# 浅析欧拉角的定义及应用

◎刘　锋　李国平　(湖南工学院,湖南　衡阳　421002)

【摘要】本文首先介绍了欧拉角的定义及其在不同学科的应用,然后分析了欧拉角作为表达刚体姿态方法的优缺点.

【关键词】欧拉角;姿态;偏航角;滚动角;俯仰角

【基金项目】湖南工学院教研教改项目(JY201841)

## 一、旋转矩阵

描述刚体在空间中的姿态,我们可以用旋转矩阵.假设参考坐标系(固定坐标系)为坐标系$\{A\}$,固连于刚体的坐标系为$\{B\}$,则刚体相对于参考坐标系的姿态可表示为

$$ {}_{B}^{A}R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} $$

其中${}_{B}^{A}R$是正交矩阵,构成矩阵的每一列都是一个单位向量,且各列向量是互相正交的.对于右手坐标系,还有$|{}_{A}^{B}R|=1$.可以证明行列式等于1的所有$3\times3$正交矩阵以矩阵乘法作为群运算构成一个群,称为特殊正交群,记为$SO(3)$,$SO(3)$的最简表示需要3个参数.

旋转矩阵的9个元素,有6个约束,实际上只有3个自由变量.这就表示只需要3个独立的参数就可描述刚体在空间中的姿态.而且用旋转矩阵表示刚体的位姿,不直观,没有明显的物理意义.如果机器人操作人员要输入9个元素的矩阵来控制机器人到达预期的位置,这也是极不方便的事情.

鉴于旋转矩阵的缺点,我们介绍用含有三个角度参数的广义坐标来描述刚体位姿.

## 二、欧拉角的定义

### 1.欧拉定理

欧拉定理:有一不动点的刚体的一般位移是绕某一轴线的转动.

若把固连于刚体的坐标系的原点作为不动点,则刚体的位移不会包含坐标系的平移运动,只涉及坐标系的方向(刚体位姿)的变化.旋转运动有一个特征,就是旋转轴的方向不受旋转运动影响.因此,沿旋转轴方向的任何向量,在初始坐标轴和最终坐标轴上的分量相同,只要能够证明某个向量在初始坐标系和最终坐标系中坐标相同,就可证明欧拉定理.

欧拉定理实际上也给我们提供了一种表示刚体姿态的方法:等效轴角坐标系法.我们把欧拉定理中的旋转轴称为等效轴,绕轴的转角称为等效转角.这样刚体的任意姿态都可以选择适当的轴和角得到.物体绕轴旋转时姿态的变化,可用角位移描述.刚体的定点运动可看作刚体绕连续变化的转轴的转动过程,它对应一个角位移序列.所以,欧拉定理也可以表述为角位移序列等价于单个角位移.这样,角位移序列就可以表示任意旋转,从而欧拉角就诞生了.

### 2.欧拉角

欧拉角的基本思想是将角位移分解为绕三个互相垂直轴的三个旋转组成的序列.三个相互垂直的轴一般选笛卡儿坐标系的三个坐标轴,顺序是任意顺序.但不能绕连续同一旋转轴两次,这个很容易理解.比如,先绕$x$轴转$\alpha$角,再绕$x$轴转$\beta$角,根据复合旋转变换可知等价于一次绕$x$轴旋转$(\alpha+\beta)$角,所以,一般要求不能绕同一轴连续转两次.欧拉角的定义方式不是唯一的,根据坐标系绕其轴的旋转顺序不同,存在多种定义方式:首先,绕三个坐标轴中的任意轴转动,有三种情形;其次,绕除第一次转轴之外的任意一轴转动,有两种情形;最后,绕除第二次转轴之外的任意一轴转动,又有两种情形.因此,总计存在$3\times2\times2=12$种定义方式.一般给出欧拉角参数表示坐标系旋转时,都需要指出欧拉角的定义方式.

这12种不同顺序的欧拉角可分为两类:欧拉式和卡尔丹式,分别以欧拉和卡尔丹的名字命名.欧拉式是可以绕同一轴旋转两次,但不是连续的:$X-Y-X$,$X-Z-X$,$Y-X-Y$,$Y-Z-Y$,$Z-X-Z$或$Z-Y-Z$.卡尔丹式的特点是绕三个不同的轴旋转:$X-Y-Z$,$X-Z-Y$,$Y-Z-X$,$Y-X-Z$,$Z-X-Y$,$Z-Y-X$.要强调的是,这里的坐标轴是指固连于刚体的坐标系的,习惯上称为动坐标系.

