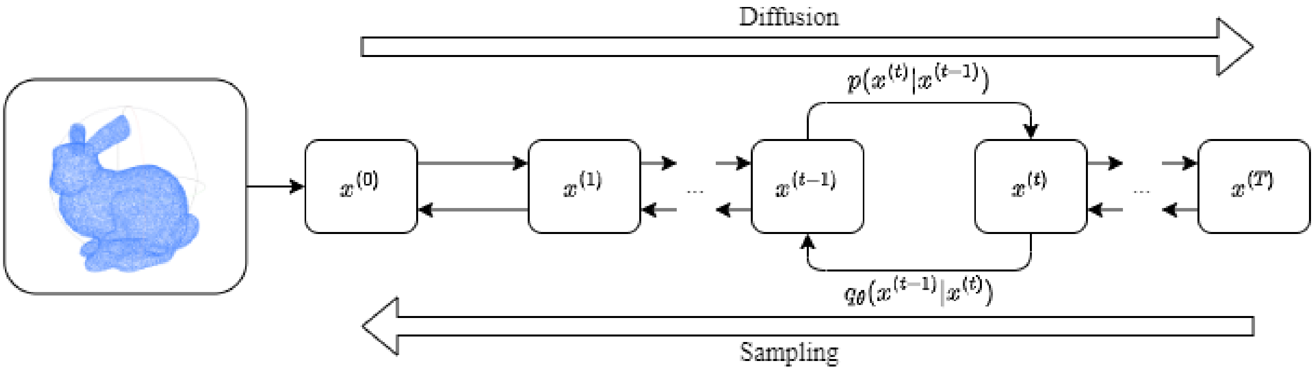
Score-based Diffusion Points cloud Denoising



基于DDPM和Score-based denoising方法可以实现基于Score-based的diffusion点云降噪方法

> 假设：基于diffusion的噪声正向问题 $y = \mathbf{H}x + z$ ，$\mathbf{H} \sim \mathbf{I}$。

正向扩散

定义正向推导满足如下分布：

$$q(x^{(t)}|x^{(t-1)}) = \mathcal{N}(x^{(t)};\ \sqrt{1-\beta_t}x^{(t-1)},\ \beta_t\mathrm{I}),\ q(x_{1:T}|x_0) = \prod_{t=1}^{T} q(x^{(t)}|x^{(t-1)})$$

定义 $\beta_t = \sigma_t^2,\ \alpha_t = 1 - \beta_t,\ \overline{\alpha}_t = \prod_{i=1}^{t} \alpha_t$

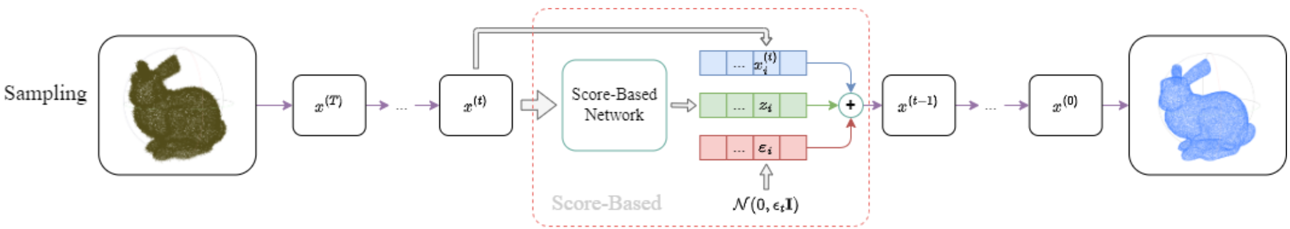
在扩散过程中，扩散遵循如下过程：

$$x^{(t)} = \sqrt{\alpha_t}x^{(t-1)} + \sqrt{1-\alpha_t}z,\ z \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$$

