向量空间

复数

一个复数就是一个有序的数对 (a,b)，，把所有复数构成的集合记作 C：

$$C=\{a+bi:\ a,b\in R\}$$

> 设 F 总表示 R 或 C，后文也会延续使用。

定义 F 中的元素为标量。

向量空间定义

用 R 表示一个向量空间，上标表示该向量空间的维度。

组（list）：按序排列，用逗号隔开并两端用圆括号括起来的n个对象。

集合（set）：顺序和和重复无关紧要，用花括号括起来的n个对象。（$\{4,5\}=\{4,4,5\}=\{5,4,5\}$

e.g.

$$R^3=\{(x,y,z):\ x,y,z\in R\}$$

这是一个三维实数空间，有所有有序三元实数组构成的。

高维空间定义：

$$F^n=\{(x_1,...,x_n):x_j\in F,j=1,...,n\}$$

> $$F^n=R^n\cup C^n$$

> 设定 V 是 F 上的向量空间，后文也会延续使用。

向量（vector）定义：若将 F^n 中的元素看为一个从原点出发到该坐标的箭头，则称之为向量。

多项式（polynomial）定义：一个函数 $p:F\to F$：

$$\exists a_0,...,a_m\in F,\ \ p(z)=a_0+a_1z+...+a_mz^m,\ z\in F$$

子空间

定义：若有一空间 U 是空间 V 的子集，则称为 V 的子空间。

e.g.

$$U=\{(x_1,x_2,0):x_1,x_2\in F\}$$

和与直和

和（sum）定义：设 $U_1,...,U_m$ 都是 V 的子空间，则这些子空间的**和**记作 $U_1+...+U_m$，即这些子空间中的元素的所有可能的和所构成的集合。

$$U_1+...+U_m=\{u_1+...+u_m:y_1\in U_1,...,u_m\in U_m\}$$

> $U_1,...,U_m$ 不一定是它们的和的子集。

直和（direct sum）定义：设 $U_1,...,U_m$ 都是 V 的子空间，使 $V=U_1+...+U_m$ ，其中，$\forall u\in V,\ u=u_1+...+u_m(u_1\in U_1,...,u_m\in U_m)$ 可被唯一表示，记作： $V=U_1\oplus...\oplus U_m$

$$V=\{u_1+...+u_m:u_1\in U_1,...,u_m\in U_m\}$$

e.g. 三维几何中，用 V_1 表示一个经过原点的直线的集合，用 V_2 表示与这直线垂直的平面的集合，则 V 就是它们的直和，记作 $V=V_1\oplus V_2$ 。

定理：设 $U_1,...,U_m$ 都是 V 的子空间， $V=U_1\oplus...\oplus U_m$ 当且仅当下面两条件成立：

1. $V=U_1+...+U_m$ ；
2. 若 $\mathbf{0}=u_1+...+u_m,u_i\in U_i$ ，则每个 u_j 都为 $\mathbf{0}$ ；

定理：设 $U_1,...,U_m$ 都是 V 的子空间， $V=U_1\oplus...\oplus U_m$ 当且仅当下列公式成立：

$$\bigcap_{i=1}^{m}U_i=\{0\}$$

有限维向量空间

张成与线性无关

张成（span）定义：若 V 中的一组向量 $(v_1,...,v_m)$ 的所有线性组合（linear combination）构成的集合为 $\{a_1v_1+...+a_mv_m:a_1,...,a_m\in F\}$ ，称为 $(v_1,...,v_m)$ 的张成。

$$span(v_1,...,v_m)=\{a_1v_1,...,a_mv_m:a_1,...,a_m\in F\}$$

> 张成可理解为有一组向量“生长”成的向量空间，强调这个向量空间的基向量。
>
> 线性子空间强调了一个向量空间，其基向量并不固定。

为了一致性，声明：空组 () 的张成等于 $\{0\}$ （空集不是 V 的子空间，因此需要额外声明）

有限维（finite dimensional）定义：若 $span(v_1,...,v_n)=V$ ，则称 $(v_1,...,v_n)$ 张成 V 。若一个向量空间可由它的一组向量张成，则称该向量空间是有限维的。

> F^n 是有限维的，因为它由 $((1,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,...,0,1))$ 张成。

