Bidirectional Path Tracing

> 写后感：
>
> 混合了rayCasting和pathTracing，理解公式很复杂，但公式推导完后和前面的PT和MIS内容高度重合，也算比较好理解。简单理一下思路：
>
> 1. 光源出发和相机出发两条路径，各生成 n_L 和 n_E 长度的路径；
> 2. 从中分别随机截取 s 和 t 长度的子路径组合为长度为 $k=s+t-1$ 的路径 $\overline{x}_{s,t}$
> 3. 将路径 $\overline{x}_{s,t}$ 作为一次PT的采样结果进行计算，注意：光子子路径能逆是因为光路可逆。
> 4. 重复几次第2步，目的是采样，实际上使用遍历所有 s 和 t 的可能，不使用随机采样 s 和 t。
>
> 但推完后可以明显感觉到它的实现难度较高。
>
> - 路径的起始点计算麻烦，例如第一个光子顶点给第一个采样顶点赋值时，且恰逢相机需要大光圈时。这部分计算需要拆开额外计算。
> - 当路径比较特殊，例如采样路径第二个点就是光源、光子路径第二个点也是光源、光子路径没有第二个点，等等，需要做特殊处理；

1. Introduction

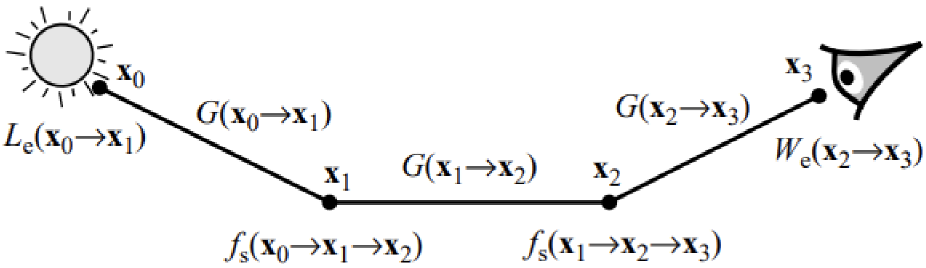
回顾路径积分，公式可被描述为：

$$I_j=\int_\Omega f_j(\overline{x})d\mu(\overline{x})$$

其中：

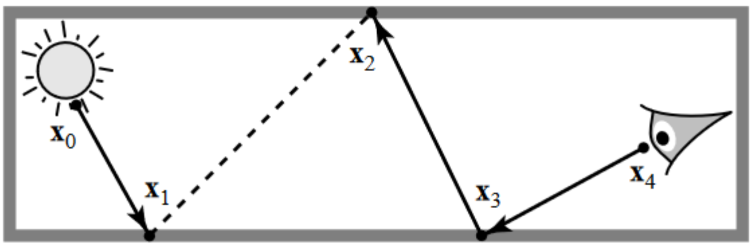
- $\overline{x}=\mathbf{x_0...x_k}$ 是一条采样路径；
- Ω 是路径的集合；
- μ 是辐射面积测量量，$d\mu(\overline{x})=dA(\mathbf{x}_0)...dA(\mathbf{x}_k)$即路径上传输过来的辐射度辐射到物体面上微小面积上积累的面积；
- f_j 是度量贡献函数，即积累的度量有多少对结果有贡献：

$$\begin{aligned}f_j(\overline{x})=&L_e(\mathbf{x}_0\rightarrow\mathbf{x}_1)G(\mathbf{x}_0\leftrightarrow\mathbf{x}_1)W_e^{(j)}(\mathbf{x}_{k-1}\rightarrow\mathbf{x}_k)\\&\prod_{i=1}^{k-1}f_s(\mathbf{x}_{i-1}\rightarrow\mathbf{x}_i\rightarrow\mathbf{x}_{i+1})G(\mathbf{x}_i\leftrightarrow\mathbf{x}_{i+1})\end{aligned}$$



> $W_e(\mathbf{x} \to \mathbf{x}')$ 表示从 $\mathbf{x}'$ 到 $\mathbf{x}$ 的辐射度的重要程度。
>
> 为了方便理解，你可以认为有变化的 W_e 等价于一个大光圈镜头，$W_e \equiv 1$ 等价于小孔成像（孔洞无穷小，且不具有衍射效应）。后者是大多数引擎使用的定义，但若你需要实现一个刀锐奶化，前面的定义更适合。

