

# RÉDUIRE LA DIMENSION DES SYSTÈMES COMPLEXES: UN REGARD SUR L'ÉMERGENCE DE LA SYNCHRONISATION

---

Vincent Thibeault

6 novembre 2020

Département de physique, de génie physique, et d'optique  
Université Laval, Québec, Canada

## Synchronisation : nuée d'étourneaux

National Geographic : [https://www.youtube.com/watch?v=V4f\\_1\\_r8oRY](https://www.youtube.com/watch?v=V4f_1_r8oRY)

## Synchronisation : métronomes

uclaphysicsvideo : <https://www.youtube.com/watch?v=T58lGKREubo>

## Synchronisation : neurones

---

- Grand nombre d'éléments en interaction

## Systèmes complexes : Propriétés typiques

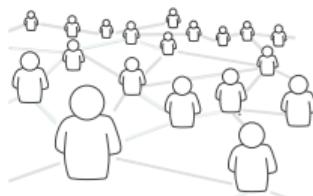
- Grand nombre d'éléments en interaction
- Émergence de propriétés collectives (ex. synchronisation)

## Systèmes complexes : Propriétés typiques

- Grand nombre d'éléments en interaction
- Émergence de propriétés collectives (ex. synchronisation)
  - Structure non régulière

- Grand nombre d'éléments en interaction
- Émergence de propriétés collectives (ex. synchronisation)
  - Structure non régulière
  - Dynamique non linéaire

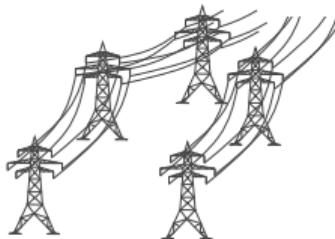
- Grand nombre d'éléments en interaction
- Émergence de propriétés collectives (ex. synchronisation)
  - Structure non régulière
  - Dynamique non linéaire



Sociaux

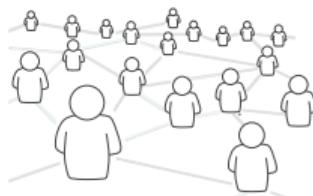


Biologiques



Technologiques

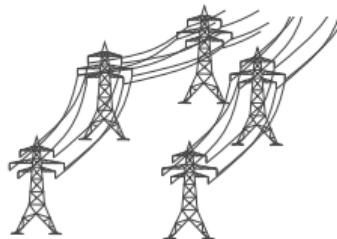
- Grand nombre d'éléments en interaction
- Émergence de propriétés collectives (ex. synchronisation)
  - Structure non régulière
  - Dynamique non linéaire



Sociaux



Biologiques

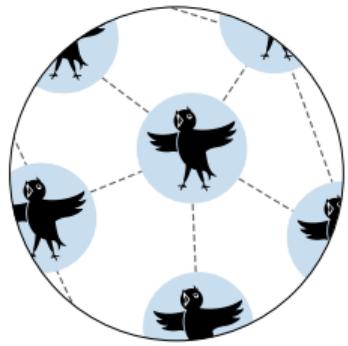


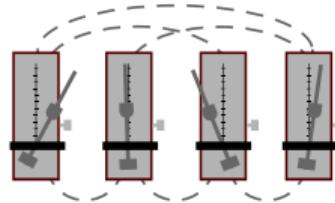
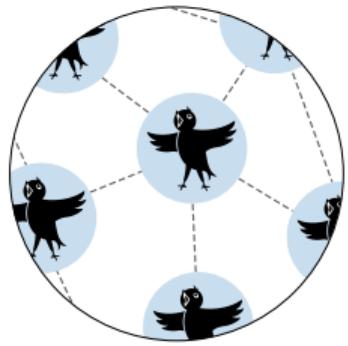
Technologiques

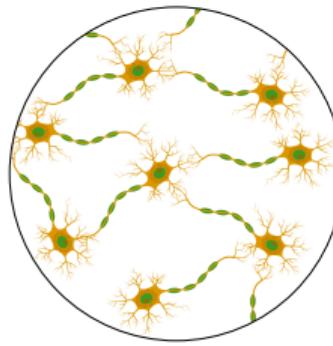
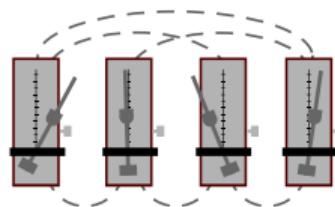
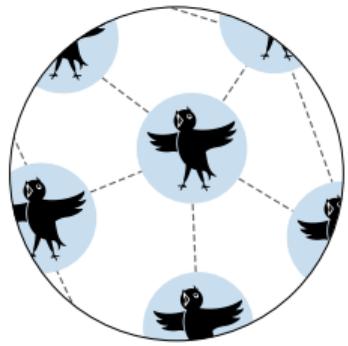
- Qu'est-ce que la structure et la dynamique ? Comment s'influencent-elles ?
- Comment modéliser mathématiquement un système complexe ?

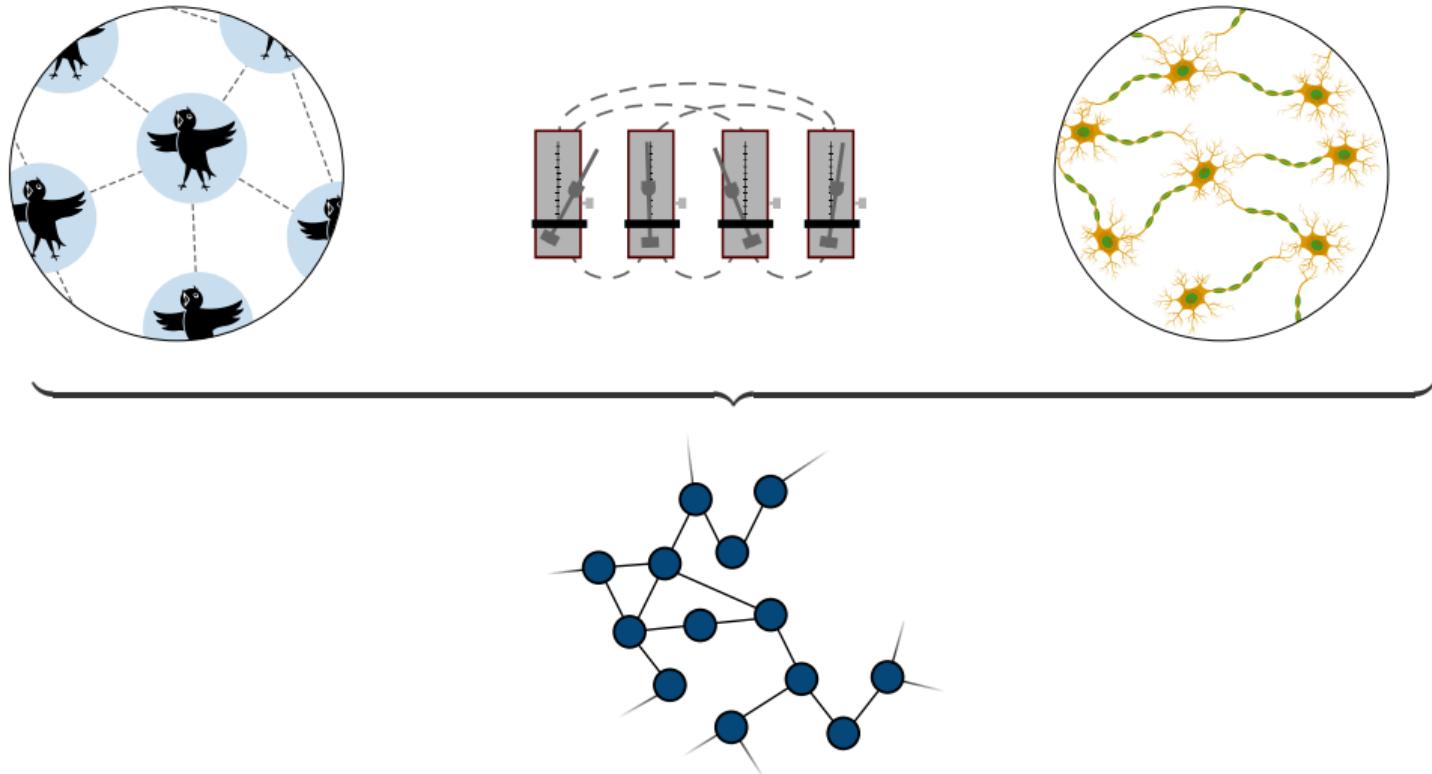
## LIEN ENTRE LA STRUCTURE ET LA DYNAMIQUE

---









Un **graphe**  $\mathcal{G}$  est un ensemble de sommets (noeuds, points) et d'arêtes (liens, lignes).

