2018 年全国各地高考数学试题及解答分类汇编大全

（03 函数的性质及其应用）

一、选择题

1. **（2018 上海）**设 D 是含数 1 的有限实数集，$f(x)$ 是定义在 D 上的函数，若 $f(x)$ 的图像绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与原图像重合，则在以下各项中，$f(1)$ 的可能取值只能是（　　）

（A）$\sqrt{3}$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）0

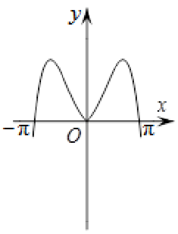
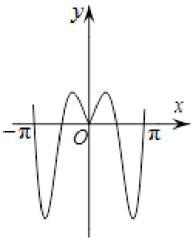
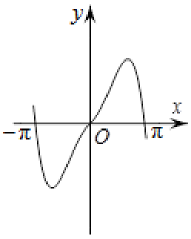
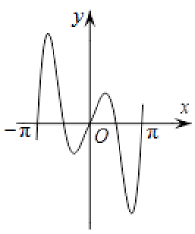
【答案】B

【知识点】函数的概念

【考查能力】空间想象能力

【解析】点 $(1,f(1))$ 在直线 $x=1$ 上，把直线进行旋转可得旋转后的直线，这样进行下去直到回到 $(1,f(1))$ 点可知 $f(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. **（2018 浙江）**函数 $y=2^{|x|}\sin 2x$ 的图象可能是（　　）

A. 
B. 
C. 
D. 

2.答案：D

解答：令 $y=f(x)=2^{|x|}\sin 2x$，$f(-x)=2^{|-x|}\sin(-2x)=-2^{|x|}\sin 2x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数①；当 $x\in(0,\pi)$ 时，$2^{|x|}>0$，$\sin 2x$ 可正可负，所以 $f(x)$ 可正可负②.由①②可知，选 D.

3. **（2018 天津文）**已知 $a=\log_3\frac{7}{2}, b=(\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}, c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

（A）$a>b>c$　　（B）$b>a>c$　　（C）$c>b>a$　　（D）$c>a>b$

3.【答案】D

【解析】由题意可知：$\log_3 3<\log_3\frac{7}{2}<\log_3 9$，即 $1<a<2$，$0<\left(\frac{1}{4}\right)^{1}<\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{4}\right)^{0}$，

即 $0<b<1$，$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}=\log_3 5>\log_3\frac{7}{2}$，即 $c>a$，综上可得：$c>a>b$. 故选 D.

4. **（2018 天津理）**已知 $a=\log_2 e$，$b=\ln 2$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

(A) $a>b>c$　　(B) $b>a>c$　　(C) $c>b>a$　　(D) $c>a>b$

4.【答案】D

【解析】由题意结合对数函数的性质可知：

$a=\log_2 e>1$，$b=\ln 2=\dfrac{1}{\log_2 e}\in(0,1)$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}=\log_2 3>\log_2 e$，

据此可得 $c>a>b$，故选 D.

5. **（2018 全国新课标Ⅰ文）**设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$，则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty，-1]$　　B. $(0，+\infty)$　　C. $(-1，0)$　　D. $(-\infty，0)$

5. 答案：D

解答：取 $x=-\dfrac{1}{2}$，则化为 $f(\dfrac{1}{2})<f(-1)$，满足，排除 A,B；

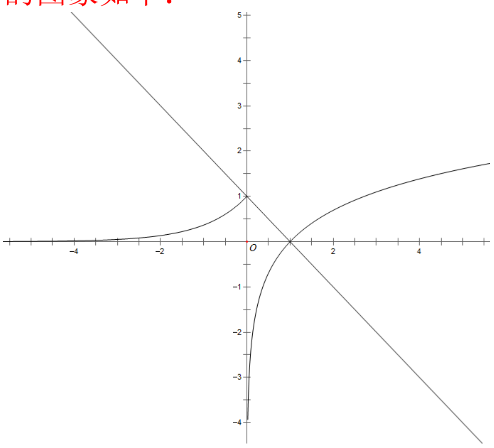
取 $x=-1$，则化为 $f(0)<f(-2)$，满足，排除 C，故选 D.

