函数与极限

映射与函数

映射定义：两个非空集合 X,Y ，存在一个法则 f ，使 X 中每一个元素 x 按照法则 f 在 Y 中存在唯一确定的元素 y 。

$$f:X\to Y$$
$$y=f(x)$$

- 元素 x 为元素 y 在法则 f 下的一个原像；
- 集合 X 为映射 f 的定义域 D_f ；
- X 中所有元素的像所组成的集合为映射 f 的值域 R_f 或 $f(X)$ ；

$$R_f=f(X)=\{f(x)|x\in X\}$$

> 集合 Y 为值域的范围，即 $R_f\subset Y$ ；

- $R_f=Y$ ，称 f 为 X 到 Y 上的映射或**满射**
- $\forall x_1,x_2\ f(x_1)\neq f(x_2)\ where\ x_1\neq x_2$ ，称 f 为 X 到 Y 上的**单射**；
- f 既是单射也是满射，则为**双射**；

逆映射定义：设 f 为 X 到 Y 的**单射**，则由定义，对 $\forall y\in R_f$ ，有唯一的 $x\in X$ ，适合 $f(x)=y$ 。称 g 为 R_f 到 X 的映射。

$$g:R_f\to X$$
$$g=f^{-1}$$
$$D_{f^{-1}}=R_f$$
$$R_{f^{-1}}=X$$

复合映射定义：设有两个映射：

$$g:X\to Y_1\qquad f:Y_2\to Z$$

$where\ \ Y_1\subset Y_2$ ，则定义复合映射 $f\circ g$ ：

$$f\circ g:X\to Z,\quad (f\circ g)(x)=f[g(x)],\ x\in X$$

> 符合映射有严格的顺序，即 $f\circ g$ 有意义并不代表 $g\circ f$ 有意义，即使二者均有意义， $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 未必相同。

函数定义：设数集 $D\subset R$ ，则称映射 f 为定义在 D 上的函数。

$$y=f(x),\quad x\in D$$

> f 和 $f(x)$ 不同， f 是自变量 x 与因变量 y 的对应法则， $f(x)$ 是自变量 x 对应的函数值。

函数的特性：

- 有界性：若满足下面公式，称 $f(x)$ 在 X 上有界，否则为无界。

$$\exists M<R_+,\ |f(x)|\leq M,\ x\in X$$

> 注意，上界和上确界、下界和下确界在数值上的区别。

- 单调性：若满足下面公式，称 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增。

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ \ f(x_1) < f(x_2),\ \ where\ x_1 < x_2$$

- 奇偶性：若满足下面公式，称 $f(x)$ 为偶函数，同理可得奇函数定义。

$$\forall x \in R,\ \ f(-x) = f(x)$$

- 周期性：若满足下面公式，称 $f(x)$ 具有周期性，周期为 l 。

$$\forall x \in D,\ \exists l \in R_+ \ \Rightarrow\ (x+l) \in D,\ \ f(x+l) = f(x)$$

> 通常认为，周期为最小正周期。

反函数定义：设函数 $f: D \to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$ ，称 f^{-1} 为函数 f 的反函数。

复合函数定义：复合函数是复合映射的一种特例。设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f ，函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g ，且且其值域 $R_g \subset D_f$ ，则有下式可确定一个复合函数。

$$y = f[g(x)] = f \circ g(x),\ \ x \in D_g$$

> 变量 u 为该复合函数的中间变量。

数列的极限

数列极限的定义：设 $\{x_n\}$ 为一数列，若存在一常数 a ，使数列满足下面公式，则称该数列收敛与 a ，或常数 a 是该数列的极限，记做： $x_n \to a\ (n \to \infty)$

$$\exists N \in N_+,\ \exists a \in R,\ \forall \epsilon > 0,\ \ |x_n - a| < \epsilon\ \ where\ n > N \\ \Leftrightarrow\ \ \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

收敛的性质：

- 唯一性：若数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一。
- 有界性：若数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界。
- 保号性：若 $\lim_{x \to \infty} x_n = a$ ，且 $a > 0\ (Or\ a < 0)$ ，则 $\exists N \in N^+,\ x_n > 0\ \ where\ n > N$ 。
- 子数列收敛：若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ，设 $\{y_n\} \subset \{x_n\}$ ， $\lim_{n \to \infty} y_n = a$ 。

函数的极限

有限值函数极限定义：设 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义。满足下面方程：

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \ |f(x) - A| < \epsilon\ \ when\ \ 0 < |x - x_0| < \delta,\ where\ x \to x_0$$

那么常数 A 为函数 $f(x)$ 的极限，记作：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \\ \Leftrightarrow f(x) \to A\ \ where\ x \to x_0$$

> 左极限定义为：
>
> $$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \ |f(x) - A| < \epsilon\ \ when\ \ x_0 - \delta < x < x_0,\ where\ x \to x_0^-$$
>
> 记作：
>
> $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A\ \ \Leftrightarrow f(x_0^-) \to A$$
>
> 右极限同理。
>
> 左极限和右极限统称为单侧极限。

无穷大函数极限定义：函数在 $|x|$ 大于某一正数时有定义，满足下面公式：

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ \ |f(x)-A|<\varepsilon\ \ when\ |x|>X$$

函数极限的性质：

- 唯一性；
- 局部有界性：$f(x)$ 在点 x_0 邻域内有界。
- 局部保号性：$f(x)$ 在点 x_0 邻域内符号相同。
  - 推论：若 $f(x_0)\to A$ ，则存在一个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ ，满足下列公式。

$$|f(x)|>\frac{|A|}{2}\ \ when\ x\in\mathring{U}(x_0)$$

- 与数列极限的关系：若 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为 D_f 中任一收敛与 x_0 的数列，满足 $x_n\neq x_0$ ，则相应数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且满足下列公式。

$$\lim_{x\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to x_0}f(x)$$

极限存在准则

1. 若数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足下面条件：
   - $$\exists n_0\in N_+,\ \ y_n\le x_n\le z_n\ \ when\ n>n_0$$
     $$\lim_{n\to\infty}y_n=a,\ \ \lim_{n\to\infty}z_n=a$$

