

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité

Dynamique non linéaire et chaos, optique

Présentée par

**M. Samir SAÏDI**

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE  
PARIS 6

Sujet de thèse :

**Etude d'une nouvelle classe de billards inhomogènes  
et son apport aux microcavités laser**

Soutenue le 08 novembre 2005

devant le jury composé de :

Rapporteurs :            Pr. Reinhold Blumel  
                            Dr. Andreas Buchleitner

Examinateurs :          Dr. Dominique Delande  
                            Pr. Alfred Maquet (président)  
                            Pr. Joseph Zyss

Directeur de thèse : Pr. Louis. J. Dubé

## **Etude d'une nouvelle classe de billards inhomogènes et son apport aux microcavités laser**

Nous présentons une nouvelle classe de billards planaires fait d'une cavité diélectrique d'indice de réfraction inhomogène. Nous les appelons simplement billards inhomogènes. Contrairement à l'usage habituel où la transition d'un régime régulier à un régime chaotique est induite par une déformation géométrique d'une cavité circulaire, nous proposons un scénario basé sur la brisure de la symétrie rotationnelle du système. Ceci s'accomplit par le choix d'un matériel diélectrique inhomogène à l'intérieur d'une cavité circulaire. Nous avons étudié les conséquences de ce choix, isolé les conditions d'intégrabilité du système, décrit la transition vers le chaos et classifié les effets de la symétrie (ou de l'absence de symétrie) du diélectrique inhomogène sur les trajectoires. L'aspect ondulatoire de notre étude nous a enfin permis de tirer des conclusions sur la structure (facteur de qualité et directionnalité) des modes de résonance reliés à l'émission laser dans ces cavités.

## **On a new class of inhomogeneous billiards and its relation to microcavity lasers**

We present a new class of planar billiards consisting of a dielectric cavity with an inhomogeneous index of refraction called simply inhomogeneous billiards. Contrary to usual procedure where a transition from a regular to a chaotic regime is induced by a geometric deformation of a circular cavity, we propose a scenario based on a rotational symmetry breaking in the system. This is performed by choosing an inhomogeneous dielectric material inside a circular cavity. We study the consequences of this choice, isolate the conditions for integrability in such systems, describe the transition to chaos and classify the effects of the symmetry of the inhomogeneous dielectric on the trajectories. In relation to microcavity lasers, we also discuss the changes on the refractive escape mechanism in this new environment and on the structure (quality factor and directionality) of its resonant modes.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Notions fondamentales</b>	<b>11</b>
2.1	Le formalisme hamiltonien . . . . .	12
2.1.1	Propriétés des systèmes hamiltoniens . . . . .	12
	a) Principe de moindre action . . . . .	12
	b) Les coordonnées canoniques . . . . .	13
	c) Les équations du mouvement . . . . .	14
	d) Les transformations canoniques . . . . .	15
	e) Théorème de Liouville . . . . .	15
2.1.2	Notion d'intégrabilité . . . . .	17
	a) Equations de Hamilton-Jacobi . . . . .	17
	b) Structure du flot . . . . .	18
	c) Section et application de Poincaré . . . . .	18
	d) Stabilité des trajectoires périodiques . . . . .	20
2.1.3	Transition vers le chaos . . . . .	22
	a) Théorème de KAM . . . . .	22

b) Scénario de KAM . . . . .	25
2.2 Modes propres d'une cavité diélectrique . . . . .	29
2.2.1 L'équation de propagation . . . . .	29
2.2.2 Les conditions aux limites . . . . .	33
<b>3 Les billards inhomogènes</b>	<b>37</b>
3.1 Optique géométrique et analogie mécanique . . . . .	38
3.1.1 Principe de Fermat et équation iconale . . . . .	38
3.1.2 Analogie avec la mécanique . . . . .	40
3.2 Dynamique des billards inhomogènes . . . . .	41
3.2.1 Coordonnées polaires . . . . .	42
3.2.2 Section de Poincaré . . . . .	44
3.3 Transition vers le chaos . . . . .	48
3.3.1 Cas intégrable . . . . .	49
a) Section de Poincaré . . . . .	50
b) Trajectoires . . . . .	51
c) Effet de l'inhomogénéité . . . . .	52
3.3.2 Cas non-intégrable . . . . .	57
a) Section de Poincaré . . . . .	60
b) Trajectoires . . . . .	62
c) Effet de l'inhomogénéité . . . . .	69
3.4 Effet de la symétrie . . . . .	70
3.5 Processus d'échappement . . . . .	76

<b>4 Modes propres d'une cavité inhomogène</b>	<b>81</b>
4.1 Symétrie de rotation . . . . .	81
4.1.1 Solution de l'équation de Helmholtz . . . . .	82
4.1.2 Effet de l'inhomogénéité . . . . .	87
4.2 Discussion . . . . .	92
4.2.1 Relation semi classique . . . . .	92
4.2.2 Analogie avec la mécanique quantique . . . . .	93
4.2.3 Interprétation des résultats . . . . .	96
4.3 Modes propres d'une cavité non-intégrable . . . . .	98
4.3.1 Les méthodes WMM . . . . .	99
a) La méthode Nöckel . . . . .	100
b) La méthode Tureci . . . . .	103
4.3.2 La méthode RZ . . . . .	109
a) Solution de l'équation de propagation . . . . .	110
b) Définition de la matrice de diffusion $\mathbf{S}$ . . . . .	112
c) Combinaison des matrices $\mathbf{S}^i$ . . . . .	113
<b>5 Discussion générale et perspectives</b>	<b>117</b>
<b>A Combinaison des matrices <math>S^i</math></b>	<b>127</b>
A.1 Relation entre les matrices $S$ et $\tilde{S}^{0,N}$ . . . . .	127
A.2 Relation entre les matrices $\tilde{S}^{i,i+1}$ et $(S^i, S^{i+1})$ . . . . .	127
<b>B Détermination des éléments de la matrice <math>S^i</math></b>	<b>129</b>

B.1 Cas d'une frontière intermédiaire . . . . .	129
B.2 Cas de la frontière $i = 0$ . . . . .	133
B.3 Cas de la frontière $i = N$ . . . . .	135
<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Les lasers ont un intérêt majeur en physique. D'une part ils représentent un champ d'application pour des domaines théoriques telles que la physique atomique et l'optique et d'autre part ils offrent un outil précieux dans des domaines expérimentaux telle que la spectroscopie ou le refroidissement des particules. De plus, les lasers occupent actuellement une grande place dans l'industrie optoélectronique, la télécommunication et l'information. Le principe de fonctionnement de ces systèmes est basé sur deux aspects : l'émission stimulée assurée par le milieu actif qui définit les propriétés spectrales du laser et la résonance optique assurée par la cavité. La nature de cette dernière joue un rôle important dans la qualité du résonateur et influence la directionnalité de l'émission. Ici la notion de qualité est reliée essentiellement au temps de confinement de la lumière à l'intérieur de la cavité et dépend de la valeur du facteur de qualité noté  $Q$ . Ce facteur est une quantité accessible expérimentalement et est défini comme le nombre de cycles du champ, à une fréquence donnée, pour que celui-ci diminue de la moitié de sa valeur.

Les résonateurs optiques les plus connus pour la fabrication des lasers sont les cavités Fabry-Pérot. Dans la configuration la plus simple, ce type de cavités est constitué d'un miroir de réflectivité idéale ( $R_1 = 1$ ) opposé à un autre miroir de réflectivité légèrement inférieure ( $R_2 < 1$ ). Les modes propres d'un tel résonateur sont formés par interférences constructives entre les ondes issues des réflexions successives entre les deux miroirs. Ces ondes se propagent avec des vecteurs d'onde parallèles à l'axe de la cavité imposant à la direction de l'émission d'être perpendiculaire à la face du miroir de sortie. La qualité des résonateurs Fabry-Pérot dépend donc essentiellement de la bonne réflectivité des miroirs.

Un des enjeux majeurs dans la fabrication des lasers est la réduction de leurs tailles en préservant la bonne qualité du résonateur. Pour les cavités Fabry-Pérot, la difficulté consiste donc à construire de bons réflecteurs à l'échelle microscopique. Plusieurs efforts ont été établis dans ce sens. La dernière génération de ces résonateurs de type Fabry-Pérot est connue sous le nom de *Vertical Cavity Surface Emitting Laser* (VCSEL), dont les premières références expérimentales se trouvent en [63, 93]. La bonne réflectivité des miroirs est réalisée en utilisant le principe de réflexion de Bragg connu dans le

domaine des rayons X. La figure (1.1) montre une image de microscopie électronique d'un VCSEL[31], d'un diamètre de base approximatif de  $4\mu\text{m}$  et un schéma typique de la structure utilisé en laboratoire pour la fabrication de ces cavités [83].

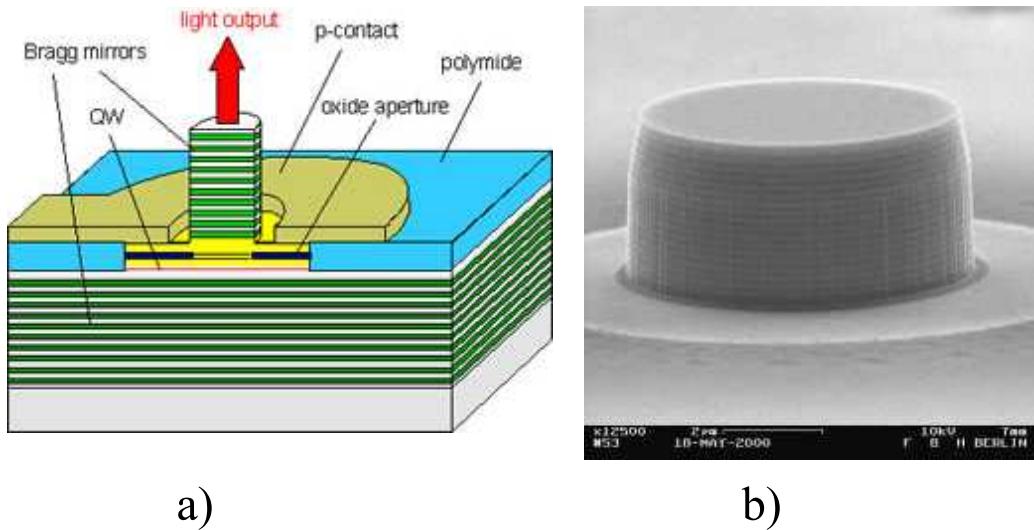


FIG. 1.1 – a) schéma typique de la structure d'un VCSEL utilisé en laboratoire, b) une image de microscopie électronique d'un VCSEL de diamètre de base approximatif de  $4\mu\text{m}$ .

Une manière plus naturelle de fabriquer des miroirs à grande réflectivité est l'utilisation de cavités diélectriques planes. Dans ce type de cavité la lumière est confinée par réflexion totale sur la frontière. La taille de ces résonateurs peut maintenant atteindre quelques micromètres de diamètre [75] (figure 1.2.a ) en préservant un bon facteur de qualité et dans des circonstances particulières des dimensions nanométriques ont été rapportées [68]. L'émission se fait dans le plan et possède des caractéristiques de directionnalité très intéressantes. C'est ce type de cavité qui est à la base de notre étude.

La technique de piégeage de la lumière dans un diélectrique est exploitée depuis une vingtaine d'années. Les premières microcavités étaient fabriquées dans des gouttelettes de liquide [104, 16, 17] ou en utilisant des matériaux semi-conducteurs sous forme de micro-disque ou de cylindre [60, 56, 91]. Grâce à la réflexion totale la lumière reste confinée à l'intérieur des microcavités pendant un temps très grand, ainsi ces structures peuvent avoir des facteurs de qualité relativement élevés. La valeur du facteur de qualité peut néanmoins être affecté par les imperfections dues à la fabrication. Pour les matériaux semi-conducteurs, ces valeurs sont peu élevées ( $Q \approx 5000$ ) à cause de

la rugosité de la frontière. Des valeurs beaucoup plus élevées ( $Q \approx 10^9$ ) ont été obtenues expérimentalement dans des structures de silice [20] où il est possible de fabriquer des surfaces uniformes. La possibilité d'avoir des valeurs de  $Q$  assez élevées permet aux micro-résonateurs diélectriques d'avoir un grand intérêt dans des domaines de recherche diverses [15]. Ils peuvent servir de modèles pour l'étude des effets électrodynamiques quantiques en cavité [112] ou de sonder les propriétés non linéaires des matériaux [94].

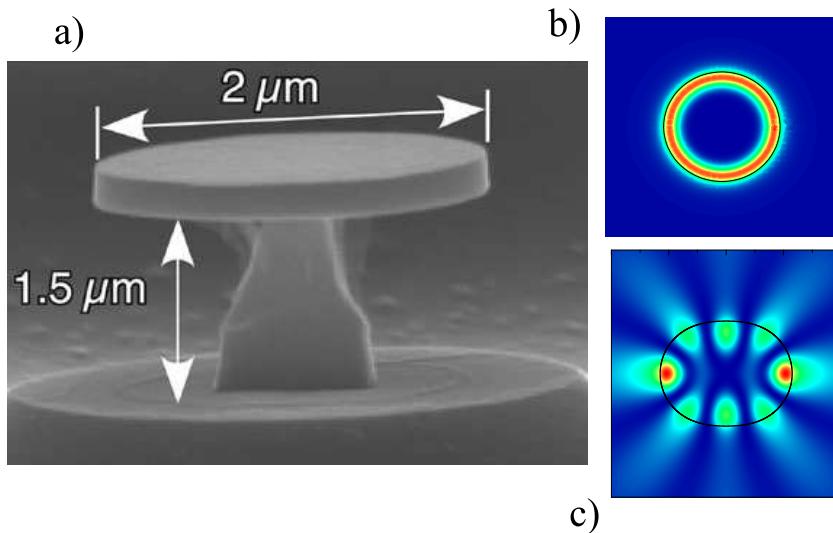


FIG. 1.2 – a) une image de microscopie électronique d'une microcavité diélectrique de diamètre de base approximatif de  $2\text{ }\mu\text{m}$ , b) émission isotrope d'un mode propre d'une cavité circulaire, c) émission anisotrope d'un mode propre d'une cavité asymétrique sous forme de quadripôle avec le paramètre de déformation ( $\epsilon = 0.1$ ).

L'intérêt majeur qui a motivé la plupart des travaux de recherche sur les microcavités diélectriques reste néanmoins leur intégration dans des systèmes optoélectroniques. Les micro-disques ou micro-sphères ne sont pas les bons candidats pour cet effet. Ces cavités possèdent une géométrie qui préserve la symétrie de rotation et dans ce cas les modes propres du résonateur ne présentent pas de directions d'émission privilégiées (figure 1.2.b). Pour coupler le laser à d'autres composants optiques tels que les fibres, il est préférable d'avoir des modes qui possèdent une forte intensité de sortie dans un angle solide le plus faible possible. Plusieurs approches ont été développées pour forcer la directionnalité de l'émission. Des approches *extrinsèques* utilisant des guides d'onde afin de collecter le faisceau laser dans une direction donnée, voir par exemple [58, 105]. Ces méthodes dépendent donc de l'emplacement des guides qui doivent être placés très

près du résonateur à cause de l'évanescence. D'autres approches, appelées *intrinsèques* se divisent en deux classes : la première consiste à briser la symétrie de rotation de manière *brute* par la création de discontinuité dans la forme de la cavité, comme par exemple les cavités spirales [55, 50, 21, 8] ou encore les cavités polygonales telles que les résonateurs carrés [57, 13, 18], hexagonaux [106, 108, 68] ou triangulaires [52], ainsi que des résonateurs en forme de stade [25, 27, 28, 35, 36, 26].

Dans l'autre classe, la symétrie de rotation est brisée par une déformation *lisse* d'une cavité circulaire. Ce nouveau concept de résonateurs, connu sous le nom de *Asymmetric Resonant Cavities* (ARCs), est défini par une équation polaire  $R(\phi, \epsilon)$  où  $R$  est une fonction continue qui possède une dérivée continue en tout point et  $\epsilon$  est un paramètre de perturbation : pour  $\epsilon = 0$ , nous retrouvons l'équation d'un cercle de rayon  $a$ . Dans le tableau (1.1), nous mentionnons quelques-unes de ces cavités, réalisées expérimentalement, en donnant l'équation polaire de chacune d'elles et les références expérimentales associées. Toutes ces réalisations expérimentales ont été réalisées suite

Nom de la cavité	Equation polaire	Références
Ellipse	$\frac{a}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2 \phi}}$	[84, 49, 97]
Quadripôle	$a [1 + \epsilon \cos(2\phi)]$	[29, 85, 89]
Quadripôle Hexadécapôle	$a [1 + \epsilon (\cos^2 \phi + (3/2) \cos^4 \phi)]$	[84]
D	$a [1 - \epsilon_1 \cos(2\phi) + \epsilon_2 \cos(3\phi)]$	[87, 88]
P	$a [1 + \epsilon_1 \cos(2\phi) - \epsilon_2 \cos(3\phi)]$	[87, 88]

TAB. 1.1 – Différents types de cavités asymétriques (ARCs) réalisées expérimentalement. Chaque cavité est caractérisée par une dynamique classique spécifique et une forme de symétrie spatiale donnée.

à l'étude théorique de ce type de cavité. J. U. Nöckel a été le pionnier de ces travaux [69, 72, 62, 73, 71] en collaboration avec l'équipe expérimentale de R.K. Chang *et al.* et théorique de D. Stone *et al.* de l'Université de Yale. Pour une revue des derniers développements théoriques et expérimentaux, voir les références suivante : [95, 88, 102]. Nöckel a mis en évidence la préservation d'un grand facteur de qualité dans les ARCs

et l'effet de la déformation sur les caractéristiques des modes propres de ce type de résonateur, soit :

1. Décalage vers le rouge du spectre d'émission dû à la diminution du nombre d'onde en fonction de la déformation
2. Diminution de la durée de vie des modes propres et par conséquence le facteur de qualité
3. Anisotropie de l'émission caractérisée par l'apparition de pics d'intensité dans des directions bien définies (figure 1.2.c). La hauteur de ces pics augmente également avec la perturbation.

La théorie de Nöckel repose essentiellement sur l'adiabaticité de la déformation, qui n'est pas à confondre avec un traitement perturbatif. Il est bien connu qu'une étude perturbative ne peut que déterminer un spectre d'énergie ou de longueurs d'onde qui présente une petite correction au spectre du système originale. Il a été démontré dans le cas des cavités asymétriques que la variation de la longueur d'onde en fonction de la perturbation est de l'ordre de grandeur de l'écart entre les longueurs d'onde du spectre initial (*level spacing*). De plus, l'augmentation de la perturbation met en évidence des nouveaux modes, tel que le *bow-tie* [29], qui ont des caractéristiques et une structure spatiale radicalement différente des modes circulaires.

L'approche établit par Nöckel pour interpréter les modifications, causées par la déformation, des caractéristiques d'émission (longueur d'onde, facteur de qualité et direction d'émission) est basée sur deux aspects : le premier consiste à considérer les modes propres de la cavité comme des états de résonances ou des états quasi-liés et le deuxième est l'utilisation de la dynamique classique du rayon lumineux pour comprendre les différents aspects de la dynamique ondulatoire associée.

La notion d'états quasi-liés est bien connue en mécanique quantique notamment en théorie de diffusion et en dynamique moléculaire. Ces états se manifestent de deux manières différentes :

1. Dans une *expérience de diffusion* d'une onde électromagnétique avec une cavité diélectrique l'onde incidente, appelée usuellement onde entrante, se transforme par interaction en une onde sortante représentant toutes les voies de sorties possible pour ce processus. La détection de l'onde sortante à l'infini nous donne une information sur la réponse du diélectrique représentée par la section efficace de diffusion. Dans cette section, les résonances sont caractérisées par des pics, dont la position donne le nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda$  de l'état quasi-lié et la largeur donne la durée de vie  $\tau$  de celui-ci.
2. Dans une *expérience d'émission* le photon est créé dans un état quasi-lié sans aucun apport extérieur. Il sort de la cavité par un processus d'évanescence, similaire à l'effet tunnel en mécanique quantique. Ceci traduit la possibilité d'avoir une onde sortante en l'absence d'onde entrante. Dans ce cas l'onde électromagnétique possède un nombre d'onde complexe  $k_c = k - i\kappa$  traduisant la perte d'énergie de la cavité. La détermination de  $k_c$  caractérise parfaitement les états de résonance :

la partie réelle représente la position de l'état et définit la longueur d'onde du mode et la partie imaginaire détermine la durée de vie  $\tau \propto 1/\kappa$  du photon à l'intérieur du résonateur.

C'est cette dernière approche qui est le plus souvent utilisée dans les méthodes numériques permettant de déterminer les modes propres d'une cavité diélectrique circulaire ou asymétrique.

Le rapprochement entre l'émission laser d'une onde électromagnétique et la mécanique quantique a été établi par Nöckel [69] en s'inspirant des travaux de B. R. Johnson [47]. Dans ces travaux, concernant le problème de piégeage des photons dans des sphères diélectriques, une analogie a été établie entre l'équation de propagation et l'équation de Schrödinger où un terme de potentiel effectif a été identifié. La forme de ce potentiel, qui présente un puit suivi d'une barrière, a permis de définir les modes propres d'une cavité circulaire comme des états quasi-liés vivant dans le puit et qui s'échappent de la barrière par effet tunnel. Dans le chapitre 4 de cette thèse, nous allons décrire les détails de cette analogie et voir l'utilité d'une telle représentation.

Le deuxième outil important que Nöckel a exploité est l'utilisation de la dynamique classique du rayon lumineux à l'intérieur du résonateur. Dans la limite semi-classique, où la longueur d'onde est très petite devant la taille de la cavité, le problème de propagation de la lumière dans un diélectrique homogène est similaire à la propagation libre d'une masse  $m$  à l'intérieur de la cavité, interrompue par une réflexion spéculaire sur le bord. L'état du système est défini dans ce cas par la position du point de réflexion  $\phi$  et l'angle d'incidence  $\chi$ , défini entre la trajectoire et la normale à la cavité au point d'impact. De tels systèmes sont appelés *billards de Birkhoff* [12]. Afin de faire la connexion avec les microcavités laser, il faut rajouter à la dynamique des billards un autre aspect qui est *l'échappement réfractif* à travers la frontière. Ce processus se produit si la condition de réflexion totale :

$$\sin \chi > \frac{n_{ext}}{n_{int}} \quad (1.1)$$

est violée. Ici  $n_{int}$  et  $n_{ext}$  représentent les valeurs de l'indice à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité. Pour mieux comprendre la dynamique, la notion de section de Poincaré est souvent utilisée. Cette section est dans le cas des billards représentée par une surface bidimensionnelle définie par les variables  $\phi$  et  $\sin \chi$ . La région de réflexion totale est donc délimitée par une droite horizontale  $\sin \chi = n_{ext}/n_{int}$  (figure 1.4). Dans le cas d'une cavité circulaire les modes propres sont associés à des trajectoires appelées *whispering gallery* (WG)<sup>1</sup>. À cause de la conservation du moment cinétique dans le cas circulaire, ces trajectoires possèdent un angle d'incidence qui reste constant. Les trajectoires initialement dans la région de réflexion totale restent piégées à l'intérieur de la cavité sans avoir la possibilité de franchir la ligne de réfraction  $\sin \chi = n_{ext}/n_{int}$ . Sous déformation, la dynamique des billards devient partiellement chaotique en per-

---

<sup>1</sup>Ces modes, qui restent confinés près de la frontière à cause de l'existence de caustiques, ont été baptisés ainsi par Lord Rayleigh à cause de leur analogue acoustique [82]. Il a été inspiré par les chambres de chuchotement de la cathédrale Saint Paul à Londres. Ces chambres sont construites sur la périphérie du site pour que les ondes sonores ne soient pas audibles au centre de la cathédrale.

dant progressivement ses structures régulières. Le scénario de transition vers ce régime est connu sous le nom de scénario de KAM, selon Kolmogorov-Arnol'd-Moser. Pour les billards, la disparition des trajectoires régulières n'est pas complète. Le théorème de Lazutkin prouve que quelque soit l'amplitude de la déformation, pourvu qu'elle garde la nature convexe de la cavité, il restera toujours des trajectoires régulières de type WG près de la limite  $\sin \chi \rightarrow 1$ [54].

