Denoising Diffusion Restoration Models, DDRM

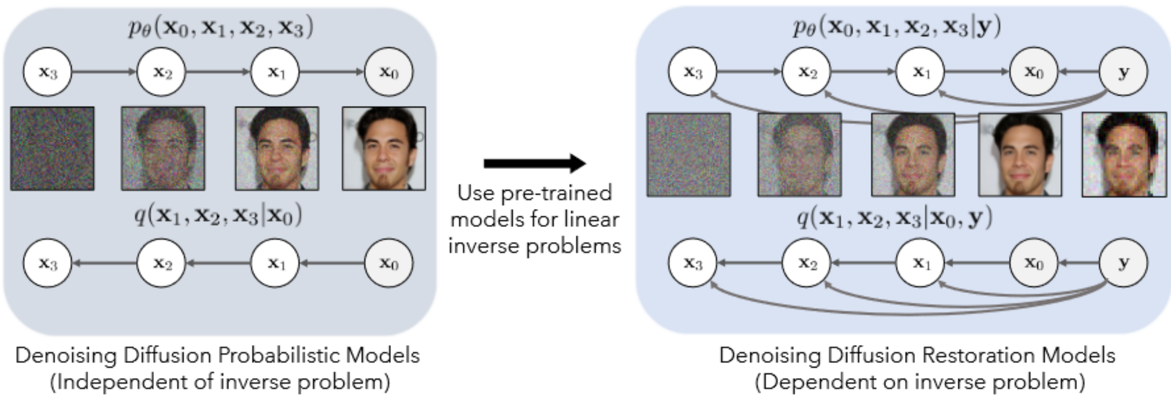
Introduction

对于一般的Diffusion模型 (基于Denoising Diffusion Probabilistic Model, DDPM) 来说, 它们使用后验分布进行低效的有监督迭代. DDRM 提出了一种高效的无监督后验迭代方案. DDRM不仅能做降噪, 在超分辨等方面都能取得很好的效果(humm,, of course...), 是第一个通用逆采样求解器.

创新点:

- 高效, DDPM需要1k以上Step, 它只需要20左右Step;
- 是个通用方法, 能求解很多问题;
- 在降噪问题上尤为擅长, 因为它可以很好地保留输入信息的基本信息.

Model



相比于DDPM, 公式表达上仅添加蓝色部分, 意思是每一`step`都与输入信号 y 有关, 即每一次扩散和采样的结果都忠实于测量值 y.

$$p_\theta(x^{(0:T)}|y) = p_\theta^{(T)}(x^{(T)}|y)\prod_{i=1}^{T-1} p_\theta^{(t)}(x^{(t-1)}|x^{(t)}, y)$$

$$q(x^{(1:T)}|x^{(0)}, y) = q^{(T)}(x^{(T)}|x^{(0)}, y)\prod_{t=1}^{T-1} q^{(t)}(x^{(t)}|x^{(t-1)}, x^{(0)}, y)$$

> 公式存在和之前笔记有点不同的解释, 但我看过后认为意思不变, 因此对公式进行了轻微调整.

对于一个线性逆问题, 可以表示为:

$$y = \mathbf{H}x + z,\ where\ \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ z \sim \mathcal{N}(0, \sigma_y^2\mathbf{I})$$

其中, 我们希望从测量值 y 恢复信号 x. 实现上, 可以使用SVD计算 $\mathbf{H}$. 通过SVD, 从数据 x 中识别 y 中缺失的信息.

$$\mathbf{H} = \mathbf{U\Sigma V^T}$$

$\mathbf{\Sigma}$ 中包含$\mathbf{H}$的奇异值, 并将奇异值降序排列. 其他定义, 一般来说, 奇异值对于$m \le n$, 但该方法同样有效于$m \ge n$. 假设: 表示奇异值为$s_i \ge s_2 \ge \ldots \ge s_m$, 定义 $s_i = 0,\ i \in [m+1, n]$.