## Représentation matricielle d'un graphe

Les éléments de la **matrice d'adjacence** sont

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont connectés,} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  où  $N$  est le nombre de noeuds.



## Représentation matricielle d'un graphe

Les éléments de la **matrice d'adjacence** sont

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont connectés,} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  où  $N$  est le nombre de noeuds.



Le **degré** d'un noeud est le nombre de liens connectés au noeud.

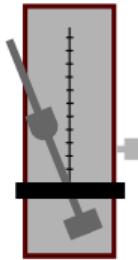
$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}$$



$(x, y, z)$



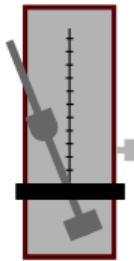
$(x, y, z)$



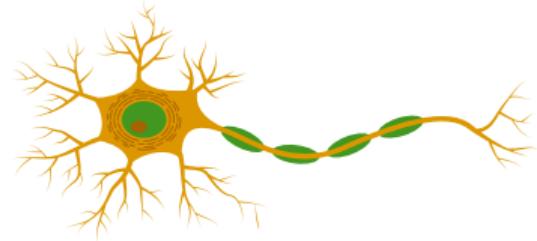
$\theta$



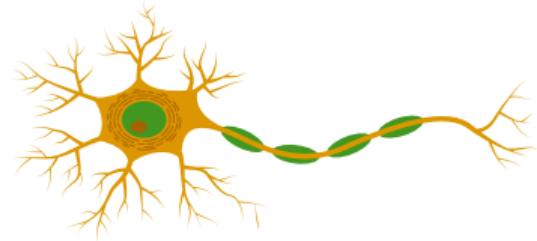
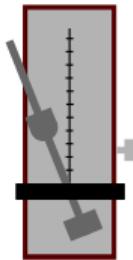
$(x, y, z)$



$\theta$



$(V, \text{Ca}, \dots)$



$\mathbf{z} : (x, y, z)$

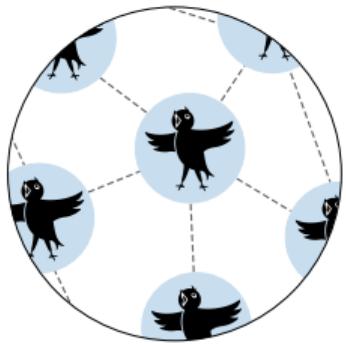
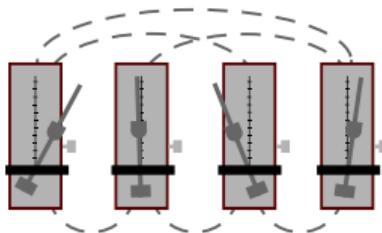
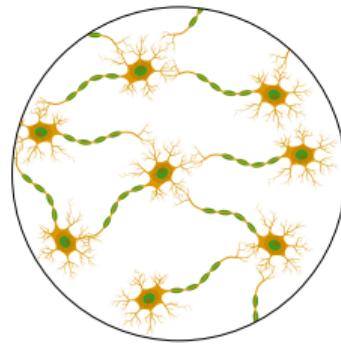
$\theta$

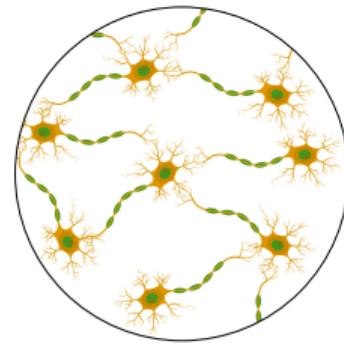
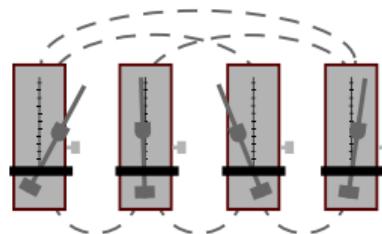
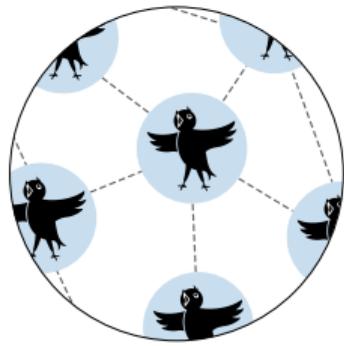
$(V, \text{Ca}, \dots)$



## Systèmes dynamiques

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{z})$$

 $(x_j, y_j, z_j)$  $\theta_j$  $(V_j, \text{Ca}_j, \dots)$



$\mathbf{z}_j :$   $(x_j, y_j, z_j)$        $\theta_j$        $(V_j, \text{Ca}_j, \dots)$

### Systèmes dynamiques sur graphe

$$\frac{d\mathbf{z}_j}{dt} = \underbrace{\mathbf{F}(\mathbf{z}_j)}_{\text{Dynamique propre à } j} + \underbrace{\sum_{k=1}^N A_{jk} \mathbf{G}(\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k)}_{\text{Interaction avec } k}$$

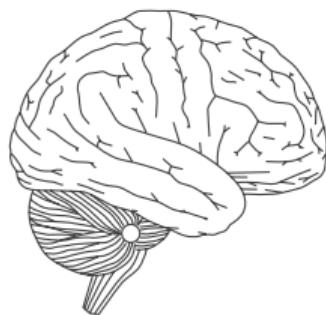
Comment analyser ces équations mathématiquement ?