La déformation induit de plus la non conservation de l'angle d'incidence des trajectoires. Ceci ouvre aussi la possibilité à celles-ci de s'échapper de la cavité après un certain nombre de réflexions. Ceci n'est pas vrai pour toutes les trajectoires. En effet, l'angle d'incidence des trajectoires quasi-périodiques suit une courbe invariante  $\sin \chi = \sin \chi(\phi)$ . La variation de ces courbes dépend de la déformation et de sa position sur la section de Poincaré. Des courbes près de la limite  $\sin \chi \rightarrow 1$  varient peu et peuvent ne pas couper la ligne de réfraction. Les trajectoires périodiques sont représentées par un ensemble de points qui gardent des positions fixes avec le temps mais se déplacent avec la déformation. En fonction du taux de déformation certaines trajectoires ne peuvent pas couper la ligne d'échappement. Les trajectoires chaotiques explorent par contre la section de Poincaré de manière localement ergodique. Ceci est dû aux conséquences du scénario de KAM, soient : la structure auto-similaire de l'espace des phases [99], la diffusion anomale [61, 65, 114] et le fait que les courbes invariantes présentent des barrières infranchissables pour les trajectoires chaotiques. A cause de la nature des trajectoires périodiques vis-à-vis de la stabilité la section de Poincaré est constituée d'îlots de régularité entourés par la mer chaotique. Ces îlots entourent les trajectoires stables (points elliptiques) et contiennent des îlots de même nature, entourés d'une partie de la mer chaotique (voir section 2.1.3.b). Les trajectoires chaotiques qui vivent à l'intérieur de ces îlots restent donc coincées à l'infini. La diffusion anomale, qui est une conséquence de la coexistence des trajectoires régulières et chaotiques, consiste au piégeage des trajectoires chaotiques autour des courbes invariantes pendant un temps relativement grand. La figure (1.3) illustre cette diffusion en montrant l'exploration d'une trajectoire chaotique de la section de Poincaré. Cette trajectoire reste coincé autour des îlots de régularité entourant une trajectoire stable de période 8 ( $\sin \chi \approx 0.86$ ) et dessine les frontières des régions inaccessibles pour elle. La partie (b) de la figure montre le comportement de la distance moyenne, parcouru par un ensemble aléatoire de conditions initiales, en fonction du nombre d'itérations  $N$ . Ces deux quantités sont reliées par la relation :

$$\langle r^2 \rangle \propto N^\alpha, \quad (1.2)$$

où  $\alpha$  est plus grand dans le cas d'un système brownien, qui ne présente pas de barrière au mouvement, que dans le cas d'un système hamiltonien. Toutes ces considérations donnent une réponse à la question suivante : est ce qu'une trajectoire qui appartient à la région de réflexion totale dans le cas intégrable peut atteindre, sous déformation, la ligne d'échappement réfractif après un temps relativement court ? La réponse est en général négative et ceci à cause des propriétés de transport dans les systèmes hamiltoniens.

Pour les modes propres de la cavité, l'introduction d'une dynamique chaotique dans

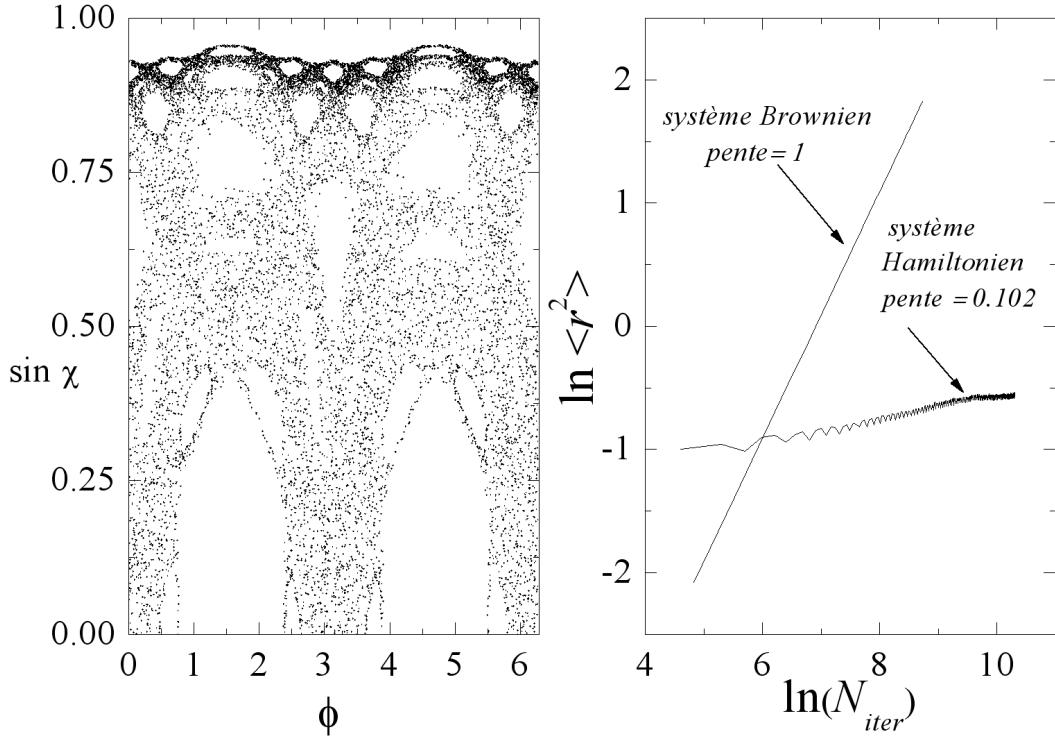


FIG. 1.3 – Illustration de la diffusion anomale dans les systèmes hamiltoniens. Cas d'un billard sous forme de quadripôle avec un paramètre de déformation  $\epsilon = 0.1$  : a) diffusion d'une seule trajectoire chaotique qui reste coincée autour d'un îlot de période 8 ( $\sin \chi \approx 0.86$ ) et qui trace les frontières des régions de la section de Poincaré inaccessibles pour elle. b) comparaison du paramètre  $\alpha$  de l'équation (1.2) entre un mouvement brownien et une diffusion anomale.

le mouvement classique du rayon lumineux permet d'expliquer et de prédire la variation du facteur de qualité en fonction de la déformation et l'anisotropie de l'émission. Ce procédé est connu sous le nom *Chaos-Assisted Tunneling* (CAT) et ne concerne pas uniquement l'émission laser en microcavités [100, 113, 67]. Il consiste à étudier l'effet d'une dynamique chaotique d'un système sur l'effet tunnel du système quantique associé et par conséquence la variation de la largeur des états de résonances. Comme nous l'avons déjà indiqué le couplage d'une onde électromagnétique dans une cavité diélectrique avec l'extérieur se fait par un procédé analogue à l'effet tunnel. Pour comprendre l'influence de la dynamique classique sur cet effet, les modes propres d'émission sont projetés sur la section de Poincaré associée par le biais de la fonction de distribution de Husimi [44, 22, 5]. Avec cette projection, plusieurs modes ont été associés à des trajectoires périodiques stables [29, 103] ou instables [30, 85] appelés modes marqués ou cicatrisés (*scarred mode*) [39]. V. A. Podolskiy et E. E. Narimanov ont démontré que l'effet tunnel dans les cavités diélectriques dépend de la distance entre les structures représentant les

trajectoires classiques, associées aux modes propres, et la ligne d'échappement réfractif [76, 77]. En effet, il est bien connu que l'effet tunnel représente le passage dans une région classiquement interdite. Dans le cas d'une cavité circulaire et comme le montre la figure (1.4.a) la largeur de cette région représente la distance entre les composantes d'une trajectoire périodique et la ligne d'échappement. Après déformation, cette largeur va représenter la distance entre les composantes de la trajectoire et la mer chaotique, la plus proche, reliée à la ligne d'échappement. Dans ce cas, la région classiquement interdite est de la taille des îlots de régularités qui entourent la trajectoire (figure 1.4.b). Ceci

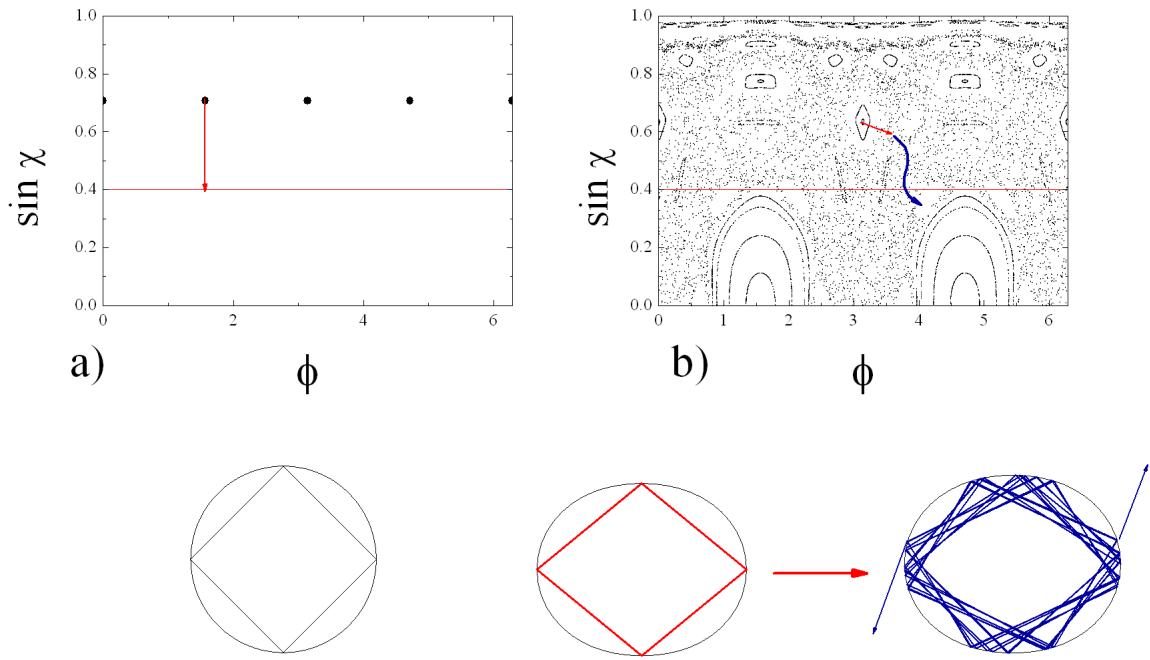


FIG. 1.4 – a) Section de Poincaré d'une cavité circulaire. Une trajectoire de période 4 est représenté par quatre points alignés, conséquence de la conservation du moment cinétique, b) section de Poincaré d'un quadripôle avec le paramètre de déformation  $\epsilon = 0.1$ . La flèche rouge représente dans les deux cas la taille de la région classiquement interdite pour la trajectoire de période 4. La flèche bleue représente la diffusion dans la mer chaotique après déformation.

se traduit par la variation de la durée de vie des modes sous déformation. Les auteurs de la référence [77] ont établi une relation (équation 3) entre la largeur des résonances et la surface de ces îlots. Comme nous allons le décrire dans le chapitre 2, le scénario de KAM consiste à la destruction progressive des structures régulières et à l'augmentation, avec la perturbation, de la proportion de la mer chaotique dans la section de Poincaré.

Ceci va induire le rétrécissement des îlots qui entourent les trajectoires stables et par conséquent la diminution de la durée de vie des modes associés.

L'explication fournit par les auteurs de [77] ne peut être que partielle puisqu'elle ignore pour l'instant les temps caractéristiques du transport chaotique jusqu'à la ligne d'échappement. Il faudra sûrement faire intervenir la structure de l'espace des phases pour une description plus complète.

Le travail présenté dans cette thèse propose une alternative au concept des cavités asymétriques établi par Nöckel. Notre idée consiste à ne pas utiliser la géométrie de la cavité pour modifier les caractéristiques de l'émission mais plutôt la variation de l'indice de réfraction à l'intérieur de celle-ci. *Le système étudié est donc une cavité diélectrique circulaire inhomogène plongée dans le vide.* Cette étude peut s'étendre à toute la classe des cavités convexes présentée dans le tableau (1.1), à savoir des cavités représentées par une fonction polaire continue et qui possède une dérivée définie en tout point. Nous avons adopté l'approche adiabatique développée par Nöckel et ceci en brisant la symétrie de rotation de manière progressive et non brutale. L'introduction d'inhomogénéité dans des cavités diélectriques n'est pas tout à fait nouvelle. En effet, P. B. Wilkinson a travaillé sur l'effet d'un gradient d'indice sur les modes propres de cavités rectangulaires sous déformation [109, 110, 111] et D. Q. Chowdhury sur le problème des cavités sphériques [19]. Dans notre approche, nous nous intéressons à un système qui possède initialement une symétrie de rotation et qui la perd sous perturbation. Cette perturbation est une conséquence de l'introduction d'une dépendance angulaire dans le profil d'indice.

Vu l'importance de la dynamique classique dans l'émission laser en microcavité, nous avons défini une nouvelle classe de billards appelés *billards inhomogènes*. Nous allons décrire dans le chapitre 3 les différents aspects de la dynamique d'un tel système. En particulier, nous allons mettre en évidence les critères d'intégrabilité en présence d'inhomogénéité et décrire le scénario de KAM associé. Dans le chapitre 4, nous décrirons l'effet de l'inhomogénéité sur les caractéristiques des modes propres d'une microcavité. Nous nous limitons au cas d'une cavité qui préserve la symétrie de rotation. Dans ce cas l'équation de propagation est séparable, dans le système des coordonnées polaires, ce qui nous permet de la résoudre facilement et d'avoir accès au spectre d'émission et aux facteurs de qualité. A la fin de ce même chapitre, nous allons rappeler quelques méthodes numériques développées pour trouver les modes propres d'une cavité asymétrique et proposer une idée d'algorithme pour traiter le cas d'une cavité inhomogène non-intégrable. Le chapitre 2 sera consacré à donner de brefs rappels du formalisme hamiltonien et de la notion de modes propres en électromagnétisme. Nos conclusions et les perspectives futures de notre travail exploratoire seront finalement résumées au chapitre 5. Enfin, quelques annexes ont été ajoutées où sont relégués certains résultats plus techniques.

# Chapitre 2

## Notions fondamentales

Avant d'entamer notre étude sur l'émission laser dans les cavités diélectriques, nous avons jugé nécessaire de consacrer un chapitre pour faire un rappel des notions de base qu'il faut connaître afin de comprendre ce processus. La compréhension du système que nous avons étudié fait intervenir deux aspects différents. L'aspect classique, qui considère le mouvement d'un rayon lumineux à l'intérieur de la cavité, et l'aspect ondulatoire qui détermine les modes propres qui peuvent exister à l'intérieur de cette cavité.

Dans la première partie du chapitre nous allons revoir le formalisme hamiltonien dans les systèmes à deux degrés de liberté. Nous allons définir la notion d'intégrabilité d'un système physique et décrire le scénario de transition d'un régime intégrable vers un régime mixte sous l'influence d'une perturbation. Dans ce régime mixte des trajectoires régulières et des trajectoires chaotiques coexistent et leur nature dépend des conditions initiales choisies. Nous allons décrire également les trajectoires périodiques qui existent dans le système et établir, à partir des équations du mouvement, les critères de stabilité. Le concept de section de Poincaré, ainsi que l'application mathématique associée, nous sera un outil précieux pour la compréhension et la visualisation de la dynamique. Cette notion est basée sur la discrétisation de la dynamique suite à une réduction du flot aux points d'intersection sur une hypersurface où toutes les propriétés de la dynamique sont préservées.

Dans la deuxième partie, nous allons définir la notion de modes propres. L'onde associée à un mode donné doit être solution d'une équation de propagation et satisfaire un certain nombre de conditions. Ces conditions caractérisent le passage d'une région de l'espace physique à une autre. Puisqu'il s'agit de propagation d'ondes lumineuses dans un milieu diélectrique, la dynamique ondulatoire sera régit par les lois de l'électromagnétisme.

## 2.1 Le formalisme hamiltonien

L'étude dynamique d'un système physique a pour but de répondre à deux questions fondamentales :

1. Quel est l'état du système à un instant  $t$  donné ?
2. Si le système est soumis à une interaction, comment évolue cet état en fonction du temps ?

Pour répondre à ces questions, il faut d'abord définir un ensemble de variables qui définit l'état du système : des variables d'espace reliées à la position et des variables reliées à la vitesse. A ces variables il faut associer des équations qui régissent leur évolution temporelle. Ces *équations du mouvement* sont la conséquence d'un principe physique qui impose une contrainte à la dynamique. On parlera, par exemple, du principe de Newton ou du principe de moindre action en mécanique et du principe de Fermat en optique géométrique.

Il faut ensuite rajouter une manière de représenter l'ensemble des interactions qui définit la dynamique du système. En mécanique, on pense à la représentation en terme de forces ou à la représentation en terme d'énergie potentielle.

Il existe trois formalismes principaux pour décrire la dynamique d'un système physique : le formalisme newtonien, le formalisme lagrangien et le formalisme hamiltonien. Nous allons nous intéresser au formalisme hamiltonien qui se distingue particulièrement des deux autres par un ensemble de propriétés que nous allons définir à l'instant.

### 2.1.1 Propriétés des systèmes hamiltoniens

#### a) Principe de moindre action

Si le mouvement de l'objet est déterministe et n'obéit pas au hasard, la trajectoire de celui-ci ne peut être quelconque et est définie par l'application d'un principe fondamental, appelé *principe de moindre action* ou *principe de Hamilton*. L'énoncé de ce principe est le suivant :

**Théorème 1** *Entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , le chemin optimum, pour aller d'un point A à un point B, est tel que l'intégrale :*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) dt. \quad (2.1)$$

*soit minimum.*

La relation (2.1) est écrite pour un système mécanique à  $N$  degrés de liberté. La dynamique est représentée dans ce cas par un ensemble de  $N$  positions généralisées ( $q_i$ )

( $\{i = 1 \dots N\}$ ) et ces  $N$  vitesses généralisées ( $\dot{q}_i = dq_i/dt$ ). A cet ensemble de variables, nous pouvons associer une fonction :

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = T(\dot{q}_i) - V(q_i) \quad (2.2)$$

appelée *la fonction de Lagrange ou le Lagrangien* du système.

$T(\dot{q}_i)$  est la fonction énergie cinétique et l'interaction que subit ce système est représentée par la fonction énergie potentielle  $V(q_i)$ . L'intégrale  $S$  est connue sous le nom *d'action*. Les équations de Lagrange sont la première conséquence de ce principe :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Ces équations sont les équations du mouvement dans le formalisme lagrangien. Pour les obtenir il suffit d'écrire la variation de  $S$ , faire un développement du premier ordre et intégrer par partie, soit :

$$\delta S = \left| \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt. \quad (2.4)$$

Le premier terme est nul dans la mesure où les points de départ et d'arrivée sont fixes ( $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ ). Le deuxième terme est nul puisqu'on requiert que  $\delta S = 0, \forall t_1, t_2$  et  $\delta q_i$  d'où les équations de Lagrange.

### b) Les coordonnées canoniques

La première propriété, qui distingue le formalisme hamiltonien des autres formalismes, est l'ensemble des coordonnées qui définit l'état du système. Dans un système à  $N$  degrés de liberté, cet état est défini par un ensemble de  $N$  positions généralisées ( $q_i$ ) et  $N$  moments généralisés ( $p_i$ ). Ces variables, appelées *coordonnées canoniques*, définissent un espace à  $2N$  dimensions, appelé *espace des phases* du système. L'état du système à un instant  $t$  est donc représenté par un point dans cet espace et son évolution temporelle en définit une trajectoire dans le même espace.

La distinction avec le formalisme lagrangien réside dans le choix des moments généralisés au lieu des vitesses généralisées. Nous allons voir plus loin que la topologie de l'espace des phases et la notion de préservation des volumes sont des conséquences directes de ce choix. Les moments généralisés sont définis comme la variation de la fonction de Lagrange par rapport aux vitesses généralisées, soit :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.5)$$

Une conséquence de cette définition est que les moments généralisés dérivent d'un champ scalaire qui n'est rien d'autre que l'action du système  $S$  :

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (2.6)$$

En utilisant la variation de la fonction de Lagrange par rapport au temps :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \quad (2.7)$$

nous pouvons écrire l'énergie du système en fonction des coordonnées canoniques. A l'aide des équations de Lagrange et en supposant que  $L$  ne dépend pas explicitement du temps, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0. \quad (2.8)$$

La fonction entre parenthèses n'est autre que l'énergie du système qui reste constante pour un système isolé.

Comme pour le formalisme lagrangien nous allons définir, au même titre que la fonction de Lagrange  $L$ , une fonction scalaire des variables d'état du système. Cette fonction est appelée *fonction de Hamilton ou hamiltonien* du système  $H(q_i, p_i)$  et représente l'énergie totale du système. En utilisant les relations (2.8) et (2.5), nous pouvons écrire  $H$  en fonction des variables canoniques et de la fonction de Lagrange, soit :

$$H(p_i, q_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (2.9)$$

C'est à partir de cette dernière relation que nous allons écrire les équations du mouvement d'un système dynamique dans le cadre du formalisme hamiltonien.

### c) Les équations du mouvement

L'existence d'un principe, tel que le principe de moindre action, qui régit la dynamique d'un système physique impose le déterminisme à cette dynamique. Ce déterminisme se manifeste par l'existence d'un ensemble d'équations qui décrit l'évolution temporelle de l'état du système à partir d'une condition initiale donnée. Pour extraire ces équations écrivons la différentielle totale de  $H$  :

$$dH(p_i, q_i) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i. \quad (2.10)$$

Réécrivons cette même différentielle en utilisant la différentielle de la fonction  $L$ , les équations de Lagrange et la relation (2.9), soit :

$$dH(p_i, q_i) = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i. \quad (2.11)$$

En identifiant les termes multipliés par les différentielles des variables indépendantes ( $dq_i, dp_i$ ) nous obtenons le système d'équations :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.12)$$

C'est l'ensemble d'équations du mouvement appelées *équations de Hamilton*. Elles constituent, pour un système dynamique à  $N$  degrés de liberté, un ensemble de  $2N$  équations différentielles du premier ordre à  $2N$  inconnues. Elles sont formellement plus simple que l'ensemble des  $N$  équations différentielles du second ordre données par le formalisme Lagrangien. A cause de cette simplicité ces équations sont souvent nommées : *équations canoniques*.

#### d) Les transformations canoniques

Le choix des variables qui décrivent la dynamique reste libre. Ainsi nous pouvons définir de nouvelles variables reliées aux anciennes par une transformation caractérisée par une fonction appelée *fonction génératrice* [53]. Dans le formalisme lagrangien, les seules variables indépendantes sont l'ensemble des  $N$  coordonnées généralisées  $q_i$ . Nous pouvons choisir un autre système de  $N$  coordonnées  $Q_i$  qui représentent parfaitement la position du système dans l'espace. Ces nouvelles variables sont reliées aux anciennes par un ensemble de  $N$  transformations :

$$Q_i = Q_i(q_i). \quad (2.13)$$

Dans le formalisme hamiltonien il existe un ensemble supplémentaire de variables indépendantes qui est l'ensemble des impulsions généralisées  $p_i$ . La notion de transformation s'étend dans ce cas à l'ensemble des  $2N$  variables canoniques. Le but de ces transformations est donc de définir de nouvelles variables  $Q_i$  et  $P_i$  de sorte que :

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i) \quad P_i = P_i(q_i, p_i) \quad (2.14)$$

La seule restriction à ces transformations est de garder la forme canonique des équations de Hamilton (2.12). Pour cela il faut définir une fonction génératrice  $F(q_i, P_i)$  qui dépend des anciennes coordonnées et des nouvelles impulsions et qui vérifie un certain nombre de formules données par [53] :

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} \quad (2.15)$$

Les transformations associées à de telles fonctions sont appelées *transformations canoniques*.

#### e) Théorème de Liouville

Toutes les propriétés du formalisme hamiltonien et l'importance du choix des variables canoniques se résument dans un théorème connu sous le nom de *théorème de Liouville*, l'énoncé de ce théorème est le suivant :

**Théorème 2** *Pour un système hamiltonien représenté par l'ensemble des variables canoniques  $(q_i, p_i)$ , tout volume dans l'espace des phases, représenté par ces variables, reste constant sous la dynamique associée définie par les équations canoniques.*

Ce théorème joue un rôle important dans le scénario de transition vers le chaos comme nous le verrons sous peu. Une conséquence directe du théorème est l'absence de structures dynamiques nommées *attracteur*<sup>1</sup> pour les systèmes hamiltoniens. En effet l'existence d'attracteurs implique la contraction des volumes de l'espace des phases et va donc à l'encontre du théorème de Liouville.

Nous allons voir quel est le critère mathématique qui caractérise le théorème de Liouville. Soit un volume initial dans l'espace des phases donné, à un instant  $t$ , par :

$$|A| = \int_A dq_i dp_i. \quad (2.16)$$

Sous la dynamique hamiltonienne, ce volume se transforme en un nouveau volume à un instant ultérieur  $t + dt$  :

$$|\tilde{A}| = \int_{\tilde{A}} d\tilde{q}_i d\tilde{p}_i. \quad (2.17)$$

Les nouvelles variables  $(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i)$  sont solutions des équations canoniques (2.12) avec les conditions initiales  $(q_i, p_i)$ . Il est facile de prouver que ces nouvelles variables peuvent être considérées comme un simple changement de variable des anciennes sous une transformation canonique  $\tilde{F}$ . En effet, si nous considérons l'approximation :  $\partial H / \partial p_i \approx \partial H / \partial \tilde{p}_i$ , nous avons pour un  $dt$  infinitésimal :

$$\begin{cases} \tilde{q}_i = q_i + \frac{dq_i}{dt} dt = q_i + \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_i} dt \\ \tilde{p}_i = p_i + \frac{dp_i}{dt} dt = p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt. \end{cases} \quad (2.18)$$

En intégrant la première équation par rapport à  $\tilde{p}_i$  ou la deuxième par rapport à  $q_i$  nous pouvons définir une fonction génératrice  $\tilde{F}(q_i, \tilde{p}_i)$  telle que :

$$\tilde{F}(q_i, \tilde{p}_i) = q_i \tilde{p}_i + H(q_i, \tilde{p}_i) dt. \quad (2.19)$$

Si nous appliquons les formules (2.15) à cette fonction, nous retrouvons bien les relations (2.18).

Sachant que le changement de variables dans une intégrale se fait suivant la formule :

$$|\tilde{A}| = \int_A \mathcal{J} dq_i dp_i, \quad (2.20)$$

où  $\mathcal{J}$  est le Jacobien de la transformation, le théorème de Liouville se traduit par le fait que le Jacobien, d'une transformation canonique caractérisée par une fonction génératrice donnée par (2.19), est égal à l'unité :

$$\mathcal{J} = \left| \frac{\partial(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i)}{\partial(q_i, p_i)} \right| = 1. \quad (2.21)$$

Alors que la preuve donnée dans la littérature concerne le Jacobien d'une transformation canonique quelconque[32, 53], le théorème de Liouville concerne donc une classe spécifique de transformations associées aux fonctions génératrices (2.19).

