Denoising Diffusion Restoration Models, DDRM

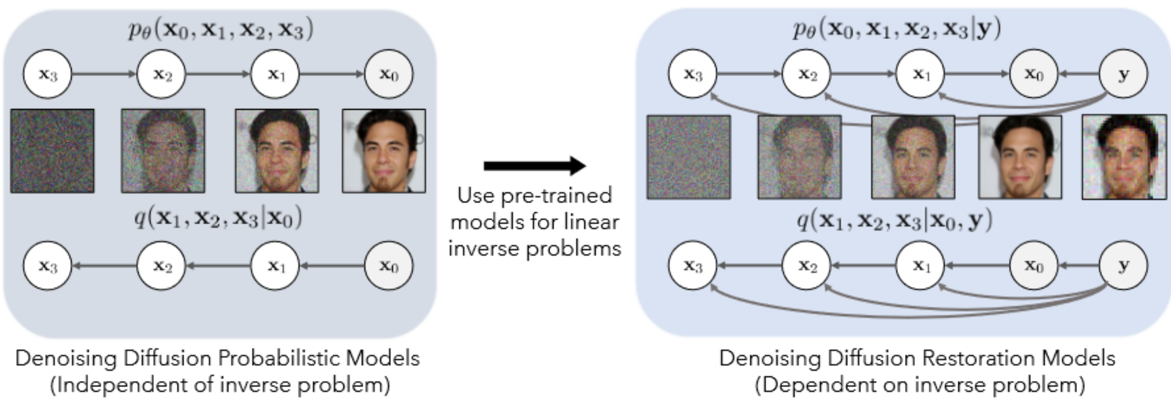
1. Introduction

对于一般的Diffusion模型（基于Denoising Diffusion Probabilistic Model, DDPM）来说，它们使用后验分布进行低效的有监督迭代. DDRM 提出了一种高效的无监督后验迭代方案. DDRM不仅能做降噪，在超分辨等方面都能取得很好的效果(humm,, of course...)，是第一个通用逆采样求解器.

创新点:

- 高效，DDPM需要1k以上Step，它只需要20左右Step;
- 是个通用方法，能求解很多问题;
- 在降噪问题上尤为擅长，因为它可以很好地保留输入信息的基本信息.

2. Model



相比于DDPM，公式表达上仅添加蓝色部分，意思是每一 `Step` 都与输入信号 y 有关，即每一次扩散和采样的结果都忠实于测量值 y.

$$p_\theta(x^{(0:T)}|y) = p_\theta^{(T)}(x^{(T)}|y) \prod_{i=1}^{T-1} p_\theta^{(t)}(x^{(t-1)}|x^{(t)}, y)$$

$$q(x_i^{(1:T)}|x_i^{(0)}, y) = q^{(T)}(x_i^{(T)}|x_i^{(0)}, y) \prod_{t=1}^{T-1} q^{(t)}(x_i^{(t)}|x_i^{(t-1)}, y)$$

> 公式存在和之前笔记有点不同的解释，但我看过后认为意思不变，因此对公式进行了轻微调整.

对于一个线性逆问题，可以表示为：

$$y = \mathbf{H}x + z,\ where\ \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ z \sim \mathcal{N}(0, \sigma_y^2\mathbf{I})$$

其中，我们希望从测量值 y 恢复信号 x. 实现上，可以使用SVD计算 $\mathbf{H}$. 通过SVD，从数据 x 中识别 y 中缺失的信息.

$$\mathbf{H} = \mathbf{U\Sigma V^T}$$

$\mathbf{\Sigma}$ 中包含$\mathbf{H}$的奇异值，并将奇异值降序排列. 其他定义，一般来说，奇异值对于$m \leq n$，但该方法同样有效于$m \geq n$. 假设：表示奇异值为$s_i \geq s_2 \geq \ldots \geq s_m$，定义
$s_i = 0,\ i \in [m+1, n]$.