

## 2018 年全国各地高考数学试题及解答分类汇编大全

## (06 数列)

## 一、选择题

1. (2018 北京文、理) “十二平均律”是通用的音律体系, 明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例, 为这个理论的发展做出了重要贡献. 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份, 依次得到十三个单音, 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于  $\sqrt[12]{2}$ . 若第一个单音的频率为  $f$ , 则第八个单音频率为 ( )

- A.  $\sqrt[3]{2}f$  B.  $\sqrt[3]{2^2}f$  C.  $\sqrt[12]{2^5}f$  D.  $\sqrt[12]{2^7}f$

1. 【答案】D

【解析】因为每一个单音与前一个单音频率比为  $\sqrt[12]{2}$ ,  $\therefore a_n = \sqrt[12]{2}a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+)$ ,

又  $a_1 = f$ , 则  $a_8 = a_1 q^7 = f(\sqrt[12]{2})^7 = \sqrt[12]{2^7}f$ , 故选 D.

2. (2018 浙江) 已知  $a_1, a_2, a_3, a_4$  成等比数列, 且  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \ln(a_1 + a_2 + a_3)$ . 若  $a_1 > 1$ , 则 ( )

- A.  $a_1 < a_3, a_2 < a_4$  B.  $a_1 > a_3, a_2 < a_4$  C.  $a_1 < a_3, a_2 > a_4$  D.  $a_1 > a_3, a_2 > a_4$

2. 答案: B

解答:  $\because \ln x \leq x - 1$ ,

$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \ln(a_1 + a_2 + a_3) \leq a_1 + a_2 + a_3 - 1$ ,

得  $a_4 \leq -1$ , 即  $a_1 q^3 \leq -1$ ,  $\therefore q < 0$ .

若  $q \leq -1$ , 则  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_1(1+q)(1+q^2) \leq 0$ ,

$a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1+q+q^2) \geq a_1 > 1$ , 矛盾.

$\therefore -1 < q < 0$ , 则  $a_1 - a_3 = a_1(1-q^2) > 0$ ,  $a_2 - a_4 = a_1 q(1-q^2) < 0$ .

$\therefore a_1 > a_3, a_2 < a_4$ .

3. (2018 全国新课标 I 理) 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $3S_3 = S_2 + S_4$ ,  $a_1 = 2$ , 则  $a_5 =$  ( )

- A. -12 B. -10 C. 10 D. 12

3. 答案: B 解答:

$$3(3a_1 + \frac{3 \times 2}{2} \times d) = 2a_1 + d + 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2} \times d \Rightarrow 9a_1 + 9d = 6a_1 + 7d \Rightarrow 3a_1 + 2d = 0$$

$$\Rightarrow 6 + 2d = 0 \Rightarrow d = -3, \therefore a_5 = a_1 + 4d = 2 + 4 \times (-3) = -10.$$

## 二、填空

1. (2018 北京理) 设  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_1 = 3$ ,  $a_2 + a_5 = 36$ , 则  $\{a_n\}$  的通项公式为\_\_\_\_\_.

1. 【答案】 $a_n = 6n - 3$

【解析】 $\because a_1 = 3$ ,  $\therefore 3 + d + 3 + 4d = 36$ ,  $\therefore d = 6$ ,  $\therefore a_n = 3 + 6(n-1) = 6n - 3$ .

2. (2018 江苏) 已知集合  $A = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*\}$ ,  $B = \{x | x = 2^n, n \in \mathbf{N}^*\}$ . 将  $A \cup B$  的所有元素从小到大依次排列构成一个数列  $\{a_n\}$ . 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则使得  $S_n > 12a_{n+1}$  成立的  $n$  的最小值为\_\_\_\_\_.