---

<sup>1</sup>Dans l'étude des systèmes dynamiques, un attracteur (ou ensemble-limite) est un ensemble, 'courbe' ou 'espace' vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations.

### 2.1.2 Notion d'intégrabilité

Ayant défini un certain nombre de propriétés du formalisme hamiltonien nous allons maintenant nous affranchir de la notion d'intégrabilité. Celle-ci définit une classe de systèmes dynamiques dont les trajectoires sont connues quelque soit les conditions initiales dont elles sont issues. La détermination de ces trajectoires passe évidemment par la résolution des équations du mouvement. La condition pour qu'un système soit intégrable est donc celle qui permet cette résolution. Commençons d'abord par définir cette condition :

**Théorème 3** *Un système dynamique, à  $N$  degrés de liberté, définit par une fonction de Hamilton  $H(q_i, p_i)$  est dit intégrable s'il existe  $N$  fonctions  $F_i(q_i, p_i)$  des variables canoniques qui restent constantes avec le temps. Les  $N$  fonctions  $F_i$  sont alors appelées les constantes du mouvement du système*

Dans les systèmes dits conservatifs, la première constante qui s'impose est l'énergie du système représentée par la fonction de Hamilton. Pour que le système soit intégrable, il faut trouver  $N - 1$  autres fonction qui vérifient la relation :

$$\{H, F\} = \sum_i^N \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = 0. \quad (2.22)$$

où le symbole  $\{A, B\}$  est le crochet de Poisson de deux fonctions  $A$  et  $B$ . En effet la dérivée de ces fonctions par rapport au temps :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i^N \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) \quad (2.23)$$

et l'utilisation des équations de Hamilton, mènent immédiatement à :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\}. \quad (2.24)$$

Il est claire que si les fonctions  $F$  ne dépendent pas explicitement du temps, elles seront constantes si la relation (2.22) est vérifiée.

#### a) Equations de Hamilton-Jacobi

L'existence des  $N$  constantes du mouvement implique l'existence de  $2N$  transformations canoniques. Ces transformations définissent un ensemble de  $2N$  nouvelles variables  $(\theta_i, I_i)$  appelées variables *Angle-Action*. Le nouveau hamiltonien du système  $H^*(I_i)$  dépendra uniquement des variables action  $I_i$  et les nouvelles équations cano-

niques s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} \frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\partial H^*(I_i)}{\partial I_i} = \omega_i(I_i) \\ \frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial H^*(I_i)}{\partial \theta_i} = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $\omega_i$  sont appelée les *fréquences caractéristiques du mouvement* et les équations (2.25) sont connues sous le nom d'*équations de Hamilton-Jacobi*.

La solution de ces équations devient alors triviale. Les variables d'action sont constantes et les variables angle sont linéaires en fonction du temps :

$$\begin{cases} I_i = I_i(t=0) \\ \theta_i = \omega_i(I_i)t + \theta_i(t=0). \end{cases} \quad (2.26)$$

Chaque couple  $(\theta_i, I_i)(t=0)$  est une condition initiale unique qui définit une *trajectoire régulière* localisée dans l'espace des phases.

### b) Structure du flot

La forme des solutions données par (2.26) définit pour ainsi dire la structure du flot dans l'espace des phases. Un exemple à deux degrés de liberté nous permettra d'en illustrer les principales caractéristiques. Pour un système quelconque, les trajectoires visitent toutes les régions de l'espace des phases à 4-dimensions et ceci sans restriction aucune. Si le système est conservatif, les trajectoires sont confinées dans un espace à 3-dimensions défini par l'hypersurface  $E = \text{constante}$ . L'existence d'une deuxième constante du mouvement confine en plus les trajectoires dans des surfaces à 2-dimensions. Il a été prouvé par le mathématicien Poincaré que cette surface est topologiquement équivalente à la surface d'un tore [78]. Les variables d'action  $(I_1, I_2)$  définissent les rayons majeur et mineur de ce tore. Le mouvement sur la surface du tore est simple, il s'agit d'une combinaison de deux rotations et chaque rotation se fait sur un cercle de rayon  $I_i$  avec un angle  $\theta_i$  et une fréquence  $\omega_i$ .

Deux types de trajectoires régulières existent suivant le rapport des fréquences  $\nu = \omega_1/\omega_2$  : des trajectoires *périodiques* pour des valeurs de  $\nu$  rationnelles et des trajectoires *quasi-périodiques* pour des valeurs de  $\nu$  irrationnelles. Les trajectoires périodiques caractérisées par  $\nu = k/m$  (où  $k$  et  $m$  sont deux entiers premiers entre eux) se referment après  $k$  rotations sur le cercle de rayon  $I_1$  et  $m$  rotations sur le cercle de rayon  $I_2$ . Les trajectoires quasi-périodiques par contre ne se referment jamais et remplissent toute la surface du tore à un temps infini. Le rapport de fréquences  $\nu$  est connue sous le nom de *nombre d'enroulement* (Winding Number).

### c) Section et application de Poincaré

Poincaré nous a livré un instrument fort utile pour caractériser la nature des trajectoires, il s'agit de la section de Poincaré. Il a prouvé qu'il est possible de représenter la dynamique d'un système dans un espace de dimension inférieur à celle de l'espace des phases complet. Cet espace obtenu par une coupe générique de l'espace des phases préserve toutes les propriétés de la dynamique. Pour un flot continu, la dynamique se discrétise sur cette section : les équations du mouvement sont remplacées par une application discrète appelée *application de Poincaré T* et les trajectoires sont alors représentées par l'ensemble des points d'intersection avec la section de Poincaré.

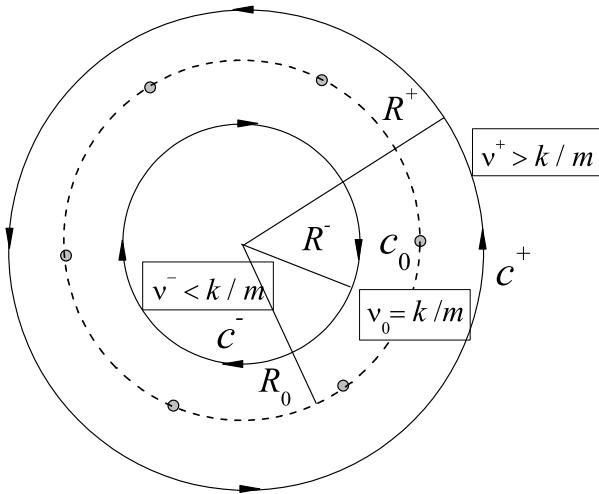


FIG. 2.1 – Section de Poincaré représentant une coupe circulaire du tore. Le cercle  $C_0$  contient une trajectoire périodique définie par le nombre de rotation  $k/m$ . Les cercles  $C^+$  et  $C^-$  contiennent des trajectoires quasi-périodiques.

Pour le flot hamiltonien, défini sur la surface d'un tore, la section de Poincaré est souvent choisie comme un plan perpendiculaire à celui-ci. Le mouvement sur cette section est représenté par une rotation sur un cercle. Les trajectoires périodiques se représentent par un ensemble fini de points sur le périmètre du cercle, contrairement aux trajectoires quasi-périodiques qui remplissent ce périmètre. L'application de Poincaré est simplement :

$$\begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_{i+1} = r_i \\ \theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi\nu(r_i). \end{cases} \quad (2.27)$$

où  $r$  et  $\theta$  représentent le mouvement radial et angulaire sur le périmètre. L'application donnée par (2.27) est connue sous le nom de *Twist Map*. Cette application représente bien une dynamique hamiltonienne du fait qu'elle obéit au théorème de Liouville. En effet, si nous calculons le Jacobien de cette application nous obtenons bien l'unité :

$$\left| \frac{\partial(r_{i+1}, \theta_{i+1})}{\partial(r_i, \theta_i)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi\nu(r_i) & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{avec} \quad \dot{\nu} = d\nu/dr. \quad (2.28)$$

La figure (2.1) montre une représentation de la section de Poincaré dans le cas où la dynamique est intégrable. Chaque cercle représente une coupe d'un tore défini par un nombre de rotation  $\nu(r_i)$ . Si  $\nu_0$  est rationnel ( $\nu_0 = k/m$ ), le cercle associé  $C_0$  contient un ensemble fini de  $m$  points représentant une trajectoire périodique (les 6 points gris représentant une trajectoire de période 6). Ces trajectoires sont les points fixes de l'application  $T^m$  qui représente l'itération  $m$  fois de l'application  $T$ . Ce cercle est entouré de deux cercles  $C^+$  et  $C^-$  représentant des trajectoires quasi-périodiques définies par les nombres de rotation  $\nu^+ > \nu_0$  et  $\nu^- < \nu_0$ . Le mouvement sur  $C^+$  est antihoraire et sur  $C^-$  est horaire. Ceci s'explique en appliquant  $T^m$  sur un point quelconque défini par un angle  $\theta_0$  : sur le cercle  $C_0$  on revient au même point alors que pour les cercles  $C^+$  et  $C^-$  nous revenons sur des points situés à des angles  $\theta^+ > \theta_0$  et  $\theta^- < \theta_0$  respectivement (voir (2.27)).

#### d) Stabilité des trajectoires périodiques

Soit une condition initiale  $(q_0, p_0)$  qui définit une trajectoire particulière et une petite déviation par rapport à cette condition  $(\delta q_0, \delta p_0)$ . Si nous supposons que la trajectoire initiale soit périodique de période  $m$ , on aura :

$$(q_0, p_0) \xrightarrow{T^m} (q_m, p_m) = (q_0, p_0) \quad \text{et} \quad (\delta q_0, \delta p_0) \xrightarrow{T^m} (\delta q_m, \delta p_m). \quad (2.29)$$

$(\delta q_0, \delta p_0)$  et  $(\delta q_m, \delta p_m)$  sont reliés par une matrice  $\mathbf{M}$  représentant la linéarisation de l'application  $T^m$ , appelée *application tangente*, de sorte que :

$$\begin{pmatrix} \delta q_m \\ \delta p_m \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \delta q_0 \\ \delta p_0 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Le comportement de la nouvelle trajectoire par rapport à la trajectoire initiale est régit par les valeurs propres de cette matrice qui vont définir la stabilité des points fixes du système. Les valeurs propres d'une matrice  $2 \times 2$  s'écrivent en fonction de la trace et du déterminant de celle-ci, soit :

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{M}) \pm \sqrt{\text{Tr}^2(\mathbf{M}) - 4\text{Det}(\mathbf{M})}}{2}. \quad (2.31)$$

Ici le déterminant est égal à un du fait que l'application  $T^m$  préserve les aires.

Trois types de trajectoires existent selon les valeurs de  $\lambda_{\pm}$  :

1. Pour des valeurs propres qui sont complexes conjuguées telles que :  $\lambda_+ = \lambda_-^*$ , l'application tangente décrit un mouvement sur une ellipse. Ainsi le point fixe est appelé *point elliptique*. Ce type de point est stable et toute déviation évolue sur une trajectoire elliptique entourant celui-ci (voir figure 2.2.a).
2. Pour des valeurs propres réelles telles que :  $\lambda_+ = 1/\lambda_-$ , l'application tangente décrit un mouvement sur une branche d'hyperbole. Le point fixe est alors appelé *point hyperbolique*. Deux sortes de point hyperbolique existent : des *points ordinaires* pour des valeurs propres positives ( $\lambda > 0$ ) et des *points inverses* pour ( $\lambda < 0$ ). Dans le premier cas, le mouvement reste sur une branche d'hyperbole et dans le deuxième il oscille entre deux branches opposées. Ce type de points est instable et toute déviation va croître localement, puisque ces points représentent l'intersection d'une branche stable, qui ramène le mouvement vers le point fixe, et d'une branche instable, qui éloigne le mouvement du point fixe de façon exponentielle (voir figure 2.2.b).
3. Pour des valeurs propres dégénérées telles que :  $\lambda_+ = \lambda_- = 1$ , le point fixe est appelé *point parabolique*. Toute déviation par rapport à ce point croît de manière linéaire.

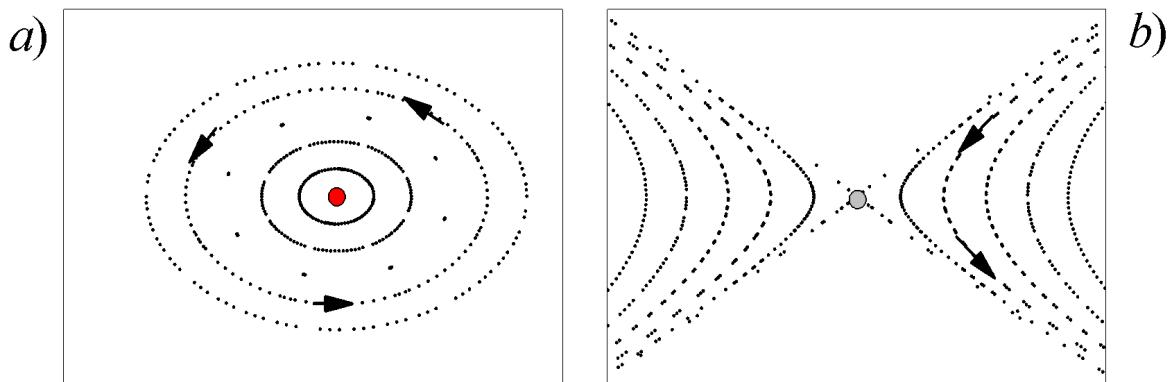


FIG. 2.2 – Mouvement autour des points fixes de l'application  $T^m$  selon leurs stabilité.  
a) point elliptique, b) point hyperbolique.

### 2.1.3 Transition vers le chaos

Dans la section précédente nous avons décrit les trajectoires d'un système hamiltonien intégrable. La question qui se pose à nous est la suivante : comment va réagir un tel système s'il subit une perturbation ? Un système perturbé devient non-intégrable s'il perd une de ses constantes du mouvement. Ceci a pour conséquence l'apparition d'une nouvelle classe de trajectoires irrégulières, appelées *trajectoires chaotiques*. Celles-ci coexisteront avec les trajectoires régulières que nous avons déjà présentées et nous parlerons dans ce cas de *régime mixte*.

La notion de non intégrabilité des systèmes dynamiques était connue depuis la fin du 19<sup>ème</sup> siècle. Henri Poincaré a prouvé dans son fameux essai [78] que même le système à trois corps n'était pas intégrable. L'explication du comportement irrégulier, appelé actuellement *comportement chaotique*, n'a néanmoins pris forme qu'à la fin des années cinquante, influencé par les travaux de trois mathématiciens : Kolmogorov, Arnol'd et Moser [51]. La base de ces travaux repose essentiellement sur la structure topologique de l'espace des phases, déjà établie au début du siècle par Poincaré [79]. On parlera de chaos déterministe avec une définition opérationnelle comportant les éléments suivants [96] :

1. **Sensibilité aux conditions initiales** : deux trajectoires initialement proches s'éloignent exponentiellement.
2. **Déterminisme** : il existe une loi qui régit la dynamique de ces trajectoires et celle-ci ne contient pas de termes aléatoires.
3. **Apériodicité** : ces trajectoires ne doivent pas converger vers des trajectoires périodiques, quasi-périodiques ou des points fixes du système.

Dans cette section nous allons décrire le *théorème de KAM* qui nous donnera les critères pour qu'une trajectoire demeure régulière et présenter le *scénario de KAM* qui nous permettra d'expliquer qualitativement la transition vers le régime chaotique.

#### a) Théorème de KAM

Soit un système intégrable à 2-dimensions dont la fonction de Hamilton, en terme des variables angle-action  $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$ , ne dépend que des variables d'action  $H_0(\mathbf{I})$ , et soit une petite perturbation  $\epsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$  ( $\epsilon \ll 1$ ) telle que :

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) \quad \mathbf{I} = (I_1, I_2) \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2). \quad (2.32)$$

où  $\epsilon$  mesure la force de la perturbation et  $H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$  est la fonction de Hamilton du système perturbé obéissant aux équations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{I}} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}). \end{cases} \quad (2.33)$$

La question de régularité d'une trajectoire se résume à savoir s'il existe une transformation canonique, en terme de nouvelles variables d'angle et d'action  $(\mathbf{I}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$ , sous laquelle la fonction de Hamilton du système perturbé  $H^*$  ne dépendra que des variables d'action  $\mathbf{I}^*[2]$ .

Nous allons d'abord supposer l'existence d'une telle transformation :  $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) \longrightarrow (\mathbf{I}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$  définie par une fonction génératrice  $F(\mathbf{I}^*, \boldsymbol{\theta})$  qui vérifie :

$$H\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}\right) = H^*(\mathbf{I}^*). \quad (2.34)$$

Les équations caractéristiques d'une telle transformation sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{I} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} F(\mathbf{I}^*, \boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\theta}^* = \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}^*} F(\mathbf{I}^*, \boldsymbol{\theta}). \end{cases} \quad (2.35)$$

Dans le cadre de la théorie des perturbations, on peut développer la fonction génératrice en série de puissance de la perturbation  $\epsilon$ , tel que :

$$F(\mathbf{I}^*, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} \mathbf{I}^* + \epsilon F_1(\mathbf{I}^*, \boldsymbol{\theta}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.36)$$

En introduisant l'expression de  $\mathbf{I}$  donnée par (2.35) dans l'équation (2.32), on obtient :

$$H_0\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right) + \epsilon H_1\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}\right) = H^*(\mathbf{I}^*), \quad (2.37)$$

qui à l'aide de (2.36) nous mène à :

$$H_0(\mathbf{I}^*) + \epsilon \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \epsilon H_1(\mathbf{I}^*, \boldsymbol{\theta}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = H^*(\mathbf{I}^*). \quad (2.38)$$

Puisque le terme de gauche doit être indépendant de  $\boldsymbol{\theta}$  et puisque par définition :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} H_0(\mathbf{I}) = \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \quad (2.39)$$

où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les fréquences caractéristiques du système non perturbé, nous obtenons la condition :

$$\boldsymbol{\omega} \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -H_1(\mathbf{I}^*, \boldsymbol{\theta}). \quad (2.40)$$

En développant en double série de Fourier les perturbations  $H_1$  et  $F_1$ , à savoir :

$$\begin{cases} H_1(\mathbf{I}^*, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} H_{1n_1n_2}(\mathbf{I}^*) e^{i(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)} \\ F_1(\mathbf{I}^*, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} F_{1n_1n_2}(\mathbf{I}^*) e^{i(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)}, \end{cases} \quad (2.41)$$

avec  $(n_1, n_2)$  entiers, et en introduisant ces développements dans la condition (2.40) nous obtenons pour la fonction génératrice :

$$F(\mathbf{I}^*, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}\mathbf{I}^* + i\epsilon \sum_{n_1} \sum_{n_2} \frac{H_{1n_1n_2}}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2} e^{i(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)}. \quad (2.42)$$

Ce résultat est important dans la mesure où il relie l'existence de la fonction génératrice désirée à la convergence du développement en série donné par (2.42) et l'existence de ses coefficients donnés par :

$$H_{1n_1n_2} / (n_1\omega_1 + n_2\omega_2). \quad (2.43)$$

Nous voyons déjà qu'une première condition s'impose pour l'existence de la fonction  $F$ , soit :

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \neq 0. \quad (2.44)$$

Les trajectoires initiales dont les fréquences caractéristiques ne vérifient pas cette condition (*les trajectoires périodiques*) sont automatiquement exclues.

Malgré cette première restriction le problème de la convergence n'est pas réglé, car même si on exclut les fréquences commensurables, il existera toujours des entiers  $n_1$  et  $n_2$  qui donneront :

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \approx 0. \quad (2.45)$$

C'est ici qu'intervient le travail des mathématiciens Kolmogorov, Arnol'd et Moser qui ont travaillé sur le problème des petits dénominateurs [3, 66], et qui ont établi pour ce cas bien précis le théorème suivant :

**Théorème 4** *Si on considère la condition pour laquelle le dénominateur ne s'annule pas, alors la série (2.42) converge si le nombre de rotation  $\nu = \omega_2/\omega_1$  vérifie la condition :*

$$\left| \nu - \frac{k}{m} \right| > \kappa(\epsilon)m^{-5/2} \quad (2.46)$$

où  $k$  et  $m$  sont deux entiers qui restent constants avec la perturbation, et  $\kappa(\epsilon)$  est une constante qui ne dépend que de la force de la perturbation et tend vers zéro pour  $\epsilon \rightarrow 0$ .

$\delta(m) = 2\kappa(\epsilon)m^{-5/2}$  est la longueur de l'intervalle autour de chaque rationnel  $k/m$  où la série ne converge pas. La figure (2.3) illustre ces ouvertures autour des nombres rationnels, où l'étude a été ramener sur l'intervalle  $[0, 1]$  et où  $k$  ne prend que les valeurs  $k = 0, 1, \dots, (m-1)$ .

La longueur de l'intervalle d'exclusion est donc donnée ici par :

$$l(m) = m\delta(m) = 2\kappa(\epsilon)m^{-3/2}. \quad (2.47)$$

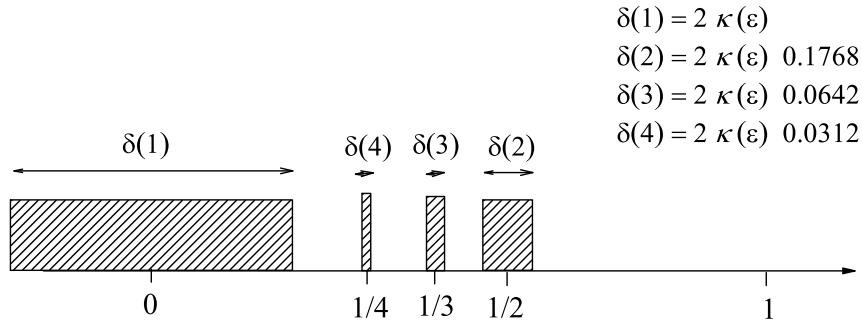


FIG. 2.3 – Les domaines d’exclusion établis par le critère de KAM.

Dans le cas des petites perturbations, la plupart des valeurs de  $\nu$  conduisent à l’existence de la fonction  $F$  à partir de la condition (2.46). La plupart des conditions initiales mèneront à des trajectoires régulières. Le théorème de KAM assure la préservation des tores sous les faibles perturbations [4, 51] mais ne donne aucune information sur le comportement des trajectoires exclues. Cette information supplémentaire nous sera donnée par le scénario de KAM.

### b) Scénario de KAM

Pour comprendre le scénario de transition vers un régime mixte, nous allons considérer un système défini par le Hamiltonien (2.32). La dynamique est représentée par une nouvelle application de Poincaré  $T_\epsilon$  telle que :

$$\begin{cases} r_{i+1} = r_i + \epsilon f(r_i, \theta_i) \\ \theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi\nu(r_i) + \epsilon g(r_i, \theta_i) \end{cases} \quad (2.48)$$

où  $f(r, \theta)$  et  $g(r, \theta)$  sont choisies de sorte que  $T_\epsilon$  préserve les aires.

Appliquons  $T_\epsilon^m$  sur les trois cercles  $(C_0, C^+, C^-)$  représentés sur la figure (2.1). Rapelons que les cercles  $(C^+, C^-)$  sont choisis de telle sorte que leurs nombres de rotation vérifient le critère de KAM (2.46). Ces courbes, appelées *courbes invariantes de KAM*, gardent leurs structures circulaires sous la perturbation. Ceci est dû à l’existence d’une transformation canonique qui établit de nouvelles variables d’action  $r = \text{const.}$  Le cercle  $C_0$  avec  $\nu(r) = k/m$  ne possède pas cette propriété. Il se déforme radialement et son axe de symétrie change de direction (équation 2.48). Ceci donne naissance à de nouvelles courbes  $T_\epsilon^m(C_0) = C_\epsilon$ , illustrées sur la figure (2.4). Le déplacement sur ces

courbes est régit par le mouvement sur les cercles  $C^+$  et  $C^-$ . Si une portion de  $C_\epsilon$  se trouve dans une région de rayon supérieur au rayon du cercle initial  $C_0$ , le mouvement est antihoraire. Si le rayon est inférieur au rayon de  $C_0$ , le mouvement est horaire.

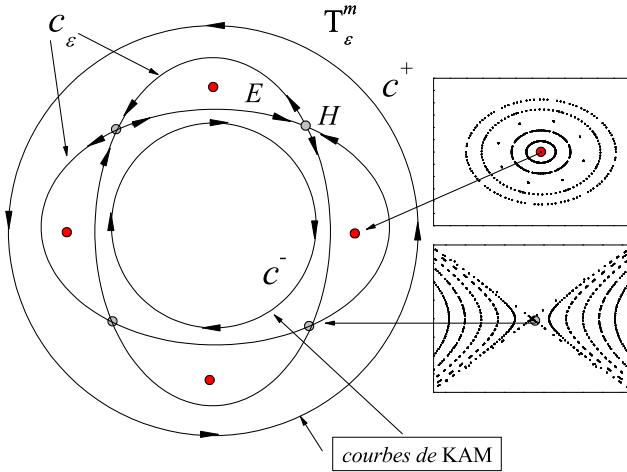


FIG. 2.4 – Section de Poincaré représentant la déformation des tores sous l’application  $T_\epsilon^m$ . L’intersection des tores déformés donne naissance à un nombre de point fixes hyperboliques  $H$  (gris) et un nombre égal de points fixes elliptiques  $E$  (rouge).