线性无关（linearly independent）定义： V 中一组向量 $(v_1,...,v_m)$ ，若使 $a_1v_1+...+a_mv_m=0$ 当且仅当 $a_1=...=a_m=0$ ，称 $(v_1,...,v_m)$ 是线性无关的。

线性相关性引理（Linear Dependent Lemma）：若 V 中一组向量 $(v_1,...,v_m)$ 是线性相关的，且 $v_1\neq 0$ ，则有 $j\in\{2,...,m\}$ 使得下列成立：

- $v_j\in span(v_1,...,v_j-1)$ ；
- 若从 $(v_1,...,v_m)$ 中去掉 v_j ，则剩余向量组的张成依旧等于 $span(v_1,...,v_m)$ ；

定理：在有限维向量空间中，线性无关向量组的长度小于或等于张成向量组的长度。

> 命题：有限维向量空间的子空间都是有限维的。

基

基（basis）定义：若 V 中一个向量组即是线性无关的，又张成 V ，则称之为 V 的基。

> 如 $((1,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,...,0,1))$ 的基又名**标准基**（standard basis）

命题：若 V 中一组向量 $(v_1,...,v_m)$ 是基，当且仅当满足下列式子：

$$\forall v\in V,\ \exists\, a_1,...,a_n\in F,\ v=a_1v_1+...+a_nv_n$$

定理：在向量空间中，每个张成组都能化简成一个基。

定理：在有限维向量空间中，每个线性无关向量组都可以扩充成一个基。

命题：设 V 是有限维的， U 是 V 的一个子空间，则存在 V 的一个子空间 W 使 $V = U \oplus W$ 。

维数

定理：有限维向量空间的任意两个基的长度都相同。

维数（dimension）定义：有限维空间的任意基的长度，记作 $dim\ V$ ，
$e.g.\ dim\ F^n = n, dim\ \mathcal{P}_m(\mathcal{F}) = m + 1$

命题：若 V 是有限维的，且 U 是 V 的子空间，则 $dim\ U \leq dim\ V$ 。

命题：若 V 是有限维的，则 V 中每个长度为 $dim\ V$ 的张成向量组都是 V 的一个基。

定理：若 U_1 和 U_2 是同一个有限维向量空间的两个子空间，那么：

$$dim(U_1 + U_2) = dim\ U_1 + dim\ U_2 - dim(U_1 \cap U_2)$$

线性映射

线性映射（linear map）定义：具有下列性质的函数 $T: V \to W$ 是从 V 到 W 的线性映射：

- 可加性 addivity： $\forall u, v \in V,\ \ T(u+v) = T(u) + T(v)$
- 齐次 homogeneity： $\forall a \in F,\ \ \forall v \in V,\ \ T(av) = a\,T(v)$

> 线性映射是函数的一种，而基于矩阵的变换也是函数的一种。

> 定义所有从 V 到 W 的**线性映射**所构成的集合为 $\mathcal{L}(V, W)$
>
> 注：
>
> - 微分：定义： $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(R), \mathcal{P}(R)) \quad \Leftrightarrow \quad T(P) = P'$
> - 积分：定义： $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(R), R) \quad \Leftrightarrow \quad T(P) = \int_0^1 P(x)dx$

零空间与值域

零空间（null space）定义：对于 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ， V 中被 T 映射为 0 的那些向量所构成的子集，称为 T 的零空间：

$$\text{null}\ T = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

> 一些数学家称它为核（kernel）
>
> 零空间的维度也叫零度（nullity）
>
> [(24 条消息) 线性代数 (十一) : 列空间与零空间的进一步介绍_方橙 - CSDN 博客]()

例子：在微分中， $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(R), \mathcal{P}(R)) \quad \Leftrightarrow \quad T(P) = P'$ ，只有常函数的导数才是零函数，因此 T 的零空间等于常函数的集（e.g. $T(x) = 114514$ ）

> 简化写法： $Tv = T(v)$， $Tv(x) = T(v(x))$

命题：若 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ，则 $\text{null}\ T \in V$

单射：injective，又名one-to-one。

命题：设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ，则 T 是单射当且仅当 $\text{null}\ T = \{0\}$ ，即 $T(v) = 0 = T(0) \Leftrightarrow v = 0$

