直角坐标系的欧拉旋转变换及动力学方程

朱雷鸣[1,2], 吴晓平[1], 李建伟[1], 吴 星[1]

(1. 解放军信息工程大学 测绘学院, 河南 郑州 450052; 2. 61365部队, 天津 300140)

摘要: 讨论了在直角坐标系中 12种欧拉旋转变换中的 6种坐标变换方式, 根据矩阵的运算性质, 推导了坐标变换的欧拉旋转矩阵和动力学方程, 并且用 Matlab的矩阵运算功能对所有公式的推导过程进行了验证。

关键词: 欧拉旋转变换; 旋转矩阵; 动力学方程; 欧拉角; 姿态角

中图分类号: P226+.3 文献标识码: A 文章编号: 1671-3044(2010)03-0020-03

1 引 言

在大地测量中, 对于同一个点的位置, 由于测量手段、计算方法和使用目的不同, 可以采用不同的坐标系统和参考系统, 得出不同的表示方式。在测绘范畴内, 坐标系统多达数十种, 都具有一定的理论意义和应用价值[3]。这使得在应用中需要进行不同坐标系间的相互转换。

不同坐标系间的坐标转换是指不同定义 (原点、三轴指向不同) 的坐标系间的转换, 即将一个坐标系内的一个几何点的坐标值转换为另一个坐标系的坐标值。因为球面坐标系、大地坐标系与直角坐标系是等价的, 它们之间存在惟一的变换关系, 可以通过直角坐标系间接完成坐标转换。因为平移和尺度变换较简单, 这里只讨论直角坐标系的旋转变换。两个坐标系的旋转可看作一个坐标系经过三次旋转到另一个坐标系, 而这三个旋转角即为欧拉角。按转动顺序可分为两类[4]: ①每次转动是绕不同类别的坐标轴进行的; ②第一次和第三次转动是绕同类坐标轴进行的, 第二次转动是绕另两轴中的一轴进行的。如以数字顺序 1、2、3分别代表坐标轴 x、y、z则 12种欧拉转动顺序可表示为: 1-2-3, 1-3-2, 2-1-3, 2-3-1, 3-1-2, 3-2-1和 1-2-1, 1-3-1, 2-1-2, 2-3-2, 3-1-3, 3-2-3。其中最常用的欧拉角旋转是 3-1-3和 3-1-2。

2 旋转矩阵

$$R_x(\theta_1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta_2)=\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2\end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta_3)=\begin{bmatrix}\cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0\\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

旋转矩阵具有三个性质[5]:

(1)旋转角 θ_i的量取: 对于右手系逆时针 (从旋转轴正向面向原点看) 旋转为正, 即根据右手法则进行旋转 (绕 X轴旋转时, 由 Y轴转向 Z轴; 绕 Y轴旋转时, 由 Z轴转向 X轴; 绕 Z轴旋转时, 由 X轴转向 Y轴); 对于左手系顺时针 (从旋转轴正向面向原点看) 旋转为正, 即根据左手法则进行旋转。

(2)正交性: 旋转矩阵为正交矩阵, 满足 $R_i(\theta_i)^{-1}=R_i(\theta_i)^{T}=R_i(-\theta_i)$。因此有:

$$\begin{aligned}&[R_z(\theta_3)R_y(\theta_2)R_x(\theta_1)]^{-1}\\ &=[R_x(\theta_3)]^{T}[R_y(\theta_2)]^{T}[R_z(\theta_1)]^{T}\\ &=R_x(-\theta_3)R_y(-\theta_2)R_z(-\theta_1)\end{aligned}\tag{1}$$

(3)按实际旋转顺序自右向左依次写出旋转矩阵, 顺序不能交换。例如旧坐标先绕 X轴旋转 θ_1角, 再绕 Y轴旋转 θ_2角, 最后绕 Z轴旋转 θ_3角得到新坐标, 从而新旧坐标系的旋转矩阵为: $R=R_z(\theta_3)R_y(\theta_2)R_x(\theta_1)$。