## RÉDUCTION DIMENSIONNELLE

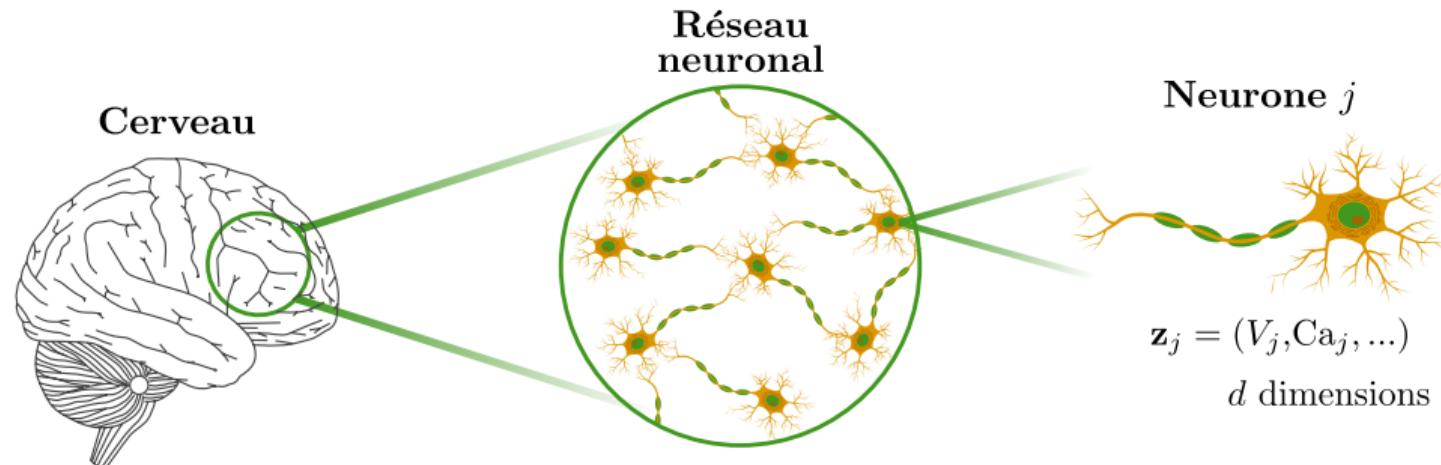
---

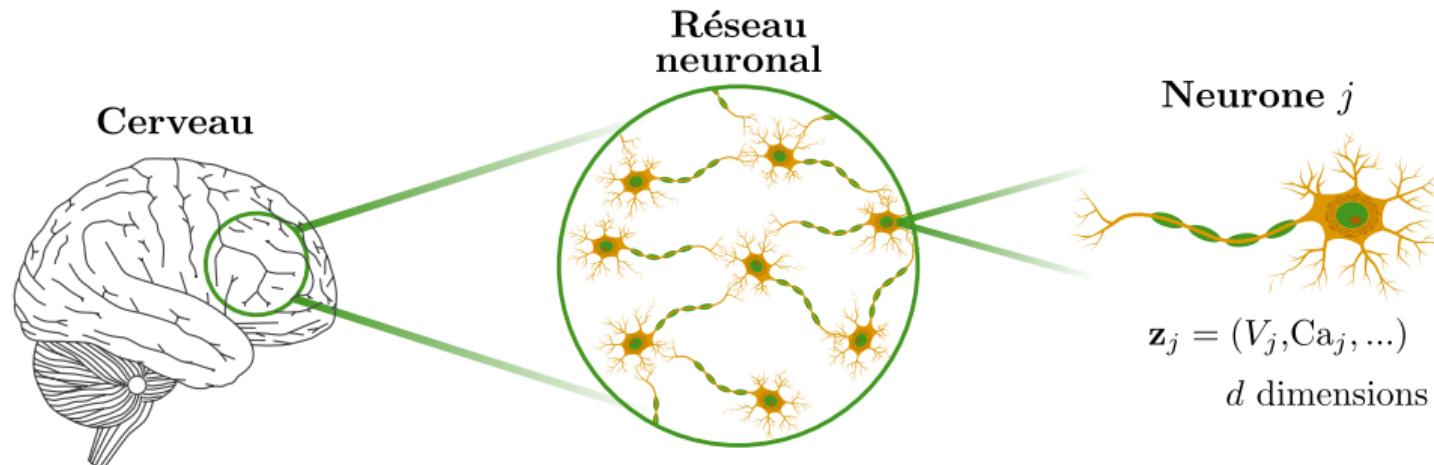
## Systèmes complexes

Grand nombre d'éléments en interaction ( $N \gg 1$ )



Il y a plusieurs milliards de  
neurones !





$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{z}_1}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{z}_1) + \sum_{k=1}^N A_{1k} \mathbf{G}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_k) \\ \frac{d\mathbf{z}_2}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) + \sum_{k=1}^N A_{2k} \mathbf{G}(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_k) \\ \frac{d\mathbf{z}_3}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{z}_3) + \sum_{k=1}^N A_{3k} \mathbf{G}(\mathbf{z}_3, \mathbf{z}_k) \\ \frac{d\mathbf{z}_4}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{z}_4) + \sum_{k=1}^N A_{4k} \mathbf{G}(\mathbf{z}_4, \mathbf{z}_k) \\ \vdots \\ \frac{d\mathbf{z}_N}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{z}_N) + \sum_{k=1}^N A_{Nk} \mathbf{G}(\mathbf{z}_N, \mathbf{z}_k) \end{array} \right\} d \times N \text{ équations non linéaires couplées}$$

## Systèmes complexes

Émergence de propriétés collectives (ex. synchronisation)



Connaître l'évolution temporelle des propriétés collectives nous offre de l'information cruciale sur les fonctions du système.

- Comment modéliser/mesurer les propriétés collectives ?

- Comment modéliser/mesurer les propriétés collectives ?

Introduire  $n$  **observables** (fonctions) linéaires

$$Z_\mu : (z_1, \dots, z_N) \mapsto M_{\mu 1} z_1 + \dots + M_{\mu N} z_N$$
$$\mu \in \{1, \dots, n\}$$

- Comment modéliser/mesurer les propriétés collectives ?

Introduire  $n$  **observables** (fonctions) linéaires

$$Z_\mu : (z_1, \dots, z_N) \mapsto M_{\mu 1} z_1 + \dots + M_{\mu N} z_N$$
$$\mu \in \{1, \dots, n\}$$

- Comment les propriétés collectives évoluent dans le temps ?

- Comment modéliser/mesurer les propriétés collectives ?

Introduire  $n$  **observables** (fonctions) linéaires

$$Z_\mu : (z_1, \dots, z_N) \mapsto M_{\mu 1} z_1 + \dots + M_{\mu N} z_N$$
$$\mu \in \{1, \dots, n\}$$

- Comment les propriétés collectives évoluent dans le temps ?

Trouver la dynamique des  $n$  observables linéaires

$$\frac{dZ_\mu}{dt} \approx \mathcal{F}(Z_1, \dots, Z_n)$$

## Dynamique complète

$N \gg 1$  dimensions

$$\dot{z}_j = F(z_j, \bar{z}_j) + \omega_j G(z_j, \bar{z}_j) + \sum_{k=1}^N A_{jk} H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k)$$



•  
•  
•

$n \ll N$  dimensions

$$\dot{Z}_\mu \approx \mathcal{F}(Z_1, \dots, Z_n)$$

## Dynamique réduite



## Dynamique complète

$N \gg 1$  dimensions

$$\dot{z}_j = F(z_j, \bar{z}_j) + \omega_j G(z_j, \bar{z}_j) + \sum_{k=1}^N A_{jk} H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k)$$



Étape 1:

### Définir des observables

Moyennes pondérées:  $Z_\mu = \sum_{j=1}^N M_{\mu j} z_j$

$n \ll N$  dimensions

$$\dot{Z}_\mu \approx \mathcal{F}(Z_1, \dots, Z_n)$$

## Dynamique réduite



## Dynamique complète

$N \gg 1$  dimensions

$$\dot{z}_j = F(z_j, \bar{z}_j) + \omega_j G(z_j, \bar{z}_j) + \sum_{k=1}^N A_{jk} H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k)$$



Étape 1:

### Définir des observables

$$\text{Moyennes pondérées: } Z_\mu = \sum_{j=1}^N M_{\mu j} z_j$$

Étape 2:

### Dériver par rapport au temps

$$\dot{Z}_\mu = \sum_{j=1}^N M_{\mu j} F(z_j, \bar{z}_j) + \sum_{j=1}^N M_{\mu j} \omega_j G(z_j, \bar{z}_j) + \sum_{j,k=1}^N M_{\mu j} A_{jk} H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k)$$



$n \ll N$  dimensions

$$\dot{Z}_\mu \approx \mathcal{F}(Z_1, \dots, Z_n)$$

## Dynamique réduite

## Dynamique complète

$N \gg 1$  dimensions

$$\dot{z}_j = F(z_j, \bar{z}_j) + \omega_j G(z_j, \bar{z}_j) + \sum_{k=1}^N A_{jk} H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k)$$



Étape 1:

### Définir des observables

$$\text{Moyennes pondérées: } Z_\mu = \sum_{j=1}^N M_{\mu j} z_j$$

Étape 2:

### Dériver par rapport au temps

$$\dot{Z}_\mu = \sum_{j=1}^N M_{\mu j} F(z_j, \bar{z}_j) + \sum_{j=1}^N M_{\mu j} \omega_j G(z_j, \bar{z}_j) + \sum_{j,k=1}^N M_{\mu j} A_{jk} H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k)$$

Étape 3: **Fermer le système** en termes des observables

$n \ll N$  dimensions

$$\dot{Z}_\mu \approx \mathcal{F}(Z_1, \dots, Z_n)$$

Dynamique réduite

(Énoncé simplifié)

Soit  $M$ , une matrice  $n \times N$ , et les matrices diagonales

$$W = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N) \quad (\text{matrice des paramètres dynamiques}),$$

$$K = \text{diag}(k_1, \dots, k_N) \quad (\text{matrice des degrés}).$$

(Énoncé simplifié)

Soit  $M$ , une matrice  $n \times N$ , et les matrices diagonales

$$W = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N) \quad (\text{matrice des paramètres dynamiques}),$$

$$K = \text{diag}(k_1, \dots, k_N) \quad (\text{matrice des degrés}).$$

S'il existe trois matrices  $n \times n$ ,  $\mathcal{W}, \mathcal{K}, \mathcal{A}$ , telles que