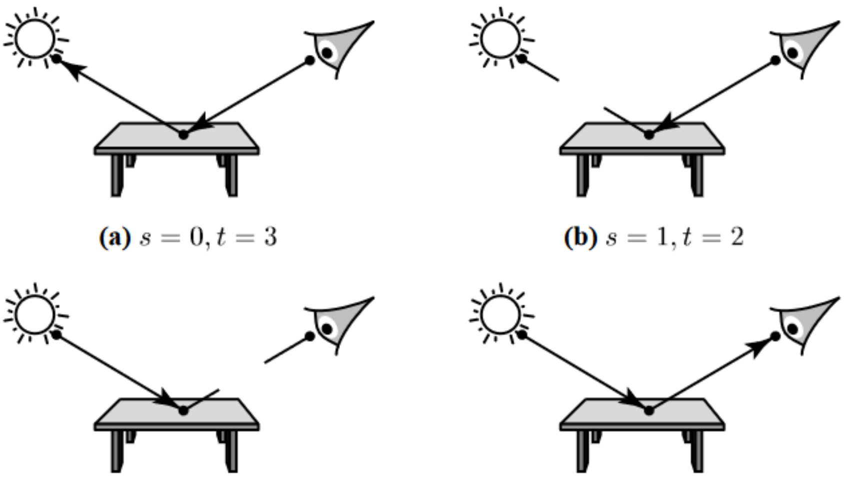
BDPT是一系列方法的集合，它也可以很好地适配MIS等方法。BDPT生成两个光路：从光源出发的光路和从眼睛出发的光路。



在这个实例中，过程可被描述为如下：

1. 随机一个光源点 $\mathbf{x}_0$；
2. 根据 Ray Casting 生成一个光子路径 $\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1$；
3. 根据 Path Tracing 生成一条从眼睛出发的采样路径 $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$；
4. 通过BDPT的光传输算法混合上面两个路径的结果作为采样结果。

一般来说，生成 s 深度的光子路径，t 深度的采样路径，一共 $k = s + t - 1$ 深度的路径。对于深度为 k 的路径，存在 $k + 2$ 种不同的采样分布。



(a) $s = 0, t = 3$ **(b)** $s = 1, t = 2$

(c) $s = 2, t = 1$ **(d)** $s = 3, t = 0$

对于 $k=2$ 的BDPT，有四种组合。a 和 d 是退化结果。b可以运行得很好，c和d在光源具有强方向性时很容易退化为有偏估计方法（c：Photon Mapping）

定义一个生成 s 和 t 相关的概率密度函数 $p_{s,t}$ ，则深度为 k 的路径。采用MIS后吗，采样它所有组合下的结果的公式可简单表示为：

$$F=\sum_{s\geq 0}\sum_{t\geq 0} w_{s,t}(\overline{x}_{s,t})\frac{f_j(\overline{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\overline{x}_{s,t})} \tag{1}$$

1.1. Efficiently generating the samples

若每次都要计算 s 和 t 后再进行采样，效率会比较低。因此实际中采用如下优化算法：

1. 生成一条包含 n_L 个顶点的光源子路径；
2. 生成一条包含 n_E 个顶点的采样子路径；
3. 从中分别截取 s 和 t 长度子路径作为一次 $p_{s,t}$ 的采样结果；

定义一组基于采样分布 $p_{s,t}$ 的采样路径：

$$\overline{x}_{s,t}=\mathbf{y}_0\ldots\mathbf{y}_{s-1}\mathbf{z}_{t-1}\ldots\mathbf{z}_0$$

其中：

- $\mathbf{y}_0$ 为光源起点，$\mathbf{z}_0$ 为镜头起点；
- $0\leq s\leq n_L$, $0\leq t\leq n_E$
- $\mathbf{y}_{s-1}$ 和 $\mathbf{z}_{t-1}$ 称为连接顶点，$\mathbf{y}_{s-1}\mathbf{z}_{t-1}$ 称为连接边。

连接边之间是相互可见的，即两点之间没有任何遮挡物。

> 不难发现，构建长度为 k 的路径，实际可以得到非常多的连接边，即一次采样得到非常多条有效路径。

2. Mathematical formulation

上述BDPT公式(1)描述了一条由 $p_{s,t}$ 生成的光路 $\overline{x}_{s,t}$ 上进行采样的结果，定义贡献值为：

$$C_{s,t}\equiv w_{s,t}(\overline{x}_{s,t})\frac{f_j(\overline{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\overline{x}_{s,t})}$$

则BDPT公式(1)可简写为：

$$F=\sum_{s\geq 0}\sum_{t\geq 0} C_{s,t}$$

再定义无权重贡献函数（unweighted contribution）：

$$C^*_{s,t}\equiv\frac{f_j(\overline{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\overline{x}_{s,t})}$$

$C^*_{s,t}$，$C_{s,t}$ 可简写为如下点乘形式：

$$\begin{aligned} C^*_{s,t} &= \alpha^L_s c_{s,t} \alpha^E_t \\ C_{s,t} &= w_{s,t} C^*_{s,t} \end{aligned} \tag{2}$$

