2018 年全国各地高考数学试题及解答分类汇编大全

（04 导数及其应用）

一、选择题

1．（2018 全国新课标Ⅰ文、理）设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$．若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，0)$ 处的切线方程为（　　）

A． $y=-2x$　　B． $y=-x$　　C． $y=2x$　　D． $y=x$

1． 答案：D

解答：∵ $f(x)$ 为奇函数，∴ $f(-x)=-f(x)$，即 $a=1$，∴ $f(x)=x^3+x$，∴ $f'(0)=1$，∴切线方程为： $y=x$，∴选 D.

二、填空

1．（2018 江苏）若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in\mathbf{R})$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为__▲__.

1.【答案】 -3

【解析】由 $f'(x)=6x^2-2ax=0$ 得 $x=0$， $x=\dfrac{a}{3}$，因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个零点且 $f(0)=1$，所以 $\dfrac{a}{3}>0$， $f\left(\dfrac{a}{3}\right)=0$，

因此 $2\left(\dfrac{a}{3}\right)^3-a\left(\dfrac{a}{3}\right)^2+1=0$， $a=3$，

从而函数 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递增，在 $[0,1]$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(0)$， $f(x)_{\min}=\min\{f(-1),f(1)\}=f(-1)$，

$f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=f(0)+f(-1)=1-4=-3$.

2．（2018 天津文）已知函数 $f(x)=e^x\ln x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则 f'（1）的值为__________.

2.【答案】 e

【解析】由函数的解析式可得： $f'(x)=e^x\times\ln x+e^x\times\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$，

则 $f'(1)=e^1\times\left(\ln 1+\dfrac{1}{1}\right)=e$. 即 $f'(1)$ 的值为 e.

3．（2018 全国新课标Ⅱ文）曲线 $y=2\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为__________.

3.【答案】 $y=2x-2$

【解析】由 $y=f(x)=2\ln x$，得 $f'(x)=\dfrac{2}{x}$，

则曲线 $y=2\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线的斜率为 $k=f'(1)=2$，

则所求切线方程为 $y-0=2(x-1)$，即 $y=2x-2$.

4．（2018 全国新课标Ⅱ理）曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为__________.

4.【答案】 $y=2x$

【解析】$\because y'=\dfrac{2}{x+1}$，$\therefore k=\dfrac{2}{0+1}=2$，$\therefore y=2x$．

5．（2018 全国新课标Ⅲ理）曲线 $y=(ax+1)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0，1)$ 处的切线的斜率为 -2，则 $a=$________．

5．答案：-3

解答：$y=ae^x(ax+1)e^x$，则 $f'(0)=a+1=-2$，

所以 $a=-3$．

三、解答题

1．（2018 北京文）设函数 $f(x)=\left[ax^2-(3a+1)x+3a+2\right]\mathrm{e}^x$．

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线斜率为 0，求 a；

（2）若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，求 a 的取值范围．

1．【答案】（1）$\dfrac{1}{2}$；（2）$(1,+\infty)$．

【解析】（1）$\because f(x)=\left[ax^2-(3a+1)x+3a+2\right]\mathrm{e}^x$，$\therefore f'(x)=\left[ax^2-(a+1)x+1\right]\mathrm{e}^x$，

$f'(2)=(2a-1)\mathrm{e}^2$，由题设知 $f'(2)=0$，即 $(2a-1)\mathrm{e}^2=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$．

（2）方法一：由（1）得 $f'(x)=\left[ax^2-(a+1)x+1\right]\mathrm{e}^x=(ax-1)(x-1)\mathrm{e}^x$．

若 $a>1$，则当 $x\in\left(\dfrac{1}{a},1\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$．

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值．

若 $a\le 1$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$ax-1\le x-1<0$，$\therefore f'(x)>0$．

所以 1 不是 $f(x)$ 的极小值点．

综上可知，a 的取值范围是 $(1,+\infty)$．

方法二：$f'(x)=(ax-1)(x-1)\mathrm{e}^x$．

（1）当 $a=0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$，$f'(x)$，$f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，不合题意．

（2）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\dfrac{1}{a}$，$x_2=1$．

①当 $x_1=x_2$，即 $a=1$ 时，$f'(x)=(x-1)^2\mathrm{e}^x\ge 0$，$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 无极值，不合题意．

②当 $x_1>x_2$，即 $0<a<1$ 时，$f'(x)$，$f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$	$\dfrac{1}{a}$	$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，不合题意.