值域： $\text{range}\ T = Tv(v \in V)$

> 值域的维数也叫线性映射的秩（rank），并不一定等于其映射后的有限维空间的维数。

命题：若 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，则 $\text{range}\ T \in W$

满射（surjective）：$T \in \mathcal{L}(V, W)$，$\forall v \in V$，$Tv \in \text{range}\ T = W$

有限维向量空间上的线性映射的零空间的维数加上值域的维数等于定义域的维数。

定理：若 V 是有限维向量空间，$T \in \mathcal{L}(V, W)$，那么 $\text{range}\ T$ 是 W 的有限维子空间，且：

$$\dim V = \dim \text{null}\ T + \dim \text{range}\ T$$

- **推论**：若 V 和 W 都是有限维向量空间，并且 $\dim V > \dim W$，那么 V 到 W 的线性映射一定不是单射。
- **推论**：若 V 和 W 都是有限维向量空间，并且 $\dim V < \dim W$，那么 V 到 W 的线性映射一定不是满射。

线性映射的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，$(v_1, \ldots, v_n)$ 是 V 的基，$(w_1, \ldots, w_m)$ 是 W 的基，对于每个 $k = 1, \ldots, n$，Tv_k 都可唯一写成这些 w 的线性组合：

$$Tv_k = a_{1,k}w_1 + \cdots + a_{m,k}w_m$$

由 $a_{j,k}$ 构成的矩阵记作：

$$\mathcal{M}(T, (v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_m))$$

若 $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_m)$ 在上下文中是自明的，那么简写为 $\mathcal{M}(T)$

简记写法：

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & \cdots & v_k & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} & \begin{bmatrix} & & a_{1,k} & & \\ & & \vdots & & \\ & & a_{m,k} & & \end{bmatrix} \end{array}$$

e.g. 若 $T \in \mathcal{L}(F^2, F^3)$，$T(x, y) = (x + 3y, 2x + 5y, 7x + 9y)$

$$T(1,0) = (1,2,7),\ \ T(0,1) = (3,5,9)$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 9 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

在矩阵计算中，基向量 $(v_1, \ldots, v_n)$ 写作矩阵 $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

可逆性

可逆（invertible）定义：若存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$、$S \in \mathcal{L}(W, V)$，使 ST 等于 V 上的恒等映射，TS 等于 W 上的恒等映射，即满足 $ST = I_V$，$TS = I_W$ 的线性映射 $S \in \mathcal{L}(W, V)$ 称为 T 的**逆**（inverse），写作 T^{-1}

命题：一个线性映射是可逆的当且仅当它既是单射又是满射。

同构（isomorphic）定义：若存在从一个向量空间到另一个向量空间的可逆线性映射，则这两个向量空间是同构的。

定理：两个向量空间同构当且仅当它们的维数相等。

> $\mathrm{Mat}(m,n,F)$ 为 m 行 n 列， $a_{i,j} \in F$ 的值域。
>
> 若 $\mathcal{L}(V,M)$ 是有限维的，则 $\mathcal{L}(V,M) = \mathrm{Mat}(m,n,F)$

命题：若 V,M 是有限维的，则 $\mathcal{L}(V,M)$ 是有限维的，且 $\dim \mathcal{L}(V,M) = (\dim V)(\dim M) = nm$

多项式

> 本章不包含线性代数的内容，讲的是从向量空间到其自身的线性映射时所学要的关于多项式的一些背景资料。

次数

对于函数 $p : F \to F$ ，若存在 $a_0, \dots, a_m \in F$ ，使对所有 $z \in F$ 有 $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ ，则称 p 为系数在 F 中的多项式。其中 $a_m \neq 0$ 则称 p 的次数为 m ，若所有系数 $a_0, \dots, a_m = 0$ 则说 p 的次数为 $-\infty$ 。

根（root）定义：设 $\mathcal{P}(F)$ 为系数在 F 中所有多项式所构成的向量空间， $\mathcal{P}_m(F) \in \mathcal{P}(F)$ 表示系数在 F 中次数不超过 m 的多项式组成的子空间。对于 $p \in \mathcal{P}(F)$ ，若满足 $\lambda \in F,\ p(\lambda) = 0$ ，则 λ 为 p 的根。

