Lab 4 Animation

Task 1: Inverse Kinematics

实现思路与结果

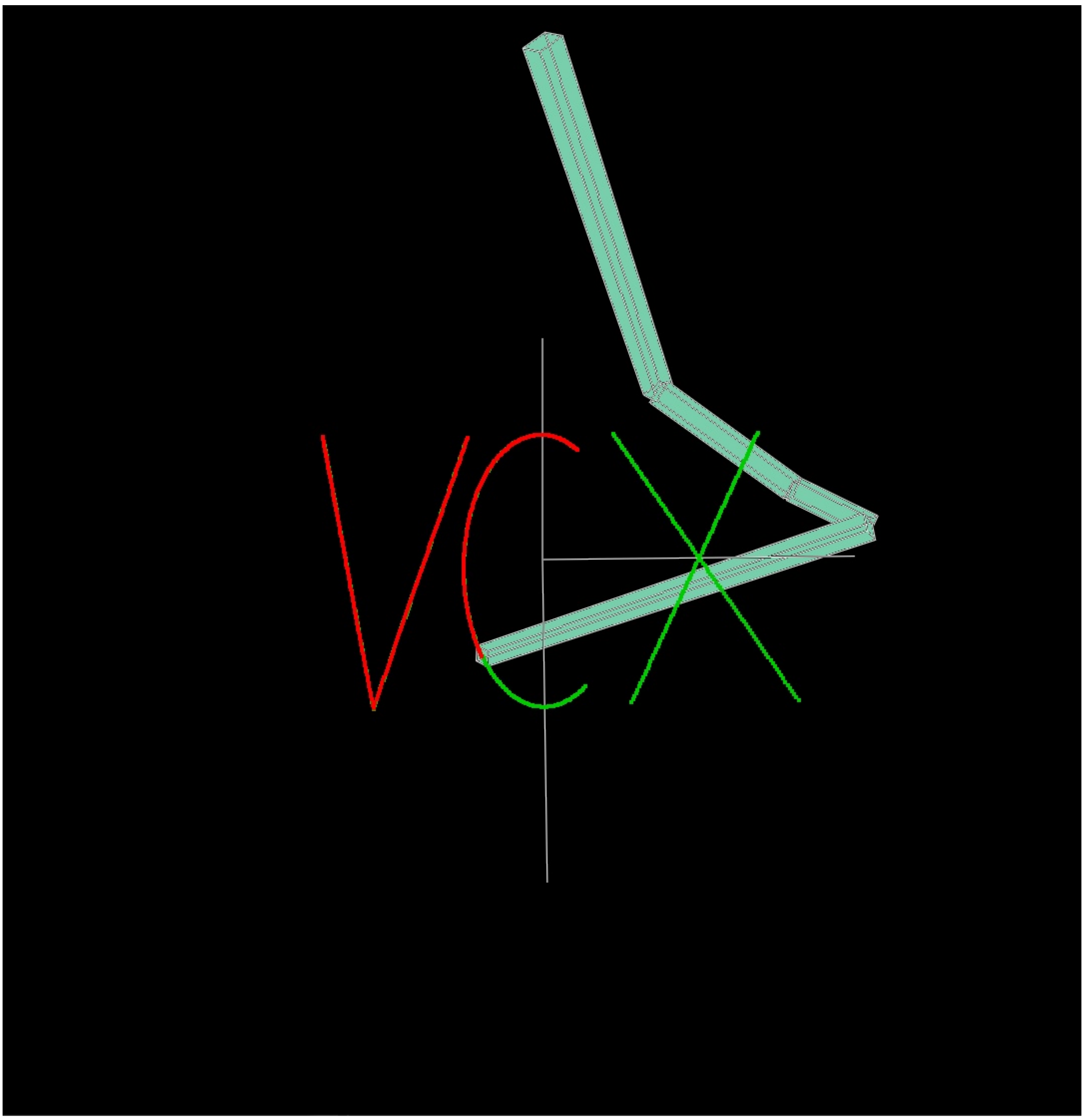
Sub-Task 1: Forward Kinematics 关节的全局旋转为相对父关节旋转与父关节全局旋转之积。

