

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского**  
**Национальный исследовательский университет**

**И.П. Ястребов**

## **ПРИМЕРЫ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ**

Методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета  
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки  
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,  
03.03.03 «Радиофизика» и специальностям 10.05.02 «Информационная  
безопасность телекоммуникационных систем», 11.05.02  
«Специальные радиотехнические системы», 10.05.07  
«Противодействие техническим разведкам».

Нижний Новгород  
2017

УДК 681.3

**Ястребов И.П. ПРИМЕРЫ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ** Методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 56 с.

Рецензент: \_\_\_\_\_

Методические указания включает в себя демонстрационные примеры, раскрывающие тонкие моменты из такой области знаний как Цифровая обработка сигналов. Рассмотрены вопросы построения спектров сигналов, выбора частоты отчетов, формирования цифровых фильтров, визуализации их частотных и импульсных характеристик. Также демонстрируются свойства дискретного преобразования Фурье, связанные с добавлением отчетов в сигнал или спектр, либо децимацией. Рассмотрены автокорреляционные функции и преимущества оптимального фильтра для выделения импульсов в гауссовском шуме.

Методическое пособие нацелено на глубокое освоение материала студентами в процессе изучения и самостоятельного выполнения примеров. Пособие содержит лабораторные задания, которые разработаны для преподавания на радиофизическом факультете дисциплины «Цифровая обработка сигналов» по направлениям подготовки 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», 03.03.03 «Радиофизика» и специальностям 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы», 10.05.07 «Противодействие техническим разведкам».

Ответственные за выпуск:

председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ,  
к.ф.-м.н., доцент **Н.Д. Миловский**,  
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 681.3

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2017

## Введение

Цифровая обработка сигналов – современное развивающееся направление, проникающее во все большее сфер науки и техники. Издано большое количество книг и пособий по данной тематике, однако многие тонкие моменты остаются слабо освещенными, оставляются на самостоятельную проработку читателем. Наглядные примеры, приведенные в пособии, подобраны именно с таким предназначением.

Целью пособия является демонстрации студентам ряд нюансов цифровой обработки с последующим наставлением самостоятельно повторить примеры в среде LabView, тщательно пронаблюдать и осмыслить описанные эффекты, ответить на контрольные вопросы.

Пособие предполагает знание азов цифровой обработки сигналов [1] и умение создавать простые проекты в среде LabView [2, 3]. Обучение перечисленным навыкам не входит в задачи данного издания.

Достоинствами LabView являются простота и визуализация процесса разработки, наглядность при исполнении программы, легкий способ получения динамично меняющихся картинок. Следовательно, эта среда отлично подходит для наглядной демонстрации эффектов цифровой обработки сигналов.

## 1. Обучающие примеры

Изложение основных идей начнем с понятия цифровой (относительной, нормированной) частоты. Формально такая частота определяется как отношение реальной частоты к частоте дискретизации [1]:

$$f_0 = F_0 / F_\delta, \text{ где } F_\delta = 1/T, \quad (1)$$

$T$  – интервал между отчетами сигнала.

С точки зрения авторов, значительно важнее будет трактовка такой частоты, точнее, ее обратной величины  $1/F_0$ . Это число в точности соответствует числу точек на период для гармонического сигнала. На самом деле, пусть  $N+1$  – полное число отчетов,  $P$  – число периодов синусоидального сигнала на этом отрезке, тогда  $N/P$  – число точек на один период (измеряемое числом интервалов между соседними отчетами с учетом того, что у соседних периодов есть общий отчет). Если полную реализацию сигнала считать длительностью 1 единицу (для любителей привычных единиц пусть 1 сек), тогда  $P$  – обычная частота, а  $N$  – частота дискретизации, в результате получаем по определению круговой частоты  $P/N$ . То есть подтвердили то, что утверждали.

Первое упражнение позволит увидеть ответ на вопрос, сколько периодов возможно уместить на заданном числе отчетов.

## Упражнение 1. Демонстрация теоремы Котельникова.

Рассмотрим пример, демонстрирующий суть Теоремы отчетов.

Соберите проект, блок-диаграмма (Б-Д) которого изображена на рис. 1а, для этого:

- 1) Расположите на Б-Д цикл FOR.
- 2) Внутри цикла реализуйте алгоритм согласно формуле:
$$Y = \sin(2\pi i P/N),$$
Где  $i, N$  – параметры цикла FOR,  
 $P$  – число периодов на этом отрезке,  
 $Y$  – выходной сигнал.
- 3) Проинициализируйте параметр цикла  $N$  (например, значением  $N = 100$ ).
- 4) Создайте элемент управления для переменной  $P$ , измените его внешний вид на передней панели, как показано на рис. 1б, диапазон задайте как на рисунке (рекомендовано для случая  $N=100$ ).
- 5) Разместите на передней панели график *Waveform Graph* и подайте на него выходной сигнал  $Y$  из цикла, пропустив его через индексированный туннель.
- 6) Соедините перечисленные компоненты проводниками, как показано на рис.1а.

Запустите виртуальный прибор в непрерывном режиме. Медленно вращайте регулятор  $P$  и наблюдайте изменения на графике. В диапазоне от 0 до 50 значение параметра  $P$  в точности соответствует числу периодов на графике. Но что произойдет при дальнейшем увеличении числа периодов  $P$ ? Оказывается, что в диапазоне от 50 до 100, число периодов на графике будет уменьшаться до нуля, а после 100 картина будет повторять ту, что наблюдалась при значениях  $P$  от 0 до 100 (что обусловлено периодичностью спектра дискретного сигнала).

Из всего увиденного сделаем заключения.

1. Физически невозможно задать число периодов гармонического сигнала больше, чем половина имеющихся точек. При превышении данного числа получаем, в любом случае, значение  $P$  от нуля до  $N/2$ .
2. Значения  $P$  и  $P = P + N \cdot k$ , где  $k$  – целое число дадут абсолютно одинаковую картинку. То есть все эти значения числа периодов будут соответствовать одному сигналу! Получается, что для дискретных процессов высокочастотные сигналы эквивалентны низкочастотным и воспринимаются как низкочастотные. Такой эффект можно назвать стробоскопическим. Но именно благодаря ему возможно дискретизировать высокочастотные сигналы с низкой частотой выборки.
3. Значение  $N/2$  соответствует цифровой частоте 0.5 – максимально допустимой цифровой частоте, оно же – максимальное допустимое число периодов на отрезке из  $N$  точек.
4. Интервалы  $[0; N/2]$ ,  $[N/2; N]$ ,  $[N; 3 \cdot N/2]$ , ... соответствуют так называемым зонам Найквиста (1-ая, 2 –ая, 3-я, ... соответственно).

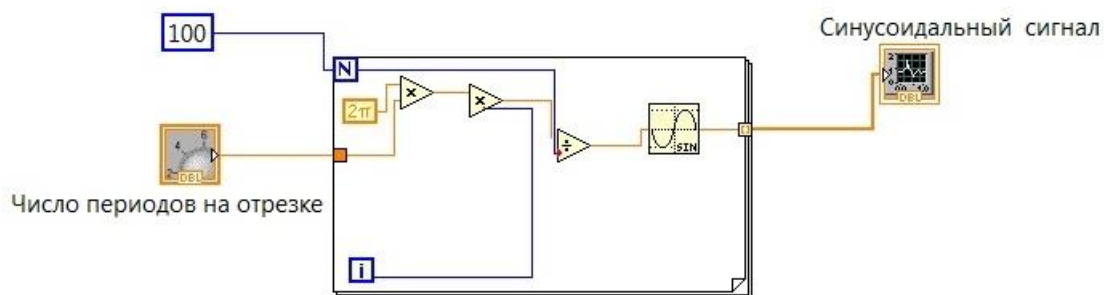


Рис 1а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 1



Рис 1б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 1

**Вопросы для самостоятельной проработки.**

1. Запишите соотношение для  $P$ , аналогичное заключению 2, связывающие значения  $P$  в интервалах  $[0; N/2]$  и  $[N/2; N]$ .
2. Если вы попытаетесь для численных значений примера задать 290 периодов, то сколько увидите на графике? Какой зоне Найквиста это будет соответствовать?

## **Упражнение 2. Ужесточение требований теоремы Котельникова при нелинейных преобразованиях.**

В этом примере рассмотрим случай, как возведение в квадрат меняет требования к частоте дискретизации.

Нелинейные системы для цифровых сигналов в отличие от аналоговых обеспечивают точное преобразование в соответствие с нелинейным алгоритмом. При этом в спектре сигнала появляются новые частоты (гармоники, комбинационные), но эти частоты в цифровом случае четко заданы как количество частот, так и их значения. С другой стороны, спектр дискретных сигналов периодичен, и новые частоты на выходе преобразователя могут наложиться на копии существующих. Поэтому желательно, чтобы все частотные компоненты после нелинейной системы оставались в пределах одной зоны Найквиста, что заведомо обеспечит отсутствие наложения копий

Соберите проект, Б-Д которого изображена на рис. 2. Это проще всего сделать, добавив в копию предыдущей Б-Д умножитель на выходе синусоидального сигнала, подав на оба его входа один и тот же сигнал, обеспечив тем самым формирование в индексируемом туннеле массива из квадратов отчетов синусоидального сигнала.

Проделайте манипуляции, аналогичные предыдущему примеру и убедитесь, что периодичность картинки будет оставлять не  $N$ , а  $N/2$  периодов. Тем самым на  $N$  точках в этом случае можно задать лишь  $N/4$  периодов.

Сформулируем выводы:

1. Введение нелинейности привело к уменьшению максимально допустимого числа периодов и максимально допустимой частоты (в относительных единицах – 0.25 вместо 0.5).
2. Изменение ограничений вдвое связано с типом преобразования – возведением в квадрат, при котором появляется вторая гармоника, суммарные и разностные комбинационные частоты, в нашем случае однотонального сигнала – только удвоенная частота, что объясняет полученное ограничение.

### **Вопросы для самостоятельной проработки.**

1. Как изменятся ограничения при возведении сигнала в куб?
2. Посмотрите вариант суммы сигнала и его квадрата. Возможно ли при этом ситуация, когда получится сигнал одной частоты? При каких условиях это возможно?

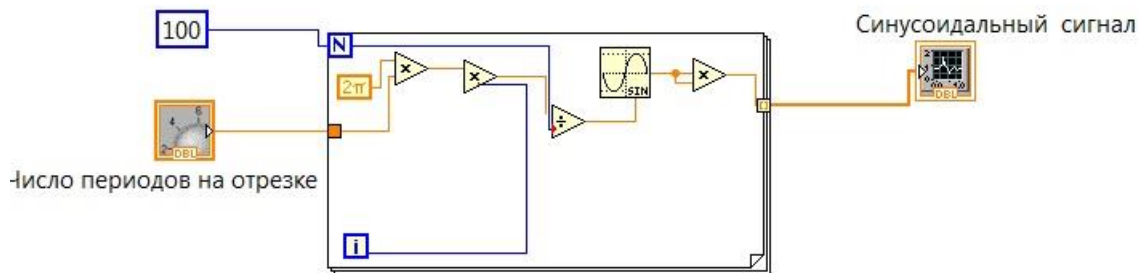


Рис 2. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 2

### Упражнение 3. Спектры синусоидального сигнала

Рассмотрим, какие спектры можно посмотреть и каким образом для цифровых сигналов. Для простоты опять возьмем гармонический процесс.

Напомним, что обычно рассматривают амплитудный, фазовый и энергетический спектры. Мы остановимся на первом и последнем. Заметим, что энергетический получается возведением в квадрат амплитудного. В случае цифровых сигналов спектр получают, используя Дискретное Преобразование Фурье (или оптимизированный алгоритм Быстрого Преобразования Фурье - БПФ) [4]:

$$X_P(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X_P(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (2)$$

где  $N$  – число точек в сигнале,

$n$  – номер отчета сигнала,

$k$  – номер отчета спектра,

$x_p(n)$  – отсчеты сигнала,

$X_p(n)$  – отсчеты спектра.

Нижний индекс  $p$  означает периодичность последовательности. Причем свойством периодичности обладает и сам сигнал, и его спектр. Периодичность спектра завязана на свойствах дискретного сигнала, а сигнал подразумевается периодически бесконечно продолженным, т.е. имеющиеся  $N$  точек бесконечно дублируются слева и справа (до и после). Заметим, само преобразование переводит  $N$  в общем случае неповторяющихся точек в другие  $N$ , из которых почти половина дублируется в точности до комплексного сопряжения (а

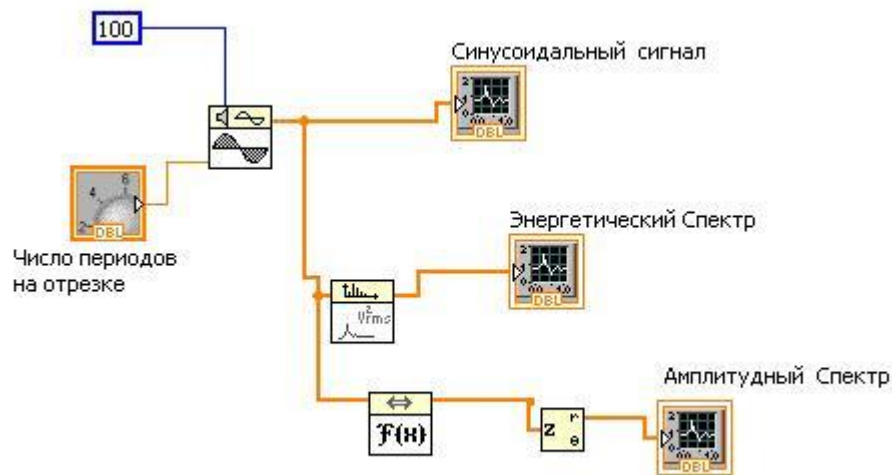


Рис 3а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 3

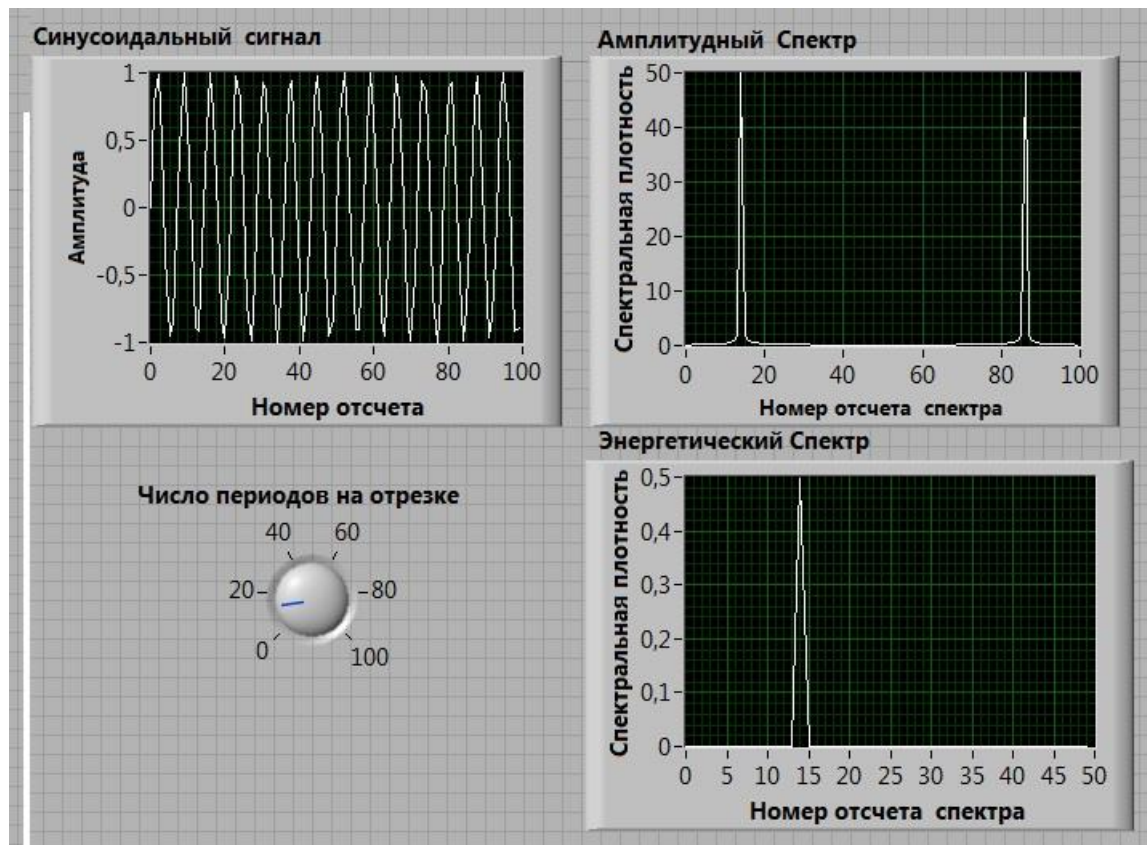


Рис 3б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 3

модули равны, которые и отображаются в амплитудном спектре, а их квадраты – в энергетическом).

Соберите проект, Б-Д которого изображена на рис. 3а. Это проще сделать, добавив в копию проекта первого упражнения следующие компоненты:

1. *Auto Power Spectrum*.
2. *FFT*.
3. *Complex To Polar*.



4. Два элемента *Waveform Graph*, подсоединив их к выходам *Auto Power Spectrum* и *Complex To Polar*.

Соедините перечисленные компоненты проводниками, как показано на рис.3а.

Запустите виртуальный прибор, сравните графики спектров. Для амплитудного спектра можно увидеть зеркально симметричную картину по отношению к центральному отчету, а для энергетического – нет. Такое поведение связано с особенностями реализации виртуальных подприборов FFT и *Auto Power Spectrum* соответственно, последний не показывает половину отчетов, что можно заметить по рис 3.2. При этом первый отчет соответствует нулевой частоте или постоянной составляющей. *Auto Power Spectrum* показывает только положительные цифровые частоты, а для FFT – первая половина отчетов соответствует положительным частотам, вторая – отрицательным.

Отметим еще некоторые свойства, которые видны из примера.

1. Гармонический сигнал для случая целого числа периодов дает один ненулевой отчет в половине отчетов спектра (второй симметричный будет, если число периодов ненулевое и не максимально допустимое).
2. Положение пика в номерах отчетов строго соответствует числу периодов (этот факт можно использовать как трактовку спектра).
3. При вращении ручки «Число периодов на отрезке» положения пика сдвигается вправо до достижения максимального числа периодов, а после превышения такового – влево до того момента, пока не сравняется с числом точек  $N$ .

Еще замечание.

Для спектра характерна периодическая структура, которая повторяется через зону Найквиста, а спектры в соседних зонах зеркально симметричны (справедливо для действительных сигналов).

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Сформулируйте вывод аналогичный п.1-п.3 из первого примера для спектра гармонического сигнала.
2. Опишите, какие изменения в спектре произойдут, если добавить квадратор, как в упражнении 2.

### **Упражнение 4. Импульсная и частотная характеристики цифровых фильтров.**

Под цифровым фильтром мы будем понимать дискретную систему с постоянными параметрами, причем ограничимся линейными системами. В таком случае система будет описываться уравнением.

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^M b(k)x(n-k). \quad (3)$$

Где  $x(n)$  – отсчеты входного сигнала,  
 $y(n)$  – отсчеты сигнала на выходе системы,  
 $a(k), b(k)$  – коэффициенты фильтра,  
 $N$  и  $M+1$  – количество параметров  $a(k), b(k)$  соответственно. Максимальное число из  $N$  и  $M$  называется порядком фильтра.

Параметры целиком описывают такую дискретную систему, но существуют и другие часто используемые функции, в чем-то более выразительные. К таким относятся частотная и импульсная характеристики.

Импульсная характеристика – это отклик системы на единичный импульс  $\delta(n)$ :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0, \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Частотная характеристика обладает свойством: она является результатом Фурье-преобразования импульсной характеристики. Будучи комплексной функцией, она обладает модулем и аргументом. В свою очередь эти действительные функции обладают важной информацией о свойствах фильтра (например, ослаблении быстрых или медленных процессов, задержке, характере искажений сигнала). И называются они соответственно АЧХ (амплитудно-частотная характеристика) и ФЧХ (фазо-частотная характеристика). В этом упражнении рассмотрим, как получить эти функции для произвольного фильтра.