   $\Rightarrow\ \ \{x_n\}$ 的极限存在，$\lim_{n\to\infty}x_n=a$
   - 推论：
     - $$g(x)\le f(x)\le h(x)\ \ when\ x\in\mathring{U}(x_0,r)$$
       $$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A,\ \ \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$$

     $\Rightarrow\ \ \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$

   > 该准则和该准则的推论又名**夹逼准则**。

2. 单调有界数列必有极限；
   - 推论：设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界，则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 必定存在。
3. 柯西（Cauchy）极限存在准则：数列收敛的充分必要条件。

$$\forall\epsilon>0,\ \ \exists N\in N_+,\ \ |x_n-x_m|<\epsilon\ \ when\ \forall m,n>N$$

无穷小的比较

公式	无穷小比较
$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$	β 是比 α 高阶的无穷小
$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$	β 是比 α 低阶的无穷小
$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$	β 是与 α 同阶的无穷小
$\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0,\ \ k > 0$	β 是关于 α 的 k 阶的无穷小
$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$	β 是与 α 等价的无穷小，记作： $\alpha \sim \beta$

函数连续性与间断点

连续定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，若满足下列公式，则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

> 左连续写作：$f(x_0^-) = f(x_0)$；
>
> 右连续写作：$f(x_0^+) = f(x_0)$；

> 一切初等函数在其定义区间内都是连续的。
>
> 定义区间：包含在定义域内的区间。

间断点情形：设 $f(x)$ 在点 x_0 的去心邻域内有定义。

1. 在 $x = x_0$ 处没有定义；
2. 虽 $x = x_0$ 有定义，但 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；
3. 虽 $x = x_0$ 有定义，且 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ；

间断点类型：

1. 第一类间断点：（附带一个样例）
   1. 无穷间断点：

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tan\, x = \infty$$

   2. 震荡间断点：

$$\lim_{x \to 0} sin\, \frac{1}{x} \text{ 不存在}$$

   3. 可去间断点：

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$$

4. 跳跃间断点：

$$y=f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1 \end{matrix}$$

2. 第二类间断点：非第一类间断点。

闭区间上连续函数的性质

有界性与最大值最小值定理定义：在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值。

零点定理定义：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$ ，则在开区间 (a,b) 上至少有一点 ξ ，使 $f(\xi)=0$ 。

介值定理定义：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值：

$$f(a)=A\ \ And\ \ f(b)=B$$

则在开区间 (a,b) 上至少有一点 ξ ，满足下列公式。

$$\forall C\in(Min\{A,B\},Max\{A,B\}),\ \exists\xi\in(a,b),\ \ f(\xi)=C$$

> 推论：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，其值域为 $[n,M]$ ，其中 m 和 M 依次为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值与最大值。

一致连续定义：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，当满足下面公式时，称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

$$\forall x_1,x_2\in I,\ \forall\epsilon\in R_+,\ \exists\delta\in R_+,\ \ |f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon\ \ when\ |x_1-x_2|<\delta$$

> 一致连续表示，当某函数的两个自变量接近到一定程度，就能使它们对应的函数值达到所指定的接近程度。

> 推论：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么它在该区间上一致连续。

导数与微分

导数概念

导数定义：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个领域内有定义，若满足下面公式，称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记做 $f'(x_0)$ 。

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ \ when\ (x_0+\Delta x)\in \mathring{U}(x_0)$$

> 也可记作：
>
> $$y'|_{x=x_0},\ \ \frac{dy}{dx}|_{x=x_0},\ \ \frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$$
>
> 导数存在的充要条件也可为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数存在且相等：
>
> $$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$$
> $$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，那么函数在该点**必然连续**。

> 高阶导数展开中，若 $(uv)^{(n)}$ 存在，则可用Leibniz（莱布尼兹）公式表示：
>
> $$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(u-k)}v^{(k)}$$

隐函数的导数

求导步骤：

1. 对方程两边求关于 x 的微分，得到一个关于 y' 的方程；
2. 在微分后的方程中求解 y' ；

e.g.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2+y^2)&=\frac{d}{dx}(25)\\ \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)&=0\\ 2x+\frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx}&=0\\ 2x+2y\frac{dy}{dx}&=0\\ \frac{dy}{dx}&=-\frac{x}{y}\end{aligned}$$

参数方程求导

设参数方程为：

$$\begin{cases} x = \psi(t) \\ y = \Psi(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\Psi'(t)}$$

函数的微分

微分定义：设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义， x_0 和 $x_0 + \Delta x$ 在者区间内，函数的增量可表示为：

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= A\Delta x + o(\Delta x) \end{aligned}$$

其中， A 为不依赖于 Δx 的常量，那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 dy :

$$dy = A\Delta x$$

省略推导，函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且当 $f(x)$ 在点 x_0 可微，其微分为：

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

通常将自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 dx ，因此函数 $f(x)$ 的微分又可被写作：

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)dx \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= f'(x) \end{aligned}$$

> 微分法则近似于求导法则。

误差估价相关概念：若某个量的精确值为 A ，它的近似值为 a ，那么 $|A - a|$ 叫做 a 的**绝对误差**，绝对误差与 $|a|$ 的比值 $\frac{|A-a|}{|a|}$ 叫做 a 的**相对误差。**若已知它的误差不超过 δ_A ，即 $|A - a| \le \delta_A$ ，那么 δ_A 叫做测量 A 的**绝对误差限**，而 $\frac{\delta_A}{|a|}$ 叫做测量 A 的**相对误差限。**

微分中值定理与导数的应用

微分中值定理

罗尔定理：若函数 $f(x)$ 满足：

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；
2. 在开区间 (a,b) 内可导；
3. 在区间端点内的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$；