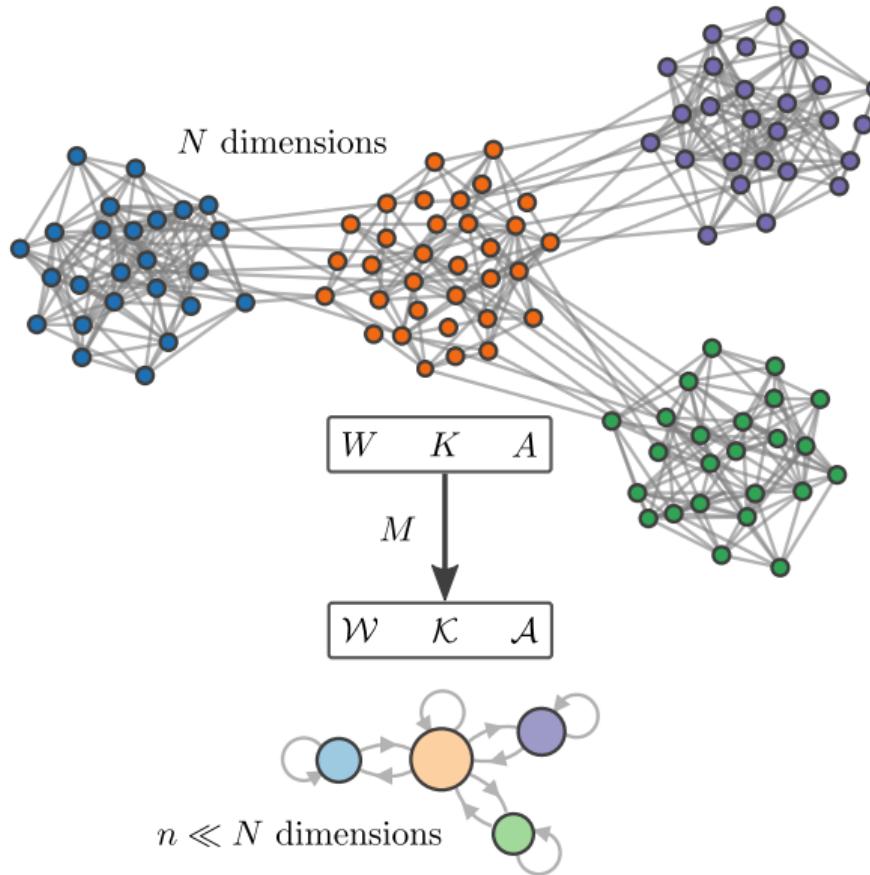
$$\mathcal{W}M = MW, \quad (1)$$

$$\mathcal{K}M = MK, \quad (2)$$

$$\mathcal{A}M = MA, \quad (3)$$

alors la dynamique réduite s'exprime uniquement en fonction des observables  $Z_\mu$  (étape 3, fermeture). Les équations (1-3) sont les **équations de compatibilité**.

Il y a une interprétation simple pour  $\mathcal{W}, \mathcal{K}, \mathcal{A}...$



Super... mais comment obtenir les matrices réduites  $\mathcal{W}, \mathcal{K}, \mathcal{A}$ ? Comment choisir  $M$ ?

Super... mais comment obtenir les matrices réduites  $\mathcal{W}, \mathcal{K}, \mathcal{A}$ ? Comment choisir  $M$ ?

## 1. Équations de compatibilité

$$\mathcal{W}M = MW, \quad \mathcal{K}M = MK, \quad \mathcal{A}M = MA$$

Super... mais comment obtenir les matrices réduites  $\mathcal{W}, \mathcal{K}, \mathcal{A}$ ? Comment choisir  $M$ ?

## 1. Équations de compatibilité

$$\mathcal{W}M = MW, \quad \mathcal{K}M = MK, \quad \mathcal{A}M = MA$$

## 2. Autres conditions

- Le rang de la matrice  $M$  est  $n$ ;
- Chaque rangée de  $M$  est un vecteur de probabilité, c.-à-d.,
  - $\sum_{j=1}^N M_{\mu j} = 1$  pour tout  $\mu$ ,
  - $M_{\mu j} \geq 0$  pour tout  $\mu$  et  $j$ .

Super... mais comment obtenir les matrices réduites  $\mathcal{W}, \mathcal{K}, \mathcal{A}$ ? Comment choisir  $M$ ?

## 1. Équations de compatibilité

$$\mathcal{W}M = MW, \quad \mathcal{K}M = MK, \quad \mathcal{A}M = MA$$

## 2. Autres conditions

- Le rang de la matrice  $M$  est  $n$ ;
- Chaque rangée de  $M$  est un vecteur de probabilité, c.-à-d.,
  - $\sum_{j=1}^N M_{\mu j} = 1$  pour tout  $\mu$ ,
  - $M_{\mu j} \geq 0$  pour tout  $\mu$  et  $j$ .

En termes simples,

- Éviter la redondance entre les observables;
- Obtenir des observables avec une interprétation claire (important pour bien mesurer la synchronisation).

En général, on ne peut pas satisfaire toutes ses conditions, mais...on peut résoudre une équation de compatibilité **exactement** et les autres **approximativement**!

En général, on ne peut pas satisfaire toutes ses conditions, mais...on peut résoudre une équation de compatibilité **exactement** et les autres **approximativement**!

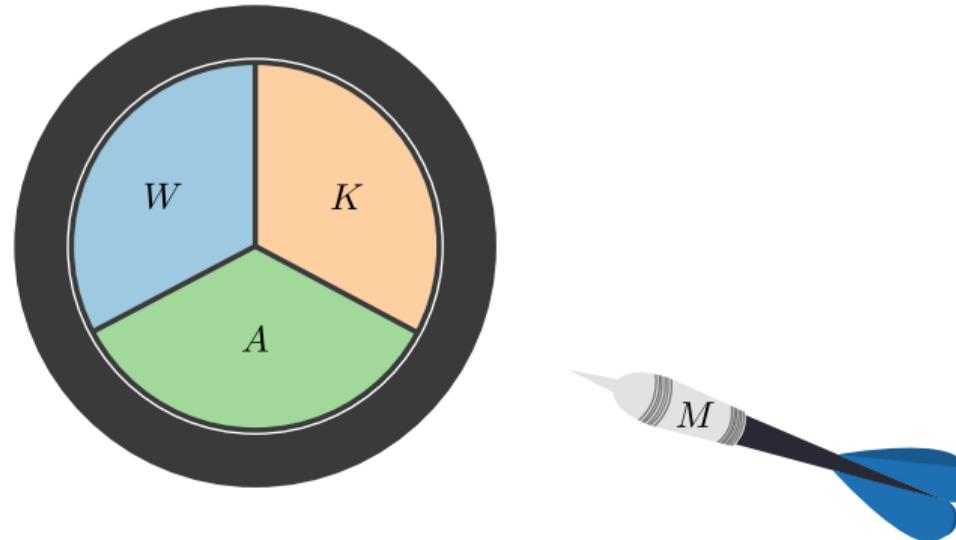
Par exemple,

$$\mathcal{W} \approx MWM^+, \quad \mathcal{K} \approx MKM^+, \quad \mathcal{A} = MAM^+,$$

où  $+$  désigne la pseudo-inversion de Moore-Penrose.

C'est la **procédure à une cible**.

C'est la **procédure à une cible**.