关节的全局位置为父关节的全局位置加上相对父关节的偏移量，偏移量为初始偏移量经过相对父关节的旋转。

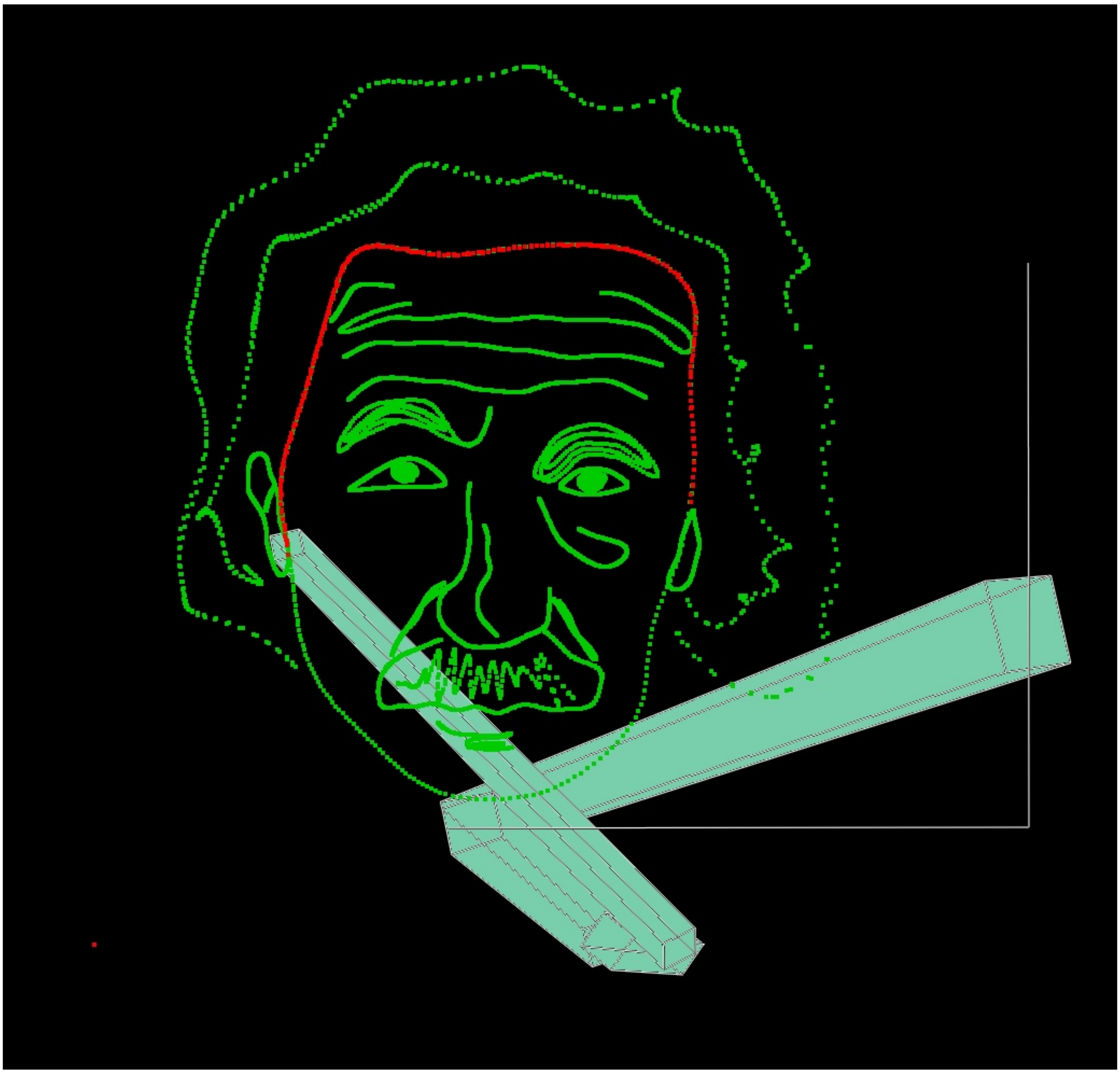
Sub-Task 2: CCD IK 在一个Iteration内，遍历所有非末端关节，利用(关节到末端关节)和(关节到目标)的两个向量计算相应的旋转，并将该旋转应用到关节上。

Sub-Task 3: FABR IK 在一个Iteration内，首先逆向遍历所有关节，将p_n置于target处，记为p'_n，计算$dir = \mathrm{norm}(\overrightarrow{p'_n p_{n-1}})$，将$p_{n-1}$置于$p'_{n-1} = p'_n + dir * ||p_n p_{n-1}||$处，直到将$p_0$置于$p'_0$处；在进行正向遍历，将$p'_0$置于$p''_0 = p_0$处，进行类似的处理，直到将$p'_n$置于$p''_n$处。不断迭代至迭代结束或所得的$p_n$与$\mathrm{target}$足够接近。

Sub-Task 4: Customized Curve 效果如下。



Sub-Task 4.1 设置threshold，当相邻两个点间距过大时在其中进行插值；当响铃两个点间距过小时舍弃其中一个。效果如下。



问题回答

Q1. 如果目标位置太远，无法到达，IK 结果会怎样?

A1. 将形成从根关节到目标位置的直线。

Q2. 比较 CCD IK 和 FABR IK 所需要的迭代次数。

A2. FABR IK 迭代次数少得多。

Q3. 由于 IK 是多解问题，在个别情况下，会出现前后两帧关节旋转抖动的情况。怎样避免或是缓解这种情况?

