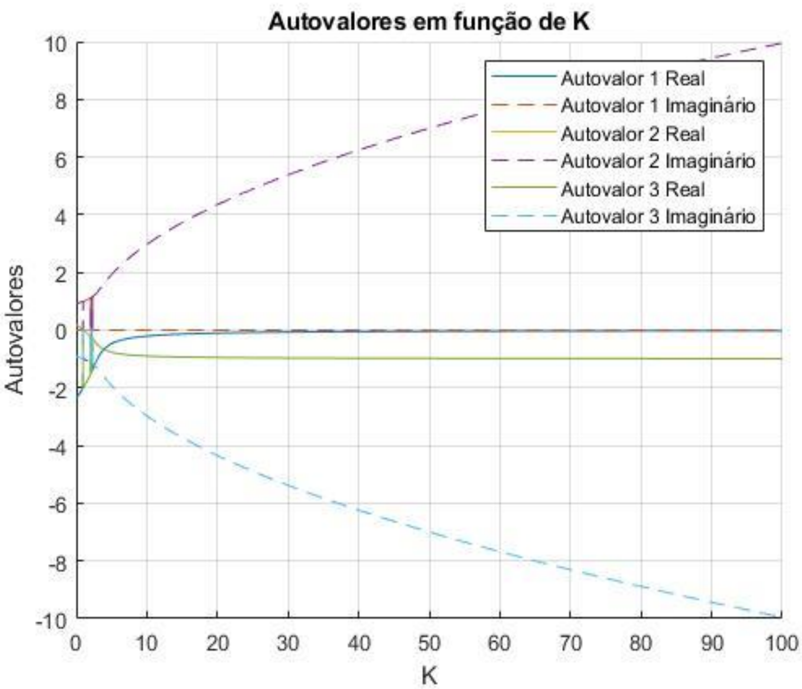

Figura 10: Autovalores em função de K

Com isso, podemos concluir que a partir de autovalores com apenas parte reais negativas temos estabilidade no sistema, sua resposta transitória determinada tanto pela parte real quanto pela parte imaginária representa sua velocidade e a oscilação respectivamente. Assim, quanto maior a parte real (em magnitude) mais rápido é a resposta, e quanto maior sua parte imaginária maior a oscilação, o efeito contrário é válido, ou seja, quanto menor a parte real (em magnitude) mais lento é a resposta, e quanto menor a parte imaginária menos oscilatória.

Código da questão 3:

```
clc;
clear;
close all;

% Definindo o intervalo de K com uma resolução maior
K = linspace(0, 100, 100000);  % Aumentar a resolução para maior precisão

% Calcular os autovalores para cada K
num_autovalores = 3;  % Número de autovalores
autovalores = zeros(length(K), num_autovalores);

autovalores_no_semi_plano_esquerdo = true(size(K));
for i = 1:length(K)
   autovalores(i, :) = calcular_autovalores(K(i));
   % verificar se estão no semiplano esquerdo
   if any(real(autovalores(i, :)) >= 0)
      autovalores_no_semi_plano_esquerdo(i) = false;
   end
end

% Plotar autovalores
figure;
hold on;

% Plotar partes reais e imaginárias dos autovalores individualmente com
legendas específicas
for j = 1:num_autovalores
   plot(K, real(autovalores(:, j)), 'DisplayName', ['Autovalor ' num2str(j) ' Real']);
   plot(K, imag(autovalores(:, j)), '--', 'DisplayName', ['Autovalor ' num2str(j) '
Imaginário']);
end

xlabel('K');
ylabel('Autovalores');
title('Autovalores em função de K');
legend('show');
grid on;
```

```
faixa_de_K = K(autovalores_no_semi_plano_esquerdo);

% Faixa de Valores de K que estão no semiplano esquerdo
disp('Faixa de valores de K para os quais todos os autovalores estão no semiplano esquerdo:');
disp([num2str(min(faixa_de_K)), ' <= K <= ', num2str(max(faixa_de_K))]);

function autovalores = calcular_autovalores(K)
    % Matriz A
    A = [0 1 0; 0 0 1; -2 -K -2];
    autovalores = eig(A);
end
```

Questão 4:

Nessa questão foi analisada em grande parte através do MATLAB, principalmente o cálculo de funções de transferência, matrizes de controlabilidade, simplificações, e resultados de estabilidade.

