Méthode 1 : Tester des valeurs dans un système d'équations

À connaître

$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$ est un **système de deux équations** du premier degré **à deux inconnues** désignées par les lettres x et y. Un couple de nombres $(x\ ,\ y)$ est solution d'un système s'il vérifie simultanément les deux égalités.

Exemple : Le couple (2 ; – 3) est-il solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$?

Pour $x = \mathbf{2}$ et $y = \mathbf{-3}$:
$5x + 2y = 5 \times \mathbf{2} + 2 \times (\mathbf{-3}) = 10 - 6 = 4$ et $-2x + y = -2 \times \mathbf{2} + (\mathbf{-3}) = -7$.
Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour $x = 2$ et $y = -3$ donc le couple (2 ; – 3) est solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$.

Exercice « À toi de jouer »

1 Les couples (– 5 ; 1,5) et (1 ; 9,5) sont-ils solution du système $\begin{cases} 4x - 3y = -24{,}5 \\ 3x + 7y = -4{,}5 \end{cases}$?

Méthode 2 : Résoudre un système par substitution

Exemple : Résous le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitution.

$y = 9 + 3x$ → On exprime y en fonction de x à l'aide de la première équation.

$4x - 3(\mathbf{9 + 3x}) = -17$ → On remplace (substitue) y par $\mathbf{9 + 3x}$ dans la deuxième équation.

$4x - 27 - 9x = -17$
$-5x = 10$
$x = -2$
→ On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de x.

$y = 9 + 3 \times (\mathbf{-2})$
$y = 9 - 6$
$y = 3$
→ On remplace x par $\mathbf{-2}$ dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de y.

Donc, si $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$.

On vérifie ensuite que le couple (– 2 ; 3) est une solution effective de ce système en appliquant la **méthode 1**. On en déduit que (– 2 ; 3) est la solution de ce système.

Exercice « À toi de jouer »

2 Résous par substitution le système $\begin{cases} 5x + y = 17 \\ -3x + 4y = 22 \end{cases}$.

Méthode 3 : Résoudre un système par combinaisons

Exemple : Résous le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par combinaisons.

Détermination d'une des inconnues

On cherche à éliminer l'inconnue y pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$\begin{cases} \mathbf{5} \times (5x - 4y) = \mathbf{5} \times 8 \\ \mathbf{4} \times (2x + 5y) = \mathbf{4} \times 1 \end{cases}$ ⟶ On multiplie les deux membres de la première équation par **5** et ceux de la seconde par **4**.

$\begin{cases} 25x - 20y = 40 \\ 8x + 20y = 4 \end{cases}$ ⟶ On obtient ainsi des coefficients opposés devant y dans les deux équations.

$25x + 8x = 40 + 4$ ⟶ On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y

$33x = 44$

$x = \dfrac{44}{33} = \dfrac{4 \times 11}{3 \times 11} = \dfrac{4}{3}$ ⟶ On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de x.

Détermination de l'autre inconnue

On cherche à éliminer l'inconnue x pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$\begin{cases} \mathbf{2} \times (5x - 4y) = \mathbf{2} \times 8 \\ \mathbf{5} \times (2x + 5y) = \mathbf{5} \times 1 \end{cases}$ ⟶ On multiplie les deux membres de la première équation par **2** et ceux de la seconde par **5**.

$\begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ 10x + 25y = 5 \end{cases}$ ⟶ On obtient ainsi le même coefficient devant x dans les deux équations.

$-8y - 25y = 16 - 5$ ⟶ On soustrait membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x.

$-33y = 11$

$y = \dfrac{11}{-33} = -\dfrac{11 \times 1}{11 \times 3} = -\dfrac{1}{3}$ ⟶ On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de y.

Donc, si $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

On vérifie ensuite que le couple $\left(\dfrac{4}{3} ; -\dfrac{1}{3}\right)$ est une solution effective de ce système en appliquant la **méthode 1**.

On en déduit que le couple $\left(\dfrac{4}{3} ; -\dfrac{1}{3}\right)$ est la solution de ce système.

Remarque : Pour trouver la valeur de y, on pouvait aussi remplacer x par $\dfrac{4}{3}$ dans l'une des deux équations du système de l'énoncé et résoudre l'équation ainsi obtenue.

Exercices « À toi de jouer »

3 Résous par combinaisons le système : $\begin{cases} 3x - 7y = 29 \\ 4x - 5y = -33 \end{cases}$.

4 Résous par la méthode de ton choix le système : $\begin{cases} -2x + 3y = 3{,}5 \\ x - 4y = -5{,}5 \end{cases}$.

Méthode 4 : Résoudre un problème avec deux inconnues

Exemple : Un musée propose un tarif pour les adultes à 7 € et un autre pour les enfants à 4,50 €. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 1 222,50 €.
Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

Étape n°1 : Choisir les inconnues

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants. → **On repère les inconnues.** On les note généralement x et y.

Étape n°2 : Mettre le problème en équation

205 personnes ont visité le musée donc $x + y = 205$.
La recette totale a été de 1 222,50 € donc $7x + 4{,}50y = 1\,222{,}50$.
→ **On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x et de y.

Ainsi $\begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4{,}50y = 1\,222{,}50 \end{cases}$. → L'énoncé se traduit donc par le système ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre le système

On peut résoudre le système par substitution.

$x = 205 - y$ → On exprime x en fonction de y à l'aide de la première équation.

$7(\mathbf{205 - y}) + 4{,}50y = 1\,222{,}50$ → On remplace (substitue) x par $\mathbf{205 - y}$ dans la deuxième équation.

$1\,435 - 7y + 4{,}50y = 1\,222{,}50$
$-2{,}50y = -212{,}50$
$y = 85$
→ On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de y.

$x = 205 - \mathbf{85}$
$x = 120$
→ On remplace y par **85** dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de x.

Étape n°4 : Vérifier que le couple trouvé est solution du problème

Donc, si $\begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4{,}50y = 1\,222{,}50 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = 120 \\ y = 85 \end{cases}$.
On vérifie ensuite que le couple (120 ; 85) est une solution effective de ce système en appliquant la **méthode 1**.
On en déduit que le couple (120 ; 85) est la solution de ce système.

Étape n°5 : Conclure

120 adultes et 85 enfants ont visité le musée lors de cette journée.

Exercice « À toi de jouer »

5 Dans une boulangerie, Paul a acheté quatre croissants et trois pains au chocolat pour 5,65 €. Lina a acheté, dans cette même boulangerie, trois croissants et cinq pains au chocolat pour 6,85 €. Retrouve le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat.