2018 年全国各地高考数学试题及解答分类汇编大全

（12 圆锥曲线与方程）

一、选择题

1．（**2018 浙江**）双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的焦点坐标是（　　）

A．$(-\sqrt{2}，0)$，$(\sqrt{2}，0)$　　B．$(-2，0)$，$(2，0)$

C．$(0，-\sqrt{2})$，$(0，\sqrt{2})$　　D．$(0，-2)$，$(0，2)$

1．.答案：B

解答：$\because c^2=3+1=4$，$\therefore$双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的焦点坐标是 $(-2,0)$，$(2,0)$.

2．（**2018 上海**）设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的动点，则 P 到该椭圆的两个焦点的距离之和为（　）

（A）$2\sqrt{2}$　（B）$2\sqrt{3}$　（C）$2\sqrt{5}$　（D）$4\sqrt{2}$

【答案】 C

【知识点】椭圆

【考查能力】 空间想象能力

【解析】由椭圆的定义可得 P 到两焦点距离之和为 $2a=2\sqrt{5}$。

3．（**2018 天津文、理**）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A,B 两点.设 A,B 到双曲线的同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2，且 $d_1+d_2=6,$ 则双曲线的方程为（　　）

（A）$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$　（B）$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$（C）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　（D）$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

3.【答案】A

【解析】设双曲线的右焦点坐标为 $F(c,0)$，$(c>0)$，则 $x_A=x_B=c$，

由 $\frac{c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 可得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，

不妨设 $A\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，$B\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$，双曲线的一条渐近线方程为 $bx-ay=0$，

据此可得 $d_1=\frac{|bc-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc-b^2}{c}$，$d_2=\frac{|bc+b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc+b^2}{c}$，

则 $d_1+d_2=\frac{2bc}{c}=2b=6$，则 $b=3$，$b^2=9$，

双曲线的离心率：$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{9}{a^2}}=2$，

据此可得 $a^2=3$，则双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$．故选 A.

4．（**2018 全国新课标Ⅰ文**）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$的一个焦点为$(2,0)$，则$C$的离心率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4、答案：C

解答：知$c=2$，$\therefore a^2=b^2+c^2=8$，$a=2\sqrt{2}$，$\therefore$离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5．（**2018 全国新课标Ⅰ理**）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{3}-y^2=1$，O 为坐标原点，F 为 C 的右焦点，过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M、N.若△OMN 为直角三角形，则|MN|=（　　）

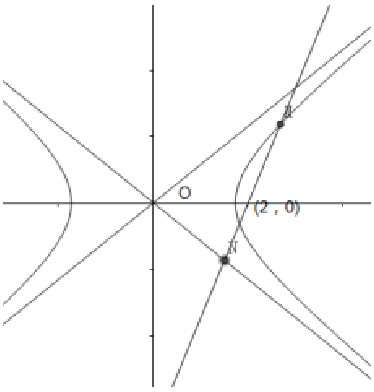
A．$\frac{3}{2}$　　B．3　　C．$2\sqrt{3}$　　D．4

5．答案：B

解答：渐近线方程为：$\frac{x^2}{3}-y^2=0$，即$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，$\because \Delta OMN$为直角三角形，假设$\angle ONM=\frac{\pi}{2}$，如图，$\therefore k_{NM}=\sqrt{3}$，直线$MN$方程为$y=\sqrt{3}(x-2)$. 联立$\begin{cases} y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x \\ y=\sqrt{3}(x-2) \end{cases}$ $\therefore$

$N(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$，即$ON=\sqrt{3}$，$\therefore \angle MON=\frac{\pi}{3}$，$\therefore |MN|=3$，

故选 B.



6．（**2018 全国新课标Ⅰ理**）设抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，过点（–2，0）且斜率为$\frac{2}{3}$的直线与 C 交于 M，N 两点，则$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}$=（　　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

6．答案：D

解答：由题意知直线MN的方程为$y=\frac{2}{3}(x+2)$，设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，与抛物线方程联立有$\begin{cases} y=\frac{2}{3}(x+2) \\ y^2=4x \end{cases}$，可得$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}$或$\begin{cases} x_2=4 \\ y_2=4 \end{cases}$，

$\therefore \overrightarrow{FM}=(0,2),\overrightarrow{FN}=(3,4)$，$\therefore \overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0\times3+2\times4=8$.

7. （2018 全国新课标Ⅱ文）已知 F_1， F_2 是椭圆 C 的两个焦点， P 是 C 上的一点，若 $PF_1 \perp PF_2$，且 $\angle PF_2F_1=60°$，则 C 的离心率为（　　）

A．$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$2-\sqrt{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D．$\sqrt{3}-1$

7.【答案】D

【解析】在 $\triangle F_1PF_2$ 中， $\angle F_1PF_2=90°$， $\angle PF_2F_1=60°$，设 $|PF_2|=m$，则 $2c=|F_1F_2|=2m$， $|PF_1|=\sqrt{3}m$，又由椭圆定义可知 $2a=|PF_1|+|PF_2|=\left(\sqrt{3}+1\right)m$ 则离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{2m}{\left(\sqrt{3}+1\right)m}=\sqrt{3}-1$， 故选 D.

8.(2018 全国新课标Ⅱ文、理）双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为（　　）

A． $y=\pm\sqrt{2}x$　　B． $y=\pm\sqrt{3}x$　　C． $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　D． $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

8.【答案】A

【解析】$\because e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$， $\therefore\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1=3-1=2$， $\therefore\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，因为渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，所以渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$， 故选 A.

