



Étude spectrale des réseaux de neurones aléatoires

Mémoire

Jeson Hermans

Maîtrise en physique - avec mémoire
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

Étude spectrale des réseaux de neurones aléatoires

Mémoire

Jeson Hermans

Sous la direction de:

Antoine Allard, directeur de recherche
Patrick Desrosiers, codirecteur de recherche

Résumé

Le but de la science des réseaux est de modéliser les systèmes complexes et d'expliquer leurs propriétés émergentes, telles que la propagation d'épidémies ou la formation de la mémoire dans le cerveau. Cependant, ces systèmes complexes peuvent parfois atteindre des tailles immenses, rendant leur étude difficile. La théorie spectrale des graphes est un outil majeur dans l'étude de tels réseaux, car les valeurs propres d'un réseau sont relativement faciles à calculer en plus de nous renseigner sur sa structure globale et sa dynamique à grande échelle.

L'objectif de ce projet de maîtrise était d'analyser l'effet de propriétés structurelles, souvent négligées, présentes dans les réseaux de neurones sur le spectre des graphes qui leur sont associés. Plus spécifiquement, les propriétés étudiées sont la directionnalité, l'inhibition, le principe de Dale et la densité. Pour cela, différentes techniques de théorie des graphes ont été utilisées afin de créer des graphes aléatoires respectant les propriétés étudiées. Ensuite, une analyse spectrale approfondie de ces graphes aléatoires a été réalisée afin de déterminer l'effet des propriétés structurelles des réseaux de neurones sur leur spectre. On a d'abord abordé le problème à l'aide des théories mathématiques existantes, mais les calculs analytiques se sont avérés ardu斯 et moins instructifs que prévu. Afin de combler ces lacunes, une analyse numérique a été réalisée. L'effet majeur provoqué par les propriétés structurelles étudiées est la présence d'une transition dans le spectre. La distribution de la valeur propre ayant la plus grande norme passe d'une distribution réelle à une distribution complexe pour ensuite revenir à une distribution réelle en fonction de la fraction d'inhibiteurs dans le réseau. La distribution changeante de la valeur propre dominante a alors été caractérisée numériquement, ce qui a permis l'identification et l'analyse de nombreuses autres propriétés empiriques. La transition dans le spectre, étant particulièrement significative dans les réseaux de taille finie, a donc une grande influence sur le comportement des réseaux de neurones et est directement influencée par les propriétés structurelles introduites.

Abstract

The goal of network science is to model complex systems and explain their emergent properties, such as epidemic spreading or memory formation in the brain. However, these complex systems can sometimes reach immense sizes, making their study challenging. Graph spectral theory is a significant tool in the investigation of such networks, as the eigenvalues of a network are relatively easy to compute and provide insights into its overall structure and large-scale dynamics.

The objective of this master's project was to analyze the effect of often overlooked structural properties present in neural networks on the spectrum of the associated graphs. More specifically, the studied properties include directionality, inhibition, Dale's principle, and density. To achieve this, various graph theory techniques were employed to generate random graphs that adhere to the studied properties. Subsequently, an in-depth spectral analysis of these random graphs was conducted to determine the impact of the structural properties of neural networks on their spectrum. Initially, the problem was approached using existing mathematical theories, but the analytical calculations proved to be challenging and less informative than anticipated. To address these gaps, a numerical analysis was performed. The major effect induced by the studied structural properties is the presence of a transition in the spectrum. The distribution of the eigenvalue with the largest norm transitions from a real distribution to a complex distribution, and then returns to a real distribution based on the fraction of inhibitors in the network. The changing distribution of the dominant eigenvalue was numerically characterized, which enabled the empirical observation and analysis of many other properties. The spectrum transition, particularly significant in networks of finite size, thus has a substantial influence on the behavior of neural networks and is directly influenced by the introduced structural properties.

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Table des matières	iv
Liste des figures	v
Remerciements	vi
Avant-propos	vii
Introduction	1
1 Théorie préliminaire	4
1.1 Système complexe	5
1.2 Graphes et leur structure	5
1.3 L'analyse spectrale des graphes	17
1.4 Réseaux de neurones et leurs propriétés	24
2 Incidence de la loi de Dale et de la densité de connexion sur le spectre des réseaux neuronaux aléatoires	31
2.1 Résumé	32
2.2 Abstract	32
2.3 Introduction	33
2.4 Random neural network models	35
2.5 Asymptotic spectral properties	38
2.6 Numerical analysis	42
2.7 Conclusion	50
Conclusion	52
A Modèles supplémentaires	55
A.1 Généralisation du modèle de configuration de Chung-Lu	55
A.2 Le modèle stochastique par bloc appliqué aux réseaux neuronaux avec inhibition	58
Bibliographie	60

Liste des figures

1.1	Un graphe représentant un réseau d'amitié au sein d'une petite salle de classe.	6
1.2	Un graphe représentant l'intérêt romantique dans un groupe d'amis.	7
1.3	Représentation de la connexion biologique entre deux neurones.	26
1.4	Système simple de 2 noeuds excitateurs et 1 noeud inhibiteur.	28
2.1	Empirical spectra of the DCM (left) and DIM (right) in sparse (top) and dense (bottom) regimes.	43
2.2	Empirical spectra near the asymptotic critical points in a) the DCM and b) the DIM.	44
2.3	The spectrum after the transition for the DCM on the left (a)) and the DIM on the right (b)).	44
2.4	Fraction of non-real dominant eigenvalues (FNRE) as a function of the fraction of inhibitory connections.	45
2.5	Empirical distribution of the dominant eigenvalues for the DCM (blue) and the DIM (red).	47
2.6	The parameters of the GEV fit made on the distribution of the dominant eigenvalue for the DCM are shown on the left, while those for the DIM are shown on the right.	47
2.7	Bulk distribution in polar coordinates for which we modified $\phi = \theta + 2\pi$ for the DCM (left) and the DIM (right) for multiple systems sizes.	48
2.8	Empirical distribution of the second dominant eigenvalues for the DCM (blue) and the DIM (red)	49
2.9	The GEV fit parameters made on the distribution of the second dominant eigenvalue for the DCM are shown on the left, while those for the DIM are shown on the right.	50

Remerciements

Premièrement, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers toutes les personnes ayant contribué à la réalisation de ce mémoire. Sans le soutien et l'aide apportés par de nombreuses personnes, le cheminement accompli jusqu'à maintenant n'aurait pas été possible.

Ma plus grande gratitude et mon respect vont bien sûr à mon directeur de recherche, Antoine Allard, et à mon co-directeur de recherche, Patrick Desrosiers, pour m'avoir accueilli au sein du groupe Dynamica, où j'ai pu m'épanouir dans le domaine de la recherche et en apprendre davantage sur la science interdisciplinaire qu'est la science des réseaux. Je les remercie également pour leurs conseils pendant ma maîtrise et pour leur expertise dans le cadre de mes recherches. Je remercie également le groupe Dynamica, un groupe engagé et dynamique où il est agréable de mener des recherches.

Je tiens également à souligner la générosité des organismes CRSNG et FRQNT pour avoir soutenu financièrement mon projet de recherche. Leurs investissements ont joué un rôle essentiel dans la réalisation de ce projet.

À ma famille et à mes amis, merci de votre soutien continu dans mes projets et de votre aide dans les difficultés rencontrées. Votre grand cœur et votre présence dans ma vie ont rendu la réalisation de ce mémoire possible. Les rencontres hebdomadaires avec mes amis au Café Fou tout au long de ma maîtrise m'ont permis d'y voir plus clair dans les moments d'incertitude et m'ont apporté une joie quotidienne dans cet environnement universitaire dynamique.

Je tiens également à faire une mention spéciale à ma copine, Emilie Alexander, qui m'a continuellement soutenu et aidé tant dans les bons moments que dans les moments difficiles. Ses encouragements constants et son aide quotidienne, ainsi que sa relecture attentive de certaines parties de ce mémoire, ont été plus qu'appréciés tout au long de mon parcours.

En résumé, chaque personne mentionnée ici a contribué de manière significative à la réalisation de ma maîtrise, et je suis certain d'en oublier certains. Si c'est le cas, sachez que vous êtes tous présents dans mes pensées à l'occasion de la remise de ce mémoire. Le soutien que j'ai pu recevoir au cours de ma maîtrise est un cadeau inestimable, et je vous en suis à tous profondément reconnaissant.

Avant-propos

L'objectif principal de mon projet de maîtrise était de déterminer les propriétés spectrales des réseaux de neurones et d'étudier l'influence des propriétés structurelles des réseaux de neurones sur leurs spectres. La réalisation de cet objectif a conduit à des développements mathématiques et numériques sur le sujet qui n'avaient pas encore été bien étudiés dans la littérature. Ces développements ont alors abouti à la rédaction de l'article présenté au chapitre 2 de ce mémoire.

J'ai été le premier auteur de cet article. Patrick Desrosiers est coauteur de l'article. Les développements réalisés au cours de ces recherches ont majoritairement été effectués par moi sous les conseils avisés de Patrick Desrosiers, particulièrement en ce qui concerne la théorie spectrale des graphes et l'étude asymptotique du spectre des matrices aléatoires. Les modèles ont été développés par moi et les figures issues des simulations réalisées en langage Python ont également toutes été développées par moi. Par la suite, les modèles et la rédaction des sections de l'article ont d'abord été effectués par moi-même, puis ont été complétés et peaufinés par le second auteur. L'article n'a pas encore été soumis, mais il est prévu de le soumettre au cours de la session d'hiver 2024.

Introduction

À la fin du 20^e siècle, la science des réseaux complexes s'est popularisée au sein de la communauté scientifique. Celle-ci s'est avérée être le nouveau cadre théorique idéal pour étudier les systèmes complexes [1]. Ce tournant a été possible grâce à l'arrivée d'ordinateurs plus puissants, permettant la collecte et l'analyse massive de données [2]. Avec un engouement croissant pour cette science et les possibilités qu'elle offre, une discipline mathématique, la théorie des graphes, s'est vue attribuer une place importante pour représenter et analyser les réseaux complexes. La théorie des graphes, qui possédait déjà de nombreux théorèmes, a rapidement permis d'analyser les systèmes complexes sous un nouveau jour. Parmi les innombrables applications de la théorie des graphes pour analyser les réseaux complexes, la théorie des graphes aléatoires suscita un grand intérêt au sein de la communauté scientifique, car elle permit d'étudier les réseaux réels de manière inédite. Les travaux de P. Erdős et A. Rényi [3, 4], ainsi que ceux d'E. Gilbert [5] dans les années 1950, ont été les premiers piliers fondateurs dans l'étude plus approfondie des systèmes complexes, car ils introduisirent un des premiers graphes aléatoires. Cependant, la communauté scientifique s'est rapidement rendue compte que les modèles de graphes aléatoires existants ne permettaient pas d'exprimer correctement plusieurs propriétés fondamentales des réseaux réels. Cela engendra une nouvelle vague de recherche en théorie des graphes aléatoires. Durant cette vague, les travaux de Watts-Strogatz [6] et Barabási-Albert [7], qui intègrent certaines propriétés fondamentales des réseaux réels aux graphes aléatoires, marquèrent un nouveau tournant dans la science des réseaux. Ces travaux permirent à la science des réseaux de se faire une place définitive au sein de la communauté scientifique.

La théorie des graphes a engendré l'émergence d'une autre théorie sous-jacente tout aussi fascinante, la théorie spectrale des graphes. Ensemble, elles permettent d'analyser et de comprendre les propriétés des réseaux complexes par l'intermédiaire de l'étude des valeurs propres et des vecteurs propres associés aux matrices décrivant les graphes. En utilisant la théorie spectrale des graphes sur des graphes aléatoires, nous pouvons analyser la distribution des valeurs propres et vecteurs propres des matrices aléatoires qui leur sont associées. L'analyse spectrale de ces matrices nous fournit des informations précieuses sur leur structure et leur comportement. Plus particulièrement, l'étude des valeurs propres d'un graphe, telles que leur répartition dans le spectre, leur comportement aux limites ou encore les écarts entre les valeurs propres, permet de tirer de nombreuses informations sur celui-ci. Parmi ces informations on

a des indications sur la connectivité du réseau, la présence de sous-structures et la résilience du système. De plus, l'analyse spectrale permet de détecter des modes d'activité synchronisée ou désynchronisée, des transitions de phase et d'autres phénomènes dynamiques importants. L'étude des graphes aléatoires revêt une importance capitale dans l'étude des réseaux réels, tels que les réseaux sociaux, biologiques ou informatiques. En effet, lorsqu'on analyse les réseaux réels, on peut en retirer des informations capitales sur leurs structures et ainsi les utiliser pour la création de graphes aléatoires, ce qui permet de faire une analyse plus simple et en profondeur des propriétés émergentes d'un réseau réel.

En se basant sur ces théories, de nombreux réseaux ont été analysés, tels que les réseaux de transmission de maladies, le réseau Internet, les réseaux décrivant des écosystèmes et l'un des réseaux complexes les plus difficiles à analyser, le cerveau. Dans cette optique, mon projet vise à déterminer l'influence des propriétés structurelles des réseaux de neurones sur le spectre des matrices qui les décrivent. Cette analyse spectrale peut, par la suite, permettre d'étudier le comportement de la dynamique, la structure et bien d'autres informations sur les réseaux de neurones. Parmi les nombreuses propriétés présentes dans le cerveau, on s'est concentré sur quatre propriétés cruciales dans les réseaux de neurones. Les propriétés étudiées sont l'inhibition, la direction des connexions, le principe de Dale et la densité des réseaux de neurones. L'inhibition est un facteur essentiel dans le cerveau, car elle sert à réguler l'activité neuronale. En analyse spectrale, l'inhibition introduit des éléments négatifs dans les matrices décrivant les réseaux de neurones, ce qui rend leur analyse bien plus difficile. Ensuite, le principe de Dale stipule que tous les neurones ne sont que d'un seul type, soit excitateur, ils augmentent l'activité de leurs voisins, soit inhibiteur, ils régulent l'activité neuronale. Le principe de Dale impose une structure propre au réseau et ajoute ainsi une contrainte sur les éléments des matrices sur lesquels on effectue une analyse spectrale. Enfin, la densité joue un rôle majeur dans de nombreux aspects du cerveau, tels que la plasticité neuronale ou encore les troubles neurologiques (Alzheimer, spectre de l'autisme, etc.). Dans ce paragraphe, on s'est concentré sur les réseaux de neurones biologiques, mais les propriétés mentionnées précédemment ont aussi une grande influence sur les réseaux de neurones artificiels. Ce qui, en retour, influence grandement le domaine de l'intelligence artificielle. Cependant, la motivation de ce projet de maîtrise étant principalement tournée vers le cerveau, on ne s'attardera pas plus sur l'intelligence artificielle.

L'analyse spectrale des réseaux de neurones selon les propriétés structurelles mentionnées précédemment a déjà été étudiée dans de nombreux travaux, tels que [8, 9, 10, 11]. Néanmoins, ce sujet étant encore en plein essor, chaque étude introduit une vision différente et néglige souvent certaines propriétés ou aspects des réseaux de neurones. Il est donc crucial d'effectuer une étude en profondeur des effets structurels des réseaux de neurones sur le spectre des matrices qui leur sont associées. L'objectif de ma maîtrise est de combler cette lacune en analysant l'effet des propriétés structurelles, souvent négligées, présentes dans les réseaux de neurones sur le spectre des graphes qui leur sont associés. Plus spécifiquement, les propriétés

étudiées sont la direction des connexions, la densité, l'inhibition et le principe de Dale. On utilisera des approches analytiques et numériques pour examiner les propriétés spectrales des réseaux neuronaux aléatoires. Premièrement, pour étudier l'effet des propriétés structurelles sur le spectre, nous construirons deux graphes aléatoires orientés et signés, l'un respectant le principe de Dale régulant les connexions inhibitrices, et l'autre non. Cette approche permet une évaluation ciblée de l'influence du principe. Ensuite, utilisant les méthodes de la théorie spectrale des graphes, on fera une caractérisation mathématique et numérique du spectre de ces graphes. Ayant déterminé le comportement spectral des réseaux de neurones, on pourra par la suite avoir une base solide pour comprendre la dynamique des réseaux de neurones.

Dans ce mémoire, le premier chapitre commencera par établir certaines notions de base des graphes, des modèles de graphes aléatoires, de la théorie spectrale des graphes et des réseaux de neurones. Le deuxième chapitre présentera l'article de recherche que j'ai rédigé au cours de ma maîtrise. Dans cet article, on a créé deux graphes aléatoires possédant certaines propriétés propres aux réseaux de neurones, puis on en a fait l'analyse spectrale. Cette analyse a permis de déterminer le comportement spectral de ce type de graphe et d'observer les différences engendrées par les propriétés structurelles des réseaux de neurones. On a accordé une attention particulière à l'effet de l'inhibition, au principe de Dale qui attribue un type à chaque neurone, ainsi qu'à la densité du réseau. Enfin, je terminerai ce mémoire par une courte annexe décrivant différents réseaux aléatoires développés au cours de ma maitrise introduisant eux aussi de l'inhibition et pouvant introduire d'autres propriétés propres aux réseaux de neurones.

Chapitre 1

Théorie préliminaire

Ce projet de recherche nécessite tout d'abord une introduction à certaines notions théoriques préliminaires afin de comprendre les fondements et le contexte de ce projet dans le monde scientifique. Dans cette section, nous commencerons par introduire les systèmes complexes, qui sont essentiels pour comprendre la science des réseaux complexes. Ensuite, nous aborderons la théorie des graphes, qui sont des structures mathématiques utilisées pour représenter et analyser les relations entre les entités d'un système complexe. Les graphes constituent la base de la science des réseaux complexes. Le troisième point discuté dans cette section sera l'analyse spectrale, qui est une approche puissante permettant d'étudier les propriétés structurelles et dynamiques des réseaux complexes. L'analyse spectrale des graphes permet d'explorer les valeurs propres et les vecteurs propres associés aux matrices d'adjacence ou laplacienne des graphes, fournissant ainsi des informations sur leur connectivité, leur centralité et leurs motifs structurels. Enfin, nous conclurons en introduisant les grandes lignes du fonctionnement des neurones, qui sont les unités de base du système nerveux. Les réseaux de neurones sont des exemples concrets de systèmes complexes, et leur compréhension est essentielle pour étudier les processus cognitifs et les mécanismes de l'intelligence. Toutes ces théories seront ensuite mises en pratique dans l'article du chapitre 2, de manière explicite ou sous-jacente, afin d'analyser les réseaux de neurones à l'aide des outils de la théorie des graphes et de l'analyse spectrale.

Une petite précision lexicale reste à clarifier pour commencer notre aventure dans le monde merveilleux de la science des réseaux. La distinction entre un graphe et un réseau reste généralement assez floue et, dans les prochaines sections, les termes « graphes » et « réseaux » seront utilisés indifféremment. Cependant, suivant la convention souvent rencontrée en science des réseaux, le terme « graphes » sera principalement utilisé pour désigner des objets mathématiques, tandis que le terme « réseaux » sera utilisé pour désigner des objets réels.

1.1 Système complexe

Selon Mitchell [1] et Barabási [2], au milieu du XXe siècle, de nombreux scientifiques ont commencé à se rendre compte que l'approche réductionniste de l'étude scientifique ne permettait pas d'expliquer de nombreux phénomènes observés dans la nature qui nous entoure. Le réductionnisme, comme mentionné par Descartes au XVIIe siècle, consiste à étudier le monde en réduisant les problèmes complexes qui nous entourent en problèmes plus petits et plus simples, afin de décrire les problèmes complexes dont ils sont issus. Un exemple notable est celui de Newton, qui, en utilisant cette méthode réductionniste et une abstraction mathématique, a pu fournir une première théorie de la gravité.

Cependant, le monde qui nous entoure est composé de systèmes ne pouvant pas être étudiés selon le paradigme réductionniste. Le comportement social de notre société, la transmission de maladies entre individus, l'imprévisibilité du climat et bien sûr le système le plus complexe qui existe, notre cerveau, sont tous des systèmes complexes. Ceux-ci doivent être étudiés dans leur ensemble, car il présentent des propriétés émergentes qui ne peuvent pas être expliquées uniquement par l'étude de leurs composants individuels. Les propriétés globales des systèmes complexes émergent des interactions et des connexions entre leurs composants. Les difficultés rencontrées par le réductionnisme induira un changement de paradigme pour de nombreux scientifiques. Les travaux d'Albert-Barabási [7] et Watts-Strogatz [6], réalisés à la fin du XXe siècle, ont marqué ce changement avec la popularisation d'une nouvelle science appelée maintenant la science des réseaux, qui se concentre sur l'étude globale des systèmes qui nous entourent.

La science des réseaux complexes fournit un cadre théorique et des outils analytiques pour comprendre et analyser les systèmes complexes dans divers domaines, et ce d'une façon inédite. En prenant l'exemple du cerveau, la science des réseaux, en utilisant la théorie des graphes, a pu commencer à étudier le cerveau comme jamais auparavant [12]. Elle a permis de mettre en évidence des phénomènes tels que la connectivité, la résilience, les motifs et les propriétés émergentes présentes dans les réseaux de neurones. Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude de tels réseaux.

1.2 Graphes et leur structure

Les graphes sont des objets mathématiques très puissants pour étudier les réseaux complexes. La théorie des graphes existe depuis bien plus longtemps que la science des réseaux, et c'est cette théorie mathématique qui a servi de base à cette science de nombreuses années plus tard. La théorie des graphes a été initialement introduite par Euler pour résoudre le célèbre problème des sept ponts de Königsberg, ce qui a donné lieu au premier article sur la théorie des graphes [13] appliquée à la résolution d'un problème concret. Par la suite, de nombreux scientifiques ont introduit de nouveaux théorèmes dans ce domaine, et on trouve aujourd'hui

de nombreux ouvrages qui en font la synthèse. Deux ouvrages m'ont été particulièrement utiles pour introduire la théorie des graphes et leur utilisation dans l'étude des réseaux complexes. Il s'agit des ouvrages de Latora, Nicosia et Russo [14] et de Newman [15], qui servent de référence pour rédiger cette section.