Соберите проект, Б-Д которого представлена на рис. 4а, для этого:

- 1) Поместите элемент *Impuls Pattern*, у входа *samples* создайте константу равную 100.
- 2) Добавьте какой-нибудь из фильтров. В нашем варианте выбран фильтр Бесселя, у терминалов *low cutoff freq* и *high cutoff freq* создайте элементы управления, измените так, как они выглядят на передней панели (рис 4б); также создайте элемент управления у входа *filter type*.
- 3) Добавьте *FFT* и *Complex To Polar*.
- 4) Вставьте 3 элемента *Waveform Graph*.
- 5) Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке.4а.
- 6) Измените верхнюю границу оси абсцисс на графиках АЧХ, ФЧХ со 100 на 50, тем самым мы ограничиваемся одной зоной Найквиста и отбрасываем дублирующие компоненты.

Запустите виртуальный прибор непрерывно. На передней панели расположены органы управления, позволяющие выбирать тип фильтра: нижних частот (ФНЧ, Lowpass), высоких частот (ФВЧ, Highpass), полоснопропускающий (ППФ, полосовой, Bandpass), полосно-запирающий (ПЗФ, режекторный, Bandstop); также можно регулировать границы полосы

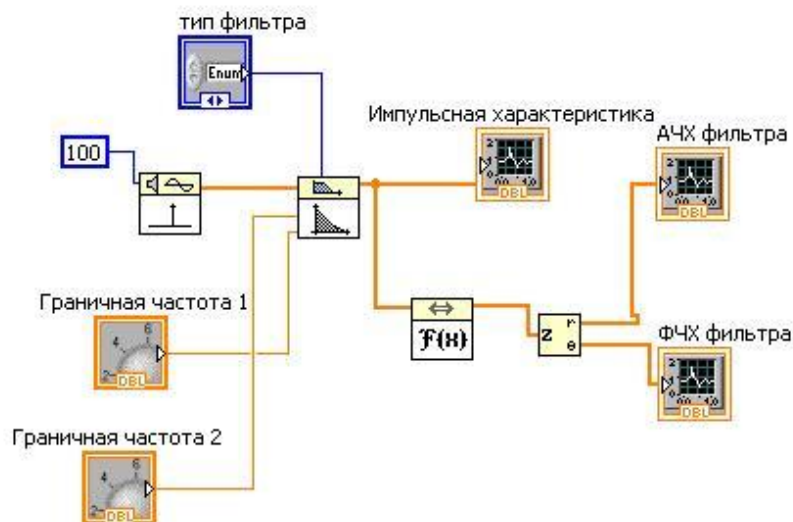


Рис 4а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 4

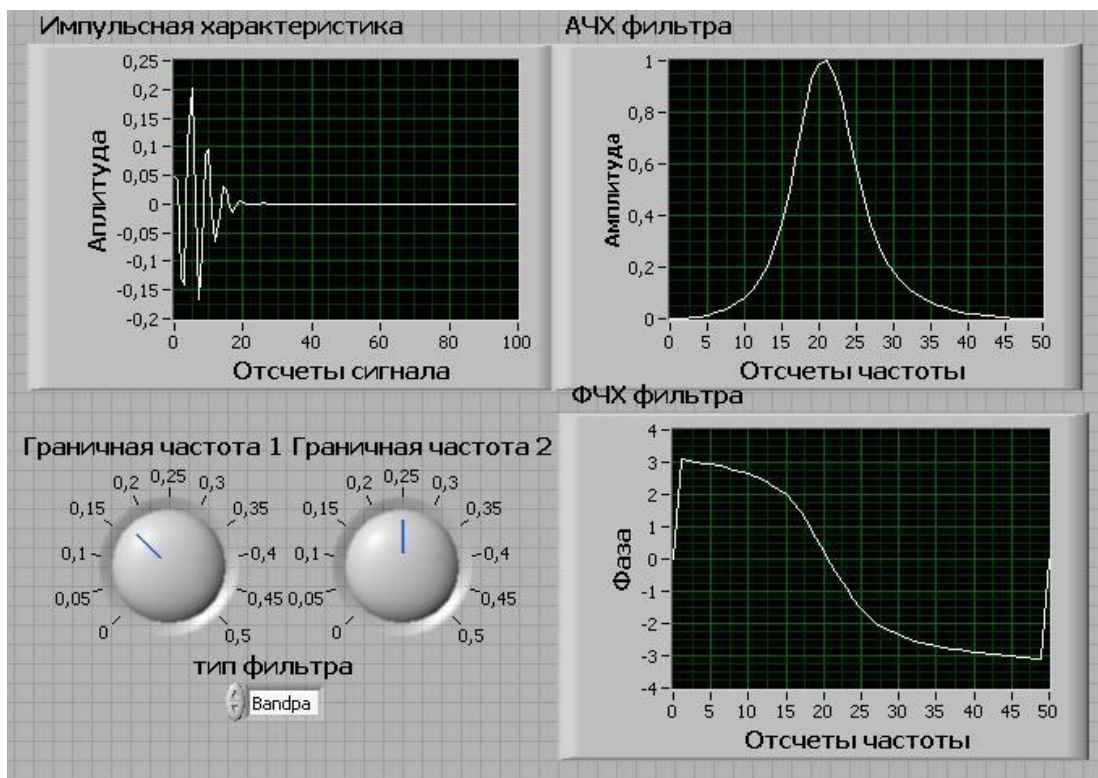


Рис 4б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 4

пропускания. Для полосового и режекторного фильтра используются обе «ручки», для ФНЧ и ФВЧ = «Граничная частота 1».

Меняя тип фильтра, посмотрите какие импульсные характеристика, АЧХ и ФЧХ характерны для каждого типа фильтра, как влияют значения граничных частот на указанные функции.

## Вопросы для самостоятельной проработки

1. Как связаны длительность импульсной характеристики и ширина полосы пропускания АЧХ и почему?
2. В каких случаях импульсная характеристика принимает вид сглаженного видеоимпульса, а в каких – затухающего радиоимпульса и почему?
3. Для каких типов фильтров ФЧХ имеет значения одного знака, а в каких – разного и почему?

## Упражнение 5. Сумма и разность отсчетов как цифровые фильтры

В этом упражнении увидим, что выполнение простейших манипуляций, таких как сложение и вычитание соседних отсчетов, позволительно рассматривать как простые системы, являющиеся цифровыми фильтрами. При этом в зависимости от операции будут получаться фильтры разного типа.

Сконструируйте проект, Б-Д которого изображена на рис. 5а. Это легче сделать, добавив в копию проекта первого упражнения следующие элементы:

- 1) В цикл FOR добавьте сдвиговый регистр, с левой стороны цикла растащите его до появления 9 ячеек. Инициализируйте их всех нулями, создав нулевую константу на входе.
- 2) Добавьте *Compound Arithmetic*, увеличьте число аргументов до 9, соедините входы с выходами сдвиговых регистров.
- 3) Положите внутрь цикла сумматор и вычитатель.
- 4) Вставьте два элемента *Waveform Graph*, подав на их входы через индексированные туннели сигналы с выхода сумматора и вычитателя.
- 5) Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке.5а.

Виртуальный прибор этого упражнения реализует два типа обработки гармонического сигнала: суммирование последних 10 отсчетов (предполагая, что до включения сигнала такие были нулевыми) и вычитание двух последних.

Запустите виртуальный прибор. Установите число периодов около 5 (как на рис. 5б). Вы увидите знакомый синусоидальный сигнал на верхнем графике, сдвинутый синусоидальный на втором графике (исключая первые несколько точек, связанное с нулевой экстраполяцией в предистории). На нижнем графике будет косинусоидальный сигнал (с тем же замечанием по первым точкам). Можете изменять число периодов и наблюдать изменения.

Напишем несколько заключений:

1. Система, реализующая суммирование 10 отсчетов (10 выбрано для наглядности, можно было взять любое число от 2 до  $N$ ) является интегратором или ФНЧ, а также усреднителем. Сдвиг выходного сигнала обусловлен необходимостью накопления данных, т.е данные из прошлого сигнала дают значения на выходе в будущем.

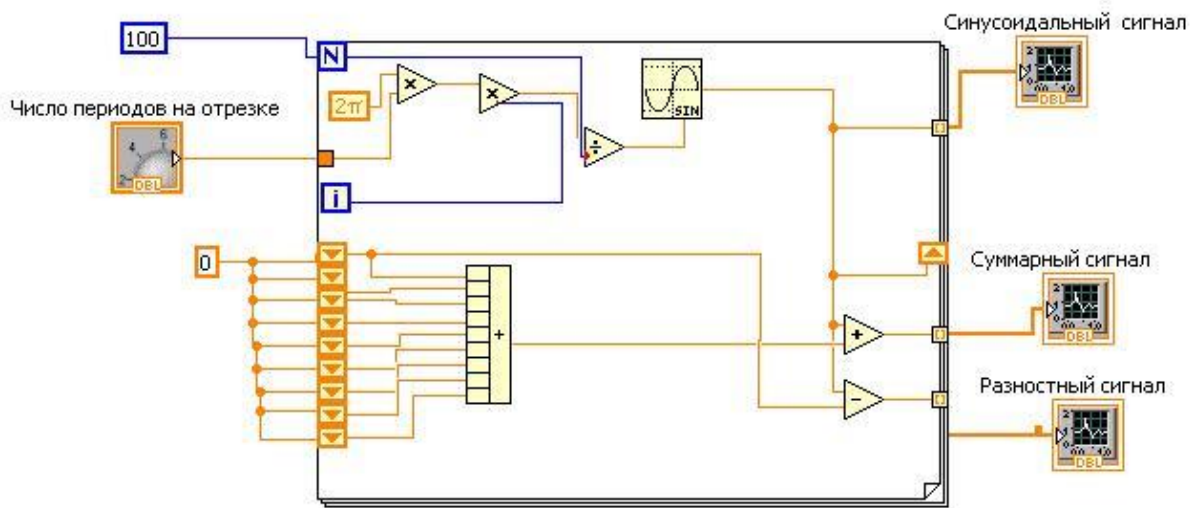


Рис 5а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 5

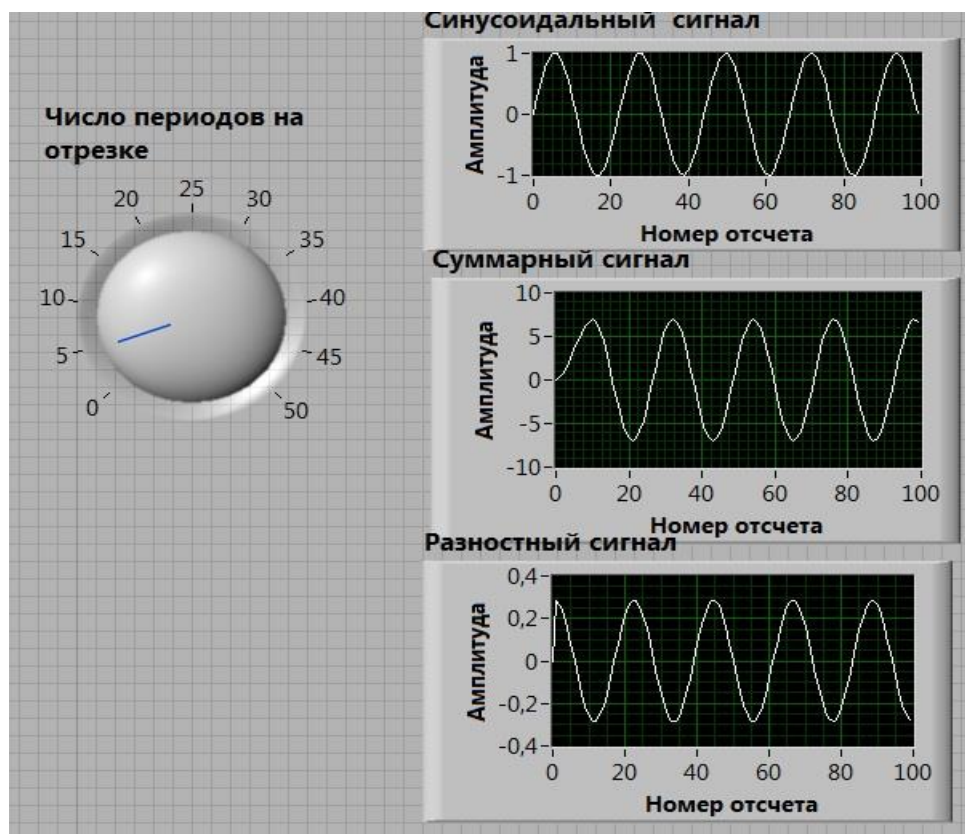


Рис 5б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 5

2. Система, реализующая вычитание отсчетов является дифференцирующей схемой или фильтром высоких частот, что объясняет превращение синуса на ее входе в косинус на выходе

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Постройте импульсные и частотные характеристики реализованных фильтров.
2. Почему при числе периодов 10 и кратном сигнал на выходе «суммирующего» фильтра уменьшается почти до нуля, а при других значениях числа периодов принимает большие значения?
3. Почему сигнал на выходе дифференцирующего фильтра при малом числе периодов по амплитуде меньше единицы, а при большом не превосходит двух?

### **Упражнение 6. Сравнение селективности КИХ и БИХ фильтров.**

Основная классификация цифровых фильтров происходит по ограниченности импульсной характеристики [4]: фильтры с конечной импульсной характеристикой называют КИХ-фильтрами (FIR, они, как правило, трансверсальные, т.е. не имеют обратной связи); в противовес им фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ, IIR) обладают обратной связью и еще называются рекурсивными. Формальное отличие один от других в том, что коэффициенты  $a(k) \equiv 0$  для  $k=1, \dots, N$ . Существует много особенностей, характерных для фильтров каждого из перечисленных типов, но в этом упражнении мы остановимся на одном отличии этих типов фильтров – селективности АЧХ, т.е. способности лучше выделять спектральные компоненты сигнала в определенной полосе частот.

Соберите проект, Б-Д которого представлена на рис. 6а, для этого:

- 1) Поместите элемент *Impuls Pattern*, у входа *samples* создайте константу равную 4096.
- 2) Добавьте какой-нибудь из БИХ-фильтров. В нашем варианте выбран фильтр Баттерворта.
- 3) Добавьте КИХ-фильтр *FIR Windowed Filter*
- 4) Создайте константу и подсоедините ее к терминалу *low cutoff freq* обоих фильтров, присвойте ей значение 0.125.
- 5) Создайте элемент управления, подсоедините его к входу *order* фильтра Баттерворта его же к терминалу *taps* у *FIR Windowed Filter*, измените вид элемента, как показано на рис. 6б.
- 6) Включите в проект 2 подприбора *Auto Power Spectrum*.
- 7) Добавьте 2 элемента *Waveform Graph*, по оси ординат обоих выставите логарифмический масштаб.
- 8) Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке 6а.



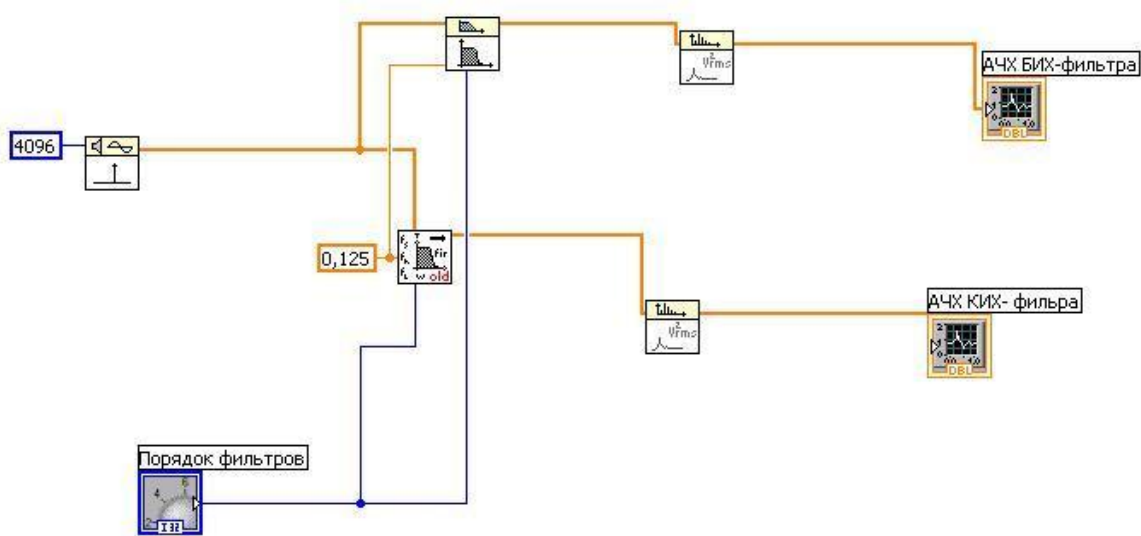


Рис 6а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 6

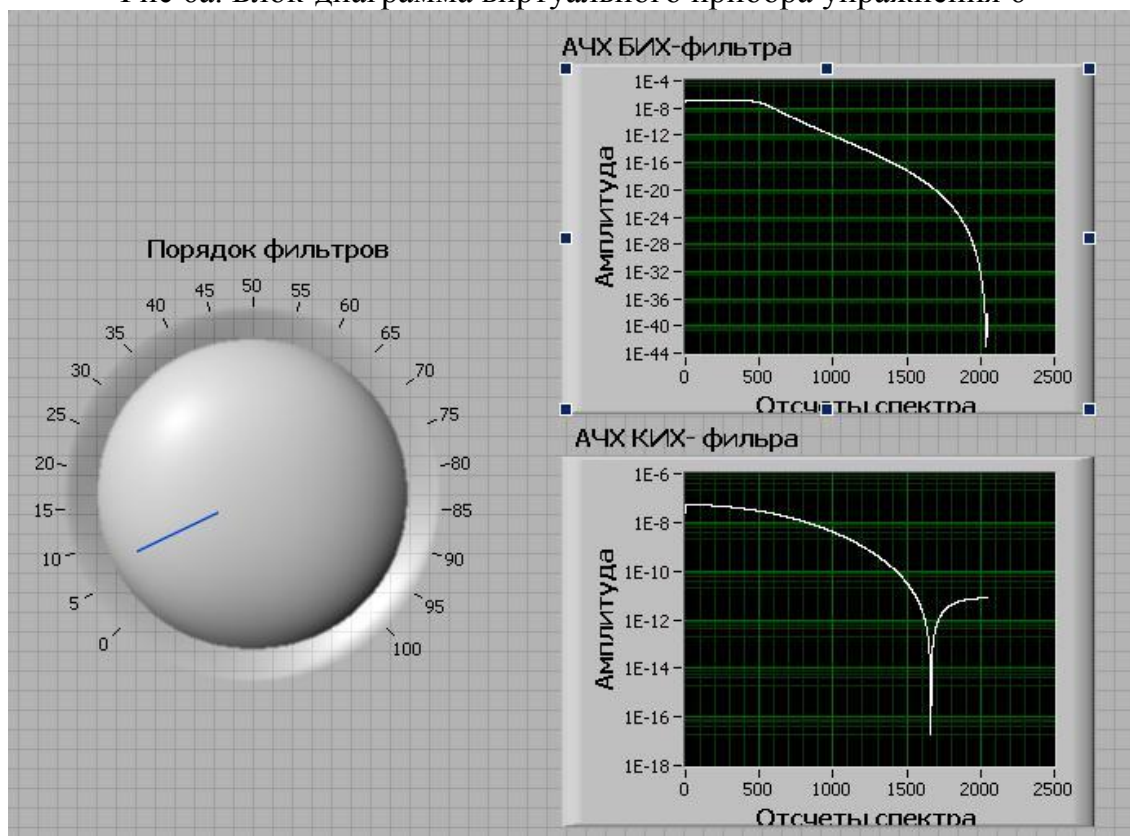


Рис 6б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 6

Заметим, что, строго говоря, в этом примере вычисляется не АЧХ фильтров, а его квадрат, но для качественной оценки это роли не играет. Мы установили одну и ту же граничную частоту и элементом управления задаем один и тот же порядок обоих фильтров (БИХ и КИХ).

