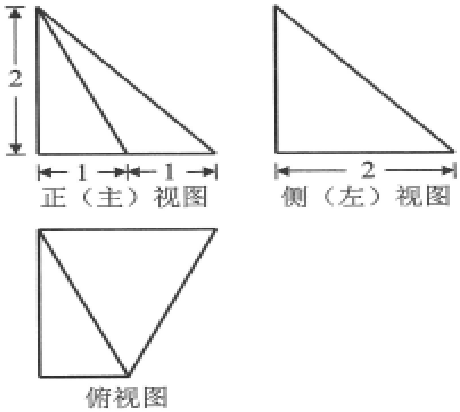
2018 年全国各地高考数学试题及解答分类汇编大全

（13 立体几何 ）

一、选择题

1.（**2018 北京文、理**）某四棱锥的三视图如图所示，在此四棱锥的侧面中，直角三角形的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4



1．【答案】C

【解析】由三视图可得四棱锥 $P-ABCD$，

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD=2$，$AD=2$，

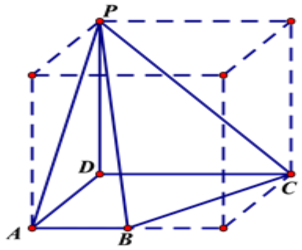
$CD=2$，$AB=1$，

由勾股定理可知，$PA=2\sqrt{2}$，$PC=2\sqrt{2}$，

$PB=3$，$BC=\sqrt{5}$，

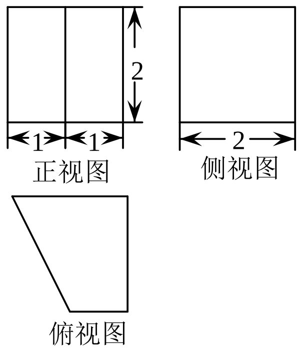
则在四棱锥中，直角三角形有，

$\triangle PAD$，$\triangle PCD$，$\triangle PAB$ 共三个，故选 C．



2．（**2018 浙江**）某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位：cm^3）是（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

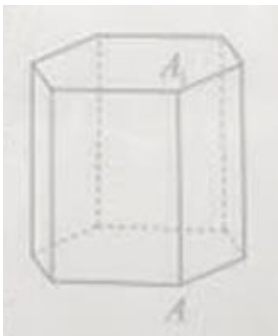


3. 答案：C

解答：该几何体的立体图形为四棱柱，

$$V=\frac{(1+2)\times 2}{2}\times 2=6.$$

3（**2018 上海**）《九章算术》中，称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马.设 AA_1 是正六棱柱的一条侧棱，如图，若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点，以 AA_1 为底面矩形的一边，则这样的阳马的个数是（　）



（A）4　（B）8

（C）12　（D）16

【答案】 D

【知识点】空间点、直线、面的关系

【考查能力】 空间想象能力

【解析】符合题目条件的面有四个，每一个都有 4 个顶点，所以选择 D

4．**（2018 浙江）**已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形，侧棱长均相等，E 是线段 AB 上的点（不含端点），设 SE 与 BC 所成的角为 θ_1，SE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ_2，二面角 $S-AB-C$ 的平面角为 θ_3，则（　　）

A．$\theta_1\le\theta_2\le\theta_3$　　B．$\theta_3\le\theta_2\le\theta_1$　　C．$\theta_1\le\theta_3\le\theta_2$　　D．$\theta_2\le\theta_3\le\theta_1$

4.答案：D

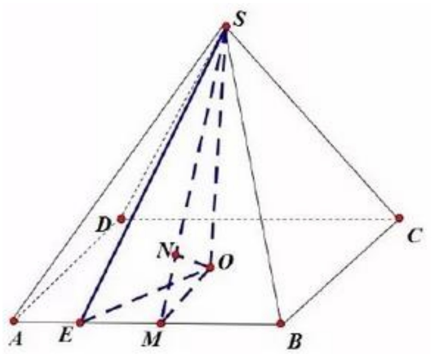
解答：作 SO 垂直于平面 $ABCD$，垂足为 O，取 AB 的中点 M，连接 SM .过 O 作 ON 垂直于直线 SM，可知 $\theta_2=\angle SEO$，$\theta_3=\angle SMO$，

过 SO 固定下的二面角与线面角关系，得 $\theta_3\ge\theta_2$.

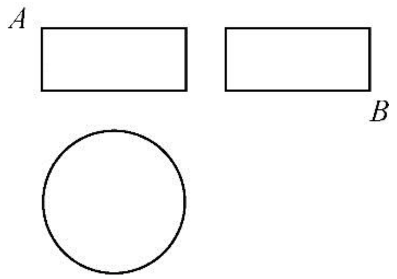
易知，θ_3 也为 BC 与平面 SAB 的线面角，即 OM 与平面 SAB 的线面角，

根据最小角定理，OM 与直线 SE 所成的线线角 $\theta_1\ge\theta_3$，

所以 $\theta_2\le\theta_3\le\theta_1$.



5．**（2018 全国新课标Ⅰ文）**某圆柱的高为 2，底面周长为 16，其三视图如右图．圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A，圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B，则在此圆柱侧面上，从 M 到 N 的路径中，最短路径的长度为（　　）



A．$2\sqrt{17}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．3　　D．2

5．答案：B

解答：三视图还原几何体为一圆柱，如图，

将侧面展开，最短路径为 M,N 连线的距离，

所以 $MN=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，所以选 B.

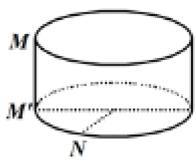


图1

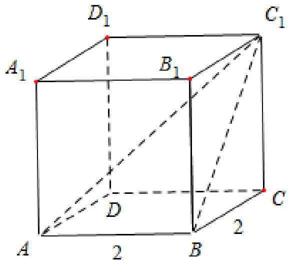
图2

6．**（2018 全国新课标Ⅰ文）**在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $30°$，则该长方体的体积为（　　）

A．8　　B．$6\sqrt{2}$　　C．$8\sqrt{2}$　　D．$8\sqrt{3}$

6. 答案：C

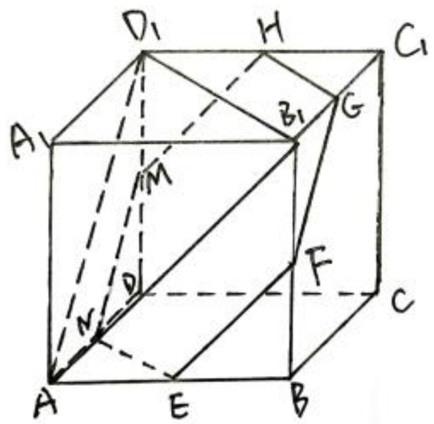
解答：



连接 AC_1 和 BC_1，$\because AC_1$ 与平面 BB_1C_1C 所成角为 30°，$\therefore \angle AC_1B=30^\circ$，$\therefore$ $\dfrac{AB}{BC_1}=\tan 30^\circ, BC_1=2\sqrt{3}$，$\therefore CC_1=2\sqrt{2}$，$\therefore V=2\times 2\times 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$，$\therefore$选 C.