DART: Dynamics Approximate Reduction Technique



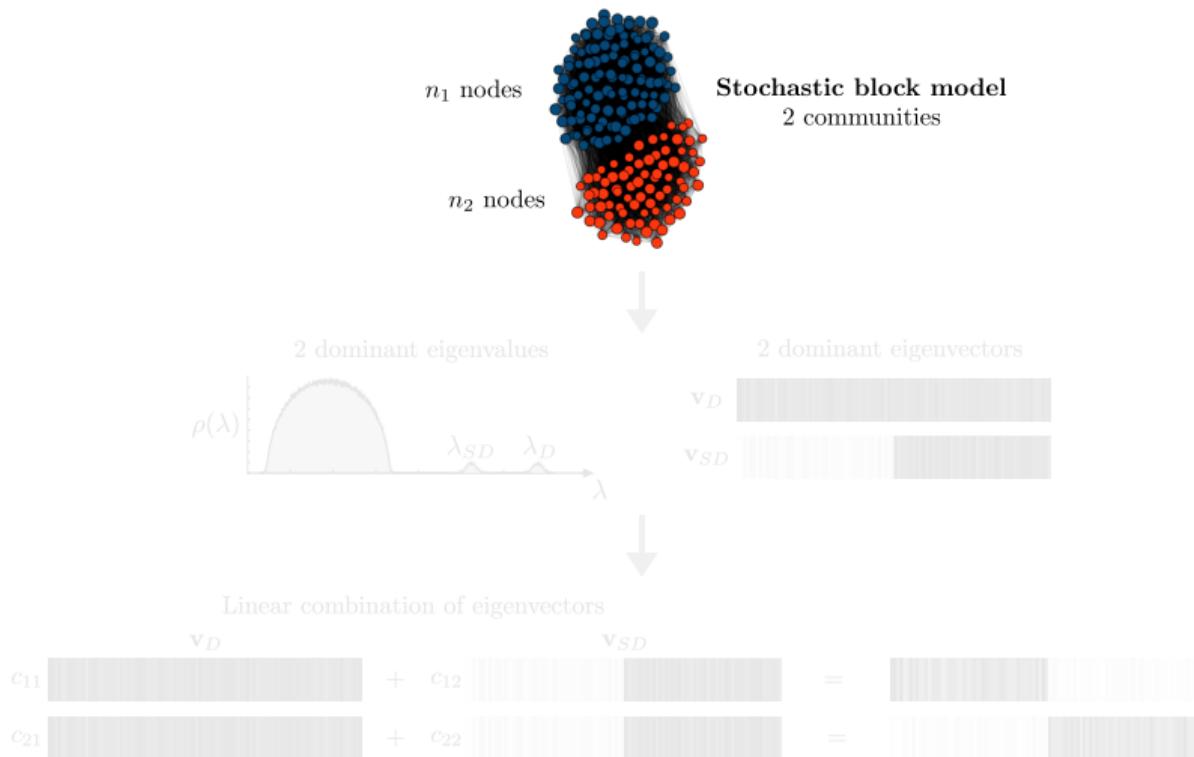
Propriétés des graphes = important pour prédire l'émergence de la synchronisation!



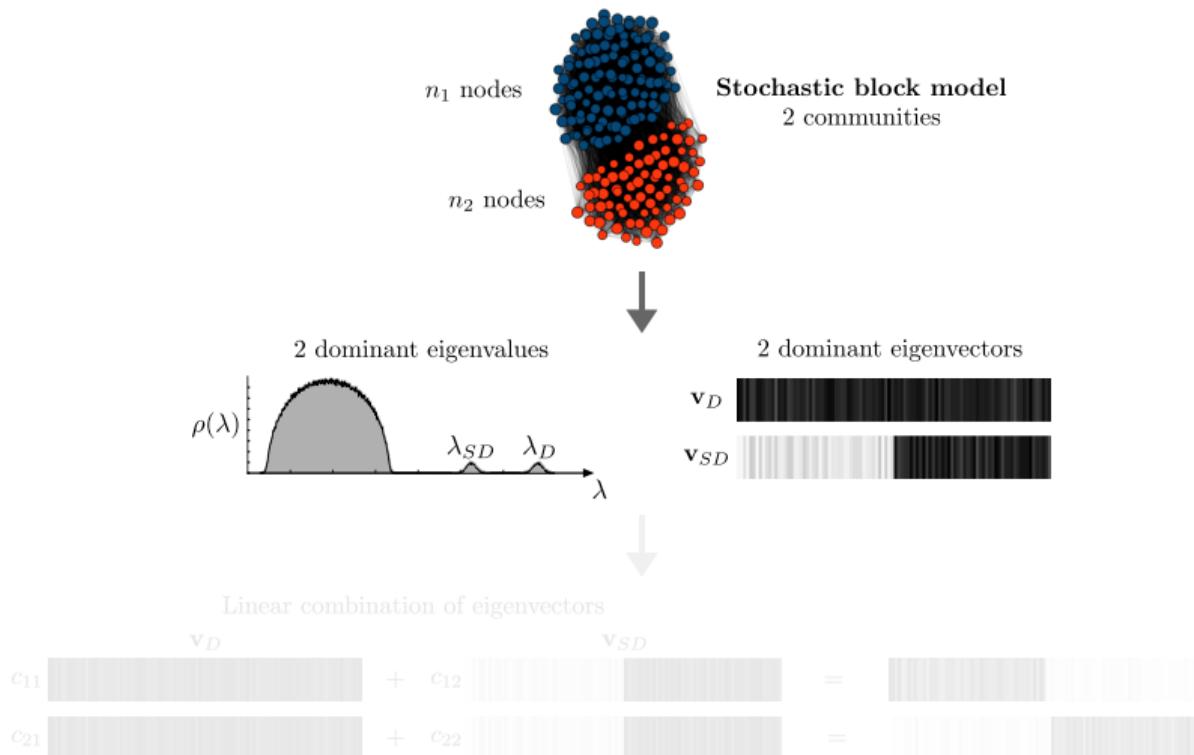
Propriétés des graphes = important pour prédire l'émergence de la synchronisation!

Ciblons  $A$  et utilisons la théorie spectrale des graphes pour trouver  $M$ !

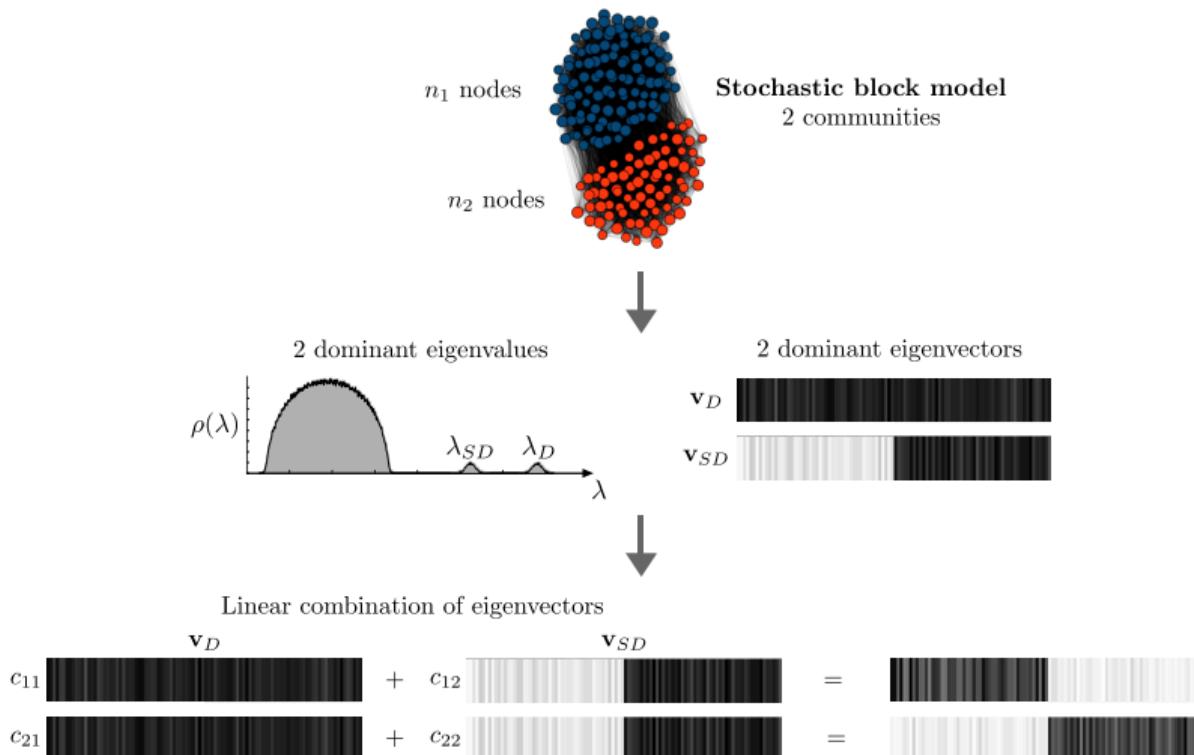
# Matrice de réduction $M$ pour la cible $A$