9. （2018 全国新课标Ⅱ理）已知 F_1， F_2 是椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点， A 是 C 的左顶点，点 P 在过 A 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上，$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形， $\angle F_1F_2P=120°$，则 C 的离心率为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

9.【答案】D

【解析】因为 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形， $\angle F_1F_2P=120°$， 所以 $PF_2=F_1F_2=2c$，

由 AP 斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 得， $\tan\angle PAF_2=\frac{\sqrt{3}}{6}$， $\therefore\sin\angle PAF_2=\frac{1}{\sqrt{13}}$， $\cos\angle PAF_2=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}$，

由正弦定理得 $\frac{PF_2}{AF_2}=\frac{\sin\angle PAF_2}{\sin\angle APF_2}$， $\therefore\frac{2c}{a+c}=\frac{\frac{1}{\sqrt{13}}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\angle PAF_2\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{13}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}}=\frac{2}{5}$，

$\therefore a=4c$， $e=\frac{1}{4}$， 故选 D.

10. （2018 全国新课标Ⅲ文）已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，则点 $(4,0)$ 到 C 的渐近线的距离为（　　）

A． $\sqrt{2}$　　B． 2　　C． $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D． $2\sqrt{2}$

10．答案：D

解答：由题意 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，则 $\frac{b}{a}=1$，故渐近线方程为 $x\pm y=0$，则点 $(4,0)$ 到渐近线的距离为 $d=\frac{|4\pm0|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$. 故选 D.

11. （**2018 全国新课标Ⅲ理**）设 F_1，F_2 是双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左，右焦点，$O$ 是坐标原点．过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 P．若 $|PF_1|=\sqrt{6}|OP|$，则 C 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

11．答案：C

解答：$\because |PF_2|=b$，$|OF_2|=c$，$\therefore$ $|PO|=a$；

又因为 $|PF_1|=\sqrt{6}|OP|$，所以 $|\overrightarrow{PF_1}|=\sqrt{6}a$；

在 $Rt\Delta POF_2$ 中，$\cos\theta=\frac{|PF_2|}{|OF_2|}=\frac{b}{c}$；

$\because$ 在 $Rt\Delta PF_1F_2$ 中，$\cos\theta=\frac{|PF_2|^2+|F_1F_2|^2-|PF_1|^2}{2\cdot|PF_2|\cdot|F_1F_2|}=\frac{b}{c}$，

$\therefore \frac{b^2+4c^2-(\sqrt{6}a)^2}{2b\cdot 2c}=\frac{b}{c}\Rightarrow b^2+4c^2-6a^2=4b^2\Rightarrow 4c^2-6a^2=3c^2-3a^2$

$\Rightarrow c^2=3a^2\Rightarrow e=\sqrt{3}$．

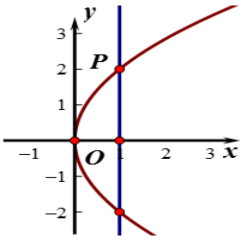
二、填空

1. （**2018 北京文**）已知直线 l 过点 $(1,0)$ 且垂直于 x 轴，若 l 被抛物线 $y^2=4ax$ 截得的线段长为 4，则抛物线的焦点坐标为_________.

1. 【答案】$(1,0)$

【解析】$a=1$，$\therefore y^2=4x$，由抛物线方程可得，$2p=4$，$p=2$，$\frac{p}{2}=1$，

$\therefore$ 焦点坐标为 $(1,0)$．



2. （**2018 北京文**）若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 $a=$_________.

2. 【答案】4

【解析】在双曲线中，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+4}$，且 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore \frac{\sqrt{a^2+4}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\frac{a^2+4}{a^2}=\frac{5}{4}$，$\therefore a^2=16$，$\because a>0 \therefore a=4$．

3.（**2018 北京理**）已知椭圆 M: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，双曲线 N: $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$．若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点，则椭圆 M 的离心率为__________；双曲线 N 的离心率为__________.

3.【答案】$\sqrt{3}-1$；2

【解析】由正六边形性质得椭圆上一点到两焦点距离之和为 $c+\sqrt{3}c$，再根据椭圆定义得 $c+\sqrt{3}c=2a$，所以椭圆 M 的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

双曲线 N 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{n}{m}x$，由题意得双曲线 N 的一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \frac{n^2}{m^2}=\tan^2\frac{\pi}{3}=3$，$\therefore e^2=\frac{m^2+n^2}{m^2}=\frac{m^2+3m^2}{m^2}=4$，$\therefore e=2$.

4. **（2018 上海）**双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线方程为________。

【答案】 $y=\pm\frac{x}{2}$

【知识点】双曲线及其标准方程

【考查能力】运算求解能力

【解析】由题意知： $a^2=4,b^2=1$，**渐近线方程为** $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{2}x$

5. **（2018 江苏）**在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 $F(c,0)$ 到一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$，则其离心率的值是__▲__.

5.【答案】2

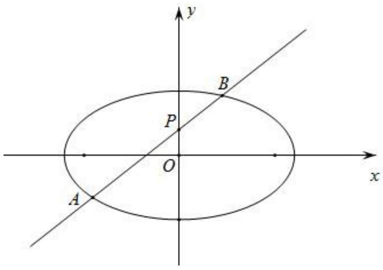
【解析】因为双曲线的焦点 $F(c,0)$ 到渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 即 $bx\pm ay=0$ 的距离为

$\frac{|bc\pm 0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc}{c}=b$，所以 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}c$，

因此 $a^2=c^2-b^2=c^2-\frac{3}{4}c^2=\frac{1}{4}c^2$，$a=\frac{1}{2}c$，$e=2$.