7. **（2018 全国新课标 I 理）**已知正方体的棱长为 1，每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等，则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为（　　）

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



7. 答案：A

解答：由于截面与每条棱所成的角都相等，所以平面 α 中存在平面与平面 AB_1D_1 平行（如图），而在与平面 AB_1D_1 平行的所有平面中，面积最大的为由各棱的中点构成的截面 $EFGHMN$，而平面 $EFGHMN$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

8. **（2018 全国新课标 I 文）**已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1，O_2，过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形，则该圆柱的表面积为（　　）

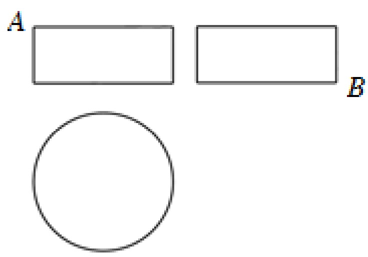
A. $12\sqrt{2}\pi$　　B. 12π　　C. $8\sqrt{2}\pi$　　D. 10π

8. 答案：B

解答：截面面积为 8，所以高 $h=2\sqrt{2}$，底面半径 $r=\sqrt{2}$，所以表面积为 $S=\pi\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 2+2\pi\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=12\pi$.

9. **（2018 全国新课标 I 理）**某圆柱的高为 2，底面周长为 16，其三视图如图．圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A，圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B，则在此圆柱侧面上，从 M 到 N 的路径中，最短路径的长度为（　　）

A. $2\sqrt{17}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 2



9. 答案：B

解答：三视图还原几何体为一圆柱，如图，将侧面展开，最短路径为 M,N 连线的距离，

所以 $MN=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，所以选 B.

10．（**2018 全国新课标Ⅱ文**）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 CC_1 的中点，则异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　D．$\frac{\sqrt{7}}{2}$

10．【答案】C

【解析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$CD/\!/AB$，所以异面直线 AE 与 CD 所成角为 $\angle EAB$，

设正方体边长为 $2a$，则由 E 为棱 CC_1 的中点，可得 $CE=a$，所以 $BE=\sqrt{5}a$，

则 $\tan\angle EAB=\frac{BE}{AB}=\frac{\sqrt{5}a}{2a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$．故选 C.

11．（**2018 全国新课标Ⅱ理**）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{6}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

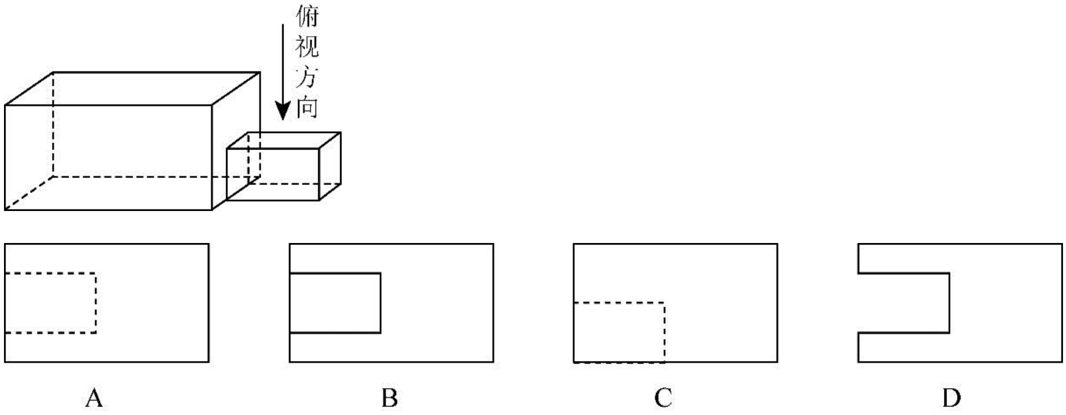
11．【答案】C

【解析】以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B_1(1,1,\sqrt{3})$，$D_1(0,0,\sqrt{3})$，$\therefore\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DB_1}=(1,1,\sqrt{3})$，

$\because\cos<\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{DB_1}>=\frac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{DB_1}}{|\overrightarrow{AD_1}||\overrightarrow{DB_1}|}=\frac{-1+3}{2\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore$异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，故选 C.

12．（**2018 全国新课标Ⅲ文、理**）中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来，构件的凸出部分叫榫头，凹进部分叫卯眼，图中木构件右边的小长方体是榫头．若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体，则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是（　　）



12. 答案：A

解答：根据题意，A 选项符号题意；

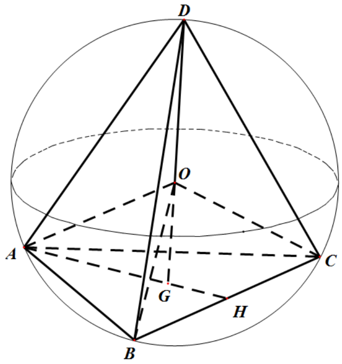
13．（**2018 全国新课标Ⅲ文、理**）设 A，B，C，D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为（　　）

A．$12\sqrt{3}$　　B．$18\sqrt{3}$　　C．$24\sqrt{3}$　　D．$54\sqrt{3}$

13．答案：B

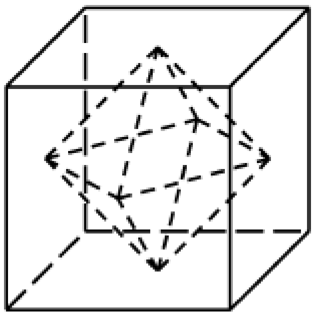
解答：如图，ΔABC 为等边三角形，点 O 为 A，B，C，D 外接球的球心，G 为 ΔABC 的重心，由 $S_{\Delta ABC}=9\sqrt{3}$，得 $AB=6$，取 BC 的中点 H，$\therefore AH=AB\cdot\sin 60°=3\sqrt{3}$，$\therefore AG=\frac{2}{3}AH=2\sqrt{3}$，$\therefore$球心 O 到面 ABC 的距离为 $d=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$，$\therefore$三棱锥 $D-ABC$ 体

积最大值$V_{D-ABC}=\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times(2+4)=18\sqrt{3}$.