③当 $x_1<x_2$，即 $a>1$ 时，$f'(x)$，$f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，即 $a>1$ 满足题意.

（3）当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\frac{1}{a}$，$x_2=1$，$f'(x)$，$f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，不合题意.

综上所述，a 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

2.（**2018北京理**）设函数 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$.

（Ⅰ）若曲线$y=f(x)$在点（1，$f(1)$）处的切线与 x 轴平行，求a；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在$x=2$处取得极小值，求a的取值范围.

2.【答案】（1）a 的值为 1；（2）a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

【解析】（1）因为 $f(x)=\left[ax^2-(4a+1)x+4a+3\right]e^x$，

所以 $f'(x)=\left[2ax-(4a+1)\right]e^x+\left[ax^2-(4a+1)x+4a+3\right]e^x$

$=\left[ax^2-(2a+1)x+2\right]e^x$，

$f'(1)=(1-a)e$，由题设知 $f'(1)=0$，即 $(1-a)e=0$，解得 $a=1$.

此时 $f(1)=3e\neq 0$，所以 a 的值为 1.

（2）由（1）得 $f'(x)=\left[ax^2-(2a+1)x+2\right]e^x=(ax-1)(x-2)e^x$.

若 $a>\frac{1}{2}$，则当 $x\in\left(\frac{1}{a},2\right)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)<0$ 在 $x=2$ 处取得极小值.

若 $a\leq\frac{1}{2}$，则当 $x\in(0,2)$ 时，$x-2<0$，$ax-1\leq\frac{1}{2}x-1<0$，所以 $f'(x)>0$，

所以 2 不是 $f(x)$ 的极小值点.

综上可知，a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

3.（**2018 江苏**）记 $f'(x),g'(x)$ 分别为函数 $f(x),g(x)$ 的导函数．若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，满足 $f(x_0)=g(x_0)$ 且 $f'(x_0)=g'(x_0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个“S 点”．

（1）证明：函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=x^2+2x-2$ 不存在“S 点”；

（2）若函数 $f(x)=ax^2-1$ 与 $g(x)=\ln x$ 存在“S 点”，求实数 a 的值；

（3）已知函数 $f(x)=-x^2+a$，$g(x)=\dfrac{be^x}{x}$．对任意 $a>0$，判断是否存在 $b>0$，使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在“S 点”，并说明理由．

3．【答案】（1）见解析；（2）a 的值为 $\dfrac{e}{2}$；

（3）对任意 $a>0$，存在 $b>0$，使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在“S 点”．

【解析】（1）函数 $f(x)=x$，$g(x)=x^2+2x-2$，则 $f'(x)=1$，$g'(x)=2x+2$．

由 $f(x)=g(x)$ 且 $f'(x)=g'(x)$，得 $\begin{cases}x=x^2+2x-2\\1=2x+2\end{cases}$，此方程组无解，

因此，$f(x)$ 与 $g(x)$ 不存在“S”点．

（2）函数 $f(x)=ax^2-1$，$g(x)=\ln x$，则 $f'(x)=2ax$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}$．

设 x_0 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的“S”点，由 $f(x_0)$ 与 $g(x_0)$ 且 $f'(x_0)$ 与 $g'(x_0)$，

得 $\begin{cases}ax_0^2-1=\ln x_0\\2ax_0=\dfrac{1}{x_0}\end{cases}$，即 $\begin{cases}ax_0^2-1=\ln x_0\\2ax_0^2=1\end{cases}$，（*）

得 $\ln x_0=-\dfrac{1}{2}$，即 $x_0=e^{-\frac{1}{2}}$，则 $a=\dfrac{1}{2\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2}=\dfrac{e}{2}$．

当 $a=\dfrac{e}{2}$ 时，$x_0=e^{-\frac{1}{2}}$ 满足方程组（*），即 x_0 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的“S”点．