6.**（2018 浙江）**已知点 $P(0,1)$，椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=m(m>1)$ 上两点 A,B 满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，则当 $m=$__________时，点 B 横坐标的绝对值最大.

6. 答案：5



解答：

方法一：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

当直线斜率不存在时，$m=9$，$x_2=0$.

当直线斜率存在时，设 AB 为 $y=kx+1$. 联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=m\\ y=kx+1\end{cases}$ 得

$(4k^2+1)x^2+8kx+4-4m=0$， $\Delta>0\Rightarrow 4mk^2+m-1>0$， $x_1+x_2=-\dfrac{8k}{4k^2+1}$，

$x_1x_2=\dfrac{4-4m}{4k^2+1}$.

$\because \overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$， $\therefore x_1=-2x_2$， 解得 $x_1=\dfrac{-16k}{4k^2+1}$， $x_2=\dfrac{8k}{4k^2+1}$.

$\therefore |x_2|=\dfrac{8|k|}{4k^2+1}=\dfrac{8}{4|k|+\dfrac{1}{|k|}}\le 2$（当且仅当$|k|=\dfrac{1}{2}$时取“＝”）.

$x_1x_2=\dfrac{-16k}{4k^2+1}\cdot\dfrac{8k}{4k^2+1}=-8$， $x_1x_2=\dfrac{4-4m}{4k^2+1}=2-2m$， 得 $m=5$，

$\therefore$当 $m=5$ 时， 点 B 横坐标最大.

方法二： 设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$， 则 $\overrightarrow{AP}=(-x_1,1-y_1)$， $\overrightarrow{PB}=(x_2,y_2-1)$，

$\because \overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$， $\therefore \begin{cases}x_1=-2x_2\\ y_1=3-2y_2\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases}\dfrac{(-2x_2)^2}{4}+(3-2y_2)^2=m & (1)\\ \dfrac{x_2{}^2}{4}+y_2{}^2=m & (2)\end{cases}$， 由 (1) (2) 得 $y_2=\dfrac{m+3}{4}$. (3)

将 (3) 代入 (2)， 得 $x_2{}^2=\dfrac{-(m-5)^2+16}{4}$， $\therefore |x_2|=\dfrac{\sqrt{-(m-5)^2+16}}{2}$，

$\therefore$当 $m=5$ 时， $|x_2|$ 取最大值.

7. **（2018 全国新课标Ⅲ理）**已知点 $M(-1,1)$ 和抛物线 C: $y^2=4x$， 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A， B 两点. 若 $\angle AMB=90°$， 则 $k=$________.

7. 答案： 2

解答: 依题意得, 抛物线 C 的焦点为 $F(1,0)$, 故可设直线 $AB: y=k(x-1)$, 联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$

消去 y 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$， 设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$， 则 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$， $x_1x_2=1$， $\therefore$

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2k=\dfrac{4}{k}$， $y_1y_2=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=-4$. 又 $\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1-1)$，

$\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2-1)$， $\therefore \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-1)(y_2-1)$

$=x_1x_2+(x_1+x_2)+1+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=1+\dfrac{2k^2+4}{k^2}+1-4-\dfrac{4}{k}+1=0$，

$\therefore k=2$.

三、解答题

1．（**2018 北京文**）已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，焦距为 $2\sqrt{2}$．斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A， B．

（1）求椭圆 M 的方程；

（2）若 $k=1$，求 $|AB|$ 的最大值；

（3）设 $P(-2,0)$，直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C，直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D．若 C，D 和点 $Q\left(-\frac{7}{4},\frac{1}{2}\right)$ 共线，求 k．

1．【答案】（1）$\frac{x^2}{3}+y^2=1$；（2）$\sqrt{6}$；（3）1．

【解析】（1）由题意得 $2c=2\sqrt{2}$，所以 $c=\sqrt{2}$，

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $a=\sqrt{3}$，所以 $b^2=a^2-c^2=1$，

所以椭圆 M 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$．

（2）设直线 AB 的方程为 $y=x+m$，

由 $\begin{cases} y=x+m \\ \frac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y 可得 $4x^2+6mx+3m^2-3=0$，

则 $\varDelta=36m^2-4\times4(3m^2-3)=48-12m^2>0$，即 $m^2<4$，

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{3m}{2}$， $x_1x_2=\frac{3m^2-3}{4}$，

则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{4-m^2}}{2}$，

易得当 $m^2=0$ 时，$|AB|_{\max}=\sqrt{6}$，故 $|AB|$ 的最大值为 $\sqrt{6}$．

（3）设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$， $C(x_3,y_3)$， $D(x_4,y_4)$，

则 $x_1^2+3y_1^2=3$ ①， $x_2^2+3y_2^2=3$ ②，

又 $P(-2,0)$，所以可设 $k_1=k_{PA}=\frac{y_1}{x_1+2}$，直线 PA 的方程为 $y=k_1(x+2)$，

由 $\begin{cases} y=k_1(x+2) \\ \frac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y 可得 $(1+3k_1^2)x^2+12k_1^2x+12k_1^2-3=0$，

则 $x_1+x_3=-\frac{12k_1^2}{1+3k_1^2}$，即 $x_3=-\frac{12k_1^2}{1+3k_1^2}-x_1$，

又 $k_1=\frac{y_1}{x_1+2}$，代入①式可得 $x_3=\frac{-7x_1-12}{4x_1+7}$，所以 $y_3=\frac{y_1}{4x_1+7}$，