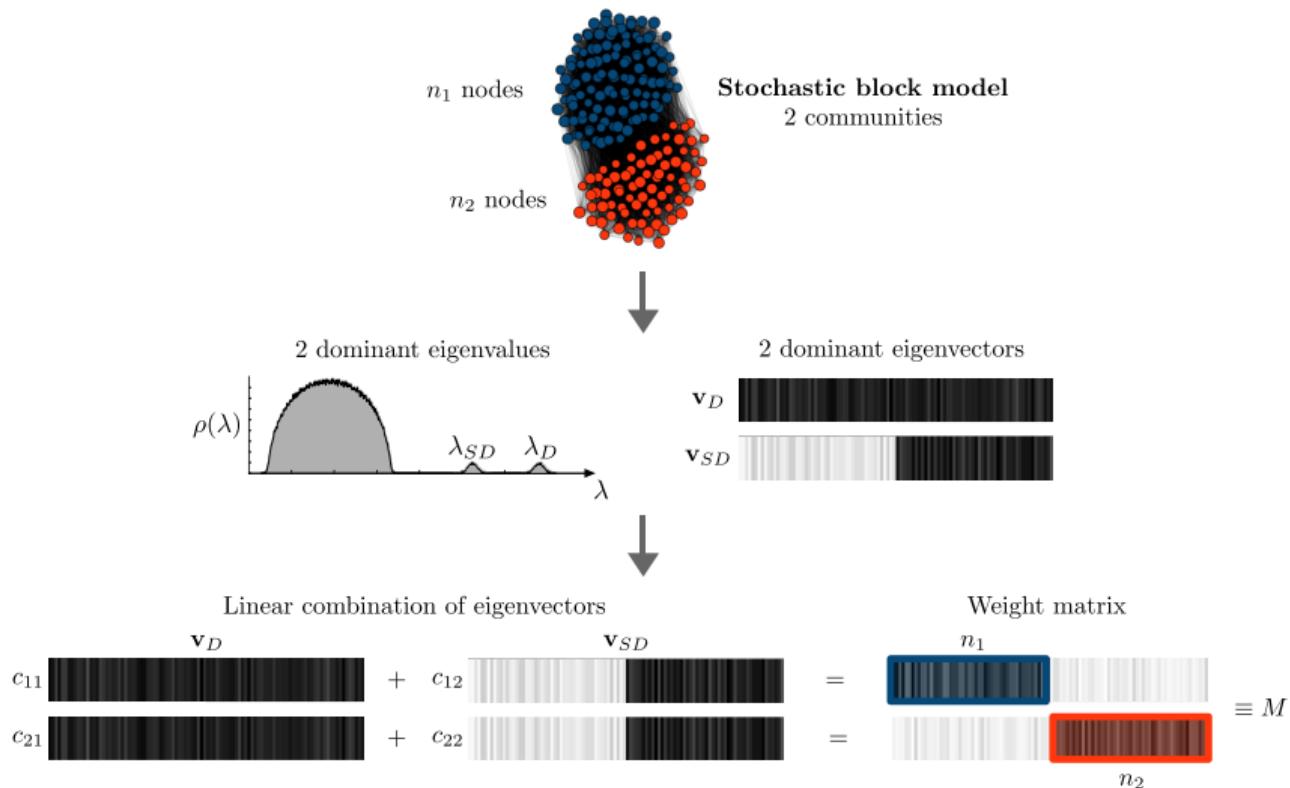
# Matrice de réduction $M$ pour la cible $A$



# Matrice de réduction $M$ pour la cible $A$



# Matrice de réduction $M$ pour la cible $A$





Weight matrix  $M$



$\times$

State vector

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

Spectral observables

$=$

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

Une fois que  $M$  est connue, nous avons que

$$\mathcal{A} = MAM^+, \quad \mathcal{W} \approx MWM^+, \quad \mathcal{K} \approx MKM^+.$$

Une fois que  $M$  est connue, nous avons que

$$\mathcal{A} = MAM^+, \quad \mathcal{W} \approx MWM^+, \quad \mathcal{K} \approx MKM^+.$$

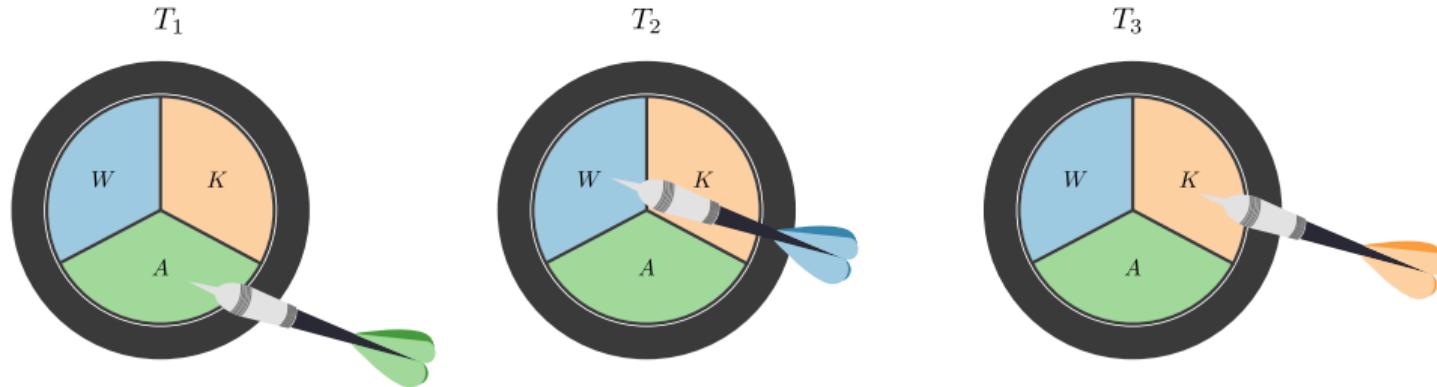
**Problème :** On pourrait générer de grandes erreurs dans les autres équations de compatibilité ( $\mathcal{W}M = MW$  est importante aussi)

Une fois que  $M$  est connue, nous avons que

$$\mathcal{A} = MAM^+, \quad \mathcal{W} \approx MWM^+, \quad \mathcal{K} \approx MKM^+.$$

**Problème :** On pourrait générer de grandes erreurs dans les autres équations de compatibilité ( $WM = MW$  est importante aussi)

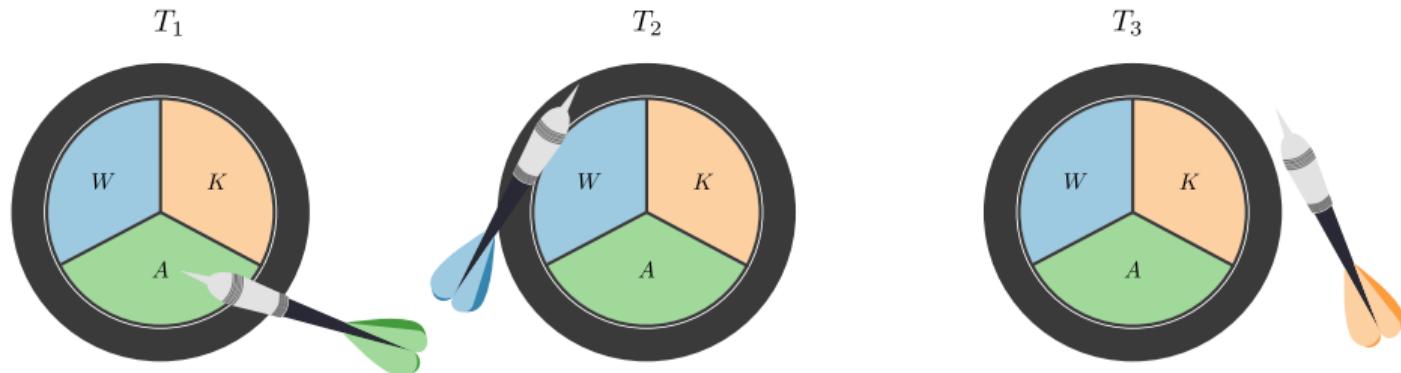
**Solution :** Introduire une autre procédure. (**Procédure à plusieurs cibles**).



Nous visons différentes cibles pour construire  $M$ .

Plus techniquement, on combine les vecteurs propres de chaque matrice cible dans l'espoir de résoudre les trois équations de compatibilité.

Ce qu'on vise n'est pas nécessairement ce qu'on obtient...



