

图像处理作业 2 —— 逆滤波

本次作业中利用运动模糊和高斯噪声进行图像退化，并利用逆滤波、维纳滤波、低通滤波等进行复原。

1 图像退化

1.1 运动模糊

用 T 表示曝光持续时间， $x_0(t), y_0(t)$ 是图像运动相对原位置在 x 和 y 上的时变分量，

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt$$

其傅里叶变换为

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= F(u, v) \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt = F(u, v) H(u, v) \end{aligned}$$

若假设运动是匀速的，即 $x_0(t) = a\frac{t}{T}, y_0(t) = b\frac{t}{T}$ ，则可求得退化函数

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin [\pi(ua + vb)] e^{-j\pi(ua + vb)} \quad (1)$$

实现中为避免分母为零带来的影响，修改公式为

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + vb) + \varepsilon} \sin [\pi(ua + vb) + \varepsilon] e^{-j\pi(ua + vb)} \quad (2)$$

既保证了 $\pi(ua + vb)$ 为零时取值的正确性，又使得原公式取值为零处变为一个小量，使得进行逆滤波时可以较方便地求 $H^{-1}(u, v)$ 。此外， ε 足够小，得到的 $H(u, v)$ 与 eq. (1) 可认为相同。

取 $a = 0.1, b = -0.1, T = 1$ 对一张图片进行运动模糊的结果为 fig. 1

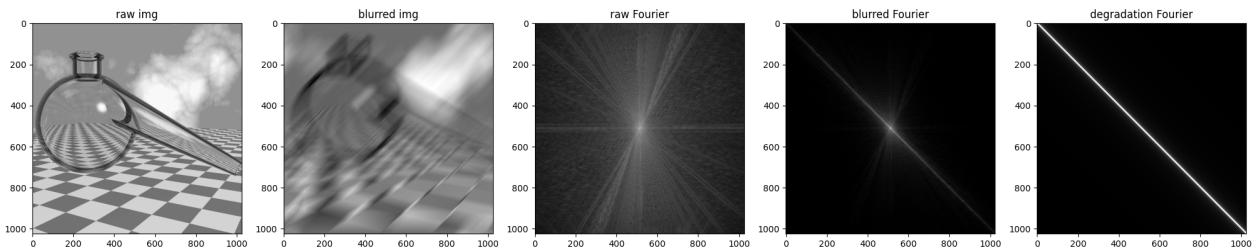


图 1：运动模糊结果。自左至右分别为原图、模糊图、原图频谱、模糊图频谱和 $H(u, v)$ 的谱

1.2 高斯噪声

设原图的方差为 σ^2 , 使用均值为零、方差为分别为 $\sigma^2/10000$ 、 $\sigma^2/100$ 、 σ^2 的高斯噪声加到运动模糊后的图像, 得到的结果为 fig. 2

