

空间运动构件姿态的欧拉角表示

The Expression of the Orientation of a Spatial Moving Unit by Euler Angle

黄 真 李艳文 高 峰

摘 要 系统的介绍了欧拉角, 又着重分析了欧拉角如何描述物体的姿态, 为正确选用提供基础。这对于研究机器人的空间运动是有意义的。

关键词 运动学, 欧拉角, 姿态。

Abstract This paper represents a systematic introduction of Euler angle firstly. Then the paper laid special stress on analyzing how to describe the orientation of the moving body by using Euler angles, which is convenient for selection of Euler angle. It is useful for analysis of motion of robot manipulators.

Key words kinematics, Euler angle, orientation.

0 前言

由于欧拉角特别适合描述物体的姿态和方向, 在机器人学中经常应用, 但有关欧拉角的材料在文献中少而分散, 不易正确理解, 应用时常选择不当。本文较系统地介绍了欧拉角, 又着重分析欧拉角如何描述物体的姿态, 这些为正确选用提供基础。

描述构件的空间方位最常用的是 3×3 的方向余弦矩阵 R 和 4×4 的位姿矩阵^[1-5]。方向余弦矩阵表示了以连于空间物体的动坐标系 S_b 的 3 个正交单位矢量对于定坐标系 S_0 的方向余弦, $R_b^0 = [i_b^0 \ j_b^0 \ k_b^0]$, R_b^0 是正交矩阵, 在它的 9 个元素中存在 6 个约束条件, 因而只有 3 个元素是独立的。

虽然特别适合做矩阵运算的方向余弦矩阵和位姿矩阵, 作为坐标系之间的映射和作为点的运动算子都得到广泛的应用, 但是方向余弦矩阵对描述

物体在空间的姿态不是很方便的。一方面, 要计算多达 9 个参数。另一方面, 它很难直观地形成物体在空间的具体方位。

还有一种描述物体空间姿态的方法称为“角度给定法”。这种方法只需给出三个角度即可。一种是 RPY 法, 它起源于描绘航船的姿态, 一个是绕航船前进方向即是 Z 轴方向的 Roll 转角 ϕ , 第二个是绕水平 Y 轴方向的 Pitch 角 θ , 第三个是绕铅垂 X 轴方向的 Yaw 角 ψ 。这里 RPY 法中的 X, Y, Z 三轴是固定坐标系的三轴。在“角度给定法”中另一种更常用的方法是欧拉角 (Euler) 方位表示法。欧拉角表示物体的方位有很长的历史了, 在航海天文上广泛应用, 基于它的特殊性质在机器人学中将有重要的应用。用它计算不仅一样的方便有效, 最主要的是用它表示物体的方位或姿态确实是十分的方便, 这是其他方法所不具有的。可是关于欧拉角的基础知识的介绍不仅不系统, 一些方面还不深入, 使初学者不能正确地选择。本文先对欧拉角做一较系统的介绍, 并对欧拉角的种类和它对于姿态和方位的描述做一分析。

1 欧拉角分析

在起始的时候, 动坐标系的三个轴 x_0, y_0 和 z_0 与固定坐标系的三个轴 X, Y 和 Z 轴分别重合。第一次转动采取动坐标系绕 z_0 转过 α 角, 达到新的坐标系 $x_1y_1z_1$ 。第二次转动将动坐标系绕 y_1 转过 β 角达到新的坐标系 $x_2y_2z_2$; 第三次转动坐标系绕新的 x_2 轴转

2002 年 5 月 5 日收到。国家 863 计划 (项目编号: 2001AA421280)。

黄 真 (Huang Zhen), 李艳文 (Li Yanwen), 燕山大学机械工程学院, 秦皇岛 066004 (The College of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)。

高 峰 (Gao Feng), 河北工业大学, 天津 30000 (Hebei Institute of Technology, Tianjin 300000)。

过 γ 角到达最终的位置 xyz 。这整个三次转动过程记为 $Z-Y-X$ 的转动方式,三次转动绕不同名称的三个轴。

欧拉角描绘物体运动的另一种方法是 $Z-Y-Z$ 型,三次先后转过 ϕ , θ 和 ψ ,见图1。与 $Z-Y-X$ 型不同只是它的第三次转动是将动坐标系 $x_2y_2z_2$ 不是绕 x_2 轴而是绕 z_2 轴转过一个角度。即第一和第三的两次转动绕同一名称的轴来转动,如第一次绕 z_0 轴转动,第三次绕 z_2 轴,三次转动绕了不同名称的两个轴。