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Un graphe, noté $G(V, L)$ ¹, est composé d'un ensemble de nœuds V représentant les éléments d'un système, tels que les individus dans un groupe social ou les neurones présents dans le cerveau, et d'un ensemble de liens L qui représentent les connexions entre les nœuds. Un lien peut, par exemple, correspondre à deux personnes qui se connaissent dans un groupe social. L'ensemble V est donc composé de l'ensemble distinct des nœuds, et l'ensemble L est composé de tous les liens entre les paires de nœuds. Le nombre de nœuds est noté $N = |V|$, et le nombre de liens est noté $M = |L|$. Il est souvent utile d'associer une étiquette aux différents nœuds, qui seront alors notés v_i où $i \in 1, 2, \dots, N$. Basés sur cette simple définition, de nombreux types de graphes existent, chacun ayant des propriétés différentes. Dans la suite de cette section, on va se concentrer sur certains types de graphes et leurs propriétés.

1.2.1 Graphes non orientés (ou non orientés)

Les graphes les plus couramment rencontrés sont les graphes non orientés. Ils permettent de décrire de nombreux systèmes réels, tels que les réseaux d'amitié dans un club de sport, les réseaux de coauteurs décrivant les collaborations entre chercheurs scientifiques, ainsi que les réseaux d'interactions protéine-protéine. Ces graphes se caractérisent par des liens simples entre les nœuds, où l'ensemble des liens L est décrit par l'existence d'une connexion entre une paire de nœuds $l = (u, v)$. Si un lien existe, on dit que les nœuds u et v sont connectés et voisins. Un exemple d'un graphe construit de cette façon est représenté à la figure 1.1

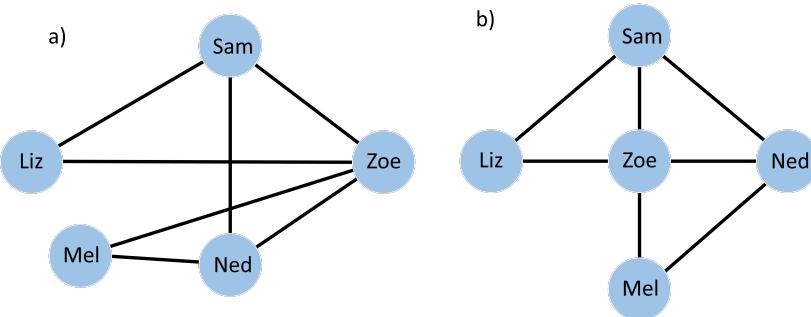


FIGURE 1.1 – Un graphe représentant un réseau d'amitié au sein d'une petite classe. Ici, les nœuds représentent les individus dans la classe, et deux individus forment un lien entre eux s'ils sont amis. Les figures a) et b) représentent le même graphe, mais tracé de manière différente.

1. Ici on utilise la notation $G(V, L)$ au lieu de celle communément rencontrée $G(V, E)$ afin d'éviter toute confusion lors de l'introduction des groupes dans les réseaux de neurones aléatoires analysés au chapitre 2.

Dans la représentation faite à la figure 1.1, nous pouvons même aller plus loin dans la description de ce graphe. Ici, nous remarquons que notre graphe n'a pas de boucles, c'est-à-dire qu'aucun noeud ne se connecte à lui-même. Dans ce cas, on dit également que le graphe est un graphe simple.

1.2.2 Graphes orientés

Les graphes orientés incorporent une notion de directionnalité dans les connexions entre les paires de noeuds d'un graphe, comme c'est le cas pour les connexions entre les neurones. Dans ce contexte, un lien l appartenant à l'ensemble des liens L décrivant les connexions entre les paires de noeuds est désigné comme $l = (u, v)$, ce qui indique que le noeud v a une connexion dirigée vers le noeud u (c'est-à-dire $v \rightarrow u$). On peut voir un exemple de graphe orienté représenté à la figure 1.2, ou reprenant la salle de classe de la figure 1.1, on représente cette fois-ci l'intérêt romantique des différentes personnes.

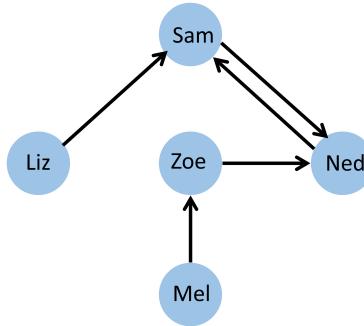


FIGURE 1.2 – Un graphe représentant l'intérêt romantique dans un groupe d'amis. Ici, les noeuds représentent les individus dans la classe. Les liens orientés représentent l'intérêt romantique qu'une personne a pour une autre personne dans le groupe.

1.2.3 Les autres types de graphes

Il existe encore de nombreux autres types de graphes, tel que les hypergraphes dont les liens peuvent connecter plusieurs noeuds, les graphes multiplexes composés de plusieurs couches, ou encore, comme nous le verrons pour les réseaux de neurones, des graphes signés qui associent des poids positifs et négatifs aux connexions entre les noeuds.

1.2.4 La représentation d'un graphe

La représentation graphique

Dans cet ouvrage, plusieurs représentations graphiques de graphes ont déjà été réalisées, sans pour autant se pencher sur la manière dont elles sont effectuées. Les représentations graphiques d'un graphe peuvent souvent être utiles pour en faciliter leur compréhension, mais elles restent limitées aux cas où les graphes sont de petite taille. En effet, lorsque le nombre de noeuds et

de liens augmente dans un graphe, celui-ci devient rapidement illisible à l'œil nu, et il est préférable d'adopter une approche plus mathématique pour les représenter. Cette approche mathématique, représentée par des matrices telles que la matrice d'adjacence et la matrice laplacienne, sera expliquée plus en détail dans les prochaines sous-sections. Cependant, étant donné que la représentation graphique est souvent la plus accessible pour vulgariser les graphes, il est tout de même utile d'en parler.

La représentation graphique d'un graphe peut être réalisée de plusieurs façons différentes, mais certaines règles sont généralement respectées. Premièrement, un graphe est représenté par une collection de noeuds (généralement sous forme de points) connectés entre eux. Ces connexions sont représentées par des lignes simples dans le cas des graphes non orientés pour refléter l'absence de direction, et par des flèches pour les graphes orientés. Cela constitue la base de la représentation des graphes, ce qui, en somme, est assez simple. Cependant, il existe une subtilité dans la représentation d'un graphe, qui concerne la position des noeuds (ou points). Comme on peut le constater dans l'exemple illustré à la figure 1.1, le positionnement des noeuds joue un rôle crucial pour mettre en évidence la centralité et l'importance de Zoe dans le réseau d'amitié. Ici, le graphe b) représente bien mieux l'importance de Zoe en raison de son plus grand nombre d'amis.

Représentation mathématique : la matrice d'adjacence

Pour les graphes, la représentation matricielle est souvent privilégiée. Celle-ci permet de réaliser de nombreuses analyses sur les graphes, mais aussi de les intégrer dans des programmes informatiques pour une analyse plus approfondie. Plusieurs matrices permettent de représenter un graphe, et l'une des représentations les plus importantes et souvent utilisé est la matrice d'adjacence. Cette représentation permet de visualiser les connexions entre les noeuds du graphe en utilisant une matrice carrée, où les éléments décrivent les liens entre les paires de noeuds.

Pour un graphe simple et non orienté $G(V, L)$ avec N noeuds et M liens, la matrice d'adjacence associée à ce graphe est une matrice carrée A de taille $N \times N$, où les entrées a_{ij} sont soit 0 ou 1 selon la règle suivante :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in L, \\ 0 & \text{autrement .} \end{cases} \quad (1.1)$$

Ici, les indices i et j correspondent aux noeuds de notre graphe en supposant qu'ils ont été nommés par un système de numérotation. Pour une meilleure compréhension de cette représentation, on peut examiner à nouveau l'exemple de la figure 1.1. Dans ce graphe, si l'on attribue la numérotation suivante : Liz = 1, Sam = 2, Zoe = 3, Ned = 4 et Mel = 5, on

obtient la matrice d'adjacence.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Pour un graphe simple non orienté, la matrice d'adjacence qui le décrit est une matrice symétrique. En effet, pour ces graphes, $a_{ij} = a_{ji}$ et $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour tous les i, j . Cette structure pour la matrice d'adjacence implique de nombreuses propriétés inhérentes aux matrices symétriques, particulièrement dans le contexte de l'analyse spectrale qui sera discutée dans une prochaine section. Évidemment, dans le cas d'un graphe orienté, $a_{ij} \neq a_{ji}$ et il n'y a pas de matrice hermitienne, à l'exception de rares cas, ce qui en complique l'analyse. De plus, pour la suite de ce mémoire, il est important de mentionner notre convention pour la matrice d'adjacence. Pour un graphe orienté, les éléments a_{ij} de la matrice d'adjacence représentent la connexion $j \rightarrow i$.

Enfin, ici, on a illustré une représentation simpliste de notre matrice d'adjacence. Cependant, comme on pourra le constater dans le chapitre 2 de ce mémoire, les connexions ne sont pas restreintes à de simples 0 et 1, et il existe plusieurs façons de décrire les liens entre les noeuds, tels que des connexions pouvant également prendre des valeurs négatives. Dans cet exemple, on parlera alors plus souvent de matrice d'adjacence signée pour les différencier des matrices d'adjacences classiques. Pour la suite de la section décrivant les graphes, nous utiliserons généralement la convention de la matrice d'adjacence où les éléments sont 0 ou 1, cependant, la généralisation qui est moins conventionnellement retrouvée dans la littérature est assez aisée à faire.

Représentation mathématique : La matrice laplacienne

Une autre représentation mathématique très utilisée est celle de la matrice laplacienne. Cette représentation mérite d'être mentionnée parmi les diverses autres méthodes, car elle constitue la deuxième représentation la plus fréquemment utilisée. La matrice laplacienne est utilisée pour décrire les graphes simples non orientés, ce qui signifie que les liens n'ont pas de direction et qu'un noeud ne peut pas être connecté à lui-même. Pour comprendre la structure de la matrice laplacienne, il est nécessaire d'introduire le concept de degré, qui sera développé dans la sous-section suivante. En résumé, le degré d'un noeud i , noté k_i , correspond au nombre de liens qu'il possède. Dans ce contexte, la matrice laplacienne d'un graphe $G(V, L)$ composé de

N noeuds est décrite par une matrice hermitienne $\mathcal{L}_{N \times N}$, définie par

$$\mathcal{L}_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i \neq j \text{ et } (i, j) \in L, \\ k_i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2.5 Les mesures sur les graphes

Les représentations mathématiques des graphes permettent de modéliser de manière plus précise des systèmes composés de nombreux noeuds. Cependant, cela reste difficile à interpréter pour nous permettre de comprendre les propriétés d'un graphe en se basant uniquement sur les matrices qui le décrivent. Afin d'analyser plus en profondeur les graphes, on leur associe donc des quantités mathématiques décrivant leur structure.

Le degré

La mesure la plus simple à laquelle on peut penser lorsqu'on regarde un graphe est le nombre de voisins qu'un noeud possède, c'est-à-dire le nombre de liens (ou connexions) qu'il a. Cette mesure est appelée le degré d'un noeud ou encore la centralité de degré du noeud.

Pour un graphe non orienté et non signé, il n'existe qu'un seul type de degré, et il est décrit à partir de la matrice d'adjacence A comme

$$k_i = 2a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij}. \quad (1.4)$$

Ici, le terme $2a_{ii}$ est introduit, car dans le cas où un noeud se connecte à lui-même, son degré est augmenté de 2. On peut le comprendre aisément si l'on considère tous les liens comme une connexion entre 2 demi-liens. Ainsi, le degré d'un noeud correspond à tous les demi-liens connectés à ce noeud et qui sont attachés à un demi-lien d'un autre noeud. Si nous avons une connexion (i, i) , cela ajoute donc deux demi-liens et augmente le degré de deux.

Pour un graphe orienté et non signé, on distingue deux types de degrés. Pour un noeud i , le degré sortant correspond au nombre de connexions partant de ce noeud vers les autres noeuds et est désigné par k_i^{out} , tandis que le degré entrant correspond au nombre de liens orientés vers le noeud i et est désigné par k_i^{in} . Ces degrés sont exprimés comme

$$k_i^{in} = \sum_j a_{ij}, \quad (1.5)$$

$$k_i^{out} = \sum_j a_{ji}. \quad (1.6)$$

Bien que la mesure des degrés soit très simple, elle est très puissante pour évaluer l'importance d'un noeud dans un graphe. Si nous reprenons l'exemple de la figure 1.1, nous pouvons constater

directement que Zoe, avec un degré de 4, est plus centrale dans le groupe d'amis et donc plus importante pour la cohésion du groupe. Dans ce cas, nous pouvons raisonnablement supposer que Zoe a plus d'influence, a accès à plus d'informations et jouit d'un prestige plus élevé dans le groupe que les autres.

Le degré moyen d'un nœud est une autre mesure importante dans l'étude des réseaux. Comme on peut facilement l'imaginer, cette mesure est utile car elle nous permet d'avoir une idée du nombre moyen de connexions des nœuds. Cette information est très importante dans de nombreuses études sur les réseaux, et comme nous le verrons plus tard, elle est également utile dans la création de certains graphes aléatoires.

Pour un réseau non orienté de N noeuds, le nombre de liens M peut être déterminé à partir des degrés, comme

$$2M = \sum_i k_i = 2 \sum_i a_{ii} + \sum_i \sum_{j \neq i} a_{ij}. \quad (1.7)$$

Ce qui nous permet de décrire le degré moyen d'un réseau non orienté comme

$$\langle k_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_i k_i = \frac{1}{N} \left(2 \sum_i a_{ii} + \sum_i \sum_{j \neq i} a_{ij} \right) = \frac{2M}{N}. \quad (1.8)$$

Pour un réseau orienté, les liens ne sont pas comptés deux fois, car on fait une distinction entre les degrés entrants et sortants. Dans ce cas, le nombre de liens est

$$M = \sum_i k_i^{in} = \sum_i k_i^{out} = \sum_{ij} a_{ij}. \quad (1.9)$$

Cette égalité dans les sommes implique que les degrés moyens sortant et entrant d'un nœud sont égaux. Si on désigne ces degrés moyens par $c = \langle k_i^{in} \rangle = \langle k_i^{out} \rangle$, on a

$$c = \frac{M}{N}. \quad (1.10)$$

La centralité du vecteur propre

Cette mesure de centralité est très importante dans le domaine des réseaux complexes et est appliquée aux réseaux non orientés. La centralité, déterminée par le degré d'un nœud, révèle simplement le nombre de voisins qu'un nœud possède. Cependant, dans de nombreux systèmes réels, l'importance des voisins d'un nœud dans le réseau constitue également un indicateur significatif de l'importance du nœud lui-même. Par exemple, dans un réseau d'amis, si une personne ne compte que deux amis, elle pourrait être considérée comme non centrale si l'on ne prend en compte que le degré. Cependant, si l'un de ces deux amis est le président des États-Unis, il est évident que cette personne exerce une grande influence dans le réseau. Dans

ce contexte, la centralité du vecteur propre propose une solution qui intègre la centralité des voisins d'un nœud. Cette centralité est exprimée de manière redondante, comme étant proportionnelle à la somme des centralités de ses voisins, ce qui peut s'écrire pour un nœud i dans un réseau non orienté comme

$$x_i = \lambda^{-1} \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j. \quad (1.11)$$

Avec cette notation, on remarque que le noeud i acquiert une centralité élevée lorsqu'il est connecté à de nombreux nœuds ayant une faible centralité, ou s'il est relié à un nœud possédant une haute centralité. Cette équation peut ensuite être reformulée comme suit

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad (1.12)$$

Ce qui est évidemment un simple problème aux valeurs propres. Bien entendu, nous demeurons avec un choix qui est celui du vecteur propre utilisé. En supposant que l'on recherche une centralité positive, il est possible d'utiliser le théorème de Perron-Frobenius introduit dans la section sur l'analyse spectrale (section 1.3.2) et d'opter pour le vecteur propre dominant. Il convient de noter que pour une matrice non négative, le vecteur propre dominant est entièrement positif.

De façon équivalente, pour un réseau orienté, la centralité sortante est exprimée comme

$$\sum_{j=1}^N a_{ji} \mathbf{x}_j^{out} = \lambda \mathbf{x}_i^{out}, \quad (1.13)$$

$$A^T \mathbf{x}^{out} = \lambda \mathbf{x}^{out}, \quad (1.14)$$

et pour la centralité entrante

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{x}_j^{in} = \lambda \mathbf{x}_i^{in}, \quad (1.15)$$

$$A \mathbf{x}^{in} = \lambda \mathbf{x}^{in}. \quad (1.16)$$

Ici, nous avons présenté deux types de centralité très connus en science des réseaux, à savoir la centralité de degré et la centralité de vecteur propre. Cependant, il existe de nombreuses autres mesures de centralité. Pour un lecteur désirant en savoir plus, nous pouvons de nouveau recommander les ouvrages de Latora [14] et Newman [15].

La densité d'un graphe

Une notion importante souvent rencontrée en science des réseaux est la densité d'un graphe. Cette notion est également très significative dans l'étude et l'analyse des réseaux neuronaux.

La densité d'un graphe correspond simplement au rapport entre le nombre de liens présents dans le graphe et le nombre de liens maximums possibles dans le graphe.

Pour un graphe non orienté, le nombre de liens maximum est donné par le nombre de façons de choisir deux paires de nœuds dans le graphe, ce qui s'exprime comme $\kappa = \binom{N}{2} = \frac{1}{2}N(N-1)$. En revanche, pour un réseau orienté, on peut avoir à la fois un lien sortant et un lien entrant entre chaque paire de nœuds. Dans ce cas, le nombre de liens maximum est $\kappa = 2\binom{N}{2} = N(N-1)$. Ces relations permettent de calculer la densité d'un graphe comme

$$\rho = \frac{M}{\binom{N}{2}} = \frac{2M}{N(N-1)} = \frac{\langle k_i \rangle}{(N-1)} \quad (\text{pour un graphe non orienté}), \quad (1.17)$$

$$= \frac{M}{2\binom{N}{2}} = \frac{M}{N(N-1)} = \frac{c}{(N-1)} \quad (\text{pour un graphe orienté}). \quad (1.18)$$

Dans les deux cas, on constate que la densité est équivalente pour le graphe orienté et non orienté, et qu'elle est directement liée au degré moyen du graphe. En désignant le degré moyen par ζ afin de le généraliser aux cas orientés et non orientés, on a $\rho = \frac{\zeta}{N-1}$. Dans le cas où N est grand, ce qui est généralement le cas pour les réseaux, on peut exprimer la densité comme

$$\rho = \frac{\zeta}{N}. \quad (1.19)$$

Ce ratio décrit simplement la probabilité qu'une paire de nœuds choisie aléatoirement dans un graphe soit connectée. Pour les graphes, si ρ reste non nul lorsque le nombre de noeuds augmente, on dit que le graphe est dense. En revanche, si $\rho \rightarrow 0$ lorsque N devient grand, on dit que le graphe est creux, et le nombre de liens non nuls dans la matrice d'adjacence tend également vers zéro. Cette distinction entre un graphe dense et un graphe creux est importante, car elle implique de nombreuses propriétés dans les graphes, ainsi que des comportements différents, comme cela est représenté dans l'article du chapitre 2.

Une autre façon de définir la densité d'un graphe, utilisée implicitement dans l'article du chapitre 2, est la relation entre la densité et le degré du graphe, à savoir $\zeta = \rho N$. Cette relation implique que si ρ est une constante lorsque $N \rightarrow \infty$, le degré croît linéairement avec N et le graphe est dense. Dans le cas contraire, si le degré croît de manière sous-linéaire, on dit que le graphe est creux. On peut même aller plus loin et définir les graphes parfois appelés « extrêmement creux ». Dans ce cas, $\rho \rightarrow \frac{1}{N}$ lorsque $N \rightarrow \infty$, ce qui implique un degré constant qui ne dépend pas de N .

Bien sûr, cette définition n'est valable que pour des graphes dont on peut aisément faire varier la taille, ce qui n'est pas souvent le cas des réseaux réels. Dans ce cas, on désigne informellement un réseau comme étant creux si la valeur de ρ est assez petite, la quantité choisie pour « petite » est souvent arbitraire. Dans les réseaux réels, un bon exemple de réseaux creux est celui des réseaux d'amitiés. En effet, une personne atteint généralement un nombre maximum d'amis qu'elle peut gérer et la densité des liens reste constante au-delà d'une certaine taille du réseau.

Cette relation entre densité, degré et taille du graphe permet de caractériser les graphes en termes de propriétés structurelles simples. Un graphe dense, avec un degré croissant linéairement avec la taille, présente généralement une forte connectivité entre ses noeuds. En revanche, un graphe creux, avec un degré croissant de manière sous-linéaire, est caractérisé par une connectivité plus limitée entre ses noeuds. Les graphes extrêmement creux, avec un degré constant et indépendant de la taille, sont particulièrement intéressants et peuvent présenter des propriétés spéciales en termes de structure et de comportement.

1.2.6 Les graphes aléatoires

Dans les réseaux réels, on peut généralement retirer de nombreuses informations telles que le degré moyen des noeuds, la densité ou la centralité des noeuds. Cependant, les limitations liées à la diversité de ces graphes réels peuvent souvent poser problème lors de leur analyse et de la compréhension des phénomènes importants. C'est pourquoi nous nous tournons vers les graphes aléatoires. Dans un graphe aléatoire, les liens entre les noeuds sont généralement créés de manière indépendante et avec une certaine probabilité. Ces graphes sont des outils très puissants pour faciliter l'analyse des réseaux réels. Les graphes aléatoires nous permettent d'utiliser certaines des propriétés attendues ou mesurées d'un réseau réel, telles que son degré moyen, sa séquence de degré, etc., pour créer un grand nombre de variations de ce réseau avec des tailles variables. Cette méthode d'analyse des réseaux nous permet de modéliser la réalité tout en la simplifiant afin de pouvoir l'analyser plus aisément. À partir de ces graphes aléatoires, nous pouvons observer les propriétés émergentes d'un système, telles que la synchronisation, la propagation des maladies ou encore la formation de communautés. De plus, ces graphes nous permettent de faire des prédictions sur des réseaux réels, comme les prédictions sur les cas d'infections au cours de la pandémie de Covid-19.

L'étude des graphes aléatoires a véritablement commencé grâce aux travaux fondateurs d'Erdős et Rényi [3, 4] ainsi qu'à ceux de Gilbert [5], rédigés à la fin des années 1950. Ces travaux avaient pour objectif d'étudier, de manière probabiliste, les propriétés d'un graphe en fonction du nombre de connexions qu'il possède. Par la suite, de nombreux autres modèles ont été introduits. Dans cette section, nous allons présenter deux modèles souvent rencontrés en science des réseaux : le modèle d'Erdős et Rényi et le modèle des configurations de Chung-Lu [16].