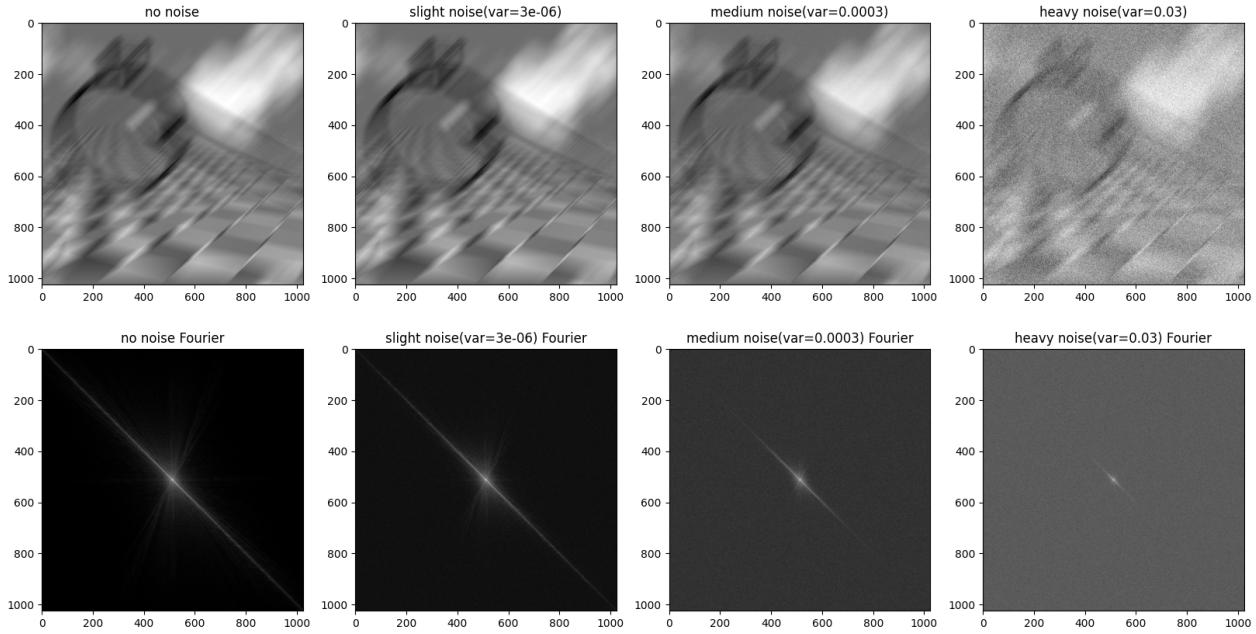


图 2: 加噪结果. 自左至右分别为不加噪声、 $\sigma^2/10000$ 噪声、 $\sigma^2/100$ 噪声、 σ^2 噪声对应的图像和频谱

2 逆滤波

2.1 直接逆滤波

设模糊并加噪后的频域为 $G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$, 则直接逆滤波得到的估计图像

$$\hat{f}(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{G(u, v)}{H(u, v)} \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)} \right]$$

在 $H(u, v)$ 很小或为零的地方, 噪声将带来巨大的影响. fig. 3的结果表明, 即使噪声的功率只有原图的万分之一, 也难以通过直接逆滤波恢复图像.

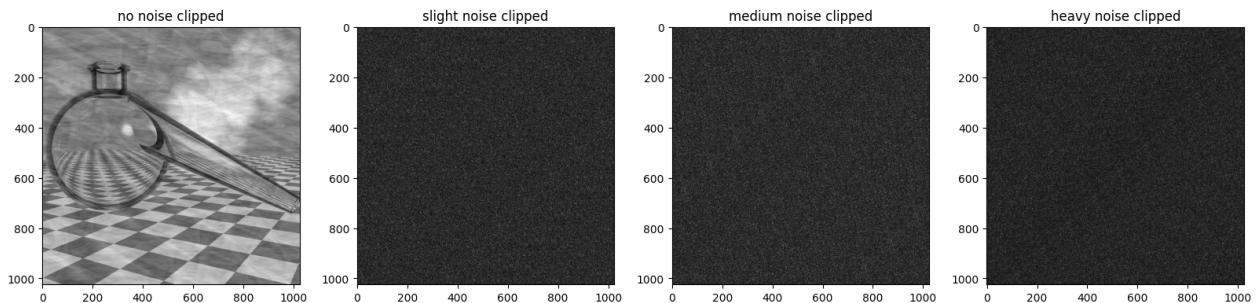


图 3: 直接逆滤波结果. 自左至右分别为对不加噪声、 $\sigma^2/10000$ 噪声、 $\sigma^2/100$ 噪声、 σ^2 噪声进行直接逆滤波得到的图片

2.2 逆滤波加低通滤波

考虑到随机产生的高斯噪声是高频的, 可以在逆滤波的基础上增加一个低通滤波器以减少噪声的影响. 设截止频率为 γ , 则只保留取值在 $(-\gamma, \gamma)$, 区间大小为 2γ 的频率范围.