在实际工作中, 旋转角常常为秒级或不足 1s, 此时有下列各式成立:

$$\cos\theta_i=1,\quad \sin\theta_i=\theta_i,\quad \sin\theta_i\sin\theta_j=0\tag{2}$$

这时旋转矩阵可简化近似表示为:

收稿日期: 2009-01-05; 修回日期: 2009-08-18
作者简介: 朱雷鸣 (1976-), 男, 河北保定人, 工程师, 硕士研究生, 主要从事物理大地测量研究。

$$R\approx\begin{bmatrix}1&\theta_3&-\theta_2\\-\theta_3&1&\theta_1\\\theta_2&-\theta_1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\theta_3&-\theta_2\\-\theta_3&0&\theta_1\\\theta_2&-\theta_1&0\end{bmatrix}=I+\Psi \tag{3}$$

3　第一类旋转变换

第一类旋转变换的特点是:三次转动分别绕不同类别的坐标轴进行。在这类坐标变换中最常用的是 3-1-2型,常用于姿态测量,因此三个旋转角又称为姿态角。下面以 $O-x_1y_1z_1$ 转换为 $O-x_2y_2z_2$ 坐标系为例,分别讨论第一类的 6种旋转方式。

(1) 3—1—2:先绕 z轴旋转 α角,再绕 x轴旋转 β角,最后绕 y轴旋转 γ角。

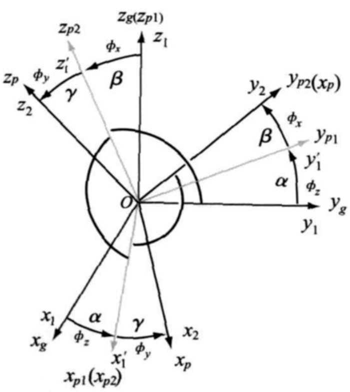

图 1　依次绕 z, x, y轴进行旋转变换

这是比较常用的一种坐标旋转方式。根据旋转矩阵可以写出坐标转换公式:

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}=R_y(\gamma)R_x(\beta)R_z(\alpha)\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\gamma&0&-\sin\gamma\\0&1&0\\\sin\gamma&0&\cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\beta&\sin\beta\\0&-\sin\beta&\cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha&0\\-\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix} \tag{4}$$

在三次旋转中,依次转动的旋转轴在旧坐标系中三轴上的投影为:① Oz_1在 x_1, y_1, z_1轴上的投影分别为:0, 0, 1;② Ox_1'在 x_1, y_1, z_1轴上的投影分别为:$\cos\alpha$, $\sin\alpha$, 0;③ Oy_2在 x_1, y_1, z_1轴上的投影分别为:$-\cos\beta\sin\alpha$, $\cos\beta\cos\alpha$, $\sin\beta$。这三次旋转所对应的旋转角速度分别为 $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\dot\gamma$,因此可得在 $O-x_1y_1z_1$中的 Euler运动学方程(或旋转角速度向量)为:

$$\vec{w}_1=\begin{bmatrix}w_{x_1}\\w_{y_1}\\w_{z_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot\beta\cos\alpha-\dot\gamma\cos\beta\sin\alpha\\\dot\beta\sin\alpha+\dot\gamma\cos\beta\cos\alpha\\\dot\alpha+\dot\gamma\sin\beta\end{bmatrix} \tag{5}$$

同理,在三次旋转中,根据每次转动的旋转轴在新坐标系 $O-x_2y_2z_2$中三轴上的投影,可得在此坐标系中的 Euler运动学方程(或旋转角速度向量)为:

$$\vec{w}_2=\begin{bmatrix}w_{x_2}\\w_{y_2}\\w_{z_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dot\alpha\cos\beta\sin\gamma+\dot\beta\cos\gamma\\\dot\alpha\sin\beta+\dot\gamma\\\dot\alpha\cos\beta\cos\gamma+\dot\beta\sin\gamma\end{bmatrix} \tag{6}$$