Dans l'annexe A, on peut également trouver d'autres modèles basés sur les graphes, présentés dans cette section, qui ont été développés au cours de ma maîtrise pour répondre aux besoins de mes recherches et qui pourraient être utilisés dans des recherches futures.

Le modèle de graphe aléatoire d'Erdős–Rényi

Le modèle d'Erdős-Rényi est l'un des modèles les plus simples de graphes aléatoires. Ce modèle permet d'étudier des propriétés globales du graphe, telles que la connectivité, la taille des composantes connexes, etc. Il existe deux modèles connus construits par Erdős-Rényi. Le

premier modèle consiste à créer un nombre arbitraire de liens et à les connecter aléatoirement entre les paires de noeuds, mais nous n'approfondirons pas ce modèle dans ce document. Le deuxième modèle, que nous présenterons dans cette section, attribue une probabilité de connexion entre deux noeuds sans boucle.

Dans ce modèle de graphes aléatoires, noté $G(N, p)$, N représente l'ensemble des noeuds présents dans le graphe, et p est la probabilité qu'un lien existe entre deux noeuds. Pour chaque paire de noeuds distincts dans l'ensemble N , un lien est créé entre ces deux noeuds avec une probabilité p . Il est essentiel de noter que ce modèle est défini pour des graphes aléatoires simples et non orientés, ce qui signifie qu'il ne prend pas en compte les liens multiples entre les noeuds ni la direction des liens. Ce modèle offre une approche probabiliste pour générer des graphes aléatoires et étudier leurs propriétés globales.

Si l'on construit ce graphe à l'aide de la matrice d'adjacence, il nous faut regarder seulement les éléments inférieurs ou supérieurs à la diagonale de la matrice pour assigner les liens. En effet, dans un graphe simple non orienté, la matrice d'adjacence est symétrique, ce qui signifie que les liens entre les paires de noeuds sont tous décrits à l'aide des éléments du triangle supérieur ou inférieur de la matrice. Dans ce cas, pour une matrice A , si on regarde les éléments de la diagonale inférieure, on a

$$P(A_{ij} = a_{ij}) = p^{a_{ij}}(1 - p)^{1-a_{ij}} \quad \text{où } a_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i < j. \quad (1.20)$$

Ceci donne la relation probabiliste pour une matrice d'adjacence spécifique :

$$P(A = a) = \prod_{i,j} p^{a_{ij}}(1 - p)^{1-a_{ij}} \quad \text{où } a_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i < j. \quad (1.21)$$

Si on exprime le nombre maximal de liens possible r comme le nombre de paires de noeuds possible, soit $r = \binom{N}{2}$, on peut écrire la probabilité qu'un graphe G tiré de $G(N, p)$ ait M liens comme

$$P(|L(G)| = M) = P\left(\sum_{i < j} A_{ij} = M\right) = \binom{r}{M} p^M (1 - p)^{r-M}. \quad (1.22)$$

Le modèle d'Erdős-Rényi concerne des graphes simples non orientés, ce qui signifie qu'il n'y a pas de distinction entre le degré sortant et le degré entrant. Cela permet d'exprimer les quantités liées au degré, telles que

$$k_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}, \quad (1.23)$$

$$\langle k_i \rangle = \sum_{j \neq i} \langle a_{ij} \rangle = (N - 1)p, \quad (1.24)$$

$$\text{Var}(k_i) = (N - 1)p(1 - p). \quad (1.25)$$

Le modèle de configuration de Chung-Lu

Le modèle de configuration construit un graphe à partir d'une séquence de degrés. Cette méthode permet de créer des graphes aléatoires pouvant bien décrire le comportement observé dans certains réseaux réels, tels que les réseaux sociaux. Ce modèle, différent du modèle d'Erdős développé dans la section précédente, est également fréquemment rencontré en science des réseaux. La définition souvent rencontrée est celle pour les graphes non orientés. De plus, il existe deux façons de créer ces graphes aléatoires : l'une à partir d'une séquence de degrés spécifiques et l'autre à partir d'une séquence de degrés moyens développée par Chung-Lu [16]. C'est le modèle de Chung-Lu qui va être présenté dans cette section. Celui-ci permet de faire une meilleure description de certains réseaux, mais il est aussi parfois vu comme une généralisation du modèle d'Erdős. Dans la suite de cette section, on montre une méthode afin de générer ce modèle à partir de la matrice d'adjacence.

Prenons un ensemble $\kappa = d_1, d_2, \dots, d_N$ où $\sum_i d_i = 2M$. À partir de cette séquence, nous pouvons définir la probabilité qu'il existe un lien entre deux nœuds tel que

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{d_i d_j}{2M} & \text{si } i \neq j, \\ \frac{d_i^2}{4M} & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (1.26)$$

Avec ce choix de probabilité, le nombre de liens moyen espéré est

$$\sum_{i < j} p_{ij} + \sum_i p_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{d_i d_j}{2M} + \sum_i \frac{d_i^2}{4M} = \sum_{ij} \frac{d_i d_j}{4M} = M. \quad (1.27)$$

Ces définitions, nous permettent de décrire la matrice d'adjacence A de ce graphe aléatoire, où les éléments a_{ij} respectent la loi de probabilité

$$P(a_{ij} = 1) = p_{ij}, \quad (1.28)$$

$$P(a_{ij} = 0) = 1 - p_{ij}. \quad (1.29)$$

On a la loi de probabilité pour les éléments de la matrice d'adjacence exprimée comme $P(a_{ij} = \alpha) = p_{ij}^\alpha (1 - p_{ij})^{1-\alpha}$, ce qui fait un fort parallèle avec le modèle d'Erdős étudié avant. Ayant une loi de Bernoulli, on trouve assez aisément que

$$\langle a_{ij} \rangle = p_{ij}, \quad (1.30)$$

$$\text{Var}[a_{ij}] = p_{ij}(1 - p_{ij}). \quad (1.31)$$

Maintenant, on peut se pencher sur le degré moyen du graphe. Pour ce faire, il est important de comprendre les subtilités de notre graphe. Premièrement, dans un graphe non orienté, tel que ceux décrits par ce modèle, on prend en compte les connexions qu'un noeud peut avoir avec lui-même. Lorsqu'on calcule le degré moyen d'un nœud dans ce type de graphe, il est

donc nécessaire de compter deux fois les connexions a_{ii} , afin de tenir compte des boucles. Cette condition donne alors le degré moyen suivant :

$$\langle k_i \rangle = \left\langle 2a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} \right\rangle = 2p_{ii} + \sum_{j \neq i} p_{ij} = \frac{d_i^2}{2M} + \sum_{j \neq i} \frac{d_i d_j}{2M} = \frac{d_i}{2M} \sum_j d_j = d_i. \quad (1.32)$$

Ce qui nous permet de conclure que dans ce modèle, on construit un graphe aléatoire à partir de la séquence des degrés espérés des noeuds, comme assumé au début de cette section.

1.3 L'analyse spectrale des graphes

L'analyse spectrale est une méthode mathématique utilisée pour étudier les propriétés des systèmes en termes de leurs spectres, c'est-à-dire les valeurs propres et les vecteurs propres associés [17]. En science des réseaux, l'analyse spectrale permet de comprendre les connexions, la résilience, la diffusion de l'information, les processus de synchronisation et de nombreux autres aspects dynamiques et structurels des réseaux complexes [15, 18, 19, 20]. Elle fournit des outils puissants pour étudier les interactions complexes entre les éléments d'un réseau et pour découvrir les structures et phénomènes émergents. À ce jour, de nombreux ouvrages offrent une bonne introduction sur la théorie spectrale des graphes. Pour n'en citer que quelques-uns, on peut mentionner le livre de Bogdan Nica [21], qui porte davantage sur les graphes non orientés, ainsi que le livre de Piet Van Mieghem [22], qui propose des exemples sur des réseaux complexes bien connus.

Dans cette section, nous allons nous concentrer sur quelques théorèmes importants en analyse spectrale qui ont grandement influencé le déroulement de mes recherches effectuées au cours de ma maîtrise. Cependant, il est important de mentionner une convention avant de commencer, car celle-ci varie en fonction des ouvrages de référence. Dans ce mémoire, les valeurs propres d'une matrice ayant N valeurs propres seront toujours ordonnées selon $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_N|$, ce qui nous permet de dire que la valeur propre λ_1 est celle de plus grande norme.

1.3.1 Le rayon spectral

Le rayon spectral jouera un rôle important dans les recherches présentées au chapitre 2, et il est donc important de lui consacrer sa propre section. Le rayon spectral d'une matrice correspond au rayon du cercle dans le plan complexe qui englobe toutes les valeurs propres de cette matrice. En d'autres termes, pour une matrice carrée A de taille $N \times N$ où les valeurs propres sont telles que $|\lambda_1| \geq |\lambda_i|$ pour $i = 2, \dots, N$, le rayon spectral est exprimé comme

$$\rho(A) = \max_{i=1, \dots, N} \{|\lambda_i|\} = |\lambda_1|.$$

Le rayon spectral est un concept important en analyse spectrale et en théorie des matrices, appliqué à la science des réseaux. Il fournit des informations cruciales sur la stabilité et le

comportement asymptotique des systèmes dynamiques, ainsi que sur la convergence des algorithmes numériques. En étudiant le rayon spectral, on peut déterminer si un système est stable, s'il converge vers un point fixe ou s'il oscille, ainsi que sa vitesse de convergence. De plus, le rayon spectral nous fournit des informations structurelles importantes sur les réseaux, telles que la connectivité du réseau ou encore la présence de communautés. On abordera son implication dans la section 1.4, où les valeurs propres et donc le rayon spectral jouent un rôle majeur dans l'étude des réseaux de neurones.

1.3.2 Le théorème de Perron-Frobenius

Un des théorèmes les plus importants en analyse spectrale est le théorème de Perron-Frobenius [23, 24]. Nommé d'après les mathématiciens Oskar Perron et Ferdinand Georg Frobenius, ce théorème fondamental en théorie des matrices énonce des propriétés importantes des matrices carrées positives et non négatives. Le théorème décrit le comportement de la valeur propre dominante de certaines classes de matrices ainsi que le vecteur propre qui lui est associé. En plus de son application en théorie matricielle, le théorème de Perron-Frobenius est aussi très utile en théorie dynamique et en science des réseaux. En théorie des graphes, ce qui est le sujet majoritaire de l'étude de cet ouvrage, il est utile dans l'étude de la matrice d'adjacence. Cependant, pour des graphes signés, Perron-Frobenius est rarement applicable, ce qui a été une grande difficulté lors de l'étude faite au cours de ma maîtrise.

En bref, le théorème de Perron-Frobenius est un résultat fondamental, puissant et polyvalent qui permet de tirer des informations sur de nombreux domaines étudiés en mathématiques et en physique, tels que l'analyse de systèmes dynamiques ou de graphes. Il reste à ce jour un théorème largement utilisé par la communauté scientifique.

De nombreuses propriétés sont tirées de ce théorème, en voici les plus fondamentales décrites dans le chapitre 8 de [25].

Théorème 1.3.1 *Prenons A comme une matrice carrée positive de taille $N \times N$. Pour cette matrice, le théorème de Perron-Frobenius implique les propriétés suivantes :*

- a) $\rho(A) > 0$
- b) $\rho(A)$ est une valeur propre algébriquement simple de A désignée par λ_1 .
- c) il existe un vecteur unique réel \mathbf{x} tel que $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$ et $\sum_i x_i = 1$. Un tel vecteur doit être positif.
- d) il existe un vecteur unique réel \mathbf{y} tel que $\mathbf{y}^T A = \rho(A)\mathbf{y}^T$ et $\sum_i x_i y_i = 1$. Un tel vecteur doit être positif.
- e) $|\lambda_i| < \rho(A)$ pour tout valeur propre de A tel que $\lambda_i \neq \lambda_1$.
- f) $(\rho(A)^{-1}A)^m \rightarrow \mathbf{x}\mathbf{y}^T$ quand $m \rightarrow \infty$.

Pour les matrices non négatives, l'ajout d'éléments nuls change les propriétés du théorème. Le théorème 1.3.2 introduit les propriétés des matrices non négatives induites par le théorème de Perron-Frobenius.

Théorème 1.3.2 *Prenons A comme une matrice carrée non négative de taille $N \times N$.*

- a) $\rho(A)$ est une valeur propre de A .
- b) Il existe un vecteur réel $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ et non négatif tel que $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$. Si A est irréductible alors \mathbf{x} est positif.
- c) Si A est irréductible, il existe un vecteur unique réel \mathbf{y} tel que $\mathbf{y}^T A = \rho(A)\mathbf{y}^T$. Un tel vecteur est positif.
- d) Si A est irréductible, $\rho(A) > 0$.
- e) Si A est irréductible, $\rho(A)$ est une valeur propre algébriquement simple.

Perron-Frobenius pour des matrices éventuellement positives

La puissance du théorème de Perron-Frobenius pour décrire les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice pousse bien sûr à vouloir le généraliser au cas des matrices avec des éléments négatifs. Le superbe article écrit par Noutsos [26] nous donne un aperçu des conditions pour qu'une matrice avec des entrées négatives respecte la propriété de Perron-Frobenius. Pour ce faire, l'article propose plusieurs définitions et conditions permettant à une matrice avec des éléments négatifs de posséder la propriété de Perron-Frobenius. Dans cette section, nous nous proposons donc de résumer certaines des différentes propriétés avancées par les auteurs.

On commence par les trois définitions importantes qui nous servent de base pour le reste.

Définition 1.3.1 *Une matrice $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ possède la propriété de Perron-Frobenius si sa valeur propre dominante λ_1 est positive et que le vecteur propre correspondant \mathbf{v}_1 peut être choisi pour être non négatif.*

Définition 1.3.2 *Une matrice $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ possède la propriété forte de Perron-Frobenius si sa valeur propre dominante λ_1 est positive, la seule sur le cercle $|\lambda_1|$ (soit $\lambda_1 > |\lambda_i|$, $i = 2, 3, \dots, N$) et que le vecteur propre correspondant \mathbf{v}_1 peut être choisi pour être non négatif.*

Définition 1.3.3 *Une matrice $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ est dite éventuellement positive (éventuellement nonnégative) si il existe un entier positif k_0 t.q $A^k > 0$ ($A^k \geq 0$) $\forall k \geq k_0$.*

À partir de ces définitions assez simples, les auteurs avancent plusieurs théorèmes, on en présente quelques-uns qui sont utiles dans le cadre de cet ouvrage.

Théorème 1.3.3 *Pour une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{N,N}$, on a deux propriétés équivalentes*

- a) La matrice A possède la propriété forte de Perron-Frobenius
- b) A est une matrice éventuellement positive.

Théorème 1.3.4 Pour une matrice générale $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ les propriétés suivantes sont équivalentes

- a) Les deux matrices A et A^T possèdent la propriété forte de Perron-Frobenius
- b) A est une matrice éventuellement positive
- c) A^T est une matrice éventuellement positive

Théorème 1.3.5 On prend une matrice $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ qui possède la propriété de Perron-Frobenius (ou la propriété forte de Perron-Frobenius) avec un vecteur propre associé $\mathbf{x} \geq 0$. Si on prend un vecteur $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ t.q $\mathbf{y}^T \mathbf{x} > 0$ et qu'on effectue une perturbation de rang un sur la matrice A pour avoir la matrice

$$B = A + \varepsilon \mathbf{x} \mathbf{y}^T, \varepsilon > 0.$$

On a que la matrice B possède également la propriété de Perron-Frobenius (ou la propriété forte de Perron-Frobenius) et on a pour le rayon spectrale

$$\rho(A) < \rho(B).$$

1.3.3 Le théorème de Gershgorin

Le théorème de Gershgorin [27] , formulé par le mathématicien Sergueï Gershgorin dans les années 1930, est un théorème d'une importance capitale en théorie spectrale des graphes et en analyse matricielle. Celui-ci nous donne des informations cruciales sur le comportement des valeurs propres d'une matrice. Le théorème de Gershgorin énonce que chaque valeur propre d'une matrice complexe se trouve dans au moins l'un des cercles de Gershgorin.

Le théorème de Gershgorin peut être appliqué dans de nombreux domaines pratiques tels qu'en théorie des graphes et en physique. Il est utilisé pour analyser les matrices de connectivité dans les réseaux complexes, pour étudier la stabilité des systèmes dynamiques linéaires ou encore pour résoudre des problèmes d'électromagnétisme et de mécanique quantique. Dans la suite de cette section, on va exprimer ce théorème en suivant les développements du chapitre 6 de [25].

Théorème 1.3.6 On prend une matrice A carrée de taille $N \times N$, et on nomme la somme des valeurs absolues des éléments non diagonaux d'une rangée de A comme

$$R_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.33)$$

Les cercles de Gershgorin sont eux exprimés tels que

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}, i = 1, \dots, N. \quad (1.34)$$

Les valeurs propres de A se situent dans l'union des cercles de Gershgorin

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^N \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}. \quad (1.35)$$

Soit, toutes les valeurs propres de A se situe dans au moins un des cercles de Gershgorin.

Comme les matrices A et A^T ont les mêmes valeurs propres, on déduit aisément le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.1 Si on nomme la somme des éléments d'une des colonnes de A à l'exception de l'élément diagonal tel que

$$\tilde{R}_j = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, j = 1, \dots, n. \quad (1.36)$$

Toutes les valeurs propres de A ce trouve dans l'union des cercles de Gershgorin

$$\bigcup_{j=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \tilde{R}_j(A) \right\} = G(A^T). \quad (1.37)$$

Le théorème 1.3.6 et le corollaire 1.3.1, permettent d'obtenir un nouveau corollaire pouvant donner un ensemble plus précis contenant nos valeurs propres.

Corollaire 1.3.2 Le spectre de A , désigné par $\sigma(A)$, appartient à l'ensemble résultant de l'intersection des ensembles $G(A)$ et $G(A^T)$ t.q

$$\sigma(A) \in G(A) \cap G(A^T). \quad (1.38)$$

Enfin, on a un dernier corollaire qu'on considère utile dans le cadre de ce travail. Ce corollaire permet de borner supérieurement le rayon spectral d'une matrice A carrée.

Corollaire 1.3.3 Le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice A carrée de taille $N \times N$ et de diagonale nulle peut être borné supérieurement t.q.

$$\rho(A) \leq \min \left\{ \max \{R_i\}, \max \{\tilde{R}_j\} \right\}. \quad (1.39)$$

1.3.4 La loi du demi-cercle

La loi du demi-cercle, exprimée par Wigner en 1955 et reformulée par Füredi et Komlós dans l'article de 1981 [28], est une loi très utile et importante pour étudier les spectres des matrices décrivant des graphes. Cette loi est définie dans le contexte de matrices symétriques aléatoires. La loi du demi-cercle énonce que, lorsque la taille de la matrice aléatoire tend vers l'infini, les valeurs propres de cette matrice sont distribuées selon une loi semi-circulaire. On comprend vite que cette loi est d'une grande importance dans l'étude des graphes simples non orientés.

Pour ce théorème, on considère un graphe aléatoire décrit par une matrice symétrique A , dont les entrées $a_{ij}, i \geq j$ sont des variables réelles et indépendantes. De plus, la loi du demi-cercle permet d'avoir une loi de probabilité différente pour les éléments non diagonaux et les éléments diagonaux de la matrice A . On désigne la loi de probabilité des éléments non diagonaux par F et celle des éléments diagonaux par G . Enfin, on introduit la répartition empirique $W_{A,N}(x) =: (\text{nombres de vap} \leq x)/N$. Tous ces éléments permettent enfin de définir la loi du demi-cercle. La description formelle de cette loi, définie par Füredi et Komlós, est donnée par le théorème 1.3.7.

Théorème 1.3.7 *Si on suppose que $\int |x|^k dF < \infty$, $\int |x|^k dG < \infty$, $k = 1, 2, \dots$ et on définit $\text{Var}\{a_{ij}\} = \sigma^2$. On obtient, en probabilité, que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(x2\sigma\sqrt{n}) = W(x), \quad (1.40)$$

où W est une fonction de répartition absolument continue de densité

$$W(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (1 - x^2)^{1/2} & \text{pour } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pour } |x| > 1. \end{cases} \quad (1.41)$$

Cette loi permet de décrire la distribution des valeurs propres qui dans le cas d'une matrice hermitienne sont toutes réelles. Ici, on décrit la distribution des valeurs propres à l'exception de la valeur propre dominante (la valeur propre maximale) qui est, elle, décrite différemment, car elle s'éloigne de la répartition centrale des valeurs propres. De plus, on note que la distribution de $W(x)$ décrit une distribution bornée à 1, car les valeurs propres décrites par cette distribution sont normées t.q $\frac{\lambda_i}{2\sigma\sqrt{n}}$. Dans le cas où on ne ferait pas de normalisation, la loi du demi-cercle décrivant les valeurs propres à l'exception de la valeur propre dominante est la distribution

$$W(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{(2\sigma\sqrt{n})^2\pi} \sqrt{(2\sigma\sqrt{n})^2 - \lambda^2} & \text{pour } |\lambda| \leq 2\sigma\sqrt{n}, \\ 0 & \text{pour } |\lambda| > 2\sigma\sqrt{n}. \end{cases} \quad (1.42)$$

Si on regarde le comportement de la valeur propre dominante, il nous faut regarder le cas où elle ne se trouve pas dans la distribution centrale. Suivant le théorème 1 de [28], on suppose

que les variables a_{ij} , $i \geq j$ ont pour moyennes μ et variance σ^2 et que les variables a_{ii} ont pour moyennes ν . Dans ce cas, si $\mu > 0$, la distribution de la valeur propre dominante peut-être approximée avec un ordre de $1/\sqrt{n}$ par une distribution normale de moyenne

$$(n - 1)\mu + \nu + \frac{\sigma^2}{\mu}, \quad (1.43)$$

et de variance $2\sigma^2$.