6. **（2018 全国新课标Ⅰ理）**已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$．若 g（x）存在 2 个零点，则 a 的取值范围是（　　）

A．[–1，0）　　B．[0，+∞）　　C．[–1，+∞）　　D．[1，+∞）

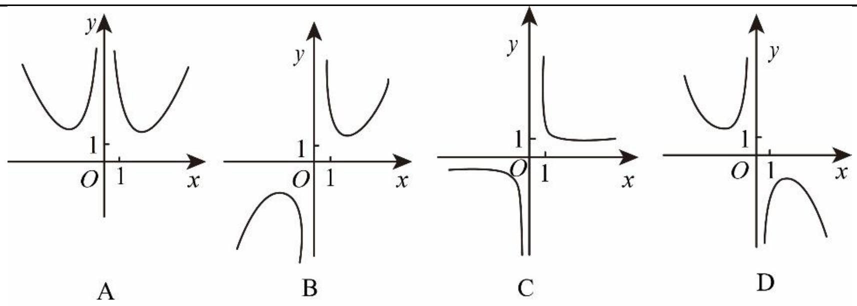
6. 答案：C

解答：∵ $g(x)=f(x)+x+a$ 存在 2 个零点，即 $y=f(x)$ 与 $y=-x-a$ 有两个交点，$f(x)$ 的图象如下：



要使得 $y=-x-a$ 与 $f(x)$ 有两个交点，则有 $-a\le 1$ 即 $a\ge -1$，∴选 C.

7. **（2018 全国新课标Ⅱ文、理）**函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为（　　）



7.【答案】B

【解析】$\because x\neq 0$， $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{x^2}=-f(x)$， $\therefore f(x)$为奇函数，舍去 A， $\because f(1)=e-e^{-1}>0$，

$\therefore$舍去 D；

$\because f'(x)=\dfrac{(e^x+e^{-x})x^2-(e^x-e^{-x})2x}{x^4}=\dfrac{(x-2)e^x+(x+2)e^{-x}}{x^3}$， $\therefore x>2$， $f'(x)>0$，所以

舍去 C；因此选 B.

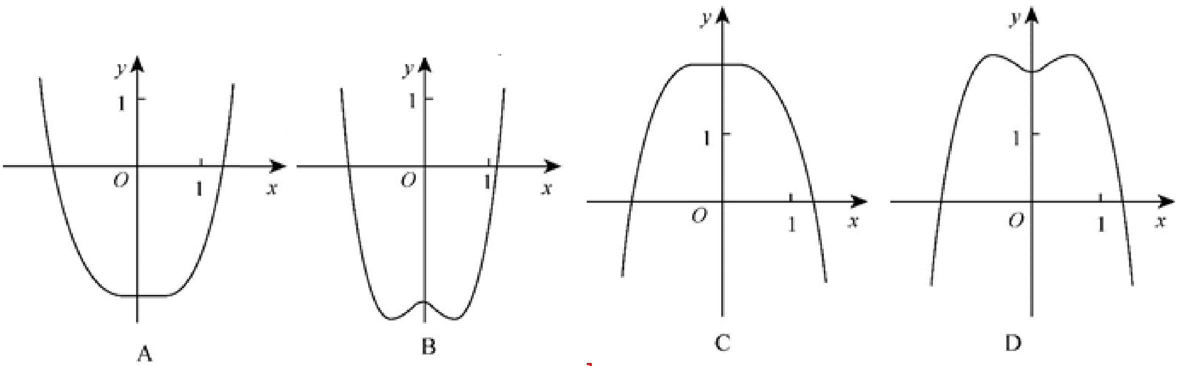
8. （**2018 全国新课标Ⅲ文**）下列函数中，其图像与函数 $y=\ln x$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称的是（　　）

A． $y=\ln(1-x)$　　B． $y=\ln(2-x)$　　C． $y=\ln(1+x)$　　D． $y=\ln(2+x)$

8. 答案：B

解答： $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，则 $f(x)=f(2-x)=\ln(2-x)$. 故选 B.