所以 $C\left(\frac{-7x_1-12}{4x_1+7},\frac{y_1}{4x_1+7}\right)$，同理可得 $D\left(\frac{-7x_2-12}{4x_2+7},\frac{y_2}{4x_2+7}\right)$．

故 $\overrightarrow{QC}=\left(x_3+\frac{7}{4},y_3-\frac{1}{4}\right)$， $\overrightarrow{QD}=\left(x_4+\frac{7}{4},y_4-\frac{1}{4}\right)$，

因为 Q， C， D 三点共线，所以 $\left(x_3+\frac{7}{4}\right)\left(y_4-\frac{1}{4}\right)-\left(x_4+\frac{7}{4}\right)\left(y_3-\frac{1}{4}\right)=0$，

将点 C， D 的坐标代入化简可得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，即 $k=1$．

2.（**2018 北京理**）已知抛物线 C：$y^2=2px$ 经过点 P（1，2）．过点 Q（0，1）的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A，B，且直线 PA 交 y 轴于 M，直线 PB 交 y 轴于 N．

（Ⅰ）求直线 l 的斜率的取值范围；

（Ⅱ）设 O 为原点，$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$，$\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$，求证：$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$ 为定值．

2.【答案】（1）取值范围是 $(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,1)$；（2）证明过程见解析．

【解析】（1）因为抛物线 $y^2=2px$ 经过点 $P(1,2)$，

所以 $4=2p$，解得 $p=2$，所以抛物线的方程为 $y^2=4x$．

由题意可知直线 l 的斜率存在且不为 0，

设直线 l 的方程为 $y=kx+1(k\neq 0)$．

由 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=kx+1 \end{cases}$ 得 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$．

依题意 $\Delta=(2k-4)^2-4\times k^2\times 1>0$，解得 $k<0$ 或 $0<k<1$．

又 PA，PB 与 y 轴相交，故直线 l 不过点 $(1,-2)$，从而 $k\neq -3$，

所以直线 l 斜率的取值范围是 $(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,1)$．

（2）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

由（1）知 $x_1+x_2=-\frac{2k-4}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{1}{k^2}$，直线 PA 的方程为 $y-2=\frac{y_1-2}{x_1-1}(x-1)$．

令 $x=0$，得点 M 的纵坐标为 $y_M=\frac{-y_1+2}{x_1-1}+2=\frac{-kx_1+1}{x_1-1}+2$．

同理得点 N 的纵坐标为 $y_N=\frac{-kx_2+1}{x_2-1}+2$．

由 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$，$\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$ 得 $\lambda=1-y_M$，$\mu=1-y_N$．

$$\therefore \frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{1-y_M}+\frac{1}{1-y_N}=\frac{x_1-1}{(k-1)x_1}+\frac{x_2-1}{(k-1)x_2}=\frac{1}{k-1}\cdot\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{1}{k-1}\cdot\frac{\frac{2}{k^2}+\frac{2k-4}{k^2}}{\frac{1}{k^2}}=2,$$

所以 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$ 为定值．

3.（**2018 上海**）设常数 $t>2$，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 F（2，0），直线 l：$x=t$，**曲线** τ：$y^2=8x$（$0\leq x\leq t$，$y\geq 0$），l 与 x 轴交于点 A，与 τ 交于点 B，P、Q 分别是曲线 τ 与线段 AB 上的动点。

（1） 用 t 为表示点 B 到点 F 的距离；

（2）设 $t=3$，$|FQ|=2$，线段 OQ 的中点在直线 FP 上，求△AQP 的面积；

（3）设 $t=8$，是否存在以 FP、FQ 为邻边的矩形 $FPEQ$，使得点 E 在 τ 上？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，说明理由。

【解析】(1)、由抛物线的性质可知点 B 到点 F 的距离为 $t+2$。

(2)、由题目条件可知 $Q(3,\sqrt{3})$，直线 FP 方程为 $y=-\sqrt{3}(x-2)$，联立 $y^2=8x$，

解得 $x_P=\frac{2}{3}$，点 $A(3,0)$，ΔAQP 的面积为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times(3-\frac{2}{3})=\frac{7\sqrt{3}}{6}$。

(3) 存在，焦点为 $F(2,0)$，设 $P(\frac{n^2}{8},n)$，$k_{PF}=\frac{8n}{n^2-16}$，$k_{QF}=\frac{16-n^2}{8n}$，根据

$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{FE}$ 得到 $E(\frac{n^2}{8}+6,\frac{48+n^2}{4n})$，$\therefore(\frac{48+n^2}{4n})^2=8(\frac{n^2}{8}+6)$，解得 $n^2=\frac{16}{5}$，所

以 $P(\frac{2}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5})$，

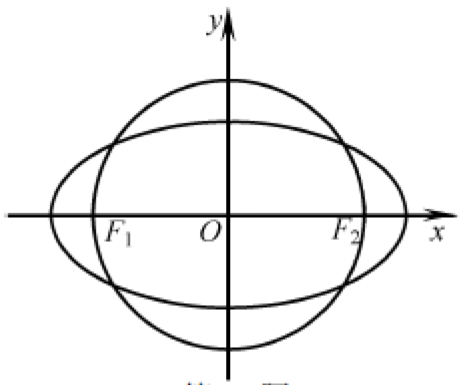
4. **（2018 江苏）**如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 过点 $(\sqrt{3},\frac{1}{2})$，焦点 $F_1(-\sqrt{3},0),F_2(\sqrt{3},0)$，圆 O 的直径为 F_1F_2．