二、填空

1．（2018 江苏）如图所示，正方体的棱长为 2，以其所有面的中心为顶点的多面体的体积为__▲__.

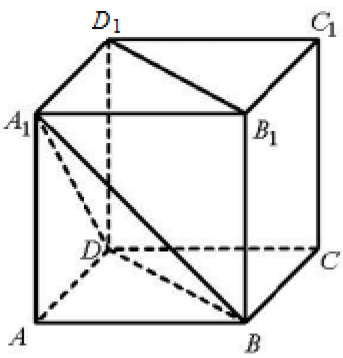


（第 10 题）

1.【答案】$\frac{4}{3}$

【解析】由图可知，该多面体为两个全等正四棱锥的组合体，正四棱锥的高为 1，底面正方形的边长等于$\sqrt{2}$，所以该多面体的体积为$2\times\frac{1}{3}\times1\times\left(\sqrt{2}\right)^{2}=\frac{4}{3}$.

2．（2018 天津文）如图，已知正方体 $ABCD–A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则四棱柱 $A_1–BB_1D_1D$ 的体积为__________.



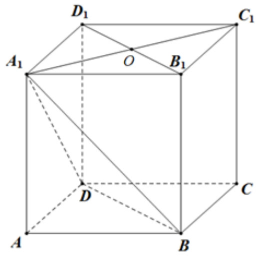
第（11）题图

2.【答案】$\frac{1}{3}$

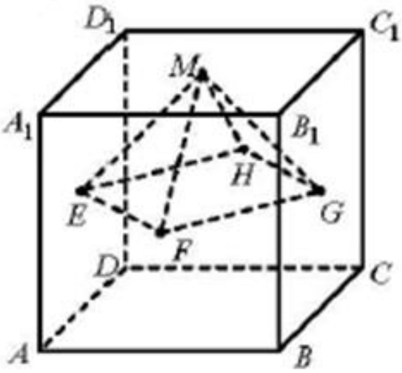
【解析】如图所示，连结A_1C_1，交B_1D_1于点O，很明显$A_1C_1\perp$平面BDD_1B_1，则A_1O是四棱锥的高，

且 $A_1O=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $S_{四边形BDD_1B_1}=BD\times DD_1=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$，

结合四棱锥体积公式可得其体积为 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}$.



3． （**2018 天津理**）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，除面 $ABCD$ 外，该正方体其余各面的中心分别为点 E，F，G，H，M(如图)，则四棱锥 $M-EFGH$ 的体积为__________.



第（11）题图

3.【答案】$\frac{1}{12}$

【解析】由题意可得，底面四边形 $EFGH$ 为边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正方形，

其面积 $S_{EFGH}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

顶点 M 到底面四边形 $EFGH$ 的距离为 $d=\frac{1}{2}$，

由四棱锥的体积公式可得 $V_{M-EFGH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$.

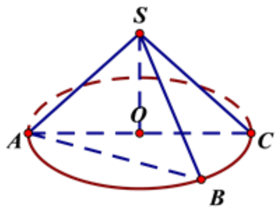
4． （**2018 全国新课标Ⅱ文**）已知圆锥的顶点为 S，母线 SA，SB 互相垂直，SA 与圆锥底面所成角为 $30°$，若 $\triangle SAB$ 的面积为 8，则该圆锥的体积为__________.

4.【答案】8π

【解析】如下图所示，$\angle SAO=30°$，$\angle ASB=90°$，又 $S_{\triangle SAB}=\frac{1}{2}SA\cdot SB=\frac{1}{2}SA^2=8$，

解得 $SA=4$，所以 $SO=\frac{1}{2}SA=2$，$AO=\sqrt{SA^2-SO^2}=2\sqrt{3}$，所以该圆锥的体积为

$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot OA^2\cdot SO=8\pi$.



5．（2018 全国新课标Ⅱ理）已知圆锥的顶点为S，母线SA，SB所成角的余弦值为$\frac{7}{8}$，SA与圆锥底面所成角为 45°，若$\triangle SAB$的面积为$5\sqrt{15}$，则该圆锥的侧面积为________.

5．【答案】$40\sqrt{2}\pi$

【解析】因为母线SA，SB所成角的余弦值为$\frac{7}{8}$，所以母线SA，SB所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{8}$，

因为$\triangle SAB$的面积为$5\sqrt{15}$，设母线长为l，所以$\frac{1}{2}\times l^2\times\frac{\sqrt{15}}{8}=5\sqrt{15}$，$\therefore l^2=80$，

因SA与圆锥底面所成角为$45°$，所以底面半径为$l\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}l$，

因此圆锥的侧面积为$\pi rl=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi l^2=40\sqrt{2}\pi$.

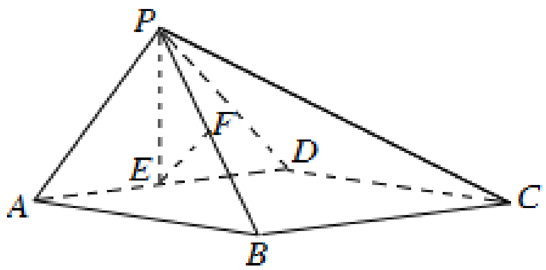
三、解答题

1.（2018 北京文）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD$，E，F分别为AD，PB的中点.

（1）求证：$PE\perp BC$；

（2）求证：平面$PAB\perp$平面PCD；

（3）求证：$EF//$平面PCD.



1．【答案】（1）见解析；（2）见解析；（3）见解析.

【解析】（1）$\because PA=PD$，且E为AD的中点，

$\therefore PE\perp AD$，

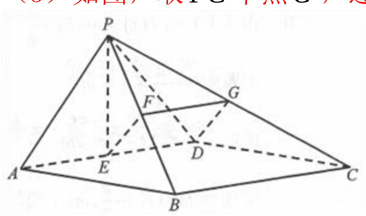
$\because$底面$ABCD$为矩形，$\therefore BC//AD$，$\therefore PE\perp BC$.

（2）$\because$底面$ABCD$为矩形，$\therefore AB\perp AD$，

$\because$平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$\therefore AB\perp$平面PAD，

$\therefore AB\perp PD$. 又$PA\perp PD$，$\because PD\perp$平面PAB，$\therefore$平面$PAB\perp$平面PCD.

（3）如图，取PC中点G，连接FG，GD.