9. （**2018 全国新课标Ⅲ文、理**）函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图像大致为（　　）



9．答案：D

解答：当 $x=0$ 时， $y=2$，可以排除 A、B 选项；

又因为 $y'=-4x^3+2x=-4x(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2})(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，则 $f'(x)>0$ 的解集为

$(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})\cup(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$， $f(x)$ 单调递增区间为 $(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$， $(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$； $f'(x)<0$ 的解集为

$(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0)\cup(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$， $f(x)$ 单调递减区间为 $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0)$， $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$.结合图象，

可知 D 选项正确.

10.（**2018 全国新课标Ⅱ文、理**）已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$. 若 $f(2=$ ，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$（　　）

A． -50　　B． 0　　C． 2　　D． 50

10．【答案】C

【解析】因为 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，且 $f(1-x)=f(1+x)$，所以 $f(1+x)=-f(x-1)$，

$\therefore f(3+x)=-f(x+1)=f(x-1)$， $\therefore T=4$，

因此 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=12[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)$，

因为 $f(3)=-f(1)$， $f(4)=-f(2)$， 所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，

$\because f(2)=f(-2)=-f(2)$， $\therefore f(2)=0$， 从而 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=f(1)=2$， 选 C.

11．（**2018 全国新课标Ⅲ理**）设 $a=\log_{0.2}0.3$， $b=\log_2 0.3$，则（　　）

A． $a+b<ab<0$　B． $ab<a+b<0$　C． $a+b<0<ab$　D． $ab<0<a+b$

11．答案：B

解答： $\because a=\log_{0.2}0.3$， $b=\log_2 0.3$，

$\therefore \frac{1}{a}=\log_{0.3}0.2$， $\frac{1}{b}=\log_{0.3}2$，

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_{0.3}0.4$， $\therefore 0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$ 即 $0<\frac{a+b}{ab}<1$，

又 $\because a>0$， $b<0$， $\therefore ab<a+b<0$， 故选 B.

二、填空：

1．（**2018 北京理**）能说明“若 *f*（*x*）>*f*（0）对任意的 *x*∈（0，2］都成立，则 *f*（*x*）在［0，2］上是增函数”为假命题的一个函数是__________.

1．【答案】 $y=\sin x$ （答案不唯一）

【解析】令 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 4-x, & x\in(0,2]\end{cases}$， 则 $f(x)>f(0)$ 对任意的 $x\in(0,2]$ 都成立，

但 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上不是增函数. 又如，令 $f(x)=\sin x$，则 $f(0)=0$， $f(x)>f(0)$ 对任意的 $x\in(0,2]$ 都成立，但 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上不是增函数.

2. （**2018 上海**）设常数 $a\in R$， 函数 $f(x)=\log_2(x+a)$， 若 $f(x)$ 的反函数的图像经过点 $(3,1)$， 则 a=_________。

【答案】 7

【知识点】反函数

【考查能力】 运算求解能力

【解析】由题意可知 $f(x)$ **经过** $(1,3)$， $\log_2(1+a)=3, a=7$

3. （**2018 上海**）已知 $\alpha\in\{-2,-1,-，,1,2,3\}$， 若幂函数 $f(x)=x^n$ 为奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上速减， 则 α=______

【答案】-1

【知识点】幂函数

【考查能力】空间想象能力

【解析】由 $f(x)$ 为奇函数，所以 $a=-1,1,3$ ，又在 $(0,\infty)$ 上为递减可知 $a=-1$

4. （2018 上海）已知常数 $a>0$，函数 $f(x)=\dfrac{2^2}{(2^2+ax)}$ 的图像经过点 $p\left(p,\dfrac{6}{5}\right)$、$Q\left(q,-\dfrac{1}{5}\right)$，若 $2^{p+q}=36pq$，则 a=____________

【答案】$a=6$

【知识点】函数的概念

【考查能力】推理论证能力

【解析】由题意：$\dfrac{2^p}{2^p+ap}+\dfrac{2^q}{2^q+aq}=1\Rightarrow 2^{p+q}=a^2pq=36pq$，$\therefore a=6$

5. （2018 江苏）函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x-1}$ 的定义域为__▲__.