命题：设 $p \in \mathcal{P}(F)$ 是 m 次多项式， $m \geq 1$ ，令 $\lambda \in F$ ，则 λ 是 p 的根当且仅当存在 $m-1$ 次多项式 $q \in \mathcal{P}(F)$ 使 $p(z) = (z-\lambda)q(z)$

- **推论**：设 $p \in \mathcal{P}(F)$ 是 m 次多项式， $m \geq 0$ ，则 p 在 F 中最多有 m 个不互相等的根。

带余除法（Division Algorithm）：设 $p, q \in \mathcal{P}(F)$ ，且 $p \neq 0$ ，则存在多项式 $s, r \in \mathcal{P}(F)$ 使 $q = sp + r$ ，且 $\deg r < \deg p$

复系数

实系数

命题：设 p 是实系数多项式，若 $\lambda \in C$ 是 p 的根，则 $\bar{\lambda}$也是 p 的根。

> $\lambda \in C$ ，若 $\lambda = \bar{\lambda}$ ， λ 为实数。

本征值和特征向量

> 令 V 为 F 上非零维向量空间

不变子空间

> 令 $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V,V)$ ，表示算子的集合。算子是从一个向量空间到其自身的线性映射。
>
> $T \in \mathcal{L}(V)$ ，令 $T|_{U_j}$ 表示把 T 限制到更小的定义域 U_j 上。 $T|_{U_j}$ 可能不把 U_j 映射到自身，即 $T|_{U_j}$ 可能不是 U_j 上的算子。

不变性（invariant）定义：对于 $T \in \mathcal{L}(V)$ 和 V 的子空间 U ，若满足 $\forall u \in U$，$Tu \in U$ ，则称 U 在 T 下时不变的，即 $T|_U$ 是 U 上的算子当且仅当 U 在 T 下是不变的。

本征值（eigenvalue）和**本征向量**（eigenvector）定义：对于 $T \in \mathcal{L}(V^n)$ 和标量 $\lambda \in F$ ，若有非零向量 $\boldsymbol{u} \in V^n$ 使 $T\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ ，则称 λ 为本征值，满足这个 λ 的 $\boldsymbol{u}$ 是 T （相当于 λ ）的本征向量。

定理：设 $T \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是 T 的互不相同的本征值， $v_1, \cdots, v_m$ 是响应的非零本征向量，则 $(v_1, \cdots, v_m)$ 线性无关。

- **推理**：最多有 $\dim V$ 个互不相同的本征值。

多项式对算子的作用

上三角矩阵

定理：有限维非零复向量空间上的每个算子都有本征值。

命题：设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 关于 V 的某个基有上三角矩阵，则这个上三角矩阵对角线上的元素恰好是 T 的所有本征值。

对角矩阵

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

> 算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 关于 V 的某个基有对角矩阵，当且仅当 V 有一个由 T 的本质向量组成的基。

命题：若 $T \in \mathcal{L}(V)$ 有 $\dim V$ 个互不相同的本征值，则 T 关于 V 的某个基有对角矩阵。

命题：设 $T \in \mathcal{L}(V)$ ，并设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是 T 的互不相同的本征值，则下列等价：

- T 关于 V 的某个基有对角矩阵；
- V 有一个由 T 的本征向量组成的基；
- V 有在 T 下不变的1维子空间 $U_1, \cdots, U_n$ ，使 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ ；
- $V = \text{null}(T - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \text{null}(T - \lambda_m I)$ ；
- $\dim V = \dim \text{null}(T - \lambda_1 I) + \cdots + \dim \text{null}(T - \lambda_m I)$ ；

实向量空间的不变子空间

定理：在奇数为实向量空间上，每个算子都有本征值。

内积空间

范数（norm）：向量的长度、模长。 $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

内积（inner product）：一个将 V 中元素的每个有序对 (u, v) 都映射成一个数 $\langle u, v \rangle \in F$ 的函数。

内积空间（inner-product space）：带有内积的向量空间

行列式

全排列（排列）：n个不同的元素排成一排。

逆序：在一个按某种规律排列的排列中，当某对元素的先后顺序与标准次序不同时，就说它构成了一个逆序。

> 所有逆序的总数叫这个排列的逆序数。
>
> 逆序数为奇数的排列叫奇排列，逆序数为偶数的排列叫偶排列。

对换：将任意两个元素对调。

定理：一个排列中的任意两个元素对换，排列将改变奇偶性。

推论：奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数，偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数，