## 2. 【答案】27

【解析】设  $a_n = 2^k$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } S_n &= [(2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + \cdots + (2 \cdot 2^{k-1} - 1)] + [2 + 2^2 + \cdots + 2^k] \\ &= \frac{2^{k-1}(1 + 2 \times 2^{k-1} - 1)}{2} + \frac{2(1 - 2^k)}{1 - 2} = 2^{2k-2} + 2^{k+1} - 2, \end{aligned}$$

由  $S_n > 12a_{n+1}$  得  $2^{2k-2} + 2^{k+1} - 2 > 12(2^k + 1), (2^{k-1})^2 - 20(2^{k-1}) - 14 > 0$ ,  $2^{k-1} \geq 2^5$ ,  $k \geq 6$ , 所以只需研究  $2^5 < a_n < 2^6$  是否有满足条件的解,

$$\text{此时 } S_n = [(2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + \cdots + (2m - 1)] + [2 + 2^2 + \cdots + 2^5] = m^2 + 2^{5+1} - 2,$$

$$a_{n+1} = 2m + 1, \quad m \text{ 为等差数列项数, 且 } m > 16.$$

由  $m^2 + 2^{5+1} - 2 > 12(2m + 1)$ ,  $m^2 - 24m + 50 > 0$ ,  $\therefore m \geq 22$ ,  $n = m + 5 \geq 27$ , 得满足条件的  $n$  最小值为 27.

3 (2018 上海) 记等差数列  $\{a_n\}$  的前几项和为  $S_n$ , 若  $a_3 = 0$ ,  $a_8 + a_7 = 14$ , 则  $S_7 =$  \_\_\_\_\_。

【答案】14

【知识点】等差数列的前  $n$  项和

【考查能力】运算求解能力

【解析】 $a_8 + a_7 = 2a_5 + 11d = 14$ ,  $a_3 = a_1 + 2d = 0 \therefore d = 2$ ,  $a_4 = 2, S_7 = 14$ 

4. (2018 上海) 设等比数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = q^{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}$ , 则  $q =$  \_\_\_\_\_

【答案】3

【知识点】等比数列前  $n$  项和

【考查能力】推理论证能力

【解析】 $a_1 = 1$ , 根据题意:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}}{a_1 q^{n+1}} = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore q = 3$

5. (2018 全国新课标 I 理) 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $S_n = 2a_n + 1$ , 则  $S_6 =$  \_\_\_\_\_.

5. 答案: -63

解答: 依题意,  $\begin{cases} S_n = 2a_n + 1, \\ S_{n+1} = 2a_{n+1} + 1, \end{cases}$  作差得  $a_{n+1} = 2a_n$ , 所以  $\{a_n\}$  为公比为 2 的等比数列, 又因

为  $a_1 = S_1 = 2a_1 + 1$ , 所以  $a_1 = -1$ , 所以  $a_n = -2^{n-1}$ , 所以  $S_6 = \frac{-1 \cdot (1 - 2^6)}{1 - 2} = -63$ .

## 三、解答题

1. (2018 北京文) 设  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_1 = \ln 2$ ,  $a_2 + a_3 = 5\ln 2$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式; (2) 求  $e^{a_1} + e^{a_2} + \cdots + e^{a_n}$ .

1. 【答案】(1)  $n\ln 2$ ; (2)  $2^{n+1} - 2$ .

【解析】(1) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ,  $\because a_2 + a_3 = 5\ln 2$ ,  $\therefore 2a_1 + 3d = 5\ln 2$ ,

又  $a_1 = \ln 2$ ,  $\therefore d = \ln 2$ ,  $\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = n\ln 2$ .

(2) 由 (1) 知  $a_n = n\ln 2$ ,  $\therefore e^{a_n} = e^{n\ln 2} = e^{\ln 2^n} = 2^n$ ,

$\therefore \{e^{a_n}\}$  是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列,

$\therefore e^{a_1} + e^{a_2} + \cdots + e^{a_n} = e^{\ln 2} + e^{\ln 2^2} + \cdots + e^{\ln 2^n} = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ ,

$\therefore e^{a_1} + e^{a_2} + \cdots + e^{a_n} = 2^{n+1} - 2$ .