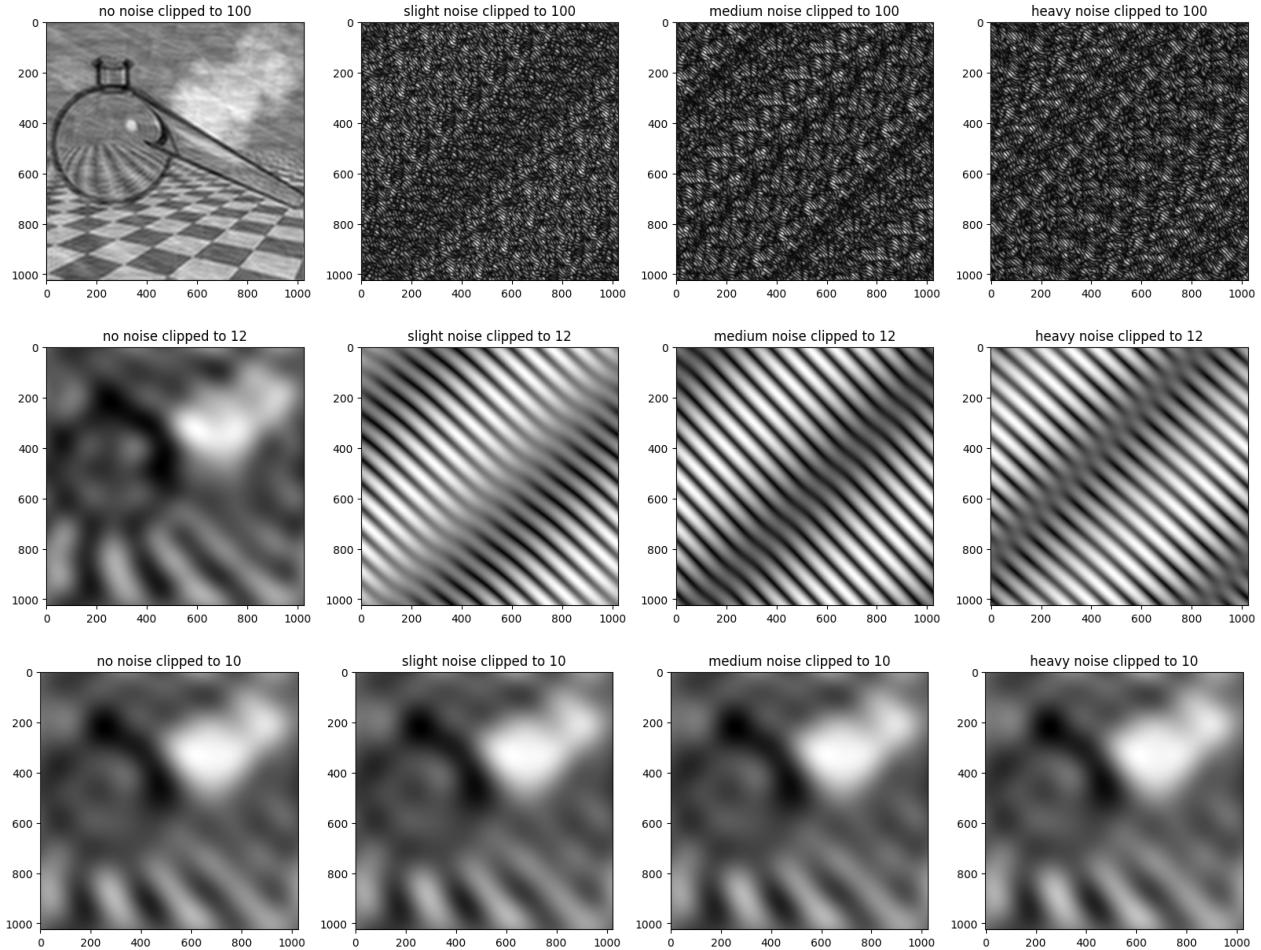


图 4: 逆滤波加低通滤波的结果. 自左至右分别为不加噪声、 $\sigma^2/10000$ 噪声、 $\sigma^2/100$ 噪声、 σ^2 噪声对应的图像, 自上至下是 $2\gamma = 100$ 、 $2\gamma = 12$ 、 $2\gamma = 10$ 对应的效果

fig. 4 的结果表明, 在 $2\gamma = 100$ 时, 噪声仍然产生了巨大影响, 在 $2\gamma = 12$ 时产生了周期性条纹, 在 $2\gamma = 10$ 时各加噪图像滤波后得到相似的结果 (即对原图的模糊). 这个现象的原因在于设定运动模糊的参数时 a 和 b 绝对值均为 0.1, 导致 eq. (1) 中 $\sin [\pi(ua + vb)]$ 这一项在 $u - v = \pm 10, \pm 20, \dots$ 处有取零的机会, 噪声在这些位置会被放大. $2\gamma = 10$ 时规避了这种可能性, 减少了噪声的影响, $2\gamma = 12$ 时只在 $u = -v = \pm 5$ 时受到噪声影响, 故产生规律的条状花纹, $2\gamma = 100$ 时噪声影响不断增大, 但仍能看出图案排布有一定的规律性和方向性, 与原图的运动方向一致.