一般来说,欧拉角的顺序是任意选择的,但在特定领域,都有其独特的约定.在经典力学、天体力学、应用力学、分子物理学和固态物理学中经常采用$Z-X-Z$顺序来设定欧拉角.

首先,我们设参考(全局)坐标系为$\{G\}(O-XYZ)$,刚体坐标系为$\{B\}(O-xyz)$.为了找到从坐标系$\{G\}$到坐标系$\{B\}$的旋转矩阵,我们首先使用刚体坐标系$\{B'\}(O-x'y'z')$,在第一次旋转之前,坐标系$\{B'\}$与$\{G\}$重合,现在$\{B'\}$绕$z'$轴旋转角$\varphi$(如图1),因为这时$Z$轴和$z'$轴重合,故$\{B'\}$相对于$\{G\}$的姿态为:

$$ {}_{B'}^{G}R=Rot(Z,\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

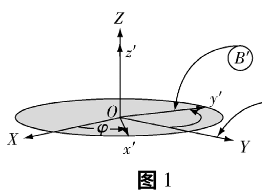


图1

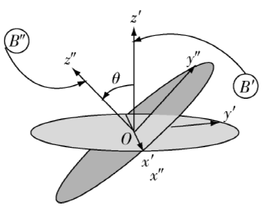


图2

经典力学中把绕$Z$轴旋转的角称为进动(precession)角,第一次绕$Z$轴转动的角$\varphi$就是进动角.

其次,考虑以坐标系$\{B'\}$为新的参考坐标系,现在引入坐标系$\{B''\}(O-x''y''z'')$.在第二次旋转前$\{B''\}$和$\{B'\}$重合,现在考虑绕$x''$轴旋转$\theta$角(如图2所示),因为$x''$轴和$x'$轴重合,所以$\{B''\}$相对于$\{B'\}$的旋转矩阵为:

$$ {}_{B''}^{B'}R=Rot(x',\theta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} $$

经典力学中把绕 $x$ 轴旋转的角称为章动(nutation)角，第二次绕 $x''$轴旋转的角 $\theta$ 就是章动角.

最后，再考虑以$\{B''\}$作为新的参考坐标系，在第三次旋转前，$\{B\}$($O-xyz$)和$\{B''\}$重合.现在$\{B\}$坐标系绕 $z''$轴旋转 $\psi$ 角(如图 3 所示)，则$\{B\}$相对于$\{B''\}$的姿态为:

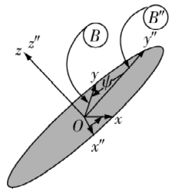

图 3

$$ {}^{B''}_{B}R=Rot(z'',\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} $$

经典力学中把绕 $z$ 轴旋转的角称为自转(spin)角，第三次绕 $z''$旋转的 $\psi$ 角即为自转角.

由旋转矩阵的复合运算，我们可得刚体坐标系相对于参考坐标系的姿态矩阵:

$$ {}^{G}_{B}R={}^{G}_{B'}R\,{}^{B'}_{B''}R\,{}^{B}_{B''}R=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} $$

$$ =\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi-\cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\end{pmatrix} $$

根据上面的讨论知，这种欧拉角定义方式为 $Z-X-Z$ 顺序.上式给出了用欧拉角表示刚体姿态的矩阵，可以证明此矩阵仍然是正交矩阵，只要证明：${}^{G}_{B}R^{G}_{B}R^{T}=E$.

$$ \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi-\cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\end{pmatrix} $$

仍然是正交矩阵，它和刚体某个姿态对应的旋转矩阵相等，也就是说，知道 $Z-X-Z$ 定义的三个欧拉角 $\varphi,\theta,\psi$，就可以写出对应的旋转矩阵.现在考虑它的逆问题，也就是知道旋转矩阵，求出 $Z-X-Z$ 定义的三个欧拉角.假设旋转矩阵为:

$$ R=\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{pmatrix} $$

则有

$$ \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi-\cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\end{pmatrix} $$

$$ =\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{pmatrix}. $$

由两矩阵相等，对应元素相等，可得

$$ \begin{cases} r_{11}=\cos\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi, \quad r_{12}=-\cos\varphi\sin\psi-\cos\theta\cos\psi\sin\varphi\\ r_{13}=\sin\theta\sin\varphi, \quad r_{21}=\cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi\\ r_{22}=-\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi, \quad r_{23}=-\cos\varphi\sin\theta, r_{31}=\sin\theta\sin\psi\\ r_{32}=\sin\theta\cos\psi, \quad r_{33}=\cos\theta \end{cases} $$

在经典力学中，通常假设

$$ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\psi\leqslant2\pi. $$

当 $\sin\theta\neq0$($\theta=0$ 或 $\pi$)时，由 $r_{33}=\cos\theta$，得 $\theta=\arccos r_{33}$.

