

2018 年全国各地高考数学试题及解答分类汇编大全

(08 三角函数 三角恒等变换)

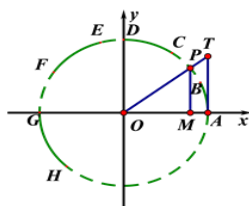
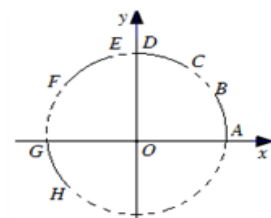
一、选择题

1. (2018 北京文) 在平面坐标系中, AB , CD , EF , GH 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的四段弧 (如图), 点 P 在其中一段上, 角 α 以 Ox 为始边, OP 为终边, 若 $\tan \alpha < \cos \alpha < \sin \alpha$, 则 P 所在的圆弧是 ()

A. AB B. CD C. EF D. GH

1. 【答案】C

【解析】由下图可得, 有向线段 OM 为余弦线, 有向线段 MP 为正弦线, 有向线段 AT 为正切线.



2. (2018 天津文) 将函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数 ()

- (A) 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增 (B) 在区间 $[\frac{\pi}{4}, 0]$ 上单调递减
(C) 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增 (D) 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递减

2. 【答案】A

【解析】由函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象平移变换的性质可知:

将 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度之后的解析式为:

$$y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{10}\right) + \frac{\pi}{5}\right] = \sin 2x.$$

则函数的单调递增区间满足: $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

即 $k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$,

令 $k=0$ 可得函数的一个单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, 选项 A 正确, B 错误;

函数的单调递减区间满足: $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

即 $k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$, 令 $k=0$ 可得函数的一个单调递减区间为 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$,

选项 C, D 错误; 故选 A.

3. (2018 天津理) 将函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数 ()

- (A) 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增 (B) 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ 上单调递减
(C) 在区间 $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增 (D) 在区间 $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上单调递减

3. 【答案】A

【解析】由函数图象平移变换的性质可知:

将 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度之后的解析式为:

$$y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{10}\right) + \frac{\pi}{5}\right] = \sin 2x,$$

则函数的单调递增区间满足: $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

即 $k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$,

令 $k=1$ 可得一个单调递增区间为 $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$,

函数的单调递减区间满足: $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 即 $k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$,

令 $k=1$ 可得一个单调递减区间为 $[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$, 故选 A.

4. (2018 全国新课标 I 文) 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 x - \sin^2 x + 2$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π , 最大值为 3 B. $f(x)$ 的最小正周期为 π , 最大值为 4
C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 最大值为 3 D. $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 最大值为 4

4、答案: B

解答: $f(x) = 2\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 2 = 3\cos^2 x + 1$,

\therefore 最小正周期为 π , 最大值为 4.

5. (2018 全国新课标 II 文) 若 $f(x) = \cos x - \sin x$ 在 $[0, a]$ 是减函数, 则 a 的最大值是 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. π

5. 【答案】C

【解析】因为 $f(x) = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 所以由 $0 + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$)

得 $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$), 因此 $[0, a] \subset \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $\therefore 0 < a \leq \frac{3\pi}{4}$, 从而 a 的最大值为 $\frac{3\pi}{4}$,

故选 C.

6. (2018 全国新课标 II 理) 若 $f(x) = \cos x - \sin x$ 在 $[-a, a]$ 是减函数, 则 a 的最大值是 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. π

6. 【答案】A

【解析】因为 $f(x) = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

所以由 $0 + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2k\pi, (k \in \mathbf{Z})$ 得 $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbf{Z})$,

因此 $[-a, a] \subset \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $\therefore -a < a, -a \geq -\frac{\pi}{4}, a \leq \frac{3\pi}{4}$,

$\therefore 0 < a \leq \frac{\pi}{4}$, 从而 a 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$, 故选 A.

7. (2018 全国新课标 III 文、理) 若 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

- A. $\frac{8}{9}$ B. $\frac{7}{9}$ C. $-\frac{7}{9}$ D. $-\frac{8}{9}$

7. 答案: B

解答: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$. 故选 B.