2. (2018 上海) 给定无穷数列  $\{a_n\}$ , 若无穷数列  $\{b_n\}$  满足: 对任意  $n \in N^*$ , 都有  $|b_n - a_n| \leq 1$ , 则称  $\{b_n\}$  与  $\{a_n\}$  “接近”.

(1) 设  $\{a_n\}$  是首项为 1, 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列,  $b_n = a_{n+1} + 1$ ,  $n \in N^*$ , 判断数列  $\{b_n\}$  是否与  $\{a_n\}$  接近, 并说明理由;

(2) 设数列  $\{a_n\}$  的前四项为:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 4$ ,  $a_4 = 8$ ,  $\{b_n\}$  是一个与  $\{a_n\}$  接近的数列, 记集合  $M = \{x | x = b_i, i = 1, 2, 3, 4\}$ , 求  $M$  中元素的个数  $m$ ;

(3) 已知  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列, 若存在数列  $\{b_n\}$  满足:  $\{b_n\}$  与  $\{a_n\}$  接近, 且在  $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \cdots, b_{201} - b_{200}$  中至少有 100 个为正数, 求  $d$  的取值范围.

【知识点】等差数列

【考查能力】推理论证能力

【解析】(1)、 $a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ ,  $b_n = a_{n+1} + 1 = (\frac{1}{2})^n + 1$ , 所以  $|b_n - a_n| = 1 - (\frac{1}{2})^n \leq 1$ ,  $\{b_n\}$  与  $\{a_n\}$  接近.

(2)、由题目条件  $|b_n - a_n| \leq 1$ ,  $b_1 \in [0, 2]$ ,  $b_2 \in [1, 3]$ ,  $b_3 \in [3, 5]$ ,  $b_4 \in [7, 9]$ , 所以

$b_1, b_2, b_3, b_4$  中至多有两个相等, 即  $m = 3$  或  $4$ .

(3)、 $b_n \in [a_n - 1, a_n + 1]$ ,  $b_{n+1} \in [a_{n+1} - 1, a_{n+1} + 1]$ , 所以

$b_{n+1} - b_n \in [a_{n+1} - a_n - 2, a_{n+1} - a_n + 2]$ , 即  $b_{n+1} - b_n \in [d - 2, d + 2]$ .

①若  $d \leq -2$ , 则  $b_{n+1} - b_n \leq 0$  恒成立, 不符合条件.

②若  $d \geq -2$ , 令  $b_n = a_n + (-1)^n$ , 则  $b_{n+1} - b_n = d - 2(-1)^n$ , 当  $n$  为偶数时,

$b_{n+1} - b_n = d - 2 < 0$ , 当  $n$  为奇数时,  $b_{n+1} - b_n = d + 2 > 0$ ,

所以, 存在  $\{b_n\}$  使  $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \cdots, b_{101} - b_{100}$  中至少有 100 个为正数.

综上,  $d > -2$ .

3. (2018 江苏) 设  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$ , 公差为  $d$  的等差数列,  $\{b_n\}$  是首项为  $b_1$ , 公比为  $q$  的等比数列.

(1) 设  $a_1=0, b_1=1, q=2$ , 若  $|a_n - b_n| \leq b_1$  对  $n=1, 2, 3, 4$  均成立, 求  $d$  的取值范围;

(2) 若  $a_1=b_1>0, m \in \mathbf{N}^*, q \in (1, \sqrt[m]{2}]$ , 证明: 存在  $d \in \mathbf{R}$ , 使得  $|a_n - b_n| \leq b_1$  对  $n=2, 3, \dots, m+1$  均成立, 并求  $d$  的取值范围 (用  $b_1, m, q$  表示).

3. 【答案】(1)  $d$  的取值范围为  $\left[\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right]$ ;

(2)  $d$  的取值范围为  $\left[\frac{b_1(q^m - 2)}{m}, \frac{b_1 q^m}{m}\right]$ , 证明见解析.

【解析】(1) 由条件知:  $a_n = (n-1)d$ ,  $b_n = 2^{n-1}$ .