O problema nos fornece a seguinte representação no espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Em suma, calculamos a matriz de controlabilidade, em seguida, foi obtido a função de transferência não simplificada do movimento do míssil guiado:

$$F(s) = \frac{5s}{s^5 + 0.5s^4 + 0.1s^3}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0{,}5 & 0{,}15 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}15 & -0{,}025 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}1 \end{bmatrix}$$

Calculando o posto da Matriz U

pU = 4 , não controlável.

e a partir dela calculamos a simplificada, a qual retornamos ao espaço de estados e obtemos a nova matriz de controlabilidade.

$$G(s) = \frac{5}{s^4 + 0.5s^3 + 0.1s^2}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} x(t)$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0,15 & 0,15 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,025 \\ 0 & 0 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando o posto da Matriz U_1

pU_1 = 4, controlável.

Por fim, verificou a estabilidade da função de transferência simplificada pelo método de autovalores, e encontramos os seguintes autovalores:

$\lambda_1 = -0,25 + 0,1936i$, $\lambda_2 = -0,25 - 0,1936i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$

Como apresenta em dois polos em zero, não poderíamos afirmar que o sistema é estável, logo plotamos o gráfico de root locus, resposta ao degrau e o diagrama de nyquist, assim chegamos à conclusão que o sistema não é estável.