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi\ \ (a<\xi<b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

费马引理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且在 x_0 处可导，则必将满足下列公式

$$f'(x_0)=0\ \ when\ \forall x\in U(x_0)\ \ f(x)\le f(x_0)\ Or\ f(x)\ge f(x_0)$$

拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 满足：

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；
2. 在开区间 (a,b) 内可导；

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi\ \ (a<\xi<b)$，使得：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

定理：若函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续， I 内可导且导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数。

柯西中值定理：若函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足：

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；
2. 在开区间 (a,b) 内可导；
3. $\forall x\in(a,b)\ \ F(x)\neq 0$；

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi\ \ (a<\xi<b)$，使得：

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

洛必达法则

> 略

泰勒（Taylor）公式

泰勒中值定理1：若函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，那么存在 x_0 的一个邻域，满足下列公式：

$$\forall x\in U(x_0)\ \ f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$
$$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$$

泰勒中值定理2：若函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 $n+1$ 阶导数，那么存在 x_0 的一个邻域，满足下列公式：

$$\forall x \in U(x_0) \;\; f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n \;\; where \, \xi \in (Min\{x,x_0\}, Max\{x,x_0\}),$$

> 定理2的 $R_n(x)$ 被称为拉格朗日余项;
>
> 在定理1中，若 $x_0 = 0$ ，那么又被成为带佩亚诺余项的麦克劳林（Malaurin）公式;

函数单调与曲线的凹凸性

单调判别法：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导。

1. 如果在 (a,b) 内 $f'(x) \leq 0$ ，且等号仅在有限多个点处成立，那么这个函数在 $[a,b]$ 上单调增加。
2. 如果在 (a,b) 内 $f'(x) \geq 0$ ，且等号仅在有限多个点处成立，那么这个函数在 $[a,b]$ 上单调减少。

凹凸性定义：设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若满足下列公式，则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凹的，或凹弧。

$$\forall x_1, x_2 \in R, \;\; f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

若满足下列公式，则称在上的图形是（向上）凸的，或凸弧。

$$\forall x_1, x_2 \in R, \;\; f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

凹凸判别法：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上具有一阶和二阶导数。

1. 如果在 (a,b) 内 $f''(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹弧。
2. 如果在 (a,b) 内 $f''(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸弧。

> 拐点两边 $f''(x)$ 异号，这是寻找拐点的必要条件。

极值与最大最小值

极值定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的邻域有定义，若满足下列公式，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值（或极小值）。

$$\forall x \in \mathring{U}(x_0), \;\; f(x) < f(x_0) \;\;\; (Or \; f(x) > f(x_0))$$

极值条件：

1. 必要条件：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$ ；
2. 第一充分条件：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内可导：
    1. 若 $\forall x \in (x_0-\delta, x_0), \; f'(x) > 0 \;\; And \;\; x \in (x_0, x_0+\delta), \; f'(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值;
    2. 若 $\forall x \in (x_0-\delta, x_0), \; f'(x) < 0 \;\; And \;\; x \in (x_0, x_0+\delta), \; f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值;
3. 第二充分条件：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0) = 0, \; f''(x_0) \neq 0$ ：
    1. $f''(x_0) < 0$ ：函数 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值;
    2. $f''(x_0) > 0$ ：函数 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值;

不定积分

概念与性质

原函数存在定理：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在区间 I 上存在可导函数 $F(X)$ ，满足下列公式：

$$\forall x \in I,\ \ F'(x)=f(x)$$

不定积分记作：

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

换元积分法

第一类换元法：设 $f(x)$ 具有原函数， $u=\psi(x)$ 可导，则有换元公式：

$$\int f[\psi(x)]\psi'(x)dx=\left[\int f(u)du\right]_{u=\psi(x)}$$

第二类换元法：设 $x=\psi(t)$ 是单调的可导函数，且 $\psi'(t)\neq 0$ 。设 $f\left[\psi(t)\right]\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式：

$$\int f(x)dx=\left[\int f\left[\psi(t)\right]\psi'(t)dt\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$$

> 常见做法：三角换元。

分部积分法

定义：设函数 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 具有连续导数，则两个函数的乘积的导数公式为：

$$(uv)'=u'v+uv'$$
$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$$
$$\int udv=uv-\int vdu$$

定积分

概念与性质

定积分定义：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中插入若干个分点，将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间：

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ \dots\ ,\ [x_{n-1},x_n]$$

各个分段的长度依次为：

$$\Delta x_1=x_0-x_0,\ \dots\ ,\ \Delta x_n=x_n-x_{n-1}$$

若满足下列公式，则称极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分（或积分）。

$$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ \lambda=Max\{\Delta x_1,\ \dots,\Delta x_n\}$$
$$\int_a^b f(x)dx=I=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

定理1：函数在区间上连续，则函数在区间上可积；

定理2：函数在区间上有界，且只有有限个间断点，则函数在区间上可积；

定积分性质：

1. 设 α 与 β 均为常数，则：
$$\int_\alpha^\beta[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_\alpha^\beta f(x)dx+\beta\int_\alpha^\beta g(x)dx$$
2. $$\forall c\in(a,b),\ \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$
3. $$\int_a^b 1dx=b-a$$
4. $$\int_a^b f(x)dx\geq0\ \ when\ \forall x\in(a,b),\ f(x)\geq0$$
5. $$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)\ \ when\ F=\{f(x)|x\in[a,b]\},\ M=supF,\ m=infF$$
6. 定积分中值定理：
$$\exists\xi\in[a,b],\ \int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