因此，a 的值为 $\dfrac{e}{2}$．

（3）对任意 $a>0$，设 $h(x)=x^3-3x^2-ax+a$．

因为 $h(0)=a>0$，$h(1)=1-3-a+a=-2<0$，且 $h(x)$ 的图象是不间断的，

所以存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $h(x_0)=0$，令 $b=\dfrac{2x_0^3}{e^{x_0}(1-x_0)}$，则 $b>0$．

函数 $f(x)=-x^2+a$，$g(x)=\dfrac{be^x}{x}$，

则 $f'(x)=-2x$，$g'(x)=\dfrac{be^x(x-1)}{x^2}$．

由 $f(x)=g(x)$ 且 $f'(x)=g'(x)$，得

$\begin{cases}-x^2+a=\dfrac{be^x}{x}\\-2x=\dfrac{be^x(x-1)}{x^2}\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x^2+a=\dfrac{2x_0^3}{e^{x_0}(1-x_0)}\cdot\dfrac{e^x}{x}\\-2x=\dfrac{2x_0^3}{e^{x_0}(1-x_0)}\cdot\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}\end{cases}$（**），

此时，x_0 满足方程组（**），即 x_0 是函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内的一个“S 点”．

因此，对任意 $a>0$，存在 $b>0$，使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在“S 点”．

4．（**2018 浙江**）已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

（Ⅰ）若 $f(x)$在 $x=x_1$，$x_2(x_1\neq x_2)$处导数相等，证明：$f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$；

（Ⅱ）若 $a\leq 3-4\ln 2$，证明：对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$有唯一公共点.

4．.答案：（1）略；（2）略.

解答：（1） $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}$，不妨设 $f'(x_1)=f'(x_2)=t$，即 x_1,x_2 是方程 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=t$ 的两根，即 $\sqrt{x_1},\sqrt{x_2}$ 是方程 $tx^2-\dfrac{x}{2}+1=0$ 的根，

所以 $\Delta=\dfrac{1}{4}-4t>0$，得 $0<t<\dfrac{1}{16}$，且 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\dfrac{1}{2t}$，$\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2}=\dfrac{1}{t}$，

$f(x_1)+f(x_2)=(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})-\ln x_1x_2=\dfrac{1}{2t}-\ln\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{1}{2t}+2\ln t$，

令 $g(t)=\dfrac{1}{2t}+2\ln t$，$g'(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{1}{2t^2}=\dfrac{4t-1}{2t^2}<0$，$\therefore g(t)$ 在 $(0,\dfrac{1}{16})$ 上单调递减.

所以 $g(t)>g(\dfrac{1}{16})=8-8\ln 2$，即 $f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$.

（2）设 $h(x)=(kx+a)-f(x)=kx-\sqrt{x}+\ln x+a$，

则当 x 充分小时 $h(x)<0$，充分大时 $h(x)>0$，所以 $h(x)$ 至少有一个零点，

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+k=k-\dfrac{1}{16}+(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{4})^2$，

①$k\geq\dfrac{1}{16}$，则 $h'(x)\geq 0$，$h(x)$ 递增，$h(x)$ 有唯一零点，

②$0<k<\dfrac{1}{16}$，则令 $h'(x)=(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{4})^2+k-\dfrac{1}{16}=0$，得 $h(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

$\therefore\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}>\dfrac{1}{4}$，$\therefore 0<x_1<16$.

可知 $h(x)$ 在 $(0,x_1)$ 递增，(x_1,x_2) 递减，$(x_2,+\infty)$ 递增，

$\therefore h(x_1)=kx_1-\sqrt{x_1}+\ln x_1+a=(\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}-\dfrac{1}{x_1})x_1-\sqrt{x_1}+\ln x_1+a=-\dfrac{\sqrt{x_1}}{2}-1+\ln x_1+a$，

又 $h'(x_1)=-\dfrac{1}{4\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{4-\sqrt{x_1}}{4x_1}$，

$\therefore h(x_1)$ 在 $(0,16)$ 上单调递增，

$\therefore h(x_1)<h(16)=\ln 16-3+a\leq\ln 16-3+3-4\ln 2=0$，

$\therefore h(x)$ 有唯一零点，

综上可知，$k>0$ 时，$y=kx+a$ 与 $y=f(x)$ 有唯一公共点.