1.3.5 La loi du cercle de Girko

La loi du demi-cercle, exprimée dans la section précédente, est une loi très importante en analyse spectrale des graphes. Cependant, elle échoue à expliquer le comportement de graphes plus généraux qui ne sont pas décrits par des matrices réelles symétriques. Pour répondre à cette problématique, il est nécessaire de se tourner vers le théorème formulé par le mathématicien Vladimir Girko dans les années 1980 [29]. Lorsqu'on considère une séquence de matrices aléatoires de taille croissante, ce théorème stipule que la distribution des valeurs propres converge vers une densité spectrale limite, connue sous le nom de "loi de Girko". Cette loi, maintenant largement utilisée en analyse spectrale, est décrite et utilisée dans de nombreux travaux. Les articles [30], [31] et [32] donnent une très bonne description de cette loi en y ajoutant de nouvelles analyses très intéressantes. Dans cette section, nous explorerons en détail la loi de Girko en nous appuyant sur ces articles.

Théorème 1.3.8 *Pour une matrice complexe aléatoire carrée A de taille $N \times N$, on définit la distribution spectrale comme suit*

$$\mu_A(x, y) := \frac{1}{n} |\{1 \leq i \leq N, \Re\{\lambda_i\} \leq x, \text{Im}\{\lambda_i\} \leq y\}|, \quad (1.44)$$

ou les λ_i , $i = 1, \dots, N$ sont les valeurs propres de la matrice A .

Supposons que les éléments de cette matrice sont des variables complexes indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de moyenne 0 et de variance 1. Dans ce cas, la distribution spectrale de $\frac{1}{\sqrt{N}}A$ converge (en probabilité et presque sûrement) vers une distribution uniforme sur le disque unitaire dans le plan complexe.

Autrement dit, le théorème 1.3.8 stipule que les valeurs propres d'une matrice carrée aléatoire et complexe, qui respecte les propriétés précédemment énoncées, se trouvent presque sûrement toutes à l'intérieur du cercle unitaire dans le plan complexe.

Bien que le théorème 1.3.8 soit fondamental en analyse spectrale, il présente certaines limitations quant aux matrices pouvant être analysées. En effet, ce théorème décrit le comportement de matrice de moyenne 0 et de variance 1 ce qui limite les matrices pouvant être analysées. Pour une version plus générale de ce théorème, on peut s'inspirer des travaux de Tao [33], qui nous permettent d'énoncer le théorème 1.3.9.

Théorème 1.3.9 *Prenons une matrice complexe carrée de taille $N \times N$ dont les éléments sont i.i.d. avec une moyenne μ et une variance σ^2 . Désignons cette matrice par A . Dans ce cas, la distribution spectrale de A sera distribuée uniformément dans un cercle de rayon $\sigma\sqrt{N}$, à l'exception d'une valeur propre aberrante (qui se détache). Cette valeur propre, désignée par $\lambda_1(A)$, sera asymptotiquement située telle que*

$$\lambda_1(A) = \lambda_1(\langle A \rangle) = \text{Tr}\{\langle A \rangle\} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty. \quad (1.45)$$

Ici, $\lambda_1(\langle A \rangle) = \text{Tr}\{\langle A \rangle\}$ car la matrice $\langle A \rangle$ est une matrice de rang 1 qui ne possède qu'une seule valeur propre non nulle.

On retrouve bien sûr le cercle unitaire dans le cas où on regarde la distribution spectrale de $\frac{1}{\sigma\sqrt{N}}A$ qui revient à diviser toutes les valeurs propres par $\frac{1}{\sigma\sqrt{N}}$.

Le théorème 1.3.9 sera d'une importance capitale dans la description des valeurs propres faites dans l'article du chapitre 2.

1.4 Réseaux de neurones et leurs propriétés

Un des développements les plus importants en neuroscience est la création de méthodes permettant de représenter et d'enregistrer les interactions et connexions présentes dans le cerveau. Ces méthodes prennent notamment la forme de graphes communément appelés réseaux de neurones. Ces graphes peuvent être utilisés dans de nombreux domaines, tels que l'étude des connexions structurelles entre les neurones, ainsi que pour l'enregistrement physiologique de l'activité neuronale. Au cours des dernières années, d'énormes travaux ont été réalisés, ce qui a permis, entre autres, de mesurer la structure des connexions synaptiques de certains organismes vivants, tels que le nématode *C. elegans* ou la mouche à fruit *Drosophila*. Ces mesures nous ont fourni d'importantes informations sur la façon dont les connexions sont agencées dans un réseau de neurones.

L'importance de la science des réseaux appliquée aux réseaux de neurones en neuroscience réside dans sa capacité à fournir des informations cruciales sur le fonctionnement du cerveau. Comprendre la structure et la dynamique des réseaux de neurones biologiques permet de découvrir comment différentes régions du cerveau interagissent, comment les informations sont traitées et intégrées, et comment des altérations de ces réseaux peuvent conduire à des troubles neurologiques et psychiatriques. De plus, cette compréhension nous permet également de développer des modèles informatiques puissants, tels que les réseaux de neurones artificiels. Ces modèles ont grandement fait avancer nos connaissances en intelligence artificielle, et la reproduction d'un modèle computationnel capable d'imiter plusieurs fonctionnalités d'un cerveau biologique est encore aujourd'hui un sujet de recherche en plein essor. Il est voué à entraîner une grande révolution dans le domaine scientifique, mais aussi dans notre quotidien. Les

avancées dans la science des réseaux et des réseaux de neurones ouvrent de nombreuses perspectives, que ce soit pour mieux comprendre notre propre cerveau, améliorer les traitements des maladies neurologiques, ou encore développer des technologies basées sur l'intelligence artificielle qui peuvent avoir un impact significatif sur de nombreux domaines de notre vie quotidienne.

Dans cet ouvrage, on présente une analyse simplifiée d'un réseau de neurones dans le but d'introduire les propriétés structurelles généralement négligées, qui sont étudiées dans le cadre de ce projet. Ces propriétés structurelles comprennent la présence d'inhibition, la directionnalité, la modularité et l'hétérogénéité des connexions. Parmi celles-ci, l'inhibition se distingue par son importance dans la régulation de l'activité cérébrale. Pour étudier ces propriétés de manière approfondie, nous utiliserons l'analyse spectrale des graphes. De plus, dans cette section, on définit brièvement le fonctionnement d'un neurone et on décrit les contraintes imposées sur un graphe en fonction des propriétés structurelles mentionnées précédemment.

1.4.1 Les neurones

Les neurones sont les éléments primordiaux présents dans le cerveau. Dans un cerveau humain, on estime qu'il y a environ 10^{10} neurones, ce qui est considérable, bien que cela reste inférieur au nombre d'autres cellules présentes dans notre corps [34]. Les neurones sont des cellules spécialisées capables d'envoyer des signaux électriques sur de longues distances dans notre corps, ce qui leur permet de réguler nos actions, notre fonctionnement et même nos pensées.

Les neurones, tels qu'illustrés à la figure 1.3, sont connectés entre eux par des synapses. Ces synapses permettent la transmission d'informations entre les neurones, que ce soit par des processus électriques ou chimiques, ce qui entraîne un courant transmembranaire et modifie le potentiel de membrane d'un neurone. Lorsque ce courant atteint un certain seuil, il déclenche la génération d'un potentiel d'action ou d'un pic d'activité, qui est ensuite transmis à d'autres neurones, et ainsi de suite. C'est ce phénomène qui permet aux neurones de communiquer entre eux. Bien sûr, chaque neurone réagit de manière différente aux stimuli qu'il reçoit, ce qui contribue à la diversité des neurones et à leur fonctionnement.

L'ensemble des neurones connectés qui échangent des informations constitue un système dynamique. Dans ce cas, nous avons un système composé de plusieurs variables qui évoluent dans le temps. L'étude de tels systèmes dynamiques est une partie importante de la physique, car elle nous permet d'obtenir de nombreuses informations sur le système en question [34, 35]. L'analyse des systèmes dynamiques nous permet de comprendre comment les variables du système évoluent et interagissent au fil du temps. Cela inclut l'étude des comportements stables, des oscillations, des bifurcations et d'autres phénomènes dynamiques. Dans le cas des réseaux de neurones, l'analyse des systèmes dynamiques peut nous aider à comprendre la manière dont les signaux se propagent, la stabilité du réseau, les motifs d'activité et d'autres propriétés

émergentes. Ce genre d'analyse permet donc de déterminer beaucoup d'informations sur le cerveau. Entre autres, on peut identifier certains états correspondant à des troubles neurologiques comme l'épilepsie, qui se produit lorsque les neurones sont synchronisés entre eux [36].

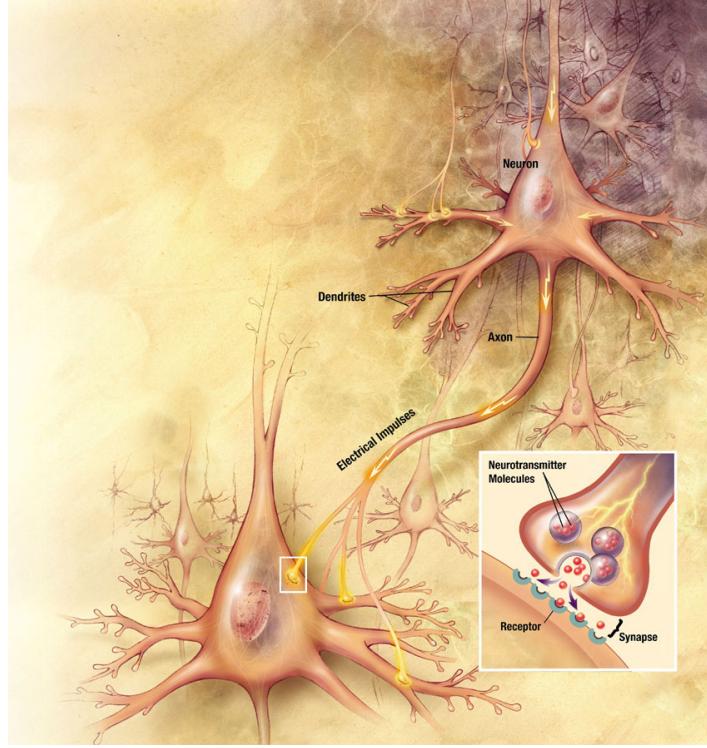


FIGURE 1.3 – Représentation de la connexion biologique entre deux neurones.²

Pour représenter la dynamique des neurones, il existe de nombreux modèles différents, certains d'entre eux étant présentés dans [34] ou [37]. Cependant, dans ce mémoire, nous n'explorerons pas tous ces modèles, car ils ne sont pas tous pertinents pour la compréhension du sujet abordé. Parmi les modèles importants couramment utilisés, on trouve les équations de type Wilson-Cowan. Ces équations expriment l'évolution de l'activité d'un neurone i , notée x_i , de manière relativement simple. Les équations de type Wilson-Cowan ont une forme particulière qui est, par exemple, utilisée dans les modèles de taux de décharge des neurones, c'est-à-dire la fréquence à laquelle un neurone s'active [37]. Elles sont écrites pour un système de N neurones, et elles peuvent être formulées comme

$$\tau_r \frac{dx_i}{dt} = -x_i + F \left(I_i(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j + \Theta \right), \quad (1.46)$$

où τ_r est le temps de relaxation d'un neurone, x_i est le taux de décharge d'un neurone, $I_i(t)$ est le courant d'entrée total dans le neurone i , w_{ij} est la force de connexion synaptique du

². U.S. National Institutes of Health

neurone présynaptique j vers le neurone postsynaptique i et F est une fonction arbitraire. Dans la section 1.4.3, on pourra voir l'importance de ce type d'équation dans le lien entre l'analyse spectrale et la dynamique.

1.4.2 Propriétés structurelles importantes dans la création d'un réseau de neurones

La création d'un graphe respectant les propriétés des réseaux de neurones peut être réalisée de nombreuses façons différentes. Dans le cadre de ce projet, nous nous sommes concentrés sur certaines de ces propriétés afin de créer des réseaux de neurones aléatoires pouvant être étudiés. Les propriétés étudiées au cours de ce mémoire sont la présence d'inhibition, le principe de Dale et la densité.

Dans les réseaux de neurones, l'inhibition est l'un des facteurs les plus importants [38]. En effet, celle-ci permet de diminuer l'activité dans les réseaux de neurones et ainsi d'empêcher d'avoir un excès d'activité dans le cerveau, ce qui, on l'imagine, nuirait considérablement à son bon fonctionnement. Dans la matrice W , qui décrit les poids des connexions synaptiques entre les neurones, l'inhibition se traduit par des éléments négatifs. Ainsi, pour certains neurones i et j , on aura $w_{ij} < 0$ si la connexion $j \rightarrow i$ est inhibitrice. Bien sûr, nous avons également la présence de connexions excitatrices qui augmentent l'activité neuronale et sont décrites par des poids $w_{ij} > 0$.

Le principe de Dale est l'une des propriétés structurelles les plus importantes dans le cerveau [39, 40]. Il stipule que les connexions synaptiques établies par un neurone avec d'autres neurones seront toujours du même type. Autrement dit, si un neurone j est inhibiteur, alors les connexions synaptiques provenant du neurone pré-synaptique j vers un neurone post-synaptique i , définies comme $j \rightarrow i$, seront toujours de type inhibiteur. Et inversement, si le neurone j est excitateur, alors les connexions synaptiques $j \rightarrow i$ seront toujours excitatrices. Cette contrainte entraîne la création de sous-ensembles dans un réseau de neurones, où l'on a un groupe de neurones excitateurs qui augmentent l'activité cérébrale et un autre groupe qui est celui des neurones inhibiteurs qui régulent l'activité cérébrale. Bien sûr, ce ne sont pas les seuls groupes pouvant être présents dans le cerveau, les différentes régions dans un cerveau peuvent aussi former des groupes à part entière. Ceux-ci se comportent différemment entre eux, mais on retrouve toujours ce principe de neurones excitateurs et inhibiteurs. Dans la matrice de poids W , cela impose une contrainte sur les éléments des colonnes de la matrice. On sait que les éléments de la matrice W décrivent les connexions, telles que $w_{ij} =$ la connexion $j \rightarrow i$. Dans ce cas, en imposant un type aux neurones, nous imposons que les éléments de la colonne associée à ce neurone soient tous du même signe, soit positifs, soit négatifs.

La densité est également une caractéristique importante à considérer dans un réseau de neurones, car elle peut grandement influencer sa dynamique. Par exemple, dans le cerveau, la

densité des connexions neuronales est l'une des caractéristiques associées à l'autisme, où l'on observe une différence dans les connexions synaptiques [41, 42, 43, 44]. Ou encore, le manque de connexions dans le cerveau est également observé chez les personnes souffrant de la maladie d'Alzheimer [45, 46].

Enfin, il ne faut pas oublier que les réseaux de neurones sont des réseaux orientés. Cette contrainte impose une matrice W non symétrique et introduit de nombreuses difficultés dans l'analyse spectrale de cette matrice.

Comme on a pu le voir, toutes ces propriétés introduisent plusieurs contraintes sur la matrice de poids. Il peut être bon de regarder un exemple afin de bien comprendre comment cela affecte la construction de la matrice de poids. Ici, l'exemple 1.4.1 propose un réseau simple pour mieux visualiser la construction d'une matrice de poids.

Exemple 1.4.1 Prenons un système simpliste constitué de 2 noeuds excitateurs et 1 noeud inhibiteur représenté à la figure 1.4, où les noeuds e_1 et e_2 sont les noeuds excitateurs et le noeud i_1 est le noeud inhibiteur.

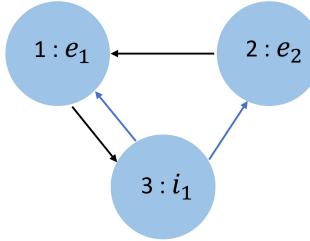


FIGURE 1.4 – Système simple de 2 noeuds excitateurs et 1 noeud inhibiteur ayant des connexions excitatrices (noir) et des connexions inhibitrices (bleu)

Si l'on assigne la valeur de 1 pour les connexions excitatrices et la valeur de -1 pour les connexions inhibitrices, on obtient la matrice de poids W telle que

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la désignation des éléments dans la matrice W , on a assigné la numérotation $e_1 = 1$, $e_2 = 2$ et $i_1 = 3$.

L'exemple 1.4 est la norme que nous utiliserons pour la création de nos modèles dans le chapitre 2.

1.4.3 L'analyse spectrale appliquée aux réseaux de neurones

Comme nous le savons à présent, lorsqu'on discute de réseaux, l'analyse spectrale nous apporte toujours d'importantes informations sur ceux-ci, et les réseaux de neurones ne font pas exception. En utilisant l'analyse spectrale, il nous est possible de déduire d'importantes informations sur la structure des réseaux (par exemple, le nombre moyen de connexions et la modularité) ainsi que sur le comportement à grande échelle des dynamiques qui s'y propagent (par exemple, le seuil de synchronisation), comme démontré dans des travaux récents réalisés au sein de mon groupe de recherche [18, 19]. De plus, un autre point important concernant les réseaux de neurones est l'étude de la stabilité du système, qui est un phénomène très étudié en analyse spectrale [47, 48, 40, 49].

Pour bien comprendre le lien entre l'analyse spectrale de la matrice de connexions d'un réseau de neurones et sa dynamique, il nous faut d'abord revenir aux équations de type Wilson-Cowan. Une autre façon de les décrire, telle qu'on la retrouve dans [50], est

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -\frac{x_i(t)}{\tau} + \sum_{j=1}^N w_{ij}\phi(x_j(t)). \quad (1.47)$$

Ici, w_{ij} correspond à la force de la connexion $j \rightarrow i$, et $\phi(x_j(t))$ est une fonction représentant le taux de décharge. Cette expression peut être réécrite sous forme matricielle telle que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\frac{\mathbf{x}}{\tau} + W\phi(\mathbf{x}). \quad (1.48)$$

Suivant la méthode de [35], pour étudier la dynamique de stabilité de notre système il nous faut analyser les points d'équilibres correspondant à $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0$. Dans ce cas, on trouve que les points d'équilibres d'une telle équation sont les solutions de l'équation

$$\mathbf{x}^* = \tau W\phi(\mathbf{x}^*). \quad (1.49)$$

Les points d'équilibre peuvent être difficiles à déterminer, mais ils ne sont pas impossibles à trouver. À partir de ces points d'équilibre, on peut ensuite déterminer le type de stabilité auquel ils appartiennent. Pour ce faire, il faut étudier le spectre de la matrice Jacobienne. La matrice Jacobienne est une matrice qui contient les dérivées partielles du système d'équations par rapport à ses variables. Pour un système décrit comme

$$\frac{dx_i}{dt} = H_i(x_1, \dots, x_N), \quad (1.50)$$

la matrice Jacobienne est exprimée comme

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_N}{\partial x_N} & \cdots & \frac{\partial H_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

En évaluant le spectre de cette matrice aux points d'équilibre x_i^* , on peut analyser les valeurs propres associées. Les valeurs propres déterminent la stabilité du système. Si toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative, le point d'équilibre est stable. En revanche, si au moins une valeur propre a une partie réelle positive, le point d'équilibre est instable. Si le point d'équilibre est instable, on peut obtenir des activités neuronales oscillantes tandis que dans un état stable, l'activité vient atteindre une activité constante. Pour notre système d'équations, notre matrice jacobienne a la forme

$$J(\mathbf{x}^*) = \left[-\frac{1}{\tau} \mathbb{I}_N + W\phi'(\mathbf{x}^*) \right], \quad (1.52)$$

où \mathbb{I}_N est la matrice identité et $\phi'(\mathbf{x}^*)$ est une matrice diagonale de taille $N \times N$ ayant comme entrées

$$\frac{\partial \phi(x_j)}{\partial x_j}|_{\mathbf{x}^*} = \phi'(x_j^*). \quad (1.53)$$

Enfin, en suivant toujours la démarche de [50], on peut approximer, pour un système hétérogène, que $\phi'(\mathbf{x}^*) = \gamma$, où γ est une constante. Dans ce cas, la matrice jacobienne,

$$J(\mathbf{x}^*) = \left[-\frac{1}{\tau} \mathbb{I}_N + W\gamma \right], \quad (1.54)$$

est principalement influencée par la matrice de connexion W . Ainsi, la dynamique du réseau est directement reliée au spectre de la matrice des poids de connexions. La stabilité et les propriétés dynamiques du réseau sont donc directement liées au spectre de la matrice des poids de connexions W . Cette relation entre le spectre de la matrice de poids et la dynamique du réseau est cruciale pour comprendre le comportement global et les propriétés émergentes des réseaux de neurones. La démarche faite dans cette section démontre alors l'importance d'analyser le spectre de la matrice de poids. Dans le cadre de l'étude menée au chapitre 2, il sera assez aisément d'établir un parallèle entre la matrice de poids et la matrice d'adjacence développée, qui constitue une version simplifiée où les poids de connexions sont seulement décrits par $-1, 0$ ou 1 .

Chapitre 2

Incidence de la loi de Dale et de la densité de connexion sur le spectre des réseaux neuronaux aléatoires

Impact of Dale's law and connection density on the spectrum of random neural networks

Jeson Hermans

*Département de physique, de génie physique et d'optique, Université Laval, Québec (QC), Canada
Centre interdisciplinaire en modélisation mathématique de l'Université Laval, Québec (QC), Canada*

Patrick Desrosiers

*Département de physique, de génie physique et d'optique, Université Laval, Québec (QC), Canada
Centre interdisciplinaire en modélisation mathématique de l'Université Laval, Québec (QC), Canada
Centre de recherche CERVO, Québec (QC), Canada*

2.1 Résumé

La compréhension du comportement des réseaux neuronaux à travers l'analyse des valeurs propres a fourni des connaissances précieuses, en particulier en ce qui concerne leurs dynamiques émergentes chaotiques ou de faible dimension. Cependant, les études précédentes se sont appuyées sur des modèles qui encapsulent seulement un nombre limité de propriétés structurelles observées dans les réseaux de neurones biologiques. Cet article aborde ces limitations en utilisant des approches analytiques et numériques pour examiner les propriétés spectrales des réseaux neuronaux aléatoires. Il prend en compte des aspects structurels essentiels tels que la direction des connexions, la densité de connexions variable et surtout la présence de connexions excitatrices et inhibitrices. Nous construisons deux familles de graphes aléatoires orientés signés qui généralisent le modèle bien connu d'Erdős-Rényi : l'une respectant le principe de Dale régulant les connexions inhibitrices, et l'autre non. Cette approche permet une évaluation ciblée de l'influence du principe, révélant sa tendance à comprimer la majeure partie du spectre et à élargir la distribution de la valeur propre dominante.