Puisque l’application de Poincaré préserve les aires, les nouvelles courbes  $C_\epsilon$  doivent renfermer la même surface. Géométriquement ceci n’est possible que si elles se croisent en un nombre pair de points qui sont points fixes de  $T_\epsilon^m$ . Ceci signifie que les tores ne se détruisent pas entièrement mais préservent ce nombre pair de points fixes dont on peut distinguer deux catégories : des points elliptiques stables  $E$  et des points hyperboliques  $H$  instables (figure 2.4). C’est le mouvement autour de ces points qui va définir la nouvelle dynamique du système perturbé.

Du fait que les points elliptiques se situent entre deux portions qui ont le même sens de rotation, le mouvement autour de ces points se fait sur des courbes fermées. Ceci nous donne une information capitale sur la structure de la section de Poincaré : chaque courbe fermée constitue une nouvelle structure, où le même scénario de destruction se reproduit à l’infini (figure 2.5). Ce scénario d’autosimilarité autour des points fixes elliptiques est spécifique à la dynamique hamiltonienne. Il est la conséquence directe de la préservation des aires, imposée par le théorème de Liouville.

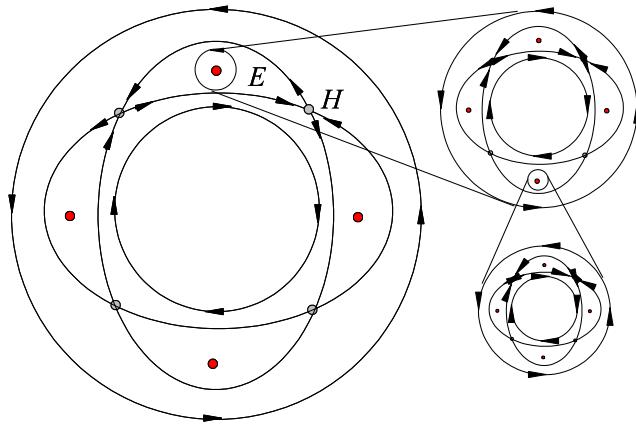


FIG. 2.5 – Scénario autosimilaire autour des points fixes elliptiques.

Le mouvement autour des points hyperboliques est plus subtil. Ces points sont par définition les points d'intersection de deux courbes invariantes, appelées *séparatrices*. Ces courbes séparent deux régions de l'espace des phases qui décrivent deux types de mouvement qualitativement différents. Pour passer d'un point hyperbolique  $H_s^1$  à son voisin successif  $H_s^2$ , par l'application de  $T_\epsilon^m$ , il existe deux chemins possibles : un chemin stable selon  $W_s$  et un chemin instable selon  $W_i$ .

Dans le cas intégrable ces courbes sont invariantes et confondues, à cause de l'existence d'une deuxième constante du mouvement  $I_2 = \text{const}$ , contrairement au cas non-intégrable où cette constante n'existe pas. Par conséquence si on démarre près du premier point hyperbolique  $H_s^1$  en appliquant  $T_\epsilon^m$ , l'image de ce point n'a aucune raison d'appartenir à une courbe  $I_2 = \text{const}$ . Les chemins  $W_s$  et  $W_i$  ne sont plus confondus (figure 2.6).

Par ailleurs puisque l'application de Poincaré préserve les aires, (ce qui signifie que la longueur du chemin entre deux points fixes est constante), les chemins  $W_s$  et  $W_i$  doivent se couper au moins en un point  $P_h^0$  qui est appelé *point homoclinique*. L'existence de ce point est très importante dans l'apparition d'une région chaotique. Ceci est dû au fait que ce point est *l'intersection d'une branche stable et d'une branche instable*. Puisque ce point n'est pas un point fixe de l'application de Poincaré, il peut générer à lui seul une infinité de points homocliniques  $P_h^k$  sous la même application (figure 2.6). Cette séquence converge vers  $H_s^2$  pour  $k \rightarrow \infty$ .

A l'approche du point hyperbolique  $H_s^2$ , les points homocliniques  $P_h^k$  s'accumulent du fait que  $W_s$  et  $W_i$  oscillent à grande amplitude. Ceci augmente considérablement le nombre de points d'intersection qui remplissent la surface entre deux courbes de KAM. On parlera donc d'une *mer chaotique* entre les courbes invariantes.

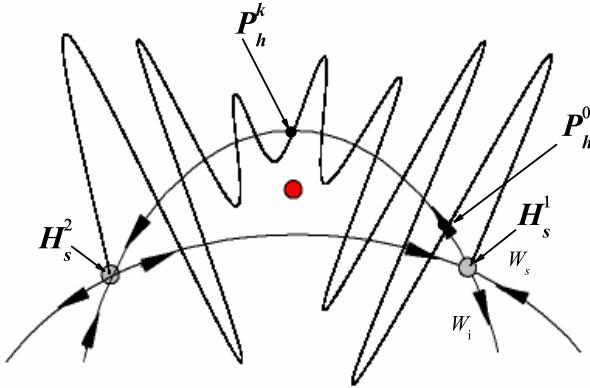


FIG. 2.6 – Intersection des chemins stables et instables, qui relient deux points hyperboliques  $H_s^1$  et  $H_s^2$  successifs, et apparition des points homocliniques  $P_h^k$ .

Ce phénomène est caractéristique de l'apparition des trajectoires chaotiques qui se fait en premier lieu au voisinage des points fixes hyperboliques. Loin de ces points, les oscillations des chemins ( $W_s, W_i$ ) sont faibles et ils restent donc confondus.

On voit donc que ce scénario nous informe sur une structure hiérarchique très riche de l'espace des phases, où la destruction des tores invariants s'accompagne de l'apparition de points elliptiques et hyperboliques. *Ainsi des comportements réguliers et irréguliers de la trajectoire se trouvent étroitement entrelacés.*

## 2.2 Modes propres d'une cavité diélectrique

Dans le cadre de notre étude du processus d'émission dans les lasers à cavités diélectriques, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'effet du résonateur sur les modes d'émission, en négligeant dans un premier temps le processus microscopique responsable de l'émission. Notre étude se fera donc en absence de milieu actif.

Le but de notre travail est donc de chercher l'ensemble des modes propres acceptés par la cavité. L'imposition de conditions aux frontières de notre cavité mène directement à la quantification de la longueur d'onde  $\lambda$ , ou encore de la pulsation  $\omega$  et du nombre d'onde  $k$ . La méthode générale pour trouver le spectre des longueurs d'onde, associées aux modes propres, consiste en deux étapes :

1. Détermination des solutions de l'équation de propagation dans toutes les régions de l'espace, séparées par des frontières.
2. Imposition des conditions aux frontières pour obtenir les solutions physique qui sont les états de résonance.

Cette section sera consacrée à décrire ces étapes dans le cas d'une cavité diélectrique. Notre système décrit la propagation d'une onde électromagnétique dans une cavité diélectrique d'indice variable  $n_{int}(\mathbf{r})$ . Cette cavité est plongée dans un milieu homogène d'indice constant ( $n_{ext}(\mathbf{r}) = n_{ext} < n_{int}$ ) , généralement pris égal à un ( $n_{ext} = 1$ ). Dans ce qui suit nous allons écrire l'équation de propagation à laquelle obéit cette onde et les conditions de continuité appropriées.

### 2.2.1 L'équation de propagation

L'onde électromagnétique qui nous intéresse obéit donc aux équations de Maxwell écrites pour un milieu inhomogène, en absence de densité de charge ( $\sigma = 0$ ) et de courant ( $\mathbf{J} = 0$ ), soient<sup>2</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \epsilon_0 n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{array} \right. \quad (2.49)$$

$\mathbf{D}$  est le vecteur déplacement électrique,  $\mathbf{E}$  le vecteur champ électrique,  $\mathbf{H}$  le vecteur champ magnétique,  $\mathbf{B}$  le vecteur induction magnétique,  $\epsilon_0$  la permittivité du vide,  $\mu_0$  la perméabilité du vide et  $n(\mathbf{r})$  l'indice de réfraction du milieu.

---

<sup>2</sup>Ces relations sont toutes écrites dans le système international MKSA, dans un milieu non magnétique  $\mu = \mu_0$

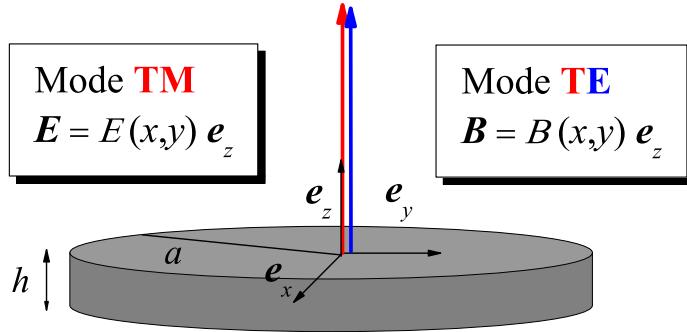


FIG. 2.7 – Configuration de la cavité cylindrique. Le repère cartésien a pour origine le centre de la base du cylindre. La propagation est bidimensionnelle dans le plan  $(x, y)$ , les solutions des équations de Maxwell sont découplées en deux modes de polarisation, les modes (TM) (rouge) et les modes (TE) (bleu).

Les équations de Maxwell (2.49) sont des équations vectorielles, elle forment un ensemble d'équations différentielles couplées des composantes du champ électromagnétique ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ), soient [46] :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Il est difficile en général de résoudre complètement ces équations. Il est donc utile d'imposer certaines approximations, en relation avec la nature du système étudié. Dans notre cas, nous considérons la propagation d'une onde dans une cavité cylindrique de hauteur  $h$  et de rayon de base  $a \gg h$  (voir figure (2.2)). En première approximation on considère que toutes les variations du champ dans la direction ( $Oz$ ) sont négligeables,

ce qui a pour effet de simplifier les équations (2.50) en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Le problème de propagation dans une cavité cylindrique à trois dimensions se transforme alors en un problème de propagation dans une cavité circulaire, de rayon  $a$ , à 2 dimensions. La propagation devient bidimensionnelle dans le plan  $(x, y)$  et les composantes du champ électromagnétique ne dépendent plus de la variable  $(z)$ .

Si en plus on impose que  $H_z = 0$  ou  $E_z = 0$ , on obtiendra deux modes de polarisation indépendants : les modes *transverses magnétique* (TM) pour  $H_z = 0$  et les modes *transverses électriques* (TE) pour  $E_z = 0$ . Pour les modes TM,  $H_z = 0$  implique  $E_x = E_y = 0$  (équations 2.51) et donc que le champ électrique soit polarisé linéairement selon  $Oz$ ;  $\mathbf{E} = E_z(x, y)\mathbf{e}_z$ . De la même manière on obtient pour les modes TE :  $\mathbf{B} = B_z(x, y)\mathbf{e}_z$ . La polarisation linéaire entraîne la simplification des équations de propagation des champs électrique et magnétique. Ces équations, initialement vectorielles, se transforment en équations scalaires pour la seule composante  $E_z$  (respectivement  $B_z$ ) pour les modes TM (respectivement TE).

En combinant les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.52)$$

on obtient l'équation de propagation du champ électrique<sup>3</sup> :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.53)$$

$c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Avec la relation du double rotationnel :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (2.54)$$

on obtient :

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.55)$$

---

<sup>3</sup>On s'intéresse uniquement à la propagation du champ électrique, en résolvant l'équation (2.53), la propagation du champ magnétique peut être obtenue par l'une des équations (2.52).

$\nabla^2$  est le symbole du Laplacien. De la divergence du vecteur  $\mathbf{D}$  on trouve :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 &\implies \epsilon_0 \nabla \cdot (n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}) = 0 \\ &\implies \nabla(n^2(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{E} + n^2(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ &\implies \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla(n^2(\mathbf{r}))}{n^2(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

En remplaçant cette relation dans l'équation (2.55), on obtient l'expression de l'équation de propagation du champ électrique, soit :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\nabla \left( \frac{\nabla(n^2(\mathbf{r}))}{n^2(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{E} \right). \quad (2.57)$$

Le terme de droite de l'équation (2.57) couple la polarisation du champ électrique à la variation de l'indice dans un milieu inhomogène. Il peut disparaître dans deux cas particuliers : le cas d'un milieu homogène ( $\nabla(n^2) = 0$ ) ou dans le cas des modes de polarisation TM. Dans ce dernier cas, le champ polarisé suivant ( $Oz$ ) est perpendiculaire au gradient de l'indice qui est dans le plan de propagation ( $Oxy$ ) :  $\mathbf{E} = E_z(x, y)\mathbf{e}_z \perp \nabla(n^2(x, y))$ . L'équation de propagation se transforme donc à une équation différentielle scalaire pour la seule composante du champ électrique, soit :

$$\nabla_{xy}^2 E_z(x, y, t) - \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2 E_z(x, y, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.58)$$

Cette dernière équation reste difficile à résoudre car elle couple la variation temporelle et la variation spatiale du champ électrique. Nous pouvons simplifier davantage cette équation en considérant que la dépendance temporelle du champ est harmonique, soit :

$$E_z(x, y, t) = E_z(x, y) \exp(-i\omega t). \quad (2.59)$$

$\omega$  est la pulsation du champ dans le vide. L'équation (2.58) se réduit à une *équation de Helmholtz* de la forme :

$$\nabla_{xy}^2 E_z(x, y) + k^2 n^2(x, y) E_z(x, y) = 0. \quad (2.60)$$

$k = \omega/c$  est simplement le nombre d'onde du champ dans le vide. La solution de l'équation de Helmholtz (2.60) nous donne donc la structure spatiale du champ électrique. Cette équation doit être résolue à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité et les conditions aux limites vont connecter ces deux solutions. De ce fait le nombre d'onde  $k$  sera quantifié et chaque valeur va donc caractériser un mode d'émission.

Avant d'introduire les conditions aux limites nous allons réécrire (2.60) dans un autre système de coordonnées. A cause de la forme cylindrique de la cavité, il est

plus judicieux de choisir les coordonnées polaires au lieu des coordonnées cartésiennes<sup>4</sup>. Écrivons d'abord le Laplacien en coordonnées polaires :

$$\nabla^2 E_z(r, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z(r, \phi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z(r, \phi)}{\partial \phi^2}, \quad (2.61)$$

qui transforme (2.60) en :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z(r, \phi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z(r, \phi)}{\partial \phi^2} + k^2 n^2(r, \phi) E_z(r, \phi) = 0. \quad (2.62)$$

C'est finalement cette équation qu'il faut résoudre afin de trouver les modes propres d'une cavité circulaire de rayon  $a$ , d'indice variable  $n(r, \phi)$ , plongée dans un milieu d'indice  $n = 1$ .

Malgré les simplifications, la résolution de l'équation (2.62) reste difficile à obtenir à cause du couplage entre  $r$  et  $\phi$  au travers de la dépendance de l'indice de réfraction  $n(r, \phi)$ .

## 2.2.2 Les conditions aux limites

A cause de la discontinuité de l'indice de réfraction, le champ électromagnétique doit satisfaire des conditions de passage de l'intérieur de la cavité à l'extérieur. En électromagnétisme, les lois de flux et de circulation, imposent aux champs électrique et magnétique de satisfaire les équations de continuité suivantes [46] :

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 & \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0 & (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0. \end{cases} \quad (2.63)$$

Ces équations s'appliquent au niveau de la surface qui sépare deux milieux d'indices de réfraction différents et  $\mathbf{n}_{12}$  est le vecteur unitaire normal à l'interface.

Ces équations de passage dépendent de la polarisation des champs électrique et magnétique et nous allons donc les écrire pour les deux modes de polarisation TM et

---

<sup>4</sup>Pour des cavités de forme polygonale, le système de coordonnées cartésiennes reste le plus approprié.

TE. Pour les modes TM les équations (2.63) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} n_{r12} \\ n_{\phi 12} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{z2} - E_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{z2} - E_{z1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{r12} \\ n_{\phi 12} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} n_{r12} \\ n_{\phi 12} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{r2} - B_{r1} \\ B_{\phi 2} - B_{\phi 1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} B_{r2} - B_{r1} \\ B_{\phi 2} - B_{\phi 1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{r12} \\ n_{\phi 12} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

↓

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{z2} = E_{z1} \\ n_{r12}(B_{\phi 2} - B_{\phi 1}) - n_{\phi 12}(B_{r2} - B_{r1}) = 0 \\ n_{r12}(B_{r2} - B_{r1}) + n_{\phi 12}(B_{\phi 2} - B_{\phi 1}) = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} E_{z2}(r, \phi) = E_{z1}(r, \phi) \\ B_{\phi 2}(r, \phi) = B_{\phi 1}(r, \phi). \end{array} \right. \quad (2.64)$$

Ainsi, le champ électrique est continu et la composante azimutale du champ magnétique est également continue. Si on s'intéresse uniquement aux conditions aux limites imposées au champ électrique, on peut relier la composante  $B_\phi(r, \phi)$  à la variation radiale de  $E_z(r, \phi)$ . Ainsi, avec (2.52), on obtient :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} = -\frac{\partial B_r}{\partial t} \\ -\frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.65)$$

$$\implies \frac{\partial E_z}{\partial r} = -i\omega B_\phi.$$

A partir des relations (2.64) et (2.65), les conditions de continuité du champ électrique, en mode TM, s'écrivent finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{in}(a, \phi) = E_{out}(a, \phi) \\ \left. \frac{\partial E_{in}}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial E_{out}}{\partial r} \right|_{r=a}. \end{array} \right. \quad (2.66)$$

Ces conditions s'appliquent au cas d'une cavité inhomogène, de forme circulaire de rayon  $a$ .  $E_{in}$  et  $E_{out}$  sont les solutions de l'équation de propagation (2.62) à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité respectivement.

Pour les modes TE, nous obtenons des relations similaires à (2.64) en remplaçant le champ électrique par le champ magnétique. Il suffit d'exprimer la variation radiale de  $B_z$ , en fonction de la composante azimutale du champ électrique  $E_\phi$ . En utilisant l'équation (2.52), nous obtenons :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \implies \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} = \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial E_r}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial E_\phi}{\partial t} \end{cases} \quad (2.67)$$

$$\implies \frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{i\omega n^2(\mathbf{r})}{c^2} E_\phi.$$

Les relations de continuité du champ magnétique en mode TE sont donc :

$$\begin{cases} B_{in}(a, \phi) = B_{out}(a, \phi) \\ \frac{1}{n_{in}^2(a, \phi)} \left. \frac{\partial B_{in}}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{1}{n_{out}^2(a, \phi)} \left. \frac{\partial B_{out}}{\partial r} \right|_{r=a}. \end{cases} \quad (2.68)$$

Dans le chapitre 4, nous allons utiliser les équations (2.66) et (2.62) pour déterminer les modes propres d'une cavité circulaire inhomogène ainsi que tous les paramètres qui les caractérisent.



# Chapitre 3

## Les billards inhomogènes

Les billards de Birkhoff ont joué un rôle important en mécanique classique. Ces systèmes présentent un exemple complet pour illustrer la transition, à partir d'un régime régulier, vers un régime chaotique dans les systèmes hamiltoniens. En plus de ce rôle pédagogique, les billards, ont contribué à la compréhension de l'émission laser dans les microcavités diélectriques [15, 71]. La présence d'un régime chaotique dans la dynamique du rayon lumineux a permis d'expliquer et de prédire le caractère directionnel et intense des modes résonnantes de la cavité et ceci en accord qualitatif avec l'expérience [29].

Ces systèmes ont été présentés comme le mouvement **libre** d'une masse  $m$  à l'intérieur d'une **cavité fermée**<sup>1</sup>. La seule caractéristique de cette dynamique consiste à la **réflexion spéculaire** sur les bords (l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion). L'état du système est ainsi déterminé par la position de la masse et la direction de sa propagation.

Le scénario de transition vers le chaos, dans les billards de Birkhoff, a été présenté comme l'effet de la perturbation due à la déformation d'une cavité circulaire [9, 10, 12, 86]. Nous proposons un nouveau scénario de transition induit par la brisure de la symétrie de rotation du système. Ce scénario est une conséquence de l'inhomogénéité du milieu à l'intérieur de la cavité et non de la géométrie de celle-ci.

A cause du lien entre les billards et les microcavités diélectriques, nous allons plutôt parler de *billards photoniques*. Dans ces systèmes, il s'agit de la propagation d'un rayon lumineux et non d'une masse  $m$ . La réflexion spéculaire reste toujours la principale propriété de la dynamique, d'autant plus qu'elle constitue une des lois de Snell et Descartes en optique géométrique. Ces deux systèmes restent néanmoins équivalents. Ceci

---

<sup>1</sup>Dans ce cadre bien précis d'une étude classique, nous nous permettons d'utiliser le mot cavité fermée. Ceci veut dire que la cavité à une frontière représentée par une courbe fermée. Ce mot prend un autre sens dans une étude quantique ou ondulatoire, il veut dire que l'onde (ou la fonction d'onde) voit une barrière de potentiel infini et elle est donc nulle à l'extérieur de la cavité. Ce n'est évidemment pas le cas dans notre étude classique.

est dû à l'analogie qui existe entre la mécanique classique, qui étudie le mouvement des masses, et l'optique géométrique. C'est dans ce cadre bien précis que nous allons étudier le scénario de transition, vers le régime mixte, comme une conséquence de l'inhomogénéité. Nous tenons à préciser, que toutes les méthodes et les remarques établies dans cette étude resteront valables pour l'étude d'une masse  $m$  dans un potentiel. La notion d'inhomogénéité sera remplacée par la notion de potentiel variable  $V(\mathbf{r})$ .

Nous définissons ainsi une nouvelle classe de billards, baptisés *billards inhomogènes*. Ces systèmes décrivent le mouvement d'un rayon lumineux dans une cavité d'indice  $n(\mathbf{r})$ , interrompu par une réflexion spéculaire sur le bord. Nous nous limitons au cas où la propagation se fait dans le plan d'une cavité circulaire, de rayon  $a$ . Nous donnerons au chapitre 5 quelques remarques concernant la combinaison de l'effet de l'inhomogénéité et de l'effet de la déformation de la cavité.

## 3.1 Optique géométrique et analogie mécanique

Le but de l'optique géométrique est l'étude de la dynamique d'un rayon lumineux dans un milieu donné. En optique, chaque milieu est caractérisé par son indice de réfraction  $n(\mathbf{r})$ . Soient  $v$  la vitesse de la lumière dans le milieu et  $c$  sa vitesse dans le vide, l'indice de réfraction relie ces deux quantités par la relation :  $v = c/n$ . Si ce paramètre dépend des variables de l'espace, nous parlerons de milieu inhomogène. C'est donc l'inhomogénéité qui va définir la dynamique du rayon lumineux dans un tel milieu. Cette dynamique est déterministe et est donc régie par un principe physique.

Dans cette section, nous allons faire un bref rappel de ce principe et écrire les équations qui régissent la dynamique de la lumière. Nous allons établir par la suite une analogie entre l'optique géométrique et la mécanique d'une masse  $m$ .

### 3.1.1 Principe de Fermat et équation iconale

Le mouvement de la lumière dans un milieu donné est déterministe. Comme pour le mouvement des masses dans un potentiel, ce déterminisme est imposé par un principe fondamental. De ce principe découle l'ensemble des équations du mouvement. Le déterminisme se manifeste alors par l'absence de tout paramètre aléatoire dans ces équations. En optique, le principe en question est connu sous le nom de *Principe de Fermat*.

Au même titre que le principe de Hamilton (voir section 2-1-1-a), le principe de Fermat répond à la question suivante : dans un milieu d'indice  $n(\mathbf{r})$ , quelle est la trajectoire que doit prendre la lumière pour joindre deux points  $A$  et  $B$ ? Avant de répondre à cette question, nous allons rappeler la notion de chemin optique. Le *chemin optique* est le chemin parcouru par la lumière dans le vide pendant la durée de propagation dans le milieu. Si on écrit le déplacement élémentaire  $dL$  de la lumière dans le vide, pendant

une durée infinitésimale  $dt$ , on obtient :

$$dL = c dt = n v dt = n ds. \quad ds = v dt \quad (3.1)$$

$s$  désignant l'abscisse curviligne le long du chemin parcouru dans le milieu entre les points  $A$  et  $B$ . Le chemin optique entre ces deux points est donc donné par :

$$L = \int_A^B n ds \quad (3.2)$$

Avec cette définition, le principe de Fermat s'énonce comme suit :

*Pour relier deux points  $A$  et  $B$ , dans un milieu d'indice  $n$ , la lumière prend une trajectoire telle que le chemin optique, donné par (3.2), soit minimum.*

Nous allons maintenant écrire une équation qui définit la trajectoire de la lumière à partir d'une condition initiale donnée. Pour cela nous allons fixer le point de départ  $A$  et nous faisons varier la position du point d'arrivée  $B(\mathbf{r})$ . Le chemin optique, donné par l'intégrale (3.2), dépendra donc du vecteur position  $\mathbf{r}$ , soit :

$$L(\mathbf{r}) = \int_A^{B(\mathbf{r})} n ds. \quad (3.3)$$

Il en résulte que :

$$dL = \nabla L \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.4)$$

En identifiant cette expression de la différentielle du chemin optique avec la relation (3.1), et en utilisant l'expression,  $ds = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ , nous obtenons l'équation :

$$n d\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = \nabla L \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire en tout point. L'équation (3.5) étant vérifiée quel que soit le déplacement infinitésimal  $d\mathbf{r}$ , nous obtenons :

$$n \mathbf{u} = \nabla L. \quad (3.6)$$

Cette équation est connue sous le nom *d'équation iconale*. Elle exprime le constat suivant : lors de la propagation de la lumière, le module du gradient du chemin optique est égal à l'indice de réfraction du milieu  $n(\mathbf{r})$ . L'équation iconale peut être réécrite comme une équation différentielle en fonction de la variable  $s$ , soit :

$$\frac{d}{ds}(n\mathbf{u}) = \nabla n \quad (3.7)$$

Cette équation est équivalente à une équation du mouvement pour le photon. Sa résolution donnera la position et la direction de propagation de celui-ci à tout instant  $t$ .