5．（**2018 天津文**）设函数 $f(x)=(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$，其中 $t_1,t_2,t_3\in\mathbf{R}$,且 t_1,t_2,t_3 是公差为 d 的等差数列.

(I）若 $t_2=0,d=1,$ 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(II）若 $d=3$，求 $f(x)$ 的极值；

(III）若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-(x_1-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点，求 d 的取值范围.

5.【答案】(1) $x+y=0$;(2)极大值为$6\sqrt{3}$;极小值为$-6\sqrt{3}$;(3)$\left(-\infty,-\sqrt{10}\right)\cup\left(\sqrt{10},+\infty\right)$.

【解析】(1)由已知,可得 $f(x)=x(x-1)(x+1)=x^3-x$,故 $f'(x)=3x^2-1$,

因此 $f(0)=0$,$f'(0)=-1$,又因为曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$,故所求切线方程为$x+y=0$.

(2)由已知可得

$f(x)=(x-t_2+3)(x-t_2)(x-t_2-3)=(x-t_2)^3-9(x-t_2)=x^3-3t_2x^2+(3t_2{}^2-9)x-t_2{}^3+9t_2$.

故 $f'(x)=3x^2-6t_2x+3t_2{}^2-9$. 令 $f'(x)=0$,解得 $x=t_2-\sqrt{3}$,或 $x=t_2+\sqrt{3}$.

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化如下表:

x	$(-\infty,t_2-\infty)$	$t_2-\sqrt{3}$	$(t_2-\sqrt{3},t_2+\sqrt{3})$	$t_2+\sqrt{3}$	$(t_2+\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(t_2-\sqrt{3}\right)=\left(-\sqrt{3}\right)^3-9\times\left(-\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}$;函数 $f(x)$ 的极小值为

$f\left(t_2+\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^3-9\times\left(\sqrt{3}\right)=-6\sqrt{3}$.

(3)曲线 $y=f(x)$与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$有三个互异的公共点等价于关于 x 的方程

$(x-t_2+d)(x-t_2)(x-t_2-d)+(x-t_2)+6\sqrt{3}=0$有三个互异的实数解,令 $u=x-t_2$,

可得$u^3+(1-d^2)u+6\sqrt{3}=0$.

设函数 $g(x)=x^3+(1-d^2)x+6\sqrt{3}$,则曲线 $y=f(x)$与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$有三个互异的公共点等价于函数 $y=g(x)$有三个零点.

$g'(x)=3x^3+(1-d^2)$.

当 $d^2\le 1$时,$g'(x)\ge 0$,这时 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,不合题意.

当 $d^2>1$时,$g'(x)=0$,解得 $x_1=-\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}$,$x_2=\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}$.

易得,$g(x)$在$(-\infty,x_1)$上单调递增,在$[x_1,x_2]$上单调递减,在$(x_2,+\infty)$上单调递增.

$g(x)$的极大值 $g(x_1)=g\left(-\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}(d^2-1)^{\frac{3}{2}}}{9}+6\sqrt{3}>0$.

$g(x)$的极小值 $g(x_2)=g\left(\dfrac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}\right)=-\dfrac{2\sqrt{3}(d^2-1)^{\frac{3}{2}}}{9}+6\sqrt{3}$.

若 $g(x_2)\ge 0$,由 $g(x)$的单调性可知函数 $y=g(x)$至多有两个零点,不合题意.

若 $g(x_2)<0$,即$(d^2-1)^{\frac{3}{2}}>27$,也就是$|d|>\sqrt{10}$,此时$|d|>x_2$,$g(|d|)=|d|+6\sqrt{3}>0$,且$-2|d|<x_1$,

$g(-2|d|)=-6|d|^3-2|d|+6\sqrt{3}<-62\sqrt{10}+6\sqrt{3}<0$,从而由 $g(x)$的单调性,可知函数 $y=g(x)$在区间

$(-2|d|,x_1)$,(x_1,x_2),$(x_2,|d|)$内各有一个零点,符合题意.

所以,d 的取值范围是$\left(-\infty,-\sqrt{10}\right)\cup\left(\sqrt{10},+\infty\right)$.