另外,角速度向量 $\vec{w}$除了可以通过旋转轴在坐标系上的投影直接得到,还可以通过旋转矩阵 R的转置的全微分 dR^T与 R的乘积 Ω中得到:

$$\Omega_1=dR^T\cdot R=\begin{bmatrix}0&-\omega_z&\omega_y\\\omega_z&0&-\omega_x\\-\omega_y&\omega_x&0\end{bmatrix}$$

式中,
$$dR^T=\dot\alpha\frac{\partial R^T}{\partial\alpha}+\dot\beta\frac{\partial R^T}{\partial\beta}+\dot\gamma\frac{\partial R^T}{\partial\gamma} \tag{7}$$

ω_i是在旧坐标系(1系)中表示的角速度向量 $\vec{w}_1$的分量。在新坐标系(2系)中表示的角速度向量可以通过以下关系求得:

$$\Omega_2=R\cdot dR^T \text{ 或 } \vec{w}_2=R\cdot\vec{w}_1$$

例如,在指北方位惯导系统中,地理系(g)到平台系(p)的转换关系[1]:

$$ox_gy_gz_g\xrightarrow[\varphi_z]{\text{绕 } z_g}ox_{p1}y_{p1}z_{p1}\xrightarrow[\varphi_x]{\text{绕 } x_{p1}}ox_{p2}y_{p2}z_{p2}\xrightarrow[\varphi_y]{\text{绕 } y_{p2}}ox_py_pz_p$$

$$\begin{bmatrix}x_p\\y_p\\z_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi_y&0&-\sin\varphi_y\\0&1&0\\\sin\varphi_y&0&\cos\varphi_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi_x&\sin\varphi_x\\0&-\sin\varphi_x&\cos\varphi_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi_z&\sin\varphi_z&0\\-\sin\varphi_z&\cos\varphi_z&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_g\\y_g\\z_g\end{bmatrix} \tag{9}$$

即:$\vec{r}_p=R_Y(\varphi_y)R_X(\varphi_x)R_Z(\varphi_z)\vec{r}_g$

在捷联惯导系统中,游移方位坐标系到机体坐标系之间有相似的转换关系[1]:

$$C_p^b=R_Y(\gamma)R_X(\beta)R_Z(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha&\cos\gamma\sin\alpha+\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha&-\sin\gamma\cos\beta\\-\cos\beta\sin\alpha&\cos\beta\cos\alpha&\sin\beta\\\sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\beta\sin\alpha&\sin\gamma\sin\alpha-\cos\gamma\sin\beta\cos\alpha&\cos\gamma\cos\beta\end{bmatrix} \tag{10}$$

式中, α、β 和 γ 分别为机体航向角、俯仰角和倾斜角。姿态矩阵为: $C_b^p = [C_p^b]^T$。

(2) 1—2—3: 先绕 x 轴旋转 α 角, 再绕 y 轴旋转 β 角, 最后绕 z 轴旋转 γ 角。

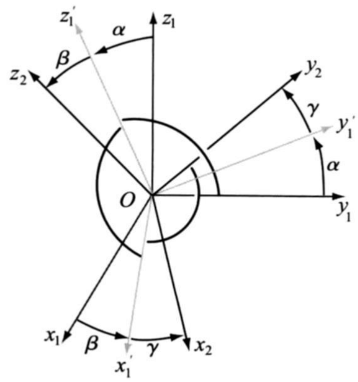

图 2 依次绕 x、y、z 轴进行旋转变换

旋转矩阵和欧拉运动学方程分别为:

$$R = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha) \tag{11}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} w_{x_1} \\ w_{y_1} \\ w_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} + \dot{\gamma}\sin\beta \\ \dot{\beta}\cos\alpha - \dot{\gamma}\cos\beta\sin\alpha \\ \dot{\beta}\sin\alpha + \dot{\gamma}\cos\beta\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} w_{x_2} \\ w_{y_2} \\ w_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma \\ -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma \\ \dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{13}$$

