

## Homework 2

请在北太天元（或 MATLAB 或 octave）上完成以下作业：

1. 给定如下  $5 \times 5$  矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 200 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 180 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0.002 \end{pmatrix},$$

(1) 求矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值  $d_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ , 按绝对值从大到小排列) 和相应的特征向量  $\mathbf{v}_i$ , 记  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5]$ , 并求  $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$ ;

(2) 利用 (1) 中所得  $\mathbf{A}$  的特征值分解 ( $\mathbf{A} = \mathbf{VDW}$ ,  $\mathbf{D} = \text{diag}([d_1, \dots, d_5])$ ), 求  $\mathbf{A}^3$  和  $e^{\mathbf{A}}$  ( $e^{\mathbf{A}} := \mathbf{V} * \text{diag}([e^{d_1}, \dots, e^{d_5}]) * \mathbf{W}$ );

(3) 令  $\mathbf{w}_i^\top$  为  $\mathbf{W}$  的第  $i$  行, 求  $\mathbf{A}$  的秩 1 分解, 即输出五个秩 1 矩阵 ( $d_i \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^\top$ ,  $i = 1, \dots, 5$ );

(4) 求  $\mathbf{A}$  的三个低秩逼近:  $\mathbf{A}_1 = d_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{w}_1^\top$ ,  $\mathbf{A}_2 = \sum_{i=1}^2 d_i \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^\top$ ,  $\mathbf{A}_3 = \sum_{i=1}^4 d_i \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^\top$ ; 并计算  $\text{norm}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_1)$ ,  $\text{norm}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_2)$  和  $\text{norm}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_3)$ .

提示: (i) 输出数值结果即可, 不用精确写出;

(ii) 此题建议大家先参考卢老师的视频: ”数值方法第 7 次作业的点评, 还讲了北太天元的 `diag` 和 `sort` 命令的使用”.