$\because F$，G分别为PB和PC的中点，$\therefore FG//BC$，且$FG=\frac{1}{2}BC$，

$\because$四边形$ABCD$为矩形，且E为AD的中点，$\therefore ED//BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore ED//FG$，且$ED=FG$，$\therefore$四边形$EFGD$为平行四边形，

$\therefore EF//GD$，又$EF\not\subset$平面PCD，$GD\subset$平面PCD，

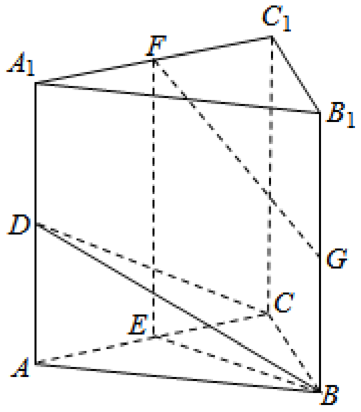
$\therefore EF//$平面PCD.

2. **（2018 北京理）**如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$平面 ABC，D，E，F，G 分别为 AA_1，AC，A_1C_1，BB_1 的中点，$AB=BC=\sqrt{5}$，$AC=AA_1=2$.

（Ⅰ）求证：$AC\perp$平面 BEF；

（Ⅱ）求二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值；

（Ⅲ）证明：直线 FG 与平面 BCD 相交.



2.【答案】(1) 证明见解析

(2) $B-CD-C_1$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$；(3) 证明过程见解析.

【解析】(1) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\because CC_1\perp$平面 ABC，

$\therefore$四边形 A_1ACC_1 为矩形．又 E，F 分别为 AC，A_1C_1 的中点，

$\therefore AC\perp EF$，$\because AB=BC$，$\therefore AC\perp BE$，

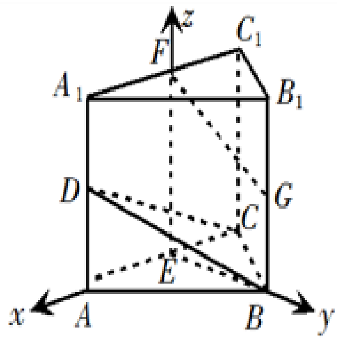
$\therefore AC\perp$平面 BEF.

(2) 由 (1) 知 $AC\perp EF$，$AC\perp BE$，$EF/\!/CC_1$.

又 $CC_1\perp$平面 ABC，$\therefore EF\perp$平面 ABC.

$\because BE\subset$平面 ABC，$\therefore EF\perp BE$.

如图建立空间直角坐称系 $E-xyz$.



由题意得 $B(0,2,0)$，$C(-1,0,0)$，$D(1,0,1)$，$F(0,0,2)$，$G(0,2,1)$，

$\therefore \overrightarrow{CD}=(2,0,1)$，$\overrightarrow{CB}=(1,2,0)$，设平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

$\therefore\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}2a+c=0\\ a+2b=0\end{cases}$，

令 $a=2$，则 $b=-1$，$c=-4$，$\therefore$平面 BCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(2,-1，,-4)$，

又$\because$平面 CDC_1 的法向量为 $\overrightarrow{EB}=(0,2,0)$，$\therefore\cos<\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{EB}|}=-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

由图可得二面角 $B-CD-C_1$ 为钝角，所以二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

(3) 平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,-4)$，$\because G(0,2,1)$，$F(0,0,2)$，

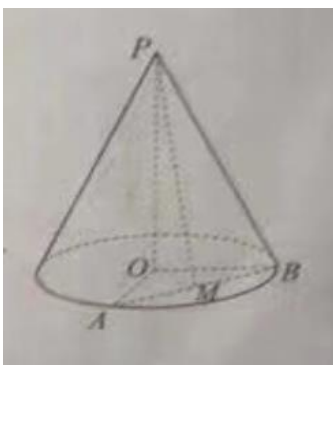
$\therefore\overrightarrow{GF}=(0,-2,1)$，$\therefore\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GF}=-2$，$\therefore\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{GF}$ 不垂直，

$\therefore GF$ 与平面 BCD 不平行且不在平面 BCD 内，$\therefore GF$ 与平面 BCD 相交.

3. **（2018 上海）**已知圆锥的顶点为 P，底面圆心为 O，半径为 2

（1）设圆锥的母线长为 4，求圆锥的体积；

（2）设 $PO=4$，OA，OB 是底面半径，且$\angle AOB=90°$，M 为线段 AB 的中点，如图，求异面直线 PM 与 OB 所成的角的大小.



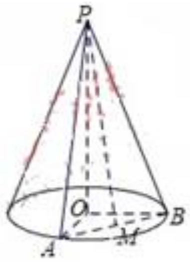
【答案】(1) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$，(2) $\arctan\sqrt{17}$

【知识点】空间点、直线、面的关系

【考查能力】空间想象能力

【解析】(1)、$V=\frac{1}{3}\times4\pi\times2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

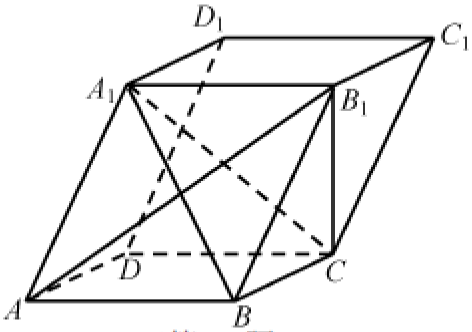
(2)、取 OA 中点为 N，即求 $\angle PMN$，$MN=1, PN=\sqrt{17}$，所成角大小为 $\arctan\sqrt{17}$。



4．（2018 江苏）在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB, AB_1\perp B_1C_1$．

求证：（1）$AB//$ 平面 A_1B_1C；

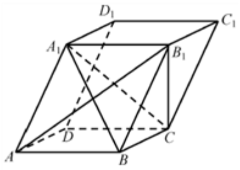
（2）平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 A_1BC．



（第 15 题）

4.【答案】（1）见解析；（2）见解析．

【解析】（1）在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB//A_1B_1$．



（第 15 题）

因为 $AB\not\subset$ 平面 A_1B_1C，$A_1B_1\subset$ 平面 A_1B_1C，所以 $AB//$ 平面 A_1B_1C．

（2）在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 ABB_1A_1 为平行四边形．

又因为 $AA_1=AB$，所以四边形 ABB_1A_1 为菱形，

因此 $AB_1\perp A_1B$．又因为 $AB_1\perp B_1C_1$，$BC//B_1C_1$，所以 $AB_1\perp BC$．

又因为 $A_1B\cap BC=B$，$A_1B\subset$ 平面 A_1BC，$BC\subset$ 平面 A_1BC，

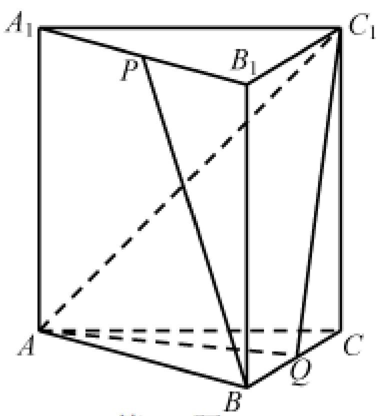
所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC．因为 $AB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 A_1BC．