（1）求椭圆 C 及圆 O 的方程;

（2）设直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P．

①若直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点，求点 P 的坐标;

②直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点．若△OAB 的面积为 $\frac{2\sqrt{6}}{7}$，求直线 l 的方程．



(第 18 题)

4.【答案】(1) 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; 圆 O 的方程为 $x^2+y^2=3$;

(2) ①点 P 的坐标为 $\left(\sqrt{2},1\right)$; ②直线 l 的方程为 $y=-\sqrt{5}x+3\sqrt{2}$．

【解析】(1) 因为椭圆 C 的焦点为 $F_1\left(-\sqrt{3},0\right)$，$F_2\left(\sqrt{3},0\right)$，

可设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$．又点 $\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ 在椭圆 C 上，

所以 $\begin{cases}\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1\\ a^2-b^2=3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\end{cases}$，因此，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

因为圆 O 的直径为 F_1F_2，所以其方程为 $x^2+y^2=3$．

(2) ①设直线 l 与圆 O 相切于 $P\left(x_0,y_0\right)\left(x_0>0,y_0>0\right)$，则 $x_0^{\,2}+y_0^{\,2}=3$，

所以直线 l 的方程为 $y=-\frac{x_0}{y_0}\left(x-x_0\right)+y_0$，即 $y=-\frac{x_0}{y_0}x+\frac{3}{y_0}$．

由 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \\ y=-\dfrac{x_0}{y_0}x+\dfrac{3}{y_0} \end{cases}$，消去 y，得 $\left(4x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}\right)x^2-24x_0x+36-4y_0^{\ 2}=0$．（*）

因为直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点，

所以 $\varDelta=\left(-24x_0\right)^2-4\left(4x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}\right)\left(36-4y_0^{\ 2}\right)=48y_0^{\ 2}\left(x_0^{\ 2}-2\right)=0$．

因为 x_0， $y_0>0$，所以 $x_0=\sqrt{2}$， $y_0=1$．

因此，点 P 的坐标为 $\left(\sqrt{2},1\right)$．

②因为三角形 OAB 的面积为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$，所以 $\dfrac{1}{2}AB\cdot OP=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$，从而 $AB=\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$．

设 $A\left(x_1,y_1\right)$， $B\left(x_2,y_2\right)$，由（*）得 $x_{1,2}=\dfrac{24x_0\pm\sqrt{48y_0^{\ 2}\left(x_0^{\ 2}-2\right)}}{2\left(4x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}\right)}$，

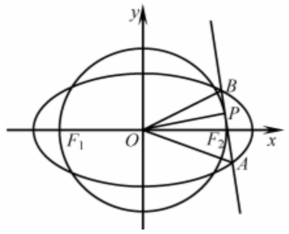
所以 $AB^2=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2=\left(1+\dfrac{x_0^{\ 2}}{y_0^{\ 2}}\right)\cdot\dfrac{48y_0^{\ 2}\left(x_0^{\ 2}-2\right)}{\left(4x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}\right)^2}$．

因为 $x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}=3$，

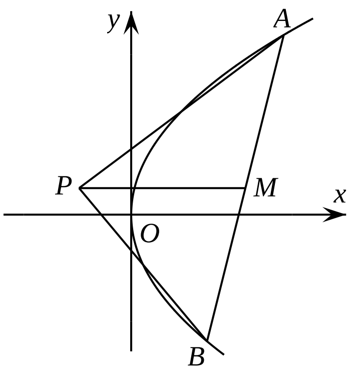
所以 $AB^2=\dfrac{16\left(x_0^{\ 2}-2\right)}{\left(x_0^{\ 2}+1\right)^2}=\dfrac{32}{49}$，即 $2x_0^{\ 4}-45x_0^{\ 2}+100=0$，

解得 $x_0^{\ 2}=\dfrac{5}{2}$（$x_0^{\ 2}=20$ 舍去），则 $y_0^{\ 2}=\dfrac{1}{2}$，因此 P 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$．

综上，直线 l 的方程为 $y=-\sqrt{5}x+3\sqrt{2}$．



5．（**2018 浙江**）如图，已知点 P 是 y 轴左侧(不含 y 轴)一点，抛物线 C：$y^2=4x$ 上存在不同的两点 A，B 满足 PA，PB 的中点均在 C 上．



（Ⅰ）设 AB 中点为 M，证明：PM 垂直于 y 轴；

（Ⅱ）若 P 是半椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1(x<0)$上的动点，求△$PAB$ 面积的取值范围．

5.答案：（1）略；（2）$[6\sqrt{2},\dfrac{15\sqrt{10}}{4}]$.

解答：（1）设 $P(x_0,y_0)$，$A(\dfrac{y_1^2}{4},y_1)$，$B(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$，

则 PA 中点为 $(\dfrac{x_0}{2}+\dfrac{y_1^2}{8},\dfrac{y_0+y_1}{2})$，由 AP 中点在抛物线上，可得 $(\dfrac{y_0+y_1}{2})^2=4(\dfrac{x_0}{2}+\dfrac{y_1^2}{8})$，

化简得 $y_1^2-2y_0y_1+8x_0-y_0^2=0$，显然 $y_2\neq y_1$，

且对 y_2 也有 $y_2^2-2y_0y_2+8x_0-y_0^2=0$，

所以 y_1,y_2 是二次方程 $y^2-2y_0y+8x_0-y_0^2=0$ 的两不等实根，

所以 $y_1+y_2=2y_0$，$y_M=\dfrac{y_1+y_2}{2}=y_0=y_P$，即 PM 垂直于 x 轴.