定积分的换元法和分部积分法

换元积分法：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\psi(t)$ 满足条件：

1. $\psi(\alpha)=a,\psi(\beta)=b$
2. $\psi(t)$ 在区间上具有了连续导数，且气质与 $R_\psi=[a,b]$

则有：

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\psi(t)]\psi'(t)dt$$

分部积分法：

$$\int_a^b uv'dx=[uv]_a^b-\int_a^b vu'dx$$

反常积分

包括无限积分和无界积分，核心用莱布尼兹公式解决，无界要分段讨论。

反常积分审敛法

无穷反常积分

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$ 。函数 $F(x)$ 满足下列公式，若其在区间上由上界，则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。
$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$
2. 比较审敛原理：设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上连续。
    1. 若 $0\leq f(x)\leq g(x)$ ，且 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；
    2. 若 $0\leq g(x)\leq f(x)$ ，且 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散。
3. 比较审敛法1：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ $(a>0)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$ 。
    1. 若存在常数 $M>0$ 及 $p>1$ ，使 $f(x)\leq\dfrac{M}{x^p}$ ，那么反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；
    2. 若存在常数 $N>0$ ，使 $f(x)\geq\dfrac{N}{x}$ ，那么反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散；
4. 极限审敛法1：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$ 。
    1. 若存在常数 $p>1$ ，使 $\lim_{x\to+\infty}x^pf(x)=c<+\infty$ ，那么反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；
    2. 若 $\lim_{x\to+\infty}xf(x)=d>0$ （或 $\lim_{x\to+\infty}xf(x)=+\infty$ ），那么反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散；

无界函数反常积分

1. 比较审敛法2：设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$ ， $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点。
    1. 若存在常数 $M>0$ 及 $p<1$ ，使 $f(x)\leq\dfrac{M}{(x-a)^p}$ ，那么反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；
    2. 若存在常数 $N>0$ ，使 $f(x)\geq\dfrac{N}{x-a}$ ，那么反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散；
2. 极限审敛法2：设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$ ， $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点。
    1. 若存在常数 $0<q<1$ ，使 $\lim_{x\to a^+}(x-1)^qf(x)$ 存在，那么反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；
    2. 若 $\lim_{x\to a^+}xf(x)=d>0$ （或 $\lim_{x\to a^+}xf(x)=+\infty$ ），那么反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散；

微分方程

一阶微分方程

若有微分方程 $y' = f(x,y)$，则可用如下对称形式表示：

$$
\begin{aligned}
&P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},\ \ Q(x,y) \neq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)},\ \ P(x,y) \neq 0
\end{aligned}
$$

可分离变量的微分方程：可被表示为 $g(y)dy = f(x)dx$ 的微分方程。

e.g.

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \\
\Rightarrow\ & \frac{dy}{y^2} = 2xdx \\
\Rightarrow\ & -\frac{1}{y} = x^2 + C \\
\Leftrightarrow\ & y = -\frac{1}{x^2 + C}
\end{aligned}
$$

齐次方程

齐次方程：可被表示为 $\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$ 的微分方程。

解法：

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \phi(\frac{y}{x}),\ \ make\ u = \frac{y}{x},\ \ \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \\
u + x\frac{du}{dx} &= \phi(u) \\
x\frac{du}{dx} &= \phi(u) - u \\
\text{分离变量} \Rightarrow \frac{du}{\phi(u) - u} &= \frac{dx}{x}
\end{aligned}
$$

可化为齐次的方程：有如下方程，其中当 $c_1, c \neq 0$ 时，该方程是非齐次方程。

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}
$$

齐次化方法：

$$
\begin{aligned}
&make: \ x = X + h, \ \ y = Y + h \\
&\quad \Rightarrow dx = dX, \quad dy = dY \\
&\quad \frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1} \\
&if \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0, \\
&then\ we\ can\ get\ the\ value\ of\ h\ and\ k\ by\ solve\ \begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}. \\
&\quad \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}
\end{aligned}
$$

一阶线性微分方程

一阶线性微分方程：该方程如下所示，若 $Q(x) \equiv 0$ 时，那么方程是齐次的；若 $Q(x) \not\equiv 0$ 时，那么方程是非齐次的；

$$
\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)
$$

- 齐次方程：

$$
\begin{aligned}
if \ \ Q(x) \equiv 0 \\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \\
\frac{dy}{y} = -P(x)dx \\
\Rightarrow ln|y| = -\int P(X)dx + C_1 \\
\Leftrightarrow y = \pm e^{C_1} e^{-\int P(X)dx} = Ce^{-\int P(X)dx}
\end{aligned}
$$

- 非齐次方程：

$$
\begin{aligned}
if \ \ Q(x) \not\equiv 0 \\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \\
\text{常数变易法：} make \ \ y = ue^{-\int P(X)dx} \\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u'e^{-\int P(X)dx} - uP(x)e^{-\int P(X)dx} \\
Substitute \ \frac{dy}{dx}, y \ \rightarrow \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \\
Simplified \ \Rightarrow u' = Q(x)e^{\int P(x)dx} \\
u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \\
Substitute\ u \rightarrow y = ue^{-\int P(X)dx} \\
y = e^{-\int P(X)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)
\end{aligned}
$$

伯努利方程：当 $n = 0, 1$ 时，这是线性微分方程；当 $n \neq 0, 1$ 时，这是非线性的，但可通过变量代换变成线性方程。

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$
$$\Leftrightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$
$$make\ z=y^{1-n}$$
$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$
$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

可降阶高阶微分方程

1. $y^{(n)}=f(x)$：嵌套多层求原函数。
2. $y''=f(x,y')$：
$$set\ \ y'=p$$
$$y''=\frac{dp}{dx}=p'$$
$$\Rightarrow\ \ p'=f(x,p)$$
$$\text{即，通解为：}\ p=\phi(x,C_1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\phi(x,C_1)$$
$$\Rightarrow y=\int\phi(x,C_1)dx+C_2$$
3. $y''=f(y,y')$：
$$set\ \ y'=p$$
$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$
$$\Rightarrow p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$
$$set\ \ y'=p=\phi(y,C_1)$$
$$\Rightarrow \int\frac{dy}{\phi(y,C_1)}=x+C_2$$