5．（2018 江苏）如图，在正三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=2$，点 P，Q 分别为 A_1B_1，BC 的中点．

（1）求异面直线 BP 与 AC_1 所成角的余弦值；

（2）求直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值．

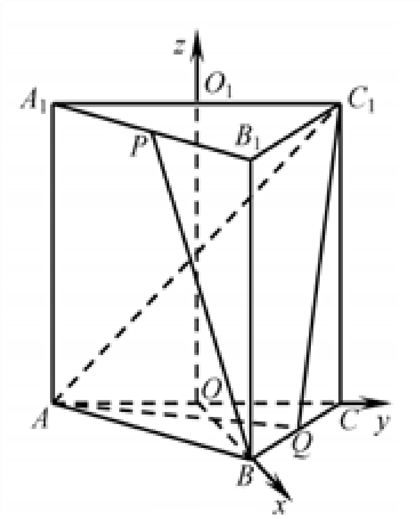


（第 22 题）

5.【答案】（1）$\frac{3\sqrt{10}}{20}$；（2）$\frac{\sqrt{5}}{5}$．

【解析】如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，设 AC，A_1C_1 的中点分别为 O，O_1，则 $OB\perp OC$，$OO_1\perp OC$，$OO_1\perp OB$，以 $\{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO_1}\}$ 为基底，建立空间直角坐标系 $O-xyz$．因为 $AB=AA_1=2$，

所以 $A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$A_1(0,-1,2)$，$B_1(\sqrt{3},0,2)$，$C_1(0,1,2)$．



（1）因为 P 为 A_1B_1 的中点，所以 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2\right)$，

从而 $\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2\right)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2)$，

故 $\left|\cos<\overrightarrow{BP},\overrightarrow{AC_1}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC_1}\right|}=\frac{|-1+4|}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

因此，异面直线 BP 与 AC_1 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

（2）因为 Q 为 BC 的中点，所以 $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

因此 $\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 AQC_1 的一个法向量，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AQ}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0\\ 2y+2z=0\end{cases}$，

不妨取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,1)$，设直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角为 θ，

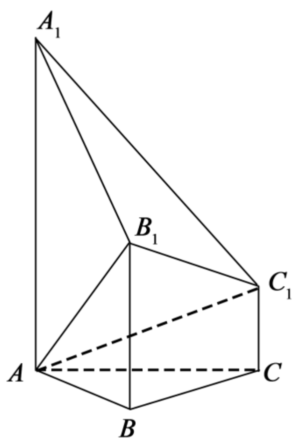
则 $\sin\theta=\left|<\cos\overrightarrow{CC_1},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CC_1}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{5}\times2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

6. **（2018 浙江）** 如图，已知多面体 $ABCA_1B_1C_1$，A_1A，B_1B，C_1C 均垂直于平面 ABC，$\angle ABC=120°$，$A_1A=4$，$C_1C=1$，$AB=BC=B_1B=2$.

（Ⅰ）证明：$AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$；

（Ⅱ）求直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值.



6. 答案：（1）略；（2）$\frac{\sqrt{39}}{13}$

解答：（1）$\because AB=B_1B=2$，且 $B_1B\perp$ 平面 ABC，

$\therefore B_1B\perp AB$，$\therefore AB_1=2\sqrt{2}$.

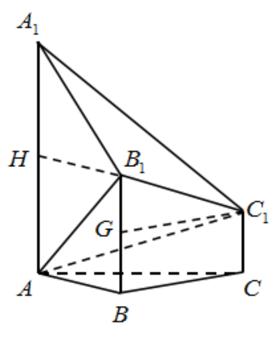
同理，$AC_1=\sqrt{AC^2+C_1C^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{13}$.

过点 C_1 作 B_1B 的垂线段交 B_1B 于点 G，则 $C_1G=BC=2$

且 $B_1G=1$，$\therefore B_1C_1=\sqrt{5}$.

在 ΔAB_1C_1 中，$AB_1^2+B_1C_1^2=AC_1^2$，

$\therefore AB_1\perp B_1C_1$，①



过点 B_1 作 A_1A 的垂线段交 A_1A 于点 H.

则 $B_1H=AB=2$，$A_1H=2$，$\therefore A_1B_1=2\sqrt{2}$.

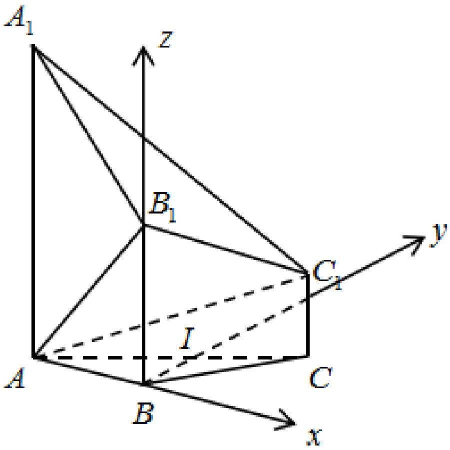
在 ΔA_1B_1A 中，$AA_1^2=AB_1^2+A_1B_1^2$，

$\therefore AB_1 \perp A_1B_1$，②

综合①②，$\because A_1B_1 \cap B_1C_1 = B_1$，$A_1B_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，$B_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，

$\therefore AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

（2）过点 B 作 AB 的垂线段交 AC 于点 I，以 B 为原点，以 AB 所在直线为 x 轴，以 BI 所在直线为 y 轴，以 B_1B 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系 $B-xyz$.



则 $B(0,0,0)$，$A(-2,0,0)$，$B_1(0,0,2)$，$C_1(1,\sqrt{3},1)$，

设平面 ABB_1 的一个法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a=0\\ 2c=0\end{cases}$，令 $b=1$，则 $\vec{n}=(0,1,0)$，

又$\because \overrightarrow{AC_1}=(3,\sqrt{3},1)$，$\cos<\vec{n},\overrightarrow{AC_1}>=\dfrac{\sqrt{3}}{1\times\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

由图形可知，直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成角为锐角，

设 AC_1 与平面 ABB_1 夹角为 α.