1.1 欧拉角分析^[1,3-5]

1.1.1 $Z-Y-Z$ 型欧拉角 $Euler(\phi_z, \theta_y, \psi_z)$

在这种 $Z-Y-Z$ 型欧拉角下,第一次转动绕 z_0 转过 ϕ 角,见图1,第二次绕 y_1 轴转过 θ 角;第三次绕 z_2 轴转过 ψ 角到达最终的位置 xyz 。当给出 $Z-Y-Z$ 型三个欧拉角 ϕ, θ, ψ 时,反映动平台最终的姿态矩阵为

$$Euler(\phi_z, \theta_y, \psi_z) = [R_{z\phi}][R_{y\theta}][R_{z\psi}] = \begin{bmatrix} C_\phi C_\theta C_\psi - S_\phi S_\psi & -C_\phi C_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta \\ S_\phi C_\theta C_\psi + C_\phi S_\psi & -S_\phi C_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

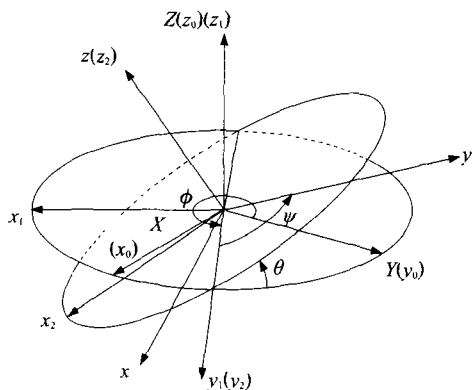


图1 $Z-Y-Z$ 型欧拉角

Fig. 1 Euler angles $Z-Y-Z$

若已知物体的姿态矩阵

$$R = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

要求得到 $Z-Y-Z$ 型的三个欧拉角,它们是

$$\begin{cases} \theta = \arctan \frac{\sqrt{n_z^2 + o_z^2}}{a_z} \\ \phi = \arctan \frac{a_y}{a_x} \\ \psi = \arctan \frac{o_z}{-n_z} \end{cases} \quad (3)$$

这里采用双变量正切函数来计算反正切函数,其优点是利用双变量的两个符号可以判定角度的象限。

1.1.2 $Z-Y-X$ 型欧拉角

第一次转动绕 z_0 转过 α 角,第二次绕 y_1 轴转过 β 角;第三次绕 x_2 轴转过 γ 角到达最终的位置 xyz 。

$$Euler(\alpha_z, \beta_y, \gamma_x) = [R_{z\alpha}][R_{y\beta}][R_{x\gamma}] =$$

$$\begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & C_\alpha S_\beta S_\gamma - S_\alpha C_\gamma & C_\alpha S_\beta C_\gamma + S_\alpha S_\gamma \\ S_\alpha C_\beta & S_\alpha S_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma & S_\alpha S_\beta C_\gamma - C_\alpha S_\gamma \\ -S_\beta & C_\beta S_\gamma & C_\beta C_\gamma \end{bmatrix} \quad (4)$$

要求 $Z-Y-X$ 型的三个欧拉角

$$\begin{cases} \alpha = \arctan \frac{n_y}{n_x} \\ \beta = \arctan \frac{-n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \\ \gamma = \arctan \frac{o_z}{a_z} \end{cases} \quad (5)$$

1.2 24种角度设定法

包括RPY法和欧拉角法都是以先后设定连续转动的三个角度而确定物体的姿态的。文献中简单地提到一共“有24种不同的排列”^[5]。RPY法的角度给定是相对固定坐标系的,而欧拉角的给定却是相对运动坐标系的。这里只考虑欧拉角法的这12种设立方法。由于转动的排列顺序的不同就有了如下12种不同的欧拉角组合。见表1。

表1 12种不同的欧拉角组合

Tab. 1 The twelve kinds of Euler angle

序号	三轴设定法	类型	两轴设定法	类型
1	ZYX	I	ZYZ	III
2	ZXY	II	ZXZ	IV
3	YXZ	I	YXY	III
4	YZX	II	YZY	IV
5	XZY	I	XZX	III
6	XYZ	II	XYX	IV