Запустите прибор, сравните картинки для разных порядков. Из увиденного должны следовать заключения:

1. АЧХ БИХ-фильтра имеет более резкий спад на границе полосы пропускания, чем у КИХ, она же ближе к прямоугольному виду.
2. Чем выше порядок. Тем круче спадает АЧХ. Но той же степени крутизны спада КИХ-фильтр достигает при гораздо более высоком порядке, чем БИХ. Следовательно, рекурсивные фильтры менее ресурсоемки.

### **Упражнение 7. Пример неустойчивого фильтра. Устранение неустойчивости заменой одного фильтра каскадом из фильтров 2 порядка.**

В данном упражнении мы наглядно разберем одно из свойств, характерное только для БИХ-фильтров – их потенциальную неустойчивость [5]. Она проявляется в том, что при конечном входном сигнале получается бесконечный отклик. Известен способ борьбы с таким эффектом – замена одного фильтра высокого порядка каскадом из звеньев 2-го порядка. Покажем это на примере.

Соберите проект, Б-Д которого представлена на рис. 7а, для этого:

- 1) Возьмите элемент *Sine Wave*, к терминалу *samples* присоедините константу 10000, к *frequency* – 0.00075.
- 2) Добавьте фильтр *Inverse Chebyshev*, у терминала *order* создайте элемент управления и измените его вид, как показано на передней панели (рис. 7б).
- 3) Расположите на Б-Д цикл FOR, создайте сдвиговые регистры, поместите внутрь цикла тот же фильтр *Inverse Chebyshev*, установите его порядок, равным двум.
- 4) К переменной *N* цикла присоедините деленное на 2 значение порядка фильтра в п.2.
- 5) Добавьте 2 элемента *Waveform Graph*, на первый подайте выходной сигнал фильтра вне цикла, на другой – фильтров в цикле через неиндексируемый туннель.
- 6) Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке 7а.

Запустите виртуальный прибор непрерывно. Если значение порядка будет установлено малым, то на обоих графиках будет гармонический сигнал, как на нижнем графике рисунка 7б, но без нулевых отчетов в левой части (т.е без ощутимого сдвига, задержки). Вращая ручку, увеличивайте порядок до тех пор, пока сигнал на верхнем графике не перестанет быть гармоническим (как, например, на том же рисунке). Такой эффект произойдет, когда порядок станет больше 50-ти. Выходной же сигнал каскадного соединения таких же фильтров второго порядка остается гармоническим, но подвергается заметному сдвигу.



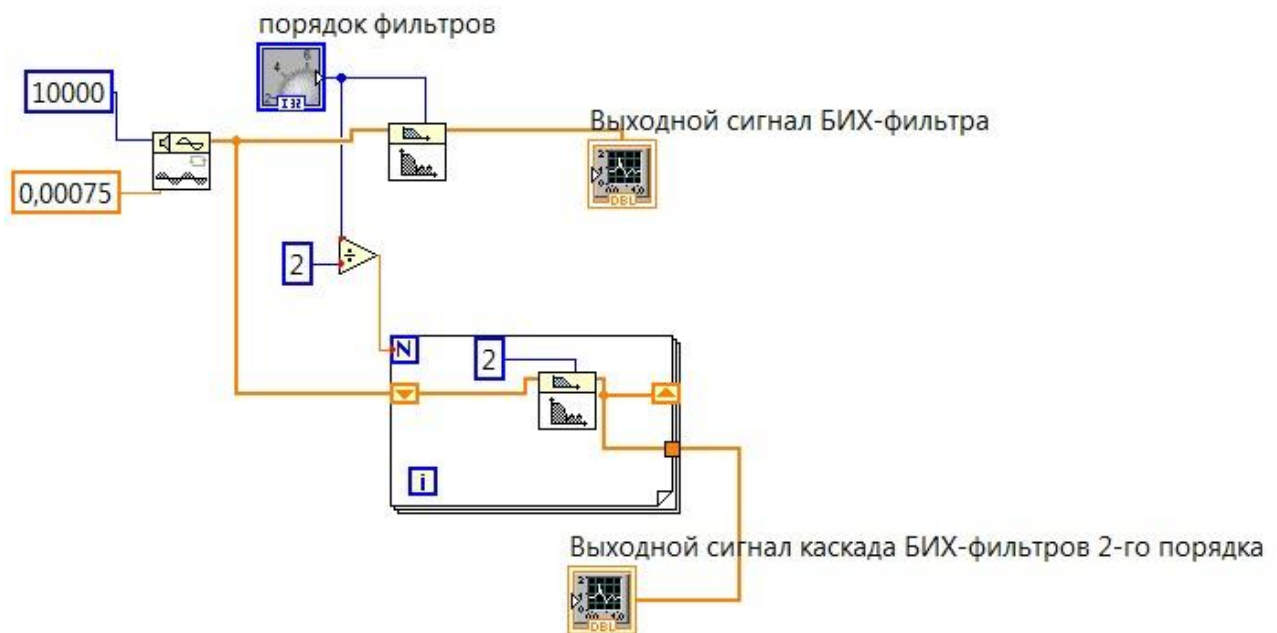


Рис 7а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 7

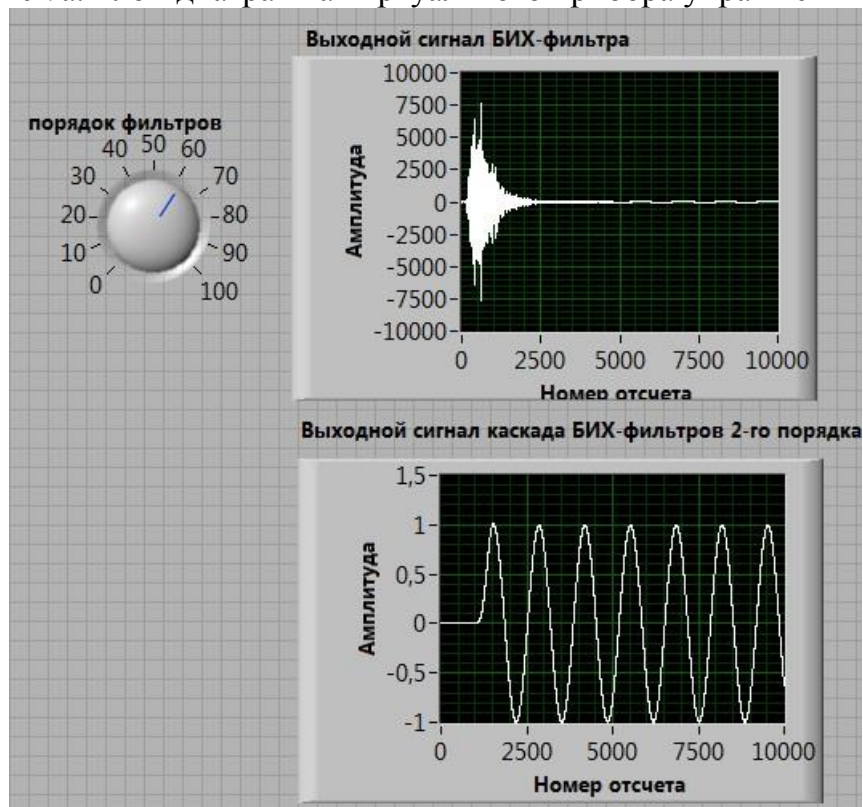


Рис 7б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 7

Еще ряд заключений.

1. БИХ-фильтры могут быть неустойчивыми, что обусловлено наличием обратной связи.

2. БИХ-фильтры 2-го порядка заведомо устойчивы, их каскадное содинение предпочтительно фильтру высокого порядка.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Как зависит величина задержки сигнала от порядка фильтра?
2. Одинаковы ли импульсные характеристики одного фильтра порядка  $N$  и каскадного соединения  $N/2$  фильтров 2-го порядка?

### **Упражнение 8. Пример получения некаузальной системы при занулении отчетов спектра.**

Рассмотрим пример манипуляций со спектром сигнала, которые могли бы быть альтернативой фильтрации. Известно, что при прохождении сигнала через фильтр, его спектр подвергается преобразованию вида [4]:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}), \quad (4)$$

Где  $Y(e^{j\omega})$  – спектр выходного сигнала,  
 $X(e^{j\omega})$  – спектр входного сигнала,  
 $H(e^{j\omega})$  – частотная характеристика фильтра.

Тем самым правильно подобрав алгоритм трансформации спектра, можно выполнить математически эквивалентное преобразование без использования фильтрации, т.е. операций, какие заложены в разностное уравнение (3). Вычисление коэффициентов фильтра зачастую самая сложная часть задачи фильтрации, поэтому возникает соблазн в альтернативном способе, сводящемся к модификации спектра согласно алгоритму (4) и вычислению сигнала из преобразованного спектра. Однако такой подход таит опасность получения физически неадекватного решения. Как вариант, можно получить выходной сигнал, нарушающий принцип причинности, т.е. отклик системы будет начинаться раньше, чем возникло воздействие. Такую систему принят называть некаузальной. Рассмотрим пример.

Создайте Б-Д, изображенную на рис. 8а, для этого:

- 1) Положите на Б-Д элемент *Square Wave*, к терминалу *samples* присоедините константу 1024.
- 2) Добавьте элемент задержки  $Y[i]=X[i-n]$ , положив значение аргумента *shifts* равным 100.
- 3) Включите элементы *FFT* и *Inverse FFT*.

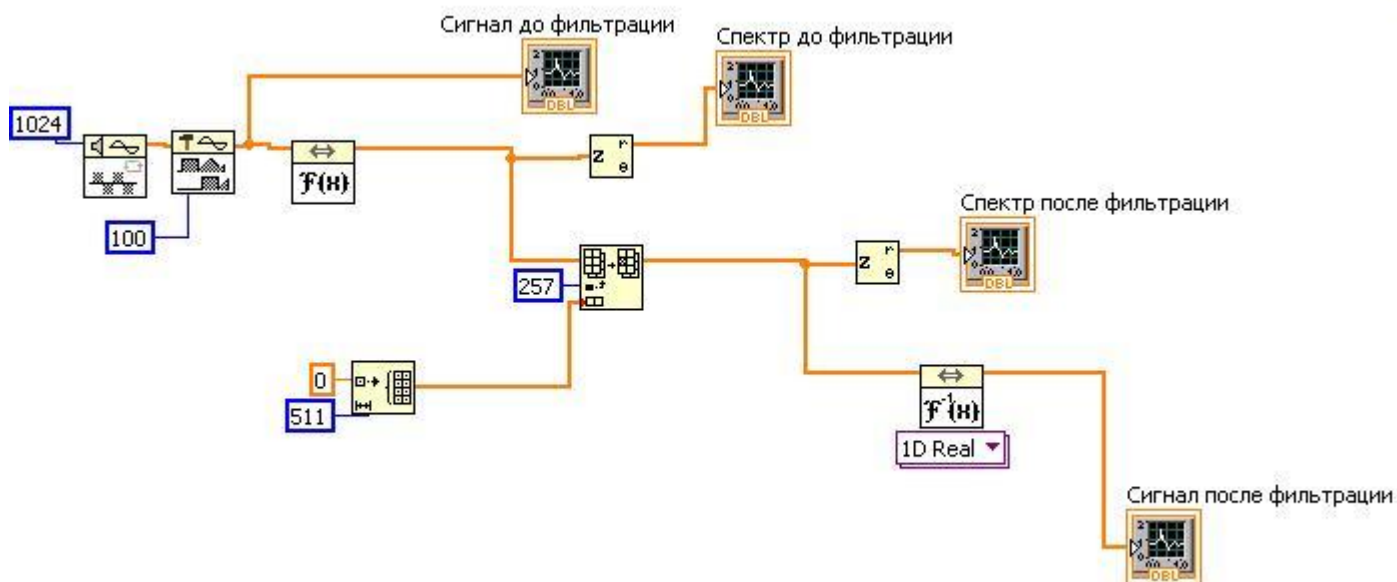


Рис 8а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 8

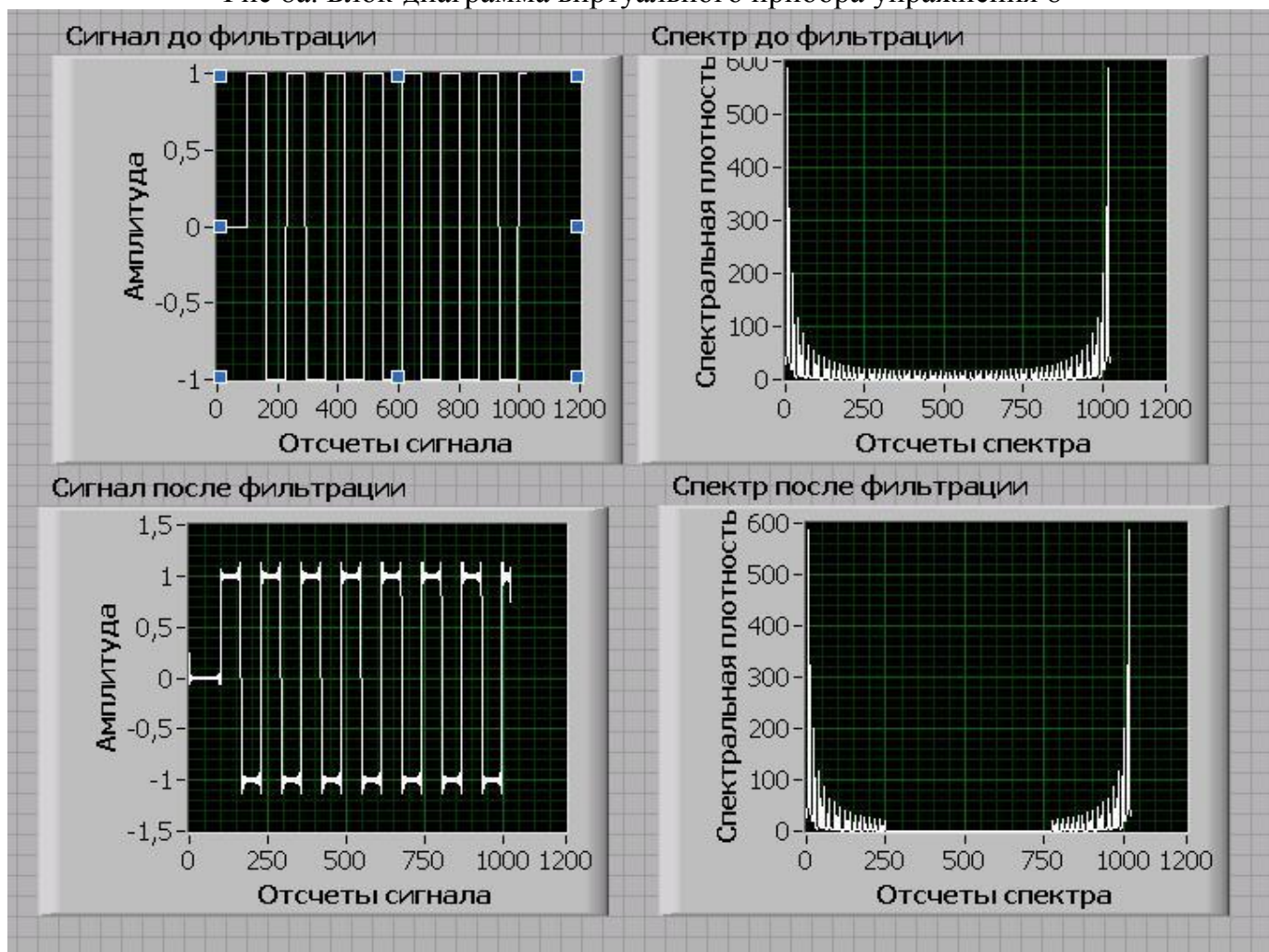


Рис 8б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 8

- 4) Добавьте элемент *Initialize Array*, терминалу *element* присвойте константу 0, *dimention size* – 511.
- 5) Вставьте компонент *Replace Subset Array*, подсоедините к терминалу *index* константу 257.
- 6) Выложите 2 элемента *Complex To Polar*.
- 7) Добавьте 4 элемента *Waveform Graph*.
- 8) Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке 8а.

Заметим, что константы 511 и 257 подобраны неслучайно. Цель манипуляций с компонентами из пунктов 4 и 5, занулить равное количество элементов в левой и правой половине спектра, чтобы после обратного Фурье-преобразования получился вещественный сигнал. При этом мы без необходимости присваиваем нулю  $N/2+1$  –ый элемент, что некритично.

Запустите прибор. Вы увидите сигнал в виде меандра, его АЧХ, тот же АЧХ с половиной зануленных отсчетов и соответствующий такому спектру сигнал (рис. 8б). Вы можете ограничить шкалу по оси  $x$  на нижнем левом рисунке сотней с небольшим отсчетов. Обратите внимание! У исходного сигнала первые 100 отсчетов нулевые, а после наших преобразований они стали ненулевыми, начиная с первого – нарушился принцип причинности! Значит наша система получилась некаузальной.

Подведем итоги:

1. Необдуманная трансформация спектра сигнала может привести к нарушению принципа причинности.
2. Нижний левый рисунок является иллюстрацией Эффекта Гиббса, который связан с обрезанием части спектра сигнала.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Постройте импульсную и частотные характеристики полученной системы.
2. Как можно изменить модификацию спектра, чтобы система стала казуальной.

### **Упражнение 9. Фильтрация меандра.**

Несмотря на лаконичное название, упражнение будет многозначным и поучительным. С другой стороны, оно покажет, как, используя стандартные цифровые фильтры, избавляться от ненужных спектральных компонент. Еще это учебный пример на понимание спектрального анализа и частотной фильтрации.

Создайте проект, Б-Д которого изображена на рис. 9а.