De plus, nos expériences numériques révèlent la présence de transitions de phase dans la distribution de la valeur propre dominante qui se produisent lorsque le nombre attendu de connexions inhibitrices est progressivement modifié. Nous observons que la position des valeurs critiques des paramètres et la brusquerie des transitions sont impactées à la fois par le principe de Dale et la densité de connexions, mettant en évidence une différence notable de répartition entre les deux modèles. En scrutant méticuleusement les spectres de valeurs propres à la lumière des propriétés structurelles clés, cette étude approfondit non seulement notre compréhension des dynamiques des réseaux neuronaux, mais souligne également l'impératif d'obtenir de nouvelles perspectives mathématiques grâce à la théorie des matrices aléatoires.

2.2 Abstract

Understanding the behavior of neuronal networks through eigenvalue analysis has yielded valuable insights, especially regarding their emergent chaotic or low-dimensional dynamics. However, previous studies rely on models that encapsulate only a limited number of structural properties observed in networks of biological neurons. This paper addresses these limitations by employing analytical and numerical approaches to examine the spectral properties of random neural networks. It considers essential structural aspects such as connection directionality, variable connection density, and most importantly, the presence of both excitatory and inhibitory connections. We build two families of signed directed random graphs that generalize the well-known Erdős-Rényi model : one adhering to Dale's principle regulating the inhibitory connections, and the other not. This approach allows a focused assessment of the principle's influence, revealing its tendency to compress the bulk of the spectrum and to broaden the distribution of the dominant eigenvalue.

Furthermore, our numerical experiments uncover the presence of phase transitions in the distribution of the dominant eigenvalue that occur when the expected number of inhibitory connections is gradually modified. We observe that the position of the critical parameters and the abruptness of the transitions are impacted by both Dale’s principle and the connection density. By meticulously scrutinizing eigenvalue spectra in light of key structural properties, this study not only deepens our understanding of neural network dynamics but also underscores the imperative for novel mathematical insights from random matrix theory.

2.3 Introduction

Recurrent neural networks (RNNs), whether biological, mathematical, or artificial, generate rich spatial and temporal activity patterns that form the foundation for information processing, learning, and decision-making [51, 52]. The elucidation of how inter-neuronal connections instigate and sustain these dynamic behaviors has been the focus of substantial theoretical investigation. A predominant strategy within this context involves computing the spectrum of the connectivity (a.k.a. adjacency) matrix, a topic deeply rooted within Spectral Graph Theory (SGT) [17, 22, 53, 21].

In their seminal work, Sompolinsky et al. [54, 55] proved that in large RNNs with random connections, the onset of chaotic activity is dictated by the spectral radius of the connectivity matrix. These RNNs admitted both positive and negative elements, respectively representing excitatory and inhibitory connections, two essential constituents of neural networks. Zhou et al. [56] later showed that the shape of the adjacency spectrum of RNNs is instrumental in determining whether their dynamics exhibit chaotic behavior (the spectrum bulk contains all the eigenvalues) or converge to stable attracting points (the spectrum is characterized by a bulk and a few isolated outliers). These spectral outliers are instrumental in inducing stable dynamical patterns and enhancing the computational capacity of both densely [57] and sparsely [58] connected RNNs. Interestingly, these outliers also appear in the spectrum of RNNs that have been trained to accomplish neuroscience-inspired tasks [59, 60]. Recent advances have leveraged the dominant and subdominant outliers, along with their associated eigenvectors, as predictive markers for the global stability and resilience of RNNs [18, 61] and their capacity to synchronize [19]. Further research identified small groups of hyper-excitable neurons within the network as critical modulators, increasing its spectral radius and enhancing its computational capacity [49]. Moreover, the spectrum of random RNNs having zero-mean connectivity matrix and block structure (modules) was characterized [62] and shown to influence the low-dimensionality of their dynamics [63].

While these studies provide valuable insights, many do not address the directionality of neural connections or Dale’s principle (a.k.a. Dale’s law) [64]. This neuroscience principle posits that the outgoing connections of a neuron should be of the same nature, either all excitatory or

all inhibitory. Rajan and Abbott [9] were the first to characterize the connectivity-matrix spectrum of random neural networks that complies with Dale’s principle and the excitatory-inhibitory balance. They computed the spectral radius and studied the inhomogeneity of the spectral bulk. Their work was very recently generalized to include the sparsely connected networks, revealing new aspects affecting the inhomogeneity of the bulk [50]. Notwithstanding their meticulous spectral analysis of random networks obeying Dale’s law, these publications employ matrix models devoid of spectral outliers. Given the mounting evidence highlighting the paramount significance of outliers on emerging RNN dynamical patterns [57, 58, 65] and recent findings showing the creation of outliers while training RNNs submitted to Dale’s principle [66], there is pressing need for novel models that both generate outliers and consider Dale’s principle.

This paper addresses these gaps by conducting a combined analytical and numerical exploration of the spectral properties of random neural networks, integrating crucial structural attributes : directionality of connections, presence of excitatory and inhibitory connections, adherence to Dale’s principle, and variable density of connections. For this, we introduce two distinct random network models, one adhering to Dale’s principle and the other disregarding it. This approach facilitates a focused investigation into the impact of Dale’s principle on the spectrum. Both models generalize the well-known Gilbert random graph [5] (a.k.a. Erdős-Rényi model), denoted $G(N, p)$, where N is the number of vertices (neurons) and p is the probability of an edge (connection) between each pair of vertices. This model generates undirected unsigned random networks and has been influential in network science [15]. The spectrum of the adjacency matrix of $G(n, p)$ is a classical result of SGT [28] that has been generalized to incorporate expected degrees (number of connections) [67] and block-structure [68]. To the best of our knowledge, $G(n, p)$ has not yet been generalized to incorporate the structural attributes of neural networks. Previous studies considering the spectrum of random neural network models mainly focused on matrices with Gaussian distributed elements [69, 57, 58, 65, 9, 50].

The paper is organized as follows. In Section 2.4, we introduce the random network models, compute their expected adjacency matrices, and the spectrum of the latter. Subsequently in Section 2.5, we delve into the spectral analysis of the eigenvalue spectrum for both models using results from random matrix theory. We characterize the mean behavior of the spectrum of the two models and highlight the differences between them. Building upon the insights derived from this theoretical analysis, we use numerical simulations in Section 2.6 to further characterize of spectral properties of the two models. This analysis encompasses the characterization of eigenvalue distributions and other behaviors arising due to the finite size of our models. Concluding the article, Section 2.7 succinctly summarizes the research’s contributions and outlines potential avenues for further exploration.

2.4 Random neural network models

We begin our analysis of random neuronal networks by introducing two models with distinct characteristics. The first model adheres to Dale's principle, which posits that a neuron can only be either excitatory (E) or inhibitory (I). This means that all of its outgoing connections are either all excitatory or all inhibitory, respectively. In contrast, the second model does not abide by Dale's principle, allowing a neuron to have both excitatory and inhibitory outgoing connections.

Both models represent neurons and connections as vertices and edges in a random graph G that is signed and directed. The total number of neurons N is fixed while the number of edges is random. The random graph is encoded in a $N \times N$ random adjacency matrix A whose element A_{ij} describes the connection (edge) going from neuron (vertex) j to neuron (vertex) i as follows :

$$A_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{if } j \in I \text{ and there is a connection } j \rightarrow i, \\ 0 & \text{if there is no connection } j \rightarrow i, \\ 1 & \text{if } j \in E \text{ and there is a connection } j \rightarrow i. \end{cases}$$

2.4.1 Dale-compatible model (DCM)

The DCM focuses on two distinct populations of neurons : excitatory (E) and inhibitory (I). Each population consists of N_E excitatory neurons and N_I inhibitory neurons, with $N = N_E + N_I$ being the total number of neurons in the model. In the corresponding random adjacency matrix, A_{DCM} , N_E columns describe the outgoing connections of the excitatory neurons while N_I columns describe those of the inhibitory neurons. Dale's principle mandates that the elements within a column share the same sign. Thus, N_E (resp. N_I) columns have positive (resp. negative) or zero values.

Within the first N_E columns of A_{DCM} , the elements are i.i.d. random variables that can assume two values : 1 with probability p_E , and 0 with a probability $1 - p_E$. Similarly, within the last N_I columns, the elements can be either -1 with probability p_I , or 0 with probability $1 - p_I$. Thus, the elements of the DCM adjacency matrix are independent random variables whose probability is defined as

$$P[(A_{\text{DCM}})_{ij} = a] = p_E \delta_{j \leq N_E} \delta_{a=1} + \left((1 - p_E) \delta_{j \leq N_E} + (1 - p_I) \delta_{j > N_E} \right) \delta_{a=0} + p_I \delta_{j > N_E} \delta_{a=-1},$$

where δ_S denotes the Iverson bracket, i.e., $\delta_S = 1$ if statement S is true and $\delta_S = 0$ otherwise.

Note that the ordering of the columns is irrelevant for us since the spectrum of a matrix A is invariant under all similarity transformations of the form $A \mapsto PAP^{-1}$, where P is a $N \times N$ invertible matrix, which include the simultaneous permutations of the rows and columns. From a graph perspective, the simultaneous permutation of the rows and columns corresponds to a relabeling (or reordering) of the graph's vertices.

Now, let us define mean adjacency value as

$$\bar{A}_{\text{DCM}} = \frac{1}{N^2} \sum_{ij} (A_{\text{DCM}})_{ij}, \quad (2.1)$$

which is a random variable. The expected value and variance of this variable are easily computed :

$$\mathbb{E}[\bar{A}_{\text{DCM}}] = (1 - f_I)p_E - f_I p_I, \quad (2.2)$$

$$\text{Var}[\bar{A}_{\text{DCM}}] = (1 - f_I)p_E(1 - p_E) + f_I p_I(1 - p_I), \quad (2.3)$$

where $f_I = N_I/N$ denotes the fraction of inhibitory neurons. These equations respectively correspond to the expected value of the mean¹ of the elements of A_{DCM} and the variance of the mean of the elements of A_{DCM} , which turns out to equal the mean of all variances $\text{Var}[(A_{\text{DCM}})_{ij}]$ due to the independence of the matrix elements.

Moreover, the expected value of the DCM's adjacency matrix is given by the equation

$$\mathbb{E}[A_{\text{DCM}}] = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_E & \cdots & p_E \\ \underbrace{}_{N(1-f_I)} & & \underbrace{}_{Nf_I} \\ -p_I & \cdots & -p_I \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Clearly, $\mathbb{E}[A_{\text{DCM}}]$ is a rank-one matrix, meaning that there's only one non-zero eigenvalue, which we denote λ_{DCM}^* . The latter is given by the formula

$$\lambda_{\text{DCM}}^* = \text{Tr}(\mathbb{E}[A_{\text{DCM}}]) = N(1 - f_I)p_E - Nf_I p_I. \quad (2.5)$$

To incorporate the effect of network density into our analysis, we parameterize the connection probabilities as

$$p_E = \frac{c_E}{N}, \quad p_I = \frac{c_I}{N}. \quad (2.6)$$

Here, c_E and c_I represent the expected out-degree of an excitatory vertex and of an inhibitory vertex, respectively. The expected number of inhibitory connections in the DCM is thus equal to $N_I c_I = N^2 f_I p_I$. In the case of a sparse graph², we will have $c_E = O(1)$ and $c_I = O(1)$, whereas for a dense graph, we will have $c_E = O(N)$ and $c_I = O(N)$. Therefore, assuming that number of excitatory and inhibitory neurons are of the same order, the fraction of inhibitory neurons satisfies $f_I = O(1)$ and we expect $O(N)$ (resp. $O(N^2)$) excitatory and inhibitory connections in a sparse (resp. dense) neural network.

1. Throughout the paper, the word “mean” is synonym of “arithmetic mean” and should not be confused with the “expectation value” since in general, the mean is taken over a set of random variables and thus returns a random variable, contrary to the result of the expected value, which is a real number.

2. Such graphs have $O(N)$ edges. They are sometimes described as extremely sparse [70, 71] or ultra-sparse [72] since they are extreme cases of sparse networks [15, Sec. 6.10.1], which are characterized by $o(N^2)$ edges.

2.4.2 Dale-incompatible model (DIM)

The second model, DIM, does not adhere to Dale's principle. The edges are randomly assigned as either inhibitory or excitatory. To build the random adjacency matrix A_{DIM} , each matrix element (edge) is initially chosen to be inhibitory with probability p or excitatory with probability $1 - p$. After that, a connection exists, with probability p_E for an excitatory edge and probability p_I for an inhibitory edge. We again parameterize the edge probabilities as $p_E = \frac{c_E}{N}$ and $p_I = \frac{c_I}{N}$, where c_E and c_I are constants.

In other words, the adjacency matrix of the DIM is given by the following Hadamard (i.e., element-wise) product of two non-independent random matrices :

$$A_{\text{DIM}} = X \circ Y, \quad (2.7)$$

where X has i.i.d. binary elements such that

$$X_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{with probability } p \text{ } (j \rightarrow i \text{ is inhibitory}) \\ 1 & \text{with probability } 1 - p \text{ } (j \rightarrow i \text{ is excitatory}) \end{cases}$$

while the elements of Y are i.i.d. Bernoulli variables with conditional probability

$$P[Y_{ij} = y | X_{ij} = x] = p_I^y (1 - p_I)^{1-y} \delta_{x=-1} + p_E^y (1 - p_E)^{1-y} \delta_{x,1}. \quad (2.8)$$

In summary, the elements of A_{DIM} are i.i.d. ternary variables with probability

$$P[(A_{\text{DIM}})_{ij} = a] = p p_I \delta_{a=-1} + (1 - p) p_E \delta_{a=1} + (p(1 - p_I) + (1 - p)p_E) \delta_{a=0}. \quad (2.9)$$

Using the last equation, we deduce that the expected number of inhibitory connections is equal to $N^2 P[(A_{\text{DIM}})_{ij} = -1] = N^2 p p_I = N p c_I$. Therefore, the DCM and the DIM share the same expected number of inhibitory connections for all choices of parameters N and p_I if and only if

$$f_I = p. \quad (2.10)$$

We call this equation the models' correspondence condition. It will always be our starting point for comparing spectral properties the DCM and the DIM. It ensures that the main difference between the two models is not the expected number of inhibitory connections, but the ordering of these connections in the adjacency matrices, one following and the other not following Dale's principle.

The expected value and variance of the mean adjacency in the DIM,

$$\bar{A}_{\text{DIM}} = \frac{1}{N^2} \sum_{ij} (A_{\text{DIM}})_{ij}, \quad (2.11)$$

are given by the equations :

$$\mathbb{E}[\bar{A}_{\text{DIM}}] = (1-p)p_E - pp_I, \quad (2.12)$$

$$\text{Var}[\bar{A}_{\text{DIM}}] = (1-p)p_E + pp_I - \{(1-p)p_E - pp_I\}^2. \quad (2.13)$$

In this case, because the elements of A_{DIM} are i.i.d we can go further and conclude that $\mathbb{E}[\bar{A}_{\text{DIM}}] = \mathbb{E}[(A_{\text{DIM}})_{ij}]$ and $\text{Var}[\bar{A}_{\text{DIM}}] = \text{Var}[(A_{\text{DIM}})_{ij}]$ for all i, j .

The i.i.d. nature of the matrix elements also simplifies the expected value of the DIM adjacency matrix :

$$\mathbb{E}[A_{\text{DIM}}] = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-p)p_E - pp_I & \dots & (1-p)p_E - pp_I \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Once again, this is a rank-one matrix whose only non-zero eigenvalue is

$$\lambda_{\text{DIM}}^* = \text{tr}\{\mathbb{E}[A_{\text{DIM}}]\} = N(1-p)p_E - Npp_I. \quad (2.15)$$

By imposing the models' correspondence condition Eq. (2.10), we get our first comparative result : even if the expected adjacency matrices for the DCM and the DIM are different, they share the same eigenvalues. Thus, imposing Dale's principle does not affect the spectrum of the expected adjacency matrix.

2.5 Asymptotic spectral properties

The adjacency matrices of the DCM and DIM are random, real, asymmetric, and have independent elements. Although Random Matrix Theory [73, 74] has mostly studied the spectrum of hermitian (including real symmetric) or unitary (including real orthogonal) matrices, many researchers in the field have investigated the spectral properties of non-hermitian matrices, starting with Ginibre [75] and Girko [29]. The latter proved what is now known as Girko's circular law, which states that the spectrum of matrices with i.i.d. elements of mean zero and variance $1/N$ (and additional moment conditions) tends to fill uniformly the unit disk of the complex plane in the asymptotic limit $N \rightarrow \infty$.

As is, Girko's circular law does not apply directly to our random neural network models due to the non-zero mean of the adjacency matrices (DCM and DIM) and the non-identically distributed elements (DCM). However, recent advances by Tao, Tu and Krishnapur [76, Corollary 1.12, Theorem C.2] allow us to conclude (under some mild conditions) that when the expected value of the $N \times N$ random matrix A , $\mathbb{E}[A]$ has finite rank and the entries are independent (but not necessarily identically distributed), the spectrum of A tends to uniformly fill the disk of radius proportional to \sqrt{N} , and centered at the origin of the complex plane, as $N \rightarrow \infty$.

Therefore, for both the DCM and the DIM, the bulk of the spectrum of the adjacency matrix is constituted by a disk of radius proportional to \sqrt{N} that becomes uniformly filled as $N \rightarrow \infty$. Using very recent work , [77, 78] allowing differences of variance between the random matrix elements, we will see below that the constant of proportionality differs from one model to the other.

The spectrum of each instance of A_{DCM} and A_{DIM} also contains a single outlier eigenvalue that is located in the vicinity of the principal eigenvalues Eq. (2.5) and Eq. (2.15), respectively. This seems to be a direct consequence of Tao's theorem on bounded perturbations of random matrices [33], valid when the elements of $A - \mathbb{E}[A]$ are i.i.d. variables. Although the DCM does not meet this requirement, our numerical experiments reported in the next section suggest that the theorem might be generalizable to include our case. Note that Tao's theorem has been extensively exploited in neural network models based on the perturbation of gaussian matrix models of mean zero and homogeneous variance [79, 80, 57, 81, 69, 50]. Under the models' correspondence condition and assuming the applicability of Tao's theorem, we show below that Dale's principle does not affect the center of the distribution of the outlier. However, in the next section, we will numerically show the shape of the outlier's distribution is indeed affected by Dale's principle.

2.5.1 Bulks' radii

Adapting the results of [33, 77], we see that the eigenvalues of our models tend to uniformly fill, as $N \rightarrow \infty$, a disk centered at the origin and of radius

$$r_{\text{bulk}} = \sqrt{N \text{Var}[\bar{A}]}, \quad (2.16)$$

where \bar{A} denotes the mean adjacency element as in Eqs. (2.1) and (2.12). This equation gives us the expected radius for the two random neural network models. For the DCM, we have

$$r_{\text{DCM}} = \sqrt{N} \sqrt{(1 - f_I)p_E(1 - p_E) + f_I p_I(1 - p_I)} \quad (2.17)$$

while for the DIM, we have

$$r_{\text{DIM}} = \sqrt{N} \sqrt{(1 - p)p_E + p p_I - ((1 - p)p_E - p p_I)^2}. \quad (2.18)$$

Now, imposing the models' correspondence condition Eq. (2.10), we get the following difference of squared radii :

$$r_{\text{DIM}}^2 - r_{\text{DCM}}^2 = Np(1 - p)(p_E + p_I)^2. \quad (2.19)$$

The right-hand side is nonnegative and it is strictly positive for all probabilities in the open interval $(0, 1)$, which is the condition to have the presence of both inhibitory and excitatory connections. Thus

$$r_{\text{DIM}} > r_{\text{DCM}} \quad (2.20)$$

for all non-trivial cases. Moreover, the difference of squared radii is maximum when $p = 1/2$, corresponding to the case where half of the adjacency matrix elements are designated as inhibitory.

So far, we have shown that imposing Dale's principle tends to diminish the bulk radius of large random neuronal networks. To better quantify the difference of radii caused by Dale's principle, we first write

$$r_{\text{DIM}} = r_{\text{DCM}} \sqrt{1+x}, \quad x = \frac{Np(1-p)(p_E + p_I)^2}{r_{\text{DCM}}^2}, \quad (2.21)$$

which implies the equation

$$r_{\text{DIM}} - r_{\text{DCM}} = \sqrt{1+x} - 1. \quad (2.22)$$

We then use the inequalities

$$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2} \quad (2.23)$$

together with $r_{\text{DCM}}^2 = N[(1-p)p_E(1-p_E) + pp_I(1-p_I)]$. We end up with the following bounding expression

$$\frac{s}{2} - \frac{s^2}{8} \leq r_{\text{DIM}} - r_{\text{DCM}} \leq \frac{s}{2} \quad (2.24)$$

where

$$s = \frac{p(1-p)(p_E + p_I)^2}{(1-p)p_E(1-p_E) + pp_I(1-p_I)} \quad (2.25)$$

In the dense regime, although the order of the radius is $O(N^{1/2})$, the difference of radii is $O(1)$. On the other hand, in the sparse regime, the order of s becomes $O(1/N)$, meaning that the difference in radius is also $O(1/N)$. The asymptotics of relative difference in radius thus depends upon the network density as follows :

$$\frac{r_{\text{DIM}} - r_{\text{DCM}}}{r_{\text{DIM}}} = \begin{cases} O(N^{-1/2}), & \text{dense network,} \\ O(N^{-1}), & \text{sparse network.} \end{cases} \quad (2.26)$$

2.5.2 Outliers and dominant eigenvalues

As mentioned at the beginning of the section, the spectrum of our random neural network models can contain an outlier eigenvalue λ_{out} in addition to the circular bulk of the spectrum. The presence of the outlier is easily understood by writing the random adjacency matrix A as $A - \mathbb{E}[A] + \mathbb{E}[A]$, which clearly contains a random part of mean zero, $A - \mathbb{E}[A]$, and a deterministic part $\mathbb{E}[A]$ acting as a perturbation of the random part. In our case $\mathbb{E}[A]$ has rank equal to 1, and thus belongs to the general theory of bounded perturbations of random matrices [33] predicting the concentration of the outlier eigenvalues of A around those of $\mathbb{E}[A]$ when the latter is sufficiently small.

We have proved that the expected adjacency matrix in both the DCM and DIM has only one outlier, respectively given by Eqs. (2.5) and (2.15). According to the above discussion

and for sufficient large N , we thus expect both random matrices to have an outlier eigenvalue respectively located at

$$\lambda_{\text{DCM-out}} = N((1 - f_I)p_E - f_I p_I) \quad (2.27)$$

and

$$\lambda_{\text{DIM-out}} = N((1 - p)p_E - p p_I). \quad (2.28)$$

Both values coincide when the models' correspondence condition is imposed.