6. **(2018 天津理)**已知函数 $f(x)=a^x$,$g(x)=\log_a x$,其中 $a>1$.

(I)求函数$h(x)=f(x)-x\ln a$的单调区间;

（II）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_2,g(x_2))$ 处的切线平行，证明 $x_1+g(x_2)=-\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$；

（III）证明当 $a\geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在直线 l，使 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，也是曲线 $y=g(x)$ 的切线.

6.【答案】（1）单调递减区间 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$；

（2）证明见解析；（3）证明见解析.

【解析】（1）由已知，$h(x)=a^x-x\ln a$，有 $h'(x)=a^x\ln a-\ln a$，

令 $h'(x)=0$，解得 $x=0$.

由 $a>1$，可知当 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $h(x)$ 的单调递减区间 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

（2）由 $f'(x)=a^x\ln a$，可得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线斜率为 $a^{x_1}\ln a$，

由 $g'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$，可得曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_2,g(x_2))$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{x_2\ln a}$，

因为这两条切线平行，故有 $a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a}$，即 $x_2a^{x_1}(\ln a)^2=1$，

两边取以 a 为底的对数，得 $\log_a x_2+x_1+2\log_2\ln a=0$，所以 $x_1+g(x_2)=-\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$，

（3）曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_1,a^{x_1}) 处的切线 $l_1: y-a^{x_1}=a^{x_1}\ln a\cdot(x-x_1)$，

曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_2,\log_a x_2)$ 处的切线 $l_2: y-\log_a x_2=\dfrac{1}{x_2\ln a}\cdot(x-x_2)$，

要证明当 $a\geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在直线 l，使 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，也是曲线 $y=g(x)$ 的切线，

只需证明当 $a\geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在 $x_1\in(-\infty,+\infty)$，$x_2\in(0,+\infty)$，使得 l_1 和 l_2 重合.

即只需证明当 $a\geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，方程组 $\begin{cases} a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a} & ① \\ a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a=\log_a x_2-\dfrac{1}{\ln a} & ② \end{cases}$ 有解，

由①得 $x_2=\dfrac{1}{a^{x_1}(\ln a)^2}$，代入②，得 $a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a+x_1+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}=0$ ③，

因此，只需证明当 $a\geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，关于 x_1 的方程③存在实数解.

设函数 $u(x)=a^x-xa^x\ln a+x+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$，

即要证明当 $a\geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，函数 $y=u(x)$ 存在零点.

$u'(x)=1-(\ln a)^2xa^x$，可知 $x\in(-\infty,0)$ 时，$u'(x)>0$；

$x\in(0,+\infty)$ 时，$u'(x)$ 单调递减，

又 $u'(0)=1>0$， $u'\left[\dfrac{1}{(\ln a)^2}\right]=1-a^{\frac{1}{(\ln a)^2}}<0$，

故存在唯一的 x_0，且 $x_0>0$，使得 $u'(x_0)=0$，即 $1-(\ln a)^2 x_0 a^{x_0}=0$，

由此可得 $u(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减.

$u(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值 $u(x_0)$，因为 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$，故 $\ln\ln a\ge -1$，

所以 $u(x_0)=a^{x_0}-x_0a^{x_0}\ln a+x_0+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}=\dfrac{1}{x_0(\ln a)^2}+x_0+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}\ge\dfrac{2+2\ln\ln a}{\ln a}\ge 0$，

下面证明存在实数 t，使得 $u(t)<0$，

由（1）可得 $a^x\ge 1+x\ln a$，当 $x>\dfrac{1}{\ln a}$ 时，

有 $u(x)\le(1+x\ln a)(1-x\ln a)+x+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}=-(\ln a)^2x^2+x+1+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$，

所以存在实数 t，使得 $u(t)<0$，

因此，当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在 $x_1\in(-\infty,+\infty)$，使得 $u(x_1)=0$，

所以，当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在直线 l，使 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，也是曲线 $y=g(x)$ 的切线.

7. **（2018 全国新课标 I 文）**已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$.

（1）设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a，并求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：当 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)\geqslant 0$.

7. 答案：见解析

解答：（1） $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x}$.

