三门问题

Haitao Zhao

October 13, 2018

题目：假设你参加一个电视游戏节目，节目现场有三扇门，其中一扇门后面是一辆车，另外两扇门后面则是山羊。主持人让你选择其中的一扇门。不妨假设你选择了一号门吧。主持人故意打开了另外一扇门，比如说三号门，让你看见三号门的后面是山羊。然后主持人问你，“你想改变你的选择，换成二号门吗？”这时候，你会怎么做？

这里面有个隐含的条件就是主持人总是会打开一扇后面有山羊的门，然后询问你是否更换。这是个典型的概率问题，就是要计算换与不换情况下猜中车的概率，如果换后猜中车的概率更大，那么就应该更换；如果概率相同，则换不换无所谓；如果概率更小，则不应该更换。

我们可以讨论更一般的情况，假设有 n 扇门，用 ω_i 表示车在第 i 扇门后面，用 z_i 表示你选择第 i 扇门。假设车在哪扇门后面是等概率的，你在更换前和更换后的选择也都是等概率的。

令 $z_j^{(old)}$ 表示更换前的选择，即在主持人打开一扇有山羊的门之前你的选择是第 j 扇门；令 $z_k^{(new)}$ 表示更换后选择了第 k 扇门。我们下面计算更换后猜中的概率，就是要计算车在第 i 扇门后面的条件下，你更换后也选择了第 i 扇门的概率，$P(z_i^{(new)}|\omega_i)$。用全概率公式：

$$\begin{aligned}
P(z_i^{(new)}|\omega_i) &= \sum_{j=1}^{n} P(z_i^{(new)}, z_j^{(old)}|\omega_i) \\
&= P(z_i^{(new)}, z_i^{(old)}|\omega_i) + \sum_{j\neq i} P(z_i^{(new)}, z_j^{(old)}|\omega_i) \\
&= P(z_i^{(new)}|z_i^{(old)}, \omega_i)P(z_i^{(old)}|\omega_i) + \sum_{j\neq i} P(z_i^{(new)}|z_j^{(old)}, \omega_i)P(z_j^{(old)}|\omega_i)
\end{aligned}$$

由于你的选择总是更换，开始选择了第 i 扇门，更换后不可能还是选择第 i 扇门，所以$P(z_i^{(new)}|z_i^{(old)}, \omega_i)$ 的概率为 0。

下面考虑 $\sum_{j\neq i} P(z_i^{(new)}|z_j^{(old)},\omega_i)P(z_j^{(old)}|\omega_i)$ 的计算。针对 $P(z_i^{(new)}|z_j^{(old)},\omega_i)P(z_j^{(old)}|\omega_i)$ $(j \neq i)$ 的计算，由于你开始的选择时并不知道车在哪扇门后面，因此与车所在的那扇门无关，又因为选择是等可能的，所以 $P(z_j^{(old)}|\omega_i) = \frac{1}{n}$。而 $P(z_i^{(new)}|z_j^{(old)},\omega_i)$ 为车在第 i 扇门后且开始选择为第 j 扇门 $(j \neq i)$ 条件下，更换到第 i 扇门的概率。你开始选择了第 j 扇门，当主持打开一扇门 l（$l{\neq}i$）后，你可能的选择只有 $n-2$ 种（不包括 j，l, 但包括 i），等可能情况下，换到第 i 扇门的概率 $P(z_i^{(new)}|z_j^{(old)},\omega_i) = \frac{1}{n-2}$。从而有

$$\sum_{j\neq i} P(z_i^{(new)}|z_j^{(old)},\omega_i)P(z_j^{(old)}|\omega_i) = \sum_{j\neq i}\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n(n-2)}。$$

也就是更换后猜中车的概率 $P(z_i^{(new)}|\omega_i) = \frac{n-1}{n(n-2)}$。

如果开始选择后就确定不更换，那么猜中车的概率 $P(z_i^{(old)}|\omega_i) = \frac{1}{n}$，而 $\frac{n-1}{n(n-2)} > \frac{1}{n}$，因此从上述分析可得，你应该更换。特别的，当 $n = 3$ 时，更换后猜中的概率为 $\frac{2}{3}$，不更换猜中概率为 $\frac{1}{3}$，也就是更换后猜中的概率为不更换的两倍。