基于高斯可加性和随机过程推导，得到直接获得第 t 步噪声点云的方法：

$$\begin{aligned} x^{(t)} &= \sqrt{\alpha_t}x^{(t-1)} + \sqrt{1-\alpha_t}z_t \\ &= \sqrt{\alpha_t}(\sqrt{\alpha_{t-1}}x^{(t-2)} + \sqrt{1-\alpha_{t-1}}z_{t-1}) + \sqrt{1-\alpha_t}z_t \\ &= \sqrt{\alpha_t\alpha_{t-1}}x^{(t-2)} + \sqrt{1-\alpha_t\alpha_{t-1}}\overline{z}_t \\ &= \ \cdots \\ &= \sqrt{\overline{\alpha}_t}x^{(0)} + \sqrt{1-\overline{\alpha}_t}z,\ z \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}) \end{aligned}$$

Sampling: 逆向采样



由于$q_\theta(x^{(t-1)}|x^{(t)})$是个难以表示的分布，由于期望使用Score-based替代，因此需要寻找Score-based与正向扩散方程之间的等价变换关系。

$$x^{(t)} = \sqrt{\alpha_t}x^{(t-1)} + \sqrt{1-\alpha_t}z,\ z \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$$
$$\Rightarrow x^{(t-1)} = \frac{x^{(t)} - \sqrt{1-\alpha_t}z}{\sqrt{\alpha_t}},\ z = \frac{x^{(t)} - \sqrt{\alpha_t}x^{(t-1)}}{\sqrt{1-\alpha_t}}$$

定义 Score-based 分布梯度：

$$\nabla_x log[q_\theta(x^{(t-1)}|x^{(t)})] \approx -z = -\frac{x^{(t)} - \sqrt{\alpha_t}x^{(t-1)}}{\sqrt{1-\alpha_t}}$$

因此采样方程为：

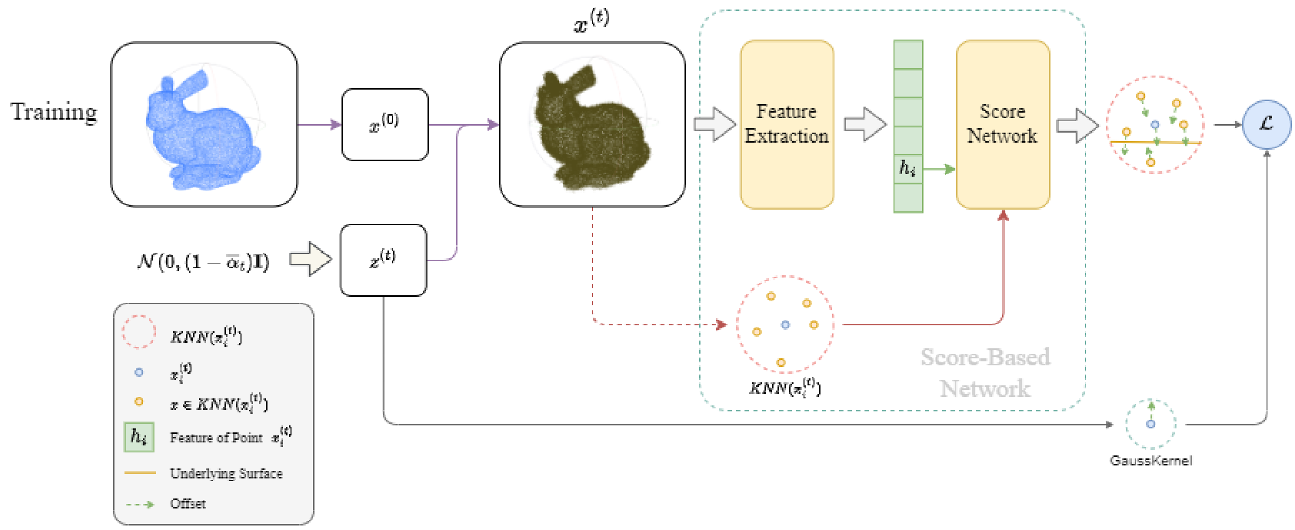
$$x^{(t-1)} = \frac{x^{(t)} + \sqrt{1-\alpha_t}\ \nabla_x log[q_\theta(x^{(t-1)}|x^{(t)})]}{\sqrt{\alpha_t}} + \varepsilon_t$$

其中，$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \epsilon_t\mathbf{I})$ 是一个随机扰动项，避免结果陷入局部。