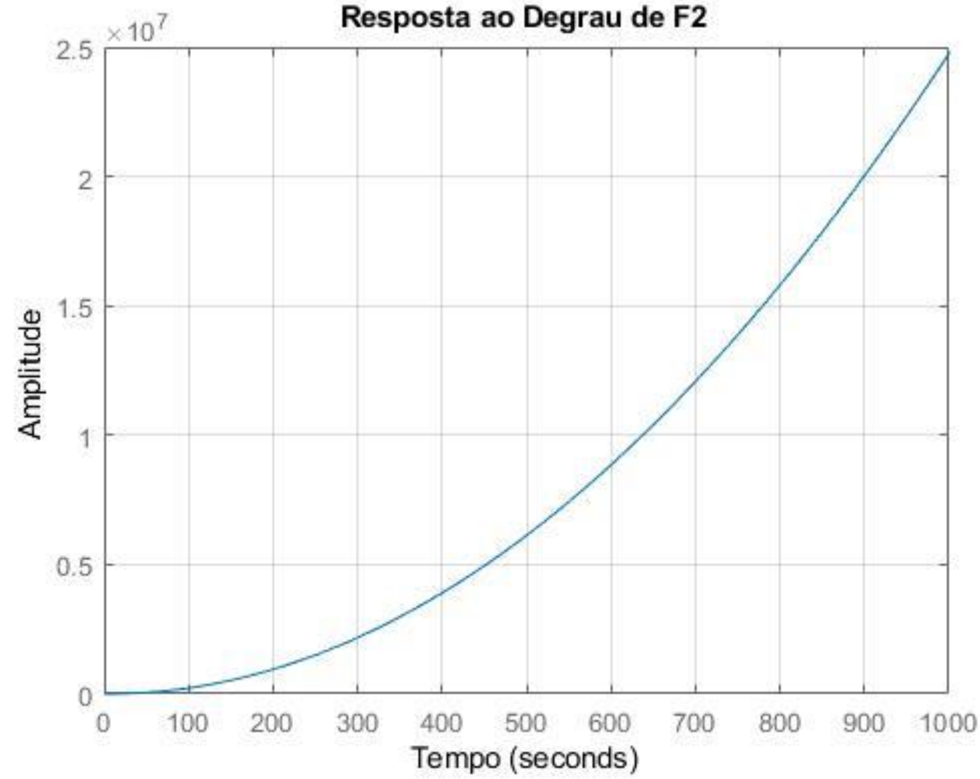

Figura 11: Resposta ao Degrau Função de Transferência Simplificada

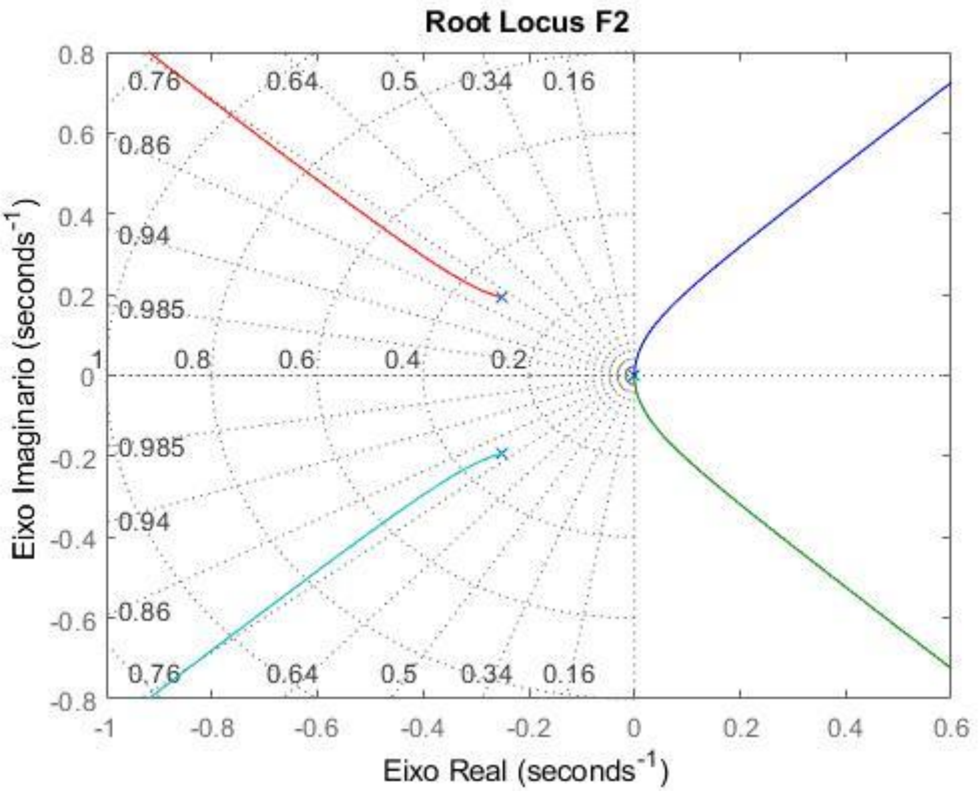

Figura 12: Root Locus Função de Transferência Simplificada

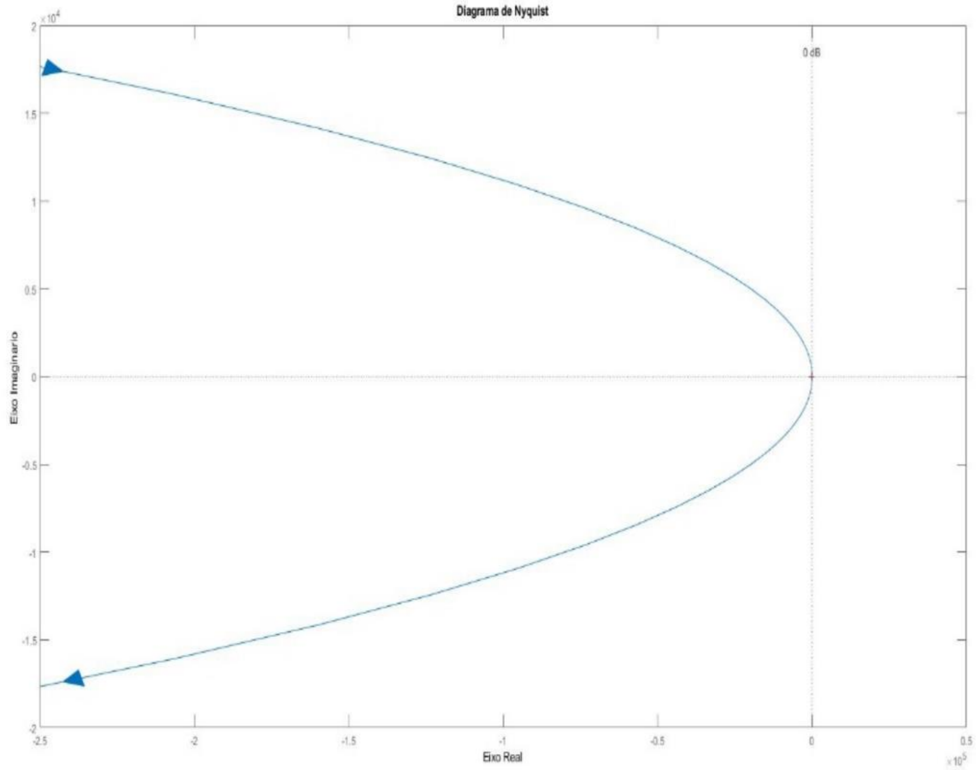

Figura 13: Diagrama de Nyquist Função de Transferência Simplificada.

Letra e)

Com maiores números de variáveis de estado, maiores serão as condições necessárias para a controlabilidade de um sistema, uma vez que todas as variáveis de estado precisam ter uma conexão com a entrada, sejam diretas, ou por intermédio de uma outra variável de estado, o que torna o projeto cada vez mais complexo.

Código da questão 4:

```
clc;
clear;
close all;
syms s;

%% Letra a
% Definir as matrizes do espaço de estados
A = [0 1 0 0 0;
    -0.1 -0.5 0 0 0;
     0.5 0 0 0 0;
     0 0 10 0 0;
     0.5 1 0 0 0];

B = [0; 1; 0; 0; 0];
C = [0 0 0 1 0];
D = 0;

% Matriz de controlabilidade
U = [B A*B A^2*B A^3*B];
disp('Matriz de controlabilidade U:');
disp(U);

% Posto da matriz de controlabilidade
posto = rank(U);
disp('Posto da matriz de controlabilidade:');
disp(posto);

% Verificar se o sistema é controlável
if posto == size(A, 1)
    disp('O sistema é controlável.');
else
    disp('O sistema não é controlável.');
end

%% Letra b
% Calcular a função de transferência a partir do espaço de estados
[num, den] = ss2tf(A, B, C, D);

% Remover termos muito pequenos do numerador
num(abs(num) < 1e-10) = 0;

F = tf(num, den);

numerador_str = poly2str(num, 's');
denominador_str = poly2str(den, 's');