由 $r_{13}=\sin\theta\sin\varphi$ 和 $r_{23}=-\cos\varphi\sin\theta$，得 $\varphi=-\arctan\dfrac{r_{13}}{r_{23}}$或 $\varphi=\pi-\arctan\dfrac{r_{13}}{r_{23}}$.

由 $r_{31}=\sin\theta\sin\psi$ 及 $r_{32}=\sin\theta\cos\psi$，得 $\psi=\arctan\dfrac{r_{31}}{r_{32}}$或 $\psi=\pi+\arctan\dfrac{r_{31}}{r_{32}}$.

这样由$\dfrac{r_{13}}{r_{23}}$确定的 $\varphi$ 的正切值，利用反正切函数求出的 $\varphi$ 有两个，不能确定哪一个是我们需要的 $\varphi$.同理，求 $\psi$ 时也会遇到这种情况.为了解决这个问题，我们需要知道 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 的符号.由正弦和余弦符号确定角所在象限的规则如下:

(1) $\sin\varphi$ 为正，$\cos\varphi$ 为正，$\varphi$ 在第一象限，且 $\varphi=\arctan\left(\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)$；(2) $\sin\varphi$ 为正，$\cos\varphi$ 为负，$\varphi$ 在第二象限，且 $\varphi=\pi+\arctan\left(\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)$；(3) $\sin\varphi$ 为负，$\cos\varphi$ 为负，$\varphi$ 在第三象限，且 $\varphi=\pi+\arctan\left(\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)$；(4) $\sin\varphi$ 为负，$\cos\varphi$ 为正，$\varphi$ 在第四象限，且 $\varphi=\arctan\left(\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)$.

在 matlab 计算软件中，用双变量反正切函数 $a\tan2(\sin\varphi,\cos\varphi)$ 来计算 $\arctan\left(\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)$，这样做的好处就在于可以根据 $\sin\varphi$，$\cos\varphi$ 的符号来确定 $\varphi$ 所在的象限.例如，$a\tan2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=45^\circ$，而 $a\tan2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-135^\circ$，利用单变量反正切函数计算结果一样，都是45°，不能区分这两个角.

在这里求欧拉角 $\varphi,\theta,\psi$ 时，我们也采用双变量反正切函数.因为已知 $r_{33}=\cos\theta$，现在需要求出 $\sin\theta$，由 ${r_{31}}^2+{r_{32}}^2=\sin^2\theta\sin^2\psi+\sin^2\theta\cos^2\psi=\sin^2\theta$，得 $\sin\theta=\sqrt{{r_{31}}^2+{r_{32}}^2}$，所以 $\theta=a\tan2\left(\sqrt{{r_{31}}^2+{r_{32}}^2},r_{33}\right)$.

因此，$\sin\varphi=\dfrac{r_{13}}{\sqrt{{r_{31}}^2+{r_{32}}^2}}$，$\cos\varphi=-\dfrac{r_{23}}{\sqrt{{r_{31}}^2+{r_{32}}^2}}$，所以

$$ \varphi=a\tan2\left(\frac{r_{13}}{\sqrt{{r_{31}}^2+{r_{32}}^2}},-\frac{r_{23}}{\sqrt{{r_{31}}^2+{r_{32}}^2}}\right). $$

同样可得，$\sin\psi=\dfrac{r_{31}}{\sqrt{{r_{31}}^2+{r_{32}}^2}}$，$\cos\psi=\dfrac{r_{32}}{\sqrt{{r_{31}}^2+{r_{32}}^2}}$，所以

$$ \psi=a\tan2\left(\frac{r_{31}}{\sqrt{{r_{31}}^2+{r_{32}}^2}},\frac{r_{32}}{\sqrt{{r_{31}}^2+{r_{32}}^2}}\right). $$