5.【答案】$[2,+\infty)$

【解析】要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $\log_2 x-1\geq 0$，解得 $x\geq 2$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2,+\infty)$.

6.（2018 江苏）函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)(x\in\mathbf{R})$，且在区间 $(-2,2]$ 上，$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2},0<x\leq 2,\\ |x+\dfrac{1}{2}|,-2<x\leq 0,\end{cases}$

则 $f(f(15))$ 的值为__▲__.

6.【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】由 $f(x+4)=f(x)$ 得函数 $f(x)$ 的周期为 4，

所以 $f(15)=f(16-1)=f(-1)=\left|-1+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$，

因此 $f(f(15))=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7. （2018 浙江）我国古代数学著作《张邱建算经》中记载百鸡问题：“今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一。凡百钱，买鸡百只，问鸡翁、母、雏各几何？”设鸡翁，鸡母，鸡雏个数分别为 x，y，z，则 $\begin{cases}x+y+z=100,\\ 5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100,\end{cases}$ 当 $z=81$ 时，$x=$____________，$y=$____________.

7.答案：8　11

解答：当 $z=81$ 时，有 $\begin{cases}x+y+81=100\\5x+3y+27=100\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=8\\y=11\end{cases}$.

8．（**2018 浙江**）已知 $\lambda\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x-4, x\ge\lambda\\x^2-4x+3, x<\lambda\end{cases}$，当 $\lambda=2$ 时，不等式 $f(x)<0$ 的解集是___________．若函数 $f(x)$恰有 2 个零点，则 λ 的取值范围是___________.

8. 答案：$(1,4)$　$(1,3]\cup(4,+\infty)$

解答：$\because\lambda=2$，$\therefore f(x)=\begin{cases}x-4, x\ge 2\\x^2-4x+3, x<2\end{cases}$.

当 $x\ge 2$ 时，$x-4<0$ 得 $2\le x<4$.

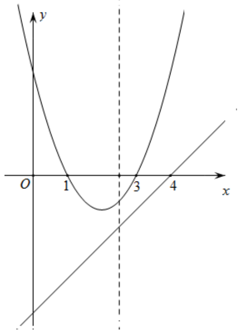
当 $x<2$ 时，$x^2-4x+3<0$，解得 $1<x<2$.

综上不等式的解集为 $1<x<4$.

当 $y=x^2-4x+3$ 有 2 个零点时，$\lambda>4$.

当 $y=x^2-4x+3$ 有 1 个零点时，$y=x-4$ 有 1 个零点，$1<\lambda\le 3$.

$\therefore 1<\lambda\le 3$ 或 $\lambda>4$.



9.（**2018 天津文**）已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a-2, & x\le 0,\\-x^2+2x-2a, & x>0.\end{cases}$ 若对任意 $x\in[-3,+\infty)$，$f(x)\le|x|$ 恒成立，则 a 的取值范围是__________.

9.【答案】$\left[\frac{1}{8},2\right]$

【解析】分类讨论：①当 $x>0$ 时，$f(x)\le|x|$ 即：$-x^2+2x-2a\le x$，

整理可得：$a\ge-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$，由恒成立的条件可知：$a\ge\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)_{\max}$ $(x>0)$，

结合二次函数的性质可知，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)_{\max}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$，则 $a\ge\frac{1}{8}$；

②当 $-3\le x\le 0$ 时，$f(x)\le|x|$ 即：$x^2+2x+a-2\le -x$，整理可得：$a\le -x^2-3x+2$，

由恒成立的条件可知：$a\le\left(-x^2-3x+2\right)_{\min}$ $(-3\le x\le 0)$，

结合二次函数的性质可知：当 $x=-3$ 或 $x=0$ 时，$\left(-x^2-3x+2\right)_{\min}=2$，则 $a\le 2$；

综合①②可得 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{8},2\right]$.