F1 = sprintf('F(s) = %s / %s', numerador_str, denominador_str);
disp('Função de Transferência F(s):');
disp(F1);
```

```
% Simplificar a Função de transferencia
F2 = minreal(F);
[num_simpli, den_simpli] = tfdata(F2, 'v');

% Exibir a função de transferência simplificada
disp('Função de Transferência Simplificada G(s):');
numerador_simpli_str = poly2str(num_simpli, 's');
denominador_simpli_str = poly2str(den_simpli, 's');
F2_simplificada = sprintf('F(s) = %s / %s\n', numerador_simpli_str,
denominador_simpli_str);
disp(F2_simplificada);

[A1,B1,C1,D1] = tf2ss(num_simpli,den_simpli);
% Exibir a representação no espaço de estados
disp('Representação no Espaço de Estados Nova');
disp("A =");
disp(A1);
disp("B =");
disp(B1);
disp("C =");
disp(C1);
disp("D =");
disp(D1);
%% Letra c
% Matriz de controlabilidade
U1 = [B1 A1*B1 A1^2*B1 A1^3*B1];
disp('Matriz de controlabilidade U1:');
disp(U1);

% Posto da matriz de controlabilidade
posto = rank(U1);
disp('Posto da matriz de controlabilidade:');
disp(posto);

% Verificar se o sistema é controlável
if posto == size(A1, 1)
   disp('O sistema é controlável.');
else
   disp('O sistema não é controlável.');
end
%% letra d
autovalores_F2 = eig(F2);
disp(autovalores_F2);

%% verificando a estabilidade
figure();
step(F2);
grid on;
```

```
title('Resposta ao Degrau de F2');
xlabel('Tempo');
ylabel('Amplitude');

figure();
rlocus(F2);
grid on;
title('Root Locus F2');
xlabel('Eixo Real');
ylabel('Eixo Imaginario');



figure();
nyquist(F2);
grid on;
title('Diagrama de Nyquist');
xlabel('Eixo Real');
ylabel('Eixo Imaginario');
```