因为  $|a_n - b_n| \leq b_1$  对  $n=1, 2, 3, 4$  均成立,

即  $|(n-1)d - 2^{n-1}| \leq 1$  对  $n=1, 2, 3, 4$  均成立,

即  $1 \leq 1, 1 \leq d \leq 3, 3 \leq 2d \leq 5, 7 \leq 3d \leq 9$ , 得  $\frac{7}{3} \leq d \leq \frac{5}{2}$ .

因此,  $d$  的取值范围为  $\left[\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right]$ .

(2) 由条件知:  $a_n = b_1 + (n-1)d$ ,  $b_n = b_1 q^{n-1}$ .

若存在  $d$ , 使得  $|a_n - b_n| \leq b_1$  ( $n=2, 3, \dots, m+1$ ) 成立,

即  $|b_1 + (n-1)d - b_1 q^{n-1}| \leq b_1$  ( $n=2, 3, \dots, m+1$ ),

即当  $n=2, 3, \dots, m+1$  时,  $d$  满足  $\frac{q^{n-1}-2}{n-1} b_1 \leq d \leq \frac{q^{n-1}}{n-1} b_1$ .

因为  $q \in (1, \sqrt[m]{2}]$ , 则  $1 < q^{n-1} \leq q^m \leq 2$ ,

从而  $\frac{q^{n-1}-2}{n-1} b_1 \leq 0$ ,  $\frac{q^{n-1}}{n-1} b_1 > 0$ , 对  $n=2, 3, \dots, m+1$  均成立.

因此, 取  $d=0$  时,  $|a_n - b_n| \leq b_1$  对  $n=2, 3, \dots, m+1$  均成立.

下面讨论数列  $\left\{\frac{q^{n-1}-2}{n-1}\right\}$  的最大值和数列  $\left\{\frac{q^{n-1}}{n-1}\right\}$  的最小值

( $n=2, 3, \dots, m+1$ ).

① 当  $2 \leq n \leq m$  时,  $\frac{q^n-2}{n} - \frac{q^{n-1}-2}{n-1} = \frac{nq^n - q^n - nq^{n-1} + 2}{n(n-1)} = \frac{n(q^n - q^{n-1}) - q^n + 2}{n(n-1)}$ ,

当  $1 < q \leq 2^{\frac{1}{m}}$  时, 有  $q^n \leq q^m \leq 2$ , 从而  $n(q^n - q^{n-1}) - q^n + 2 > 0$ .

因此, 当  $2 \leq n \leq m+1$  时, 数列  $\left\{\frac{q^{n-1}-2}{n-1}\right\}$  单调递增,

故数列  $\left\{\frac{q^{n-1}-2}{n-1}\right\}$  的最大值为  $\frac{q^m-2}{m}$ .

② 设  $f(x) = 2^x(1-x)$ , 当  $x > 0$  时,  $f'(x) = (\ln 2 - 1 - x \ln 2)2^x < 0$ ,

所以  $f(x)$  单调递减, 从而  $f(x) < f(0) = 1$ .

当  $2 \leq n \leq m$  时,  $\frac{\frac{q^n}{n}}{\frac{q^{n-1}}{n-1}} = \frac{q(n-1)}{n} \leq 2^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) < 1$ ,

因此, 当  $2 \leq n \leq m+1$  时, 数列  $\left\{\frac{q^{n-1}}{n-1}\right\}$  单调递减,

故数列  $\left\{\frac{q^{n-1}}{n-1}\right\}$  的最小值为  $\frac{q^m}{m}$ .

因此,  $d$  的取值范围为  $\left[\frac{b_1(q^m-2)}{m}, \frac{b_1q^m}{m}\right]$ .

4. (2018 浙江) 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比  $q > 1$ , 且  $a_3 + a_4 + a_5 = 28$ ,  $a_4 + 2$  是  $a_3, a_5$  的等差中项. 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = 1$ , 数列  $\{(b_{n+1} - b_n) a_n\}$  的前  $n$  项和为  $2n^2 + n$ .

