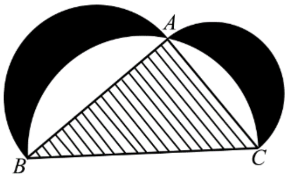
2018 年全国各地高考数学试题及解答分类汇编大全

（09 解三角形）

一、选择题

1．（**2018 全国新课标Ⅰ理**）下图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形．此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC，直角边 AB，AC．$\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为Ⅰ，黑色部分记为Ⅱ，其余部分记为Ⅲ．在整个图形中随机取一点，此点取自Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的概率分别记为 p_1，p_2，p_3，则（　　）



A．$p_1=p_2$　　B．$p_1=p_3$　　C．$p_2=p_3$　　D．$p_1=p_2+p_3$

1．答案：A

解答：取 $AB=AC=2$，则 $BC=2\sqrt{2}$，

∴区域Ⅰ的面积为 $S_1=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，区域Ⅲ的面积为 $S_3=\frac{1}{2}\cdot\pi(\sqrt{2})^2-2=\pi-2$，

区域Ⅱ的面积为 $S_2=\pi\cdot1^2-S_3=2$，故 $p_1=p_2$．

2．（**2018 全国新课标Ⅱ文、理**）在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则 $AB=$（　　）

A．$4\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{30}$　　C．$\sqrt{29}$　　D．$2\sqrt{5}$

2．【答案】A

【解析】因为 $\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$，

所以 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=1+25-2\times1\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=32$，$\therefore c=4\sqrt{2}$，选 A．

3．（**2018 全国新课标Ⅲ文、理**）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则 $C=$（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

3．答案：C

解答：$S_{\Delta ABC}=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}=\frac{2ab\cos C}{4}=\frac{1}{2}ab\cos C$，又 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$，故 $\tan C=1$，

$\therefore C=\frac{\pi}{4}$．故选 C．

二、填空

1．（**2018 北京文**）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+c^2-b^2\right)$，且 $\angle C$ 为钝角，则 $\angle B=$_________；$\frac{c}{a}$ 的取值范围是_________．

1．【答案】60°；$(2,+\infty)$．

【解析】$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+c^2-b^2\right)=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，$\therefore\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}$，

即 $\cos B=\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}$，$\therefore\dfrac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3}$，$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$，

则 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)}{\sin A}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos A-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\sin A}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\angle C$ 为钝角，$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore 0<\angle A<\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore\tan A\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\dfrac{1}{\tan A}\in\left(\sqrt{3},+\infty\right)$，

故 $\dfrac{c}{a}\in(2,+\infty)$．

2．（**2018 江苏**）在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\angle ABC=120^\circ$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，且 $BD=1$，则 $4a+c$ 的最小值为__▲__．

2．【答案】9

【解析】由题意可知，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$，由角平分线性质和三角形面积公式得

$\dfrac{1}{2}ac\sin120^\circ=\dfrac{1}{2}a\times1\times\sin60^\circ+\dfrac{1}{2}c\times1\times\sin60^\circ$，化简得 $ac=a+c$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=1$，因此

$4a+c=(4a+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)=5+\dfrac{c}{a}+\dfrac{4a}{c}\geq5+2\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{4a}{c}}=9$，

当且仅当 $c=2a=3$ 时取等号，则 $4a+c$ 的最小值为 9．

3．（**2018 浙江**）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．若 $a=\sqrt{7}$，$b=2$，$A=60°$，则 $\sin B$=__________，c=__________．

3．.答案：$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$　　3

解答：由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $\dfrac{\sqrt{7}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sin B}$，所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．

由余弦定理，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，得 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{4+c^2-7}{4c}$，所以 $c=3$．

4．（**2018 全国新课标Ⅰ文**）△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$，$b^2+c^2-a^2=8$，则△$ABC$ 的面积为________．

4. 答案：$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

解答：根据正弦定理有：$\sin B\sin C+\sin C\sin B=4\sin A\sin B\sin C$，∴

$2\sin B\sin C=4\sin A\sin B\sin C$，∴ $\sin A=\dfrac{1}{2}$．∵ $b^2+c^2-a^2=8$，∴

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4}{bc}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $bc=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$，∴ $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

三、解答题

1．**（2018 北京理）**在△ABC 中，a=7，b=8，cos$B$=$-\frac{1}{7}$．

（Ⅰ）求∠A；

（Ⅱ）求 AC 边上的高．

1．【答案】(1) $\angle A=\frac{\pi}{3}$；(2) AC 边上的高为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$．