Nous pouvons donner à l'équation (3.7) une autre forme qui fait intervenir le rayon de courbure de la trajectoire  $R_c$ . Ce dernier est relié à la variation du vecteur  $\mathbf{u}$ , par rapport à l'abscisse curviligne  $s$ , par la relation :

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{\mathbf{e}_n}{R_c}, \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{e}_n$  est le vecteur unitaire normal à la trajectoire. En utilisant cette expression nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d(n\mathbf{u})}{ds} &= \frac{dn}{ds}\mathbf{u} + n\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \nabla n \\ &\Downarrow \\ \frac{dn}{ds}\mathbf{u} + \frac{n}{R_c}\mathbf{e}_n &= \nabla n. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En multipliant cette dernière équation par le vecteur normal  $\mathbf{e}_n$  nous obtenons une expression de la courbure (inverse du rayon de courbure), soit :

$$\boxed{\frac{1}{R_c} = \frac{1}{n}\mathbf{e}_n \cdot \nabla n} \quad (3.10)$$

Cette équation nous donne le sens d'orientation du rayon lumineux. En effet, comme  $R_c$  est positif, l'angle que fait  $\mathbf{e}_n$  avec  $\nabla n$  est aigu. Ceci a pour conséquence que la concavité de la trajectoire est toujours dans le sens du vecteur  $\nabla n$ .

### 3.1.2 Analogie avec la mécanique

Dans cette section nous allons établir les bases de l'analogie entre l'optique géométrique et la mécanique d'un point matériel. Cette analogie va nous servir pour définir le comportement de la lumière dans un milieu inhomogène. Bien entendu, la connaissance de notions d'optique est suffisante pour avoir une idée claire de notre travail. Nous allons voir dans le chapitre suivant que la même analogie existe entre l'optique ondulatoire et la mécanique quantique. Cette analogie va nous permettre d'interpréter l'ensemble des résultats obtenus.

L'optique géométrique est donc analogue à la mécanique du point de vue des principes. Le principe de Fermat ressemble au principe de moindre action. Ces deux principes imposent le déterminisme à la dynamique et répondent à la même question, à savoir : quel est le chemin que suit la lumière ou la masse pour relier deux points de l'espace. La réponse à cette question est basée, dans les deux cas, sur la minimisation d'une intégrale de chemin.

Comme nous l'avons déjà abordé, ces deux principes imposent les équations du mouvement qui régissent la dynamique. Il est donc évident que ces équations sont également

analogues. Pour s'en convaincre écrivons la relation fondamentale de la dynamique, donnée par Newton, pour une masse  $m$  soumise à une force  $\mathbf{F}$ , soit :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} &\implies \frac{d\mathbf{p}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{F} & \mathbf{p} = m\mathbf{v} = mv\mathbf{u} \\ &\implies m \frac{d(v\mathbf{u})}{ds} = \frac{\mathbf{F}}{v}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Cette dernière équation est donc similaire à l'équation (3.7) si nous admettons les égalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 1 \\ \mathbf{v} = v\mathbf{u} = n\mathbf{u} \\ \frac{\mathbf{F}}{v} = \nabla n. \end{array} \right. \tag{3.12}$$

Avec ces égalités nous pouvons dire que : *le mouvement d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice  $n(\mathbf{r})$  est similaire au mouvement d'une particule de masse  $m = 1$  avec une vitesse de module  $|\mathbf{v}| = v = n$  soumise à une force  $\mathbf{F} = n\nabla n$ .*

Cette force dérive d'un potentiel tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = n\nabla n &\implies \mathbf{F} = \nabla \left( \frac{n^2}{2} \right) \\ &\implies \mathbf{F} = -\nabla \left( -\frac{n^2}{2} \right) = -\nabla V(\mathbf{r}) \\ &\implies V(\mathbf{r}) = -\frac{n^2(\mathbf{r})}{2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Avec cette définition, nous pouvons traiter la dynamique d'un rayon lumineux dans un milieu inhomogène comme la dynamique d'une masse dans un potentiel variable donné par (3.13).

## 3.2 Dynamique des billards inhomogènes

Les billards inhomogènes, tels que nous les avons définis, sont donc des systèmes à deux degrés de liberté. L'état du système est défini par quatre variables indépendantes. Deux variables sont reliées à la position du photon, dans le plan de la cavité, et les deux autres à la direction de propagation du rayon lumineux. Nous avons déjà noté que la dynamique des billards est basée sur deux aspects différents : la propagation de la lumière dans un milieu inhomogène et la réflexion spéculaire. Nous allons donc définir l'état du système en exploitant ces deux aspects. Nous allons dans un premier temps décrire la trajectoire de la lumière partant d'un point de la frontière, et chercher par la suite les points d'intersection avec celle-ci.

### 3.2.1 Coordonnées polaires

La construction de la trajectoire se fait par la résolution de l'équation différentielle (3.7). Cette équation est une équation vectorielle, exprimant la variation du vecteur  $n\mathbf{u}$  en fonction de la variable  $s$ . Afin de la résoudre, nous allons la réécrire sous la forme d'un système d'équations différentielles pour les composantes du vecteur  $\mathbf{u}$ . Il faut donc projeter l'équation sur un système de coordonnées donné. A cause de la forme circulaire de la cavité, les coordonnées polaires sont les plus appropriées à cette projection<sup>2</sup>. Dans ce système, la position du photon est donnée par les deux variables  $(r, \phi)$  et la direction de propagation par les composantes  $(u_r, u_\phi)$  du vecteur  $\mathbf{u}$  dans le repère tournant  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)$ . La première relation que nous allons écrire, va relier la variation des coordonnées position aux deux variables de direction. Pour cela, écrivons les composantes du vecteur vitesse en coordonnées polaires :

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\phi}{dt}\mathbf{e}_\phi = \frac{ds}{dt}\mathbf{u} = \frac{ds}{dt}(u_r\mathbf{e}_r + u_\phi\mathbf{e}_\phi). \quad (3.14)$$

En éliminant le temps de cette équation, nous obtenons les relations :

$$\frac{dr}{ds} = u_r \quad \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{r}u_\phi. \quad (3.15)$$

Nous allons utiliser ces relations pour réécrire la variation de l'indice de réfraction  $n(r, \phi)$  en fonction des composantes du vecteur  $\mathbf{u}$ , soit :

$$\begin{aligned} \frac{dn(r, \phi)}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial r}\frac{dr}{ds} + \frac{\partial n}{\partial \phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial n}{\partial r}u_r + \frac{\partial n}{\partial \phi}\frac{1}{r}u_\phi \\ &= \nabla n \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

En utilisant cette dernière relation, nous allons écrire l'équation (3.7) sous la forme d'une équation différentielle, du premier ordre, du vecteur  $\mathbf{u}$  :

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{1}{n}[\nabla n - (\nabla n \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}]. \quad (3.17)$$

C'est cette équation que nous allons projeter sur le repère mobile  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)$ . Pour cela, écrivons la variation de  $\mathbf{u}$  en fonction de  $s$  dans ce repère :

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{du_r}{ds}\mathbf{e}_r + \frac{d\mathbf{e}_r}{ds}u_r + \frac{du_\phi}{ds}\mathbf{e}_\phi + \frac{d\mathbf{e}_\phi}{ds}u_\phi. \quad (3.18)$$

Les dérivées des vecteurs de base s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{e}_r}{ds} = \frac{d\phi}{ds}\mathbf{e}_\phi \\ \frac{d\mathbf{e}_\phi}{ds} = -\frac{d\phi}{ds}\mathbf{e}_r, \end{array} \right. \quad (3.19)$$

---

<sup>2</sup>Dans toute la suite de notre étude, l'origine des coordonnées est confondue avec le centre de la cavité.

l'équation (3.18) devient :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}}{ds} &= \left[ \frac{du_r}{ds} - \frac{d\phi}{ds} u_\phi \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{du_\phi}{ds} + \frac{d\phi}{ds} u_r \right] \mathbf{e}_\phi \\ &= \left[ \frac{du_r}{ds} - \frac{u_\phi^2}{r} \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{du_\phi}{ds} + \frac{u_\phi u_r}{r} \right] \mathbf{e}_\phi.\end{aligned}\tag{3.20}$$

En remplaçant le développement (3.20) dans la relation (3.17) et en identifiant les composantes de deux vecteurs égaux, nous obtenons le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_r}{ds} = \frac{1}{n} \left[ \frac{\partial n}{\partial r} u_\phi^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial \phi} u_r u_\phi \right] + \frac{u_\phi^2}{r} \\ \frac{du_\phi}{ds} = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial \phi} u_r^2 - \frac{\partial n}{\partial r} u_\phi u_r \right] - \frac{u_\phi u_r}{r} \\ \frac{dr}{ds} = u_r \\ \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{r} u_\phi. \end{array} \right. \tag{3.21}$$

Trouver la trajectoire du rayon lumineux dans un milieu inhomogène d'indice  $n(r, \phi)$  se ramène à résoudre le système (3.21). Ce système représente un ensemble de quatre équations différentielles, du premier ordre, couplées. Chaque équation représente la variation de l'une des variables d'état  $(r, \phi, u_r, u_\phi)$ . La variation temporelle est remplacée par la variation par rapport à la variable  $s$ . Ces deux variables restent, évidemment, liées par le module du vecteur vitesse du photon.

Il y a une infinité de solutions relatives à une infinité de conditions initiales. Cette dépendance va définir la nature des trajectoires qui existent dans le système. Pour les billards inhomogènes, les conditions initiales sont prises sur la frontière de la cavité. Dans le cas général d'une cavité quelconque, donnée par l'équation polaire  $R(\phi)$ , et à l'instant initial  $t_0 = 0$  (équivalent à la valeur de l'abscisse curviligne  $s_0 = 0$ ), l'état du système est représenté par le point  $M_0(R(\phi_0), \phi_0)$  et un vecteur  $\mathbf{u}_0(u_{r0}, u_{\phi0})$  (voir figure (3.1)).

La trajectoire évolue, à partir de ces conditions, jusqu'à ce qu'elle rencontre la frontière une autre fois. Cette intersection se fait à un point  $M_1(R(\phi_1), \phi_1)$  et avec un vecteur  $\mathbf{u}_1(u_{r1}, u_{\phi1})$ . A ce point, elle se réfléchit de manière spéculaire dans une direction donnée par un vecteur  $\mathbf{u}'_1(u'_{r1}, u'_{\phi1})$ , relié à  $\mathbf{u}_1$  par l'angle d'incidence  $\chi$ . Le nouveau vecteur  $\mathbf{u}'_1$  et le point  $M_1$  représentent les nouvelles conditions initiales des équations (3.21). La solution de ces équations, avec ces nouvelles conditions, va définir la nouvelle portion de la trajectoire jusqu'au prochain point d'intersection. La trajectoire complète est construite en itérant cette opération à l'infini et seuls le point  $M_0$  et le vecteur  $\mathbf{u}_0$  définissent sa nature et sa stabilité.

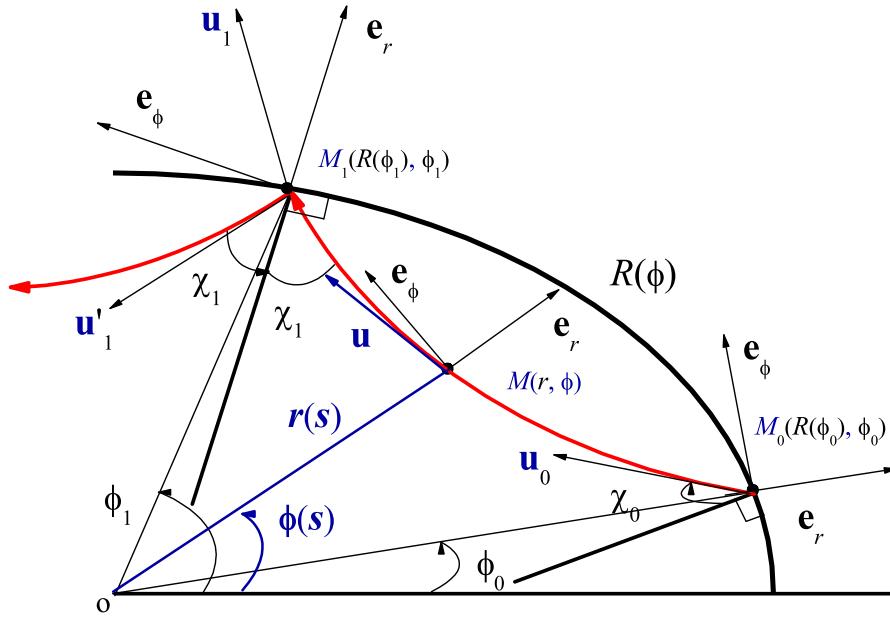


FIG. 3.1 – Dynamique d'un billard inhomogène à cavité définie par l'équation polaire  $R(\phi)$ .

### 3.2.2 Section de Poincaré

Si nous nous intéressons uniquement à la nature des trajectoires, leurs stabilités, et la nature de la dynamique vis-à-vis de l'intégrabilité, il n'est pas nécessaire de connaître l'état complet du système. Nous avons déjà vu, au chapitre 2, que cette réduction de l'espace des états est connue sous le nom de section de Poincaré. Pour les billards, qui sont des systèmes conservatifs à deux degrés de liberté, cette section est un sous espace, à deux dimensions, de l'espace des phases complet<sup>3</sup>. En coordonnées polaires, cet espace des phases est construit avec les coordonnées  $(r, p_r, \phi, p_\phi)$ .  $(r, \phi)$  représentent les positions généralisées et  $(p_r, p_\phi)$  les impulsions généralisées du système. La dynamique étant caractérisée par la réflexion sur le bord de la cavité, le mouvement radial du rayon lumineux peut être ignoré<sup>4</sup>. De ce fait la section de Poincaré est construite avec les variables  $(\phi, p_\phi)$ . Habituellement cet espace est remplacé par l'espace  $(\phi, \sin \chi)$  où  $\chi$  est l'angle entre la trajectoire et la normale au bord de la cavité au point d'impact. Ceci

<sup>3</sup>Dans un système conservatif, à  $N$  degrés de liberté, l'espace des phases est déjà réduit à un sous espace, à  $N - 1$  dimensions, à cause de l'existence d'une constante du mouvement qui est l'énergie du système.

<sup>4</sup>Sur la frontière il existe une relation entre la variable  $r$  et la variable  $\phi$  via l'équation  $R(\phi)$ .

vient du fait que pour les cas intégrables (voir plus loin) le moment cinétique  $L_z = p_\phi$  est proportionnel à  $\sin \chi$ <sup>5</sup>.

La notion de section de Poincaré est associée à la notion d'application de Poincaré  $T_{\{\epsilon_j\}}$ . Pour les billards, cette application va relier deux états de réflexion, successifs  $i$  et  $i+1$ , caractérisés par l'angle  $\phi$  et l'angle  $\chi$ , soit :

$$(\phi_i, \sin \chi_i) \xrightarrow{T_{\{\epsilon_j\}}} (\phi_{i+1}, \sin \chi_{i+1}) \implies \begin{cases} \phi_{i+1} = f(\phi_i, \sin \chi_i; \{\epsilon_j\}) \\ \sin \chi_{i+1} = g(\phi_i, \sin \chi_i; \{\epsilon_j\}), \end{cases} \quad (3.22)$$

où  $i$  est le  $i^{\text{ème}}$  état de réflexion et  $\{\epsilon_j\}$  est un ensemble de paramètres de perturbation. La donnée d'un couple  $(\phi_0, \sin \chi_0)$ , définit une condition initiale pour une trajectoire donnée. Ce couple est représenté par un point dans la section de Poincaré. L'évolution de ce point est régie par l'itération de l'application (3.22). Après un nombre infini d'itérations, la trajectoire va définir une structure dont la forme dépendra de sa nature.

Comme tout système dynamique, les billards possèdent les trois types de trajectoires définies dans le chapitre 2, à savoir :

1. Des trajectoires *périodiques* de période  $n \geq 2$ . Ces trajectoires, **régulières**, retournent à leurs conditions initiales après  $n$  réflexions.
2. Des trajectoires *quasi-périodiques*. Ces trajectoires, **régulières** également, ne se referment jamais mais ne visitent pas toute la surface de la cavité. Elles vont ainsi tracer les frontières, appelées *caustiques*, de régions dynamiquement inaccessibles par la trajectoire.
3. Des trajectoires *chaotiques*. Ces trajectoires ne sont pas régulières, elles sont donc très sensibles aux conditions initiales et ne présentent pas de caustique.

Ces trois trajectoires ont ainsi une signature particulière sur la section de Poincaré : les trajectoires périodiques sont représentées par un nombre fini de points (dimension 0) égal à la période. Ces points forment une structure discrète bien localisée. Aux trajectoires quasi-périodiques sont associées des courbes invariantes  $\sin \chi = f(\phi)$  (dimension 1) et également bien localisées sur la surface. Les trajectoires chaotiques sont par contre représentées par un ensemble de points sans structure apparente qui remplissent des surfaces (dimension 2). Nous présentons, dans la figure (3.2), quelques trajectoires périodiques typiques. Nous montrons les trajectoires de période 4 (noir), 3 (rouge), 7 (bleu), 12 (vert-olive). Nous montrons également les deux types de trajectoires quasi-périodiques : les trajectoires de type Whispering Gallery (WG), représentées par une courbe invariante ouverte, et les trajectoires à caustique hyperbolique, représentées par une courbe invariante fermée. Finalement nous montrons une trajectoire chaotique représentée par un ensemble de points (rouge) qui remplissent une surface de la section de Poincaré.

---

<sup>5</sup>La conservation du moment cinétique sera traduite par la conservation de  $\sin \chi$ .

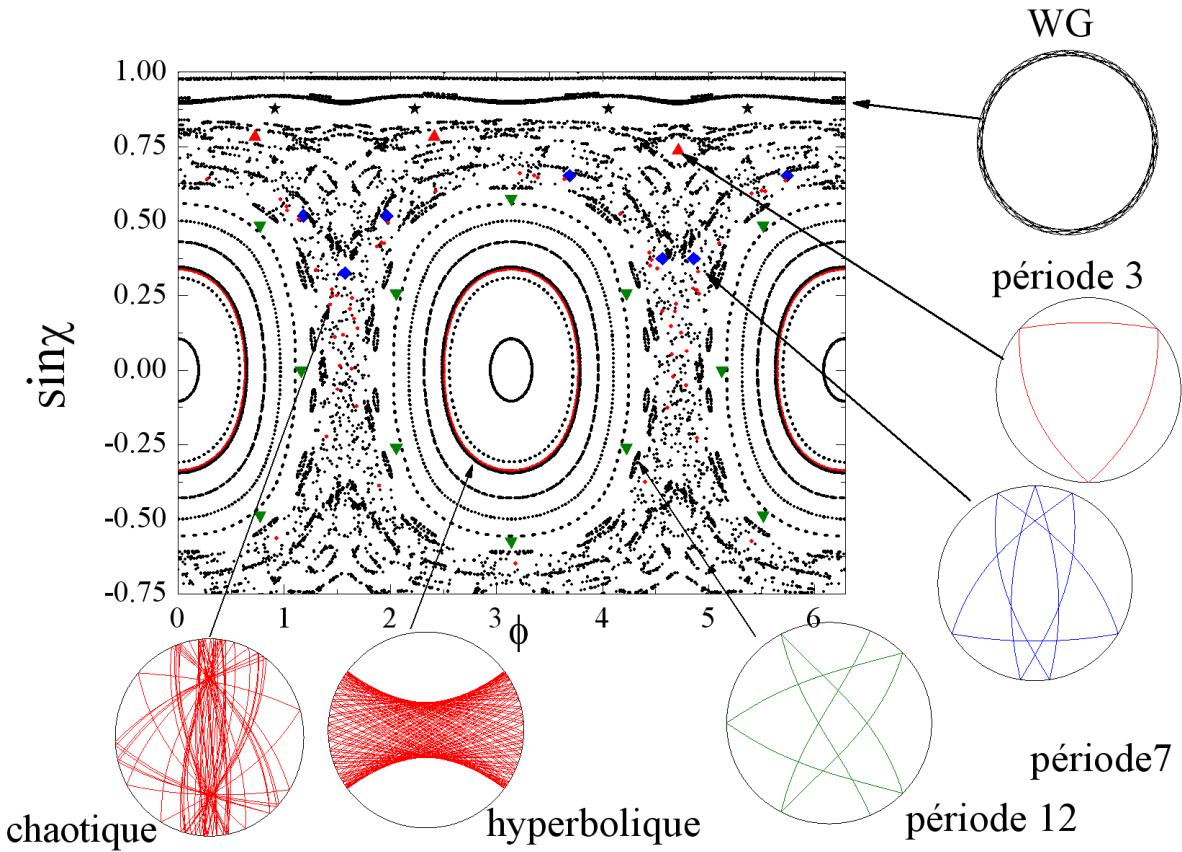


FIG. 3.2 – Signature des trois types de trajectoires qui existent dans un billard.

Après avoir défini les trois types de trajectoires qui existent dans les billards et décrit leurs signatures dans la section de Poincaré, nous allons présenter l'algorithme utilisé pour calculer l'application de Poincaré. Cet algorithme est basé sur deux éléments : l'intégration du système d'équations (3.21) et l'utilisation géométrique d'un certain nombre d'angles reliés à la direction de propagation. L'idée de la méthode est de chercher l'intersection entre une trajectoire donnée et le bord de la cavité. L'intégration des équations (3.21) nous donne à tout instant les fonctions  $r(s)$  et  $\phi(s)$ . Il faut donc chercher la valeur de l'abscisse curviligne au moment de l'intersection. Cette valeur, notée  $s_{int}$ , est la solution de l'équation :

$$h(s) = R(\phi(s)) - r(s) = 0. \quad (3.23)$$

L'utilisation d'un certain nombre d'angles, va nous permettre de relier les conditions initiales de l'application de Poincaré  $(\phi_0, \sin \chi_0)$  à celles nécessaires pour l'intégration des équations du mouvement  $(r_0, \phi_0, u_r, u_\phi)$ .

Pour des raisons pratiques, nous allons remplacer l'angle  $\chi$  par l'angle  $\alpha = \pi/2 - \chi$ . Ce dernier est l'angle entre la trajectoire et la tangente à la cavité au point d'impact. L'ensemble des angles utilisés apparaît sur la figure (3.3). Nous résumons donc l'algorithme par les étapes suivantes :

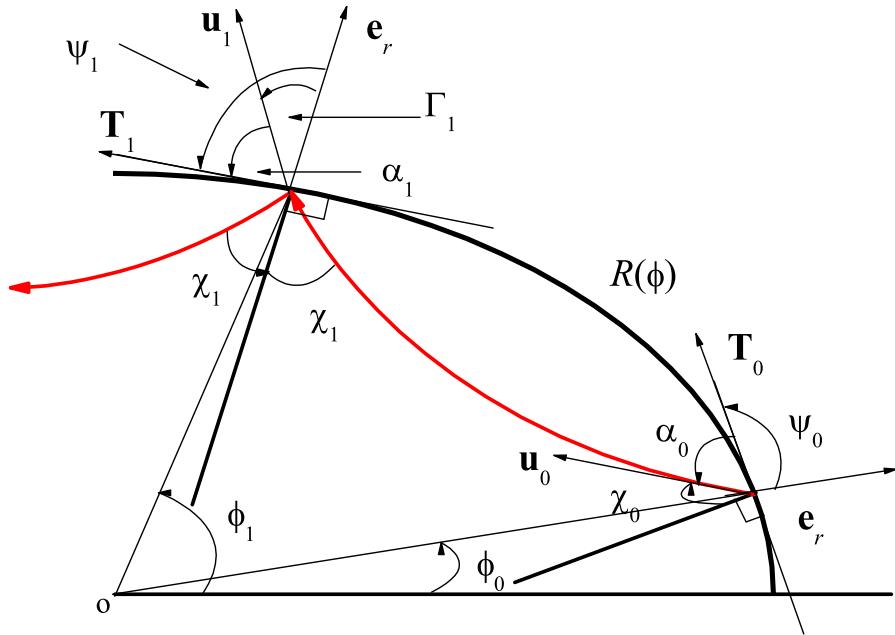


FIG. 3.3 – Présentation d'un ensemble d'angles qui relient les composantes du vecteur  $\mathbf{u}$  à l'angle d'incidence  $\chi$  (ou  $\alpha$ ).