高阶线性微分方程

二阶线性微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x)$$

- $f(x)\equiv 0$：齐次方程；
- $f(x)\not\equiv 0$：非齐次方程；

定理：

1. 若函数 $y_1(x),y_2(x)$ 是齐次二阶线性微分方程的两个解，那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是方程的解，其中 C_1,C_2 为任意常数。
2. 若函数 $y_1(x),y_2(x)$ 是齐次二阶线性微分方程的两个线性无关的特解，那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程的通解，其中 C_1,C_2 为任意常数。
3. 设 $y^*(x)$ 为二阶非齐次线性微分方程的一个特解， $Y(x)$ 是其对应的齐次方程的通解，则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程的通解。

4. 若有非齐次线性微分方程：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

$y_1^*(x)$ 和 $y_2^*(x)$ 分别是方程：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 为原方程的一个特解。

常数变易法

> 详细推导省略

已知齐次方程的通解为：

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

求其非齐次方程，令 $y = y_1(x)v_1 + y_2(x)v_2$

$$set\ \ W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$
$$if\ \ W \neq 0 \quad \Rightarrow v_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W},\ v_1' = \frac{y_1 f(x)}{W}$$
$$\Rightarrow v_1 = C_1 + \int \left(-\frac{y_2 f(x)}{W} \right) dx,\ \ v_2 = C_2 + \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx$$

常系数齐次次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

其中， $P(x), Q(x)$ 均为常数，则这是个常系数齐次线性微分方程。

特征方程推导：

$$set\ y = e^{rx}$$
$$\Rightarrow y' = re^{rx},\ y'' = r^2 e^{rx}$$
$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$
$$\Rightarrow r^2 + pr + q = 0$$

> 推导略。

求通解步骤：

1. 写出特征方程；
2. 求出特征方程的两个根 r_1, r_2 ；
3. 根据两个根的不同情况，按照下表求出通解：
   - 两实根不相等： $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
   - $r_1 = r_2$ ： $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$
   - 一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ： $y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$

> n阶同理可推，推导和结论省略。

常系数非齐次线性微分方程

1. $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$， $P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$ ：

$$y^* = x^k R_m(x) e^{\lambda x}$$

`k` 按照 λ 的值不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取0、1或2。

e.g.

$$
\begin{aligned}
y'' - 5y' + 6y = xe^{2x} &= e^{2x}(x+0) \\
\Rightarrow \lambda = 2,\ \ P_1(x) &= x+0 \\
\text{特征方程：} r^2 - 5r + 6 &= 0 \\
\Rightarrow r_1 = 2, r_2 &= 3 \Rightarrow \lambda\text{是特征方程的单根} \\
\Rightarrow k &= 1 \\
\Rightarrow y* &= x(b_0 x + b_1)e^{2x} \\
\text{代入原方程得特解：} y* &= x(-\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}
\end{aligned}
$$

2. $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)cos\omega x + Q_n(x)sin\omega x]$

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)cos\omega x + R_m^{(2)}(x)sin\omega x]$$

`k` 按照 $\lambda \pm \omega i$ 的值不是特征方程的根、是特征方程的单根分别取0或1， $m = max\{l, n\}$ 。

> `k` 可理解为根的在特征方程中的重复次数。
>
> 同理在高阶中也满足这个规则。

向量代数与空间解析几何

向量表示： $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{F}\ Or\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{F}$ ；

若两向量大小相等，且方向相同，则称这两向量相等。

向量的数量积： $n = \vec{a} \cdot \vec{b}$

向量的向量积： $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

向量的混合积：

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}] &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \\
&= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

> 混合积的几何意义：表示以这三个矢量为边的平行六面体体积。

若曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 存在以下关系：

1. 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程；
2. 不在曲面上的点的坐标都不满足方程；

那么，该方程为曲面 S 的方程，该曲面为该方程的图形。

空间曲线可视为两个空间曲面的交线。

平面的点法式方程： $\boldsymbol{n}$ 为法线向量， M_0 为平面上的一个已知点， M 为平面上的任一点，则点法式方程为：

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0$$

旋转曲面：已知一曲线 $f(y, z) = 0$ ，则它绕z轴旋转的旋转曲面方程为 $f(y, \pm\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$ 。

多元函数微分法

多元函数的基本概念

坐标平面：二元有序实数组 (x,y) 的全体，即 $\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}=\{(x,y)|x,y\in\boldsymbol{R}\}$ 。

平面点集：坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合（符合某种规律），记作：

$$E=\{(x,y)|(x,y)\text{具有性质}P\}$$

邻域： $U(P_0,\delta)=\{P|\ |\overrightarrow{PP_0}|<\delta\}$

去心邻域： $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P|\ 0<|\overrightarrow{PP_0}|<\delta\}$

用邻域描述点和点集之间的关系： $\forall P\in\boldsymbol{R}^2$， $\forall E\subset\boldsymbol{R}^2$.

1. 内点： $\exists\delta>0,\ U(P,\delta)\subset E$.
2. 外点： $\exists\delta>0,\ U(P,\delta)\cap E=\emptyset$.
3. 边界点： $\forall\delta>0,\ P_1=U(P,\delta)\cap E\neq\emptyset,\ P_2=U(P,\delta)-P_1\neq\emptyset$.