如再考虑RPY型的给定,它也有12种设定。这

样三参数的角度给定法就有了 24 种不同的方案。

分析表中 12 种欧拉角, 可以发现在这些排列不同的欧拉角中, 很多是相似的。如第二列中三个不同的转轴构成 6 种欧拉角顺序, 实质上 ZYX, YXZ 和 XZY 三者是相似的, 因为它们是按 XYZ 三名称的反序排列, 只是起始的轴不同而已。而 ZXY, YZX 和 XYZ 等三者也只是起始的轴不同的 XYZ 的正序排列。对于表中的第 4 列的两轴设定法也存在相同的情况。所以从这个角度看, 这 12 种不同的欧拉角实质上只有 4 种是真正的不同, 它们是: ZYX、ZXY、ZYZ 和 ZXZ。在这 4 种中最有代表性的是 ZYX 和 ZYZ, 本文集中分析这两种。相对动坐标系的三个欧拉角转动还可以看成是具有公共汇交点的串联三杆开式运动链之相对转动。

2 欧拉角对于物体姿态的描述

在机构的分析过程中, 常常希望能够及时地知道物体在空间的姿态, 甚至希望随时了解物体的姿态。方向余弦矩阵虽然能够表示物体的姿态, 但很不直观, 不便于及时地了解物体的方向。表示物体的方向的欧拉角能够较好地表示出物体的姿态, 十分直观, 这就方便进行机构的分析。为突出地表示运动物体的方向或姿态, 称 xy 平面为动平面, XY 为固定平面。运动和静止两个平面的交线定义为“脊线”, 脊线能突出地反映了动平面的方位, 是我们分析运动平面方位或姿态的重要依据。表示方位的特征线—脊线在第二次转动完成时出现, 此后的第三次转动并不改变脊线的位置。与前面相同, $O-XYZ$ 表示固定参考系, $O-xyz$ 表示共原点的动坐标系, 对应轴也相互重合。本文这里讨论 $Z-Y-X$ 和 $Z-Y-Z$ 两种情况, 讨论在此两种欧拉角给定下如何判断动平台的方位。

2.1 $Z-Y-X$ 型的欧拉角

2.1.1 两平面相平行的姿态

物体的 xy 运动平面与起始的 XY 平面平行, 此时三个欧拉角中的后两个欧拉角 β, γ 都等于零, $\beta=\gamma=0$, 那就是 $(\alpha \ 0 \ 0)$, 式中任何的角都表示这样两平面相平行的姿态。

2.1.2 用欧拉角表示倾斜姿态下出现的脊

$(0 \ \beta \ 0)$: 脊是 y 轴, 且它与 Y 轴重合, 经过一次转动达此姿态;

$(0 \ 0 \ \gamma)$: 脊是 x 轴, 且它与 X 轴重合, 经过一次转动达此姿态;

$(\alpha \ \beta \ 0)$: 仅仅是 y 轴与脊重合, 经过两次转动达此姿态;

$(\alpha \ 0 \ \gamma)$: 仅仅是 x 轴与脊重合, 经过两次转动达此姿态;

这种方式下如同时给出三个欧拉角 $(\alpha \ \beta \ \gamma)$, 这是很难直接依赖 $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ 三个欧拉角直观判定脊线以确定姿态的。

2.2 $Z-Y-Z$ 型的欧拉角

2.2.1 两平面相平行的姿态

物体的 xy 运动平面与 XY 平面平行, 此时三个欧拉角中的中间欧拉角 θ 必须等于零, $\theta=0$, 这时有三种情况:

$(\phi \ 0 \ 0)$: 物体仅绕 z_0 轴转了一个 ϕ 角;

$(0 \ 0 \ \psi)$: 物体仅绕 z_2 轴转了一个 ψ 角;

$(\phi_1 \ 0 \ \psi_2)$: 物体仅绕 z_0 轴转了一个 ϕ_1 角后, 又仅绕 z_2 轴转了一个 ψ_2 角。 ϕ_1 和 ψ_2 可以为任何值。

对于前两种情况, 当 $\phi=\psi$ 时, 它们是完全相同的; 对于这整个三种情况, 当 $\phi_1+\psi_2=\phi=\psi$ 时, 三者是相同的。

2.2.2 用欧拉角表示倾斜姿态下出现的脊

$(0 \ \theta \ 0)$: 坐标轴 Y 和 y 都与脊线重合, 物体做了一次转动;

$(0 \ \theta \ \psi)$: Y 轴与脊线重合, y 与脊线成 ψ 角;