1. Construire, à partir d'un couple initial  $(\phi_0, \alpha_0)$ , l'ensemble  $(r_0, \phi_0, u_{r0}, u_{\phi 0})$  tel que :

$$\begin{cases} u_{r0} = \cos(\psi_0 + \alpha_0) \\ u_{\phi 0} = \sin(\psi_0 + \alpha_0) \\ r_0 = R(\phi_0), \end{cases} \quad (3.24)$$

où l'angle  $\psi_0$ , pris entre la direction radiale  $\mathbf{e}_r$  et la tangente positive au bord de la cavité au point d'impact  $\mathbf{T}$ , est donné par :

$$\tan \psi_0 = \frac{R(\phi_0)}{dR(\phi)/d\phi|_{\phi=\phi_0}}. \quad (3.25)$$

2. Résoudre le système d'équations différentielles (3.21) avec les conditions initiales (3.24). Cette intégration se fait à partir de  $s_0 = 0$  jusqu'à une valeur variable  $s$ .
3. Construire la fonction  $h(s)$  donnée par la relation (3.23).  $\phi(s)$  et  $r(s)$  sont les solutions données par l'étape (2).

4. Résoudre numériquement l'équation  $h(s) = 0$  en utilisant la méthode Newton-Raphson. Cette méthode a besoin d'évaluer la dérivée de la fonction  $h(s)$ . Cette dérivée est donnée sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dh}{ds} &= \frac{d\phi}{ds} \frac{dR}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi(s)} - \frac{dr(s)}{ds} \\ &= \frac{u_\phi(s)}{r(s)} \frac{dR}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi(s)} - u_r(s). \end{aligned} \quad (3.26)$$

La solution de  $h(s) = 0$  est l'abscisse curviligne au point d'intersection, notée  $s_{int}$ .

5. Réintégrer le système (3.21) de 0 à  $s = s_{int}$  avec les mêmes conditions initiales (3.24). Ceci nous définit l'ensemble  $(r_1, \phi_1, u_{r1}, u_{\phi1})$ .
6. Déterminer  $\alpha_1$  à partir de l'ensemble de solution  $(r_1, \phi_1, u_{r1}, u_{\phi1})$ . Ceci se fait géométriquement en s'appuyant sur la figure (3.3). Ainsi nous avons :

$$\alpha_1 = \psi_1 - \Gamma_1, \quad (3.27)$$

où  $\psi_1$  est l'angle défini par :

$$\tan \psi_1 = \frac{R(\phi_1)}{dR/d\phi|_{\phi=\phi_1}}, \quad (3.28)$$

où  $\Gamma_1$  est l'angle entre le vecteur  $\mathbf{u}_1$  et la direction radiale, défini par :

$$\tan \Gamma_1 = \frac{u_{\phi1}}{u_{r1}}. \quad (3.29)$$

La construction de l'ensemble de points issu de la condition initiale  $(\alpha_0, \phi_0)$  s'obtient alors par itération des étapes (1) et (6).

L'algorithme que nous avons construit est général. Il peut être utilisé dans le cas de n'importe quelle cavité et pour n'importe quel profil d'indice. La seule restriction est que la fonction  $R(\phi)$  ait une dérivée définie quel que soit  $\phi$  et que le gradient de l'indice soit défini quelle que soit la valeurs des variable  $r$  et  $\phi$ .

### 3.3 Transition vers le chaos

Nous allons maintenant nous intéresser à la nature de la dynamique vis-à-vis de l'intégrabilité. Dans notre étude, nous allons associer cette notion à l'existence d'autant de constantes de mouvement que de degrés de liberté. En mécanique, deux grandeurs

physiques sont susceptibles de demeurer constantes avec le temps. Il s'agit de l'énergie et du moment cinétique. Pour les billards, qui sont des systèmes à deux degrés de liberté conservatifs, nous disposons d'une constante du mouvement qui est l'énergie du système. Nous allons ainsi présenter les cas intégrables comme étant ceux qui conservent en plus le moment cinétique.

Pour illustrer l'intégrabilité dans un billard inhomogène, à cavité circulaire, nous proposons un profil d'indice donné par :

$$n(x, y) = n_0 + \delta n e^{-[2(x - x_0)^2/w_x^2 + 2(y - y_0)^2/w_y^2]} \quad (3.30)$$

Ce profil représente l'application d'une perturbation gaussienne sur un milieu, initialement homogène, d'indice  $n_0$  :  $\delta n$  est l'amplitude de la perturbation,  $(w_x, w_y)$  les largeurs de la fonction gaussienne sur les axes  $(Ox, Oy)$  et  $(x_0, y_0)$  les coordonnées de son centre par rapport à l'origine du cercle.

### 3.3.1 Cas intégrable

En mécanique, le théorème du moment cinétique nous donne la variation de celui-ci en fonction du temps, soit :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\mathbf{F}/o} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}, \quad (3.31)$$

où  $\mathbf{M}_{\mathbf{F}/o}$  est le moment de la force par rapport à l'origine,  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$  le vecteur position et  $\mathbf{F}$  la force. Le moment cinétique est donc conservé si la force est centrale  $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_r$  (ou nulle), ce qui est équivalent à un potentiel radial  $V = V(r)$  (ou constant).

L'analogie entre la mécanique et l'optique géométrique nous impose les mêmes critères. Ainsi le moment cinétique se conserve si le milieu, à l'intérieur de la cavité, est homogène  $n(r, \phi) = n_0$ , ou si le milieu est inhomogène mais avec un profil d'indice de réfraction purement radial  $n(r, \phi) = n(r)$ .

Pour que l'indice garde cette propriété dans tout l'espace, la cavité doit avoir une forme circulaire d'équation radiale  $R(\phi) = a = \text{constante}$ . Dans le cas d'une cavité déformée,  $R(\phi) \neq \text{constante}$ , l'indice n'est plus radial (ou constant) sur la frontière même s'il l'est à l'intérieur.

Ainsi nous pouvons dire que :

*Les billards sont des systèmes intégrables si : la forme de la cavité est circulaire et si le milieu à l'intérieur de celle-ci est soit homogène, soit inhomogène avec un profil d'indice purement radial*<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Nous ne tenons pas compte du cas d'un billard elliptique homogène qui est un système intégrable à cause de la géométrie spéciale de l'ellipse. Dans ce cas, la deuxième constante du mouvement n'est pas le moment cinétique par rapport à l'origine des coordonnées mais le produit des deux moments cinétiques calculés par rapport aux deux foyers de l'ellipse.

Dans le cas d'un milieu d'indice de réfraction donné par la relation (3.30), le cas intégrable correspond au cas où  $w_x = w_y = w$  et  $x_0 = y_0 = 0$ . Dans ces conditions l'indice est radial et son expression est donnée par :

$$n(r) = n_0 + \delta n e^{-2r^2/w^2} \quad (3.32)$$

Maintenant que nous avons défini les conditions pour qu'un billard inhomogène soit intégrable, nous allons mettre en évidence quelques propriétés concernant la section de Poincaré et la nature des trajectoires qui y apparaissent. Nous allons par la suite voir quelques effets de l'inhomogénéité sur ces trajectoires.

### a) Section de Poincaré

Dans un système intégrable, les deux trajectoires régulières qui existent sont les trajectoires périodiques et quasi-périodiques. Pour la classe de billards que nous avons définis, à savoir les billards inhomogènes à cavité circulaire, la signature de ces deux trajectoires est spécifique. Les courbes invariantes, qui représentent les trajectoires quasi-périodiques, sont des lignes horizontales d'équation  $\sin \chi = f(\phi) = constante = \sin \chi_0$ . Les  $n$  points, qui représentent les trajectoires périodiques de période  $n$ , sont également alignés. Ceci est une conséquence directe de la conservation du moment cinétique. Dans le cas d'une cavité circulaire le moment cinétique, sur le bord de la cavité, est proportionnel à  $\sin \chi$  :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \mid_{r=a} = ap \sin(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \mathbf{e}_z = ap \sin(\pi - \chi) \mathbf{e}_z, \quad (3.33)$$

où  $a$  est le rayon de la cavité circulaire et  $p$  est le module de la quantité de mouvement. A cause de la symétrie de rotation, le photon rencontre le bord de la cavité avec la même vitesse. De ce fait le produit ( $ap$ ) dans la relation (3.33) est une simple constante multiplicative qui relie le module du moment cinétique à  $\sin \chi$ . La conservation de  $\mathbf{L}$  se traduit donc par la conservation de l'angle  $\chi$ . A partir d'une condition initiale  $(\phi_0, \chi_0)$  la trajectoire se refléchit sur la cavité avec le même angle à l'infini et ceci à différents endroits caractérisés par différentes valeurs de  $\phi$ .

Il est possible également de démontrer la conservation de  $\sin \chi$  à l'aide des équations du mouvement (3.21). En utilisant, dans le cas d'un indice radial ( $\partial n / \partial \phi = 0$ ), les relations (3.21.2) et (3.21.3), nous pouvons obtenir une expression analytique de la composante azimutale du vecteur  $\mathbf{u}$ , soit :

$$\begin{aligned} \frac{du_\phi}{u_\phi} &= -\frac{dn}{n} - \frac{dr}{r} \implies \ln u_\phi = -\ln n(r) - \ln r \\ &\implies u_\phi = \frac{C}{rn(r)}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dans le cas intégrable, la valeur de  $u_\phi$  sur le bord de la cavité, à l'instant initial  $t_0$ , est égale à  $\sin \chi_0$ . Nous pouvons ainsi calculer la constante d'intégration  $C$  et obtenir

l'expression finale de  $u_\phi$ , soit :

$$\boxed{u_\phi = \frac{an(a)}{rn(r)} \sin \chi_0} \quad (3.35)$$

Au prochain point d'intersection avec le bord de la cavité, la composante azimutale du vecteur  $\mathbf{u}$  prend la valeur  $\sin \chi_1$ . En utilisant la relation (3.35) nous pouvons en déduire que  $\sin \chi_1 = \sin \chi_0$ , soit :

$$u_{\phi_1} = \sin \chi_1 = u_\phi(r = a) = \sin \chi_0. \quad (3.36)$$

Nous avons vu ici une première utilisation de la relation (3.35). Il faut noter que cette relation est la seule expression analytique que nous avons pu obtenir à partir des équations du mouvement (3.21). Il aurait été utile d'en trouver d'autres comme les fonctions  $r(\phi)$ ,  $\phi(s)$  ou  $r(s)$ . Mis à part le cas homogène, que nous avons étudié en détails, et quelques cas de profils d'indice simple, ce travail nous a été impossible.

### b) Trajectoires

Nous avons vu la signature des trajectoires régulières, dans la section de Poincaré, relatives aux billards inhomogènes intégrables. Nous allons voir quelle est la forme de ces trajectoires dans l'espace réel et indiquer quelques-unes de leurs propriétés.

Les trajectoires quasi-périodiques qui existent dans le cas intégrable sont du type (*Whispering Gallery*). Ces trajectoires sont confinées près de la frontière de la cavité et ne touchent pas le centre de celle-ci. Elles forment donc une caustique circulaire de rayon  $r_c$ . La trajectoire est tangente à cette courbe en tout point tel que le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  ne possède pas de composante radiale  $u_r$ . Nous pouvons utiliser cette définition pour déterminer le rayon de la caustique en résolvant l'équation  $u_r = 0$ . Puisque  $\mathbf{u}$  est un vecteur unitaire, il est plus facile d'utiliser la relation (3.35) pour trouver la valeur de ce rayon.  $r_c$  est donc simplement la solution de l'équation :

$$u_\phi(r) = 1 \implies r_c n(r_c) = an(a) \sin \chi_0 \quad (3.37)$$

Les figures (3.4-a, 3.4-b, 3.4-c) montrent quelques trajectoires quasi-périodiques dans le cas d'un milieu d'indice donné par la relation (3.32), avec les paramètres :  $n_0 = 1.5$ ,  $\delta n = 1.0$  et  $w = a$ . Les trois trajectoires correspondent à trois rayons différents de la caustique, correspondant aux valeurs de l'angle d'incidence initial  $\chi_0$  suivantes : a)  $\chi_0 = \pi/11.2$ , b)  $\chi_0 = \pi/3.2$ , c)  $\chi_0 = \pi/2.2$ . Dans ce cas de profil d'indice, et avec ces paramètres, le rayon de caustique est proportionnel à  $\sin \chi_0$ . Ce comportement n'est pas général et dépend de la forme d'inhomogénéité à l'intérieur de la cavité.

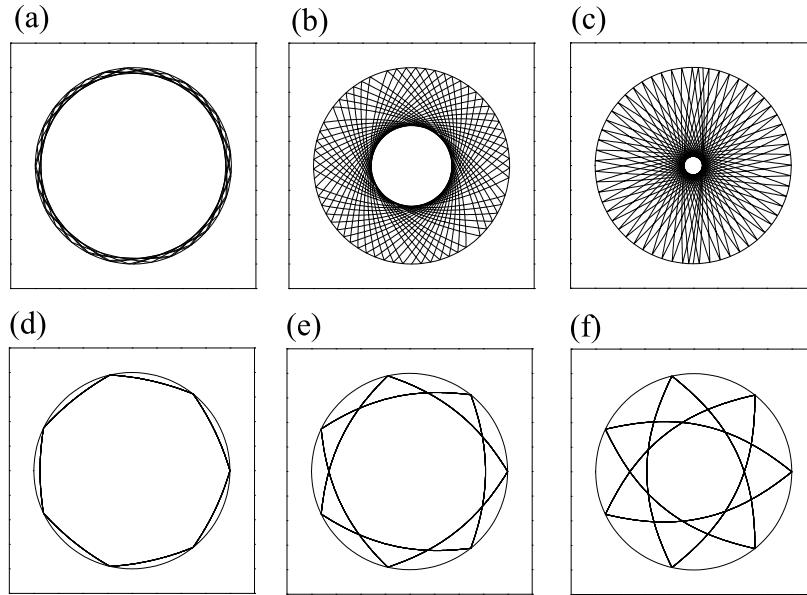


FIG. 3.4 – Trajectoires typiques dans un billard intégrable inhomogène.

Les trajectoires périodiques qui existent se présentent sous deux formes typiques : des trajectoires de type *polygone* et des trajectoires de type *étoile*. Pour comprendre cette distinction, voyons comment une trajectoire se construit à partir d'une condition initiale donnée.

La donnée d'une position initiale  $\phi_0$  et d'un angle d'incidence particulier  $\chi_0$  définit une trajectoire périodique de période  $k$ . Cette trajectoire rencontre le bord de la cavité en un ensemble de  $k$  points équidistants, définis par les positions  $\phi_i = \phi_0 + i(2\pi/k)$  [ $i = 0 \dots k - 1$ ]. La construction de ce réseau de points est valable pour n'importe quel profil d'indice radial, pourvu que la cavité garde sa forme circulaire. C'est donc une conséquence directe de la symétrie de rotation du système. La distinction entre les deux types de trajectoires, définis plus haut, vient de la manière de relier ce réseau de points : soit en reliant les points de proche en proche, ce qui donne les trajectoires polygone, soit par saut d'un ou de plusieurs points, ce qui donne les trajectoires étoile.

La figure (3.4-d) montre une trajectoire polygone de période 7, la figure (3.4-e) une trajectoire étoile de même période, construite par saut d'un point, et la figure (3.4-f) montre la deuxième trajectoire étoile, construite par saut de deux points. Il est clair que le nombre de trajectoires étoiles, correspondantes à une période donnée, est limité. Cette limite dépend de la valeur de la période et de sa parité.

### c) Effet de l'inhomogénéité

Le dernier aspect que nous allons étudier pour les billards inhomogènes intégrables est l'effet de l'inhomogénéité sur les trajectoires du système. Pour cela rappelons d'abord quelques propriétés concernant le cas homogène. Le point important à retenir pour cette configuration est que la dynamique du système est complètement indépendante de la valeur de l'indice  $n_0$ . Ceci peut être facilement vérifié en réécrivant les équations du mouvement (3.21) avec  $(\partial n(r, \phi)/\partial r = 0)$  et  $(\partial n(r, \phi)/\partial \phi = 0)$ . Cette propriété impose certaines restrictions aux trajectoires. La première contrainte est que la portion de trajectoire, entre deux points d'intersection successifs, est rectiligne. La deuxième contrainte concerne la condition initiale qui mène à une trajectoire périodique. L'angle d'incidence qui définit une trajectoire de période  $k$  est donné par  $\chi_0 = i\pi/k$  ( $i$  entier). Nous allons maintenant voir l'effet de l'inhomogénéité sur ces deux propriétés.

En se référant à la relation (3.10), toute trajectoire qui évolue dans un milieu d'indice de réfraction variable possède une courbure non nulle. Ainsi les portions de trajectoire entre deux points d'intersection successifs peuvent avoir des formes variables, selon le profil d'indice à l'intérieur de la cavité. Pour illustrer cette dépendance prenons l'exemple du profil donné par la relation (3.32). Deux types de trajectoires existent, suivant le signe de  $\delta n$  : des trajectoires *attirées* par le centre pour des valeurs de  $\delta n$  positives et des trajectoires qui *s'éloignent* du centre pour les valeurs négatives. Ceci peut être expliqué de deux manières différentes : la première est basée sur la concavité de la trajectoire qui change de direction avec le changement de signe. Dans le cas où  $\delta n$  est positif le gradient est dans le sens du vecteur  $-\mathbf{e}_r$ , d'où on a une concavité de la trajectoire dans le même sens. L'autre explication repose sur l'analogie entre la mécanique et l'optique. En effet, un indice  $n(r)$  défini dans l'espace un potentiel de la forme  $-n^2(r)/2$  (3.13). Pour les valeurs de  $\delta n$  positives ce potentiel a la forme d'un puits (potentiel attractif) centré à l'origine et la profondeur de ce puits augmente avec  $|\delta n|$ . Dans le cas contraire,  $\delta n < 0$ , le potentiel est moins attractif au centre que sur le bord de la cavité, les trajectoires ont tendance à s'éloigner donc du centre pour atteindre la frontière.

La figure (3.5) montre ces deux types de trajectoire dans le cas d'une trajectoire de période 3. L'indice de réfraction est donné par le profil (3.32), avec les paramètres :  $n_0 = 1.5$  et  $w = a$ . La figure (3.5-c) montre deux trajectoires attirées par le centre pour deux valeurs de  $\delta n$  :  $\delta n = 0.5$  (rouge) et  $\delta n = 1$  (vert-olive), comparées à la même trajectoire dans le cas homogène (noir). La figure (3.5-d) montre la même trajectoire dans le cas d'un  $\delta n$  négatif ( $\delta n = -0.5$ ). Dans ce cas la trajectoire, lancée du bord de la cavité, s'éloigne du centre de celle-ci. Nous remarquons dans les deux cas l'augmentation de la courbure avec  $|\delta n|$  conformément à la relation (3.10). Pour confirmer notre explication de cette distinction nous montrons sur la figure (3.5-b) une coupe du potentiel, défini par l'analogie entre la mécanique et l'optique, réalisée dans la direction  $\phi = 0$ .

Nous allons nous intéressé maintenant à l'effet de l'inhomogénéité sur les conditions initiales qui définissent une trajectoire donnée. A cause de la symétrie de rotation chaque trajectoire est définie par un angle d'incidence  $\chi$  et chaque valeur particulière de cet

angle définit une classe de trajectoire donnée. Nous avons donc établi une classification afin de mettre en évidence l'importance de l'angle  $\chi$  et de le considérer comme le seul paramètre sensible à l'inhomogénéité.

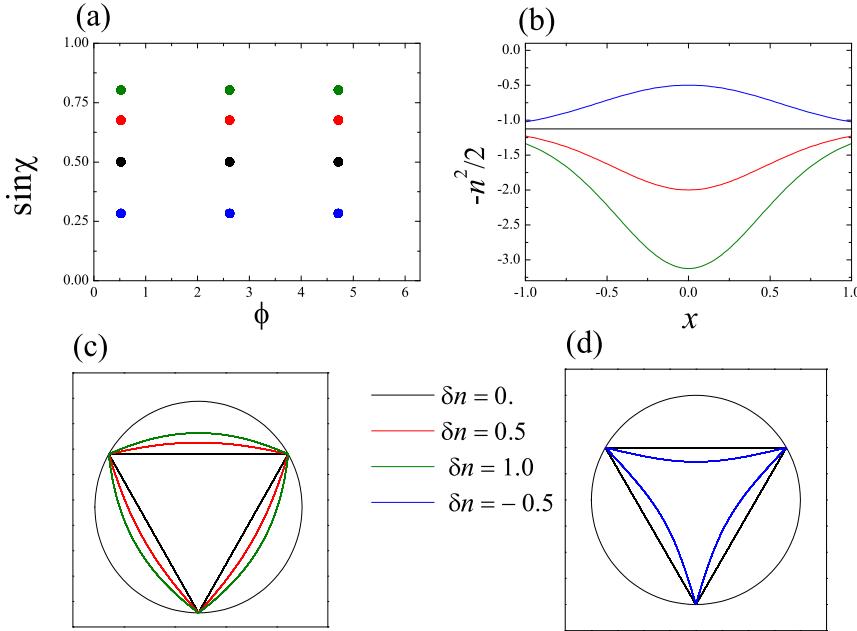


FIG. 3.5 – Influence du signe de  $\delta n$  sur la forme d'une trajectoire de période 3 et du potentiel équivalent à l'indice de réfraction.

Pour les trajectoires périodiques, une classe est caractérisée par la période et par la forme de celles-ci. Nous avons noté chaque classe X-i-j : X est une lettre qui correspond à la nature de la trajectoire. Elle est remplacée par P pour les trajectoires polygone et E pour les trajectoires étoile. i est la période et j correspond au nombre de saut effectué pour la construire. Une classe notée P-7-0 correspond, par exemple, à une infinité de trajectoires de type polygone et de période 7 et E-7-2 aux trajectoires de type étoile construites par un saut de deux points semblable à celle montrée sur la figure (3.4-f). Pour les trajectoires quasi périodiques, le seul critère de classification est le rayon de la caustique  $r_c$ . Une classe de trajectoire quasi-périodique correspond donc à une valeur de  $r_c$  donnée. La relation (3.37) assure un lien direct entre l'angle d'incidence  $\chi$  et ce rayon. L'effet de l'inhomogénéité sur l'un affecte automatiquement l'autre.

Une fois que nous avons décrit nos critères de classification des trajectoires régulières, nous allons étudier l'effet de l'inhomogénéité sur l'angle d'incidence  $\chi$ . Pour le pro-

fil d'indice donné par la relation (3.32) l'inhomogénéité est caractérisée par deux paramètres : l'amplitude de la Gaussienne  $\delta n$  et sa largeur  $w$ .

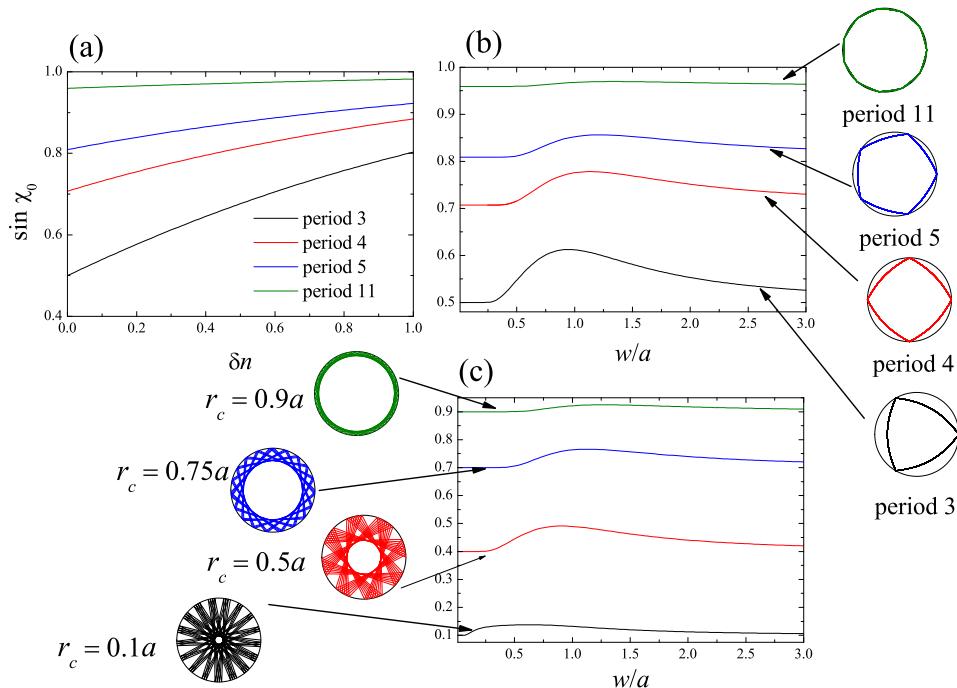


FIG. 3.6 – Variation de  $\sin \chi$  en fonction de l'amplitude de la Gaussienne  $\delta n$  et de sa largeur  $w$ . Cas des trajectoires périodique et quasi-périodique.

La figure (3.6) montre la variation de  $\sin \chi$  en fonction de ces deux paramètres. La seule contrainte imposée est que la trajectoire garde la même classe en faisant varier  $\delta n$  et  $w$ . La figure (3.6-a) montre l'augmentation de  $\sin \chi$  en fonction de  $\delta n$  pour un ensemble de trajectoires périodiques. Notre explication à ce comportement est basée sur la variation de la courbure en fonction du gradient d'indice. L'idée est donc la suivante : rappelons nous que pour construire une trajectoire périodique, il faut relier le même réseau de points quel que soit le profil d'indice à l'intérieur de la cavité. En augmentant la valeur de  $\delta n$  le potentiel, donné par (3.13), devient plus attractif au centre et donc la courbure augmente. Pour relier deux points du réseau, qui eux restent fixes, nous devons augmenter l'angle d'incidence  $\chi$ .