Training: 正向扩散Loss

目前对于训练过程，存在几个方案，主要关于对训练目标的调整。

朴素方法



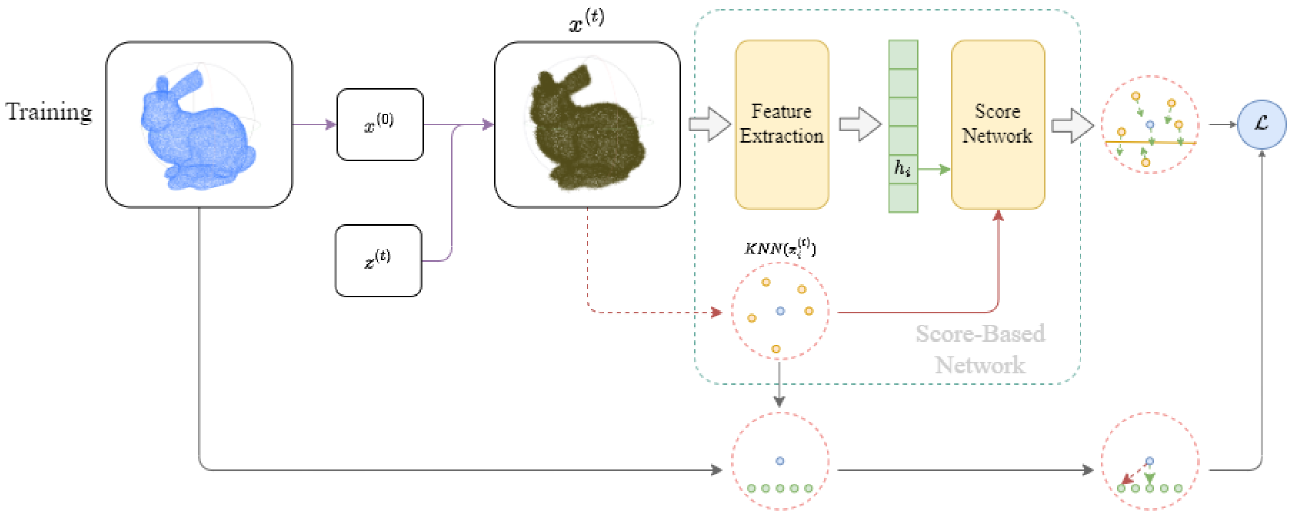
最简单能被获得的就是高斯噪声 $z^{(t)}$，而且它与 Score-based 梯度存在直接对应。

由此，可直接得到Loss：

$$\mathcal{L}_z(x_{0:T}, \{\beta_i\}_{i=1}^T) = \sum_{t=1}^{T} \beta_t^2\ \mathbb{E}_{x_i \in x^{(t)}} \left[\left|\left| \nabla_{x_i} log[q_\theta(x^{(t-1)}|x^{(t)})] + z_i^{(t)} \right|\right|_2^2 \right]$$

理由：无论 z 是否随机，$x^{(t)} = x^{(0)} + scale * z$，$z$ 的方向必然指向目标平面，但不是最近方向。尽管不是最近方向，也可以起到一定的正则项的作用，朴素直观上也能具有较好的效果。

最短移动方法（包含正则项）



高斯随机的方向不是最快方向，那么可以根据 $x_i^{(t)}$ 在GT里面找到最近的点，从中获得的最近方向：

$$\mathcal{L}_s(x_i) = NN(x_i, x^{(0)}, rad) - x_i$$
$$\mathcal{L}_s(x_i) = FN(x_i, x^{(0)}, rad) - x_i$$

其中，$NN(x_i, x^{(0)}, rad)$ 表示在GT $x^{(0)}$ 中获取半径 rad 内距离 x_i **最近**的点；$FN(x_i, x^{(0)}, rad)$ 表示在点集 $x^{(0)}$ 中获取半径 rad 内距离 x_i **最远**的点；L_r 为正则项。综合得到最后的Loss：

$$\mathcal{L}_a = \sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}_{x_i \in x^{(t)}} \left[\left|\left| \nabla_{x_i} log[q_\theta(x^{(t-1)}|x^{(t)})] - \left(\alpha \mathcal{L}_s(x_i) + (1-\alpha)\mathcal{L}_r(x_i)\right) \right|\right|_2^2 \right]$$