8. (2018 全国新课标 III 文) 函数 $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$ 的最小正周期为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

8. 答案: C

解答: $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $\therefore f(x)$ 的周期

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. 故选 C.

二、填空

1. (2018 北京理) 设函数 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$, 若 $f(x) \leq f(\frac{\pi}{4})$ 对任意的实数 x 都成立, 则 ω 的最小值为_____.

1. 【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 $\because f(x) \leq f(\frac{\pi}{4})$ 对任意的实数 x 都成立, 所以 $f(\frac{\pi}{4})$ 取最大值, $\therefore \frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{6} = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore \omega = 8k + \frac{2}{3} (k \in \mathbf{Z})$, $\because \omega > 0$, \therefore 当 $k = 0$ 时, ω 取最小值为 $\frac{2}{3}$.

2. (2018 江苏) 已知函数 $y = \sin(2x + \varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 则 φ 的值是 .

2. 【答案】 $-\frac{\pi}{6}$

【解析】由题意可得 $\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \varphi\right) = \pm 1$, 所以 $\frac{2}{3}\pi + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$,
 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), 因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $k = 0$, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

3. (2018 全国新课标 I 文) 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边上
 有两点 $A(1, a)$, $B(2, b)$, 且 $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$, 则 $|a - b| =$ ()

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. 1

3. 答案: B

解答: 由 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{3}$ 可得 $\cos^2 \alpha = \frac{5}{6} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$, 化简可
 得 $\tan \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$; 当 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 时, 可得 $\frac{a}{1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{b}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 即 $a = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $b = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 此
 时 $|a - b| = \frac{\sqrt{5}}{5}$; 当 $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时, 仍有此结果.

4. (2018 全国新课标 I 理) 已知函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____.

4. 答案: $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

解答: $\because f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $\therefore f(x)$ 最小正周期为 $T = 2\pi$, \therefore

$f'(x) = 2(\cos x + \cos 2x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 即 $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$,

$\therefore \cos x = \frac{1}{2}$ 或 $\cos x = -1$.

\therefore 当 $\cos = \frac{1}{2}$, 为函数的极小值点, 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 或 $x = \frac{5}{3}\pi$,

当 $\cos x = -1$, $x = \pi$

$\therefore f(\frac{5}{3}\pi) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$. $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, $f(\pi) = 0$

$\therefore f(x)$ 最小值为 $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

5. (2018 全国新课标 II 文) 已知 $\tan(\alpha - \frac{5\pi}{4}) = \frac{1}{5}$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

5. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】 $\tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - \tan\frac{5\pi}{4}}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\frac{5\pi}{4}} = \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha} = \frac{1}{5}$ ，解方程得 $\tan\alpha = \frac{3}{2}$ 。

6. (2018 全国新课标 II 理) 已知 $\sin\alpha + \cos\beta = 1$ ， $\cos\alpha + \sin\beta = 0$ ，则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____。

6. 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】 $\because \sin\alpha + \cos\beta = 1$ ， $\cos\alpha + \sin\beta = 0$ ，

$$\therefore (1 - \sin\alpha)^2 + (-\cos\alpha)^2 = 1, \therefore \sin\alpha = \frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{1}{2},$$

$$\text{因此 } \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \cos^2\alpha = \frac{1}{4} - 1 + \sin^2\alpha = \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

7. (2018 全国新课标 III 理) 函数 $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0, \pi]$ 的零点个数为_____。

7. 答案: 3

解答: 由 $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ，有 $3x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ，解得 $x = \frac{k}{3}\pi + \frac{\pi}{9}$ ，由

$0 \leq \frac{k}{3}\pi + \frac{\pi}{9} \leq \pi$ 得 k 可取 0, 1, 2， $\therefore f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0, \pi]$ 上有 3 个零点。

三、解答题

1. (2018 北京文) 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, m\right]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$ ，求 m 的最小值。

1. 【答案】 (1) π ； (2) $\frac{\pi}{3}$ 。

【解析】 (1) $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$ ，

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 。

(2) 由 (1) 知 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$ ，

因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, m\right]$ ，所以 $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, 2m - \frac{\pi}{6}\right]$ 。