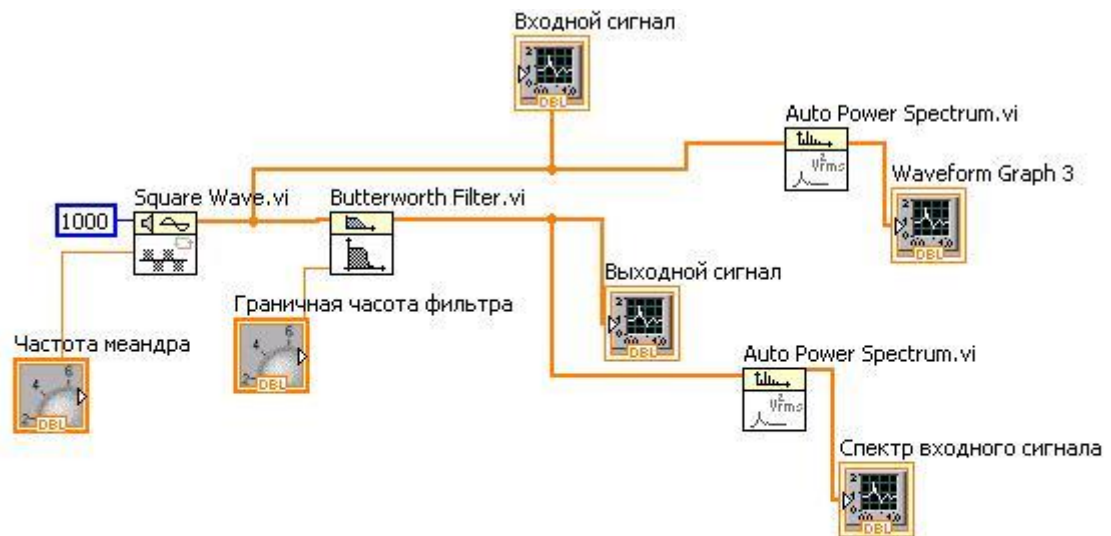


Рис 9а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 9

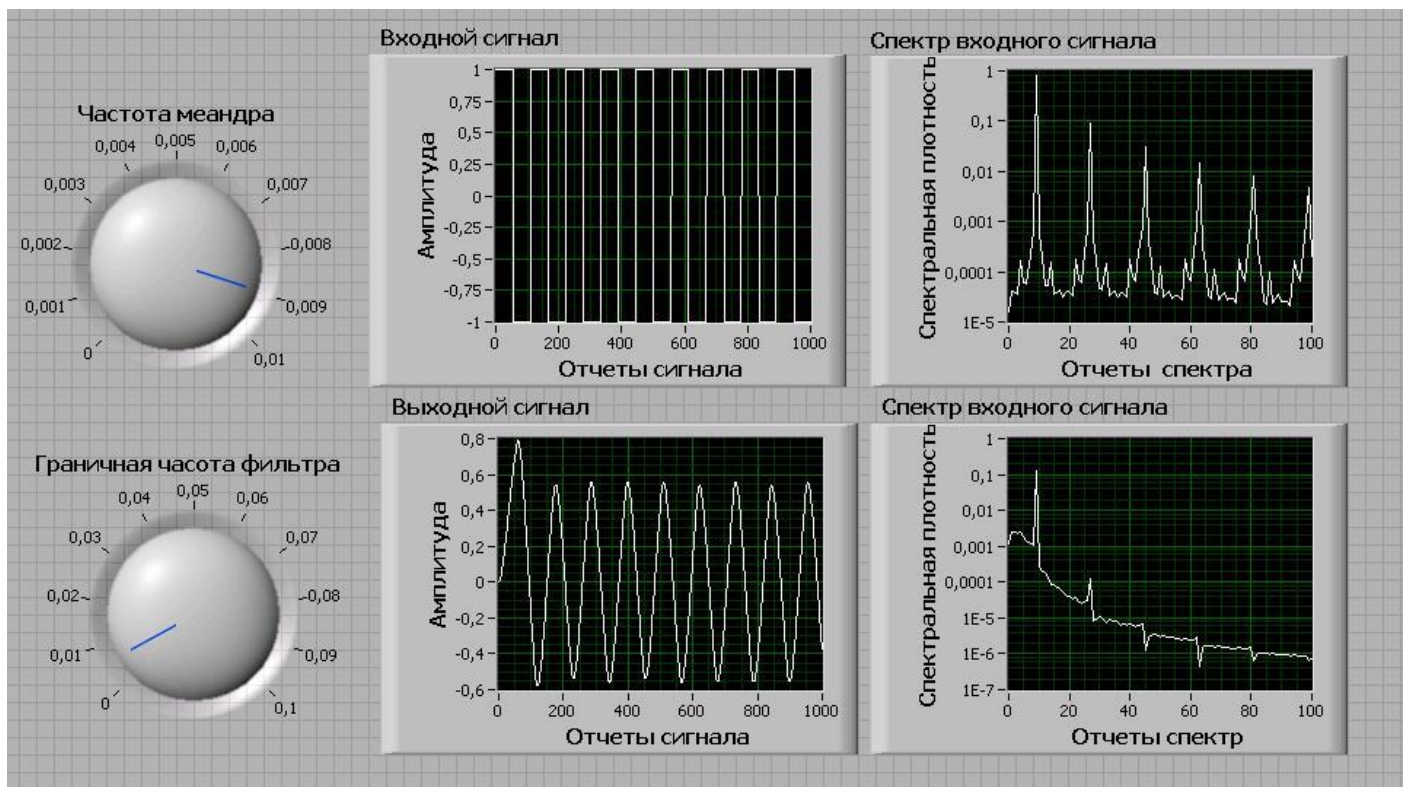


Рис 9б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 9

На Б-Д выставите компоненты:

- 1) *Square Wave*, к терминалу *samples* присоедините константу 1024, у терминала *frequency* создайте элемент управления, измените его внешний вид на тот, какой показан на рис. 9б.



- 2) Фильтр Баттерворта, у терминала *low cutoff freq* создайте элемент управления, приведите его к виду как на рис. 9б.
  - 3) Два элемента *Auto Power Spectrum* (для качественной оценки эффекта достаточно энергетического спектра).
  - 4) Добавьте 4 элемента *Waveform Graph*.
- Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке 9а.

Запустите виртуальный прибор непрерывно. На верхних графиках посмотрите на меандр и его спектр, обратите внимание на линейчатый характер спектра. Вращая ручки прибора, установите частоту меандра примерно равной граничной частоте фильтра и наблюдайте, во что превратился выходной сигнал на нижнем графике. По мере уменьшения граничной частоты фильтра, вы можете наблюдать ослабление высоких гармоник меандра. Когда все гармоники, кроме первой, будут достаточно подавлены, выходной сигнал будет по форме близок к синусоидальному.

Подытожим результаты:

1. Любой периодический сигнал состоит из суммы гармонических компонент. Подавляя высшие гармоники такой сигнал можно превратить в синусоидальный.
2. Управляя полосой пропускания фильтра, можно выделять нужное число гармоник, в результате получая сигналы соответствующей формы.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Какой формы будет сигнал после фильтра, если в полосу пропускания не попадет ни одна из гармоник меандра?
  2. Что произойдет, если частоту меандра выставить высокой (десятые доли в цифровых частотах). Пронаблюдайте и обоснуйте увиденное.
  3. Модифицируйте проект так, чтобы на выходе фильтра получалась синусоида с удвоенной частотой меандра.
- .

### **Упражнение 10. Дополнение нулями последовательности.**

Это и последующие упражнения посвящены простейшим модификациям сигнала (спектра) с отслеживанием сопутствующих изменений в спектре (сигнале). При этом важно помнить симметрию прямого и обратного Фурье-преобразований, в результате чего можно переносить известные свойства из спектральной области во временную, и наоборот.

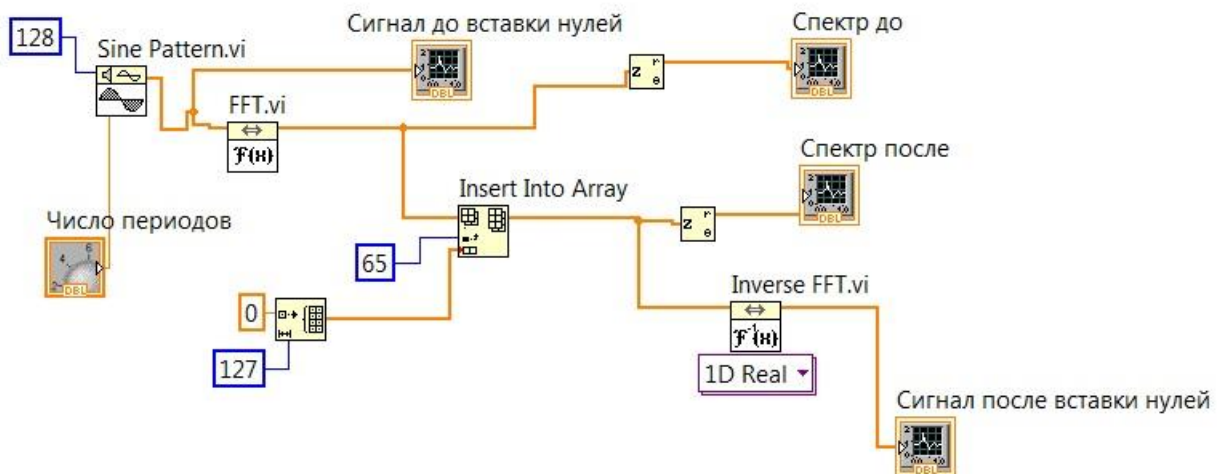


Рис 10а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 10

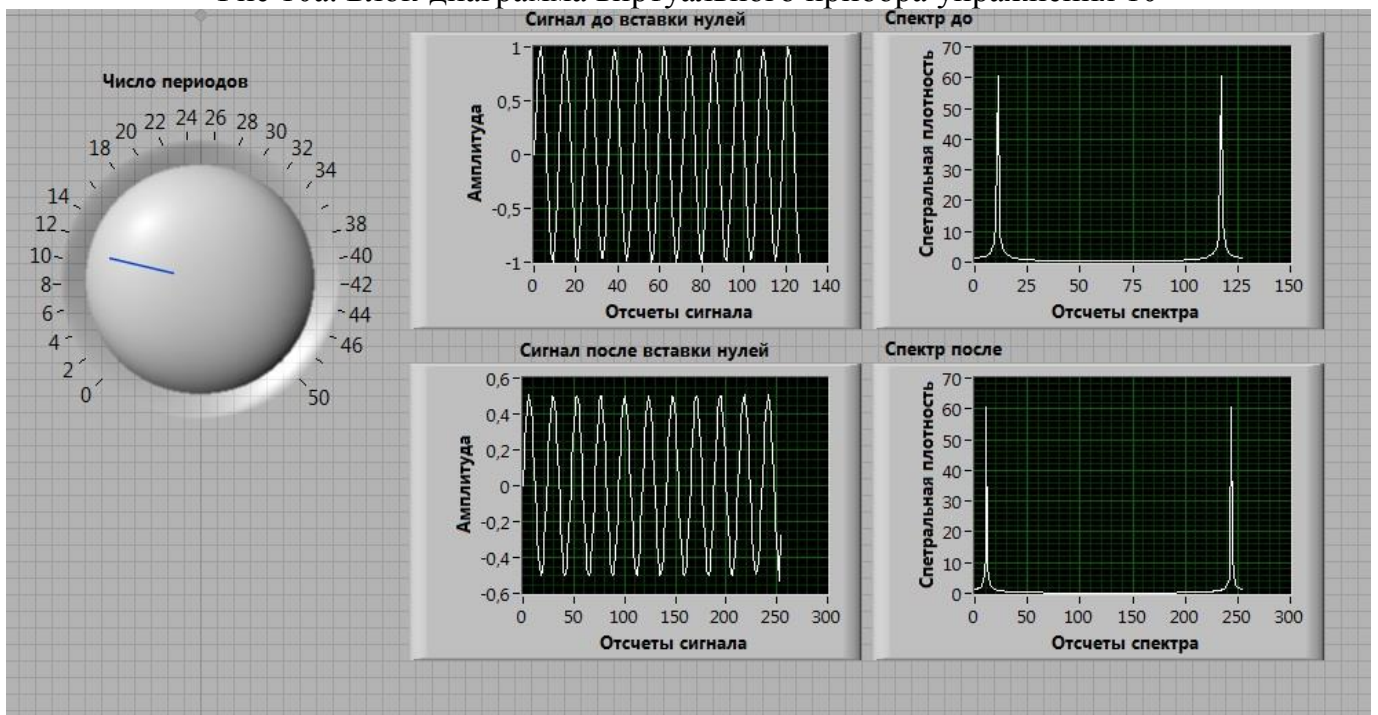


Рис 10б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 10

Первое свойство касается дополнения нулями Фурье-образа заданной последовательности. Рассмотрим более сложный случай, когда вставлять нули придется в спектр действительного сигнала. Особенностью такого случая является тот факт, что отсчеты спектра должны удовлетворять условиям [4].

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[X_p(k)] &= \operatorname{Re}[X_p(N-k)], \\ \operatorname{Im}[X_p(k)] &= -\operatorname{Im}[X_p(N-k)] \end{aligned} \quad (5)$$

где  $X_p(k)$  – ДПФ сигнала.

Тем самым вставлять нули нужно так, чтобы удовлетворять этому условию. т.е. добавлять нули попарно симметрично в обе половины спектра, в противном случае есть риск получить после обратного преобразования комплексный сигнал.

Соберите проект, Б-Д которого представлена на рис. 10а. Для этого разместите:

- 1) Генератор сигнала *Sine Pattern*, у терминала *Samples* создайте константу равную 128. у терминала *Cycles* – элемент управления, пределы значений установите от 0 до 50.
- 2) Включите элементы *FFT* и *Inverse FFT*.
- 3) Добавьте элемент *Initialize Array*, терминалу *element* присвойте константу 0, *dimention size* – 127.
- 4) Вставьте компонент *Insert Into Array*, подсоедините к терминалу *index* константу 65.
- 5) Выложите 2 элемента *Complex To Polar*.
- 6) Добавьте 4 элемента *Waveform Graph*.
- 7) Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке 10а.

Запустите виртуальный прибор. Вы увидите картину на передней панели, аналогичную изображенной на рисунке 10б. На графиках можно наблюдать гармонический сигнал, его спектр, спектр после вставки нулей, и сигнал после обратного Фурье-преобразования спектра с добавленными отсчетами. Обратите внимание, что после наших манипуляций, число точек в сигнале и спектре увеличилось вдвое, но число периодов осталось прежним, значит, число точек на периоде возросло, т.е. цифровая частота уменьшилась, что заметно по спектру, но при этом сигнал прорисовывается более детально. Если изменить масштаб оси абсцисс на графике, такой эффект легко заметить. По факту происходит *интерполяция* сигнала с помощью *экстраполяции* нулями спектра, но заполнение нулями, т.е. внесение новой информации о высокочастотных компонентах – это всего лишь наше предположение, не подтвержденное реальными фактами. Но благодаря ему мы получили новые точки в сигнале посередине между имеющимися точками. Произошло по сути увеличение частоты дискретизации вдвое (рукотворное путем предположения об отсутствии более высокочастотных компонент).

Гораздо чаще на практике используют взаимное свойство, когда добавляют нулевые отсчеты в сигнал, и получают в результате промежуточные отсчеты в спектре сигнала (интерполяцию). Опять же интерполированные отсчеты получаются за счет предположения (вопрос обоснования здесь не ставится) о нулевых значениях сигнала. Этот случай предлагается проработать самостоятельно, и на его основе построено упражнение 13. Такие преобразования на практике применяются, когда необходимо получить равное степени двойке число отчетов для использования алгоритмов БПФ (недостающие отсчеты принимаются за нулевые). Второй случай – получение большего числа отчетов ДПФ (как дискретизированного ДВПФ), что требует



большого числа точек исходной последовательности, которая опять же получается проще всего дополнением нулевыми отсчетами [6].

Подведем итоги:

1. Добавление нулевых отсчетов в конец Фурье-образа последовательности дает возможность получить интерполированные точки в самой последовательности независимо от того, к какой области относится эта последовательность, временной или частотной.
2. Использование данного свойства позволит получать промежуточные (интерполированные) точки последовательности, когда это необходимо.
3. Описанный прием – способ повышения частоты дискретизации.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Соберите проект, в котором дополнялась бы нулевыми отсчетами реализация сигнала, постройте спектры реализаций до дополнения отсчетов и после, сравните их, сделайте соответствующие выводы.
2. Сколько нулевых отсчетов нужно добавить в сигнал из 512 отсчетов для получения спектра из 4096 отсчетов в области положительных частот.

### **Упражнение 11. Децимация сигнала.**

Децимацией (или прореживанием) сигнала называется процедура, когда оставляют каждый  $N$ -ый отсчет, а остальные отбрасывают.  $N$  далее будем называть степенью децимации. Данное упражнение является противоположным предыдущему, в смысле того, что прореживание сигнала является обратной операцией интерполяции. И наблюдаемые эффекты также будут обратными.

Соберите проект, Б-Д которого представлена на рис. 11а. Для этого разместите:

- 1) Генератор сигнала *Sine Pattern*, у терминала *Samples* создайте константу равную 128. у терминала *Cycles* – элемент управления, пределы значений установите от 0 до 20.
- 2) Из палитры *Signal Processing* выберите *Decimate*, у терминала *Decimating factor* создайте элемент управления (на рис. 11б – «степень децимации»).
- 3) Включите 2 элемента *FFT*.
- 4) Выложите 2 элемента *Complex To Polar*.
- 5) Добавьте 4 элемента *Waveform Graph*.
- 6) Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке 11а.

Запустите виртуальный прибор. Выставьте небольшое число периодов, и малую степень децимации. Вращайте медленно ручку «Степень децимации», наблюдайте отличия в исходном сигналах и спектрах. Обратите внимание, что число точек сигнале и спектре после прореживания уменьшается ровно в «степень децимации» раз. Этим и объясняются более широкие пики в спектре после децимации, сигнал при этом становится более изрезанным.

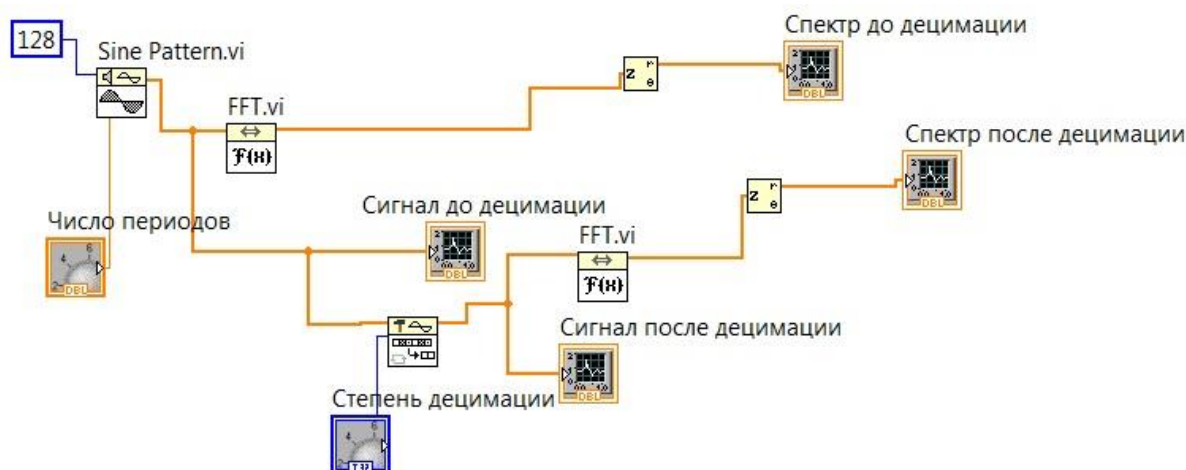


Рис 11а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 11

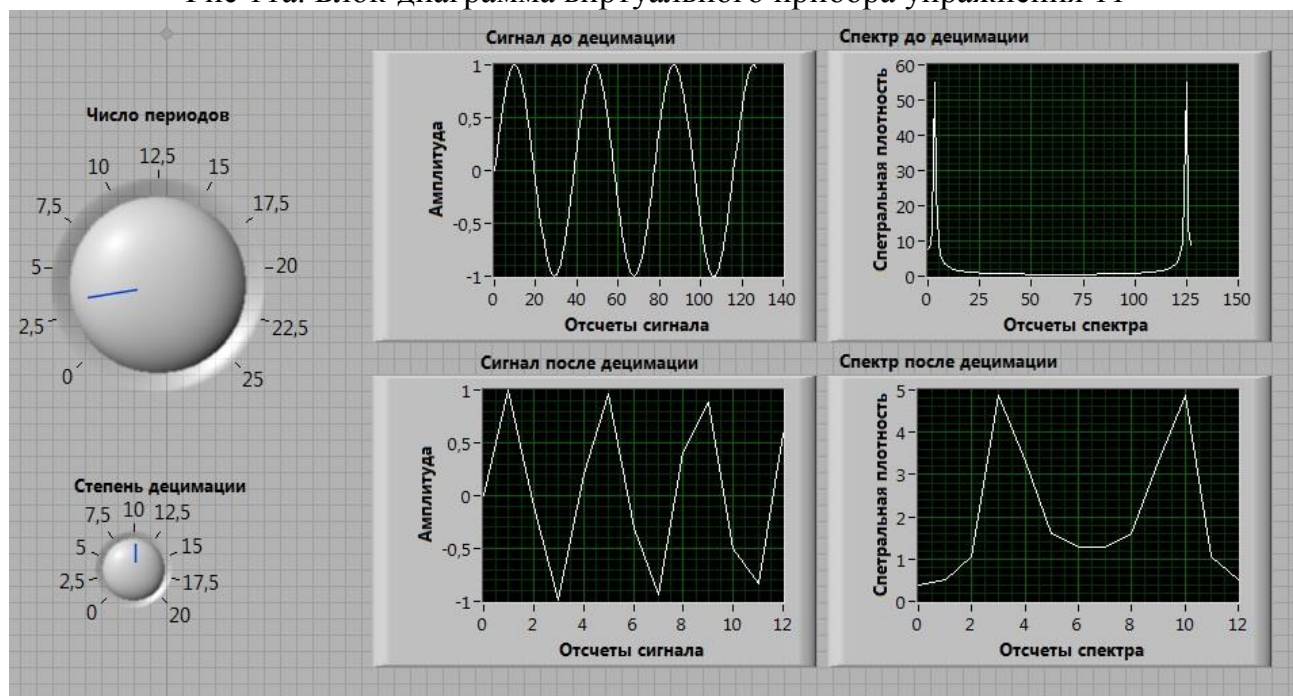


Рис 11б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 11

Также пики на АЧХ становятся все ближе к друг другу. Это связано с тем, что по мере прореживания происходит уменьшение максимально допустимой частоты сигнала по теореме Котельникова, при превышении максимально допустимой частоты происходит наложение копий спектров. На графике это будет выглядеть как движение пиков друг от друга после их сближения (на самом деле видны наложившиеся копии спектров). График прореженного сигнала при этом будет выглядеть сильно непохожим на исходный, не только изрезанностью, но и числом наблюдаемых периодов.