$\because$ $x=2$ 是 $f(x)$ 极值点，$\therefore$ $f'(2)=0$，$\therefore$ $ae^2-\dfrac{1}{2}=0\Rightarrow a=\dfrac{1}{2e^2}$.

$\because$ e^x 在 $(0,+\infty)$ 上增， $a>0$，$\therefore$ ae^x 在 $(0,+\infty)$ 上增.

又 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上减，$\therefore$ $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上增. 又 $f'(2)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,2)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 减；当 $x\in(2,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 增.

综上， $a=\dfrac{1}{2e^2}$，单调增区间为 $(2,+\infty)$，单调减区间为 $(0,2)$.

（2）$\because$ $e^x\ge 0$，$\therefore$ 当 $a\ge\dfrac{1}{e}$ 时有 $ae^x\ge\dfrac{1}{e}\cdot e^x=e^{x-1}$，

$\therefore$ $f(x)=ae^x-\ln x-1\ge e^{x-1}-\ln x-1$.

令 $g(x)=e^{x-1}-\ln x-1$， $x\in(0,+\infty)$.

$g'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，同（1）可证 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上增，又 $g'(1)=e^{1-1}-\dfrac{1}{1}=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 增.

$\therefore$ $g(x)_{\min}=g(1)=e^{1-1}-\ln 1-1=1-0-1=0$，

$\therefore$ 当 $a\ge\dfrac{1}{e}$ 时， $f(x)\ge g(x)\ge 0$.

8. **（2018 全国新课标 I 理）**已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，证明：$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

8. 答案：（1）见解析；（2）见解析.

解答：（1）①∵ $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$，∴ $f'(x)=-\dfrac{x^2-ax+1}{x^2}$，∴当 $-2\le a\le 2$ 时，$\Delta\le 0$，$f'(x)\le 0$，∴此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调递减.

②∵ $\Delta>0$，即 $a<-2$ 或 $a>2$，此时方程 $x^2-ax+1=0$ 两根为 $x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，当 $a<-2$ 时，此时两根均为负，∴ $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 当 $a>2$ 时，$\Delta>0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 上单调递减. ∴综上可得，$a\le 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；$a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$，$(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 上单调递增.

（2）由（1）可得，$x^2-ax+1=0$ 两根 x_1,x_2 得 $a>2$，$x_1+x_2=a,x_1\cdot x_2=1$，令 $0<x_1<x_2$，∴ $x_1=\dfrac{1}{x_2}$，$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1-(\dfrac{1}{x_2}-x_2+a\ln x_2)=2(x_2-x_1)+a(\ln x_1-\ln x_2)$. ∴ $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-2+a\cdot\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，要证 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 成立，即要证 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<1$ 成立，∴ $\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}-x_1+x_2}{x_1-x_2}<0(x_2>1)$，$\therefore\dfrac{-2\ln x_2-\dfrac{1}{x_2}+x_2}{x_1-x_2}<0$

即要证 $-2\ln x_2-\dfrac{1}{x_2}+x_2>0$（$x_2>1$）

令 $g(x)=-2\ln x-\dfrac{1}{x}+x(x>1)$，可得 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，∴ $g(x)>g(1)=0$，∴ $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<1$ 成立，即 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 成立.

9. **（2018 全国新课标 I 理）**某工厂的某种产品成箱包装，每箱 200 件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品．检验时，先从这箱产品中任取 20 件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验，设每件产品为不合格品的概率都为 $p(0<p<1)$，且各件产品是否为不合格品相互独立.（1）记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)$,求 $f(p)$ 的最大值点 p_0.

（2）现对一箱产品检验了 20 件，结果恰有 2 件不合格品，以（1）中确定的 p_0 作为 p 的值．已知每件产品的检验费用为 2 元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.

（i）若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X ，求 EX ；

（ii）以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

9. 答案：略

解答：（1）由题可知 $f(p)=C_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}$ （$0<p<1$）.

$\therefore$ $f(p)=C_{20}^{2}[2p(1-p)^{18}+18p^{2}(1-p)^{17}\times(-1)]=2C_{20}^{2}p(1-p)^{17}(1-10p)$

$\therefore$ 当 $p\in(0,\dfrac{1}{10})$ 时，$f'(p)>0$，即 $f(p)$ 在 $(0,\dfrac{1}{10})$ 上递增；当 $p\in(\dfrac{1}{10},1)$ 时，$f'(p)<0$，即 $f(p)$ 在 $(\dfrac{1}{10},1)$ 上递减.