行列式**性质**：

- $|D| = |D^T|$；
- 对换行列式两行（列），行列式变号；
    - 若行列式有两行（列）完全相等，则此行列式等于零。
- 行列式某一行（列）的所有元素都乘同一个数 k，等于用数 k 乘此行列式。
- 行列式中若有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零。
- $$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}+a'_{i,1} & a_{i,2}+a'_{i,2} & \cdots & a_{i,n}+a'_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i,1} & a'_{i,2} & \cdots & a'_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix}$$
- $$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+kr_i} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1}+ka_{i,1} & a_{j,2}+ka_{i,2} & \cdots & a_{j,n}+ka_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix} (i \neq j)$$

余子式

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

> A_{ij} 为余子式，M_{ij} 为原矩阵中去掉第 i 行 j 列的新矩阵。

引理：若第 i 行或第 j 列所有元素除 (i,j) 元外均为零，则 $D = a_{ij}A_{ij}$

定理（行列式展开法则）：行列式等于它任一行（列）的个元素与其对应的余子式乘积之和，e.g. $D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ 、$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

推论：$\sum_{z=1}^{n} a_{iz}A_{jz} = 0 \ (i \neq j)$

矩阵

n元非齐次线性方程组：$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

n元齐次线性方程组：$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$

齐次方程组的零解：$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

> 元素是实数的矩阵叫实矩阵，元素是复数的矩阵叫复矩阵。
>
> 未额外说明，矩阵指实矩阵。

系数矩阵：$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$

未知数矩阵：$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

常数项矩阵：$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

增广矩阵：$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$

单位矩阵：$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

分块矩阵：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix}$，每一块都是个矩阵。

伴随矩阵：$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$

> 伴随矩阵中的每个项都是矩阵 A 的代数余子式。

> $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A^T}$

方阵的行列式**性质**：

- $|\boldsymbol{A}^T| = |\boldsymbol{A}|$
- $|\lambda\boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$
- $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$
- $\boldsymbol{AA^*} = \boldsymbol{A^*A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$

逆矩阵

定理：若矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$

定理：若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则矩阵可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A^*}$

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$，则称该矩阵为奇异矩阵，否则为非奇异矩阵。

> 可逆矩阵就是非奇异矩阵。

可逆规律（节选）：

- $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

- $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$

克拉默法则

对于n个线性方程的方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

它的解可用n解行列式表示。

克拉默法则：若 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{an}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$，则方程组有唯一解：

$$x_i=\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|},\ \ where\ \boldsymbol{A}_i=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,i-1}&b_i&a_{1,i+1}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,i-1}&b_n&a_{n,i+1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与线性方程组

初等变换

目的：通过将增广矩阵化简为**行阶梯形矩阵**（可画出一条折线，折线左侧全零，右侧每行的第一个元素为非零元，即首非零元），若还满足所有首非零元所在列的其他值为零，则该矩阵为**行最简形矩阵**。最终可得到方程组的线性解。

性质：矩阵 A 是一个 $m\times n$ 的矩阵，对矩阵进行一次初等行变化，相当于在矩阵左边乘一个相应的 m 阶初等矩阵；对矩阵进行一次初等列变化，相当于在矩阵右边乘一个相应的 n 阶初等矩阵。

推论：方阵 A 可逆的充分必要条件 $\boldsymbol{A}\overset{\boldsymbol{P}}{=\!=}\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{F},\ \ when\ \boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}$。

矩阵的秩

将一个增广矩阵化简为行阶梯形矩阵，其非零行数必定相等。

k阶子式定义：在矩阵中选取k行和k列，其选择的行与列相交的元素构成一个新的k阶行列式，称为矩阵 A 的k阶子式。

引理：设 $\boldsymbol{A}\overset{P}{=\!=}\boldsymbol{B}$， A 和 B 的非零子式的最高阶数相同，且等于其行阶梯形矩阵的非零行数。

矩阵的秩定义：设矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且其 $r+1$ 阶子式（若存在的话）全等于 0，那么 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(\boldsymbol{A}),Rank(\boldsymbol{A}),\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}$。