Nous remarquons que le taux de variation, de  $\sin \chi$  en fonction de  $\delta n$ , est plus importante pour des trajectoires associées à des angles  $\chi$  petits. Ces trajectoires visitent des régions de la cavité qui subissent une grande variation d'indice (potentiel) comme

la période P-3-0. La variation est moins importante pour des trajectoires qui visitent des régions proches de la cavité, où la variation d'indice n'est pas importante, comme la période P-11-0. La figure (3.5-b) illustre la variation du potentiel à l'intérieur de la cavité.

La variation de l'angle d'incidence en fonction de  $\delta n$  a pour conséquence de modifier la section de Poincaré. L'ensemble des points qui représentent une trajectoire périodique donnée se déplacent de manière verticale en variant la valeur de  $\delta n$ . La figure (3.5-a) montre ce déplacement dans le cas d'une trajectoire P-3-0.

Les figures (3.6-b) et (3.6-c) montrent l'effet de la largeur de la Gaussienne  $w$  sur un ensemble de trajectoires, périodiques et quasi-périodiques, de classes différentes. Nous remarquons que le comportement de  $\sin \chi$  par rapport à  $w$  est très particulier. Il présente un palier entre la valeur  $w = 0$  et une valeur critique  $w_c$  ainsi qu'un extremum à une valeur  $w_{ext}$ . Nous allons donc tenter d'expliquer qualitativement ces caractéristiques en nous basant toujours sur la forme du profil d'indice et son gradient. Pour une petite valeur de  $w$ , tendant vers 0, il existe une région très large de la cavité qui possède un indice constant  $n_0$ . En augmentant les valeurs de  $w$ , à partir de cette limite, toutes les trajectoires classiques qui possèdent un rayon de caustique tel qu'elles restent confinées dans cette région homogène ne changent pas leurs valeurs de  $\sin \chi$ . Ce régime peut persister en augmentant les valeurs  $w$  jusqu'à ce que la largeur atteigne une valeur  $w_c$  critique où ces mêmes trajectoires commencent à voir un gradient d'indice qui va changer leurs valeurs de  $\sin \chi$ . Comme le montre la figure (3.7) la trajectoire classique, de rayon de caustique  $r_c = 0.5a$  voit un milieu homogène d'indice  $n_0$  pour les valeurs de  $w = 0.01a$  et  $w = 0.1a$  et commence à voir un gradient d'indice pour des valeurs de  $w$  voisines de  $(0.5a)$ . Evidemment, la valeur de  $w_c$  dépend du rayon de la caustique de la trajectoire à  $n = n_0 = const$  qui correspond à  $w = 0$ .  $w_c$  augmente si le rayon de la caustique augmente. En faisant varier  $w$ ,  $\sin \chi$  passent par un extremum. Ceci vient du fait que pour ces deux limites le milieu devient homogène avec un indice de réfraction :

$$\begin{cases} n(r) = n_0 & w \longrightarrow 0 \\ n(r) = n_0 + \delta n & w \longrightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.38)$$

Rappelons que dans le cas d'un milieu homogène la dynamique classique du rayon lumineux est indépendante de la valeur de l'indice. Pour obtenir une trajectoire périodique de période donnée où une trajectoire quasi-périodique avec un rayon de caustique donné il faut utiliser la même condition initiale  $\sin \chi$  quel que soit la valeur de l'indice.

Si on impose à une trajectoire classique d'avoir un rayon de caustique constant, égal au rayon correspondant au cas homogène ( $r_c = a \sin \chi$ ),  $\sin \chi$  part d'une valeur donnée à  $w = 0$  pour atteindre la même valeur à  $w \longrightarrow +\infty$ . Ceci explique évidemment le passage par un extremum. La nature de cet extremum dépend du signe de  $\delta n$ . C'est un maximum pour  $\delta n$  positif et un minimum pour  $\delta n$  négatif.

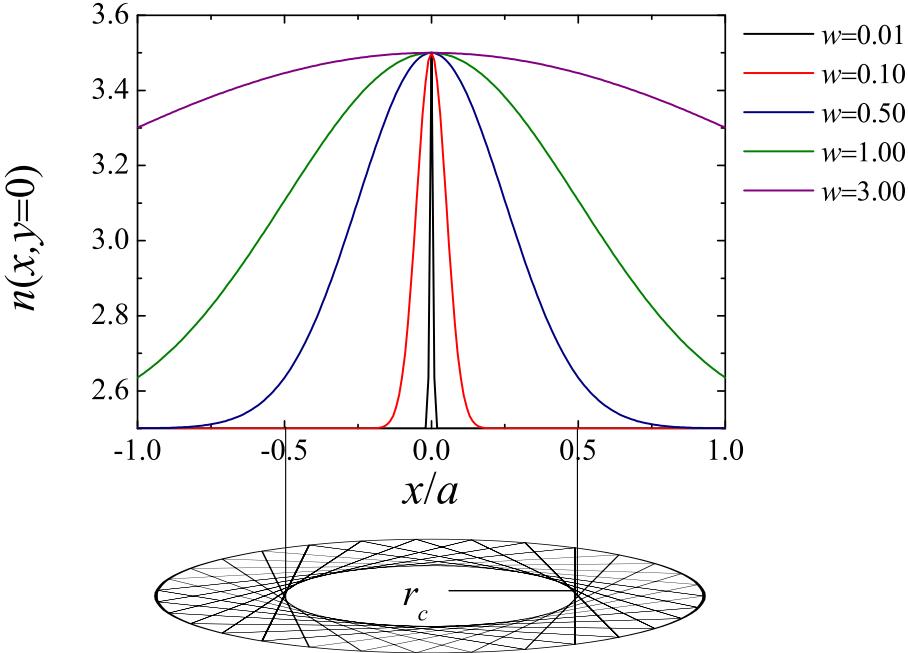


FIG. 3.7 – Coupe du profil d’indice à l’intérieur de la cavité, dans la direction  $\phi = 0$ , tracée pour différentes valeurs de la largeur de la gaussienne  $w$ .

### 3.3.2 Cas non-intégrable

Après avoir défini les conditions pour lesquelles un billard inhomogène est intégrable, nous allons nous intéresser au scénario de transition vers un système non intégrable. Cette transition se fait par l’application d’une perturbation sur le système initial. Les études précédentes ont présenté cette perturbation comme une déformation de la cavité circulaire . Dans notre étude nous proposons un nouveau scénario de transition basé sur la notion de perturbation du milieu à l’intérieur de la cavité.

Ce scénario est basé sur la notion de conservation du moment cinétique reliée à l’existence d’une symétrie de rotation dans le système. Dans les cas intégrables, cette symétrie est assurée par la forme circulaire de la cavité et la dépendance radiale de l’indice de réfraction.

Nous proposons donc de briser cette symétrie, en introduisant une dépendance angulaire dans la forme de l’indice  $n = n(r, \phi)$ , tout en gardant une cavité circulaire. Dans le cas d’un profil d’indice donné par la relation (3.30), la brisure de la symétrie de rotation, qui engendre la transition vers le chaos, se fait de deux manières différentes : soit par la dissymétrie de la Gaussienne ( $w_x/w_y \neq 1$ ), soit par le déplacement de son

centre par rapport au centre de la cavité ou une combinaison de ces deux effets.

	$w_x$	$w_y$	$x_0$	$y_0$	intégrabilité
profil 0	$w$	$w$	0	0	oui
profil I	$w$	$\epsilon w$	0	0	non
profil II	$w$	$w$	$\neq 0$	0	non
profil III	$w$	$w$	0	$\neq 0$	non
profil IV	$w$	$w$	$\neq 0$	$\neq 0$	non
profil V	$w$	$\epsilon w$	$\neq 0$	$\neq 0$	non

TAB. 3.1 – Combinaisons du profil d’indice (3.30), qui représente l’ensemble des systèmes non intégrables.

Le tableau (3.1) donne les différents profils possibles, donnés par la relation (3.30), représentatifs de ces deux effets. Le profil 0 représente le cas intégrable où l’indice ne dépend que de la variable  $r$ . Le profil I représente l’effet de la dissymétrie de la Gaussienne,  $\epsilon = w_y/w_x$  est le rapport des deux largeurs.  $\epsilon > 1$  pour une Gaussienne plus large sur l’axe  $Oy$  et  $\epsilon < 1$  pour une Gaussienne plus large sur l’axe  $Ox$ . Le profil II représente le déplacement du centre de la Gaussienne par rapport au centre du cercle sur l’axe  $Ox$  uniquement. Le profil III représente le déplacement sur l’axe  $Oy$ . Le profil IV représente le déplacement dans une direction quelconque, fixée par l’angle  $\alpha = \arctan(y_0/x_0)$  par rapport à l’axe  $Ox$ . Le profil V représente le cas général qui combine les deux effets. Dans le cas d’une cavité circulaire le profil I avec  $\epsilon > 1$  est équivalent au profil I avec  $\epsilon < 1$  et le profil III est équivalent au profil II par une rotation d’un angle  $\pi/2$ .

Comme nous l’avons déjà présenté dans le chapitre 2, la transition vers un régime irrégulier dans les systèmes hamiltoniens se fait de manière spécifique selon le scénario de KAM. Pour les billards inhomogènes à cavités circulaires ce scénario se traduit par la destruction et la déformation des lignes horizontales, signatures des trajectoires régulières dans la section de Poincaré, et l’apparition de nouvelles courbes invariantes.

Ces déformations sont le résultat de la nouvelle application de Poincaré  $T_{\epsilon_j}$ . Celle-ci dépend, évidemment, de tous les paramètres de perturbation  $\epsilon_j$ , donnés dans le cas du profil (3.30) par  $(x_0, y_0, \epsilon)$ , et ne préserve pas la variable  $\sin \chi$ . A cause de la conservation des aires dans les systèmes hamiltoniens, chaque déformation de ligne horizontale s'accompagne également de l'apparition d'un nombre de points elliptiques et hyperboliques, qui constituent les nouvelles trajectoires périodiques stables et instables du système par l'application  $T_{\epsilon_j}$ , et l'apparition de la mer chaotique se fait au niveau des points fixes dits hyperboliques (voir section 2.1.3.b).

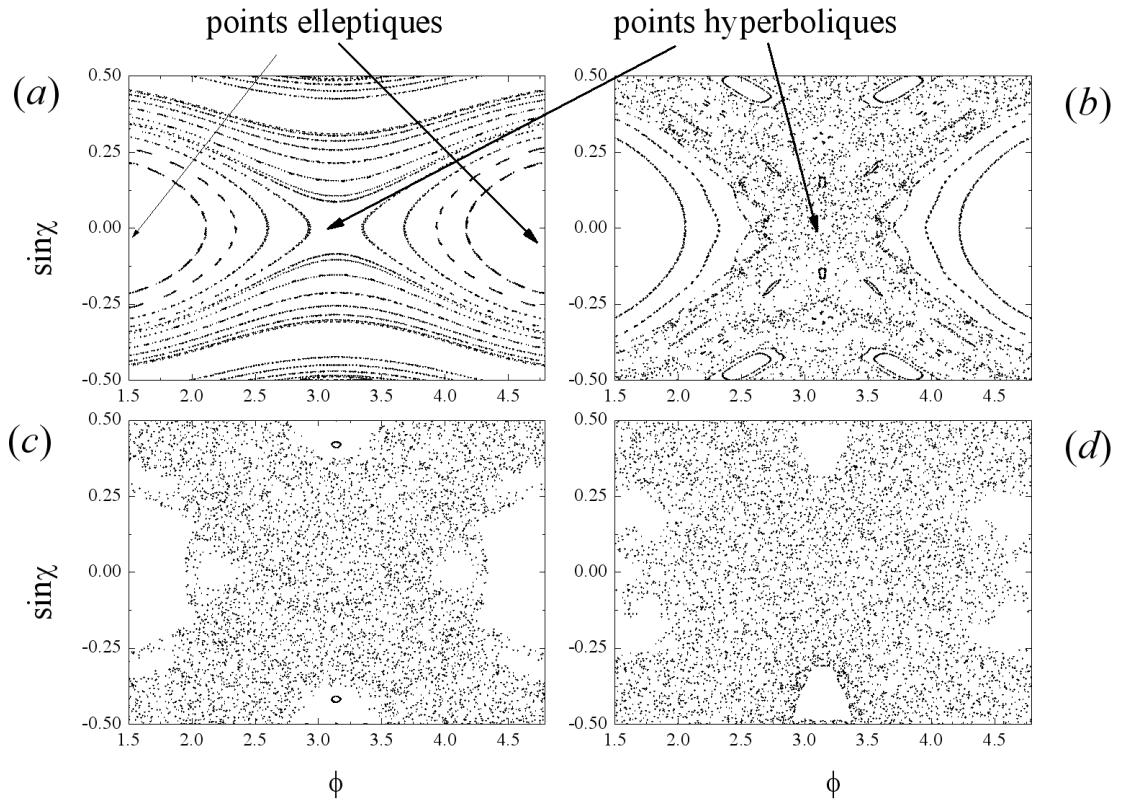


FIG. 3.8 – Déformation de la ligne horizontale  $\sin \chi_0 = 0$  et apparition de la mer chaotique au niveau du point hyperbolique  $\phi = \pi$ . Cas d'un milieu d'indice donné par le profil II ( $n_0 = 1.5, \delta n = 1, w = a$ ) : a)  $x_0 = 0.25a$ , b)  $x_0 = 0.50a$ , c)  $x_0 = 0.75a$ , d)  $x_0 = a$ .

La figure (3.8) montre la destruction de la ligne horizontale,  $\sin \chi = 0$ , dans le cas d'un milieu d'indice donné par le profil II avec les paramètres :  $n_0 = 1.5$ ,  $w = a$  et  $\delta n = 1$ . Cette ligne représentait l'ensemble des périodes 2 du cas intégrable. Cette destruction est accompagnée par l'apparition de la nouvelle période 2 stable (2 points elliptiques à  $\phi = \pi/2$  et  $\phi = 3\pi/2$ ) et la nouvelle période 2 instable (2 points hyperboliques à  $\phi = 0$  et  $\phi = \pi$ ). En augmentant la perturbation  $x_0$  l'apparition de la mer chaotique se fait de manière progressive au niveau des points hyperboliques pour

envahir une proportion de plus en plus grande de la section de Poincaré.

### a) Section de Poincaré

Pour mettre en évidence le scénario de KAM, nous avons tracé les sections de Poincaré associées à différents profils. Nous nous sommes spécialement intéressé aux profils (I, II), ceci est dû au fait que dans ces configurations, la transition vers un régime chaotique dépend d'un seul paramètre de perturbation, à savoir :  $\epsilon$  pour le profil I,  $x_0$  pour les profils II. La figure (3.9) représente différentes sections de Poincaré relatives à

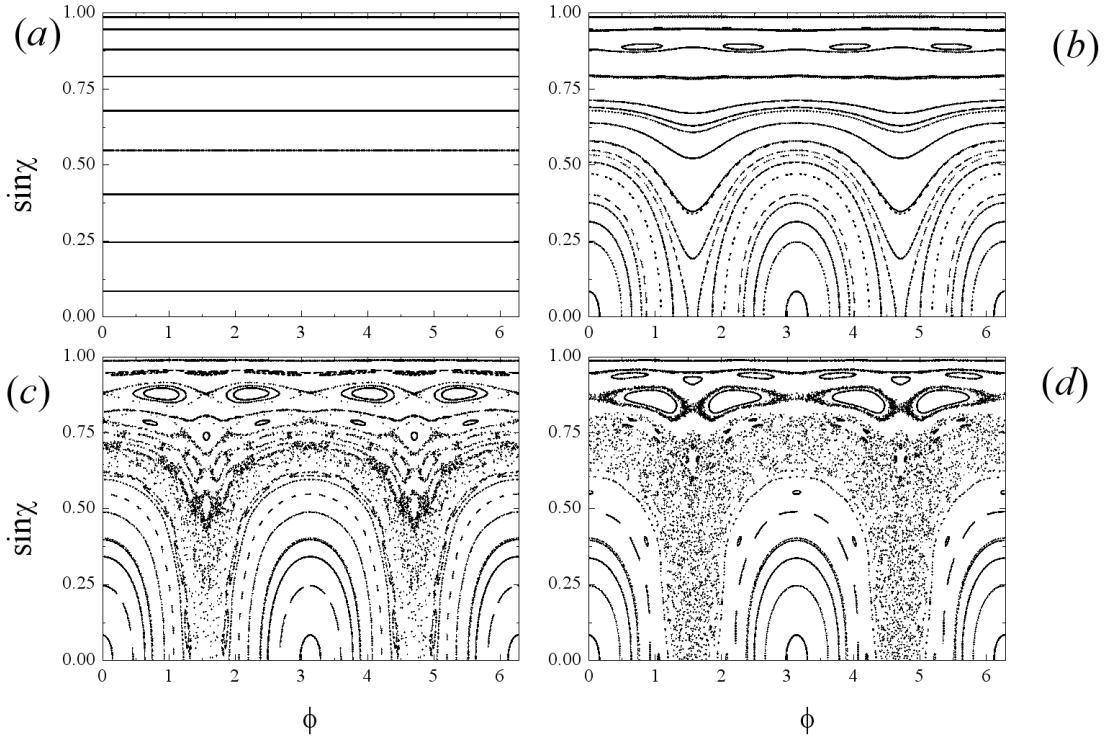


FIG. 3.9 – Transition vers le chaos par dissymétrie de la perturbation gaussienne. a) le cas intégrable  $\epsilon = 1.0$ , b)  $\epsilon = 1.25$ , c)  $\epsilon = 2.0$ , d)  $\epsilon = 8.0$ .

l'effet de dissymétrie de la Gaussienne (profil I) avec  $\epsilon > 1$ . La figure (3.10) représente différentes sections de Poincaré relatives à l'autre effet, à savoir le déplacement du centre de la Gaussienne par rapport au centre de la cavité sur l'axe  $Ox$  (profil II). Ces sections sont tracées pour le même ensemble de conditions initiales avec une amplitude de perturbation  $\delta n = 1$ , un indice de base  $n_0 = 1.5$  et une largeur  $w = a$ . Ces sections de Poincaré possèdent la signature particulière de la dynamique hamiltonienne. A faible perturbation nous constatons la déformation d'un grand nombre de courbes in-

variantes et l'apparition des premiers îlots qui entourent les points fixes elliptiques. En augmentant la perturbation, les courbes invariantes se détruisent progressivement pour laisser place à un ensemble de points sans structure qui forment la mer chaotique. La proportion de cette mer chaotique dans la section de Poincaré, par rapport aux régions régulières, augmente progressivement avec la perturbation et les îlots se resserrent de plus en plus autour des points représentant les trajectoires périodiques.

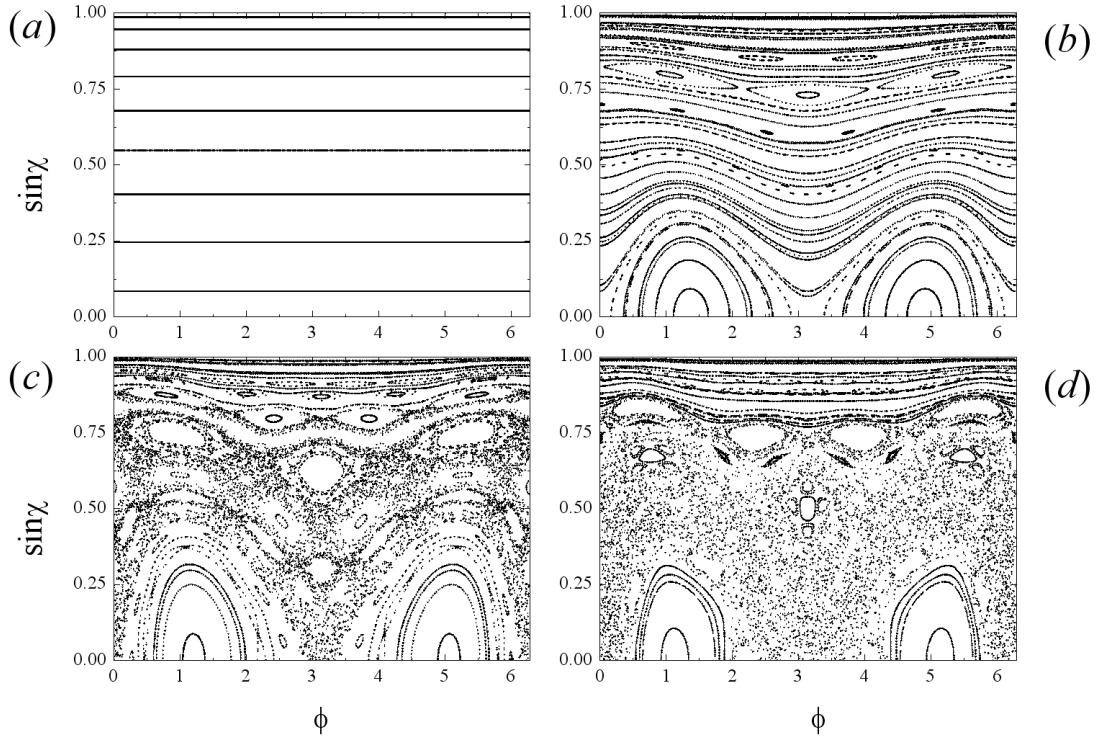


FIG. 3.10 – Transition vers le chaos par déplacement du centre de la perturbation gaussienne, par rapport au centre de la cavité, sur l'axe ( $Ox$ ). a) le cas intégrable  $x_0 = 0.0$ , b)  $x_0 = 0.25a$ , c)  $x_0 = 0.50a$ , d)  $x_0 = 0.75a$ .

Les îlots de régularité, qui entourent les points fixes elliptiques, changent de position sur la section de Poincaré. Ce changement est dû au déplacement des composantes des trajectoires périodiques localisées à l'intérieur de ces îlots. Ce déplacement est plus significatif pour l'angle d'incidence  $\chi$  que pour la position des composantes  $\phi$ . La figure (3.11) montre la variation des angles d'incidences  $\chi_i$  associés aux composantes de trajectoires périodiques de périodes 6 (3.11-a et 3.11-b) et 7 (3.11-c et 3.11-d). Cette variation est présentée en fonction des paramètres de perturbation relatifs aux profils I

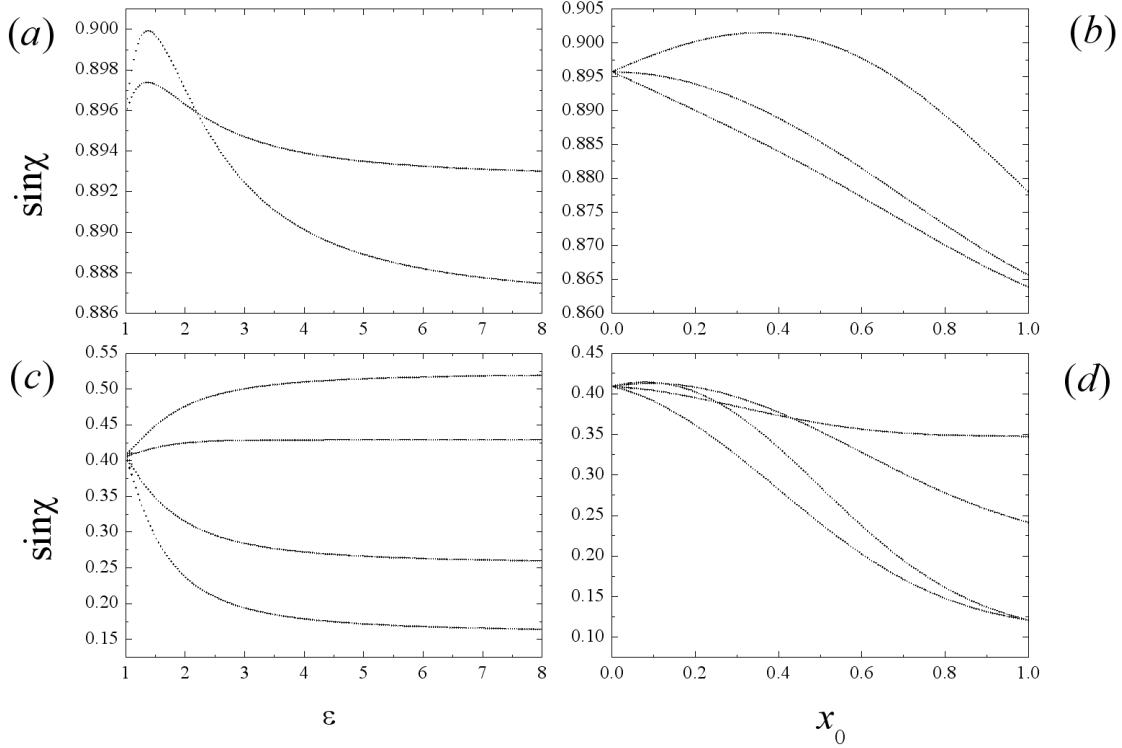


FIG. 3.11 – Variation des angles d’incidences  $\chi_i$  associés aux composantes de trajectoires périodiques. Déplacement des composantes d’une période 6 en fonction de  $\epsilon$  (a) et de  $x_0$  (b). Déplacement des composantes d’une période 7 en fonction de  $\epsilon$  (c) et de  $x_0$  (d).

et II, à savoir le taux de dissymétrie de la gaussienne  $\epsilon$  et le déplacement de son centre  $x_0$ . On notera que cette variation se fait sur différentes branches à cause de la non conservation de  $\sin \chi$ . Le nombre de branches est néanmoins inférieur au nombre de composantes (la période) et ceci pour des raisons de symétrie que nous allons étudier dans la prochaine section.