要使得 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, m\right]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$ ，即 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, m\right]$ 上的最大值为 1。

所以 $2m - \frac{\pi}{6} \geq \frac{\pi}{2}$ ，即 $m \geq \frac{\pi}{3}$ 。所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$ 。

2. (2018 上海) 设常数 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = a \sin 2x + 2 \cos^2 x$

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

(2) 若 $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} + 1$, 求方程 $f(x) = 1 - \sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的解。

【答案】(1)、 $a=0$ (2)、 $x = -\frac{11}{24}\pi, x = -\frac{5}{24}\pi, x = \frac{13}{24}\pi, x = \frac{19}{24}\pi$

【知识点】三角函数的图像与性质

【考查能力】运算求解能力

【解析】(1)、由偶函数可知 $f(-x) = f(x)$ 得 $a=0$ 。

(2)、 $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow a = \sqrt{3}$, $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上解得 $x = -\frac{11}{24}\pi, x = -\frac{5}{24}\pi, x = \frac{13}{24}\pi, x = \frac{19}{24}\pi$

3. (2018 江苏) 已知 α, β 为锐角, $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值; (2) 求 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值.

3. 【答案】(1) $-\frac{7}{25}$; (2) $-\frac{2}{11}$.

【解析】(1) 因为 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, 所以 $\sin \alpha = \frac{4}{5} \cos \alpha$.

因为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 所以 $\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$, 因此, $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{7}{25}$.

(2) 因为 α, β 为锐角, 所以 $\alpha + \beta \in (0, \pi)$.

又因为 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

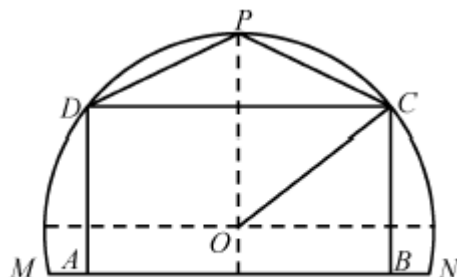
因此 $\tan(\alpha + \beta) = -2$. 因为 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, 所以 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{24}{7}$,

因此, $\tan(\alpha - \beta) = \tan[2\alpha - (\alpha + \beta)] = \frac{\tan 2\alpha - \tan(\alpha + \beta)}{1 + \tan 2\alpha \tan(\alpha + \beta)} = -\frac{2}{11}$.

4. (2018 江苏) 某农场有一块农田, 如图所示, 它的边界由圆 O 的一段圆弧 MPN (P 为此圆弧的中点) 和线段 MN 构成. 已知圆 O 的半径为 40 米, 点 P 到 MN 的距离为 50 米. 现规划在此农田上修建两个温室大棚, 大棚 I 内的地块形状为矩形 $ABCD$, 大棚 II 内的地块形状为 $\triangle CDP$, 要求 A, B 均在线段 MN 上, C, D 均在圆弧上. 设 OC 与 MN 所成的角为 θ .

(1) 用 θ 分别表示矩形 $ABCD$ 和 $\triangle CDP$ 的面积, 并确定 $\sin \theta$ 的取值范围;

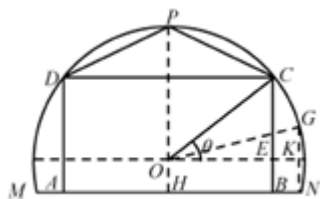
(2) 若大棚 I 内种植甲种蔬菜, 大棚 II 内种植乙种蔬菜, 且甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为 4:3. 求当 θ 为何值时, 能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大.



(第 17 题)

4. 【答案】(1) $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$; (2) 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大.

【解析】



(1) 连结 PO 并延长交 MN 于 H , 则 $PH \perp MN$, 所以 $OH = 10$.

过 O 作 $OE \perp BC$ 于 E , 则 $OE \parallel MN$, 所以 $\angle COE = \theta$,

故 $OE = 40 \cos \theta$, $EC = 40 \sin \theta$,

则矩形 $ABCD$ 的面积为 $2 \times 40 \cos \theta (40 \sin \theta + 10) = 800(4 \sin \theta \cos \theta + \cos \theta)$,

$\triangle CDP$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 40 \cos \theta (40 - 40 \sin \theta) = 1600(\cos \theta - \sin \theta \cos \theta)$.