2.3 改进的逆滤波

由 section 2.2 中的分析可知, 直接逆滤波难以复原图像的重要原因在于, 噪声在 $H(u, v)$ 为零处做除法的比值为无穷, 也即产生了极大影响, 因此, 一个简单的改进逆滤波的方法为

$$\hat{f}(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{G(u, v)}{H(u, v) + \varepsilon} \right] \quad (3)$$

此处的 ε 相较 eq. (2) 中的 ε 大了 6~8 个数量级, 约为 0.01~1, 可以较为有效地抑制不太大的噪音, 但也会降低图像的亮度.

fig. 5 展现了此方法的结果, 当 $\varepsilon = 0.01$, 已经可以恢复出小噪音图像, 可利用空间域灰度变换恢复其亮度, 而对于强度更大的噪音, 需要更大的 ε 以达到相同的去噪效果, 但随着 ε 的数量级与 $H(u, v)$ 相近时, 会抑制恢复运动模糊的能力, 因此 fig. 5 中 ε 取到 1 时, 虽然可以恢复出图像, 但也产生了显著的重影.

2.4 改进逆滤波加低通滤波

为了在保持 ε 与 $H(u, v)$ 相比仍然很小的情况下, 能够处理更大的噪音, 可以沿用 section 2.2 的想法, 在原有滤波器的基础上加一个低通滤波器. fig. 6 展示了使用 $2\gamma = 100$ 进行低通滤波的结果. 可以看出低通滤波确实带来了更好的效果, 使得加入稍强噪音的图像也能得到复原.

3 维纳滤波

3.1 直接维纳滤波

维纳滤波估计图像的公式为

$$\hat{f}(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{G(u, v)}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right]$$

与 eq. (3) 中利用加法强行消除 $H(u, v) = 0$ 的影响相比, 维纳滤波通过乘法消除这种影响, 使得滤波后的图像在 $H(u, v) = 0$ 处仍为 0; 不仅大幅降低了噪音的影响, 也更充分地利用了退化函数本身的性质. fig. 7 显示了维纳滤波的结果, 表现优于改进的逆滤波, 但在中等幅度噪音的恢复上过暗或过模糊, 略微不如 fig. 6 中使用 $\varepsilon = 0.01$ 的效果.

3.2 维纳滤波加低通滤波

section 2.2, section 2.4 均表明, 在复原滤波器后加低通滤波可以取得更好的效果. fig. 8 展示了在维纳滤波后加 $2\gamma = 100$ 的低通滤波的结果, 可以发现这种方法能够得到最优效果.

此外, fig. 9 还展示了低通滤波截止频率和滤波形状对维纳滤波效果的影响.