$\therefore$ $f(p)$ 在点 $p=\dfrac{1}{10}$ 处取得最大值，即 $p_0=\dfrac{1}{10}$.

（2）（i）设余下产品中不合格品数量为 Y ，则 $X=40+25Y$ ，由题可知 $Y\sim B(180,\dfrac{1}{10})$，

$\therefore$ $EY=np=180\times\dfrac{1}{10}=18$.

$\therefore$ $EX=E(40+25Y)=40+25EY=40+25\times18=490$ （元）.

（ii）由（i）可知一箱产品若全部检验只需花费 400 元，若余下的不检验则要 490 元，所以应该对余下的产品作检验.

10. （**2018 全国新课标Ⅱ文**）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-a\left(x^2+x+1\right)$.

（1）若 $a=3$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$f(x)$ 只有一个零点.

10.【答案】（1）$\left(-\infty,3-2\sqrt{3}\right)$，$\left(3+2\sqrt{3},+\infty\right)$ 单调递增，$\left(3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3}\right)$ 单调递减；

（2）见解析.

【解析】（1）当 $a=3$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2-3x-3$，$f'(x)=x^2-6x-3$.

令 $f'(x)=0$ 解得 $x=3-2\sqrt{3}$ 或 $x=3+2\sqrt{3}$.

当 $x\in\left(-\infty,3-2\sqrt{3}\right)\cup\left(3+2\sqrt{3},+\infty\right)$ 时，$f'(x)=0$；

当 $x\in\left(3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,3-2\sqrt{3}\right)$，$\left(3+2\sqrt{3},+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3}\right)$ 单调递减.

（2）由于 $x^2+x+1>0$，所以 $f(x)=0$ 等价于 $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}-3a=0$.

设 $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}-3a$，则 $g'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2+2x+3\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}\geq0$，仅当 $x=0$ 时 $g'(x)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，故 $g(x)$ 至多有一个零点，从而 $f(x)$ 至多有一个零点.

又 $f(3a-1)=-6a^2+2a-\dfrac{1}{3}=-6\left(a-\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{1}{6}<0$，$f(3a+1)=\dfrac{1}{3}>0$，故 $f(x)$ 有一个零点.

综上，$f(x)$ 只有一个零点.

11. （**2018 全国新课标Ⅱ理**）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$.

（1）若 $a=1$，证明：当 $x\geq0$ 时，$f(x)\geq1$；

（2）若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点，求 a.

11．【答案】（1）见解析；（2）$\frac{e^2}{4}$．

【解析】（1）当 $a=1$ 时，$f(x)\ge 1$ 等价于 $(x^2+1)e^{-x}-1\le 0$，

设函数 $g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$，则 $g'(x)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$，

当 $x\ne 1$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

而 $g(0)=0$，故当 $x\ge 0$ 时，$g(x)\le 0$，即 $f(x)\ge 1$．

（2）设函数 $h(x)=1-ax^2e^{-x}$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点当且仅当 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点．

当 $a\le 0$ 时，$h(x)>0$，$h(x)$ 没有零点；

当 $a>0$ 时，$h'(x)=ax(x-2)e^{-x}$．

当 $x\in(0,2)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$．

$\therefore h(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减，在 $(2,+\infty)$ 单调递增．

故 $h(2)=1-\frac{4a}{e^2}$ 是 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的最小值．

①若 $h(2)>0$，即 $a<\frac{e^2}{4}$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 没有零点；

②若 $h(2)=0$，即 $a=\frac{e^2}{4}$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点；

③若 $h(2)<0$，即 $a>\frac{e^2}{4}$，由于 $h(0)=1$，所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 有一个零点，

由（1）知，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2$，所以 $h(4a)=1-\frac{16a^3}{e^{4a}}=1-\frac{16a^3}{(e^{2a})^2}>1-\frac{16a^3}{(2a)^4}=1-\frac{1}{a}>0$．