(I) 求  $q$  的值;

(II) 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式.

4. 答案: (1)  $q = 2$ ; (2)  $b_n = 15 - \frac{4n+3}{2^{n-2}}$ .

解答: (1) 由题可得  $a_3 + a_4 + a_5 = 28$ ,  $2(a_4 + 2) = a_3 + a_5$ , 联立两式可得  $a_4 = 8$ .

所以  $a_3 + a_4 + a_5 = 8\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 28$ , 可得  $q = 2$  (另一根  $\frac{1}{2} < 1$ , 舍去).

(2) 由题可得  $n \geq 2$  时,  $(b_{n+1} - b_n) a_n = 2n^2 + n - [2(n-1)^2 + (n-1)] = 4n - 1$ ,

当  $n = 1$  时,  $(b_2 - b_1) a_1 = 2 + 1 = 3$  也满足上式, 所以  $(b_{n+1} - b_n) a_n = 4n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ ,

而由 (1) 可得  $a_n = 8 \cdot 2^{n-4} = 2^{n-1}$ , 所以  $b_{n+1} - b_n = \frac{4n-1}{a_n} = \frac{4n-1}{2^{n-1}}$ ,

所以  $b_n - b_1 = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) = \frac{3}{2^0} + \frac{7}{2^1} + \frac{11}{2^2} + \cdots + \frac{4n-5}{2^{n-2}}$ ,

错位相减得  $b_n - b_1 = 14 - \frac{4n+3}{2^{n-2}}$ ,

所以  $b_n = 15 - \frac{4n+3}{2^{n-2}}$ .

5. (2018 天津文) 设  $\{a_n\}$  是等差数列, 其前  $n$  项和为  $S_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ );  $\{b_n\}$  是等比数列, 公比大于 0, 其前  $n$  项和为  $T_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). 已知  $b_1 = 1$ ,  $b_3 = b_2 + 2$ ,  $b_4 = a_3 + a_5$ ,  $b_5 = a_4 + 2a_6$ .

(I) 求  $S_n$  和  $T_n$ ;

(II) 若  $S_n + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = a_n + 4b_n$ , 求正整数  $n$  的值.

5. 【答案】(1)  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $T_n = 2^n - 1$ ; (2) 4.

【解析】(1) 设等比数列  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ , 由  $b_1 = 1$ ,  $b_3 = b_2 + 2$ , 可得  $q^2 - q - 2 = 0$ .

因为  $q > 0$ , 可得  $q = 2$ , 故  $b_n = 2^{n-1}$ . 所以,  $T_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ .

设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ . 由  $b_4 = a_3 + a_5$ , 可得  $a_1 + 3d = 4$ . 由  $b_5 = a_4 + 2a_6$ ,

可得  $3a_1 + 13d = 16$ , 从而  $a_1 = 1$ ,  $d = 1$ , 故  $a_n = n$ , 所以,  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

(2) 由 (1), 有  $T_1 + T_2 + \cdots + T_n = (2^1 + 2^3 + \cdots + 2^n) - n = \frac{2 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} - n = 2^{n+1} - n - 2$ , 由

$$S_n + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = a_n + 4b_n \text{ 可得 } \frac{n(n+1)}{2} + 2^{n+1} - n - 2 = n + 2^{n+1},$$

整理得  $n^2 - 3n - 4 = 0$ , 解得  $n = -1$  (舍), 或  $n = 4$ . 所以  $n$  的值为 4.

6. (2018 天津理) 设  $\{a_n\}$  是等比数列, 公比大于 0, 其前  $n$  项和为  $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ,  $\{b_n\}$  是等差数列. 已知  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = a_2 + 2$ ,  $a_4 = b_3 + b_5$ ,  $a_5 = b_4 + 2b_6$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(II) 设数列  $\{S_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ,

(i) 求  $T_n$ ;

(ii) 证明  $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ .

6. 【答案】(1)  $a_n = 2^{n-1}$ ,  $b_n = n$ ; (2) ①  $T_n = 2^{n+1} - n - 2$ ; ② 证明见解析.