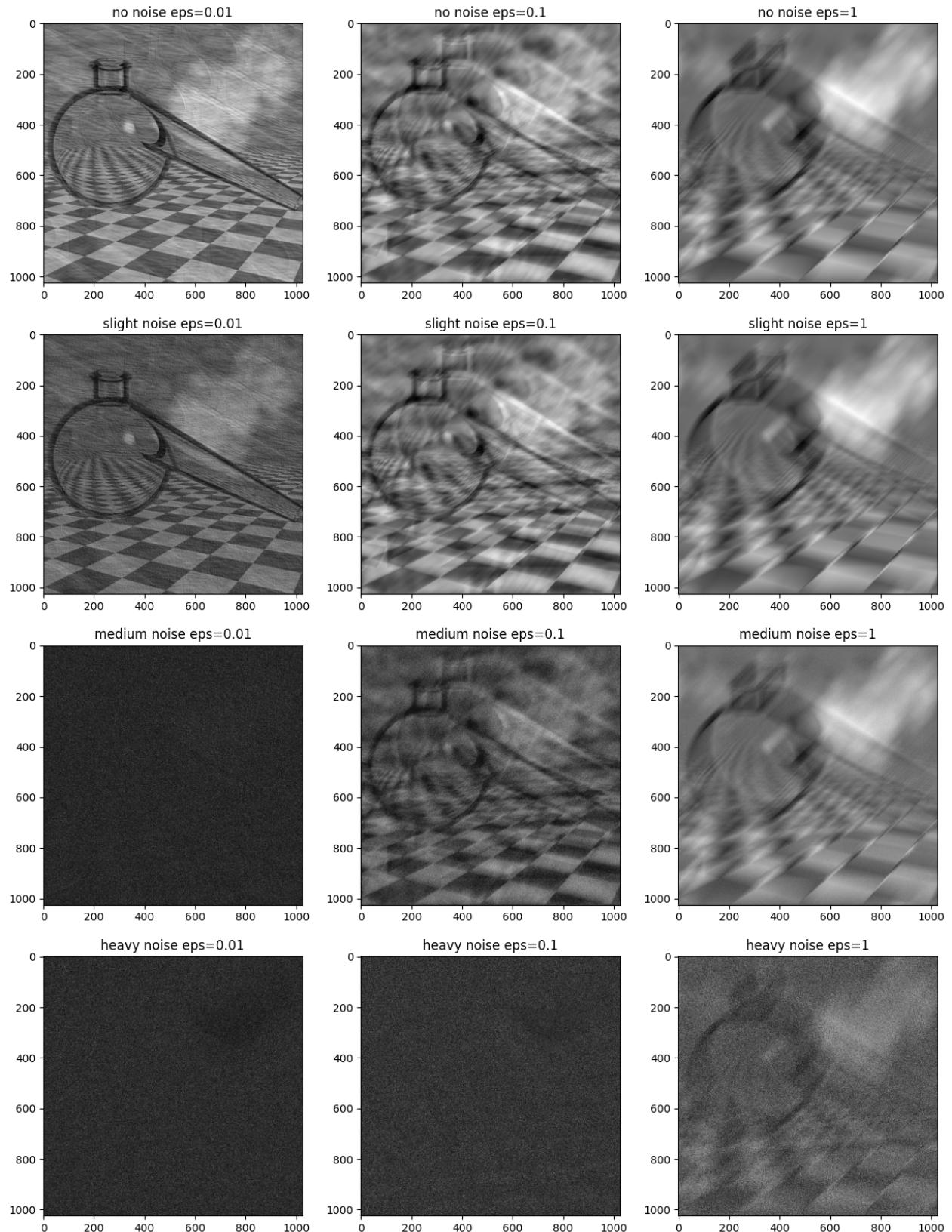


图 5: 改进逆滤波的结果. 自上至下分别为不加噪声、 $\sigma^2/10000$ 噪声、 $\sigma^2/100$ 噪声、 σ^2 噪声对应的图像, 自左至右是 $\varepsilon = 0.01$ 、 $\varepsilon = 0.1$ 、 $\varepsilon = 1$ 对应的效果