其中：

Symbol	Description
α^L_s	光线子路径的测量量
α^E_t	采样子路径的测量量
$c_{s,t}$	连接边$y_{s-1}z_{t-1}$的BSDF和G值
$w_{s,t}$	权重函数

2.1. The density $p_{s,t}$

路径概率密度函数表示为 $p_{s,t} \equiv p_{s,t}(\overline{x}_{s,t})$。由于顶点相互独立，因此这个路径的概率密度等于路径各个顶点的概率密度 $P_A(\mathbf{x}_i)$ 的累乘结果。对于路径端点来说，可以直接得到 $P_A(\mathbf{y}_0)$ 和 $P_A(\mathbf{z}_0)$。对于中间顶点，从 $\mathbf{x}$ 向 $\mathbf{x}'$ 的采样结果得到，用 $P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x} \to \mathbf{x}')$ 表示该采样方向的投影立体角分布。则 $P_A(\mathbf{x})$ 可表示为：

$$P_A(\mathbf{x}) = P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x} \to \mathbf{x}') G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}')$$

其中，几何表达式为：

$$G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') = V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') \frac{|\cos\theta_o \cos\theta'_i|}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}'||^2},$$
$$where\ V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') = \begin{cases} v \in (0,1], & if\ \mathbf{x}\ and\ \mathbf{x}' mutually\ visiable. \\ 0, & else. \end{cases}$$

定义符号 p^L_i 和 p^E_i 分别表示光子子路径和采样子路径的前 i 个顶点的概率密度：

$$\begin{aligned} p^L_0 &= 1 \\ p^L_1 &= P_A(\mathbf{y}_0) \\ p^L_i &= P_{\sigma^\perp}(\mathbf{y}_{i-2} \to \mathbf{y}_{i-2}) G(\mathbf{y}_{i-2} \leftrightarrow \mathbf{y}_{i-1}) p^L_{i-1} \\ p^E_0 &= 1 \\ p^E_1 &= P_A(\mathbf{z}_0) \\ p^E_i &= P_{\sigma^\perp}(\mathbf{z}_{i-2} \to \mathbf{z}_{i-2}) G(\mathbf{z}_{i-2} \leftrightarrow \mathbf{z}_{i-1}) p^E_{i-1} \end{aligned}$$

由此，通过递归表达式，可将路径的概率密度简化为：

$$p_{s,t}(\overline{x}_{s,t}) = p^L_s p^E_t$$

2.2. The unweighted contribution $C^*_{s,t}$

$$C^*_{s,t} \equiv \frac{f_j(\overline{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\overline{x}_{s,t})}$$

对于不含权重的贡献函数，使用上述类似递归计算的概率密度，定义符号 α_i^L 和 α_i^E 分别表示光子子路径和采样子路径的前 i 个顶点的贡献量：

$$\begin{aligned}
\alpha_0^L &= 1 \\
\alpha_1^L &= \frac{L_e^{(0)}(\mathbf{y}_0)}{P_A(\mathbf{y}_0)} \\
\alpha_i^L &= \frac{f_s(\mathbf{y}_{i-3} \to \mathbf{y}_{i-2} \to \mathbf{y}_{i-1})}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{y}_{i-2} \to \mathbf{y}_{i-2})}\alpha_{i-1}^L, \qquad i \geq 2 \\
\alpha_0^E &= 1 \\
\alpha_1^E &= \frac{W_e^{(0)}(\mathbf{z}_0)}{P_A(\mathbf{z}_0)} \\
\alpha_i^E &= \frac{f_s(\mathbf{z}_{i-1} \to \mathbf{z}_{i-2} \to \mathbf{z}_{i-3})}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{z}_{i-2} \to \mathbf{z}_{i-2})}\alpha_{i-1}^E, \qquad i \geq 2
\end{aligned}$$

> 关于几何项 $G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}')$，由于这个对递归的定义中，分子分母均包含了几何项，因此被化简了。

对于光源的发射辐射度 L_e，可以被拆分为两个部分的点乘：

$$L_e(\mathbf{y}_0 \to \mathbf{y}_1) = L_e^{(0)}(\mathbf{y}_0)L_e^{(1)}(\mathbf{y}_0 \to \mathbf{y}_1)$$

其中：

- $L_e^{(0)}(\mathbf{y}_0)$ 表示顶点向外恒定辐射的辐射度；
- $L_e^{(1)}(\mathbf{y}_0 \to \mathbf{y}_1)$ 表示顶点向这个方向上辐射的概率；