> 聚点： $\forall\delta>0,\mathring{U}(P,\delta)\cap E\neq\emptyset$
>
> 聚点P可属于集合E，也可不属于。
>
> e.g.
>
> $$E=\{(x,y)|0<x^2+y^2\leq 2\}$$
>
> $(0,0)\notin E$ ，但是 E 的聚点。

多元函数定义： $D\subset\boldsymbol{R}^2$ ，称映射 $f:D\to\boldsymbol{R}$ 为定义在 D 上的二元函数，记作：

$$z=f(x,y),\ \ (x,y)\in D$$

多元函数的极限定义：设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D ， $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，若满足下列方程，则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限。

$$\exists A\in\boldsymbol{R},\ \forall\epsilon>0,\ \ |f(P)-A|<\epsilon,\ \ where\ P\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$$

记作：

$$\lim_{(x_0,y_0)\to(x,y)}f(x,y)=\lim_{P\to P_0}f(P)=A,\ f(P)\to A\ (P\to P_0)$$

多元函数的连续性定义：设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D ， $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，若满足下列方程，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续。

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$$

偏导数

偏导数定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 ，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ ，若下列极限存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

记作：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ f_x(x_0,y_0)$$

高阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

定理：若函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，则这两个混合偏导数在这个区域内必定相等。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

全微分

定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的某邻域内有定义，若函数在该点的全增量为：

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\ where\ \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

其中，A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 而仅与 x,y 有关，那么函数在点可微，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数的全微分，记作 $dz=A\Delta x+B\Delta y$ 。

定理：

1. 必要条件：若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分，那么该函数在该点的偏导 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，其全微分为：

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

2. 充分条件：若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，那么该函数在该点可微分。

隐函数的求导公式

一个方程：

$$\begin{aligned}
if\ \ F(x,y,z)=0\\
\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\\
\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}\\
\Leftrightarrow F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \ F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0
\end{aligned}$$

方程组：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

$$Set \quad J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x+F_u\frac{\partial u}{\partial x}+F_v\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ G_x+G_u\frac{\partial u}{\partial x}+G_v\frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} F_y+F_u\frac{\partial u}{\partial y}+F_v\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ G_y+G_u\frac{\partial u}{\partial y}+G_v\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

方向导数与梯度

仅考虑函数沿坐标轴的变化率是不够的，当需要获得函数沿某一方向的变化率时（e.g. 气压沿某方向的变化速率），则需要方向导数：

定义初始点 $P_0(x_0,y_0)$，射线方向 $e_l=(cos\ \alpha, cos\ \beta)$，初始点到目的点的距离 $t=||\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P_0}||$，综上得射线 l 的方程：

$$\begin{cases} x=x_0+t\ cos\ \alpha \\ y=y_0+t\ cos\ \beta \end{cases} (t\geq 0).$$

则函数沿射线方向的变化率为：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)cos\ \alpha+f_y(x_0,y_0)cos\ \beta$$

> 同理可得n维方程的方向导数公式。

方向导数可用梯度进行表示：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\boldsymbol{grad}\ f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e_l}=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e_l}=(f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{e_l}$$

由于梯度表示点 (x_0,y_0) 处的变化率，是个矢量，表示速率变化最快的方向点乘变化率的大小，反过来就能的到变化最快的方向：

$$\boldsymbol{n}=\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}$$

条件极值

很多情况下，我们无法的到一个完整的函数，只有目标函数和约束条件。这个时候求满足它们的机制可用拉格朗日乘数法。

拉格朗日乘数法：

寻找函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\phi(x,y)=0$ 的极值。

即求解方程组：

$$\text{拉格朗日函数：} L(x,y)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$$
$$\begin{cases} L_x(x_0,y_0)=0 \\ L_y(x_0,y_0)=0 \\ \phi(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

对于三元拉格朗日的解法为：

$$\text{拉格朗日函数：} L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)$$
$$\begin{cases} L_x(x_0,y_0,z_0)=0 \\ L_y(x_0,y_0,z_0)=0 \\ L_z(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases} \quad \text{求出} x,y,z \text{的关系式得结果。}$$

> 多条件略。

重积分

概念与性质

重积分定义：

$$\underbrace{\iint_{\underbrace{D}_{\text{积分域}}} \underbrace{\underbrace{f(x,y)}_{\text{被积函数}} \underbrace{d\sigma}_{\text{面积元素}}}_{\text{被积表达式}}}_{\text{二重积分}} = \underbrace{\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i}_{\text{积分和}}$$

性质：

1. $$\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x,y) d\sigma + \beta \iint_D g(x,y) d\sigma$$
2. $$\iint_D f(x,y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y) d\sigma,\ \ where\ D = D_1 + D_2$$
3. $$\sigma = \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma,\ \ where\ \sigma\text{为}D\text{的面积}$$
4. $$\iint_D f(x,y) d\sigma \le \iint_D g(x,y) d\sigma,\ \ when\ f(x,y) \le g(x,y)$$
5. 设 M 和 m 为函数在闭区间 D 上的最大值和最小值， σ 为区域 D 的面积：
   $$m\sigma \le \iint_D f(x,y) d\sigma \le M\sigma$$
6. 二重积分中值定理：
   $$\iint_D f(x,y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma$$

二重积分计算法

直角坐标系计算：

用不等式构造区域边界：

$$\forall \{x,y\} \in D,\ a \le x \le b,\ \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$$

积分可表示为：

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy$$

同理：

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx$$

极坐标计算：

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho cos\theta, \rho sin\theta) \rho d\rho$$

换元法计算：

> 极坐标也是换元法的一种。

设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上的闭区间 D 上连续，若变换：

$$T: x = x(u,v),\ \ y = y(u,v)$$

将 uOv 上的闭区间 D' 变为平面上的闭区间 D，且满足：

1. $x = x(u,v),\ \ y = y(u,v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导；
2. 在 D' 上雅可比式：

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

3. 变换 $T: D' \to D$ 是一对一的，

则有：

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\ |J(u,v)|\ dudv$$

三重积分

定义：

$$\iiint_{\underbrace{\Omega}_{\text{积分区域}}} \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{被积函数}} \underbrace{dv}_{\text{体积元素}} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

直角坐标系计算：

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

柱面坐标计算：

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z \end{cases}$$
$$\Rightarrow \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega F(\rho,\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$$