在求 $\sin\theta$ 时，之所以取 ${r_{31}}^2+{r_{32}}^2$ 的正平方根，是因为要求 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.若 $\theta=0^\circ$或 $180^\circ$时，用上边的公式就不能求出 $\varphi$ 和 $\psi$ 了，这种情况称为解退化.这时，只能求出 $\varphi$ 和 $\psi$ 的和或差:

当 $\theta=0^\circ$时，$\cos\theta=1$，由 $r_{11}=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi=\cos(\varphi+\psi)$ 和 $r_{21}=\cos\psi\sin\varphi+\cos\varphi\sin\psi=\sin(\varphi+\psi)$，得$\varphi+\psi=a\tan2(r_{21},r_{11})$.

当 $\theta=180^\circ$时，$\cos\theta=-1$，由 $r_{11}=\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi=\cos(\varphi-\psi)$ 和 $r_{21}=\cos\psi\sin\varphi-\cos\varphi\sin\psi=\sin(\varphi-\psi)$，得 $\varphi-\psi=a\tan2(r_{21},r_{11})$.

根据前面的旋转图可知，当 $\theta=0^\circ$时，$Ox'y'$坐标平面和 $OXY$ 坐标平面重合，$x'$轴的位置不确定，$\varphi$ 和 $\psi$ 不确定，表明

欧拉角在几何上具有奇点.当 $\theta=180°$ 时,$Ox'y'$ 坐标平面和 $OXY$ 坐标平面也重合,只是 $y'$ 轴和 $z'$ 轴的正向与 $Y$ 轴和 $Z$ 轴正向相反.

基于 $Z$-$X$-$Z$ 顺序欧拉角的特点,经常用来描述章动角 $\theta$ 不变,而进动角速度 $\dot{\varphi}$ 和自转角速度 $\dot{\psi}$ 为匀速运动的刚体.

在量子力学、核物理学和粒子物理学中,习惯上采用 $Z$-$Y$-$Z$ 顺序定义的欧拉角,它和 $Z$-$X$-$Z$ 顺序的区别在于第二次旋转是绕中间轴 $y''$ 旋转的.对应的旋转矩阵为:

$$
{}_B^GR=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\cos\theta\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\theta\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cos\theta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta\end{pmatrix}
$$

同样假设

$$
\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\cos\theta\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\theta\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cos\theta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta\end{pmatrix}
$$

则和 $Z$-$X$-$Z$ 顺序类似,可以得到:

$$\theta=a\tan 2\left(\sqrt{r_{13}{}^2+r_{23}{}^2},r_{33}\right)$$

$$\varphi=a\tan 2\left(\frac{r_{23}}{\sqrt{r_{13}{}^2+r_{23}{}^2}},\frac{r_{13}}{\sqrt{r_{13}{}^2+r_{23}{}^2}}\right)$$

$$\psi=a\tan 2\left(\frac{r_{32}}{\sqrt{r_{13}{}^2+r_{23}{}^2}},-\frac{r_{31}}{\sqrt{r_{13}{}^2+r_{23}{}^2}}\right)$$

当 $\theta=0°$ 或 $180°$ 时,也是无法求出 $\varphi$ 和 $\psi$ 角.

上面这两种顺序的欧拉角,当 $\theta\to0°$ 时,即 $z$ 轴接近 $Z$ 轴时,$\varphi$ 和 $\psi$ 角就无法区分开了.为了解决这个问题,可以使三次转动绕不同的轴转动.在航空、航天及航海领域,采用的就是绕三个不同轴旋转的欧拉角,即卡尔丹式欧拉角,也称泰特-布莱恩角或导航角.对于飞行器或地面车辆,通常定义 $x$ 轴方向为前进方向,$z$ 轴方向为垂直向下方向,$y$ 轴方向为右手方向.飞机的坐标系如图 4.

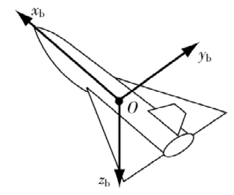

图 4

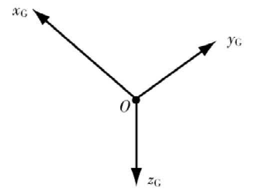

图 5

地理坐标系采用北-东-地坐标系,如图 5.