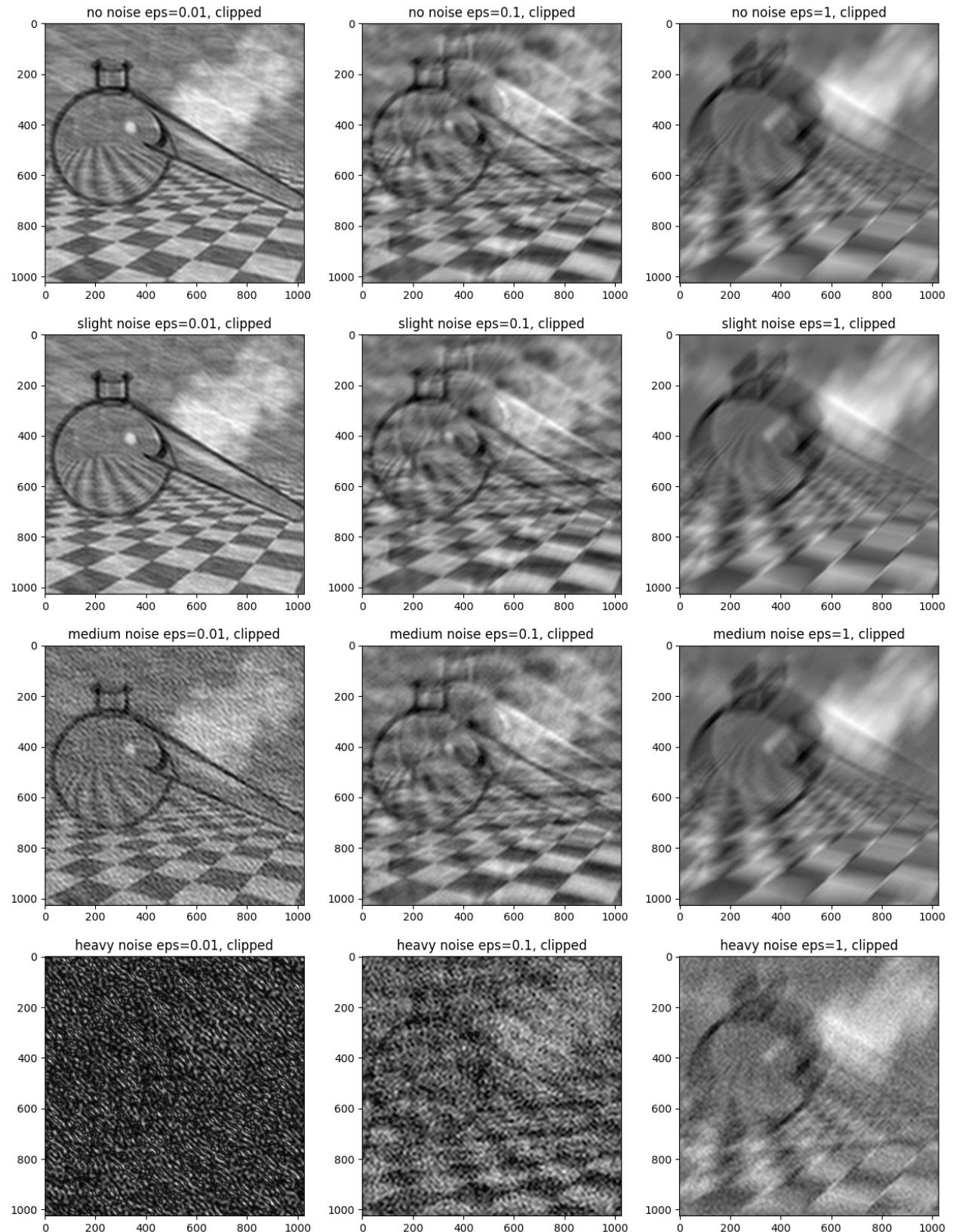


图 6: 改进逆滤波并使用 $2\gamma = 100$ 低通滤波的结果. 自上至下分别为不加噪声、 $\sigma^2/10000$ 噪声、 $\sigma^2/100$ 噪声、 σ^2 噪声对应的图像, 自左至右是 $\varepsilon = 0.01$ 、 $\varepsilon = 0.1$ 、 $\varepsilon = 1$ 对应的效果