球面坐标计算：

$$\begin{cases} x = r\ sin\varphi\ cos\theta \\ y = r\ sin\varphi\ sin\theta \\ z = r\ cos\varphi \end{cases}$$
$$\Rightarrow \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega F(\rho,\varphi,\theta)r^2 sin\varphi\ d\rho d\varphi d\theta$$

应用

曲面积分：

$$A = \iint_D \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}dxdy$$

质心：

$$\overline{x} = \frac{\iint x\mu(x,y)d\sigma}{\iint \mu(x,y)d\sigma},\ \ \overline{y} = \frac{\iint y\mu(x,y)d\sigma}{\iint \mu(x,y)d\sigma}$$

含参变量积分

$$\Phi(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

$$\Phi'(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f_x(x,y)dy + f(x,y_2(x))y_2'(x) - f(x,y_1(x))y_1'(x)$$

对弧长的曲线积分

定义：

$$\underbrace{\int_{\underbrace{L}_{\text{积分弧段}}} \underbrace{f(x,y)ds}_{\text{被积函数}}}_{\substack{\text{对弧长的曲线积分} \\ \&\text{第一类曲线积分}}} = \underbrace{\lim_{\lambda\to 0}}_{\text{段最大长度趋于}0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i) \underbrace{\Delta s_i}_{\text{第}i\text{段长度}}$$

第一类曲线积分计算：

$$Set \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

$$\begin{aligned}
&\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \\
&if\ y = \psi(x): \\
&\int_L f(x,y)ds = \int_{x_0}^{X} f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}dx \\
&if\ x = \varphi(y): \\
&\int_L f(x,y)ds = \int_{y_0}^{Y} f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Set \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt$$

对坐标的曲线积分

$$Set\ \ \boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j},\ \ d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$$

$$\text{做功：} W = \int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

> 设 $\boldsymbol{F}(x,y) = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$ 是平面域 G 内的一个向量场，若 P 和 Q 在 G 内连续，且存在一个数量函数 f ，使 $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ，则积分 $\int_L \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$ 在 G 内路径无关性，且 $\int_L \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = f(B) - f(A)$ ，A和B为起点和终点。

格林公式（第二类曲线积分）

> https://zhuanlan.zhihu.com/p/290902618

$$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = \oint_L Pdx + Qdy$$

路径无关条件：区域 G 是一个单连通域，若函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\oint_L Pdx+Qdy$ 在G内路径无关的充分必要条件是 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内恒成立。

对面积的曲面积分

$$\underbrace{\iint_{\underbrace{\Sigma}_{\text{积分曲面}}}\underbrace{f(x,y,z)}_{\text{被积函数}}dS}_{\substack{\text{对面积的曲面积分}\\ \text{\&第一类曲面积分}}}=\underbrace{\lim_{\lambda\to 0}}_{\text{最大面积趋于0}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\underbrace{\Delta S_i}_{\text{第}i\text{个面积}}$$

计算法：

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,a)dS=\iint_{D_{xy}}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)z_y^2(x,y)}dxdy$$

对坐标的曲面积分

曲面是有法向的，即有上侧和下侧之分；曲面包围一个空间时，有外侧和内侧之分。

设 γ 为曲面 ΔS 的法向与 z 轴的夹角，则 ΔS 在 xOy 面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 为：

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma), & cos\ \gamma>0,\\ -(\Delta\sigma), & cos\ \gamma<0,\\ 0, & cos\ \gamma\equiv 0.\end{cases}$$

计算法：

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}&=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS\\ &=\iint_{\Sigma}(Pcos\ \alpha+Qcos\ \beta+Rcos\ \gamma)dS\\ &=\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\\ where\quad \iint_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy&=\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]dxdy\end{aligned}$$

$$cos\ \alpha=\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\ cos\ \beta=\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\ \cos\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

散度和旋度

高斯公式：设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成（曲面为外侧），函数 P,Q,R 在 Ω 上有一阶连续偏导数：

$$\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\oiint_{\Sigma}P\ dydz+Q\ dzdx+R\ dxdy$$

斯托克斯公式：设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 为以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，Γ 的正向和 Σ 的侧符合右手规律，若 P,Q,R 在 Σ 上具有一阶连续偏导数，则：

$$\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_{\Gamma}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$\Uparrow$$

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\oint_{\Gamma}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

> 空间曲线积分路径无关等价于沿任意闭曲线的曲线积分为零。
>
> $$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

散度描述场 A 中点 M 的通量密度，记作 $div\ \boldsymbol{A}(M)$ 。

$$div\ \boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

旋度描述场 A 中点 M 的环量密度，记作 $\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{A}(M)$ 。

$$\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

> $\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{A}\equiv 0$ ，则 $\boldsymbol{A}$ 是无旋场。一个无源无旋的向量场称为调和场。

无穷级数

常数项级数

级数和定义：若有级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s ，即：

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

则称无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛， s 为这级数的和。

柯西审敛原理：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件：对于任意给定的正数 ε ，总存在正整数 N ，使当 $n > N$ 时，对于任意的正整数 p ，都满足下面公式。

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

常数项级数审敛法

正项级数及其审敛法

正项级数： $u_i \geq 0$ 恒成立。

审敛法：

1. 充分必要条件：部分和数列 $\{s_n\}$ 有界。
2. 比较审敛法（夹逼准则）：若有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ，且 $u_n \leq v_n$ ，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。
3. 比较审敛法的极限形式：若 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l\ (0 \leq l \leq +\infty)$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。
4. 比值审敛法（达朗贝尔 d' Alembert 判别法）：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ ，当 $\rho < 0$ 时级数收敛，当 $\rho > 0$ 时级数发散， $\rho = 1$ 时可能收敛可能发散。
5. 根值审敛法（柯西判别法）：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ ，当 $\rho < 0$ 时级数收敛，当 $\rho > 0$ 时级数发散， $\rho = 1$ 时可能收敛可能发散。
6. 极限审敛法：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数：
    1. 若 $\lim_{n\to\infty} nu_n = l > 0$ ，则级数发散；
    2. 若 $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l \geq 0\ \ (p > 1)$ ，则级数收敛；