We see from the above equations that the outlier eigenvalues progressively go, as the number of expected inhibitory connections increases, from large positive, to null, and to large negative values. Inhibition thus has a drastic effect on the outliers and may provoke their disappearance into the bulk of the spectrum. As long as $\lambda_{\text{DCM-out}}$ or $\lambda_{\text{DIM-out}}$ is away from the bulk, it provides a good estimate of the dominant (a.k.a. principal) eigenvalue λ_{dom} of the corresponding adjacency matrix, i.e., the eigenvalue with the largest modulus :

$$\lambda_{\text{dom}} = \underset{\lambda \in \text{spectrum}}{\operatorname{argmax}} |\lambda|. \quad (2.29)$$

However, when $\lambda_{\text{DCM-out}}$ or $\lambda_{\text{DIM-out}}$ belongs to the bulk of the spectrum, we expect the dominant eigenvalue to be located at some complex value near the circular boundary of the bulk. In the large N limit, we thus expect the principal eigenvalue, λ_{dom} to behave as

$$|\lambda_{\text{dom}}| = \max [\lambda_{\text{out}}, r_{\text{bulk}}]. \quad (2.30)$$

As λ_{out} becomes close to r_{bulk} from the right, we expect λ_{dom} to undergo a first phase transition, leaving the positive real axis to become a complex number in the periphery of the bulk, and as λ_{out} becomes close to $-r_{\text{bulk}}$, we expect λ_{dom} to transition once again, converging to the negative real axis. Thus, in the asymptotic limit, the transitions are expected to occur when $|\lambda_{\text{out}}| = r_{\text{bulk}}$.

In the DCM, the strength of inhibition is mainly controlled by the fraction of inhibitory neurons f_I . The transitions are expected to occur at critical values f^* , which are determined by the equation $\lambda_{\text{DCM-out}} = r_{\text{DCM}}$, leading to

$$f_I^* = \frac{\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\alpha_1\gamma_1}}{2\alpha_1}, \quad (2.31)$$

where

$$\alpha_1 = (p_E + p_I)^2, \quad (2.32)$$

$$\beta_1 = 2p_E(p_E + p_I) + \frac{p_I(1 - p_I) - p_E(1 - p_E)}{N}, \quad (2.33)$$

$$\gamma_1 = p_E^2 - \frac{p_E(1 - p_E)}{N}. \quad (2.34)$$

For the DIM, we use the probability of categorizing a matrix element as inhibitory, p , as the first parameter for regulating the strength of inhibition. Its critical values p^* are determined by the equation for asymptotic transition, $\lambda_{\text{DIM-out}} = r_{\text{DIM}}$, which implies

$$p^* = \frac{\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}, \quad (2.35)$$

where

$$\alpha_2 = \left(1 + \frac{1}{N}\right)(p_E + p_I)^2, \quad (2.36)$$

$$\beta_2 = 2p_E(p_E + p_I) + \frac{p_E(-2p_E - 2p_I + 1) - p_I}{N}, \quad (2.37)$$

$$\gamma_2 = p_E^2 - \frac{p_E(1 - p_E)}{N}. \quad (2.38)$$

2.6 Numerical analysis

We have proposed two comparable models of random neural networks, DCM and DIM, whose $N \times N$ adjacency matrices have independent elements and have a rank-one expected value. These basic properties have allowed us to invoke recent results of Random Matrix Theory and predict the asymptotic behavior of their spectra : most eigenvalues are found inside a circular bulk of radius proportional to \sqrt{N} while the dominant eigenvalue is real and away from the bulk, unless the parameter controlling the number of inhibitory connections crosses some critical value, after which the dominant eigenvalue becomes complex and located on the boundary of circular bulk.

We now check these asymptotic predictions using numerical simulations with large, but finite random matrices. This analysis will also help us get a finer picture of the distribution of the eigenvalues and how the latter is impacted by Dale's principle and the density of connections. We will characterize the distribution of the dominant and subdominant eigenvalues. We will also look at the distribution of the eigenvalues inside the bulk. All numerical experiments presented here were performed using the Python package NumPy.

2.6.1 Large-scale structure of the spectrum

For our first simulations, we randomly generated large ($N = 2000$) matrices from the DCM and DIM, both in the sparse and then dense regimes. For each instance matrix, we computed its spectrum and collected the eigenvalues for each of the four pairs (model, density). The results are illustrated in Fig. 2.1. In all cases, we observe the presence of a circular bulk and a separated dominant eigenvalue, in accordance with the asymptotic analysis. As predicted by Eq. (2.26), the radius of the bulk in the dense regime is significantly smaller when Dale's principle applies than when it does not, while this difference is undetectable in the sparse regime.

However, certain behaviors observe in Fig. 2.1 were not anticipated using our asymptotic analysis in Sec. 2.5. Specifically, the dominant eigenvalues fluctuate considerably and Dale’s principle seems to broaden their distribution. Many eigenvalues lie outside the asymptotic bulk regions and a significant portion of the spectrum seems to concentrate on the real axis. All these phenomena will be studied in the next subsections.

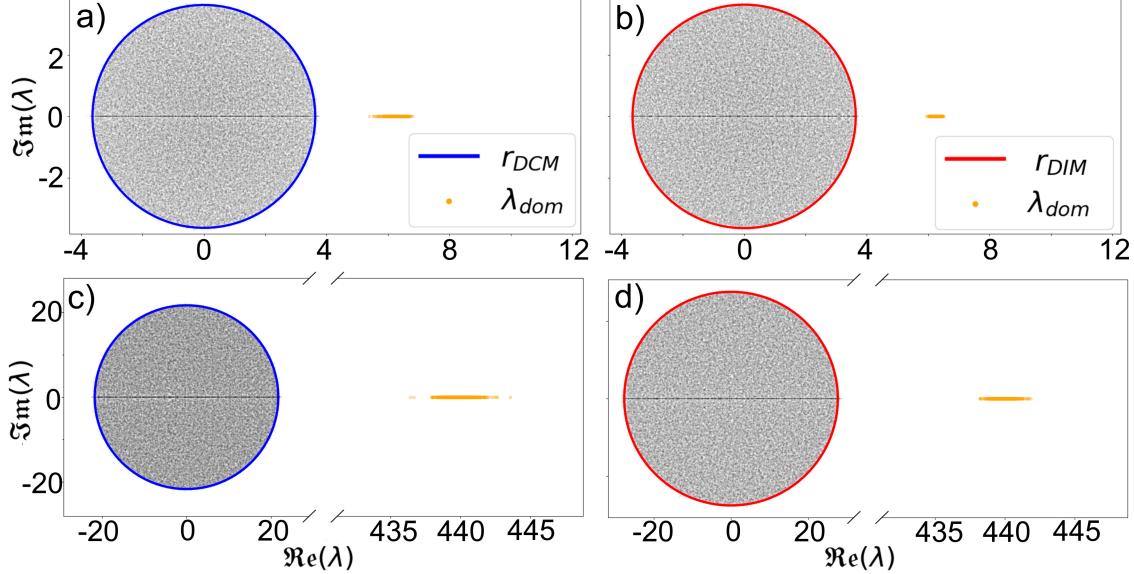


FIGURE 2.1 – Empirical spectra of the DCM (left) and DIM (right) in sparse (top) and dense (bottom) regimes. Each panel was generated using the spectrum of 400 random matrices size $N = 2000$. a) DCM with $f_I = 0.35$, $c_E = 15$ and $c_I = 10$. b) DIM with $p = 0.35$, $c_E = 15$ and $c_I = 10$. c) DCM with $f_I = 0.35$, $c_E = 0.5N$ and $c_I = 0.3N$. d) DIM with $p = 0.35$, $c_E = 0.5N$ and $c_I = 0.3N$.

2.6.2 Dominant eigenvalue

Transition in the spectrum

As illustrated in Figure 2.2³, the transition when the dominant eigenvalues leave the real axis is rather smooth for finite-size matrices. It is not fully captured by asymptotic critical values Eqs. (2.31) and (2.35). During the transition, we observe certain dominant eigenvalues becoming non-real but still lying outside the central bulk. The proportion of non-real dominant eigenvalues increases gradually throughout this transition, until another transition occurs on the negative side of the bulk, where the dominant eigenvalues start to be real again. This transition is particularly accentuated in strongly connected networks, where the dominant eigenvalues become more dispersed and further deviate from the central bulk.

3. In the figures, we chose to represent only one dominant eigenvalue per random matrix, thus not depicting the complex conjugate when it exists.

Additionally, we note another phenomenon during the transition, namely the difference between the DCM and the DIM. In the DIM, the transition is considerably less dispersed, and the dominant eigenvalues stick close to the theoretical bulk radius. This phenomenon leads to a more predictable transition and reduces the effects caused by the finite size of the system. Fig. 2.3 represent an example illustrating the differences in the transition between the two models.

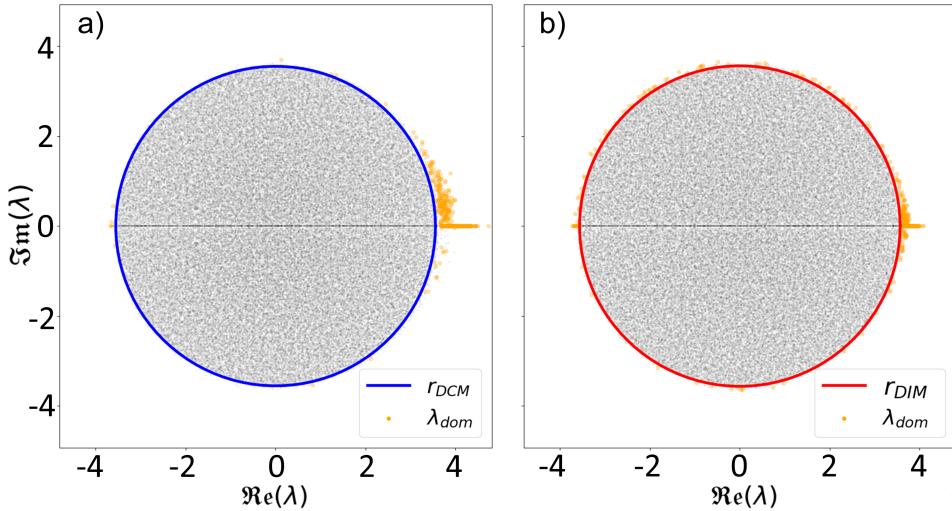


FIGURE 2.2 – Empirical spectra near the asymptotic critical points in a) the DCM and b) the DIM. For each panel, 400 matrices of size $N = 2000$ were randomly generated using the parameters $f_I = p = 0.458$, $c_E = 15$ and $c_I = 10$.

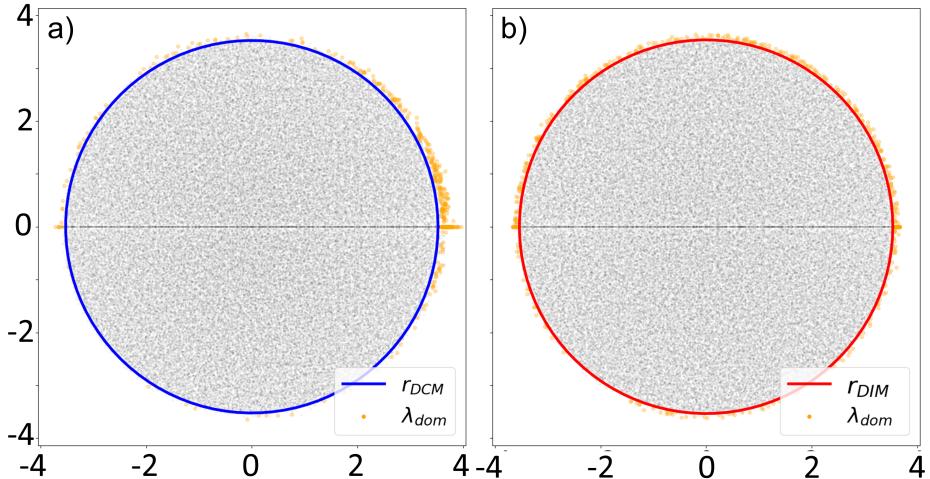


FIGURE 2.3 – The spectrum after the transition for the DCM on the left (a)) and the DIM on the right (b)). For the plots, 400 random matrices were simulated for a size of $N = 2000$. The parameters used are $f_I = p = 0.5$, $c_E = 15$ and $c_I = 10$.

Narrower transition in the dense case

Another noteworthy aspect to consider is how the transition behaves in the dense case compared to the sparse case. As we can see in Fig. 2.4, the part where complex dominant eigenvalues start to emerge, occurs for a larger fraction of inhibitors in the sparse case compared to the dense case. This is primarily attributed to the characteristics of the asymptotic outlier eigenvalue as described by Eqs. (2.27) and (2.28), which possesses a greater value in proportion to the sparse case. Consequently, this effect leads to the outlier eigenvalue being situated farther from the central bulk for a larger fraction of inhibitory neurons.

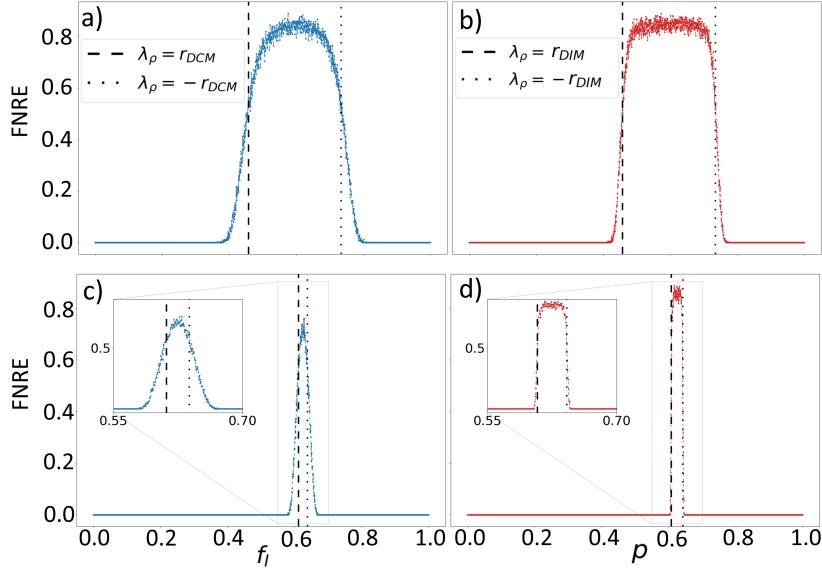


FIGURE 2.4 – Fraction of non-real dominant eigenvalues (FNRE) as a function of the fraction of inhibitory connections. The simulations were conducted using a system size of $N = 2000$, with 400 random matrices generated. In panel (a), the DCM is depicted, utilizing parameters $c_E = 15$ and $c_I = 10$. In panel (b), the DIM is shown, using parameters $c_E = 15$ and $c_I = 10$. In panel (c), the DCM is illustrated, employing parameters $c_E = 0.5N$ and $c_I = 0.3N$. In panel (d), the DIM is visualized, utilizing parameters $c_E = 0.5N$ and $c_I = 0.3N$.

GEV distribution

A number of articles [82, 83, 84, 78] have led us to consider the Generalized Extreme Value (GEV) distribution as a plausible approach to capture the behavior exhibited by our dominant eigenvalues. Moreover, Refs. [85, 86] numerically explored the real part of the spectrum of excitatory-inhibitory random neural networks in which excitatory connections are symmetric and inhibitory connections comply with Dale’s principle. The authors observed that the eigenvalue with the largest real part has an empirical distribution that is well approximated by the GEV distribution.

Motivated by these findings, we attempted to fit the GEV distribution to the distribution of the dominant eigenvalues in our two models. The GEV distribution employed in our analyses is described as

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left[1 + (\varepsilon z(x))^{-1-\frac{1}{\varepsilon}} \right] e^{-\left(1+(\varepsilon z(x))^{-1-\frac{1}{\varepsilon}}\right)} & \text{if } \varepsilon \neq 0, \\ \frac{1}{\sigma} e^{(-z(x))} e^{-e^{(-z(x))}} & \text{if } \varepsilon = 0, \end{cases} \quad (2.39)$$

where $z(x) = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$, σ is the scale parameter, μ is the location parameter, and ε is the shape parameter. Moreover, the GEV statistics exhibit three distributions depending on the sign of the shape parameter. These three distribution are perfect in our case, because when we have our transition we see a shift in the behavior of the dominant eigenvalue distribution which can be described as a change in the sign of the shape parameter and thus a change in de GEV distribution.

Following this, we utilized the *genextreme* function from the *scipy.stats* library in Python to attempt fitting the distribution of our dominant eigenvalues using the GEV statistics. The Figure 2.5 displays one such fit which seems to be quite convincing. However, to ensure the quality of the fit, we conducted a goodness of fit test using the *scipy.stats.kstest* function in Python and we checked the p-value of the test to establish a 99% level of confidence regarding the accuracy of the fit.

From this test, we concluded that the GEV statistics provided a suitable framework for our model, exhibiting a transition were the positive shape parameter (Fréchet distribution) change to a shape parameter close to zero (Gumbel distribution) near the transition for the complex eigenvalues, and finally to a negative shape parameter (Weibull distribution) when complex eigenvalues were present. The behavior of the shape parameter and the other parameters associated to the GEV distribution is depicted in Figure 2.6. Overall, the dominant eigenvalues of both models appear to generally adhere to the GEV statistics, suggesting the viability of this statistical approach for our fitting purposes were in the case of the figure 2.6 less than 0.5% of the fits were failed.

Looking at the GEV parameters, we see that our assumption of having a more spread distribution for the DCM is verified by the scale parameter which is related to the spread of the distribution.

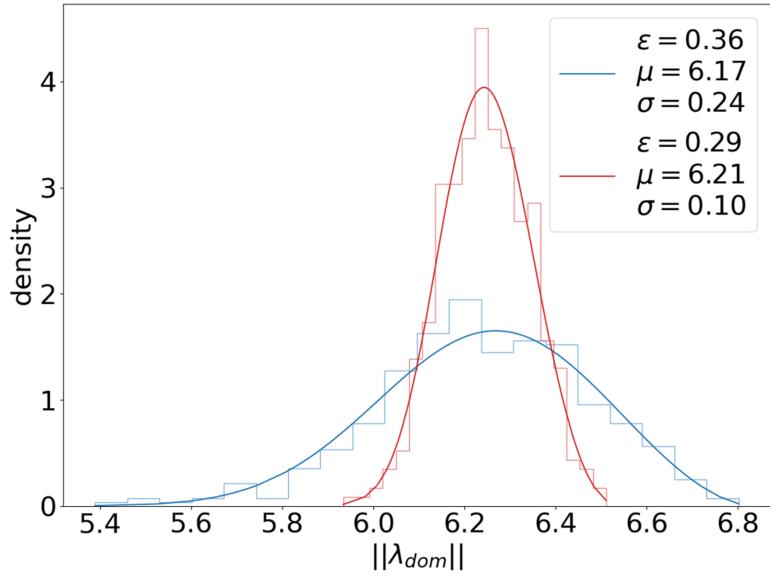


FIGURE 2.5 – Empirical distribution of the dominant eigenvalues for the DCM (blue) and the DIM (red). Each curve was obtained with 400 randomly generated matrices of size $N = 2000$ with parameters $f_I = p = 0.35$, $c_E = 15$ and $c_I = 10$.

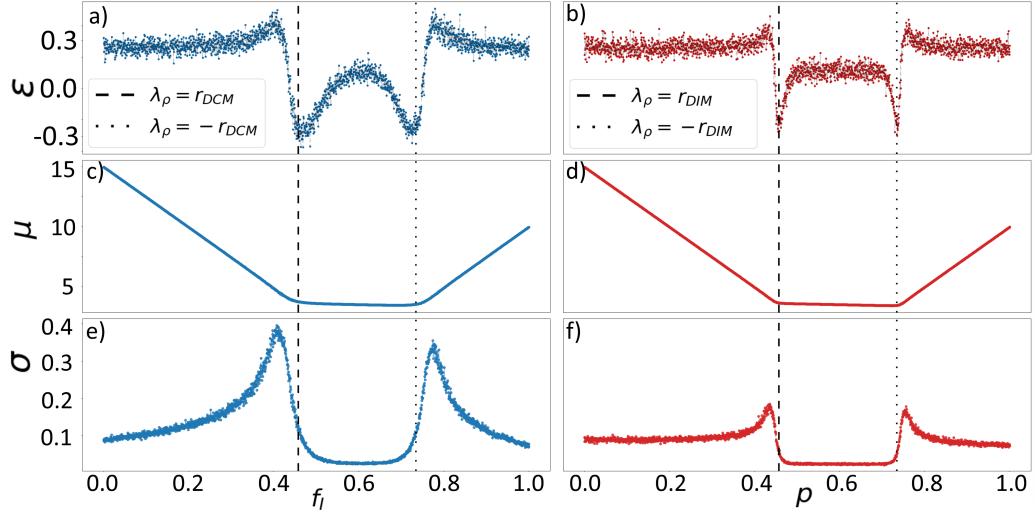


FIGURE 2.6 – The parameters of the GEV fit made on the distribution of the dominant eigenvalue for the DCM are shown on the left, while those for the DIM are shown on the right. These fits were performed on 400 random matrices, each with a size of $N = 2000$, for various fractions of inhibitors and connection parameters of $c_E = 15$ and $c_I = 10$. In a) and b) the shape parameter is plotted, in c) and d) the location parameter is plotted and in e) and f) the scale parameter is plotted. For the fit made, < 0.5% of them didn't pass the test made with `scipy.stats.kstest`

2.6.3 Bulk properties

Non-uniform bulk distribution

In the asymptotic limit $N \rightarrow \infty$, we expect a uniform distribution inside the bulk. However, as depicted in Fig. 2.1, we observe a concentration of eigenvalues along the real axis, resulting in a quasi-uniform distribution. This concentration on the real axis was determined to only be influenced by the size of the systems. The tendency to lose this property with the size of the system is represented at the figure 2.7.