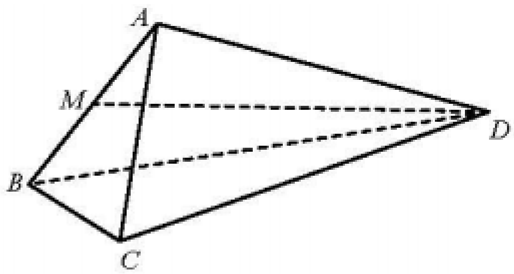
$\therefore \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

7. **（2018 天津文）**如图，在四面体 $ABCD$ 中，△ABC 是等边三角形，平面 ABC⊥平面 ABD，点 M 为棱 AB 的中点，AB=2，AD=$2\sqrt{3}$，∠BAD=90°.

（Ⅰ）求证：AD⊥BC;

（Ⅱ）求异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值;

（Ⅲ）求直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值.



7.【答案】（1）证明见解析;（2）$\dfrac{\sqrt{13}}{26}$;（3）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

【解析】（1）由平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，

平面 $ABC\cap$ 平面 $ABD=AB$，$AD\perp AB$，

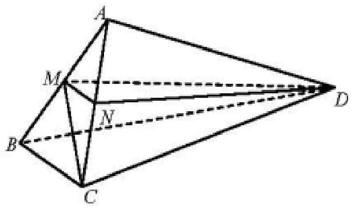
可得 $AD\perp$ 平面 ABC，故 $AD\perp BC$.

（2）取棱 AC 的中点 N，连接 MN，ND. 又因为 M 为棱 AB 的中点，故 $MN/\!/BC$.

所以 $\angle DMN$（或其补角）为异面直线 BC 与 MD 所成的角.

在 Rt△DAM 中，$AM=1$，故 $DM=\sqrt{AD^2+AM^2}=\sqrt{13}$.

因为 $AD\perp$ 平面 ABC，



故 $AD\perp AC$. 在 Rt△DAN 中，$AN=1$，故 $DN=\sqrt{AD^2+AN^2}=\sqrt{13}$.

在等腰三角形 DMN 中，$MN=1$，可得 $\cos\angle DMN=\dfrac{\frac{1}{2}MN}{DM}=\dfrac{\sqrt{13}}{26}$.

所以，异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{26}$.

（3）连接 CM，因为△ABC 为等边三角形，M 为边 AB 的中点，故 $CM\perp AB$，$CM=\sqrt{3}$. 又因为平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，而 $CM\subset$ 平面 ABC，故 $CM\perp$ 平面 ABD.

所以，$\angle CDM$ 为直线 CD 与平面 ABD 所成的角.

在 Rt△CAD 中，$CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=4$. 在 Rt△CMD 中，$\sin\angle CDM=\dfrac{CM}{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

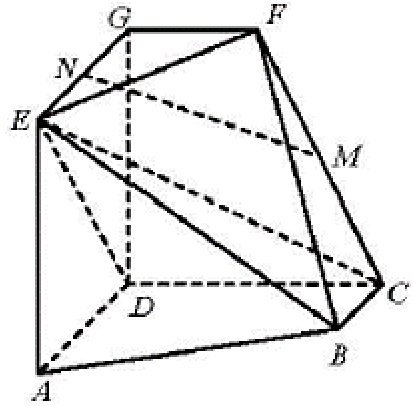
所以，直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

8. **（2018 天津理）** 如图，$AD//BC$ 且 $AD=2BC$，$AD\perp CD$，$EG//AD$ 且 $EG=AD$，$CD//FG$ 且 $CD=2FG$，$DG\perp$ 平面$ABCD$，$DA=DC=DG=2$.

（I）若 M 为 CF 的中点，N 为 EG 的中点，求证：$MN//$ 平面CDE；

（II）求二面角 $E-BC-F$ 的正弦值；

（III）若点 P 在线段 DG 上，且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60°，求线段 DP 的长.



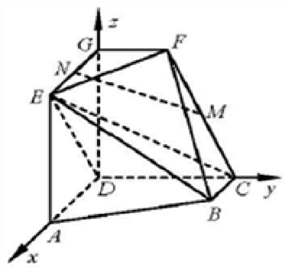
8.【答案】(1) 证明见解析；(2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$；(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】依题意，可以建立以 D 为原点，

分别以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DG}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向的空间直角坐标系（如图），

可得 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(1,2,0)$，$C(0,2,0)$，

$E(2,0,2)$，$F(0,1,2)$，$G(0,0,2)$，$M\left(0,\frac{3}{2},1\right)$，$N(1,0,2)$.



（1）依题意 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DE}=(2,0,2)$.

设 $\boldsymbol{n}_0=(x,y,z)$ 为平面 CDE 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_0\cdot\overrightarrow{DC}=0\\ \boldsymbol{n}_0\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0\\ 2x+2z=0\end{cases}$，

不妨令 $z=-1$，可得 $\boldsymbol{n}_0=(1,0,-1)$.

又 $\overrightarrow{MN}=\left(1,-\frac{3}{2},1\right)$，可得 $\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}_0=0$，

又因为直线 $MN\not\subset$ 平面 CDE，所以 $MN//$ 平面 CDE.

（2）依题意，可得 $\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{CF}=(0,-1,2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BCE 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x=0\\ x-2y+2z=0\end{cases}$，

不妨令 $z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 BCF 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x=0\\ -y+2z=0\end{cases}$，

不妨令 $z=1$，可得 $\boldsymbol{m}=(0,2,1)$.

因此有 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，于是 $\sin<m,n>=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

所以，二面角 $E-BC-F$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

（3）设线段 DP 的长为 $h\left(h\in[0,2]\right)$，则点 P 的坐标为 $(0,0,h)$，

可得 $\overrightarrow{BP}=(-1,-2,h)$. 易知，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$ 为平面 $ADGE$ 的一个法向量，

故 $\left|\cos<\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DC}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DC}\right|}{\left|\overrightarrow{BP}\right|\left|\overrightarrow{DC}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{h^2+5}}$,

由题意，可得 $\dfrac{2}{\sqrt{h^2+5}}=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\in[0,2]$.

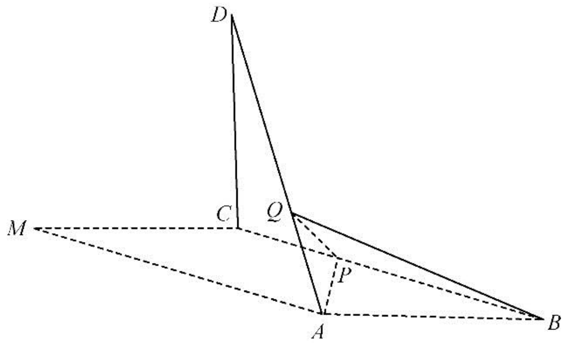
所以线段 DP 的长为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

9．（**2018 全国新课标 I 文**）如图，在平行四边形 $ABCM$ 中，$AB=AC=3$，$\angle ACM=90^\circ$，以 AC 为折痕将△ ACM 折起，使点 M 到达点 D 的位置，且 $AB\perp DA$.