A3. 在多解中寻找与上一个情况最相近的解。

Task 2: Mass-Spring System

（实现时未考虑原有的 `Damping`， 也即力只有重力和弹簧的胡克弹力）

公式推导参考论文Fast Simulation of Mass-Spring Systems。

设系统包含n个节点，将这n个节点的位置用$\mathbf{q}\in\mathbb{R}^{3n}$表示。则隐式欧拉法的方程为

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{t+\Delta t}&=\mathbf{v}_t+\Delta t\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{q}_{t+\Delta t})\\ \mathbf{q}_{t+\Delta t}&=\mathbf{q}_t+\Delta t\mathbf{v}_{t+\Delta t}\end{aligned}$$

其中$\mathbf{M}=\mathrm{diag}\{m_1,\cdots,m_n\}\otimes\mathbf{I}_{3\times3}$。记$\mathbf{x}=\mathbf{q}_{t+\Delta t}$，$\mathbf{y}=\mathbf{q}_t+\Delta t\mathbf{v}_t$，整理得

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\Delta t^2\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

设系统能量为$E=E_{\text{ext}}+E_{\text{spring}}$，则$\mathbf{f}(\mathbf{x})=-\nabla E(\mathbf{x})$，令

$$g(\mathbf{x})=\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\Delta t^2E(\mathbf{x})$$

则$\mathbf{M}(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\Delta t^2\mathbf{f}(\mathbf{x})$等价于$\nabla_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x})=\mathbf{0}$，也即所求的$\mathbf{x}$是$g(\mathbf{x})$的极值点。将$g(\mathbf{x})$化简

$$
\begin{aligned}
g(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\mathbf{T}}\mathbf{M}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \Delta t^2(E_{\text{ext}} + E_{\text{spring}}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\mathbf{T}}\mathbf{M}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \Delta t^2 \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + \Delta t^2 \sum_{i=1}^{s} \frac{k_i}{2}(||\mathbf{p}_{i,1}-\mathbf{p}_{i,2}|| - r_i)^2
\end{aligned}
$$

其中s为弹簧数目，$\mathbf{p}_{i,1}$和$\mathbf{p}_{i,2}$为第i个弹簧两端的质点的位置，r_i为弹簧原长度。而对于$r \geq 0$，有$(||\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|| - r)^2 = \min\limits_{||\mathbf{d}||=r} ||(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) - \mathbf{d}||^2$，在$\mathbf{d} = \dfrac{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}{||\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2||} r$时取到极值，故

$$
\begin{aligned}
g(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\mathbf{T}}\mathbf{M}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \Delta t^2 \mathbf{f}_{\text{ext}}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + \Delta t^2 \sum_{i=1}^{s} \frac{k_i}{2} \min_{\mathbf{d}_i} ||\mathbf{p}_{i,1}-\mathbf{p}_{i,2}-\mathbf{d}_i||^2 \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(\mathbf{M}+\Delta t^2\mathbf{L})\mathbf{x} - \Delta t^2 \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{J}\mathbf{d} - \mathbf{x}^{\mathbf{T}}(\mathbf{M}\mathbf{y} + \Delta t^2 \mathbf{f}_{\text{ext}}) + \text{Constant}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{L} = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \mathbf{A}_i \mathbf{A}_i^{\mathbf{T}}\right) \otimes \mathbf{I}_{3\times3} \in \mathbb{R}^{3n\times3n}, \quad && \mathbf{J} = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \mathbf{A}_i \mathbf{S}_i^{\mathbf{T}}\right) \otimes \mathbf{I}_{3\times3} \in \mathbb{R}^{3n\times3s} \\
&\mathbf{A}_{i,j} = \begin{cases} 1, & j = i_1 \\ -1, & j = i_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^n, && \mathbf{S}_{i,j} = \delta_{i,j}, \quad \mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^s \\
&\mathbf{d} = (\mathbf{d}_1, \cdots, \mathbf{d}_s) \in \mathbb{R}^{3s}, && \mathbf{d}_i = \frac{\mathbf{p}_{i,1}-\mathbf{p}_{i,2}}{||\mathbf{p}_{i,1}-\mathbf{p}_{i,2}||} r_i
\end{aligned}
$$

于是

$$
\nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff (\mathbf{M}+\Delta t^2\mathbf{L})\mathbf{x} = \Delta t^2 \mathbf{J}\mathbf{d} + \mathbf{M}\mathbf{y} + \Delta t^2 \mathbf{f}_{\text{ext}} \iff \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{b}
$$

只需解出$\mathbf{x}$即得各质点新的位置。

最终实现的单帧效果如下。