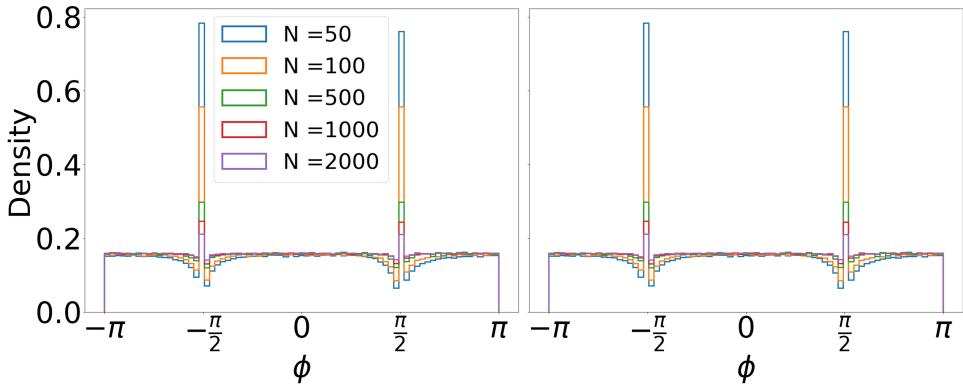


FIGURE 2.7 – Bulk distribution in polar coordinates for which we modified $\phi = \theta + 2\pi$ for the DCM (left) and the DIM (right) for multiple systems sizes. For each simulations, we did a number of matrices for which $\text{nb}_{\text{matrix}} \times N = 800000$ to have a consistent number of eigenvalues. here we have the distribution for $f_I = p = 0.5$, $c_E = 15$ and $c_I = 10$.

Second dominant eigenvalue

The behavior of the second dominant eigenvalue provides crucial insights into the fluctuations occurring at the edge of the central bulk, where, in the finite case, we observe some eigenvalues lying outside the asymptotic. In Fig. 2.8, we observe that the second dominant eigenvalue seems to also follow a GEV statistics.

Similar to the dominant eigenvalues, the spread of the distribution of the second eigenvalue is bigger for the DCM than for the DIM, as we observed in Figure 2.5. This behavior becomes more apparent when examining the parameters obtained from the GEV fit performed on these eigenvalues, as shown in Fig. 2.9. The figure reveals a significant difference in the shape parameter, indicating distinct characteristics of the distributions, as well as another notable difference in the scale parameter, which is related to the spread of our distribution.

Fig. 2.9 provides valuable insights into the behavior of the central bulk radius. In this scenario, it appears that the radius decreases as the number of inhibitory nodes increases as we observe from the location parameter. However, it is important to note that this trend is specific to the

configuration where $p_I < p_E$. In the reverse case, where $p_I > p_E$, the radius would instead increase.

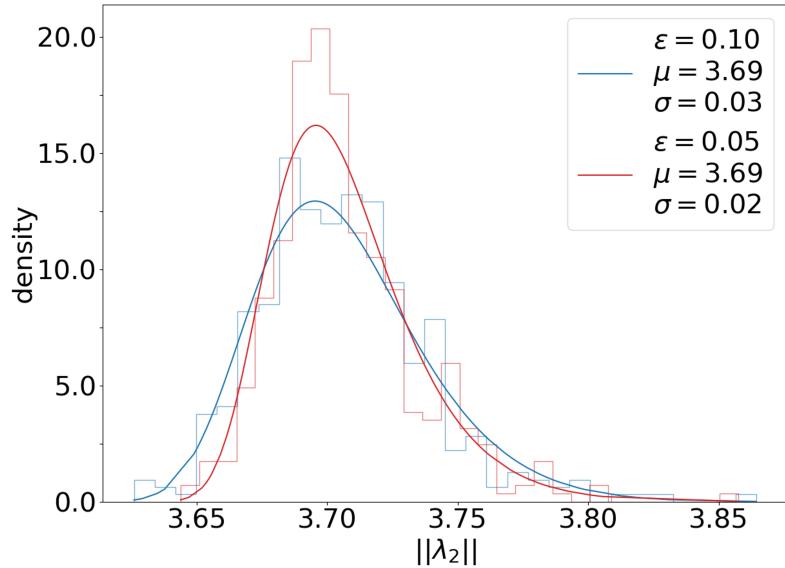


FIGURE 2.8 – Empirical distribution of the second dominant eigenvalues for the DCM (blue) and the DIM (red). Each curve was obtained with 400 randomly generated matrices of size $N = 2000$ with parameters $f_I = p = 0.35$, $c_E = 15$ and $c_I = 10$.

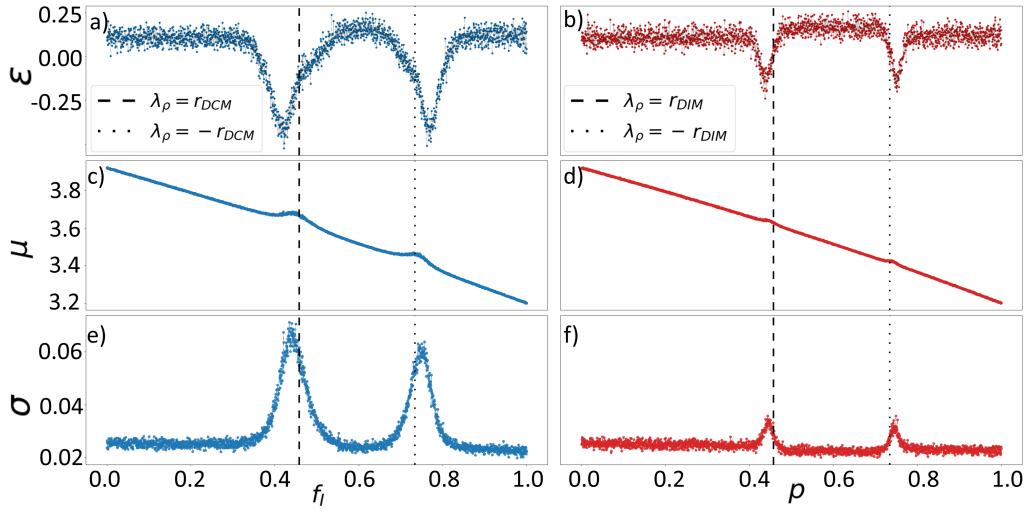


FIGURE 2.9 – The GEV fit parameters made on the distribution of the second dominant eigenvalue for the DCM are shown on the left, while those for the DIM are shown on the right. These fits were performed on 400 random matrices, each with a size of $N = 2000$, for various fractions of inhibitors and connection parameters of $c_E = 15$ and $c_I = 10$. In a) and b) the shape parameter is plotted, in c) and d) the location parameter is plotted and in e) and f) the scale parameter is plotted. For the fit made, < 0.5% of them didn't pass the test made with `scipy.stats.kstest`

2.7 Conclusion

Directionality, connection density, presence of inhibition, and Dale's principle are all fundamental properties of neural networks that are expected to influence the behavior of their spectrum. Utilizing previous works, we were able to determine a mathematical expression that describes the expected behavior of the two random networks we created. From these mathematical expressions, we were able to determine a difference in the radius of the bulk spectrum of the two models, where the radius of the model respecting Dale's principle is always lower or equal to the model not respecting it. Another surprising discovery is that the expected value for the outlier eigenvalue of the spectrum is equal for the two models and is thus not affected by Dale's principle. However, the expected behavior expressed by this relationship failed to describe some important aspects of the spectrum.

Numerically, we observed a transition in the distribution of the dominant eigenvalue, which significantly impacted the spectrum. For this transition, multiple influences were characterized. Firstly, we observed that the spread of the distribution of the dominant eigenvalues was larger in the model respecting Dale's principle. Secondly, we noticed that the fraction of inhibitor neurons for which the transition occurred was heavily influenced by the density of the network. A denser network had a smaller range of fractions of inhibitor neurons leading to a transition.

Thirdly, we were able to propose a satisfactory distribution that describes the distribution of the dominant eigenvalue for the two models. This GEV distribution provided valuable insight, confirming the different behaviors observed, with the shape parameter serving as a good indicator of the transition and the scale parameter showing the difference in spread for the dominant eigenvalue of the two models. The change in the value of the shape parameter, corresponding to a change in the form of the GEV statistics, followed the transition of the distribution of the dominant eigenvalue.

We moreover analyzed the behavior of the eigenvalues present in the bulk of our spectrum. Firstly, we identified a concentration on the real axis for the eigenvalues, which disappeared for larger random neuronal networks. Secondly, we concluded the analysis by examining the second dominant eigenvalue of our spectrum, corresponding to the radius of the bulk of the spectrum. We determined that the GEV statistics also provided a suitable distribution for describing the distribution of the second dominant eigenvalue and thus gives us valuable insight into the fluctuation of the radius of the central bulk.

The analysis presented in this paper further develops our knowledge and comprehension of the spectrum of graphs describing neuronal networks. It highlights the importance of the structural parameters of neuronal networks in analyzing their spectra. Furthermore, this paper provides insights into the influence of Dale's principle on the spectrum, which is still an under-researched topic in the field of spectral graph theory. In the future, this influence should be further explored to predict the dynamical behavior of neuronal networks with inhibition. Moreover, integrating a robust statistical depiction of the connection weights between neurons could enhance our understanding. Subsequently, an enhanced mathematical theory that comprehensively characterizes the behaviors observed in finite cases remains elusive and warrants development. Finally, extending this theory and analysis to encompass random graphs with multiple communities is essential to deepen our comprehension of the spectrum exhibited by actual neural networks.

Conclusion

Les différentes analyses récentes faites sur le spectre des réseaux de neurones ont démontré des lacunes dans nos connaissances sur le sujet. N'ayant pas encore de modèle fixe sur ces types de réseaux, plusieurs analyses introduisent des propriétés différentes qui influencent grandement le spectre observé. De plus, le manque de théorie sur le spectre de matrices réelles, non symétriques, signées et finies induit une plus grande difficulté dans l'analyse de réseaux décrits par ce type de matrice.

Mon projet de maîtrise avait pour objectif d'analyser l'effet des propriétés structurelles, souvent négligées, présentes dans les réseaux de neurones sur le spectre des graphes qui leur sont associés. Ces propriétés incluent la direction des connexions, la présence d'inhibition pour diminuer l'activité neuronale, le principe de Dale assignant un type à chaque neurone et la densité du réseau. En fin de compte, mon projet visait à fournir une description générale du comportement du spectre de graphes aléatoires ayant les propriétés mentionnées ci-dessus.

En se basant sur la théorie du chapitre 1 et de nombreux travaux fondateurs sur le sujet, on a pu réaliser les recherches décrites dans le chapitre 2 de ce mémoire. Dans ces recherches, on a commencé par créer deux modèles de graphes aléatoires, tous deux respectant les propriétés que nous voulions étudier, à l'exception d'un des modèles qui ne respectait pas le principe de Dale. Ces deux modèles ont permis de comparer l'influence de la structure induite par le principe de Dale sur le spectre. De plus, chaque modèle a également été utilisé pour en retirer les propriétés du spectre de graphes respectant les propriétés étudiées.

Pour chacun des modèles de graphes aléatoires, on a initié une analyse mathématique en utilisant les théories actuellement connues. En nous appuyant sur les théories exposées dans le chapitre 1 et sur des travaux tels que ceux de [33, 28, 9, 50], on a pu déterminer de nombreuses propriétés mathématiques des graphes développés. La plupart de ces propriétés se révèlent particulièrement utiles pour décrire le comportement asymptotique du spectre, c'est-à-dire son comportement moyen. Parmi ces analyses mathématiques, il a été observé que les graphes peuvent être approximés par le théorème de Girko, où les valeurs propres sont distribuées selon un noyau central dans le plan complexe, à l'exception de la valeur propre dominante qui peut se détacher de ce noyau. Cette dernière devient alors réelle lorsqu'elle est détachée. Cette analyse mathématique a permis de mettre en évidence une différence majeure dans le

noyau central du spectre, différence influencée par le principe de Dale. De plus, malgré cette divergence dans le noyau, nous avons pu conclure que la moyenne de la valeur propre qui s'écarte est la même dans le modèle respectant le principe de Dale que dans le modèle ne le respectant pas. Cependant, comme les graphes étudiés sont des graphes signés et orientés, une analyse mathématique plus approfondie s'est avérée difficile. L'analyse mathématique mentionnée précédemment s'est révélée pertinente pour le cas asymptotique, mais ne décrit pas bien le comportement de nos graphes qui ont une taille finie. En effet, les réseaux de neurones réels sont finis et de taille variable en fonction de l'organisme vivant étudié, ce qui peut impliquer des systèmes de taille limitée. Cette taille finie est donc un phénomène significatif non capturé par l'analyse mathématique.

À la suite des difficultés éprouvées lors de notre analyse plus théorique, une approche numérique a été utilisée afin d'analyser les propriétés restantes observées dans le spectre. Premièrement, le comportement des valeurs propres centrées dans le noyau central, à l'exception de la valeur propre dominante, a pu être vérifié. Cependant, pour ce noyau central, on a observé des valeurs propres sortant de celui-ci causées par la taille finie de notre système. Ensuite, on a pu observer que la valeur propre du système respecte bien, en moyenne, le comportement asymptotique attendu, mais celle-ci est également caractérisée par une distribution autour de cette valeur moyenne. Dans ce cas, en nous basant sur les travaux [84, 85, 86], on a pu utiliser la distribution GEV afin de décrire la distribution de la valeur propre. Cette méthode, après avoir été vérifiée par des tests numériques, a démontré que la valeur propre dominante est décrite de manière satisfaisante par la distribution GEV sur les tests effectués. En raison de cette distribution observée pour la valeur propre dominante, on a également remarqué un phénomène inattendu, la présence d'une transition dans les valeurs propres. En effet, en faisant varier le nombre de noeuds inhibiteurs, on a pu mesurer une période de transition dans le spectre où la probabilité que la valeur propre dominante du système soit complexe augmente de plus en plus jusqu'à atteindre un maximum, puis redevenir progressivement réelle. Lors de cette transition, on observe un changement dans la distribution de la valeur propre dominante. D'abord, une concentration sur un côté du spectre, puis un changement progressif pour devenir de plus en plus complexe jusqu'à devenir complètement complexe et se répartir autour du noyau central, pour enfin redevenir réelle par la suite. Dans cette transition, la différence entre le modèle possédant le principe de Dale et celui ne le possédant pas s'est avérée particulièrement marquée. La distribution du modèle ne respectant pas le principe de Dale effectue une transition plus brusque et la distribution de la valeur propre dominante reste plus proche du noyau central pendant la transition. Enfin, on a déterminé que la densité joue un rôle majeur dans le spectre de ces modèles. Celle-ci influence directement la taille du spectre, mais aussi la durée de la transition et la répartition des valeurs propres.

En conclusion, les recherches effectuées au cours de ma maîtrise ont pu fournir une analyse primaire et satisfaisante sur le comportement du spectre de matrices respectant les propriétés

importantes des réseaux de neurones. Ces propriétés introduisent des termes négatifs et une structure bien particulière pour la matrice étudiée. Ces travaux constituent alors une excellente base afin de comprendre le comportement attendu du spectre des matrices associées aux réseaux de neurones. Néanmoins, par manque de temps, de nombreuses recherches restent à être effectuées. Premièrement, les modèles de graphes aléatoires étudiés n'introduisent pas la présence de communautés différentes au sein des réseaux de neurones, ce qui normalement induit plus de probabilités de connexions différentes entre les noeuds. Ensuite, ici, les connexions entre les noeuds ont simplement été décrites par les valeurs -1, 0 ou 1, ce qui a été suffisant dans notre analyse, mais une approche incluant des poids de connexions entre les neurones plutôt que des entiers permettrait de mieux représenter la réalité. Enfin, lors de mes recherches, un grand manque dans les théories mathématiques décrivant le spectre de matrices possédant la forme des matrices que j'ai pu étudier s'est fait ressentir. Des recherches supplémentaires sur de nouveaux théorèmes mathématiques pouvant décrire ce type de matrice seraient alors nécessaires. En dépit des travaux restants, mon projet de maîtrise s'inscrit parmi les nombreux travaux faits sur le sujet et offre une base théorique et analytique sur le spectre des réseaux de neurones et le comportement attendu de celui-ci. Ces recherches ont permis de mieux comprendre les propriétés du spectre des matrices associées aux réseaux de neurones et ouvrent la voie à de futures études approfondies dans ce domaine.

Annexe A

Modèles supplémentaires

Dans cette section, on présente d'autres modèles de réseaux aléatoires avec inhibition qui ont été développés au cours de ma maîtrise, mais qui n'ont pas pu être analysés dans le chapitre 2 par manque de temps. Ces modèles permettent d'introduire plus de caractéristiques structurelles propres aux réseaux de neurones, telles que l'hétérogénéité des degrés et la présence de modules.

A.1 Généralisation du modèle de configuration de Chung-Lu

Le modèle de Chung-Lu [16] est un modèle pouvant nous permettre une meilleure représentation des degrés de connexions des noeuds des systèmes réels pouvant être représentés par des graphes. Ce modèle est construit en stipulant les degrés moyens des noeuds attendus. Cependant, ce modèle est conçu pour des graphes ne possédant pas d'inhibition.

Pour généraliser ce modèle aux cas impliquant les deux types de noeuds, à savoir les excitateurs et les inhibiteurs, il est nécessaire de prendre en compte les degrés entrants ou sortants qui peuvent être inhibiteurs ou excitateurs.

Désignons les degrés moyens par la lettre d . En séparant les différents ensembles et en représentant les degrés moyens sous forme de vecteurs, nous avons les vecteurs des degrés sortants moyens des noeuds excitateurs \vec{d}_E^{out} et des noeuds inhibiteurs \vec{d}_I^{out} , où ces vecteurs sont représentés comme

$$\vec{d}_E^{out} = \left(d_{1E}^{out}, d_{2E}^{out}, \dots, d_{|E|E}^{out} \right) \quad \vec{d}_I^{out} = \left(d_{1I}^{out}, d_{2I}^{out}, \dots, d_{|I|I}^{out} \right). \quad (\text{A.1})$$

En ce qui concerne les séquences de degrés entrants moyens, il n'y a pas de distinction claire entre les ensembles de noeuds pour les degrés. En effet, chaque noeud peut seulement avoir des liens sortants d'un seul type, mais il peut posséder les deux types de liens entrants. Nous avons donc les vecteurs des degrés entrants de liens excitateurs \vec{d}_E^{in} ainsi que des degrés entrants de

liens inhibiteurs \vec{d}_I^{in} ,

$$\vec{d}_E^{in} = \left(d_{1E}^{in}, d_{2E}^{in}, \dots, d_{(|E|+|I|)E}^{in} \right) \quad \vec{d}_I^{in} = \left(d_{1I}^{in}, d_{2I}^{in}, \dots, d_{(|E|+|I|)I}^{in} \right). \quad (\text{A.2})$$

Pour ce système, nous devons examiner la probabilité d'avoir un lien entre deux noeuds. Conformément à notre convention, les connexions sont dirigées de j vers i . La probabilité p_{ij} qu'un lien sortant de j se connecte à un lien entrant de i est

$$p_{ij} = \frac{d_{jE}^{out} d_{iE}^{in} \mathbb{I}(j \in E)}{|\beta_E|} + \frac{d_{jI}^{out} d_{iI}^{in} \mathbb{I}(j \in I)}{|\beta_I|}. \quad (\text{A.3})$$

Ici, nous avons défini $\beta_Q = \sum_j^{|Q|} d_{jQ}^{out} = \sum_i^{|E|+|I|} d_{iQ}^{in}$. Cela représente l'espérance du nombre de liens de type Q dans notre système.

Cette forme de probabilité découle de la considération que la probabilité d'avoir un lien entre un noeud j et un noeud i , défini comme $j \rightarrow i$, correspond à la probabilité d'avoir un lien entrant de même type que le noeud j pour le noeud i , parmi tous les autres liens de ce type, multipliée par le nombre de liens sortant du noeud j .