（1）证明：平面 $ACD\perp$ 平面 ABC；

（2）Q 为线段 AD 上一点，P 为线段 BC 上一点，

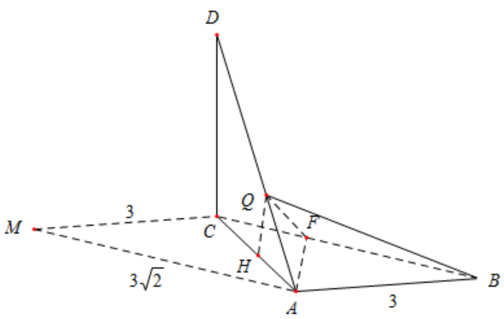
且 $BP=DQ=\dfrac{2}{3}DA$，求三棱锥 $Q-ABP$ 的体积.



9.

答案：（1）见解析（2）1

解答：



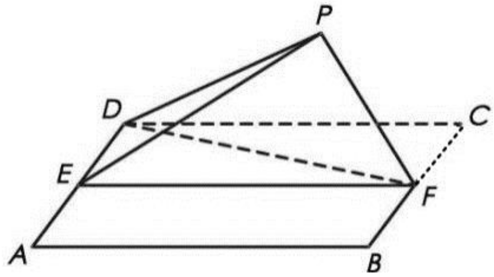
（1）证明：∵ $ABCM$ 为平行四边形且 $\angle ACM=90^\circ$，∴ $AB\perp AC$，又∵ $AB\perp DA$，∴ $AB\perp$ 平面 ACD，∵ $AB\subset$ 平面 ABC，∴平面 $ABC\perp$ 平面 ACD.

（2)过点 Q 作 $QH\perp AC$，交 AC 于点 H，∵ $AB\perp$ 平面 ACD，∴ AB CD ，又∵ $CD\perp AC$，∴ $CD\perp$ 平面 ABC，∴ $\dfrac{HQ}{CD}=\dfrac{AQ}{AD}=\dfrac{1}{3}$，∴ $HQ=1$，∵ $BC=3\sqrt{2}, BC=AM=AD=3\sqrt{2}$，∴ $BP=2\sqrt{2}$，又∵ ΔABC 为等腰直角三角形，∴ $S_{\Delta ABP}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3$，∴ $V_{Q-ABD}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABD}\cdot HQ=\dfrac{1}{3}\times 3\times 1=1$.

10．（**2018 全国新课标 I 理**）如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，E,F 分别为 AD,BC 的中点，以 DF 为折痕把△DFC 折起，使点 C 到达点 P 的位置，且 $PF\perp BF$.

（1）证明：平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$；

（2）求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.



10. 答案：（1）略；（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

解答：（1） E,F 分别为 AD,BC 的中点，则 $EF//AB$， $\therefore EF\perp BF$，

又 $PF\perp BF$， $EF\cap PF=F$， $\therefore BF\perp$ 平面 PEF，

$BE\subset$ 平面 $ABFD$， $\therefore$ 平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$.

（2） $PF\perp BF$， $BF//ED$， $\therefore PF\perp ED$，

又 $PF\perp PD$， $ED\cap DP=D$， $\therefore PF\perp$ 平面 PED， $\therefore PF\perp PE$，

设 $AB=4$， 则 $EF=4$， $PF=2$， $\therefore PE=2\sqrt{3}$，

过 P 作 $PH\perp EF$ 交 EF 于 H 点，

由平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$，

$\therefore PH\perp$ 平面 $ABFD$， 连结 DH，

则 $\angle PDH$ 即为直线 DP 与平面 $ABFD$ 所成的角，

由 $PE\cdot PF=EF\cdot PH$， $\therefore PH=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot 2}{4}=\sqrt{3}$，

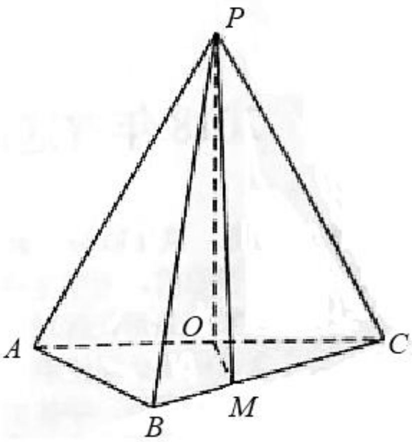
而 $PD=4$， $\therefore \sin\angle PDH=\dfrac{PH}{PD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore DP$ 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

11. **（2018 全国新课标Ⅱ文）** 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB=BC=2\sqrt{2}$， $PA=PB=PC=AC=4$， O 为 AC 的中点.

（1）证明： $PO\perp$ 平面 ABC；

（2）若点 M 在棱 BC 上，且 $MC=2MB$，求点 C 到平面 POM 的距离.



11.【答案】（1）见解析；（2）$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

【解析】（1）因为 $AP=CP=AC=4$， O 为 AC 的中点，

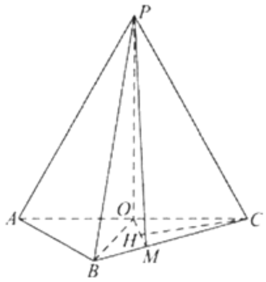
所以 $OP\perp AC$，且 $OP=2\sqrt{3}$. 连结 OB.

因为 $AB=BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC$， 所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

且 $OB\perp AC$， $OB=\dfrac{1}{2}AC=2$.

由 $OP^2+OB^2=PB^2$ 知， $OP\perp OB$.

由 $OP\perp OB$， $OP\perp AC$ 知 $PO\perp$ 平面 ABC.