Чтобы децимация прошла без негативных последствий, вызванных наложением копий спектров, необходимо, чтобы на высоких частотах (которые будут обрезаться или накладываться), не было существенных значений амплитуд спектральных компонент, которые повлекут искажения после наложения, наложение будет в любом случае, лучше пусть эти компоненты будут нулевой амплитуды.

Сделаем заключения:

1. В результате децимации происходит уменьшение числа точек в сигнале, что с одной стороны экономит ресурсы, с другой – вынуждает быть предусмотрительным при такой операции.
2. При прореживании надо быть осторожным, в результате нарушения теоремы Котельникова наложение копий спектров не привело к искажению сигнала.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Что произойдет с сигналом, если из спектра выбросить половину отсчетов? Создайте проект в LV и убедитесь в правоте ваших заключений. Отдельно рассмотрите случаи сохранения четных и нечетных отсчетов (исходное число отсчетов подразумевается четным).
2. Максимальная частота в сигнале 10 кГц (минимальная близка к нулю). Частота дискретизации – 200 кГц. Во сколько раз можно проредить сигнал без риска наложения спектров?

### **Упражнение 12. Вставка нулей между отсчетами сигнала.**

В данном упражнении рассмотрим еще один способ добавления нулей в сигнал и сопутствующие изменения в спектре – мы будем добавлять нули между отсчетами сигнала с различной периодичностью. Разумеется, при такой операции сигнал будет сильно искажаться, но при этом любопытны будут изменения в спектре.

Соберите проект, Б-Д которого изображена на рис. 12а, включите в него:

- 1) Генератор сигнала *Triangle Wave*, у терминала *Samples* создайте константу равную 256. у терминала *frequency* – элемент управления («частота» на рис. 12б), пределы значений установите от 0 до 0.05.
- 2) Разместите на Б-Д цикл FOR, добавьте сдвиговые регистры.
- 3) Внутри цикла разместите элемент *Insert Into Array*, к терминалу *new element* присоедините константу 0.
- 4) Добавьте элементы *Increment*, *Multiply*, у одного из входов умножителя создайте элемент управления, обозначенный на рис. 12б как «период зануления», установите пределы от 2-х до 10.
- 5) Включите 2 элемента *FFT*.
- 6) Выложите 2 элемента *Complex To Polar*.

- 7) Добавьте 4 элемента *Waveform Graph*.
- 8) Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке 12а.

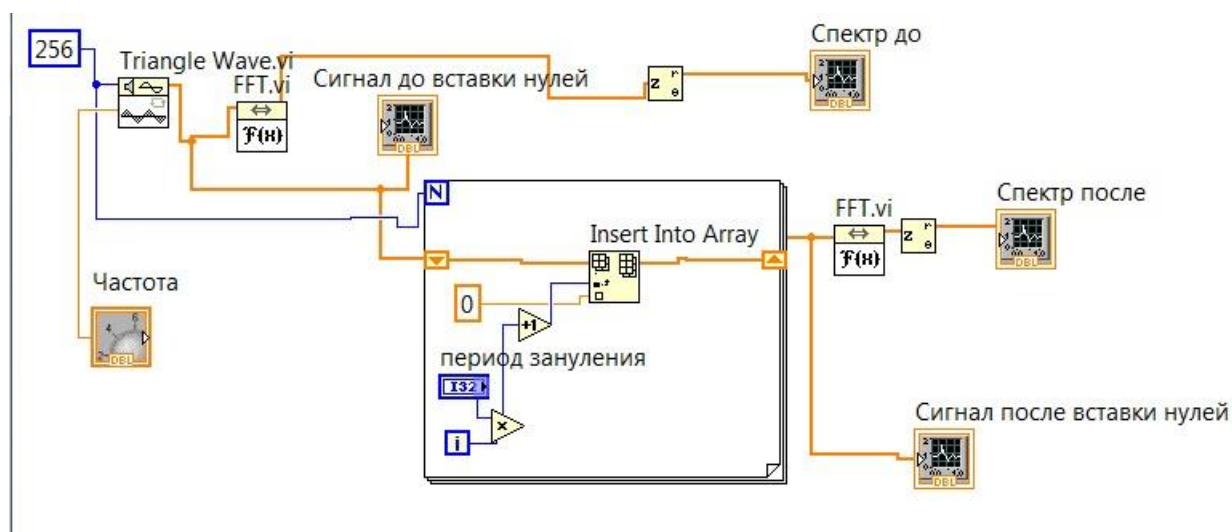


Рис 12а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 12

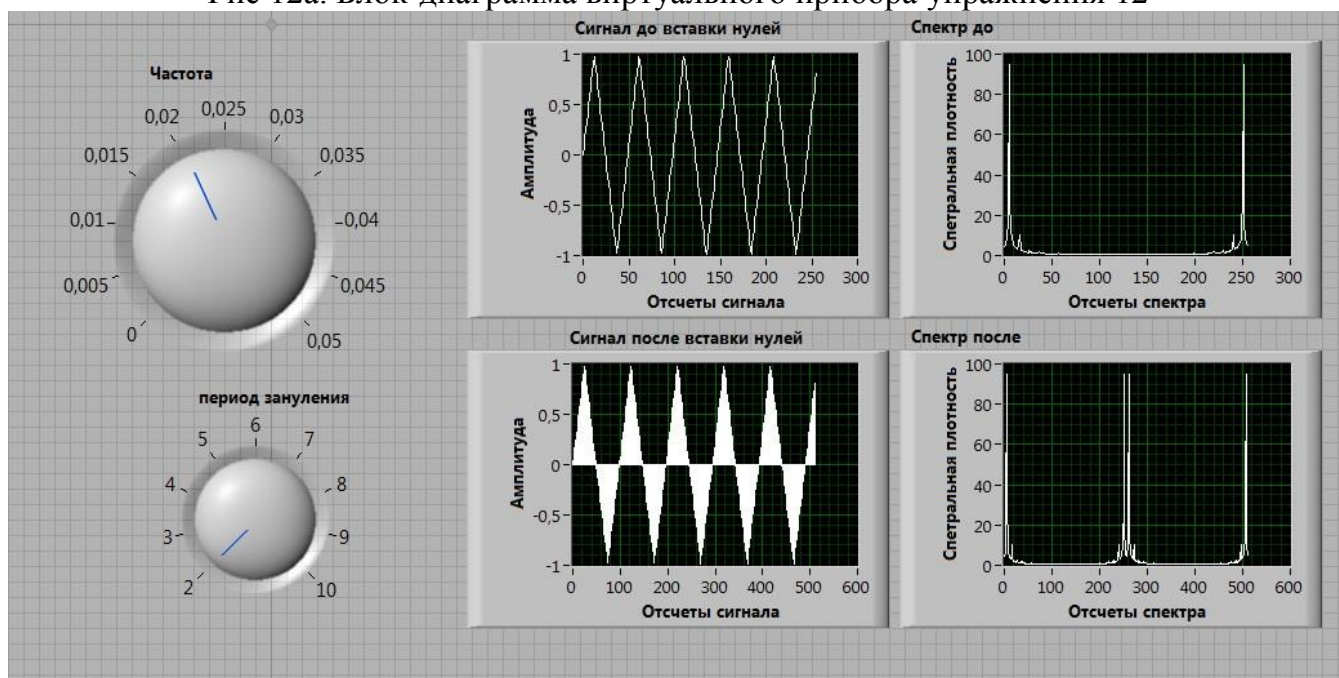


Рис 12б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 12

Запустите виртуальный прибор. Посмотрите, как влияет добавление нулей на вид сигнал и его спектра при различных «периодах зануления». Разберем случай, когда вставляется нулевое значение ровно через каждый отчет. Если равномерно часть отсчетов становятся нулевыми, а остальные остаются равными текущим значениям сигнала, то это эквивалентно операции дискретизации. Как известно, при дискретизации происходит порождение копий спектра. В рассматриваемом нами случае период «выборки» составляет 2 отсчета, соответственно, период повторения спектральной функции составит

обратную величину, т.е. 0.5 в цифровых частотах. Тем самым мы увидим копию спектра в соседней зоне Найквиста, что можно наблюдать на нижнем правом графике рис. 12б. Заметьте, что число точек и в сигнале, и в спектре увеличилось вдвое.

Сформулируем заключение: добавление нулей между отсчетами сигнала приводит к появлению копий спектральных компонент. При этом важно избегать наложений копий спектра, для этого до вставки «нулей» у сигнала должны быть области частот, которые можно было бы очистить путем фильтрации для последующего наложения в них копий спектра.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Как изменятся результаты, если вместо вставки нулей осуществить замену отсчетов нулями?
2. Объясните изменения, происходящие с сигналом и его спектром, когда вставка нулевых отсчетов выполняется через два, три и т.д. отсчетов.
3. Что произойдет с сигналом, если в спектре приравнять нулю половину отсчетов (через один)? Создайте проект в LV и убедитесь в правоте ваших заключений.

### **Упражнение 13. Влияние окна на спектр дополненного нулями сигнала**

Окном (оконной функцией) или весовой функцией будем называть такую функцию  $w(k)$ , на которую поточечно перемножается сигнал  $x(k)$ . Спектр такого произведения будет являться сверткой спектров сигнала и оконной функции:

$$X(k)*W(k), \quad (6)$$

где  $X(k)$  и  $W(k)$  – спектры сигнала и весовой функции соответственно. В результате вместо одного ненулевого отсчета в спектре синусоиды, получается размазанный пик (так называемый главный лепесток) и много мелких пиков (боковые лепестки) - результат свертки единичного импульса и спектра весовой функции. Когда к отрезку сигналу явно не применяется окно, на самом деле это эквивалентно использованию прямоугольного или естественного окна. Применение других типов окон позволяет изменить спектральные характеристики взвешенного сигнала. Это свойство мы рассмотрим в данном упражнении. Другое применение окон – обеспечение плавного изменения сигнала, когда это необходимо.

Важно понимать, что любой отрезок сигнала при вычислении ДПФ периодически продолжается, и наложения окна не происходит. Однако при



добавлении нулевых отсчетов (цели этой процедуры описаны в упражнении 10), возникает эффект наложения прямоугольного окна [6].

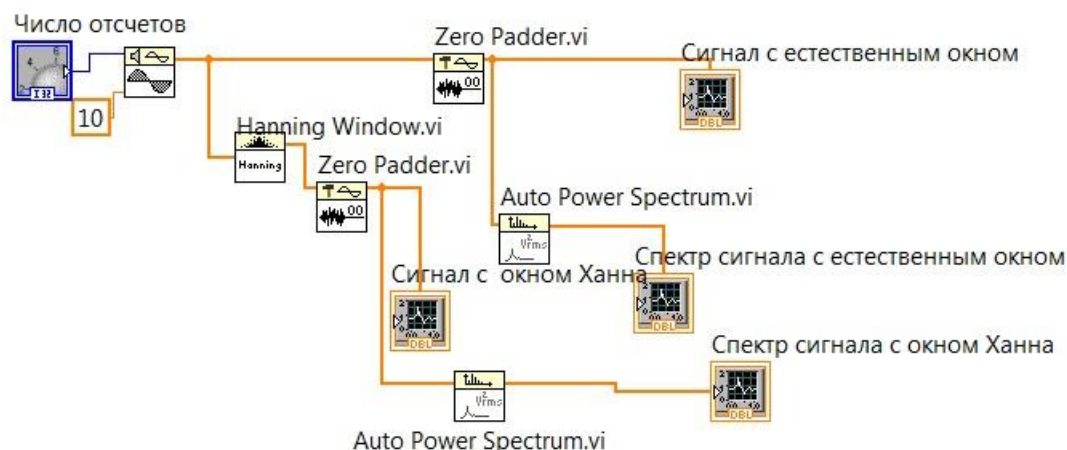


Рис 13а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 13

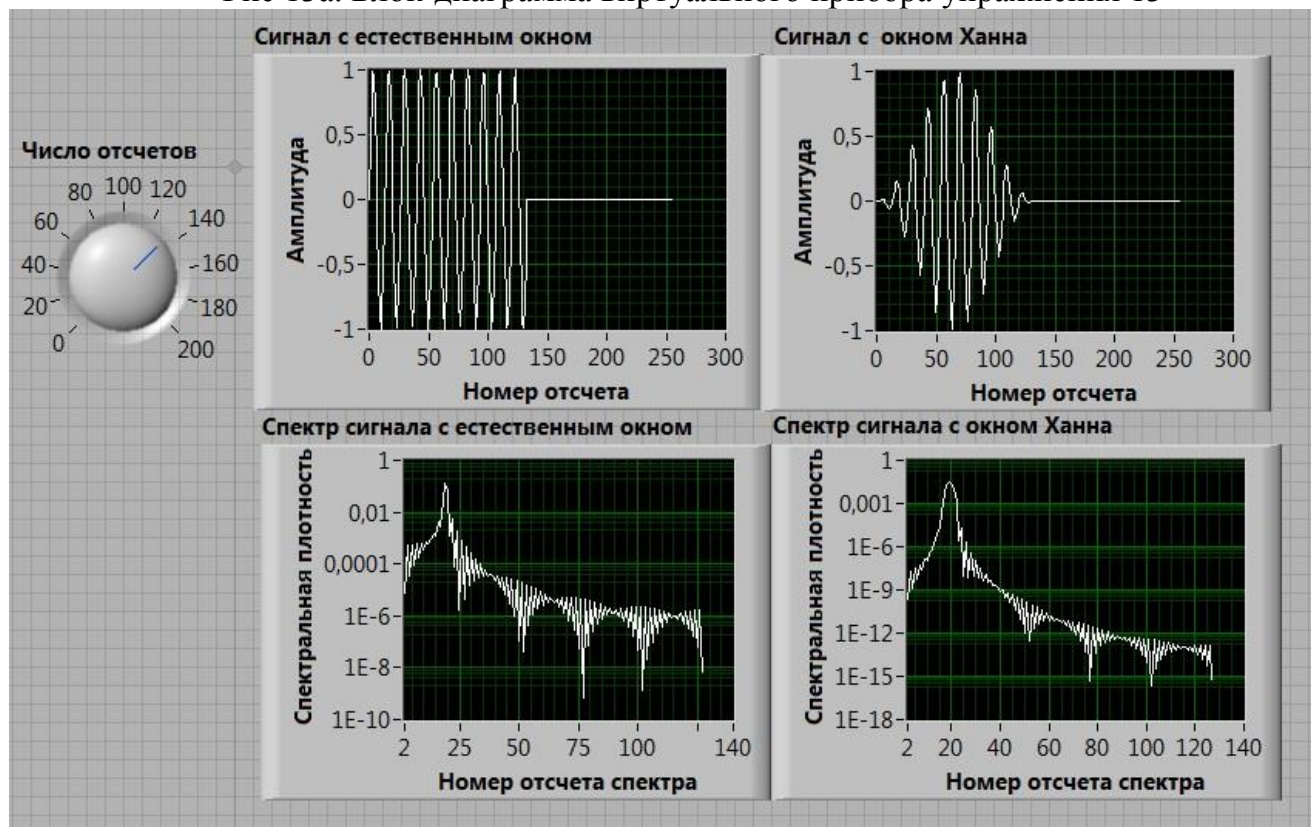


Рис 13б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 13

Соберите в LabView проект согласно Б-Д рис. 13а. Для этого разместите в окне Б-Д:

- 1) Генератор сигнала *Sine Pattern<sub>2</sub>*, у терминала *Samples* создайте элемент управления, пределы значений установите от 0 до 200, у терминала *Cycles* – константу равную 10.

- 2) Из палитры *Signal Processing-Signal Operation* выложите 2 элемента *Zero Padder*, из палитры *Signal Processing-Windows* – компонент *Hanning Winsows* (окно Ханна).
  - 3) Включите 2 элемента *Auto Power Spectrum*.
  - 4) Добавьте 4 элемента *Waveform Graph*.
- Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке 13а.

Запустите виртуальный прибор. Установите число отсчетов немногим более 128. Внимательно сравните сигналы и их спектры до и после применения весовой функции. Особенностью подприбора *Zero Padder* является дополнение нулями до числа отсчетов ближайшей степени числа два, при наших исходных данных это будет 256. Если число точек в сигнале задать от 64 до 127, то получим вдвое меньше точек в дополненном сигнале. Посмотрите, насколько меняется ширина главного лепестка при таком изменении числа отсчетов. Заметим, что само дополнение нулями не приводит к изменению ширины главного лепестка в единицах цифровой частоты. Обратите внимание, насколько снизился уровень боковых лепестков при использовании окна Ханна, а также изменилась ширина главного лепестка.

Из наблюдаемых картинок можно сделать выводы:

1. Добавление в сигнал нулевых отсчетов приводит к размазыванию спектральных пиков и появлению боковых лепестков.
2. Использование весовых функций, отличных от прямоугольной, может привести к резкому снижению уровня боковых лепестков, а также к изменению ширины, как правило, к уширению главного.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Модифицируйте виртуальный прибор так, чтобы при заданном числе отсчетов можно было добавлять произвольное число нулей. Как при этом изменится спектр сигнала и такие параметры как ширина лепестков (в единицах цифровой частоты)?
2. Измените проект так, чтобы использовать другие типы окон (треугольное, Хемминга, и т.д.). Сравните результаты.

### **Упражнение 14. Автокорреляционные функции некоторых сигналов.**

В этом упражнении мы рассмотрим, какой вид принимает автокорреляционная функция для таких сигналов как прямоугольный импульс, синусоидальный сигнал, белый гауссов шум, линейно частотно-модулируемый (ЛЧМ) сигнал.

Автокорреляционной функцией (или последовательностью в дискретном случае) для эргодического сигнала называется выражение вида [6]:

$$r_{xx}(m) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x(n+m)x^*(n). \quad (7)$$

В соотношении (7)  $x(n)$  - анализируемый процесс, \* - знак комплексного сопряжения. Для данных с конечным числом точек приходится пользоваться оценкой последовательности, лимитируя число слагаемых ряда в (7), для периодических последовательностей при вычислении ограничиваются периодом. Функция (7) будет иметь смысл количественной меры подобия сигнала и его смещенной копии, величина смещения будет задаваться значением аргумента  $m$ .

Соберите проект, части Б-Д которой отображена на рис. 14а-14г. В виду того, что фрагмент Б-Д содержит вкладки, первая показана на рис. 14а, остальные – на рис. 14 б, в, г. Итак, пошагово выполняйте действия:

- 1) Разместите блок *Case Structure*, у входного туннеля создайте элемент управления целого типа (тип сигнала на рис. 14д), добавьте еще 2 вкладки в структуру.
- 2) В первой вкладке *Case Structure* положите элемент *Pulse Pattern*, у терминала *Samples* содайте константу 128 и через туннель выведите ее за пределы CASE-структуры. Создайте еще константы 10 и 60 у терминалов *delay* и *width* соответственно.
- 3) Во второй вкладке *Case Structure* ипользуйте источник сигнала *Sine Pattern*, на терминал *Cycles* подайте константу 10.
- 4) На третьей вкладке *Case Structure* выберите в качестве источника *Gaussian White Noise*.
- 5) В четвертой кладке *Case Structure* сделайте источником *Chirp Pattern*.
- 6) Выходы сигналов всех 4-х вкладов пропустите через единый неиндексированный туннель.
- 7) Вне *Case Structure* разместите подприбор *AutoCorrelation*
- 8) Там же расположите 2 элемента *Waveform Graph*.
- 9) Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке 14а-14г, сделайте надписи на передней панели в соответствие с рис. 14д.