A.1.1 La matrice d'adjacence

Rappelant que pour ce modèle, nous utilisons également la définition A.2.1. La probabilité des éléments a_{ij} de notre matrice d'adjacence A est

$$P(a_{ij}) = \phi_{ij}(a_{ij}, E) \mathbb{I}(j \in E) \mathbb{I}(a_{ij} \in \{0, 1\}) + \phi_{ij}(a_{ij}, I) \mathbb{I}(j \in I) \mathbb{I}(a_{ij} \in \{-1, 0\}). \quad (\text{A.4})$$

Ici on a posé

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(a_{ij}, Q) &= [1 - \alpha_{ij}(Q)]^{1-|a_{ij}|} [\alpha_{ij}(Q)]^{|a_{ij}|}, \\ \alpha_{ij}(Q) &= \frac{d_{jQ}^{out} d_{iQ}^{in}}{|\beta_Q|}. \end{aligned}$$

On remarque que $\phi_{ij}(a_{ij}, Q)$ est une probabilité de Bernouilli. On a alors la probabilité d'obtenir une matrice d'adjacence particulière

$$P(A = a) = \prod_{ij} P(a_{ij}) = \prod_i \prod_{j \in E} \phi_{ij}(a_{ij}, E) \mathbb{I}(a_{ij} \in \{0, 1\}) \prod_{j \in I} \phi_{ij}(a_{ij}, I) \mathbb{I}(a_{ij} \in \{-1, 0\}). \quad (\text{A.5})$$

On peut également déterminer la moyenne et la variance de a_{ij} à partir de la relation (A.4), ce qui donne

$$\langle a_{ij} \rangle = \alpha_{ij}(E) \mathbb{I}(j \in E) - \alpha_{ij}(I) \mathbb{I}(j \in I), \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Var}(a_{ij}) = (1 - \alpha_{ij}(E)) \alpha_{ij}(E) \mathbb{I}(j \in E) + (1 - \alpha_{ij}(I)) \alpha_{ij}(I) \mathbb{I}(j \in I). \quad (\text{A.7})$$

A.1.2 Les degrés entrants

Pour la moyenne des degrés entrants, il est facile de supposer qu'elle est exprimée comme $d_i^{in} = d_{iE}^{in} + d_{iI}^{in}$, mais il est préférable de vérifier cette relation afin de confirmer la cohérence de notre modèle. En déterminant le degré entrant moyen à partir de notre probabilité $P(a_{ij})$, on obtient

$$d_i^{in} = \sum_{j \in E} \langle |a_{ij}| \rangle + \sum_{j \in I} \langle |a_{ij}| \rangle = \sum_{j \in E} \alpha_{ij}(E) + \sum_{j \in I} \alpha_{ij}(I), \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{d_{iE}^{in}}{|\beta_E|} \sum_{j \in E} d_{jE}^{out} + \frac{d_{iI}^{in}}{|\beta_I|} \sum_{j \in I} d_{jI}^{out}, \quad (\text{A.9})$$

$$= d_{iE}^{in} + d_{iI}^{in}. \quad (\text{A.10})$$

Ceci nous permet de déterminer la variance de notre degré k_i^{in} , étant donné que les éléments a_{ij} sont indépendants

$$\text{Var}(k_i^{in}) = \text{Var}\left(\sum_j |a_{ij}|\right), \quad (\text{A.11})$$

$$= \sum_{j \in E} \text{Var}(\langle |a_{ij}| \rangle) + \sum_{j \in I} \text{Var}(\langle |a_{ij}| \rangle), \quad (\text{A.12})$$

$$= \sum_{j \in E} (1 - \alpha_{ij}(E)) \alpha_{ij}(E) + \sum_{j \in I} (1 - \alpha_{ij}(I)) \alpha_{ij}(I), \quad (\text{A.13})$$

$$= d_{iE}^{in} - \frac{(d_{iE}^{in})^2 \sum_j^{|E|} \left\{ d_{jE}^{out} \right\}^2}{\beta_E^2} + d_{iI}^{in} - \frac{(d_{iI}^{in})^2 \sum_j^{|I|} \left\{ d_{jI}^{out} \right\}^2}{\beta_I^2}. \quad (\text{A.14})$$

A.1.3 Les degrés sortants

Pour la moyenne des degrés sortants, on suppose également que $d_j^{out} = d_{jE}^{out} \mathbb{I}(j \in E) + d_{jI}^{out} \mathbb{I}(j \in I)$. En vérifiant que cette relation est cohérente avec notre modèle, on obtient

$$d_j^{out} = \sum_i^{|E|+|I|} \langle |a_{ij}| \rangle = \sum_i^{|E|+|I|} (\alpha_{ij}(E) \mathbb{I}(j \in E) + \alpha_{ij}(I) \mathbb{I}(j \in I)), \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{d_{jE}^{out}}{\beta_E} \sum_i^{|E|+|I|} d_{iE}^{in} \mathbb{I}(j \in E) + \frac{d_{jI}^{out}}{\beta_I} \sum_i^{|E|+|I|} d_{iI}^{in} \mathbb{I}(j \in E), \quad (\text{A.16})$$

$$= d_{jE}^{out} \mathbb{I}(j \in E) + d_{jI}^{out} \mathbb{I}(j \in I). \quad (\text{A.17})$$

De la même manière que précédemment, nous obtenons la variance de notre degré sortant moyen k_j^{out} , sachant que les éléments a_{ij} sont indépendants

$$\text{Var}(k_j^{out}) = \sum_i \text{Var}(\langle |a_{ij}| \rangle), \quad (\text{A.18})$$

$$= \sum_i^{|E|+|I|} ((1 - \alpha_{ij}(E))\alpha_{ij}(E)\mathbb{I}(j \in E) + (1 - \alpha_{ij}(I))\alpha_{ij}(I)\mathbb{I}(j \in I)), \quad (\text{A.19})$$

$$= d_{jE}^{out} - \frac{\left(d_{jE}^{out}\right)^2 \sum_i^{|E|+|I|} (d_{iE}^{in})^2}{\beta_E^2} + d_{jI}^{out} - \frac{\left(d_{jI}^{out}\right)^2 \sum_i^{|E|+|I|} (d_{iI}^{in})^2}{\beta_I^2}. \quad (\text{A.20})$$

A.2 Le modèle stochastique par bloc appliqué aux réseaux neuronaux avec inhibition

Pour vérifier l'effet de l'inhibition et du principe de Dale sur la matrice d'adjacence et le spectre de cette matrice, nous construisons un modèle par bloc simple respectant ces principes. Nous considérons le graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \varepsilon)$, où \mathcal{N} est l'ensemble composé des ensembles de noeuds excitateurs \mathbf{E} et inhibiteurs \mathbf{I} , c'est-à-dire $\mathcal{N} = \mathbf{E} \cup \mathbf{I}$. L'ensemble \mathcal{N} a une taille de $n = |\mathcal{N}| = |\mathbf{E}| + |\mathbf{I}| = n_E + n_I$. ε représente notre ensemble de liens orientés inhibiteurs et excitateurs.

Le modèle stochastique par bloc représente généralement le nombre de communautés par la lettre K . Dans le cas du type de réseaux neuronaux simplifiés étudiés ici, nous avons alors $K = 2$.

Dans ce cas, nous avons les vecteurs Z_q représentant l'appartenance du noeud q à un groupe, exprimé comme

$$\begin{aligned} Z_q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T = z_E & \forall q \in \mathbf{E}, \\ Z_q &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T = z_I & \forall q \in \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Ici, la notation z_Q est utilisée pour exprimer les vecteurs d'appartenance généraux. Cela conduit à la matrice

$$Z = \left(Z_1, \dots, Z_{n_E}, Z_{n_E+1}, \dots, Z_{n_E+n_I} \right)^T.$$

Étant donné que ce réseau peut avoir des probabilités de liaison différentes en fonction des connexions entre les groupes, nous introduisons la matrice C telle que

$$C_{ij} = P(j \rightarrow i).$$

En d'autres termes, les éléments de la matrice C correspondent à la probabilité d'avoir un lien entre un nœud du groupe j vers le groupe i . Dans le cas de ce réseau, cela donne la matrice

$$C = \begin{pmatrix} p_{EE} & p_{EI} \\ p_{IE} & p_{II} \end{pmatrix}.$$

On constate alors que la probabilité d'avoir un lien du nœud $v \in S$ vers le nœud $u \in R$ peut être exprimée comme

$$P(v \rightarrow u) = Z_u^T C Z_v = z_R^T C z_S = p_{RS}.$$

A.2.1 La matrice d'adjacence

Dans le cadre d'un graphe aléatoire simplifié, pour définir les éléments a_{ij} de la matrice d'adjacence A , nous utilisons la définition A.2.1.

Définition A.2.1 Pour la matrice d'adjacence A , les éléments a_{ij} sont définis comme

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } j \in I \text{ et on a une connexion inhibitrice } j \rightarrow i, \\ 0 & \text{si on n'a pas de connexion } j \rightarrow i, \\ 1 & \text{si } j \in E \text{ et on a une connexion excitatrice } j \rightarrow i. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Ces éléments a_{ij} dépendent à la fois de l'existence d'une connexion entre les nœuds i et j et de la nature du nœud j .

En suivant cette convention, nous pouvons exprimer la probabilité que les éléments a_{ij} de notre matrice d'adjacence A aient une connexion ou non comme

$$P(A_{ij} = a_{ij}) = (Z_i^T C Z_j)^{|a_{ij}|} (1 - Z_i^T C Z_j)^{1-|a_{ij}|}.$$

Cette distribution de Bernoulli permet de déterminer la moyenne des éléments a_{ij} en fonction des groupes auxquels appartiennent les nœuds i et j . Supposons que $i \in R$ et $j \in S$ pour nommer les groupes, alors la moyenne est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(a_{ij} | j \in S \cap i \in R) &= (\mathbb{I}(j \in E) - \mathbb{I}(j \in I))(Z_i^T C Z_j), \\ &= (\mathbb{I}(j \in E) - \mathbb{I}(j \in I))(z_R^T C z_S). \end{aligned}$$

De la même manière, la variance est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Var}(a_{ij} | j \in S \cap i \in R) &= (Z_i^T C Z_j)(1 - Z_i^T C Z_j) \\ &= (z_R^T C z_S)(1 - z_R^T C z_S). \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Melanie Mitchell. *Complexity : A guided tour*. Oxford University Press, 2009.
- [2] Albert-László Barabási. The network takeover. *Nature Physics*, 8(1) :14–16, 2012.
- [3] Paul Erdős and Alfréd Rényi. On random graphs. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 6 :290–297, 1959.
- [4] Paul Erdős, Alfréd Rényi, et al. On the evolution of random graphs. *Institute of Mathematics Academy of Sciences of Hungary*, 5(1) :17–60, 1960.
- [5] Edgar N Gilbert. Random graphs. *The Annals of Mathematical Statistics*, 30(4) :1141–1144, 1959.
- [6] Duncan J Watts and Steven H Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684) :440–442, 1998.
- [7] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439) :509–512, 1999.
- [8] Sarika Jalan and Sanjiv K Dwivedi. Extreme-value statistics of brain networks : Importance of balanced condition. *Physical Review E*, 89(6) :062718, 2014.
- [9] Kanaka Rajan and Larry F Abbott. Eigenvalue spectra of random matrices for neural networks. *Physical Review Letters*, 97(18) :188104, 2006.
- [10] Dylan R Muir and Thomas Mrsic-Flogel. Eigenspectrum bounds for semirandom matrices with modular and spatial structure for neural networks. *Physical Review E*, 91(4) :042808, 2015.
- [11] Richard T Gray and Peter A Robinson. Stability and structural constraints of random brain networks with excitatory and inhibitory neural populations. *Journal of Computational Neuroscience*, 27 :81–101, 2009.

- [12] Danielle S Bassett and Olaf Sporns. Network neuroscience. *Nature Neuroscience*, 20(3) :353–364, 2017.
- [13] Leonhard Euler. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pages 128–140, 1741.
- [14] Vito Latora, Vincenzo Nicosia, and Giovanni Russo. *Complex networks : principles, methods and applications*. Cambridge University Press, 2017.
- [15] Mark Newmann. *Networks*. Oxford University Press, 2018.
- [16] Fan Chung and Linyuan Lu. The average distances in random graphs with given expected degrees. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(25) :15879–15882, 2002.
- [17] Fan RK Chung. *Spectral graph theory*, volume 92. American Mathematical Society, 1997.
- [18] Edward Laurence, Nicolas Doyon, Louis J Dubé, and Patrick Desrosiers. Spectral dimension reduction of complex dynamical networks. *Physical Review X*, 9(1) :011042, 2019.
- [19] Vincent Thibeault, Guillaume St-Onge, Louis J Dubé, and Patrick Desrosiers. Threefold way to the dimension reduction of dynamics on networks : an application to synchronization. *Physical Review Research*, 2(4) :043215, 2020.
- [20] Vincent Thibeault, Antoine Allard, and Patrick Desrosiers. The low-rank hypothesis of complex systems. *Nature Physics*, pages 1–9, 2024.
- [21] Bogdan Nica. *A Brief Introduction to Spectral Graph Theory*. European Mathematical Society, 2018.
- [22] Piet Van Mieghem. *Graph spectra for complex networks*. Cambridge University Press, 2010.
- [23] Oskar Perron. Zur theorie der matrices. *Mathematische Annalen*, 64(2) :248–263, 1907.
- [24] Ferdinand Georg Frobenius. *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*. Königliche Akademie der Wissenschaften Berlin, 1912.
- [25] Roger A Horn and Charles R Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 2012.
- [26] Dimitrios Noutsos. On perron-frobenius property of matrices having some negative entries. *Linear Algebra and its Applications*, 412(2-3) :132–153, 2006.

- [27] Semyon Aranovich Gershgorin. Über die abgrenzung der eigenwerte einer matrix. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS*, (6) :749–754, 1931.
- [28] Zoltán Füredi and János Komlós. The eigenvalues of random symmetric matrices. *Combinatorica*, 1 :233–241, 1981.
- [29] Vyacheslav L Girko. Circular law. *Theory of Probability & Its Applications*, 29(4) :694–706, 1985.
- [30] Jean Ginibre. Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices. *Journal of Mathematical Physics*, 6 :440–449, 2004.
- [31] Zhi Dong Bai. Circular law. *The Annals of Probability*, 25(1) :494–529, 1997.
- [32] Terence Tao, Van Vu, and Manjunath Krishnapur. Random matrices : Universality of esds and the circular law. *The Annals of Probability*, 38 :2023–2065, 2010.
- [33] Terence Tao. Outliers in the spectrum of iid matrices with bounded rank perturbations. *Probability Theory and Related Fields*, 155(1-2) :231–263, 2013.
- [34] Eugene M Izhikevich. *Dynamical systems in neuroscience*. MIT press, 2007.
- [35] Steven H Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press, 2015.
- [36] Darian Hadjiabadi, Matthew Lovett-Barron, Ivan Georgiev Raikov, Fraser T Sparks, Zhenrui Liao, Scott C Baraban, Jure Leskovec, Attila Losonczy, Karl Deisseroth, and Ivan Soltesz. Maximally selective single-cell target for circuit control in epilepsy models. *Neuron*, 109(16) :2556–2572, 2021.
- [37] Tim P Vogels, Kanaka Rajan, and Larry F Abbott. Neural network dynamics. *Annual Reviews Neuroscience*, 28 :357–376, 2005.
- [38] Jerry L Chen, Walter C Lin, Jae Won Cha, Peter T So, Yoshiyuki Kubota, and Elly Nedivi. Structural basis for the role of inhibition in facilitating adult brain plasticity. *Nature Neuroscience*, 14(5) :587–594, 2011.
- [39] ERIC R Kandel. Dale's principle and the functional specificity of neurons. *Psychopharmacology ; A Review of Progress*, 1967 :385–398, 1957.
- [40] Jesper R Ipsen and Andre DH Peterson. Consequences of dale's law on the stability-complexity relationship of random neural networks. *Physical Review E*, 101(5) :052412, 2020.

- [41] Liam Carroll, Sven Braeutigam, John M Dawes, Zeljka Krsnik, Ivica Kostovic, Ester Coutinho, Jennifer M Dewing, Christopher A Horton, Diego Gomez-Nicola, and David A Menassa. Autism spectrum disorders : multiple routes to, and multiple consequences of, abnormal synaptic function and connectivity. *The Neuroscientist*, 27(1) :10–29, 2021.
- [42] Catalina Betancur, Takeshi Sakurai, and Joseph D Buxbaum. The emerging role of synaptic cell-adhesion pathways in the pathogenesis of autism spectrum disorders. *Trends in Neurosciences*, 32(7) :402–412, 2009.
- [43] Laura Trobiani, Maria Meringolo, Tamara Diamanti, Yves Bourne, Pascale Marchot, Giuseppina Martella, Luciana Dini, Antonio Pisani, Antonella De Jaco, and Paola Bonsi. The neuroligins and the synaptic pathway in autism spectrum disorder. *Neuroscience & Behavioral Reviews*, 119 :37–51, 2020.
- [44] Xinxing Wang, Rachel Kery, and Qiaojie Xiong. Synaptopathology in autism spectrum disorders : Complex effects of synaptic genes on neural circuits. *Progress in Neuropsychopharmacology and Biological Psychiatry*, 84 :398–415, 2018.
- [45] Thomas Arendt. Synaptic degeneration in alzheimer’s disease. *Acta Neuropathologica*, 118 :167–179, 2009.
- [46] IA Cook and AF Leuchter. Synaptic dysfunction in alzheimer’s disease : clinical assessment using quantitative eeg. *Behavioural Brain Research*, 78(1) :15–23, 1996.
- [47] Joseph W Baron. Eigenvalue spectra and stability of directed complex networks. *Physical Review E*, 106(6) :064302, 2022.
- [48] Izaak Neri and Fernando Lucas Metz. Linear stability analysis of large dynamical systems on random directed graphs. *Physical Review Research*, 2(3) :033313, 2020.
- [49] Johnatan Aljadeff, Merav Stern, and Tatyana Sharpee. Transition to chaos in random networks with cell-type-specific connectivity. *Physical Review Letters*, 114(8) :088101, 2015.
- [50] Isabelle D Harris, Hamish Meffin, Anthony N Burkitt, and Andre D. H Peterson. Effect of sparsity on network stability in random neural networks obeying dale’s law. *Physical Review Research*, 5(4) :043132, 2023.
- [51] Tim P Vogels, Kanaka Rajan, and Larry F Abbott. Neural network dynamics. *Annual Review of Neuroscience*, 28 :357–376, 2005.

- [52] Saurabh Vyas, Matthew D Golub, David Sussillo, and Krishna V Shenoy. Computation through neural population dynamics. *Annual Review of Neuroscience*, 43 :249–275, 2020.
- [53] Andries E Brouwer and Willem H Haemers. *Spectra of graphs*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [54] Haim Sompolinsky, Andrea Crisanti, and Hans-Jurgen Sommers. Chaos in random neural networks. *Physical Review Letters*, 61(3) :259, 1988.
- [55] H. J. Sommers, A. Crisanti, H. Sompolinsky, and Y. Stein. Spectrum of large random asymmetric matrices. *Physical Review Letters*, 60 :1895–1898, 1988.
- [56] Qingguo Zhou, Tao Jin, and Hong Zhao. Correlation between eigenvalue spectra and dynamics of neural networks. *Neural computation*, 21(10) :2931–2941, 2009.
- [57] Friedrich Schuessler, Alexis Dubreuil, Francesca Mastrogiovanni, Srdjan Ostojic, and Omri Barak. Dynamics of random recurrent networks with correlated low-rank structure. *Physical Review Research*, 2(1) :013111, 2020.
- [58] Elizabeth Herbert and Srdjan Ostojic. The impact of sparsity in low-rank recurrent neural networks. *PLOS Computational Biology*, 18(8) :e1010426, 2022.
- [59] Hiromichi Suetani. Multiple pattern generations and chaotic itinerant dynamics in reservoir computing. In *International Conference on Artificial Neural Networks*, pages 76–81. Springer, 2019.
- [60] Cecilia Jarne. Different eigenvalue distributions encode the same temporal tasks in recurrent neural networks. *Cognitive Neurodynamics*, 17(1) :257–275, 2023.
- [61] Naoki Masuda and Prosenjit Kundu. Dimension reduction of dynamical systems on networks with leading and non-leading eigenvectors of adjacency matrices. *Physical Review Research*, 4(2) :023257, 2022.
- [62] Johnatan Aljadeff, David Renfrew, and Merav Stern. Eigenvalues of block structured asymmetric random matrices. *Journal of Mathematical Physics*, 56(10), 2015.
- [63] Johnatan Aljadeff, David Renfrew, Marina Vegué, and Tatyana O Sharpee. Low-dimensional dynamics of structured random networks. *Physical Review E*, 93(2) :022302, 2016.
- [64] John Carew Eccles. From electrical to chemical transmission in the central nervous system : the closing address of the sir henry dale centennial symposium cambridge, 19 september 1975. *Notes and Records of the Royal Society of London*, 30(2) :219–230, 1976.

- [65] Yuxiu Shao and Srdjan Ostojic. Relating local connectivity and global dynamics in recurrent excitatory-inhibitory networks. *PLOS Computational Biology*, 19(1) :e1010855, 2023.
- [66] Cecilia Jarne and Mariano Caruso. Effect in the spectra of eigenvalues and dynamics of rnns trained with excitatory–inhibitory constraint. *Cognitive Neurodynamics*, pages 1–13, 2023.
- [67] Fan Chung, Linyuan Lu, and Van Vu. Spectra of random graphs with given expected degrees. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100(11) :6313–6318, 2003.
- [68] Avanti Athreya, Joshua Cape, and Minh Tang. Eigenvalues of stochastic blockmodel graphs and random graphs with low-rank edge probability matrices. *Sankhya A : The Indian Journal of Statistics*, pages 1–28, 2022.
- [69] Haim Sompolinsky et al. The spectrum of covariance matrices of randomly connected recurrent neuronal networks with linear dynamics. *PLOS Computational Biology*, 18(7) :e1010327, 2022.
- [70] Béla Bollobás and Oliver Riordan. Sparse graphs : metrics and random models. *Random Structures & Algorithms*, 39(1) :1–38, 2011.
- [71] Svante Janson. On edge exchangeable random graphs. *Journal of Statistical Physics*, 173(3-4) :448–484, 2018.
- [72] Alexander P Kartun-Giles, Dmitri Krioukov, James P Gleeson, Yamir Moreno, and Giacomo Bianconi. Sparse power-law network model for reliable statistical predictions based on sampled data. *Entropy*, 20(4) :257, 2018.
- [73] Madan Lal Mehta. *Random matrices*. Elsevier, third edition, 2004.
- [74] Peter J Forrester. *Log-gases and random matrices (LMS-34)*. Princeton University Press, 2010.
- [75] Jean Ginibre. Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices. *Journal of Mathematical Physics*, 6(3) :440–449, 1965.
- [76] Terence Tao and Van Vu. Random matrices : the circular law. *Communications in Contemporary Mathematics*, 10(02) :261–307, 2008.
- [77] Nicholas Cook, Walid Hachem, Jamal Najim, and David Renfrew. Non-hermitian random matrices with a variance profile (i) : deterministic equivalents and limiting esds. *Electronic Journal of Probability*, 23 :1–61, 2018.

- [78] Johannes Alt, László Erdős, and Torben Krüger. Spectral radius of random matrices with independent entries. *Probability and Mathematical Physics*, 2(2) :221–280, 2021.
- [79] Francesca Mastrogiovanni and Srdjan Ostojic. Intrinsically-generated fluctuating activity in excitatory-inhibitory networks. *PLOS Computational Biology*, 13(4) :e1005498, 2017.
- [80] Francesca Mastrogiovanni and Srdjan Ostojic. Linking connectivity, dynamics, and computations in low-rank recurrent neural networks. *Neuron*, 99(3) :609–623, 2018.
- [81] Georgia Christodoulou, Tim P Vogels, and Everton J Agnes. Regimes and mechanisms of transient amplification in abstract and biological neural networks. *PLOS Computational Biology*, 18(8) :e1010365, 2022.
- [82] Brian Rider. Order statistics and ginibre’s ensembles. *Journal of Statistical Physics*, 114 :1139–1148, 2004.
- [83] Chafaï Djalil and Péché Sandrine. A note on the second order universality at the edge of coulomb gases on the plane. *Journal of Statistical Physics*, 156 :368–383, 5 2014.
- [84] Satya N Majumdar, Arnab Pal, and Grégoire Schehr. Extreme value statistics of correlated random variables : A pedagogical review. *Physics Reports*, 840 :1–32, 1 2020.
- [85] Saptarshi Ghosh, Sanjiv K Dwivedi, Mikhail V Ivanchenko, and Sarika Jalan. Interplay of inhibition and multiplexing : Largest eigenvalue statistics. *Europhysics Letters*, 115(1) :10001, 2016.
- [86] Sanjiv Kumar Dwivedi and Sarika Jalan. Extreme-value statistics of networks with inhibitory and excitatory couplings. *Physical Review E*, 87 :042714, 2013.