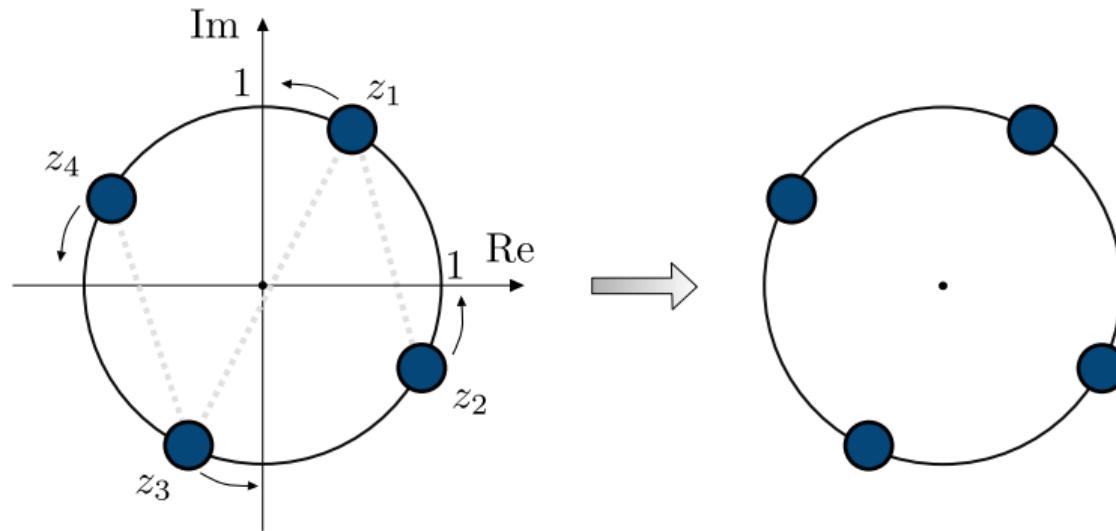
...mais on peut aussi obtenir de très bons résultats en visant les cibles  $A$  et  $W$  en plus d'une dimension  $n$  suffisamment grande.

RÉDUCTION DES DYNAMIQUES DE PHASE  
ET  
ÉMERGENCE DE LA SYNCHRONISATION

---

$$\frac{d\theta_j}{dt} = f(\theta_j) + \omega_j g(\theta_j) + \sum_{k=1}^N A_{jk} h(\theta_j, \theta_k)$$

Représentation dans le plan complexe :  $z_j = e^{i\theta_j}$

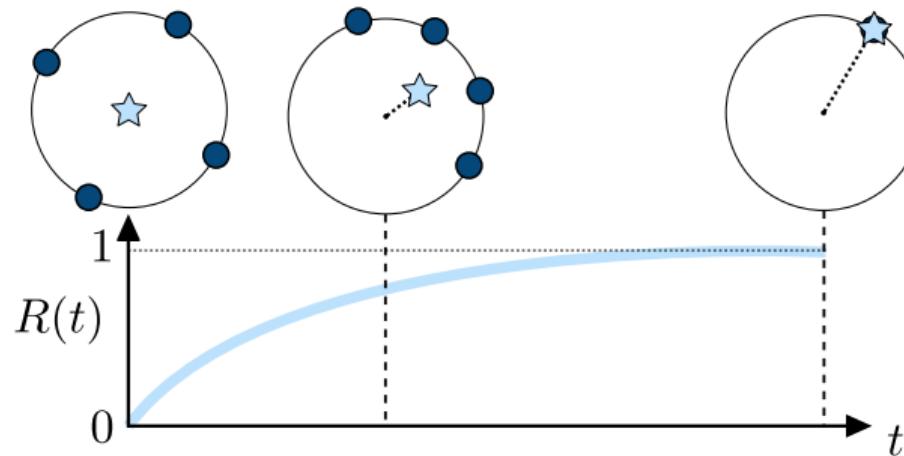


# Observable de synchronisation

$$Z(t) = R(t)e^{i\Phi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N z_j(t) \quad (\textbf{Remarque : Linéaire !})$$

$R(t) = |Z(t)|$  = Centre de masse  $\rightarrow$  Quantifie la synchronisation

Non synchronisé      Partiellement synchronisé      Parfaitement synchronisé



## Exemple 1 : Modèle de Kuramoto (1975)



Yoshiki Kuramoto

Dynamique complète :

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_j &= \omega_j + \frac{\sigma}{N} \sum_{k=1}^N A_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j) & \omega_j : \text{fréquence naturelle de l'oscillateur } j \\ \dot{z}_j &= i\omega_j z_j + \frac{\sigma}{N} \sum_{k=1}^N A_{jk} [z_j - z_j^2 \bar{z}_k] & \because z_j = e^{i\theta_j}\end{aligned}$$

## Exemple 1 : Modèle de Kuramoto (1975)



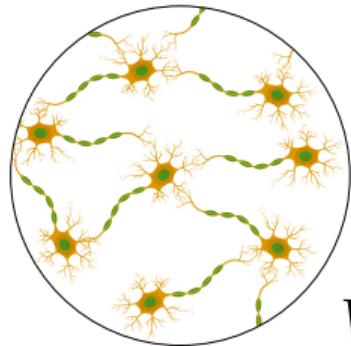
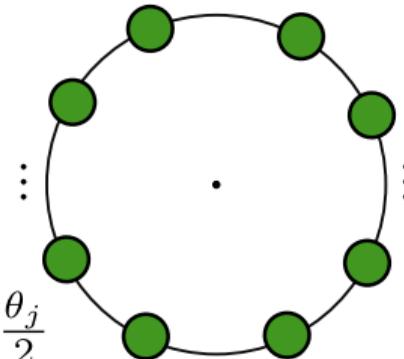
Yoshiki Kuramoto

Dynamique complète :

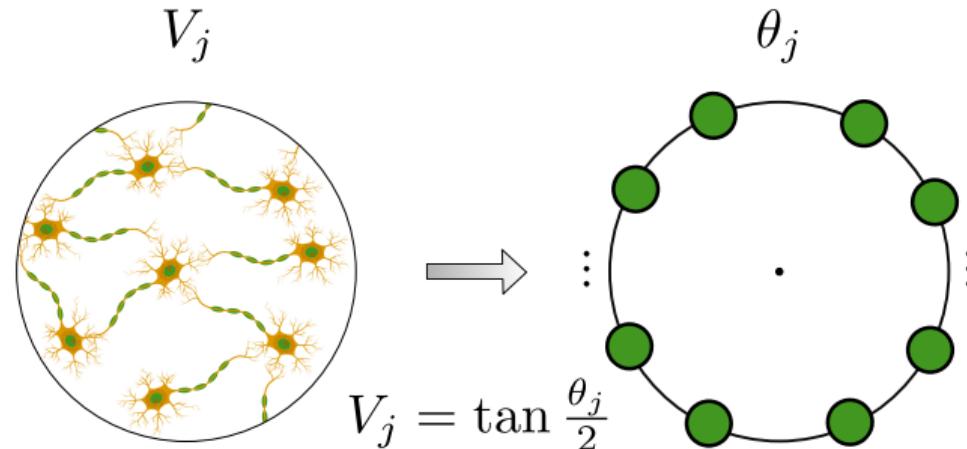
$$\begin{aligned}\dot{\theta}_j &= \omega_j + \frac{\sigma}{N} \sum_{k=1}^N A_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j) & \omega_j : \text{fréquence naturelle de l'oscillateur } j \\ \dot{z}_j &= i\omega_j z_j + \frac{\sigma}{N} \sum_{k=1}^N A_{jk} [z_j - z_j^2 \bar{z}_k] & \because z_j = e^{i\theta_j}\end{aligned}$$

Dynamique réduite :

$$\dot{Z}_\mu = i \sum_{\nu=1}^n \mathcal{W}_{\mu\nu} Z_\nu + \frac{\sigma}{2N} \sum_{\nu=1}^n \mathcal{A}_{\mu\nu} Z_\nu - \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu^2} \sum_{\nu,\xi,\tau=1}^n \mathcal{A}_{\mu\nu} \mathcal{K}_{\mu\xi} \mathcal{K}_{\mu\tau} Z_\xi Z_\tau \bar{Z}_\nu$$