过 N 作 $GN \perp MN$, 分别交圆弧和 OE 的延长线于 G 和 K , 则 $GK = KN = 10$.

令 $\angle GOK = \theta_0$, 则 $\sin \theta_0 = \frac{1}{4}$, $\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

当 $\theta \in \left[\theta_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 才能作出满足条件的矩形 $ABCD$,

所以 $\sin \theta$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{4}, 1\right)$.

(2) 因为甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为 $4:3$,

设甲的单位面积的年产值为 $4k$, 乙的单位面积的年产值为 $3k (k > 0)$,

则年总产值为

$$4k \times 800(4 \sin \theta \cos \theta + \cos \theta) + 3k \times 1600(\cos \theta - \sin \theta \cos \theta)$$

$$= 8000k(\sin \theta \cos \theta + \cos \theta), \quad \theta \in \left[\theta_0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{设 } f(\theta) = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta, \quad \theta \in \left[\theta_0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{则 } f'(\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta = -(2 \sin^2 \theta + \sin \theta - 1) = -(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 1).$$

令 $f'(\theta) = 0$, 得 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 当 $\theta \in \left(\theta_0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $f'(\theta) > 0$, 所以 $f(\theta)$ 为增函数;

当 $\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(\theta) < 0$, 所以 $f(\theta)$ 为减函数,

因此, 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(\theta)$ 取到最大值.

5. (2018 浙江) 已知角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

(I) 求 $\sin(\alpha + \pi)$ 的值;

(II) 若角 β 满足 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\cos\beta$ 的值.

5. 答案: (1) $\frac{4}{5}$; (2) $-\frac{56}{65}$ 或 $\frac{16}{65}$.

解答: (1) $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha = -\frac{-\frac{4}{5}}{1} = \frac{4}{5}$.

(2) $\because \beta = (\alpha + \beta) - \alpha$, $\therefore \cos\beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha]$,

$\because \sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, $\therefore \cos(\alpha + \beta) = \pm \frac{12}{13}$,

又 $\because \sin\alpha = -\frac{4}{5}$, 且 α 终边在第三象限, $\therefore \cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

① 当 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{12}{13}$ 时,

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \cos(\alpha + \beta)\cos\alpha + \sin(\alpha + \beta)\sin\alpha \\ &= \frac{12}{13} \times \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{5}{13} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-36 - 20}{65} = -\frac{56}{65}.\end{aligned}$$

② 当 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{12}{13}$ 时,

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \cos(\alpha + \beta)\cos\alpha + \sin(\alpha + \beta)\sin\alpha \\ &= \left(-\frac{12}{13}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{5}{13} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{65}.\end{aligned}$$

6 (2018 天津文) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b\sin A = a\cos(B - \frac{\pi}{6})$.

(I) 求角 B 的大小;

(II) 设 $a=2, c=3$, 求 b 和 $\sin(2A - B)$ 的值.

6. 【答案】(1) $B = \frac{\pi}{3}$; (2) $b = \sqrt{7}$, $\sin(2A - B) = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 可得 $b\sin A = a\sin B$,

又由 $b\sin A = a\cos(B - \frac{\pi}{6})$, 得 $a\sin B = a\cos(B - \frac{\pi}{6})$, 即 $\sin B = \cos(B - \frac{\pi}{6})$,

可得 $\tan B = \sqrt{3}$. 又因为 $B \in (0, \pi)$, 可得 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理及 $a=2, c=3, B = \frac{\pi}{3}$, 有 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 7$, 故 $b = \sqrt{7}$. 由

$b\sin A = a\cos(B - \frac{\pi}{6})$, 可得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. 因为 $a < c$, 故 $\cos A = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

因此 $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = \frac{1}{7}$.

所以, $\sin(2A - B) = \sin 2A\cos B - \cos 2A\sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.