交错级数机器审敛法

交错级数：正负交错，例如： $-u_1, u_2, -u_3, u_4, \ldots, (-1)^n u_n$

莱布尼兹定理：若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足条件：

1. $u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$ ；
2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

那么级数收敛，且其和 $s \leq u_1$ ，其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$

> $$r_n = \pm \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^{i-1} u_i$$

绝对收敛与条件收敛

定义：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 同样收敛，则该级数绝对收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则该级数条件收敛。

幂级数

函数项级数相关定义：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ，对于每一个确定的值 $x_0 \in l$ ，函数项级数所成的常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 可能发散也可能收敛，若收敛，则 x_0 为收敛点，否则为发散点；函数项级数的收敛点的全体称为该级数的收敛域，发散点的全体为该级数的发散域。

幂级数： $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ，其中 a_n 为幂级数的系数。

阿贝尔（Abel）定理：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ 时收敛，那么适合不等式 $|x| \leq |x_0|$ 的 x 都可使该级数绝对收敛。反之，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ 时发散，那么适合不等式 $|x| \geq |x_0|$ 的 x 都可使该级数发散。

> 不等式 $|x| \leq |x_0|$ 可推得 $|x| \leq R$ ， R 为该级数的收敛半径，从而 $(-R, R)$ 为收敛区间，端点 R 可能收敛可能发散，由此可决定其收敛域有四种： $(-R, R)$ ， $[-R, R)$ ， $(-R, R]$ ， $[-R, R]$

定理：若：

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

则可得收敛半径：

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

函数展开为幂级数

定理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是在该领域内 $f(x)$ 的泰勒公式余项 $R_n(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限为零，即 $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0, \ x \in U(x_0)$ 。

> 麦克劳林展开式：
>
> $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n, \ (|x| < r)$$

常用展开式：

- $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \ (-\infty < x < +\infty)$$
- $$sin\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ (-\infty < x < +\infty)$$
- $$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \ (-1 < x < 1)$$

由上可推：

- $$ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \ (-1 < x \leq 1)$$

- $$cos\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\ (-\infty < x < +\infty)$$
- $$a^x = e^{(xlna)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(xln\ a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ln\ a)^n}{n!} x^n,\ (-\infty < x < +\infty)$$
- $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ (-1 < x < 1)$$
- $$arctan\ x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},\ (-1 \le x \le 1)$$

> 欧拉公式：
>
> $$e^{xi} = cos\ x + i\ sin\ x$$
>
> 可转化为：
>
> $$\begin{cases} cos\ x = \dfrac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \\ sin\ x = \dfrac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \end{cases}$$
>
> 欧拉公式揭示了三角函数与复变量指数函数之间的关系。

> 幂级数展开可用于做近似，通过计算余项可得到误差值。
>
> 还可用于求解微分方程的通解。

傅里叶级数

三角级数

$$y = \underbrace{A}_{振幅} sin(\underbrace{\omega}_{角频率} t + \underbrace{\varphi}_{初项})$$

傅里叶级数定义：

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(n\omega t + \varphi_n)$$

其中， A_0 为直流分量， $A_1 sin(\omega t + \varphi_1)$ 为一次谐波（基波）， $A_n sin(n\omega t + \varphi_n)$ 为n次谐波。

$$A_n sin(n\omega t + \varphi_n) = A_n sin\ \varphi_n\ cos\ n\omega t + A_n cos\ \varphi_n\ sin\ n\omega t$$

$$Set:\ \frac{a_0}{2} = A_0,\ a_n = A_n sin\ \varphi_n,\ b_n = A_n cos\ \varphi_n,\ \omega = \frac{\pi}{l}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_0\ cos\frac{n\pi t}{l} + b_0\ sin\frac{n\pi t}{l})$$

$f(t)$ 级数又叫三角函数， a_0, a_n, b_n 都是常数。

$$Set:\ \frac{\pi t}{l} = x$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_0\ cos\ nx + b_0\ sin\ nx)$$

傅里叶展开

设 $f(x)$ 是一个周期为 2π 的函数，且能展开为三角函数。若要进行傅里叶展开，则需要计算 a_0,a_n,b_n 。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi} cos\ kxdx + b_k\int_{-\pi}^{\pi} sin\ kxdx\right]$$

由于三角函数系的正交性，右端除了第一项，其余各项都为0：

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi \\ \Rightarrow \quad a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\end{aligned}$$

利用三角函数系的正交性，可求出 a_n,b_n ：

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos\ nxdx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos\ nxdx + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi} cos\ kx\ cos\ nxdx + b_k\int_{-\pi}^{\pi} sin\ kx\ cos\ nxdx\right] \\ &= a_n\int_{-\pi}^{\pi} cos^2\ nxdx = a_n\pi \\ \Rightarrow \quad a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos\ nxdx\end{aligned}$$

同理：

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin\ nxdx$$

综上所述，可将函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\ nx + b_n sin\ nx)$$

收敛定理（狄利克雷（Dirichlet）充分条件）：设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，若它满足：

1. 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；
2. 在一个周期内至多只有有限个极值点；

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且：

- 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$ ；
- 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$

> 对于一般周期的函数，需要将坐标轴缩放到周期为 2π ，然后才可计算其傅里叶级数，计算完要将坐标恢复为原来的一般周期。

> 傅里叶级数的复数形式，用欧拉公式替换三角项，再通过化简即可得到用复数表示的傅里叶级数。

正弦级数与余弦级数

当 $f(x)$ 为奇函数时， $f(x)cos\ nx$ 为奇函数， $f(x)sin\ nx$ 为偶函数：

$$\begin{aligned}a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin\ nxdx\end{aligned}$$

即，**奇函数**的傅里叶级数是只有正弦项的**正弦级数。**

同理，**偶函数**的傅里叶级数是只有余弦项的**余弦级数。**