$V_j$  $\theta_j$ 

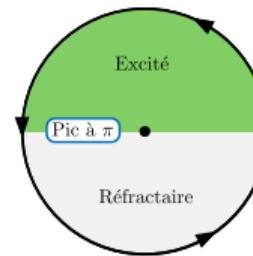
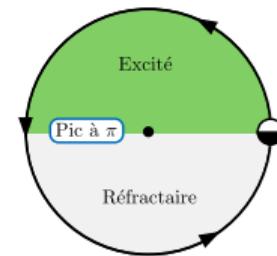
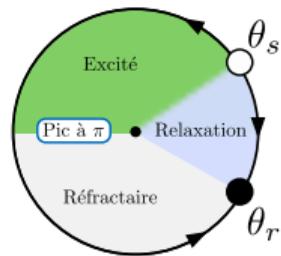
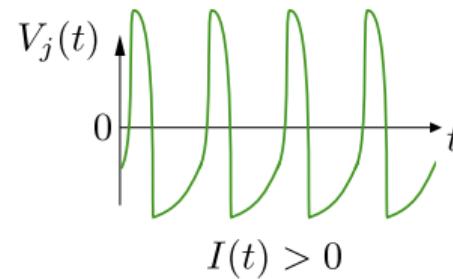
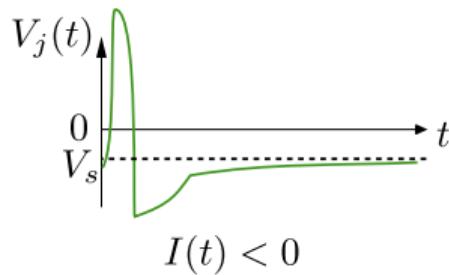
$$V_j = \tan \frac{\theta_j}{2}$$



$$\frac{d\theta_j}{dt} = (1 - \cos \theta_j) + (1 + \cos \theta_j) \underbrace{\left[ \omega_j + \frac{\sigma}{N} \sum_{k=1}^N A_{jk} (1 - \cos \theta_k) \right]}_{I(t)}$$

où  $\omega_j$  représente un courant externe injecté dans le neurone  $j$ .

$$\frac{d\theta_j}{dt} = (1 - \cos \theta_j) + (1 + \cos \theta_j) \left[ \omega_j + \frac{\sigma}{N} \sum_{k=1}^N A_{jk} (1 - \cos \theta_k) \right]$$



Bifurcation SNIC  
(SNIC = *saddle-node on invariant circle*)

## Exemple 2 : Modèle thêta (1984)



Nancy Kopell



Bard Ermentrout

Dynamique complète :

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_j}{dt} &= (1 - \cos \theta_j) + (1 + \cos \theta_j) \left[ \omega_j + \frac{\sigma}{N} \sum_{k=1}^N A_{jk} (1 - \cos \theta_k) \right] & \omega_j : \text{courant } j \\ \dot{z}_j &= \frac{-i}{2}(z_j - 1)^2 + \frac{i}{2}(z_j + 1)^2 \omega_j + \frac{i\sigma}{2N} (z_j + 1)^2 \sum_{k=1}^N A_{jk} \left( 1 - \frac{1}{2}z_k - \frac{1}{2}\bar{z}_k \right) & \because z_j = e^{i\theta_j}\end{aligned}$$

## Exemple 2 : Modèle thêta (1984)



Nancy Kopell



Bard Ermentrout

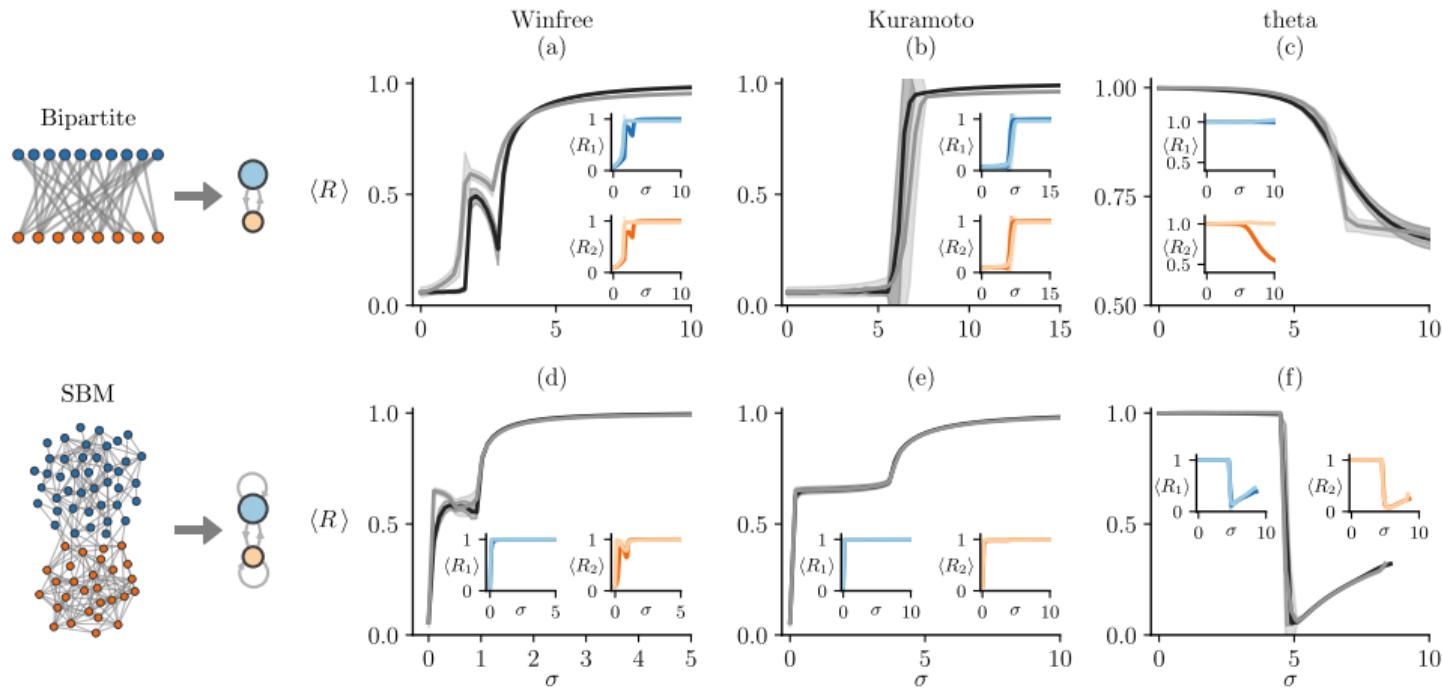
Dynamique complète :

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_j}{dt} &= (1 - \cos \theta_j) + (1 + \cos \theta_j) \left[ \omega_j + \frac{\sigma}{N} \sum_{k=1}^N A_{jk} (1 - \cos \theta_k) \right] & \omega_j : \text{courant } j \\ \dot{z}_j &= \frac{-i}{2}(z_j - 1)^2 + \frac{i}{2}(z_j + 1)^2 \omega_j + \frac{i\sigma}{2N} (z_j + 1)^2 \sum_{k=1}^N A_{jk} \left( 1 - \frac{1}{2}z_k - \frac{1}{2}\bar{z}_k \right) & \because z_j = e^{i\theta_j}\end{aligned}$$

Dynamique réduite :

$$\begin{aligned}\dot{Z}_\mu &= -\frac{i}{2}(Z_\mu - 1)^2 + \frac{i\Omega_\mu}{2} \left( \Omega_\mu^{-1} \sum_{\nu=1}^n \mathcal{W}_{\mu\nu} Z_\nu + 1 \right)^2 \\ &\quad + \frac{i\sigma}{4N} \left( \kappa_\mu^{-1} \sum_{\nu=1}^n \mathcal{K}_{\mu\nu} Z_\nu + 1 \right)^2 [2\kappa_\mu - \sum_{\nu=1}^n \mathcal{A}_{\mu\nu} (Z_\nu + \bar{Z}_\nu)]\end{aligned}$$

- $\omega_j$  sont tirés de deux distributions gaussiennes
- Procédure à 2 cibles :  $T_1 = A, T_2 = W$



# Questions et remerciements

Merci pour votre attention! Question?

**Article :** <https://arxiv.org/abs/2005.10922>

(accepté et bientôt publié dans *Physical Review Research*)

**Contact :** vincent.thibeault.1@ulaval.ca

**Directeurs de recherche :** Antoine Allard et Patrick Desrosiers

Merci à tou(te)s mes collègues de Dynamica!