> 可逆矩阵又称满秩矩阵，奇异矩阵又称降秩矩阵。

秩的**性质**：

- $0\leq R(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leq min\{m,n\}$
- $R(\boldsymbol{A}^T)=R(\boldsymbol{A})$
- if $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$
- if $\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{Q}$ is reversible, $R(\boldsymbol{PAQ})=R(\boldsymbol{A})$
- $max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leq R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$
- $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leq R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$
- $R(\boldsymbol{AB})\leq min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$
- if $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$，$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leq n$

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

可写作： $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

若该方程组有解，则它是相容的；若无解，则称不相容。

定理：n元线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

- 无解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) < R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$
- 有唯一解的充分必要条件 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = n$
- 有无限多解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) < n$

定理：矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$

定理：设 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ ，则 $R(\boldsymbol{C}) \leq min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$

向量组的线性相关性

向量组及其线性组合

向量组（vector set）定义：若干个同维数的列向量（或行向量）所组成的集合。

定理：向量 b 能由向量组 $A : \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ 的秩等于矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b})$ 的秩。

向量组等价定义：若向量组 $\boldsymbol{B}$ 中的每个向量都能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，且向量组 $\boldsymbol{A}$ 中的每个向量都能由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示。

定理：向量组 $\boldsymbol{B}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示的充分必要条件是 $\text{rank } \boldsymbol{A} = \text{rank } (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 。

推论：向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $\text{rank } \boldsymbol{A} = \text{rank } \boldsymbol{B} = \text{rank } (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$

定理：向量组 $\boldsymbol{B}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，则 $\text{rank } \boldsymbol{B} \leq \text{rank } \boldsymbol{A}$ 。

线性相关

定义略；

定理：向量组 $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关的充分必要条件为 $\text{rank } \boldsymbol{A} = n$ ；线性相关的充分必要条件为 $\text{rank } \boldsymbol{A} < n$ 。

定理：若向量组 $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关，则向量组 $\boldsymbol{B} : \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n+m}$ 线性相关；若向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性无关。

向量组的秩

定义：设有向量组 $\boldsymbol{A}$ ，若在 $\boldsymbol{A}$ 中最多能选出 r 个线性无关向量，则这 r 个线性无关向量构成的向量组 $\boldsymbol{A}_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个最大线性无关向量组（简称最大无关组），最大无关组所含的向量个数 r 称向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $\boldsymbol{R}_A$ 。

定理：矩阵列向量的秩等于行向量的秩。

线性方程组的解的结构

齐次线性方程组

方程组的解向量：$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{21}\\ \vdots\\ \xi_{n1}\end{pmatrix}$ 称为方程组的解向量。

性质：

1. 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_2$ 为向量方程的解，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 也是向量方程的解；
2. 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 为向量方程的解，k 为实数，则 $\boldsymbol{x}=k\,\boldsymbol{\xi}_1$ 也是向量方程的解；
3. 设非齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_2$ 为向量方程的解，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 为对应的齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解；
4. 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_2$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解；

> 齐次线性方程组的基础解析为齐次线性方程组的解集的最大无关组。

定理：设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则 n 原齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解集 $\boldsymbol{S}$ 的秩为 $n-r$。

向量空间

向量空间定义：设 V 为n为向量的集合，若集合 V 非空，且集合 V 对于向量的加法及数乘两种运算封闭，那么称集合 V 为向量空间。

> 封闭：集合 V 中可进行向量的加法及数乘两种运算。

基变换过渡矩阵：定义旧基矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)$，定义旧基矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n)$，过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

相似矩阵及二次型

向量的内积、长度及正交性

内积定义：$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_n+y_n$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 都是列向量时有 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$

施瓦兹（Schwarz）不等式：$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]^2\le[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}][\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$

长度（范数）定义：$||\boldsymbol{x}||=\sqrt{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

正交向量组定义：若 n 维向量 $a_1,a_2,\dots,a_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $a_1,a_2,\dots,a_r$ 线性无关。

标准正交基定义：设 n 维向量 $e_1,e_2,\dots,e_r$ 是向量空间 $V(V\subseteq\mathbb{R}^n)$ 的一个基，若 $e_1,e_2,\dots,e_r$ 两两两正交，且都是单位向量，则称 $e_1,e_2,\dots,e_r$ 是 V 的一个标准正交基。