10．（**2018 天津理**）已知 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+a, & x\le 0,\\ -x^2+2ax-2a, & x>0.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=ax$ 恰有 2 个互异的实数解，则 a 的取值范围是______________.

10.【答案】$(4,8)$

【解析】分类讨论：当 $x\le 0$ 时，方程 $f(x)=ax$ 即 $x^2+2ax+a=ax$，

整理可得 $x^2=-a(x+1)$，

很明显 $x=-1$ 不是方程的实数解，则 $a=-\dfrac{x^2}{x+1}$，

当 $x>0$ 时，方程 $f(x)=ax$ 即 $-x^2+2ax-2a=ax$，

整理可得 $x^2=a(x-2)$，

很明显 $x=2$ 不是方程的实数解，则 $a=\dfrac{x^2}{x-2}$，

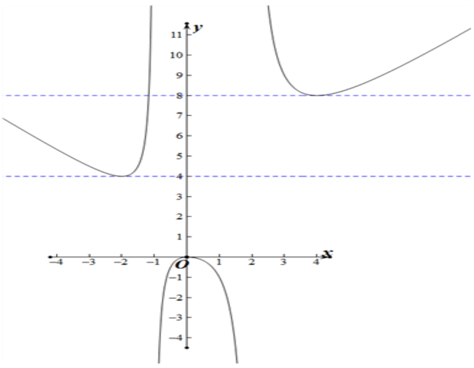
令 $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{x+1}, x\le 0\\ \dfrac{x^2}{x-2}, x>0\end{cases}$，其中 $-\dfrac{x^2}{x+1}=-\left(x+1+\dfrac{1}{x+1}-2\right)$，$\dfrac{x^2}{x-2}=x-2+\dfrac{4}{x-2}+4$

原问题等价于函数 $g(x)$ 与函数 $y=a$ 有两个不同的交点，求 a 的取值范围.

结合对勾函数和函数图象平移的规律绘制函数 $g(x)$ 的图象，

同时绘制函数 $y=a$ 的图象如图所示，考查临界条件，

结合 $a>0$ 观察可得，实数 a 的取值范围是 $(4,8)$.



11．（**2018 全国新课标Ⅰ文**）已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+a)$，若 $f(3)=1$，则 $a=$_________.

11、答案：-7

解答：可得 $\log_2(9+a)=1$，$\therefore 9+a=2$，$a=-7$.

12.（**2018 全国新课标Ⅲ文**）已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1$，$f(a)=4$，则 $f(-a)=$_________.

12．答案：-2

解答：$f(-x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+1(x\in R)$，

$f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1+\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1=\ln(1+x^2-x^2)+2=2$，

$\therefore f(a)+f(-a)=2$，$\therefore f(-a)=-2$.

三、解答题

1. **（2018 上海）**某群体的人均通勤时间，是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均勇士，某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤，分析显示：当 S 中 $x\%(0<x<100)$ 的成员自驾时，自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x)=\square\begin{cases} \quad <x\le \\ 2x+\dfrac{1800}{x}-90,30<x<100 \end{cases}$$ **（单位：分钟）**，

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响，恒为 40 分钟，试根据上述分析结果回答下列问题：

（1）当 x 在什么范围内时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间？

（2）求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式；讨论 $g(x)$ 的单调性，并说明其实际意义。

【知识点】函数模型的应用实例

【考查能力】数据处理能力

【解析】（1）、$f(x)>40\Rightarrow 2x+\dfrac{1800}{x}-90>40\Rightarrow 45<x<100$。

（2）、$g(x)=x\%\cdot f(x)+(1-x\%)\cdot 40=\begin{cases} 40-\dfrac{1}{10}x,0<x\le 30 \\ \dfrac{1}{50}x^2-\dfrac{13}{10}x+58,30<x<100 \end{cases}$，在 $(0,32.5)$ 上单调递减，在 $(32.5,100)$ 上单调递增，说明当 32.5% 以上的人自驾时，人均通勤时间开始增加