我们采用 $Z$-$Y$-$X$ 顺序的欧拉角描述飞机坐标系$\{B\}$相对于地理坐标系$\{G\}$的姿态.初始状态$\{B\}$和$\{G\}$重合,然后$\{B\}$坐标系绕 $z_b$ 轴旋转 $\psi$ 角,接着再绕 $y_b$ 轴旋转 $\theta$ 角,最后绕 $x_b$ 轴旋转 $\varphi$ 角.$\psi,\theta,\varphi$ 习惯上称为偏航角、俯仰角和滚转角.则飞机坐标系$\{B\}$相对于地理坐标系$\{G\}$的姿态为:

$$
{}_B^GR=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\theta\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\\ \cos\theta\sin\psi & \sin\varphi\sin\theta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi\\ -\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta\end{pmatrix}
$$

同样给出一个姿态矩阵,可以确定相应的欧拉角,当 $\cos\theta\neq0$ 时,有:

$$\theta=a\tan 2\left(-r_{31},\sqrt{r_{11}{}^2+r_{21}{}^2}\right)$$

$$\varphi=a\tan 2\left(\frac{r_{32}}{\sqrt{r_{11}{}^2+r_{21}{}^2}},\frac{r_{33}}{\sqrt{r_{11}{}^2+r_{21}{}^2}}\right)$$

$$\psi=a\tan 2\left(\frac{r_{12}}{\sqrt{r_{11}{}^2+r_{21}{}^2}},\frac{r_{11}}{\sqrt{r_{11}{}^2+r_{21}{}^2}}\right)$$

当 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 时,解不唯一,在几何上称为奇异点.当飞机在做垂直翻筋斗飞行时,该动作可以用俯仰角在 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 范围内连续变化来表示,滚转角和偏航角都为 0.实际上,我们可限制俯仰角在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内,因为在实际飞行中,飞机很少达到或超过这个范围飞行,在地面车辆和舰船中更不可能出现大的俯仰角.当飞机俯仰角达到 $\frac{\pi}{2}$ 时,允许滚转角和偏航角突然从 0 变为 $\pi$ 弧度,这时飞机颠倒并且反向飞行.当飞机俯仰角达到 $\frac{\pi}{2}$ 时,机头竖直向上,通过姿态零点之后,俯仰角逐渐减小,当机头竖直向下时,俯仰角达到 $-\frac{\pi}{2}$,滚转角和偏航角又变回 0.这样一来,除了俯仰角为 $\pm\frac{\pi}{2}$ 以外,欧拉角都是唯一确定的.

在描述机械手姿态时,也可使用 RPY 角,其中绕接近轴 $a$ 轴旋转称为滚动,绕方向轴 $o$ 轴旋转称为俯仰,绕法线轴 $n$ 轴旋转称为偏航.

除了上边介绍的绕刚体坐标系的坐标轴旋转的欧拉角之外,还有绕参考坐标系的坐标轴旋转的角坐标系.比如,$X$-$Y$-$Z$ 固定角坐标系,也就是固定 RPY 角坐标系.

欧拉角应用广泛,除了前边所提到的之外,它还可以用来描述 3D 游戏轴物体的姿态、导弹及卫星的姿态,是惯性导航中描述载体姿态的一种很重要的方法.

## 三、结 论

从前边的讨论知,欧拉角在描述姿态时有很多优点,它使用最少的参数,三个角度,而且具有明显直观的物理意义,符合人们思考姿态的方式.在使用计算软件计算时,也只要输入三个角度,很方便.但欧拉角也有表达方式不唯一,有奇点,当两连续旋转轴共线时还会出现万向节死锁类似的问题.另外,在进行欧拉角插值时也会出现很多问题.这些问题有些可以通过对欧拉角取值范围进行限制来解决,有些是采用这种最简表示法的一种不幸的后果,需采用其他方法描述姿态,才能避开这种问题.

【参考文献】


[1] Herbert Goldstein,Charles Poole,John Safko.经典力学:第 3 版[M].北京:高等教育出版社,2005.

[2] 布赖恩·L.史蒂文斯,弗兰克·L.刘易斯.飞机控制与仿真:第 2 版[M].唐长红,等译.北京:航空工业出版社,2017.

[3] Fletcher Dunn,Ian Parberry.3D 数学基础:图形与游戏开发[M].史银雪,陈洪,王荣静,译.北京:清华大学出版社,2005.