（2）$S=\dfrac{1}{2}(x_M-x_P)(|y_1-y_M|+|y_M-y_2|)=\dfrac{1}{2}(x_M-x_0)|y_1-y_2|$，

由（1）可得 $y_1+y_2=2y_0$，$y_1y_2=8x_0-y_0^2$，

$\Delta=(2y_0)^2-4(8x_0-y_0^2)=8(y_0^2-4x_0)>0(y_1\neq y_2)$，

此时 $P(x_0,y_0)$ 在半椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1(x<0)$ 上，

$\therefore \Delta=8({y_0}^2-4x_0)=8[4(1-{x_0}^2)-4x_0]=32(1-x_0-{x_0}^2)$，

$\because -1\le x_0<0$，$\therefore \Delta>0$，

$\therefore |y_1-y_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{32(1-x_0-x_0^2)}=4\sqrt{2(1-x_0-x_0^2)}$，

$|x_M-x_P|=\dfrac{y_1^2+y_2^2}{8}-x_0=\dfrac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{8}-x_0=\dfrac{4y_0^2-2(8x_0-y_0^2)}{8}-x_0=\dfrac{6(4-4x_0^2)}{8}-3x_0$

$=3(1-x_0-x_0^2)$，

所以 $S=\dfrac{1}{2}(x_M-x_0)|y_1-y_2|=6\sqrt{2}(1-x_0-x_0^2)\sqrt{1-x_0-x_0^2}=6\sqrt{2}t^3$，

$t=\sqrt{1-x_0-x_0^2}\in[1,\dfrac{\sqrt{5}}{2}]$，所以 $S=6\sqrt{2}t^3\in[6\sqrt{2},\dfrac{15\sqrt{10}}{4}]$，

即 ΔPAB 的面积的取值范围是 $[6\sqrt{2},\dfrac{15\sqrt{10}}{4}]$.

6.**(2018 天津文)** 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 A，上顶点为 B.已知椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$|AB|=\sqrt{13}$.

（I）求椭圆的方程；

（II）设直线 $l:y=kx(k<0)$ 与椭圆交于 P,Q 两点，l 与直线 AB 交于点 M，且点 P，M 均在第四象限.若△BPM 的面积是△BPQ 面积的 2 倍，求 k 的值.

6.【答案】（1）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$；（2）$-\dfrac{1}{2}$.

【解析】（1）设椭圆的焦距为 $2c$，由已知得 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{5}{9}$，又由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $2a=3b$.

由$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$,从而$a=3$，$b=2$．所以，椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$．

（2）设点P的坐标为(x_1,y_1)，点M的坐标为(x_2,y_2)，由题意，$x_2>x_1>0$，

点Q的坐标为$(-x_1,-y_1)$．由$\triangle BPM$的面积是$\triangle BPQ$面积的2倍，可得$|PM|=2|PQ|$，

从而$x_2-x_1=2[x_1-(-x_1)]$，即$x_2=5x_1$．

易知直线AB的方程为$2x+3y=6$，由方程组$\begin{cases}2x+3y=6\\y=kx\end{cases}$消去$y$，可得$x_2=\frac{6}{3k+2}$．

由方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\\y=kx\end{cases}$，消去$y$，可得$x_1=\frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$．由$x_2=5x_1$，

可得$\sqrt{9k^2+4}=5(3k+2)$，两边平方，整理得$18k^2+25k+8=0$，解得$k=-\frac{8}{9}$，或$k=-\frac{1}{2}$．

当$k=-\frac{8}{9}$时，$x_2=-9<0$，不合题意，舍去；

当$k=-\frac{1}{2}$时，$x_2=12$，$x_1=\frac{12}{5}$，符合题意．所以，k的值为$-\frac{1}{2}$．

7．**（2018天津理）**设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$($a>b>0$)的左焦点为$F$，上顶点为$B$. 已知椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，点$A$的坐标为$(b,0)$，且$|FB|\cdot|AB|=6\sqrt{2}$.

（I）求椭圆的方程；

（II）设直线l：$y=kx(k>0)$与椭圆在第一象限的交点为P，且l与直线AB交于点Q.

若$\frac{|AQ|}{|PQ|}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ$（$O$为原点），求$k$的值.

7.【答案】(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；(2) $\frac{1}{2}$或$\frac{11}{28}$．

【解析】(1) 设椭圆的焦距为$2c$，由已知有$\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{9}$，

又由$a^2=b^2+c^2$，可得$2a=3b$．由已知可得，$|FB|=a$，$|AB|=\sqrt{2}b$，

由$|FB|\cdot|AB|=6\sqrt{2}$，可得$ab=6$，从而$a=3$，$b=2$．

所以，椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$．

（2）设点P的坐标为(x_1,y_1)，点Q的坐标为(x_2,y_2)．

由已知有$y_1>y_2>0$，故$|PQ|\sin\angle AOQ=y_1-y_2$．

又因为$|AQ|=\frac{y_2}{\sin\angle OAB}$，而$\angle OAB=\frac{\pi}{4}$，故$|AQ|=\sqrt{2}y_2$．

由$\frac{|AQ|}{|PQ|}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ$，可得$5y_1=9y_2$．

由方程组$\begin{cases}y=kx\\\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$消去$x$，可得$y_1=\frac{6k}{\sqrt{9k^2+4}}$．