Запустите виртуальный прибор. Посмотрите форму автокорреляционных функций для всех типов сигналов, обратите внимание на ширину главного пика функции автокорреляции. Примеры сигналов подобраны так, что для первых двух протяженность функции автокорреляции сравнима с длительностью сигнала, а для последних двух - заметно уже. Первые сигналы относятся к классу простых, последние – сложных. Критерием деления на эти классы является величина, равная произведению длительности на ширину спектра, именуемой базой сигнала. Для простых сигналов она будет сравнима с единицей, для сложных много больше.



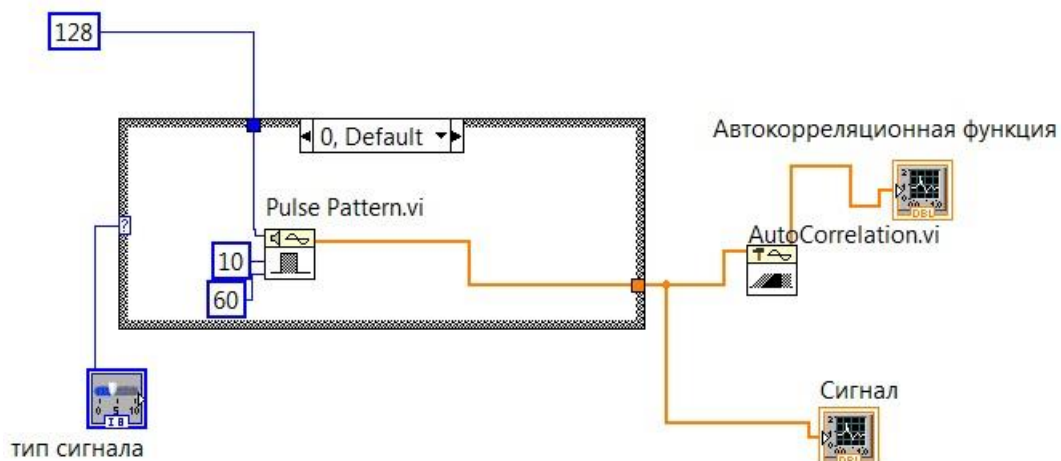


Рис 14 а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 14

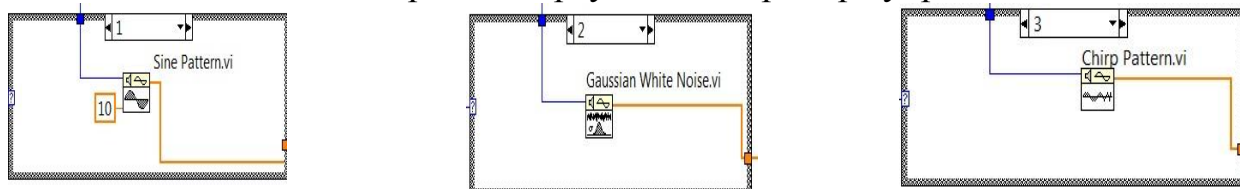


Рис 14 б, в, г. Другие окна CASE-структуры на блок-диаграмме упражнения 14

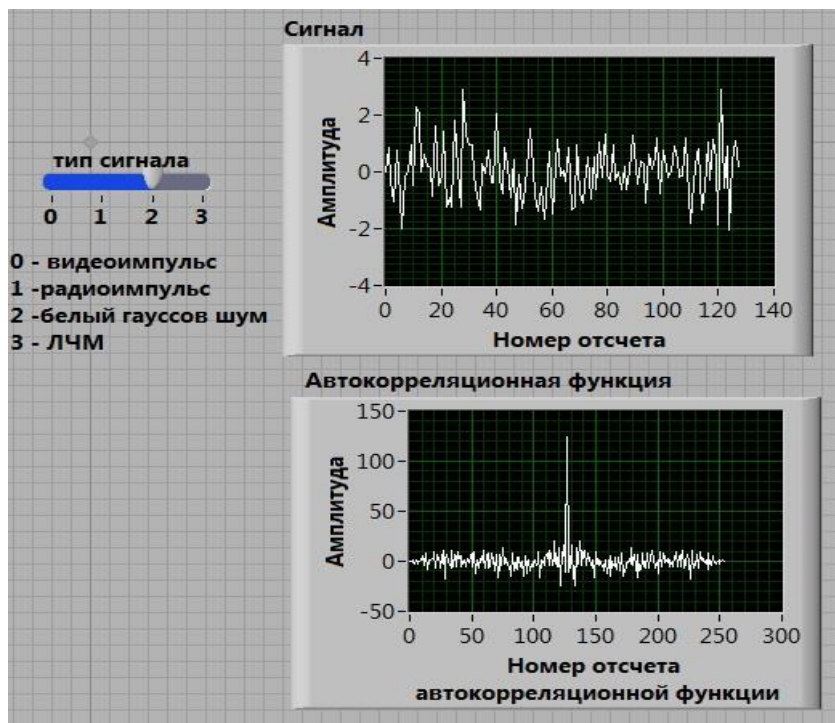


Рис 14 д. Передняя панель виртуального прибора упражнения 14

Сложные сигналы обладают рядом преимуществ, часть из которых будет раскрыта в последующих упражнениях.

Выводы по упражнению:

1. Автокорреляционная функция – важная характеристика сигнала, показывающая количественно, насколько сигнал изменяется при сдвиге.
2. Ширина пика функции автокорреляции зависит от произведения длительности сигнала на ширину его спектра - базы сигнала.
3. Для сложных сигналов (с базой заметно превосходящих единицу) можно получать узкие функции автокорреляции, т.е. небольшой сдвиг сигнала будет приводить к непохожести сигнала на самого себя.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Почему при непрерывном запуске прибора для третьего типа сигнала получается динамично меняющаяся картинка, а для остальных – нет?
2. Если увеличить число точек в сигнале, то как изменится ширина пика корреляционной функции?

### **Упражнение 15. Выделение сложного сигнала в шуме при помощи взаимнокорреляционной функции (ВКФ).**

В данном упражнении рассмотрим пример применения корреляционных свойств на практической задаче: обнаружение наличия и местоположения сложного сигнала в белом гауссовом шуме.

В этом упражнении ключевым понятием будет взаимокорреляционная функция (ВКФ) или последовательность для дискретного случая. Для эргодического сигнала таковой называется выражение вида [6]:

$$r_{xy}(m) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x(n+m)y^*(n). \quad (8)$$

В выражении (8)  $x(n)$ ,  $y(n)$  - анализируемые процессы,  $*$  - знак комплексного сопряжения. Выражение (8) будет иметь смысл количественной меры подобия первого сигнала  $x(n)$  и его смещенного второго  $y(n)$ , величина смещения будет задаваться значением аргумента  $m$ .

Соберите в LabView проект в соответствии с Б-Д рис. 15а. Для этого разместите в окне Б-Д:

- 1) Генератор сигнала *Chirp Pattern*, у терминалов *f1* и *f2* создайте элементы управления, отображенные на рис 15б как «нижняя частота» и «верхняя частота» соответственно, у терминала *Samples* - константу равную 1000.
- 2) Генератор сигнала *Gaussian White Noise*, у терминала *Samples* создайте константу равную 1000, или соедините с созданной в п. 1. У терминала *Standart Deviation* – элемент управления «стандарт отклонения» (рис 15б).
- 3) Элемент задержки  $Y[i]=X[i-n]$ , у терминала *shift* создайте элемент управления «смещение» (рис 15б).

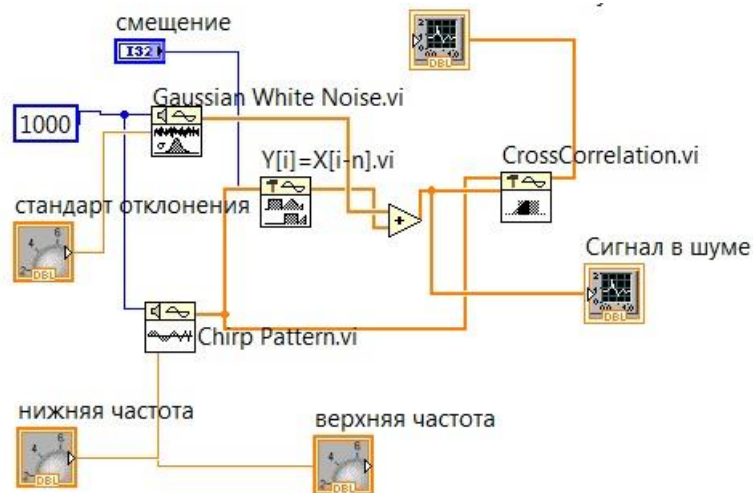


Рис 15а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 15

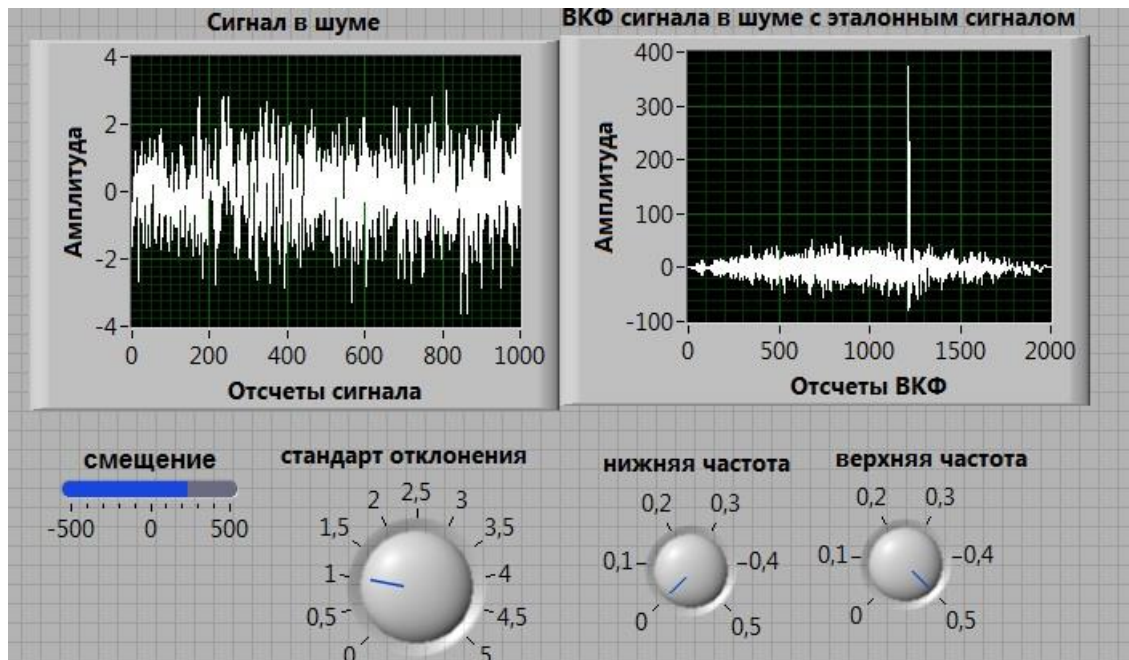


Рис 15б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 15

4) Включите 2 элемента *CrossCorrelation*.

5) Добавьте 2 элемента *Waveform Graph*.

Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке 15а.

Запустите виртуальный прибор непрерывно. Установите «стандарт отклонения» примерно на порядок меньше единицы. Двигая ползунок «сдвигение», наблюдайте положение сигнала и пика ВКФ. Сделайте выводы. Теперь расположите «стандарт отклонения» примерно на середине шкалы. Посмотрите, как изменились картинки на графиках, особое внимание обратите на различимость сигнала и ВКФ, по-прежнему управляя «сдвигением». Сформулируйте вывод. Измените «верхнюю» и «нижнюю» частоты так, чтобы они приняли близкие значения, при этом сигнал из сложного превратится в

простой. Наблюдайте изменения на графиках. Обратите внимание на ширину пика ВКФ.

Выводы по упражнению:

1. Рассмотрение ВКФ сигнала ЛЧМ и его сдвинутой копии, смешанной с аддитивным белым гауссовым шумом может позволить сделать заключение о присутствии ЛЧМ-слагаемого и величине сдвига даже при тех величинах отношения сигнал/шум, при которых сам сигнал не различим в шуме.
2. Сложные сигналы, в отличие от простых, позволяют получать ВКФ с узким пиком. Этот факт дает возможность разделять несколько близко идущих друг за другом импульсных сигналов.
3. Заметим, что вычисление корреляционной функции эквивалентно пропусканию сигнала через согласованный с ним фильтр (он же оптимальный фильтр, который максимизирует отклик в белом гауссовом шуме).

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Почему положение пика меняется при сдвиге ползунка «смещение»?
2. Исследуйте зависимость ширины пика ВКФ (на уровне половины от максимума) от ширины полосы ЛЧМ- сигнала (разница между верхней и нижней частотой).

### **Упражнение 16. Сравнение автокорреляции и свертки. Использование свертки для нахождения «зеркальных» сигналов.**

В этом упражнении рассмотрим похожую на корреляционные функции (7) и (8) функцию свертки:

$$c_{xy}(m) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x(n) y^*(m-n). \quad (9)$$

В выражении (9)  $x(n)$ ,  $y(n)$  - анализируемые процессы, \* - знак комплексного сопряжения. Если  $x(n) = y(n)$ , то речь идет об автосвертке, в противном случае - о взаимной. Формально отличие этих функций всего лишь в обращении аргумента времени у второго множителя, однако влечет значительное изменение свойств, одно из которых рассмотрим в данном упражнении: какой эффект теряется, и как это можно использовать.

Соберите в LV проект, в который включите (рис. 16а):

- 1) Генератор сигнала *Chirp Pattern*, значения параметров оставьте по умолчанию.
- 2) Компонент Reverse 1D Array из палитры Array.

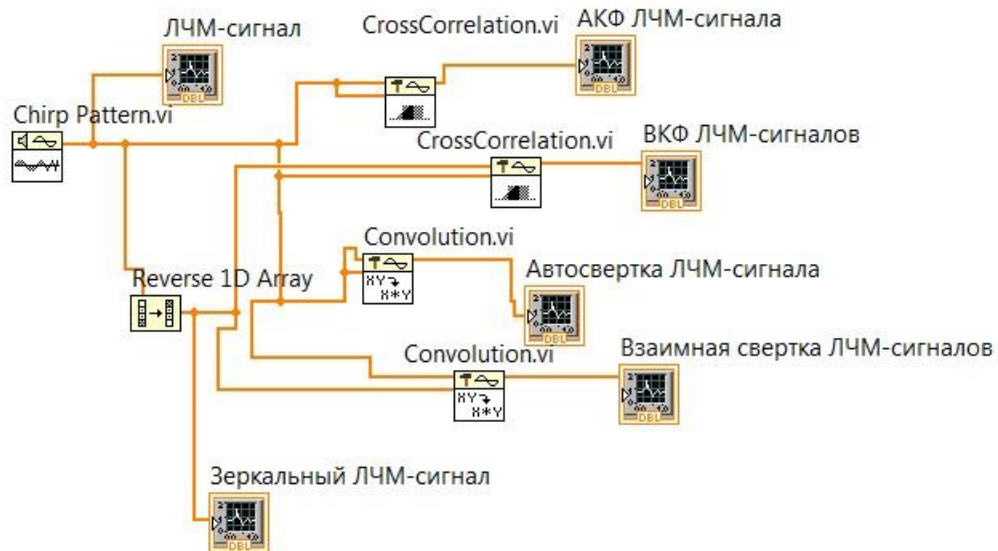


Рис 16а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 16

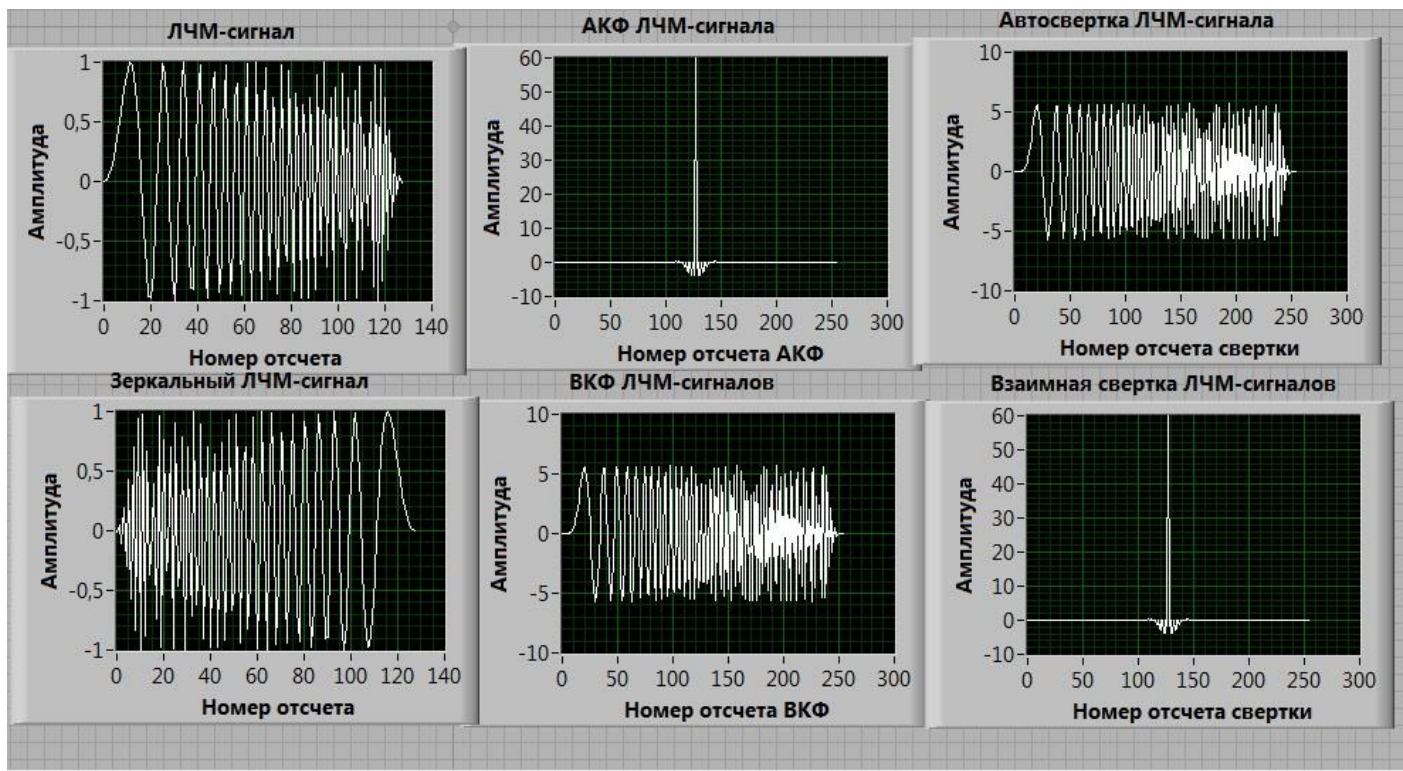


Рис 16б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 16

- 3) Два элемента *Convolution*.
- 4) Два элемента *Cross Correlation*.
- 5) Шесть компонентов *Waveform Graph*.

Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке 16а.

Запустите виртуальный прибор (рис 16б). На левом верхнем рисунке вы можете наблюдать знакомый ЛЧМ-сигнал, правее – известную АКФ такого сигнала. На самом правом верхнем рисунке изображена автосвертка такого



сигнала. Как видите, результат наблюдается другой. И замечательного свойства сужения как у корреляционной функции по сравнению с сигналом нет.