> 对于 $L_e^{(1)}$ 的理解，可以举两个例子：
>
> 1. 对于漫反射光源，它向半球方向均匀发射，则 $L_e^{(1)} \equiv 1$
> 2. 对于有方向性的光源，例如聚光灯，可以使用遵循某个pdf的重要性采样实现。

在 α_i^L 和 α_i^E 种， $L_e^{(1)}$ 和 $W_e^{(1)}$ 有相似的等价表达式：

$$\begin{aligned}
f_s(\mathbf{y}_{-1} \to \mathbf{y}_0 \to \mathbf{y}_1) &\equiv L_e^{(1)}(\mathbf{y}_0 \to \mathbf{y}_1) \\
f_s(\mathbf{z}_1 \to \mathbf{z}_0 \to \mathbf{z}_{-1}) &\equiv W_e^{(1)}(\mathbf{z}_0 \to \mathbf{z}_1)
\end{aligned}$$

公式(2)中，给出了这样的化简：

$$C^*_{s,t} = \alpha_s^L c_{s,t} \alpha_t^E$$

其中，$c_{s,t}$ 包含了除 α_i^L 和 α_i^E 外的其他项：

$$
\begin{aligned}
c_{0,t} &= L_e(\mathbf{z}_{t-1} \to \mathbf{z}_{t-2}) \\
c_{s,0} &= W_e(\mathbf{y}_{s-2} \to \mathbf{s}_{t-1}) \\
c_{s,t} &= f_s(\mathbf{y}_{s-2} \to \mathbf{y}_{s-1} \to \mathbf{z}_{t-1}) G(\mathbf{y}_{s-1} \leftrightarrow \mathbf{z}_{t-1}) f_s(\mathbf{y}_{s-1} \to \mathbf{z}_{t-1} \to \mathbf{z}_{t-2})
\end{aligned}
$$

> 其中，G 项包含了可见性测试。

2.3. The weighting funcion $w_{s,t}$

$$
w_{s,t} \equiv w_{s,t}(\overline{x}_{s,t})
$$

公式(1)中，权重函数的权重值取决于生成 $s+t+1$ 长度路径的概率密度。

定义 p_i 为 $\overline{x}_{s,t}$ 中长度为 i 的光子子路径和长度为 $s+t-i$ 的采样子路径的出现概率：

$$
p_i = p_{i,s+t-i}(\overline{x}_{s,t})
$$

细化来说，p_s 是当前生成的路径的出现概率，那么其他的 $p_0, \dots p_{s-1}, p_{s+1}, \dots p_{s+t}$ 就是其他可能生成的路径的出现概率。

p_i 这个估计量是可以被化简掉的，因为观察发现这个值等效于一个全局整体的缩放系数。例如，若这些样本使用幂形式进行混合，幂 $\beta = 2$，那么公式为：

$$
w_{s,t} = \frac{p_s^2}{\sum_i p_i^2} = \frac{1}{\sum_i (p_i/p_s)^2}
$$

如上面这个例子所示，其他混合策略同样满足这个规则。因此我们可以随意地设置 $p_s = 1$，然后计算相对与 p_s 的 p_i 部分的结果，这个结果与 p_s 呈倍数关系。

为了计算这个比例关系，我们需要比例 p_{i+1}/p_i。计算比例的过程中，光子子路径和采样子路径并没有明显区别，因此忽略这个区别会让计算更加方便。由此，可以把路径 $\overline{x}_{s,t}$ 重写为
$\overline{x} = \mathbf{x}_0, \dots \mathbf{x}_k$，$k = s+t-1$。这套标记中，$p_i$ 和 p_{i+1} 的区别仅为顶点的区别，因此可以得到这个比例：

$$
\begin{aligned}
\frac{p_1}{p_0} &= \frac{P_A(\mathbf{x}_0)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_0) G(\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_0)} \\
\frac{p_{i+1}}{p_i} &= \frac{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_{i-1} \to \mathbf{x}_i) G(\mathbf{x}_{i-1} \leftrightarrow \mathbf{x}_i)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_{i+1} \to \mathbf{x}_i) G(\mathbf{x}_{i+1} \leftrightarrow \mathbf{x}_i)}, \qquad 0 < i < k \\
\frac{p_{k+1}}{p_k} &= \frac{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_{k-1} \to \mathbf{x}_k) G(\mathbf{x}_{k-1} \leftrightarrow \mathbf{x}_k)}{P_A(\mathbf{x}_k)}
\end{aligned}
$$

由此，就可以通过MIS组合策略计算权重项 $w_{s,t}$ 了。至此，贡献函数的所有内容都已经明确了：

$$
\begin{aligned}
C_{s,t} &= w_{s,t} C^*_{s,t} \\
&= w_{s,t} \alpha^L_s c_{s,t} \alpha^E_t
\end{aligned}
$$