(3) 2—3—1: 先绕 y 轴旋转 α 角, 再绕 z 轴旋转 β 角, 最后绕 x 轴旋转 γ 角。

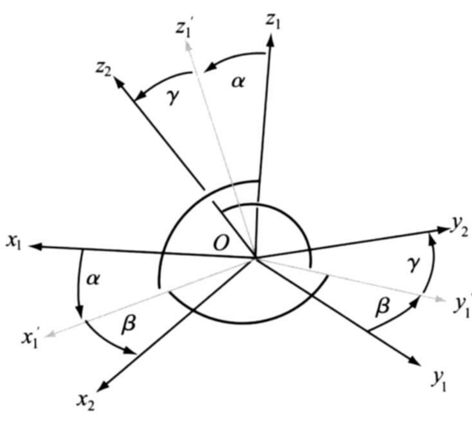

图 3 依次绕 y、z、x 轴进行旋转变换

旋转矩阵和欧拉运动学方程分别为:

$$R = R_x(\gamma)R_z(\beta)R_y(\alpha) \tag{14}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} w_{x_1} \\ w_{y_1} \\ w_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\beta}\sin\alpha + \dot{\gamma}\cos\beta\cos\alpha \\ \dot{\alpha} + \dot{\gamma}\sin\beta \\ \dot{\beta}\cos\alpha - \dot{\gamma}\cos\beta\sin\alpha \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} w_{x_2} \\ w_{y_2} \\ w_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma \\ -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma \end{bmatrix} \tag{16}$$

(4) 1—3—2: 先绕 x 轴旋转 α 角, 再绕 z 轴旋转 β 角, 最后绕 y 轴旋转 γ 角。

旋转矩阵和欧拉运动学方程分别为:

$$R = R_y(\gamma)R_z(\beta)R_x(\alpha) \tag{17}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} w_{x_1} \\ w_{y_1} \\ w_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} - \dot{\gamma}\sin\beta \\ -\dot{\beta}\sin\alpha + \dot{\gamma}\cos\beta\cos\alpha \\ \dot{\beta}\cos\alpha + \dot{\gamma}\cos\beta\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} w_{x_2} \\ w_{y_2} \\ w_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma \\ -\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma \end{bmatrix} \tag{18}$$

(5) 2—1—3: 先绕 y 轴旋转 α 角, 再绕 x 轴旋转 β 角, 最后绕 z 轴旋转 γ 角。

旋转矩阵和欧拉运动学方程分别为:

$$R = R_z(\gamma)R_x(\beta)R_y(\alpha) \tag{19}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} w_{x_1} \\ w_{y_1} \\ w_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\beta}\cos\alpha + \dot{\gamma}\cos\beta\sin\alpha \\ \dot{\alpha} - \dot{\gamma}\sin\beta \\ -\dot{\beta}\sin\alpha + \dot{\gamma}\cos\beta\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} w_{x_2} \\ w_{y_2} \\ w_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma \\ \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma \\ -\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{20}$$

(6) 3—2—1: 先绕 z 轴旋转 α 角, 再绕 y 轴旋转 β 角, 最后绕 x 轴旋转 γ 角。

旋转矩阵和欧拉运动学方程分别为:

$$R = R_x(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha) \tag{21}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} w_{x_1} \\ w_{y_1} \\ w_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\beta}\sin\alpha + \dot{\gamma}\cos\beta\cos\alpha \\ \dot{\beta}\cos\alpha + \dot{\gamma}\cos\beta\sin\alpha \\ \dot{\alpha} - \dot{\gamma}\sin\beta \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} w_{x_2} \\ w_{y_2} \\ w_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma \\ \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma \end{bmatrix} \tag{22}$$

4 结束语

本文较详细地讨论了在直角坐标系中坐标变换的欧拉旋转矩阵和动力学方程。通过以上分析可知, 在坐标系的旋转变换中, 需要选择合适的旋转次序和旋转方向。根据旋转次序及旋转方向的不同,

(下转第 40页)

参考文献:

[1] 张长清, 曹 华. 长江口北支河床演变趋势探析[J]. 人民长江, 1998, 29(2):32~34

[2] 黄 胜. 长江口演变特征[J]. 泥沙研究, 1986, (4):1~12.