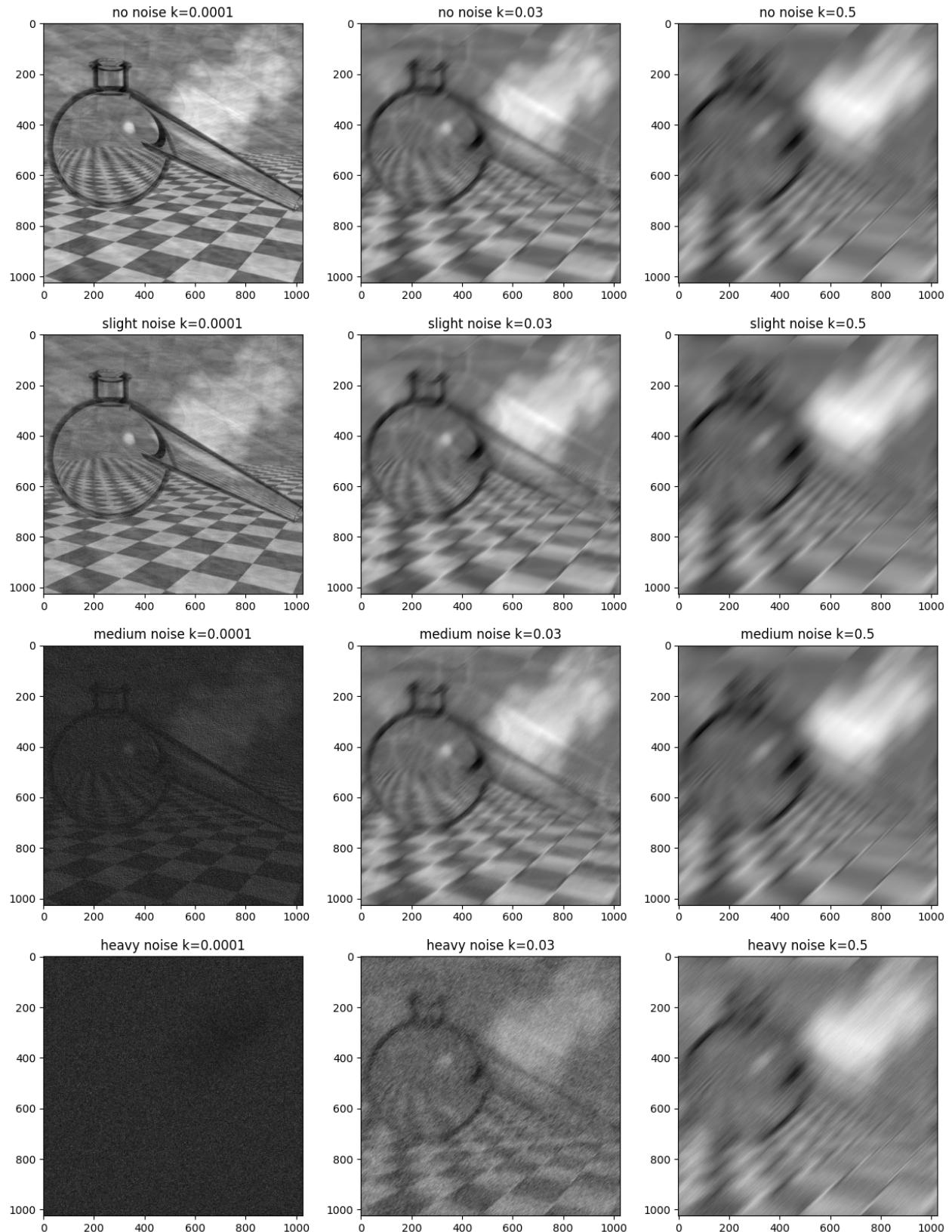


图 7: 维纳滤波的结果. 自上至下分别为不加噪声、 $\sigma^2/10000$ 噪声、 $\sigma^2/100$ 噪声、 σ^2 噪声对应的图像, 自左至右是 $k = 0.0001$ 、 $k = 0.03$ 、 $k = 0.5$ 对应的效果