施密特（Schmidt）正交化：若 n 维向量 $a_1,a_2,\dots,a_r$ 是向量空间 $V(V\subseteq\mathbb{R}^n)$ 的一个基，要寻找一组标准正交基，则：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1&=\boldsymbol{a}_1\\
\boldsymbol{b}_2&=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1\\
&\cdots\cdots\\
\boldsymbol{b}_r&=\boldsymbol{a}_r-\sum_{i=1}^{r-1}\frac{[\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_i]}\boldsymbol{b}_i\\
\Rightarrow\ \boldsymbol{e}_1&=\frac{\boldsymbol{b}_1}{||\boldsymbol{b}_1||},\dots,\boldsymbol{e}_r=\frac{\boldsymbol{b}_r}{||\boldsymbol{b}_r||}
\end{aligned}
$$

正交矩阵（正交阵）定义：若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 。

方阵的特征值和特征向量

定义：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若数 λ 和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 使下列关系式成立，则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，非零向量 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

> 有非零解的充分必要条件为：$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$特 征 方 程： \pmb A\pmb x=\lambda\pmb x $

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ，则：

- $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$
- $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$
    - $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵的充分必要条件是它的 n 个特征值全不为零。

定理：设 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值， $\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n$ 为特征向量，若 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 互不相等，则 $\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关。

相似矩阵

相似矩阵定义：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ ，则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵， $\boldsymbol{P}$ 为相似变换矩阵。

定理：设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，则它们的特征多项式相同，从而它们的特征值相同。

推论：若 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ ，则 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

定理：若 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个互不相等的特征值。

对称矩阵对角化

对称矩阵**性质**：

1. 对称矩阵的特征值为实数；
2. 对称矩阵的两个不相等的特征值对应的特征向量正交。

定理：若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则必有正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 。其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

推论：若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵， λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 k 重根，则 $R(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=n-k$ ，从而对应特征值 λ 恰有 k 个线性无关的特征向量。

二次型及其标准型

二次型定义：含有 n 个变量 $x_1,x_2\dots,x_n$ 的二次齐次函数称为二次型。

$$\begin{aligned}f(x_1,\dots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+\\&2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n\end{aligned}$$

> 当 $j>i$ 时，取 $a_{ji}=a_{ij}$ ，则二元齐次函数可化简为 $f=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$

标准型定义：寻找一个可逆的线性变换：

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

使二次型只含有平方项，即 $f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$ ，称为二次型的标准型（法式）

规范型：系数 $k_i = -1, 0, 1$ 的标准型。

二次型矩阵化：

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) =& a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \\ & 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ =& (\, x_1, \ldots, x_n \,) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ =& \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

> 其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。
>
> 所有二次型都能确定一个对称矩阵，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为二次型的矩阵，称 $R(\boldsymbol{A})$ 为二次型 f 的秩。

合同定义：设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ ，使 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ ，则称矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 合同。

定理：任给二次型，总有正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ ，使 f 化为标准型 $f = \lambda_1y_1^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$ ，其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

求标准型：

$$\begin{aligned} & Set\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \\ & \Rightarrow f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} \\ & \qquad = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

正定二次型

定理（惯性定理）：设二次型 $f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 r ，且有两个可逆变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$ 使 $f = k_1y_1^2 + \cdots + k_ny_n^2\ \ (k_i \neq 0)$ ， $f = \lambda_1z_1^2 + \cdots + \lambda_nz_n^2\ \ (\lambda_i \neq 0)$ ，则这两个二次型中的系数中的正数个数相等。

正定二次型定义：设二次型 $f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ，若满足下列公式，则称它而正定二次型，并称其对称矩阵是正定的。

$$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},\ \ f(\boldsymbol{x}) > 0\ \ (Obviously\ \ f(\boldsymbol{0}) = 0)$$

> 同理可得负定二次型定义。

定理：二次型 $f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定的充分必要条件为它的标准型的 n 个系数都为正数，即它的规范性的系数都为 1 。

赫尔维茨定理：对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是： $\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式都为正。

$$a_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \cdots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

> 负定的充分必要条件：奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正。

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0$$