$(\phi \ \theta \ 0)$: y 与脊线重合;

$(270^\circ \ \theta \ 0)$: X, y 两者都与脊线重合;

$(270^\circ \ \theta \ \psi)$: 仅 X 与脊线重合;

$(0 \ \theta \ 90^\circ)$: Y, x 两者都与脊线重合;

$(\phi \ \theta \ 90^\circ)$: x 轴线与脊线重合;

$(\phi \ \theta \ \psi)$: 在这种最一般的情况下脊线也不难判定, 将 y 轴反转 ψ 角为脊, 或者将 y_0 角正转 ϕ 角为脊线。

2.2.3 运动平面仅发生偏摆不发生绕Z轴的角位移

$(0 \ \theta \ 0)$: 脊线是坐标轴Y和 y_0 ;

$(\phi \ \theta \ -\phi)$: 脊线不与Y坐标轴重合。

对比Z-Y-X型和Z-Y-Z型可以看到Z-Y-Z型更适合用来描绘物体的方位。

3 $(0 \ \beta \ \gamma)$ 型的Z-Y-X转动

对于Z-Y-X型的欧拉角, 三次转动分别绕 z, y , 和 x 轴转动。给人的印象好像是, 如果物体仅先后绕 y 和 x 两轴转动, 其结果相对Z轴不会有角位移。这个结论是不对的。

图2表示运动平台转动Z-Y-X型欧拉角 $(0 \ \beta \ \gamma)$ 后的姿态 xyz 。第一步绕 z 轴转动的角度为0; 第二步绕 y 轴转动 β 角; 第三步绕 x 轴转动 γ 角。上述的姿态也可用Z-Y-Z型欧拉角 $(\phi \ \theta \ \psi)$ 表示于图2上。物体绕 x_2 轴发生这样的 γ 角转动, Y轴转至 y 轴处, 对应的弧长 $ca=cb$ 。而有弧长 $ac' < bc'$ 。从图中可以看到脊线过 ca 弧上的点 c' , Oc' 是脊线, θ 角是偏摆角, 弧 ac' 不等于弧 bc' , 这就说明实际上发生了绕Z轴的旋转, $\psi + \phi < 360^\circ$ 。由此看来, 虽然Z-Y-X型欧拉角 $(0 \ \beta \ \gamma)$ 第一次绕Z轴的转角 $\alpha=0$, 在这种Z-Y-X欧拉角下仍旧发生绕Z的旋转。

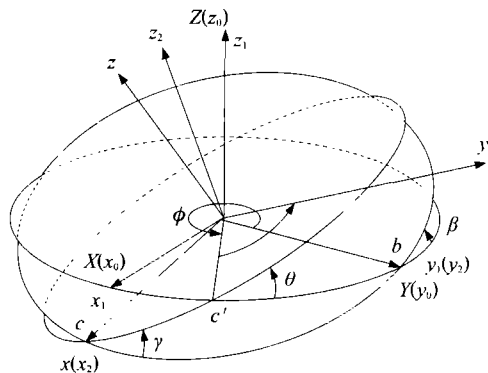


图2 Z-Y-X型欧拉角 $(0 \ \beta \ \gamma)$

Fig. 2 Euler angles Z-Y-X $(0 \ \beta \ \gamma)$

4 结论

本文较系统的介绍和分析欧拉角描述物体姿态的各方面问题, 讨论12种欧拉角后, 确立了4种基本的欧拉角。Z-Y-Z型欧拉角能较方便地描述物体的方位。对于考虑物体姿态特别有意义的情况时推荐采用Z-Y-Z型欧拉角。文中给出的多种Z-Y-Z型的欧拉角组合的几何表示是很有实用意义。

参考文献

- 1 Paul R P. Robot Manipulators. Cambridge: The MIT Press, 1981,43-47
- 2 Tuma J J. Dynamics. New York: Quantum Publishers INC, 1974,180-185
- 3 Suh C H, Radcliffe C W. Kinematics and Mechanism Design. New York: John Wiley & Sons, 1978,47-51
- 4 张启先. 空间机构的分析与综合, 北京: 机械工业出版社, 1984,71-98
- 5 熊有伦, 丁汉, 刘恩沧. 机器人学. 北京: 机械工业出版社, 1993,36-40

黄真 男, 1936年出生, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 并联机器人机构学理论的研究。出版专著两本, 在国内外发表论文200余篇。