易知直线AB的方程为$x+y-2=0$，

由方程组$\begin{cases}y=kx\\x+y-2=0\end{cases}$消去$x$，可得$y_2=\frac{2k}{k+1}$．

由 $5y_1=9y_2$，可得 $5(k+1)=3\sqrt{9k^2+4}$，

两边平方，整理得 $56k^2-50k+11=0$，

解得 $k=\frac{1}{2}$，或 $k=\frac{11}{28}$．所以，k 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{11}{28}$．

8．（**2018 全国新课标Ⅰ文**）设抛物线 C: $y^2=2x$，点 $A(2，0)$，$B(-2，0)$，过点 A 的直线 l 与 C 交于 M，N 两点．

（1）当 l 与 x 轴垂直时，求直线 BM 的方程；

（2）证明：$\angle ABM=\angle ABN$．

8. 答案：（1）$2y+x+2=0$ 或 $2y-x-2=0$；（2）见解析

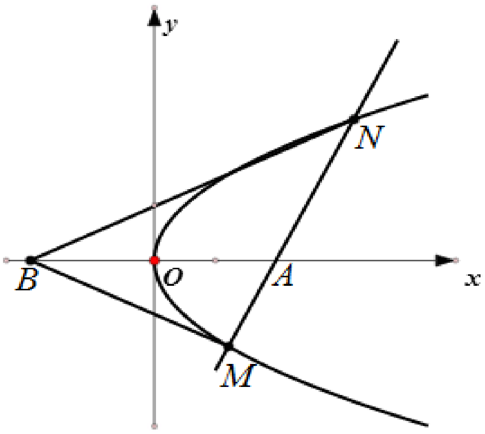
解答：（1）当 l 与 x 轴垂直时，l 的方程为 $x=2$，代入 $y^2=2x$，$\therefore M(2,-2),N(2,2)$ 或 $M(2,2),N(2,-2)$，$\therefore$ BM 的方程为：$2y+x+2=0,$ 或 $2y-x-2=0$．

（2）设 MN 的方程为 $x=my+2$，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，联立方程 $\begin{cases}x=my+2\\ y^2=2x\end{cases}$，得 $y^2-2my-4=0$，$\therefore y_1+y_2=2m,y_1y_2=-4$，$x_1=my_1+2,x_2=my_2+2$，

$$\therefore k_{BM}+k_{BN}=\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{y_1}{my_1+4}+\frac{y_2}{my_2+4}$$

$$=\frac{2my_1y_2+4(y_1+y_2)}{(my_1+4)(my_2+4)}=0,$$

$\therefore k_{BM}=-k_{BN}$，$\therefore \angle ABM=\angle ABN$．



9．（**2018 全国新课标Ⅰ理**）设椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$．

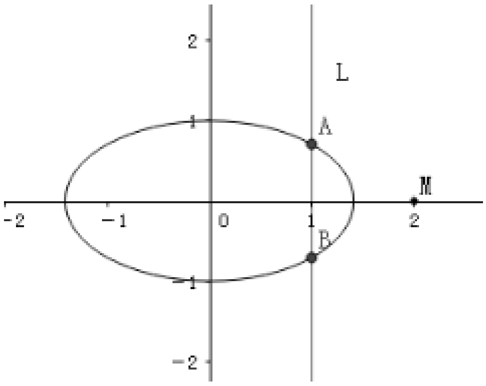
（1）当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程；

（2）设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$．

9. 答案：（1）$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$；（2）略.

解答：（1）如图所示，将 $x=1$ 代入椭圆方程得 $\frac{1}{2}+y^2=1$，得 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore A(1,\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$，

$\therefore k_{AM}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$直线 AM 的方程为：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$．



（2）证明：当l斜率不存在时，由（1）可知，结论成立；当l斜率存在时，设其方程为$y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，联立椭圆方程有$\begin{cases}y=k(x-1)\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，即

$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，$\therefore$ $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$，

$k_{AM}+k_{BM}=\dfrac{y_1}{x_1-2}+\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{k[(2x_1x_2-3(x_1+x_2)+4]}{(x_1-2)(x_2-2)}=\dfrac{k(\dfrac{4k^2-4}{2k^2+1}-\dfrac{12k^2}{2k^2+1}+4)}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$，$\therefore$

$k_{AM}=-k_{BM}$，$\therefore$ $\angle OMA=\angle OMB$.

10．**（2018 全国新课标Ⅱ文、理）**设抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，过F且斜率为$k(k>0)$的直线l与C交于A，B两点，$|AB|=8$.

（1）求l的方程

（2）求过点A，B且与C的准线相切的圆的方程.

10．【答案】（1）$y=x-1$；（2）$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

【解析】（1）由题意得$F(1,0)$，l的方程为$y=k(x-1)$，$(k>0)$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 由$\begin{cases}y=k(x-1)\\ y^2=4x\end{cases}$得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

$\Delta=16k^2+16=0$，故$x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$.

所以$|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=\dfrac{4k^2+4}{k^2}$.

由题设知$\dfrac{4k^2+4}{k^2}=8$，解得$k=-1$（舍去），$k=1$. 因此l的方程为$y=x-1$.

（2）由（1）得AB的中点坐标为$(3,2)$，所以AB的垂直平分线方程为

$y-2=-(x-3)$，即$y=-x+5$. 设所求圆的圆心坐标为(x_0,y_0)，则

$\begin{cases}y_0=-x_0+5\\ (x_0+1)^2=\dfrac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=3\\ y_0=2\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=11\\ y_0=-6\end{cases}$，

因此所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

11．**（2018 全国新课标Ⅲ文）**已知斜率为k的直线l与椭圆C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$交于$A$，$B$两点. 线段$AB$

的中点为 $M(1,m)(m>0)$.