[3] 陈吉余, 沈焕庭, 恽才兴, 等. 长江河口动力过程和地貌演变[M]. 上海:上海教育出版社, 1988.

[4] 杨留法. 试论粉砂淤泥质海岸带微地貌类型的划分——以上海市崇明县东部潮滩为例[J]. 上海师范大学学报, 1997, 26(3):72~77.

[5] 贾海林, 刘苍字, 杨 欧. 长江北支沉积动力环境分析[J]. 华东师范大学学报, 2001, (1):90~96.

[6] 杨世伦, 时 钟, 赵庆英. 长江口潮沼植物对动力沉积过程的影响[J]. 海洋学报, 2001, 23(4):75~80.

An Analysis of the Geomorphology and Evolvements Trend on North Bayou of Yangtze River

ZHANG Zhi-qiang[1,2,3], JIANG Jun-jie[2], ZHAN Wen-huan[3], Li Jie[2], QIAN Li-bing[2]

(1. Guangzhou Institute of Geochemistry, Chinese Academy of Sciences, Guangzhou, Guangdong, 510640;
2. South China Sea Branch of State Oceanic Administration, Guangzhou, Guangdong, 510300;
3. CAS Key Laboratory of Marginal Sea Geology, South China Sea Institute of Oceanology, Guangzhou, Guangdong, 510301)

Abstract: Based on field survey data, this paper analyzed and processed the collected data of water depth and side scan sonar at north bayou of Yangtze river. The conclusion is that geomorphology of north bayou consists of Huangguasha trough, Guyuansha trough and a ridge etc. In addition, the article collected bathymetric map of north bayou of Yangtze river in different years. We did comparative analysis of the map and the actual measurement data, concluded evolutionary process of this area in decades, and analyzed the evolutionary trend.

Key words: geomorphology; side scan sonar; chart; Yangtze river

(上接第 22页)

对应的旋转矩阵和运动学方程以及旋转角的大小和正负都不同。在已知两坐标系间的转换参数时,可以利用以上公式直接进行严密求解。否则,应先利用在两坐标系的公共已知点采用七参数等方法求出转换参数。

参考文献:

[1] 张宗麟. 惯性导航与组合导航[M]. 北京:航空工业出版社, 2000.

[2] 王丽红. 航空矢量重力测量中载体矢量加速度的确定方法[D]. 郑州:解放军信息工程大学测绘学院, 2008.

[3] 朱华统. 常用大地坐标系及其变换[M]. 北京:解放军出版社, 1990.

[4] 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制[M]. 北京:航空航天大学出版社, 1998.

[5] 赵德军. 航空矢量重力测量的理论与方法[D]. 郑州:解放军信息工程大学测绘学院, 2005.

The Euler's Rotation and Dynamic Equation of Rectangular Coordinate System

ZHU Lei-ming[1,2], WU Xiao-ping[1], LI Jian-wei[1], WU Xing[1]

(1. Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou, Henan, 450052;
2. 61365 Troops, Tianjin, 300140)

Abstract: In this paper, 6 instances of the 12 kind of Euler's rotation in the rectangular coordinate system were investigated and analyzed. The Euler's rotation matrix and dynamic equation were divided in detail and verified in Matlab software.

Key words: the Euler's rotation; the matrix of the rotation; dynamic equation; the Euler's angle; the angle of gesture