定义如下简化符号:

- $\overline{x}_i^{(t)}$ 是 $\overline{x}^{(t)}=V^Tx^{(t)}$ 的第i个元素, 由于V是正定的, 因此 $\overline{x}^{(t)}$ 和 x^{(t)}$ 是可以相互恢复的;
- $\overline{y}_i$ 是 $\overline{y}=\Sigma^{\dagger}U^Ty$ 的第i个元素 (其中†表示这是Moore-Penrose伪逆, 反正就是一种伪逆);

对于 $\overline{x}_t$ 中每个元素, 可得到如下变分表达式:

$$q^{(T)}(\overline{x}_i^{(T)}|x_i^{(0)},y)=\begin{cases}\mathcal{N}(\overline{y}_i,\sigma_T^2-\frac{\sigma_y^2}{s_i^2}) & if\ s_i>0\\ \mathcal{N}(\overline{x}_i^{(0)},\sigma_T^2) & if\ s_i=0\end{cases}$$

$$q^{(t)}(\overline{x}_i^{(t)}|x_i^{(t+1)},x^{(0)},y)=\begin{cases}\mathcal{N}(\overline{x}_i^{(0)}+\sqrt{1-\eta^2}\sigma_t\frac{\overline{x}_i^{(t+1)}-\overline{x}_i^{(0)}}{\sigma_{t+1}},\eta^2\sigma_t^2) & if\ s_i=0\\ \mathcal{N}(\overline{x}_i^{(0)}+\sqrt{1-\eta^2}\sigma_t\frac{\overline{y}_i-\overline{x}_i^{(0)}}{\sigma_y/s_i},\eta^2\sigma_t^2) & if\ \sigma_t<\frac{\sigma_y}{s_i}\\ \mathcal{N}((1-\eta_b)\overline{x}_i^{(0)}+\eta_b\overline{y}_i,\sigma_t^2-\frac{\sigma_y^2}{s_i^2}\eta_b^2) & if\ \sigma_t\geq\frac{\sigma_y}{s_i}\end{cases}$$

其中, $\eta\in(0,1]$是一个超参数, 用于描述相变方差, 且η和η_b依赖于σ_t, s_i, σ_y.

上公式的分布满足$q(x^t|x^0)=\mathcal{N}(x^0,\sigma_t^2\mathbf{I})$.

和DDPM类似, 本文目标得到对于x^0在每一步 t 的预测值. 为了简化变量, 定义符号 $x^{(\theta,t)}$ 表示由模型 $f_\theta(x^{(t+1)},t+1):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^n$ 预测的值. 定义 $\overline{x}_i^{(\theta,t)}$ 为 $\overline{x}^{(\theta,t)}=V^Tx^{(\theta,t)}$ 的第i个值.

由此得到DDRM的可训练参数 θ 的模型:

$$p_\theta^{(T)}(\overline{x}_i^{(T)}|y)=\begin{cases}\mathcal{N}(\overline{y}_i,\sigma_T^2-\frac{\sigma_y^2}{s_i^2}) & if\ s_i>0\\ \mathcal{N}(0,\sigma_T^2) & if\ s_i=0\end{cases}$$

$$p_\theta^{(t)}(\overline{x}_i^{(t)}|x_i^{(t+1)},y)=\begin{cases}\mathcal{N}(\overline{x}_i^{(\theta,t)}+\sqrt{1-\eta^2}\sigma_t\frac{\overline{x}_i^{(t+1)}-\overline{x}_i^{(\theta,t)}}{\sigma_{t+1}},\eta^2\sigma_t^2) & if\ s_i=0\\ \mathcal{N}(\overline{x}_i^{(\theta,t)}+\sqrt{1-\eta^2}\sigma_t\frac{\overline{y}_i-\overline{x}_i^{(\theta,t)}}{\sigma_y/s_i},\eta^2\sigma_t^2) & if\ \sigma_t<\frac{\sigma_y}{s_i}\\ \mathcal{N}((1-\eta_b)\overline{x}_i^{(\theta,t)}+\eta_b\overline{y}_i,\sigma_t^2-\frac{\sigma_y^2}{s_i^2}\eta_b^2) & if\ \sigma_t\geq\frac{\sigma_y}{s_i}\end{cases}$$