（2）作 $CH \perp OM$，垂足为 H．又由（1）可得 $OP \perp CH$，所以 $CH \perp$ 平面 POM．
故 CH 的长为点 C 到平面 POM 的距离．

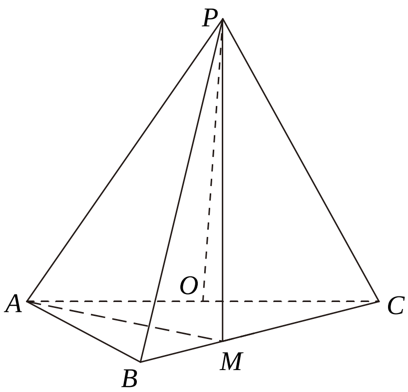
由题设可知 $OC=\frac{1}{2}AC=2$，$CM=\frac{2}{3}BC=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，$\angle ACB=45°$．

所以 $OM=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，$CH=\frac{OC\cdot MC\cdot \sin\angle ACB}{OM}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$．所以点 C 到平面 POM 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$．

12．**（2018 全国新课标Ⅱ理）**如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点．

（1）证明：$PO\perp$ 平面 ABC；

（2）若点 M 在棱 BC 上，且二面角 $M-PA-C$ 为 $30°$，求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值．



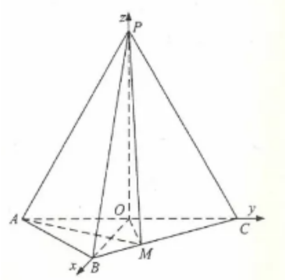
12．【答案】（1）见解析；（2）$\frac{\sqrt{3}}{4}$．

【解析】（1）因为 $AP=CP=AC=4$，O 为 AC 的中点，
所以 $OP\perp AC$，且 $OP=2\sqrt{3}$，

连结 OB．因为 $AB=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，且 $OB\perp AC$，$OB=\frac{1}{2}AC=2$，

由 $OP^2+OB^2=PB^2$ 知 $PO\perp OB$，
由 $OP\perp OB, OP\perp AC$ 知 $PO\perp$ 平面 ABC．

（2）如图，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$．



由已知得 $O(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AP}=(0,2,2\sqrt{3})$，

取平面 PAC 的法向量 $\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$，设 $M(a,2-a,0)(0<a\le 2)$，则 $\overrightarrow{AM}=(a,4-a,0)$，

设平面 PAM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$．由 $\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0$，

得 $\begin{cases}2y+2\sqrt{3}z=0\\ ax+(4-a)y=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}(a-4),\sqrt{3}a,-a)$，

$\therefore \cos<\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}>=\frac{2\sqrt{3}(a-4)}{2\sqrt{3(a-4)^2+3a^2+a^2}}$，由已知得 $\left|\cos<\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \dfrac{2\sqrt{3}|a-4|}{2\sqrt{3(a-4)^2+3a^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=-4$（舍去），$a=\dfrac{4}{3}$，

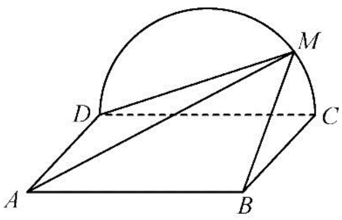
$\therefore \boldsymbol{n}=\left(-\dfrac{8\sqrt{3}}{3},\dfrac{4\sqrt{3}}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$，又 $\because \overrightarrow{PC}=\left(0,2,-2\sqrt{3}\right)$，所以 $\cos<\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

13．**（2018 全国新课标Ⅲ文）**如图，矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 CD 所在平面垂直，M 是 CD 上异于 C，D 的点.

（1）证明：平面 $AMD\perp$ 平面 BMC；

（2）在线段 AM 上是否存在点 P，使得 MC // 平面 PBD？说明理由.



13. 答案：见解答

解答：（1）$\because$ 正方形 $ABCD\perp$ 半圆面 CMD，

$\therefore AD\perp$ 半圆面 CMD，$\therefore AD\perp$ 平面 MCD.

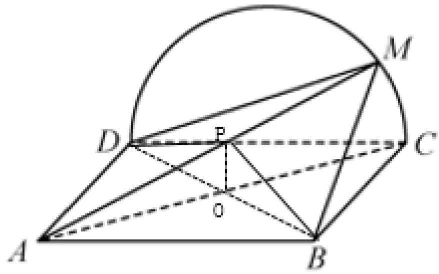
$\because CM$ 在平面 MCD 内，$\therefore AD\perp CM$，又 $\because M$ 是半圆弧 CD 上异于 C,D 的点，$\therefore CM\perp MD$.

又 $\because AD\cap DM=D$，$\therefore CM\perp$ 平面 ADM，$\because CM$ 在平面 BCM 内，$\therefore$ 平面 $BCM\perp$ 平面 ADM.

（2）线段 AM 上存在点 P 且 P 为 AM 中点，证明如下：

连接 BD,AC 交于点 O，连接 PD,PB,PO；在矩形 $ABCD$ 中，O 是 AC 中点，P 是 AM 的中点；

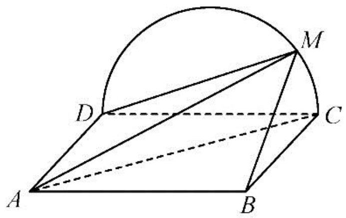
$\therefore OP//MC$，$\because OP$ 在平面 PDB 内，MC 不在平面 PDB 内，$\therefore MC//$ 平面 PDB.



14．**（2018 全国新课标Ⅲ理）**如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在的平面与半圆弧 CD 所在平面垂直，M 是 CD 上异于 C，D 的点.

（1）证明：平面 $AMD\perp$ 平面 BMC；

（2）当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时，求面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值.



14．答案：见解答

解答：（1）$\because$ 正方形 $ABCD\perp$ 半圆面 CMD，

$\therefore AD\perp$ 半圆面 CMD，$\therefore AD\perp$ 平面 MCD.

$\because CM$ 在平面 MCD 内，$\therefore AD\perp CM$，又 $\because M$ 是半圆弧 CD 上异于 C,D 的点，$\therefore CM\perp MD$.

又 $\because AD\cap DM=D$，$\therefore CM\perp$ 平面 ADM，$\because CM$ 在平面 BCM 内，$\therefore$ 平面 $BCM\perp$ 平面 ADM.

（2）如图建立坐标系：

$\because S_{\Delta ABC}$ 面积恒定，

$\therefore MO\perp CD$，V_{M-ABC} 最大.

$M(0,0,1)$，$A(2,-1,0)$，$B(2,1,0)$，$C(0,1,0)$，$D(0,-1,0)$，

设面 MAB 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，设面 MCD 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\overrightarrow{MA}=(2,-1,-1)$， $MB=(2,1,-1)$，

$MC=(0,1,-1)$， $MD=(0,-1,-1)$，

$$\begin{cases}2x_1-y_1-z_1=0\\2x_1+y_1-z_1=0\end{cases}\Rightarrow \vec{m}=(1,0,2)，$$

同理 $\vec{n}=(1,0,0)$，,

$\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$， $\therefore$ $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.