（1）证明：$k<-\frac{1}{2}$；

（2）设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点，且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$. 证明：$2|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|$.

11. 答案：见解答：

解答：（1）设直线 l 方程为 $y=kx+t$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\begin{cases} y=kx+t \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 联立消 y 得 $(4k^2+3)x^2+8ktx+4t^2-12=0$，

则 $\Delta=64k^2t^2-4(4t^2-12)(3+4k^2)>0$，

得 $4k^2+3>t^2$ …①，

且 $x_1+x_2=\frac{-8kt}{3+4k^2}=2$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2t=\frac{6t}{3+4k^2}=2m$，

$\because$ $m>0$，$\therefore$ $t>0$ 且 $k<0$.

且 $t=\frac{3+4k^2}{-4k}$ …②.

由①②得 $4k^2+3>\frac{(3+4k^2)^2}{16k^2}$，

$\therefore k>\frac{1}{2}$ 或 $k<-\frac{1}{2}$.

$\because k<0$，$\therefore$ $k<-\frac{1}{2}$.

（2）$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$，$\overrightarrow{FP}+2\overrightarrow{FM}=\vec{0}$，

$\because M(1,m)$，$F(1,0)$，$\therefore P$ 的坐标为 $(1,-2m)$.

由于 P 在椭圆上，$\therefore$ $\frac{1}{4}+\frac{4m^2}{3}=1$，$\therefore m=\frac{3}{4}$，$P(1,-\frac{3}{2})$，

又 $\frac{{x_1}^2}{4}+\frac{{y_1}^2}{3}=1$，$\frac{{x_2}^2}{4}+\frac{{y_2}^2}{3}=1$，

两式相减可得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，

又 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=\frac{3}{2}$，$\therefore k=-1$，

直线 l 方程为 $y-\frac{3}{4}=-(x-1)$，

即 $y=-x+\frac{7}{4}$，

$\therefore \begin{cases} y=-x+\frac{7}{4} \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，

消去 y 得 $28x^2-56x+1=0$，$x_{1,2}=\frac{14\pm3\sqrt{21}}{14}$，

$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=\sqrt{(x_1-1)^2+{y_1}^2}+\sqrt{(x_2-1)^2+{y_2}^2}=3$，

$|\overrightarrow{FP}|=\sqrt{(1-1)^2+(-\frac{3}{2}-0)^2}=\frac{3}{2}$，

$\therefore|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=2|\overrightarrow{FP}|$.

12．**（2018 全国新课标Ⅲ理）**知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1, m)(m>0)$.

（1）证明：$k<-\frac{1}{2}$；

（2）设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点，且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$．证明：$|\overrightarrow{FA}|$，$|\overrightarrow{FP}|$，$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列，并求该数列的公差.

12．答案：见解答：

解答：

（1）设直线 l 方程为 $y=kx+t$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\begin{cases} y=kx+t \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 联立消 y 得 $(4k^2+3)x^2+8ktx+4t^2-12=0$，

则 $\Delta=64k^2t^2-4(4t^2-12)(3+4k^2)>0$，

得 $4k^2+3>t^2$ …①，

且 $x_1+x_2=\frac{-8kt}{3+4k^2}=2$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2t=\frac{6t}{3+4k^2}=2m$，

$\because m>0$，$\therefore$ $t>0$ 且 $k<0$.

且 $t=\frac{3+4k^2}{-4k}$ …②.

由①②得 $4k^2+3>\frac{(3+4k^2)^2}{16k^2}$，

$\therefore k>\frac{1}{2}$ 或 $k<-\frac{1}{2}$.

$\because k<0$，$\therefore$ $k<-\frac{1}{2}$.

（2）$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$，$\overrightarrow{FP}+2\overrightarrow{FM}=\vec{0}$，

$\because M(1,m)$，$F(1,0)$，$\therefore P$ 的坐标为 $(1,-2m)$.

由于 P 在椭圆上，$\therefore$ $\frac{1}{4}+\frac{4m^2}{3}=1$，$\therefore m=\frac{3}{4}$，$M(1,-\frac{3}{2})$，

又 $\frac{x_1^{\ 2}}{4}+\frac{y_1^{\ 2}}{3}=1$，$\frac{x_2^{\ 2}}{4}+\frac{y_2^{\ 2}}{3}=1$，

两式相减可得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，

又 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=\frac{3}{2}$，$\therefore k=-1$，

直线 l 方程为 $y-\frac{3}{4}=-(x-1)$，

即 $y=-x+\frac{7}{4}$，

$\therefore \begin{cases} y=-x+\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，

消去 y 得 $28x^2-56x+1=0$， $x_{1,2}=\dfrac{14\pm3\sqrt{21}}{14}$，

$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1{}^2}+\sqrt{(x_2-1)^2+y_2{}^2}=3$，

$|\overrightarrow{FP}|=\sqrt{(1-1)^2+(-\dfrac{3}{2}-0)^2}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore |\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=2|\overrightarrow{FP}|$.

$\therefore \left|\overrightarrow{FA}\right|$， $\left|\overrightarrow{FP}\right|$， $\left|\overrightarrow{FB}\right|$ 成等差数列，

$2d=||\overrightarrow{FA}|-|\overrightarrow{FB}||=|a-\dfrac{c}{a}x_1-a+\dfrac{c}{a}x_2|=\pm\dfrac{c}{a}|x_1-x_2|$

$=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{4-\dfrac{1}{7}}=\pm\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$. $\therefore d=\pm\dfrac{3\sqrt{21}}{28}$.