Нижний ряд графиков получен для взаимных функций. Они рассчитаны для исходного ЛЧМ сигнала и полученного из него инверсией или зеркальным отражением. ВКФ между такими сигналами, как и автосвертка не обладает желаемыми особенностями (средний график в нижнем ряду), а вот свертка оказывается подобной АКФ для ЛЧМ-сигнала (см. правый нижний график на рис. 16б).

Выводы по упражнению:

1. Свертка не обладает свойством узкого пика как АКФ для сложных сигналов.
2. Для полученных инверсией сигналов свертка может принять тот же вид, что и автокорреляционная функция для исходного сигнала.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Возможно ли получить столь же узкий пик функции свертки для простых сигналов?
2. Назовите известные Вам применения свертки.
3. Исследуйте, как влияет число отсчетов в сигнале на относительную ширину пика функции свертки. Объясните почему.

### **Упражнение 17. Особенности фильтра Баттерворта**

В этом и последующем примере рассмотрим характерные свойства наиболее популярных цифровых фильтров, встречающихся в пакетах обработки сигналов. Краткие сведения по фильтрам, которые будут рассмотрены, приведены в Таблице 1. В этом упражнении изучим особенности фильтра Баттерворта.

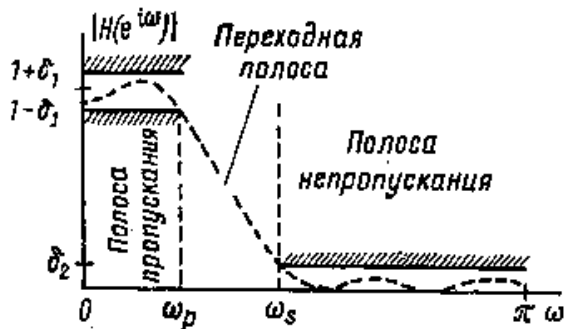


Рис 17 а. К понятию полос пропускания, не пропускания и переходной полосы

Модель БИХ фильтра	Частотные характеристики	Ширина переходной области (полосы) для указанного порядка фильтра	Требуемый порядок для удовлетворения заданным техническим требованиям
Баттерворта	Нет волнистости	Широкая	
Чебышева	Волнистость в ПП		
Инверсный Чебышева	Волнистость в ПР	Самая узкая	
Эллиптический	Волнистость в ПП и ПР		Самый низкий
Бесселя	Нет волнистости	Самая широкая	Самый высокий

Таблица 1. Сравнение популярных цифровых фильтров  
 ПП – полоса пропускания  
 ПР – полоса режекции (непропускания)

Сначала разберем понятия, встречающие в этой таблице. Их поясняет рисунок 17а. На нем изображена АЧХ для ФНЧ. От нулевой частоты до частоты  $\omega_p$  располагается полоса пропускания, в которой значение коэффициента передачи колеблется в диапазоне  $[1-\delta_1, 1+\delta_1]$ . С частоты  $\omega_s$  до  $\pi$  (напомним, что мы работаем в области цифровых частот) значения коэффициента передачи не превосходят  $\delta_2$  – это полоса непропускания (режекции). Между этими двумя полосами (интервал  $[\omega_p, \omega_s]$ ) находится переходная область. В полосах пропускания и режекции значения коэффициента передачи может колебаться. В таком случае говорят о волнистости, уровень которой определяется амплитудой колебаний. Сравнение введенных терминов для разных фильтров приведено в Таблице 1.

Для фильтров Баттерворта характерна монотонная АЧХ, Он не имеет волнистости ни в области пропускания, ни в области режекции. Благодаря отсутствию волнистости, его называют максимально плоским фильтром, у него нет нулей частотной характеристики в полосе пропускания и режекции [7].

Частотная характеристика аналогового эквивалента фильтра Баттерворта описывается выражением [8]:

$$|K_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}$$

Где  $n$  – порядок фильтра,  $\Omega_c$  – частота среза.

Соберите проект, Б-Д которого изображена на Рис. 17б. Для этого разместите в окне Б-Д следующие компоненты:

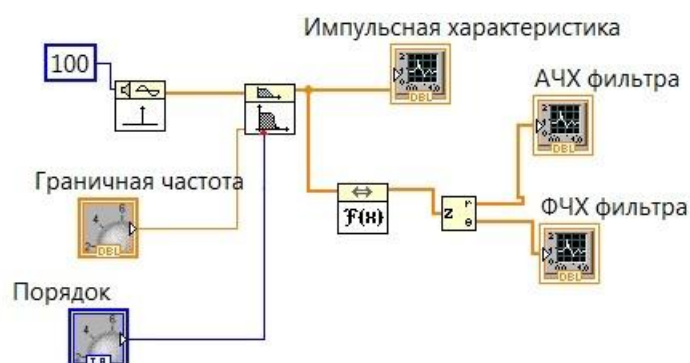


Рис 17б. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 17

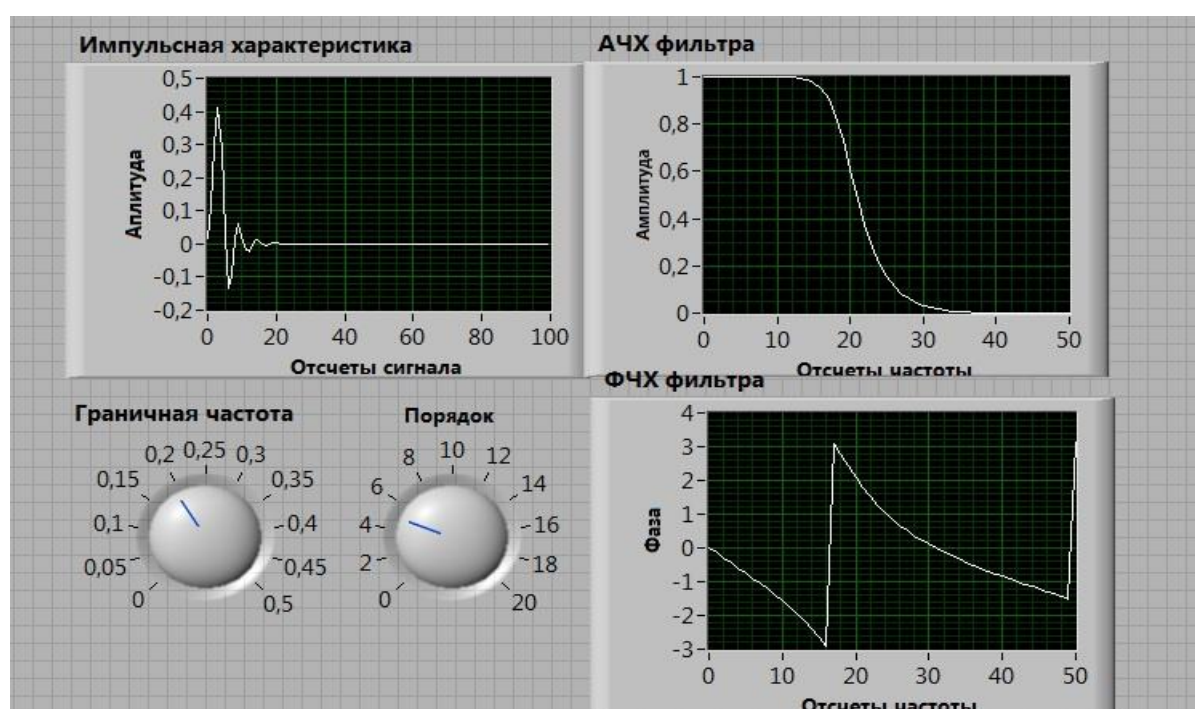


Рис 17в. Передняя панель виртуального прибора упражнения 17

- 1) *Impuls Pattern*, у входа *Samples* создайте константу равную 100.
- 2) *Butterworth* - фильтр Баттерворта, у терминалов *order* и *low cutoff freq* создайте элементы управления.
- 3) *FFT* и *Complex To Polar*.
- 4) 3 элемента *Waveform Graph*.

Измените верхнюю границу оси абсцисс на графиках АЧХ, ФЧХ со 100 на 50, тем самым мы ограничиваемся одной зоной Найквиста и отбрасываем дублирующие компоненты. Соедините элементы проводниками, как показано на рисунке 17б.

Запустите виртуальный прибор непрерывно (Рис. 17 в).. Посмотрите на графики АЧХ и ФЧХ. Вращайте элементы управления «Граничная частота»



и «порядок», наблюдайте изменения на графиках импульсной характеристики, АЧХ, ФЧХ. Сделайте выводы.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Как изменяется частота осцилляций импульсной характеристики с ростом граничной частоты и почему?
2. Как влияет порядок фильтра на момент появления отклика импульсной характеристики?
3. Как изменяется число скачков фазы (со сменой ее знака) с ростом порядка фильтра?

### **Упражнение 18. Особенности фильтра Чебышева I типа.**

В этом упражнении мы рассмотрим следующий тип фильтра из стандартного пакета – фильтр Чебышева. Фильтры Чебышева имеют меньшую переходную область, чем фильтры Баттерворта того же порядка. Однако это достоинство фильтра Чебышева получается ценой волнистости в области пропускания. Частотные характеристики фильтра Чебышева имеют эквивалентные по волнистости характеристики в области пропускания (все волны в полосе фильтра имеют одинаковую величину), монотонно спадающую характеристику в области режекции, и более крутой спад в переходной области по сравнению с фильтром Баттерворта того же порядка [7].

Квадрат частотной характеристики аналогового эквивалента фильтра Чебышева описывается выражением [8]:

$$|K_a(jx)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(x)}$$

где  $x = \Omega / \Omega_p$  - частота, нормированная к частоте среза  $\Omega_p$ , а  $T_n$  - полином Чебышева  $n$ -го порядка, по определению равный

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos(x)), & |x| \leq 1, \\ ch(n \cdot \operatorname{arcch}(x)), & |x| > 1 \end{cases}$$

$\varepsilon$  - параметр, ограничивающий амплитуду пульсаций.

Получите проект LV, Б-Д которого представлена на рис 18а. Проще всего это сделать, заменив в Б-Д предыдущего проекта один компонент: фильтр *Butterworth* на *Chebyshev*.

Запустите виртуальный прибор непрерывно (Рис. 18б).. Посмотрите на графики АЧХ и ФЧХ. Обратите внимание на немонотонность кривых. Вращайте элементы управления «Граничная частота» и «порядок», наблюдайте изменения на графиках импульсной характеристики, АЧХ, ФЧХ. Сделайте выводы.

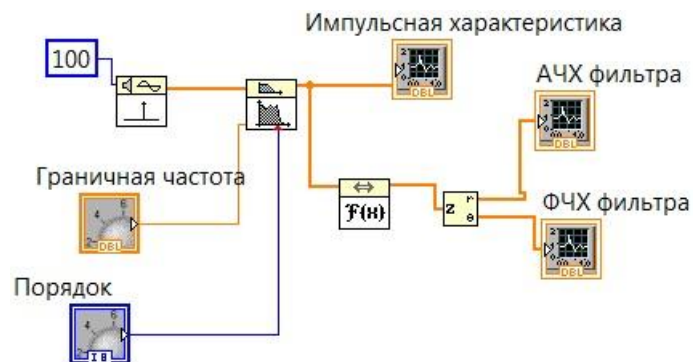


Рис 18а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 18

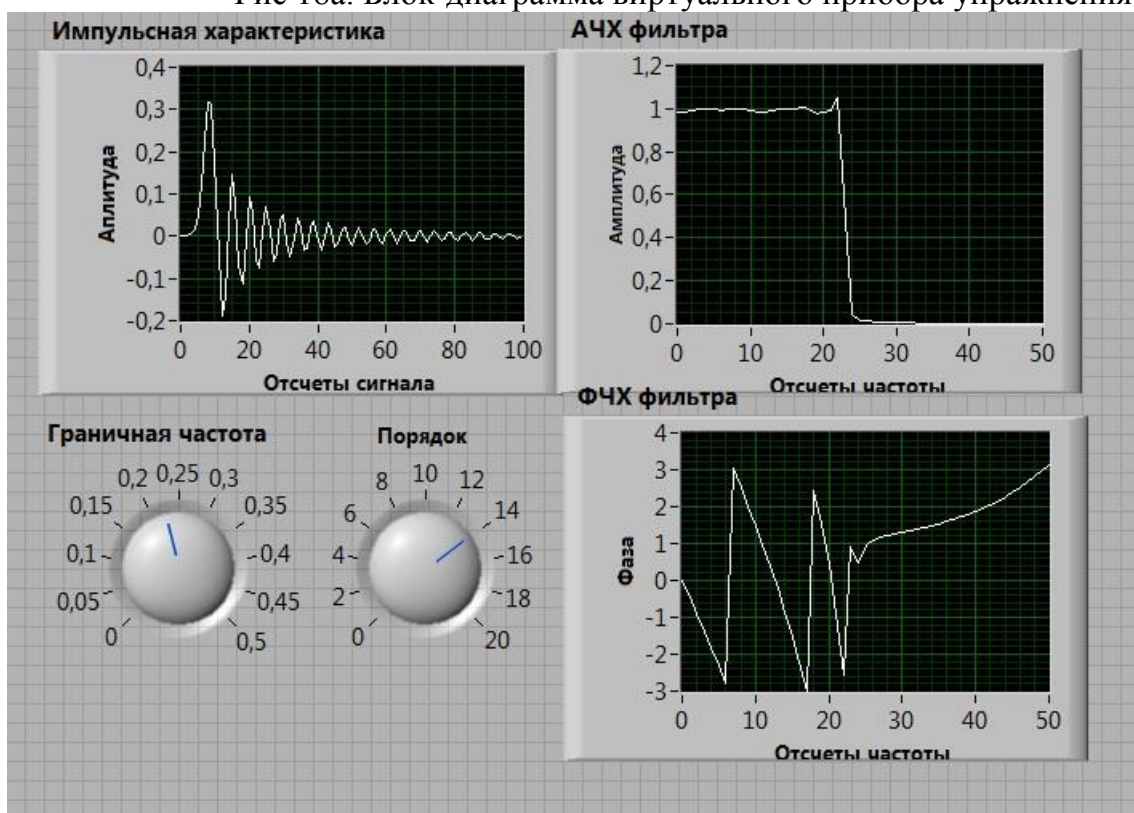


Рис 18б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 18

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Как длительность импульсной характеристики зависит от порядка фильтра и почему?
2. Найдите опытным путем те диапазоны значений полосы фильтра и порядка, при которых ФЧХ в полосе пропускания монотонна.

### **Упражнение 19. Особенности фильтра Чебышева II типа. (инверсного Чебышева)**

Рассмотрим очередной тип фильтра из стандартного пакета – инверсный фильтр Чебышева. Инверсный фильтр Чебышева или фильтр Чебышева II типа, схож с обычным фильтром Чебышева за исключением того, что он имеет волнистость в области режекции и максимально плоскую характеристику в полосе пропускания. Для данного типа фильтров вы можете указать величину ослабления (в дБ) в области режекции фильтра. Частотная характеристика фильтров Чебышева II типа имеет одинаковое по волнистости (эквиволнистое) значение в области режекции, монотонно убывающую величину отклика в области пропускания и более крутой спад, чем у фильтров Баттерворта того же порядка. Одно из преимуществ фильтров Чебышева II типа над обычными фильтрами Чебышева состоит в том, что фильтры Чебышева II типа имеют волнистость в области режекции, а не в полосе пропускания [7].

Квадрат частотной характеристики аналогового эквивалента фильтра Чебышева II типа описывается выражением [8]:

$$|K_a(jx)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [T_n(x_a)/T_n(x_a/x)]^2}$$

где  $x = \Omega/\Omega_p$  - частота, нормированная к частоте среза  $\Omega_p$ ,  $x_a$  - граничная частота полосы непропускания,  $T_n$  - полином Чебышева  $n$ -го порядка, по определению равный

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos(x)), & |x| \leq 1, \\ \cosh(n \cdot \operatorname{arcch}(x)), & |x| > 1 \end{cases}$$

$\varepsilon$  - параметр, ограничивающий амплитуду пульсаций.

Получите проект LV, Б-Д которого представлена на рис 19а. Проще всего это сделать, заменив в Б-Д предыдущего проекта один компонент: фильтр *Chebyshev* на *Inverse Chebyshev*. Измените масштаб оси ординат графика АЧХ с линейного на логарифмический.

Запустите виртуальный прибор непрерывно (Рис. 19б). Посмотрите на графики АЧХ и ФЧХ. Обратите внимание на немонотонность кривых. Вращайте элементы управления «Граничная частота» и «порядок», наблюдайте изменения на графиках импульсной характеристики, АЧХ, ФЧХ. Сделайте выводы.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Найдите опытным путем те диапазоны значений полосы фильтра и порядка, при которых ФЧХ в полосе пропускания монотонна. Сравните с фильтром Чебышева I типа.

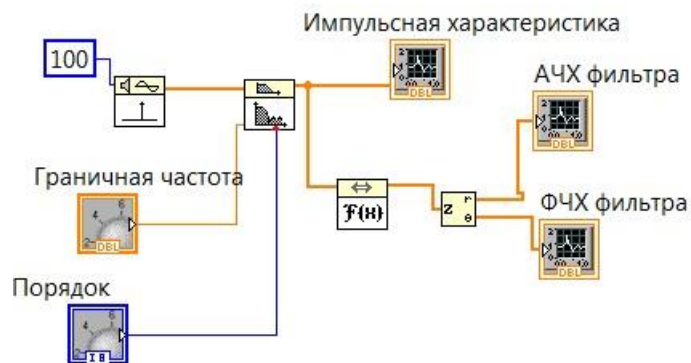


Рис 19а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 19

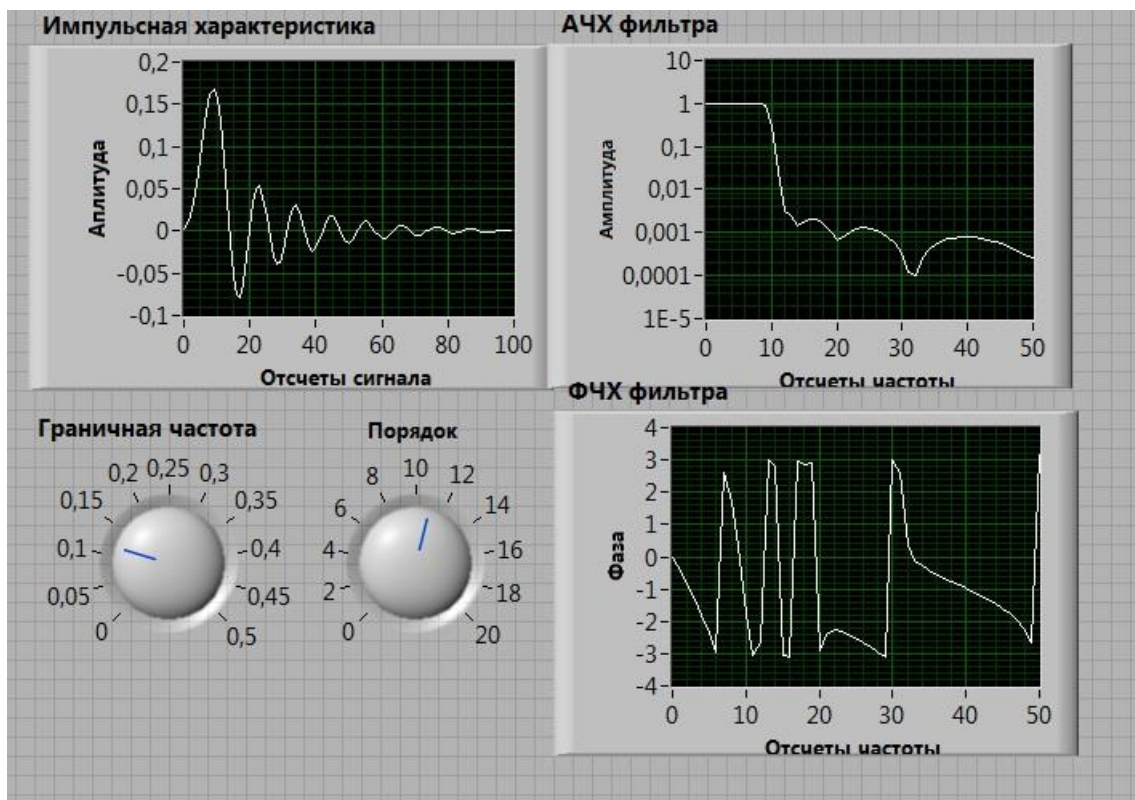


Рис 19б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 19

## **Упражнение 20. Особенности эллиптических фильтров**

Рассмотрим еще один из популярных типов фильтров – эллиптического типа. Эллиптические фильтры распределяют волнистость между областью пропускания и областью режекции. Частотную характеристику эллиптических фильтров характеризует эквиволнистость (равноволнистость) полосы пропускания и режекции. По сравнению с фильтрами Баттерворта и Чебышева того же порядка, эллиптические фильтры обеспечивают самую крутую переходную область между ПП и ПР. Вследствие этого эллиптические фильтры довольно популярны в тех приложениях, где требуется небольшая переходная область и допускается

волнистость. Можно отметить резкий край переходной области эллиптических фильтров даже низкого порядка. Для эллиптических фильтров, как правило, вы можете указать величину волнистости (в дБ) в полосе пропускания, а так же величину ослабления (в дБ) в полосе режекции [7].