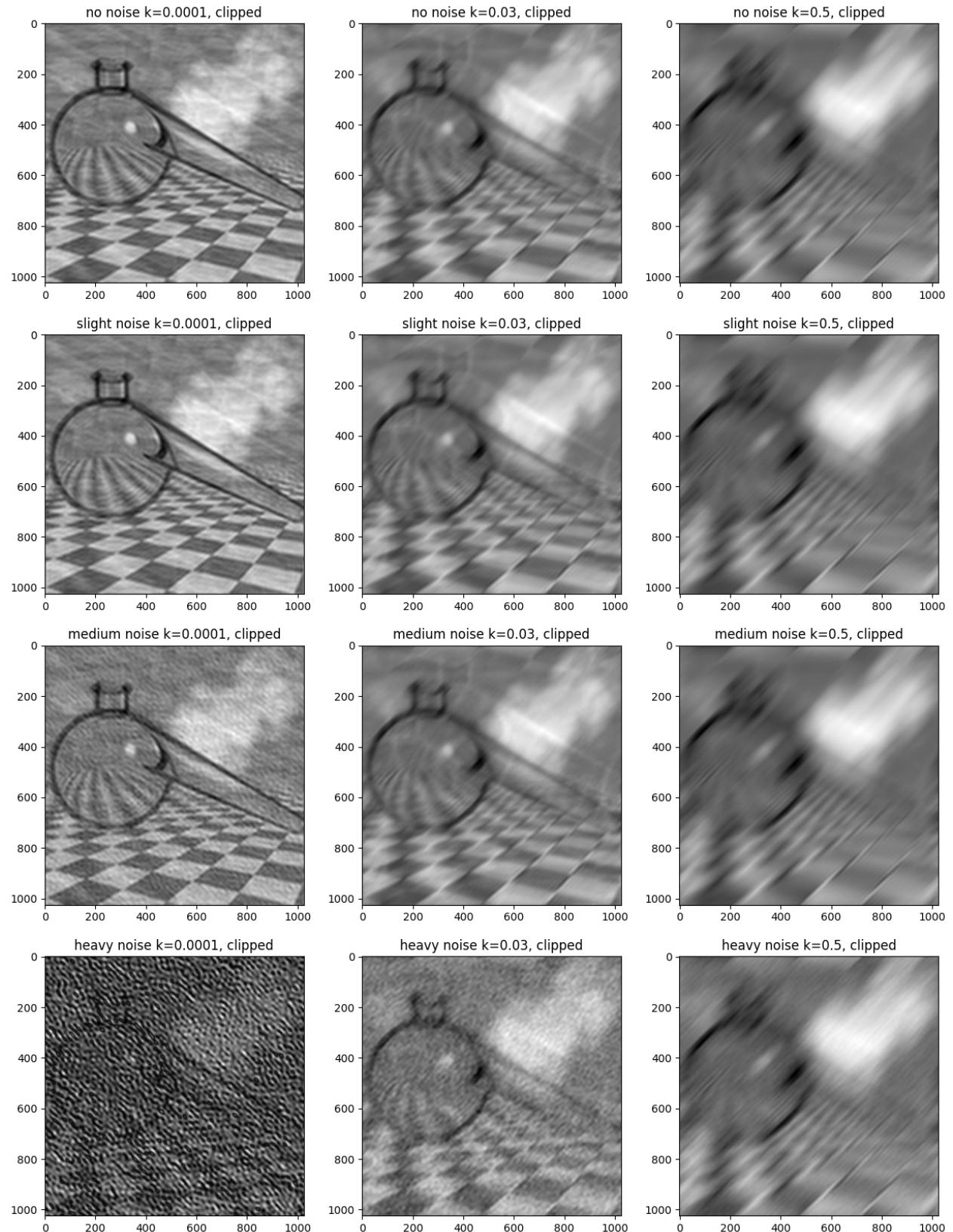


图 8: 维纳滤波并使用 $2\gamma = 100$ 低通滤波的结果. 自上至下分别为不加噪声、 $\sigma^2/10000$ 噪声、 $\sigma^2/100$ 噪声、 σ^2 噪声对应的图像, 自左至右是 $k = 0.0001$ 、 $k = 0.03$ 、 $k = 0.5$ 对应的效果

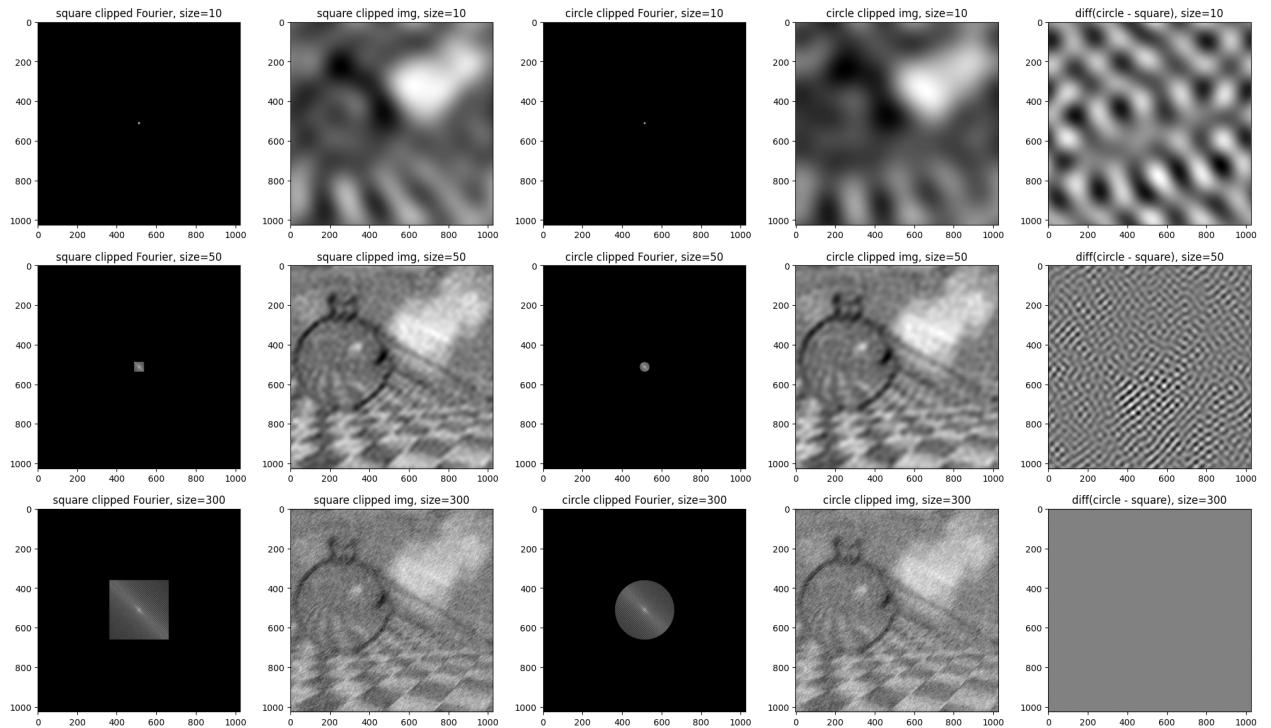


图 9: 使用 $k = 0.03$ 的维纳滤波器和截止频率 2γ 分别为 10、50、300 低通滤波器对强噪声图像复原的结果. 自左至右为滤波器形状为方形和圆形时的频谱图和复原图, 以及二者复原得到图像的差值. 当截止频率较高时, 二者复原出的图像较为接近; 而截止频率较低时, 图像差值展现出斑状排列模式.