故 $h(x)$ 在 $(2,4a)$ 有一个零点，因此 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个零点．

综上，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点时，$a=\frac{e^2}{4}$．

12．（**2018 全国新课标Ⅲ文**）已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+x-1}{e^x}$．

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程；

（2）证明：当 $a\ge 1$ 时，$f(x)+e\ge 0$．

12. 答案：详见解析

解答：（1）由题意：$f(x)=\frac{ax^2+x-1}{e^x}$ 得

$$f'(x)=\frac{(2ax+1)e^x-(ax^2+x-1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-ax^2+2ax-x+2}{e^x},$$

$\therefore f'(0)=\frac{2}{1}=2$，即曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线斜率为 2，$\therefore y-(-1)=2(x-0)$，即 $2x-y-1=0$；

（2）证明：由题意：原不等式等价于：$e^{x+1}+ax^2+x-1\ge 0$ 恒成立；令 $g(x)=e^{x+1}+ax^2+x-1$，

$\therefore g'(x)=e^{x+1}+2ax+1$，$g''(x)=e^{x+1}+2a$，$\because a\ge 1$，$\therefore g''(x)>0$ 恒成立，$\therefore g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在唯一 x_0 使 $g'(x_0)=0$，$\therefore e^{x_0+1}+2ax_0+1=0$，即 $e^{x_0+1}=-2ax_0-1$，且 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore g(x)\ge g(x_0)$．

又 $g(x_0)=e^{x_0+1}+ax_0^{\ 2}+x_0-1=ax_0^{\ 2}+(1-2a)x_0-2=(ax_0+1)(x_0-2)$，

$g'(-\frac{1}{a})=e^{1-\frac{1}{a}}-1$，$\because a\geq 1$，$\therefore 0\leq e^{1-\frac{1}{a}}-1<e-1$，$\therefore x_0\leq -\frac{1}{a}$，$\therefore g(x_0)\geq 0$，得证.

综上所述：当 $a\geq 1$ 时，$f(x)+e\geq 0$.

13．**（2018 全国新课标Ⅲ理）**已知函数 $f(x)=\left(2+x+ax^2\right)\ln(1+x)-2x$.

（1）若 $a=0$，证明：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；

（2）若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a.

13．答案：（1）见解答；（2）$a=-\frac{1}{6}$.

解答：（1）若 $a=0$ 时，$f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x(x>-1)$，

$\therefore f'(x)=\ln(1+x)+(2+x)\frac{1}{1+x}-2=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-1$.

令 $h(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-1$，

$\therefore h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$.

$\therefore$当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $-1<x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减.

$\therefore h(x)_{\min}=h(0)=\ln 1+1-1=0$，

$\therefore f'(x)\geq 0$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f(0)=2\ln 1-0=0$，

$\therefore$当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

（2）$f'(x)=(2ax+1)\ln(x+1)+\frac{1+ax^2}{x+1}-1$，

$f''(x)=2a\ln(x+1)+\frac{2ax+1}{x+1}+\frac{2ax(x+1)-ax^2-1}{(x+1)^2}\leq 0$，

$2a(x+1)^2\ln(x+1)+(2ax+1)(x+1)+ax^2+2ax-1\leq 0$，

$2a(x+1)^2\ln(x+1)+3ax^2+4ax+x\leq 0$，

$a[2(x+1)^2\ln(x+1)+3x^2+4x]\leq -x$.

设 $h(x)=2(x+1)^2\ln(1+x)+3x^2+4x$，

$\therefore h'(x)=4(x+1)\ln(1+x)+2(x+1)+6x+4$，$h'(0)=6>0$，$h(0)=0$，

$\therefore$在 $x=0$ 邻域内，$x>0$ 时，$h(x)>0$，$x<0$ 时，$h(x)<0$.

$x>0$ 时，$a\leq\frac{-x}{2(x+1)^2\ln(1+x)+3x^2+4x}$，由洛必达法则得 $a\leq -\frac{1}{6}$，

$x<0$ 时，$a\geq\frac{-x}{2(x+1)^2\ln(1+x)+3x^2+4x}$，由洛必达法则得 $a\geq -\frac{1}{6}$，

综上所述，$a=-\frac{1}{6}$.