【解析】(1) 在△ABC 中，$\because cosB=-\frac{1}{7}$，$\therefore B\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$．

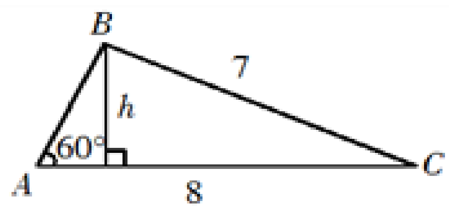
由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{7}{\sin A}=\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

$\because B\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \angle A=\frac{\pi}{3}$．

（2）在△ABC 中，$\because \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$．

如图所示，在△ABC 中，$\because \sin C=\frac{h}{BC}$，$h=BC\cdot\sin C=7\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore AC$ 边上的高为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$．



2．**（2018 天津理）**在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c.已知$b\sin A=a\cos(B-\frac{\pi}{6})$．

(I) 求角 B 的大小；

(II) 设 a=2，c=3，求 b 和$\sin(2A-B)$的值.

2．【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$；(2) $b=\sqrt{7}$，$\sin(2A-B)=\frac{3\sqrt{3}}{14}$．

【解析】(1) 在△ABC 中，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得$b\sin A=a\sin B$，

又由$b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，得$a\sin B=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，

即$\sin B=\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，可得$\tan B=\sqrt{3}$．

又因为$B\in(0,\pi)$，可得$B=\frac{\pi}{3}$．

（2）在△ABC 中，由余弦定理及$a=2$，$c=3$，$B=\frac{\pi}{3}$，

有$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，故$b=\sqrt{7}$．

由$b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，可得$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．因为$a<c$，故$\cos A=\frac{2}{\sqrt{7}}$．

因此$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$， $\cos 2A=2\cos^2 A-1=\frac{1}{7}$，

所以， $\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

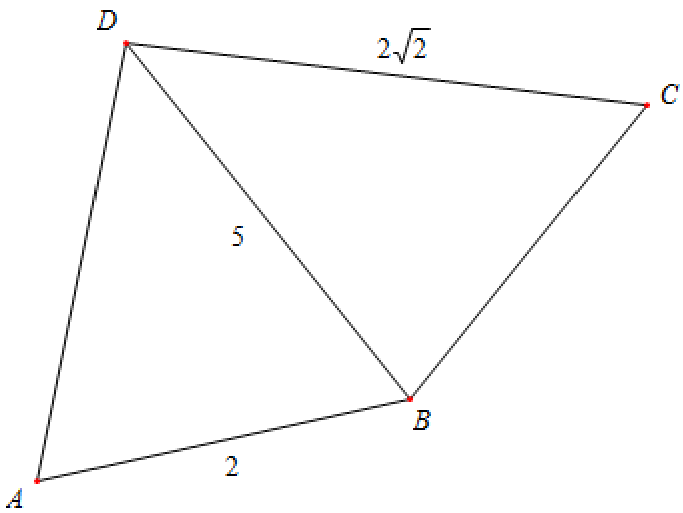
3．**（2018 全国新课标Ⅰ理）**在平面四边形$ABCD$中，$\angle ADC=90^\circ$，$\angle A=45^\circ$，$AB=2$，$BD=5$.

（1）求$\cos\angle ADB$；

（2）若$DC=2\sqrt{2}$，求BC.

3. 答案：（1）$\frac{\sqrt{23}}{5}$；（2）5.

解答：



（1）在ΔABD中，由正弦定理得：$\frac{5}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin\angle ADB}$，∴$\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$，

∵$\angle ADB<90^\circ$，∴$\cos\angle ADB=\sqrt{1-\sin^2\angle ADB}=\frac{\sqrt{23}}{5}$.

（2）$\angle ADB+\angle BDC=\frac{\pi}{2}$，∴$\cos\angle BDC=\cos(\frac{\pi}{2}-\angle ADB)=\sin\angle ADB$，

∴$\cos\angle BDC=\cos(\frac{\pi}{2}-\angle ADB)=\sin\angle ADB$，∴$\cos\angle BDC=\frac{DC^2+BD^2-BC^2}{2\cdot BD\cdot DC}$，

∴$\frac{\sqrt{2}}{5}=\frac{8+25-BC^2}{2\cdot 5\cdot 2\sqrt{2}}$. ∴$BC=5$.