【解析】(1) 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ . 由  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = a_2 + 2$ ,

可得  $q^2 - q - 2 = 0$  因为  $q > 0$ , 可得  $q = 2$ , 故  $a_n = 2^{n-1}$ ,

设等差数列  $\{b_n\}$  的公差为  $d$ , 由  $a_4 = b_3 + b_5$ , 可得  $b_1 + 3d = 4$ ,

由  $a_5 = b_4 + 2b_6$ , 可得  $3b_1 + 13d = 16$ , 从而  $b_1 = 1$ ,  $d = 1$ , 故  $b_n = n$ ,

所以数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2^{n-1}$ , 数列  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = n$ .

(2) ① 由 (1), 有  $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ ,

$$\text{故 } T_n = \sum_{k=1}^n (2^k - 1) = \sum_{k=1}^n 2^k - n = \frac{2 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} - n = 2^{n+1} - n - 2,$$

$$\text{② 因为 } \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{(2^{k+1} - k - 2 + k + 2)k}{(k+1)(k+2)} = \frac{k \cdot 2^{k+1}}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{k+2}}{k+2} - \frac{2^{k+1}}{k+1},$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \left( \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right) + \left( \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} \right) + \cdots + \left( \frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2.$$

7. (2018 全国新课标 I 文) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$ , 设  $b_n = \frac{a_n}{n}$ .

(1) 求  $b_1, b_2, b_3$ ;

(2) 判断数列  $\{b_n\}$  是否为等比数列, 并说明理由;

(3) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

7. 答案:

(1)  $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 4$

(2) 见解答

(3)  $a_n = n \cdot 2^{n-1}$

解答: 依题意,  $a_2 = 2 \times 2 \times a_1 = 4$ ,  $a_3 = \frac{1}{2} (2 \times 3 \times a_2) = 12$ ,  $\therefore b_1 = \frac{a_1}{1} = 1$ ,  $b_2 = \frac{a_2}{2} = 2$ ,

$$b_3 = \frac{a_3}{3} = 4.$$

(1)  $\because na_{n+1} = 2(n+1)a_n, \therefore \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$ , 即  $b_{n+1} = 2b_n$ , 所以  $\{b_n\}$  为等比数列.

(2)  $\because b_n = b_1 q^{n-1} = 2^{n-1} = \frac{a_n}{n}, \therefore a_n = n \cdot 2^{n-1}$ .

8. (2018 全国新课标 II 文、理) 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $a_1 = -7, S_3 = -15$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求  $S_n$ , 并求  $S_n$  的最小值.

8. 【答案】(1)  $a_n = 2n - 9$ ; (2)  $S_n = n^2 - 8n$ , 最小值为  $-16$ .

【解析】(1) 设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 由题意得  $3a_1 + 3d = -15$ ,

由  $a_1 = -7$  得  $d = 2$ . 所以  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2n - 9$ .

(2) 由 (1) 得  $S_n = n^2 - 8n = (n - 4)^2 - 16$ ,

$\therefore$  当  $n = 4$  时,  $S_n$  取得最小值, 最小值为  $-16$ .

9. (2018 全国新课标 III 文、理) 等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, a_5 = 4a_3$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 记  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $S_m = 63$ , 求  $m$ .

9. 答案: (1)  $a_n = 2^{n-1}$  或  $a_n = (-2)^{n-1}$ ; (2) 6.

解答: (1) 设数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ,  $\therefore q^2 = \frac{a_5}{a_3} = 4, \therefore q = \pm 2$ .

$\therefore a_n = 2^{n-1}$  或  $a_n = (-2)^{n-1}$ .

(2) 由 (1) 知,  $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$  或  $S_n = \frac{1+(-2)^n}{1+2} = \frac{1}{3}[1-(-2)^n]$ ,

$\therefore S_m = 2^m - 1 = 63$  或  $S_m = \frac{1}{3}[1-(-2)^m] = 63$  (舍),

$\therefore m = 6$ .