Квадрат частотной характеристики аналогового эквивалента эллиптического фильтра описывается выражением [8]:

$$|K_a(jx)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(x, x_a)}$$

где  $x = \Omega / \Omega_p$  - частота, нормированная к частоте среза,

$x_a$  - граничная частота полосы непропускания,

$\varepsilon$  - параметр, ограничивающий амплитуду пульсаций,

$R(x, x_a)$  - эллиптическая функция Якоби.

На Рис. 20 а представлен типичный вид графиков функций

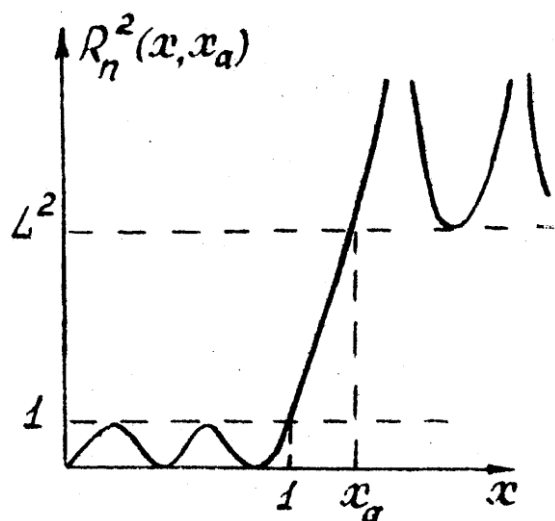


Рис. 20 а. Типичный вид функций Якоби

Получите проект LV, Б-Д которого представлена на рис 20б. Проще всего это сделать, заменив в Б-Д предыдущего проекта один компонент: фильтр *Inverse Chebyshev* на *Elliptic*.

Запустите виртуальный прибор непрерывно (Рис. 20 б). Посмотрите на графики АЧХ и ФЧХ. Обратите внимание на немонотонность кривых. Вращайте элементы управления «Граничная частота» и «порядок», наблюдайте изменения на графиках импульсной характеристики, АЧХ, ФЧХ. Сделайте выводы.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Как обычно ведет себя ФЧХ в переходной области?
2. Найдите опытным путем те диапазоны частот, в которых ФЧХ близка к линейной.

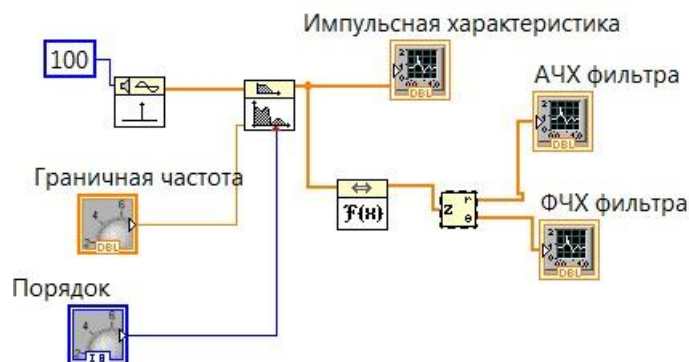


Рис 20 б. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 20

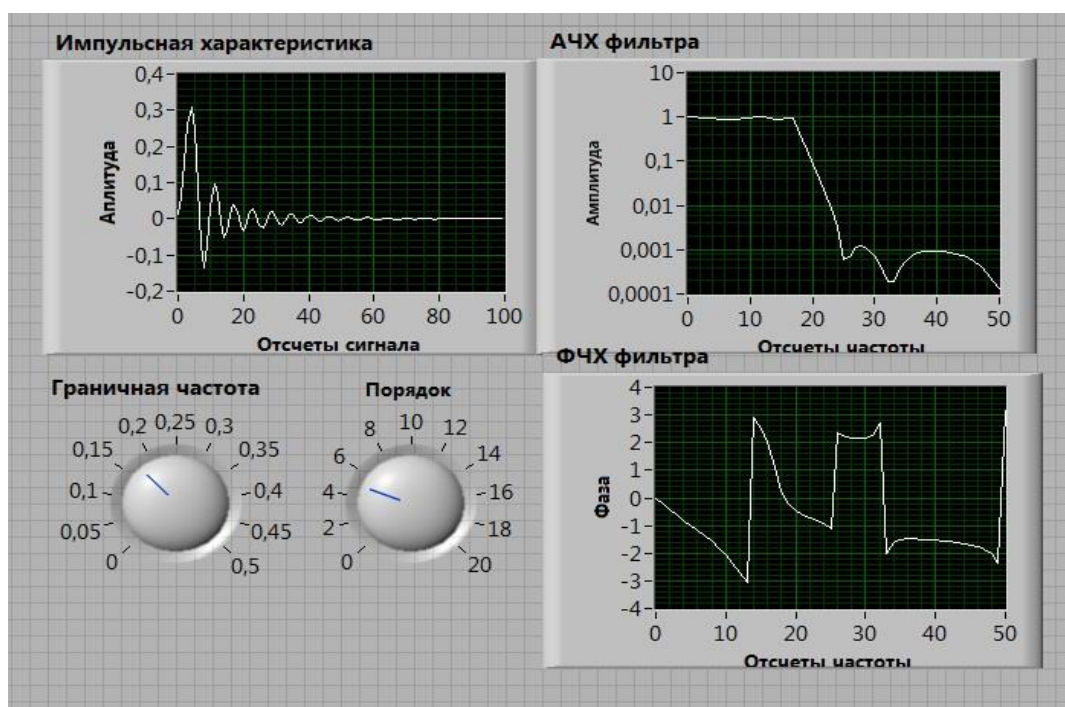


Рис 20в. Передняя панель виртуального прибора упражнения 20

## Упражнение 21. Особенности фильтра Бесселя

Теперь рассмотрим еще один тип фильтров из стандартного набора – фильтр Бесселя. Как и фильтр Баттерворта, фильтр Бесселя обладает монотонной АЧХ и в полосе пропускания, и в полосе режекции. С тем же самым порядком фильтр Бесселя имеет гораздо большее ослабление в полосе режекции, чем фильтр Баттерворта. По сравнению с другими фильтрами того же порядка фильтр Бесселя имеет самую широкую переходную область. Главным преимуществом фильтра Бесселя является практически идеальная линейность фазово-частотной характеристики в полосе пропускания [7]. Фильтр нижних частот Бесселя  $n$ -го порядка характеризуется передаточной функцией



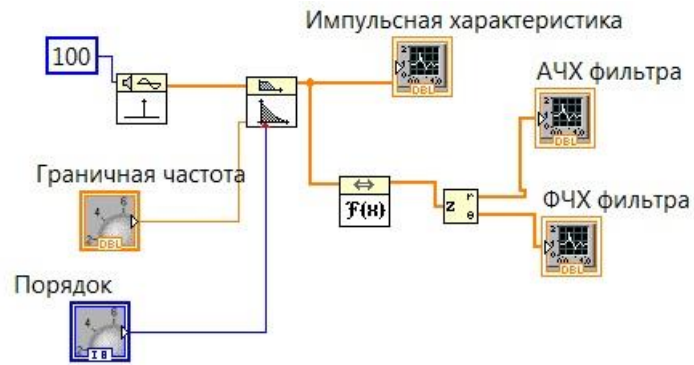


Рис 21а. Блок-диаграмма виртуального прибора упражнения 21

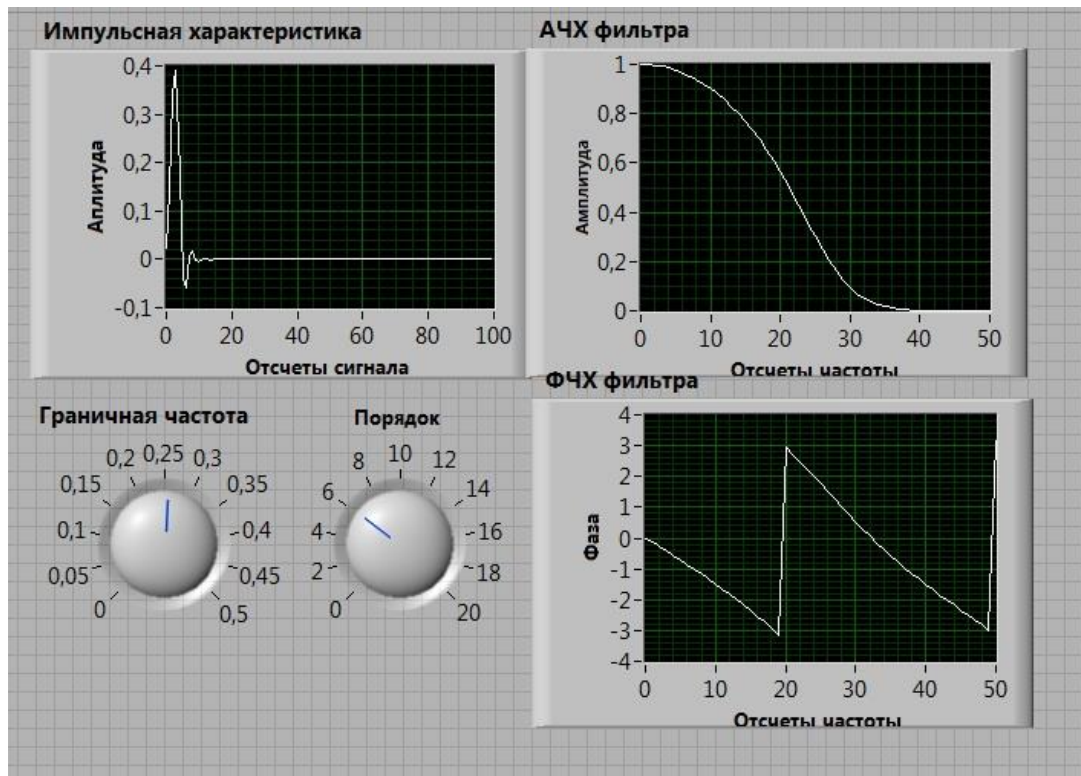


Рис 21б. Передняя панель виртуального прибора упражнения 21

$H(s) = \frac{\kappa}{\hat{B}_n(s)}$ ;  $\hat{B}_n(s)$  - полином Бесселя  $n$ -ой степени и  $\kappa = \hat{B}_n(0)$ ,

$$\hat{B}_1(s) = s + 1,$$

$$\hat{B}_2(s) = s^2 + 3s + 3$$

Полином Бесселя  $n$ -ой степени можно найти с помощью рекуррентной формулы [8]:

$$\hat{B}_n(s) = (2n - 1)\hat{B}_{n-1}(s) + s^2\hat{B}_{n-2}(s)$$



Получите проект LV, Б-Д которого представлена на рис 21 а. Проще всего это сделать, заменив в Б-Д предыдущего проекта один компонент: фильтр *Elliptic* на *Bessel*. Измените масштаб оси ординат графика АЧХ с логарифмического на линейный.

Запустите виртуальный прибор непрерывно (Рис. 21 б). Посмотрите на графики АЧХ и ФЧХ. Обратите внимание на поведение ФЧХ в полосе пропускания. Вращайте элементы управления «Граничная частота» и «порядок», наблюдайте изменения на графиках импульсной характеристики, АЧХ, ФЧХ. Сделайте выводы.

### **Вопросы для самостоятельной проработки**

1. Какой вид принимает ФЧХ в переходной области и полосе режекции, на что сказывается ее нелинейность?
2. Найдите опытным путем при каких значениях граничной частоты и порядка возможны линейные участки ФЧХ в переходной области.

### **Заключение.**

На этом рассмотрение фильтров заканчивается. Далее предлагаем вам поупражняться в построении фильтров согласно заданиям и ответить на контрольные вопросы.

## **2. Задания для самостоятельной работы.**

Ниже приведены варианты заданий для самостоятельного выполнения студентами. Предлагается сделать виртуальный прибор в LabView, показать его преподавателю, приготовить отчет по работе, который включает графики: импульсной и частотной характеристик, тестового сигнала и его спектра на входе и выходе фильтра, выводы по результатам работы. Обратите внимание, что оси абсцисс для АЧХ и ФЧХ должны быть в цифровых частотах.

### **Вариант 1**

Построить цифровой фильтр нижних частот с частотой среза 0.15 и монотонной амплитудно-частотной характеристикой в полосе пропускания. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

### **Вариант 2**

Построить цифровой фильтр верхних частот с частотой среза 0.25 и монотонной амплитудно-частотной характеристикой в полосе пропускания. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

### **Вариант 3**

Построить полосно-пропускающий цифровой фильтр с границами полосы пропускания [0.15 0.25] и монотонной амплитудно-частотной характеристикой. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

### **Вариант 4**

Построить полосно-запирающий цифровой фильтр с границами полос пропускания [0.2 0.35]. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

### **Вариант 5**

Построить цифровой фильтр нижних частот с частотой среза 0.25 и монотонной амплитудно-частотной характеристикой вне полосы пропускания. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

### **Вариант 6**

Построить цифровой фильтр верхних частот с частотой среза 0.15 и монотонной амплитудно-частотной характеристикой вне полосы пропускания. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

### **Вариант 7**

Построить полосно-пропускающий цифровой фильтр с границами полосы пропускания  $[0.15 \ 0.35]$ . Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

### **Вариант 8**

Построить полосно-запирающий цифровой фильтр с границами полос пропускания  $[0.1 \ 0.3]$ . Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

### **Вариант 9**

Построить цифровой фильтр нижних частот с частотой среза 0.1 и монотонной амплитудно-частотной характеристикой во всем диапазоне частот. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

### **Вариант 10**

Построить цифровой фильтр верхних частот с частотой среза 0.3 и монотонной амплитудно-частотной характеристикой во всем диапазоне частот. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

### **Вариант 11**

Построить полосно-пропускающий цифровой фильтр с границами полосы пропускания  $[0.15 \ 0.45]$  и монотонной амплитудно-частотной характеристикой во всем диапазоне частот. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

### **Вариант 12**

Построить полосно-запирающий цифровой фильтр с границами полос пропускания  $[0.2 \ 0.4]$  и монотонной амплитудно-частотной характеристикой во всем диапазоне частот. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

### **Вариант 13**

Построить гребенчатый полосно-пропускающий цифровой фильтр с границами полос пропускания  $[0.1 \ 0.2]$  и  $[0.3 \ 0.4]$ . Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

#### **Вариант 14**

Построить гребенчатый полосно-запирающий цифровой фильтр с границами полос не пропускания  $[0.1 \ 0.2]$  и  $[0.3 \ 0.4]$ . Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

#### **Вариант 15**

Построить цифровой фильтр нижних частот с частотой среза 0.2 и линейной фазо-частотной характеристикой в полосе пропускания. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

#### **Вариант 16**

Построить цифровой фильтр верхних частот с частотой среза 0.3 и линейной фазо-частотной характеристикой в полосе пропускания. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

#### **Вариант 17**

Построить полосно-пропускающий цифровой фильтр с границами полосы пропускания  $[0.15 \ 0.3]$ , подавлением вне полосы не менее 20Дб. и линейной фазо-частотной характеристикой в полосе пропускания. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

#### **Вариант 18**

Построить полосно-запирающий цифровой фильтр с границами полос пропускания  $[0.1 \ 0.35]$ , подавлением в полосе записания не менее 20Дб и линейной фазо-частотной характеристикой в полосе пропускания.. Изобразить частотную и импульсную характеристики фильтра. Продемонстрировать работу фильтра на примере полигармонического сигнала.

#### **Вариант 19**

Смоделировать работу оптимального фильтра для ЛЧМ-сигнала в полосе  $[0.1 \ 0.3]$ . Изобразить выходной сигнал, частотную и импульсную характеристики фильтра.

#### **Вариант 20**

Смоделировать работу оптимального фильтра для ЛЧМ-сигнала в полосе  $[0.2 \ 0.35]$ . Изобразить выходной сигнал, частотную и импульсную характеристики фильтра.

### 3. Контрольные вопросы

1. Расскажите суть теоремы Котельникова
2. Что такое цифровая частота? В каких единицах измеряется? В каком диапазоне может принимать значения?
3. Чем отличаются амплитудный и энергетический спектры?
4. Что такое импульсная характеристика ?
5. Что называют частотной характеристикой, как она связана с импульсной?
6. Какие фильтры называют БИХ, а какие – КИХ?
7. Какие фильтры могут быть неустойчивыми? Как с этим бороться?
8. Что такое АКФ и ВКФ?
9. В чем отличие свертки от корреляционной функции?
10. Для каких сигналов длительность АКФ много меньше самого сигнала?
11. Какими особенностями обладает частотная характеристика фильтра Баттерворта?
12. Какими особенностями обладает частотная характеристика фильтра Чебышева?
13. Какими особенностями обладает частотная характеристика инверсного фильтра Чебышева?
14. Какими особенностями обладает частотная характеристика эллиптического фильтра?
15. Какими особенностями обладает частотная характеристика фильтра Бесселя?

## Список литературы

1. Кривошеев В.И. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие. – Н.Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2006.
2. Тревис Дж. LabVIEW для всех. М.:ДМК Пресс, ПриборКомплект, 2005 – 544 с.
3. Лупов С.Ю., Муякшин С.И., Шарков В.В. LabVIEW в примерах и задачах. Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «Обучение технологиямNational Instruments». Нижний Новгород, 2007, 101 с.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов. СПб., Питер, 2002. 608 с.
5. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: М., Высшая школа, 2000. 462 с.
6. Марпл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М., Мир, 1990. 548 с.
7. Федосов В.П. Цифровая обработка сигналов в LabVIEW: учеб. Пособие. М. : ДМК Пресс, 2009. — 456 с.
8. Лем Г. Аналоговые фильтры. Расчет или реализация. М.: Мир, 1982. 302 с.



## **Содержание**

Введение.	3
1. Обучающие примеры	3
Упражнение 1.	4
Упражнение 2.	6
Упражнение 3.	7
Упражнение 4.	9
Упражнение 5.	12
Упражнение 6.	14
Упражнение 7.	16
Упражнение 8.	18
Упражнение 9.	20
Упражнение 10.	22
Упражнение 11.	25
Упражнение 12.	27
Упражнение 13.	29
Упражнение 14.	31
Упражнение 15.	34
Упражнение 16.	36
Упражнение 17.	38
Упражнение 18.	41
Упражнение 19.	43
Упражнение 20.	44
Упражнение 21.	46
Заключение	48
2. Задания для самостоятельной работы	49
3. Контрольные вопросы	52
Список литературы	53
Содержание	54

Игорь Павлович **Ястребов**

**ПРИМЕРЫ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ  
СИГНАЛОВ**

*Методическое пособие*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования «Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. . Уч-изд. л.  
Заказ № . Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета  
им. Н.И. Лобачевского  
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37