La figure (3.12) montre le déplacement de toutes les composantes d’une trajectoire de période 4, par les deux effets, et l’impact sur la trajectoire réelle associée. Celle-ci se déforme en suivant la déformation du profil d’indice à l’intérieur de la cavité.

### b) Trajectoires

La transition vers le régime chaotique implique l’apparition de nouvelles trajectoires qui n’existent pas dans le cas intégrable. Les premières trajectoires sont les trajectoires chaotiques. Ces trajectoires sont une conséquence de la non intégrabilité du système. Dans les billards, celles-ci coexistent avec les trajectoires régulières à cause du régime

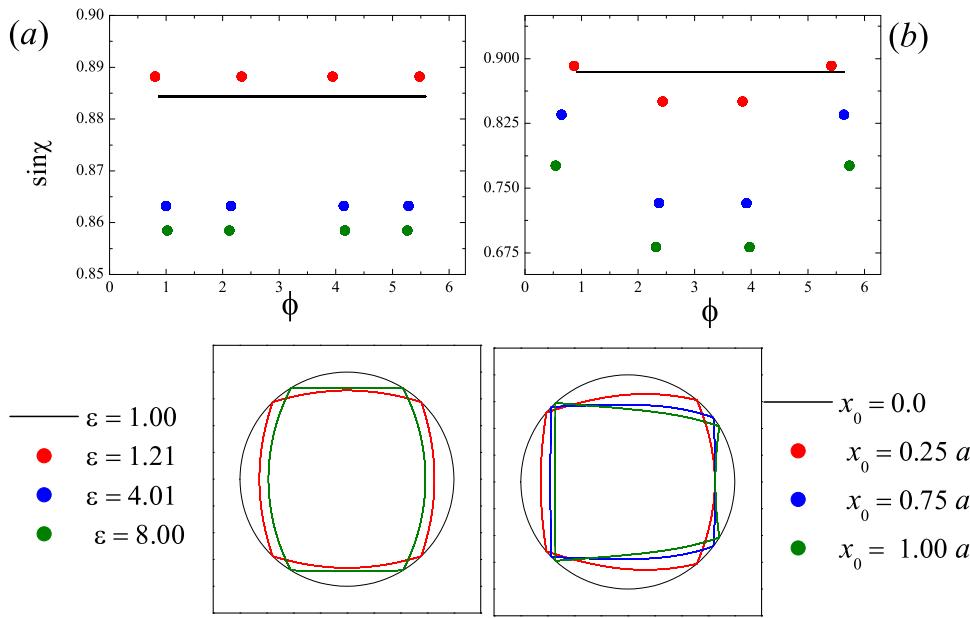


FIG. 3.12 – Déplacement de toutes les composantes d'une trajectoire de période 4 et l'impact sur la trajectoire réelle associée. a) effet de la dissymétrie b) effet du déplacement du centre de la Gaussienne sur l'axe  $Ox$ .

mixte. A faible perturbation elles apparaissent au voisinage des points hyperboliques et occupent des régions limitées dans l'espace des phases. A cause du théorème de KAM la plupart des courbes invariantes ne sont pas détruites et présentent des barrières aux trajectoires chaotiques dans la section de Poincaré. En augmentant la perturbation, la mer chaotique occupe une portion plus importante dans l'espace des phases et contient l'ensemble des trajectoires périodiques instables du système.

En plus des trajectoires chaotiques, de nouvelles trajectoires régulières apparaissent dans le système. elles ont une signature particulière dans l'espace des phases et une morphologie différente des trajectoires qui existaient dans le cas intégrable. Les nouvelles trajectoires quasi-périodiques sont appelées trajectoires à caustique hyperboliques car elles forment une caustique en forme d'hyperbole (voir figure 3.2). Elles sont représentées dans la section de Poincaré par des courbes invariantes fermées. Celles-ci entourent les trajectoires de période 2 stables et disparaissent à forte perturbation. Ces trajectoires changent de sens de rotation lors de la propagation du fait qu'elles visitent la région ( $\sin \chi < 0$ ). Dans le cas d'une cavité circulaire, ce type de propagation n'existe que dans le cas non intégrable à cause de la non conservation de  $\sin \chi$ . En effet l'intégrabilité impose à  $\sin \chi$  de se déplacer uniquement sur une ligne horizontale et ne

peut donc pas changer de valeur algébrique.

Les nouvelles trajectoires périodiques (autres que les trajectoires de type polygone ou de type étoile) sont une conséquence d'un phénomène, propre aux systèmes dont la dynamique dépend d'un paramètre variable, connu sous le nom de bifurcation. Ce type de bifurcation est déjà connu pour les billards qui constituent des systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté. Les cas typiques de ces bifurcations ont été répertoriés par Meyer [64] et ont été mise en évidence dans d'autres systèmes hamiltoniens [59].

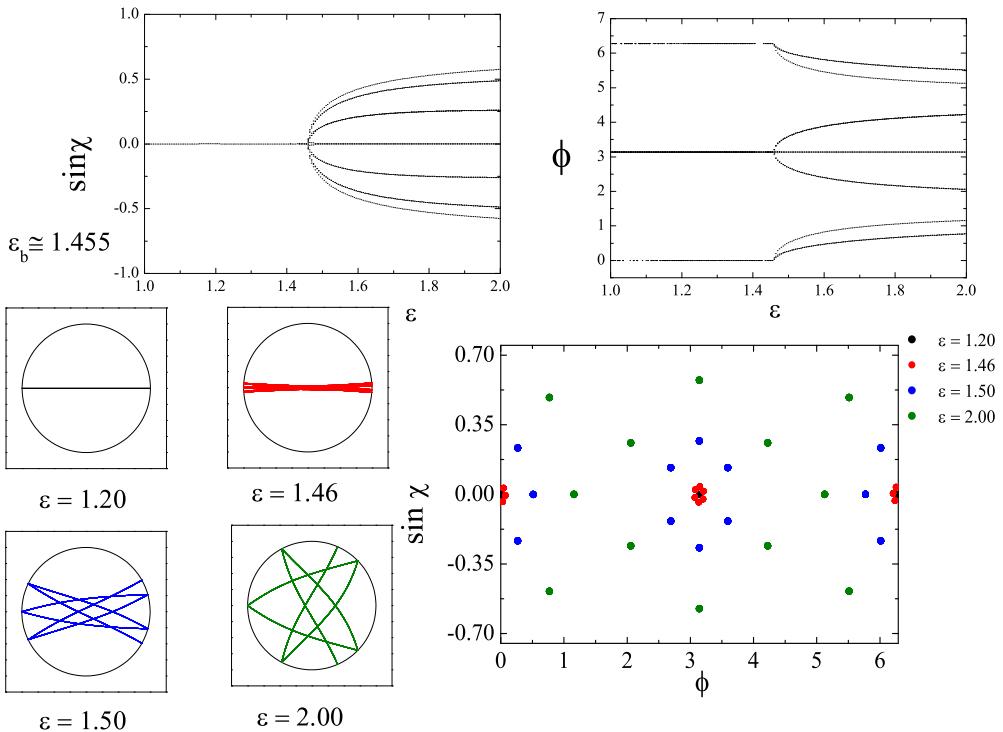


FIG. 3.13 – Bifurcation de la trajectoire de période 2 (stable) en une trajectoire de type croisé C-12-5 par l'effet de la dissymétrie. L'indice de réfraction est donné par le profil I, avec :  $n_0 = 1.5$ ,  $\delta n = 1.0$  et  $w = a$ . La bifurcation se trouve à  $\epsilon_b \approx 1.455$ .

Dans notre étude nous allons montrer quelques cas de ces bifurcations sans faire une présentation exhaustive. Nous allons présenter deux types de bifurcation qui mettent en évidence deux types de trajectoires différentes : la bifurcation des trajectoires de période 2 et la bifurcation de trajectoires de périodes supérieures de type polygone. Les figures (3.13) et (3.14) montrent les schémas de bifurcation des trajectoires de

périodes 2 qui existent encore dans le système après la destruction de la ligne horizontale  $\sin \chi = 0$ . Cette ligne forme une limite entre deux régions correspondantes à des sens de propagation différents : le sens horaire pour  $\sin \chi < 0$  et le sens antihoraire pour  $\sin \chi > 0$ .

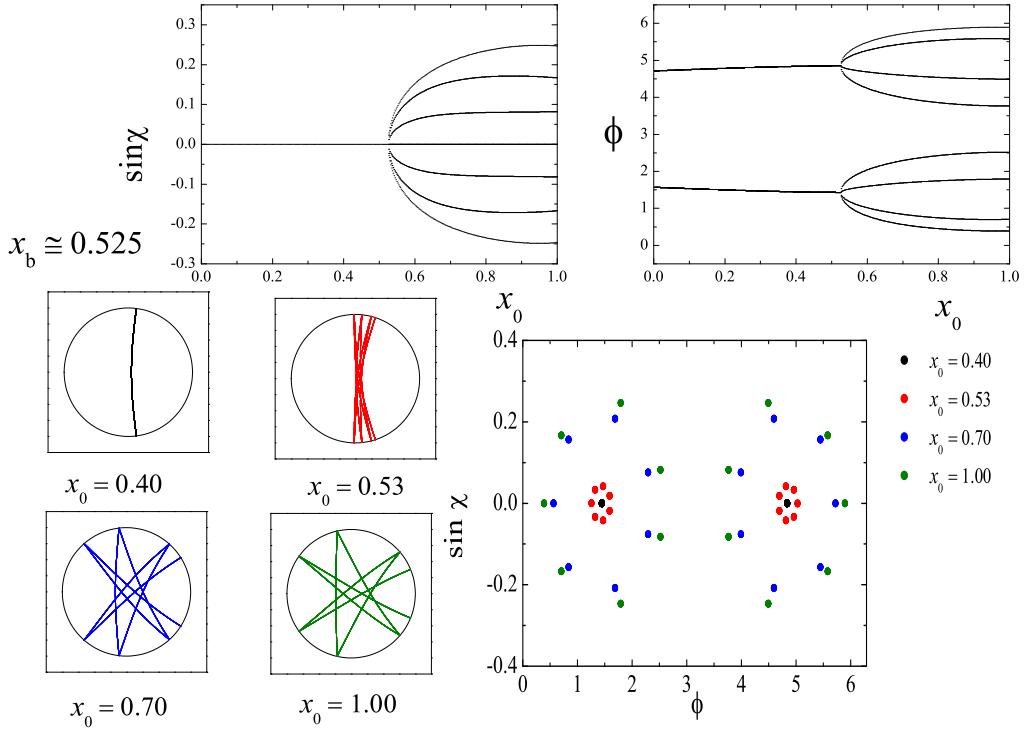


FIG. 3.14 – Bifurcation de la trajectoire de période 2 (stable) en une trajectoire C-14-8 par l’effet du déplacement. L’indice de réfraction est donné par le profil II, avec  $n_0 = 2.5$ ,  $\delta n = 0.5$  et  $w = a$ . La bifurcation se trouve à  $x_b \approx 0.525a$ .

La bifurcation des trajectoires de période 2 donne forcément naissance à de nouvelles trajectoires qui visitent ces deux régions et ceci à cause de l’apparition de nouvelles branches de part et d’autre de  $\sin \chi = 0$ . Ces nouvelles trajectoires appelées *trajectoires croisées* changent donc de sens lors de leur propagation. Elles coupent en plus la cavité en un ensemble de points de nombre inférieur à la période associée car à certains points de réflexion, la trajectoire se réfléchit et reprend la même portion incidente. Elles sont notées C-i-j, où i représente la période et j le nombre d’intersections.

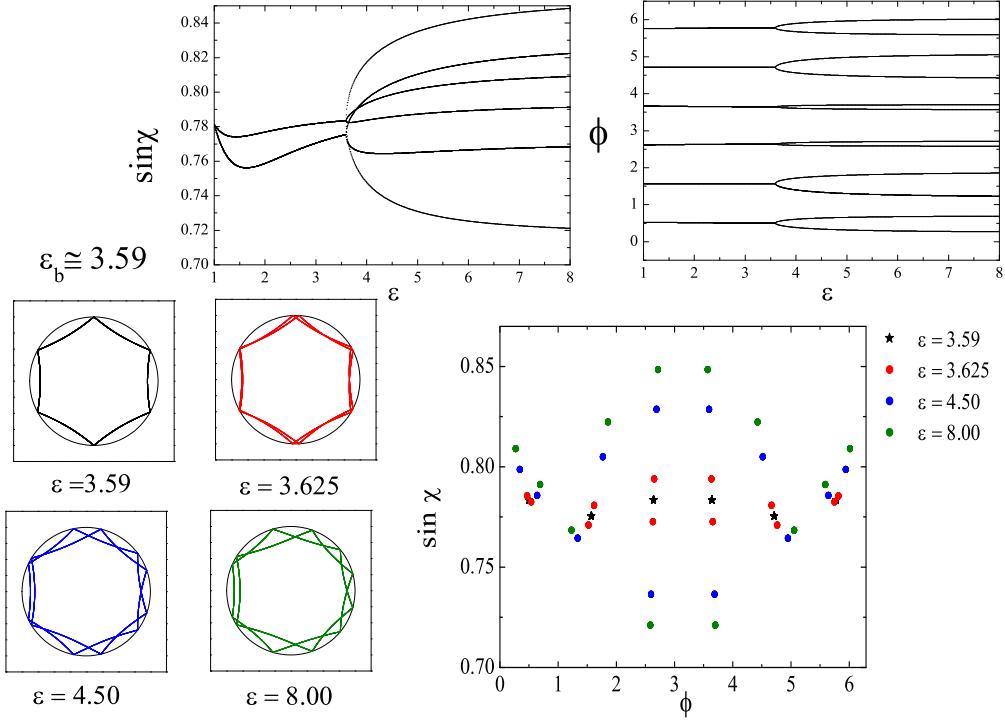


FIG. 3.15 – Bifurcation de la trajectoire de période 6 en une trajectoire de période 12 par l’effet de la dissymétrie. L’indice de réfraction est donné par le profil I, avec  $n_0 = 2.5$ ,  $\delta n = -1.0$  et  $w = a$ . La bifurcation se trouve à  $\epsilon_b \approx 3.59$ .

La figure (3.13) montre particulièrement la bifurcation de la période 2 horizontale, en une trajectoire croisée C-12-5, dans une configuration d’indice donné par le profil I. Le paramètre variable responsable de la bifurcation est donc le taux de dissymétrie de la Gaussienne  $\epsilon$ . La figure (3.14) montre par contre la bifurcation de la période 2 verticale, en une trajectoire croisée C-14-8, par le déplacement du centre de la Gaussienne caractérisé par le paramètre  $x_0$ . Dans ces deux cas, l’apparition des nouvelles trajectoires se manifeste, sur la section de Poincaré, par l’apparition d’un réseau fermé de points qui entourent la trajectoire initiale et ceci contrairement aux autres trajectoires périodiques qui forment un réseau ouvert de points. En reliant ce réseau de points nous obtenons une courbe fermée qui entoure une surface de la section de Poincaré. L’aire de cette surface augmente avec la perturbation comme le montrent les figures. Dans l’espace réel ceci se manifeste par l’apparition d’une trajectoire qui ressemble à la trajectoire initiale au voisinage de la valeur de bifurcation. En augmentant la perturbation, la nouvelle trajectoire prend une forme différente et visite des régions de la cavité loin de celles visitées par la trajectoire initiale.

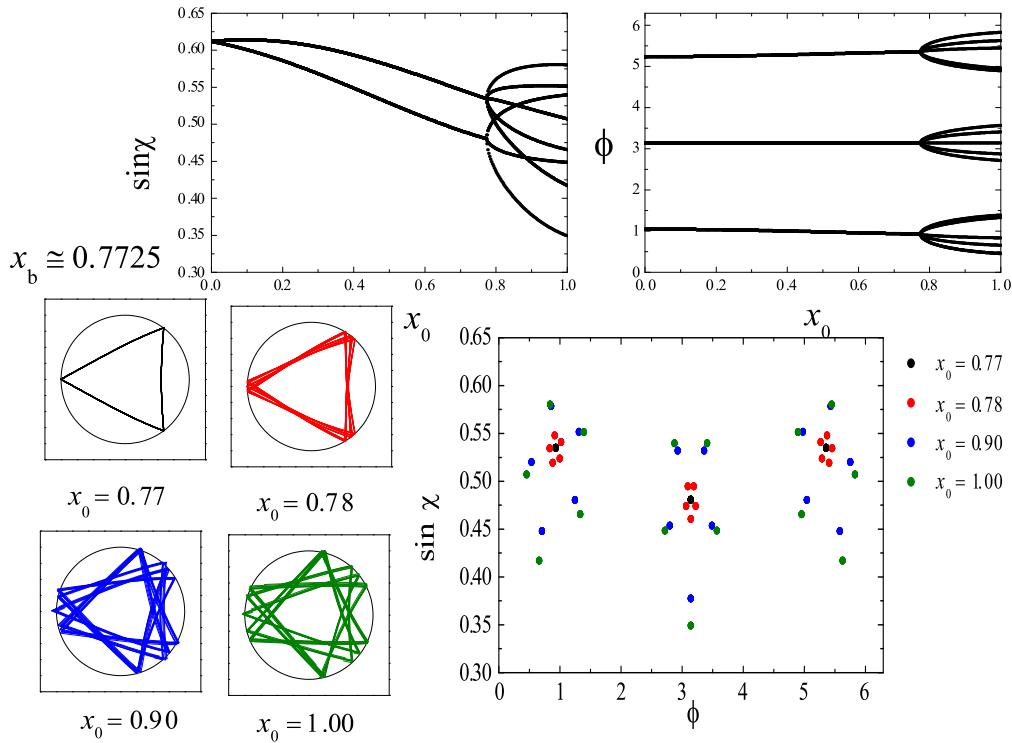


FIG. 3.16 – Bifurcation de la trajectoire de période 3 en une trajectoire de période 15 par l’effet du déplacement. L’indice de réfraction est donné par le profil II, avec  $n_0 = 2.5$ ,  $\delta n = 0.5$  et  $w = a$ . La bifurcation se trouve à  $x_b \approx 0.7725 a$ .

En plus des trajectoires de type croisé, nous avons mis en évidence d’autres trajectoires qui naissent de la bifurcation de trajectoires de périodes supérieures. Ces trajectoires ne changent pas de sens de propagation à cause de la position des trajectoires initiales dans la section de Poincaré (loin de la ligne  $\sin \chi = 0$ ). Les figures (3.15) et (3.16) montrent les schémas de bifurcation des trajectoires de périodes 6 et 3 en fonction des paramètres  $\epsilon$  et  $x_0$  relatifs aux profils d’indice I et II.

Ces schémas de bifurcation sont différents de ceux des trajectoires de période 2. Si nous nous intéressons uniquement à  $\sin \chi$ , la variation de cette variable en fonction de la perturbation est représentée, dans le cas des trajectoires de période 2, par une seule branche horizontale  $\sin \chi = 0$ . Cette branche bifurque donc en plusieurs branches de part et d’autre de celle-ci, de manière symétrique ou non, selon la symétrie du système. Dans le cas des périodes supérieures, la variation de  $\sin \chi$  est représentée par plusieurs branches qui représentent les différentes composantes de la trajectoire (revoir la figure 3.11). Chaque branche bifurque en un certain nombre de branches différent d’une branche initiale à une autre (dans la figure (3.16), 5 pour la branche supérieure et 3 pour la branche inférieure). Nous présentons dans nos figures un cas de dédoublement d’une période 6 et le quintuplement d’une période 3. Nous remarquons l’intersection

des branches représentant les composantes des nouvelles trajectoires, signature d'une nouvelle dégénérescence de la variable  $\sin \chi$ .

Finalement, nous allons parler d'un dernier aspect lié à la transition vers le régime mixte, dans les billards inhomogènes, que nous avons découvert par hasard en faisant la détection des trajectoires périodiques du système.

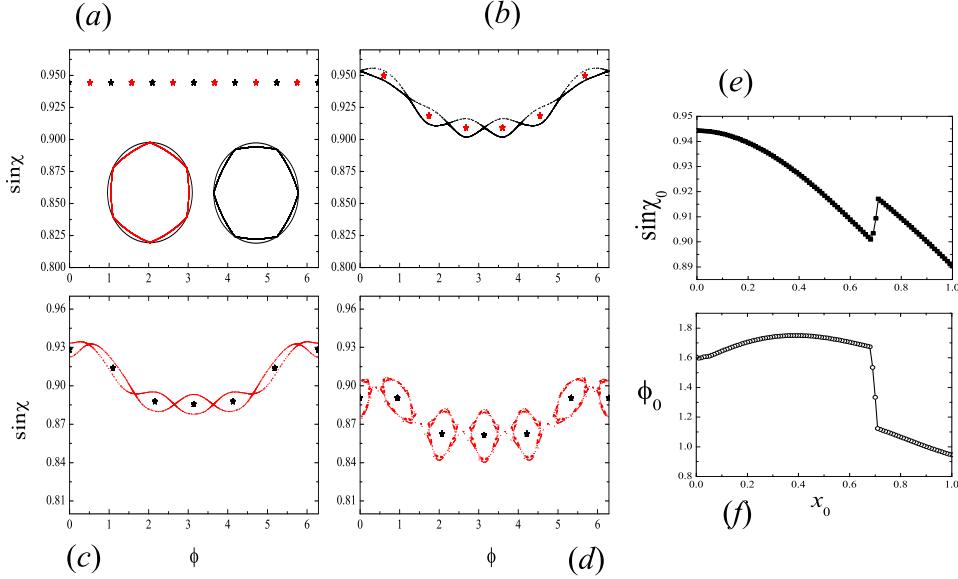


FIG. 3.17 – Changement de stabilité d'une trajectoire périodique de période 6. La trace des trajectoires sur la section de Poincaré est tracée pour les paramètres : a)  $x_0 = 0.0$ , b)  $x_0 = 0.5a$ , c)  $x_0 = 0.75a$ , d)  $x_0 = a$ .

Dans certaines configurations, nous avons constaté que la transition vers le chaos s'accompagne d'un changement de stabilité de certaines trajectoires périodiques en augmentant la perturbation. Pour illustrer ce phénomène, nous montrons dans la figure (3.17) le processus de changement de stabilité d'une période P-6-0 dans un billard inhomogène d'indice donné par le profil II avec les paramètres :  $n_0 = 1.5$ ,  $w = a$  et  $\delta n = 1.0$ . En augmentant le paramètre de perturbation  $x_0$  à partir de la valeur  $x_0 = 0$ , la déformation de la ligne horizontale  $\sin \chi \approx 0.94429$  est accompagnée de l'apparition de 6 points elliptiques, composantes de la nouvelle période 6 stable qui coupe la cavité au point  $\phi = \pi/2$ , et 6 points hyperboliques, composantes de la nouvelle période 6 instable qui coupe la cavité au point  $\phi = 0$ . A partir d'une valeur critique  $x_0 \approx 0.69a$

ces points changent de nature, la période 6 ( $\phi = 0$ ) devient stable (6 points elliptiques) et la période 6 ( $\phi = \pi/2$ ) devient instable (6 points hyperboliques). Il est intéressant de noter que la mer chaotique commence à apparaître après le changement de stabilité. Nous émettons donc l'hypothèse que si ce phénomène se produit, la valeur critique est plus grande pour des  $\sin \chi$  proches de la limite  $\sin \chi = 1$ . Ceci peut être vrai dans la mesure où dans les billards la destruction des tores de KAM se fait de manière progressive en commençant près de la limite inférieure  $\sin \chi = 0$ . Pour déterminer approximativement cette valeur critique, nous avons suivi de façon adiabatique la variation d'une composante de la période 6 en fonction de  $x_0$ . Cette variation, montré sur les figures (3.17-e,3.17-f) pour les deux variables  $\sin \chi$  et  $\phi$ , se fait en imposant la stabilité de la trajectoire. Les deux courbes présentent donc une coupure au niveau de la valeur critique qui représente le phénomène de changement de stabilité.

### c) Effet de l'inhomogénéité

Comme pour le cas intégrable (profil 0) le degré d'inhomogénéité, caractérisé par les paramètres  $\delta n$  et  $w$ , joue un rôle dans la dynamique. En plus de l'effet de déplacement des trajectoires périodiques dans la section de Poincaré (déjà rencontré dans le cas intégrable), la variation de  $\delta n$  et  $w$  joue un rôle important dans le scénario de KAM. Du fait que la nouvelle application de Poincaré  $T_{\epsilon_j}$  dépend de ces paramètres, le taux de déformation et de destruction des courbes invariantes dépend également de ceux-ci. Ceci a pour conséquence l'accélération du processus d'apparition de la mer chaotique dans la section de Poincaré.

La figure (3.18) montre l'effet du paramètre  $\delta n$  sur la forme de la section de Poincaré représentant la dynamique d'un billard inhomogène. Nous avons étudié le cas d'un indice donné par le profil II avec un déplacement du centre intermédiaire  $x_0 = 0.5 a$ . La déformation des courbes invariantes et l'apparition de la mer chaotique est de plus en plus importante avec l'augmentation de  $\delta n$ . La proportion de cette mer par rapport à toute la section augmente également avec  $\delta n$ . Nous pouvons dire que le degré de "chaoticité" du système augmente avec le degré d'inhomogénéité caractérisé par  $\delta n$ .

Il faut retenir que  $\delta n$  et  $w$  ne sont pas des paramètres de perturbation responsables de la transition vers le régime chaotique. Néanmoins ils jouent un rôle important dans tous les processus liés à cette transition. Pour les mêmes valeurs de la perturbation, ces paramètres peuvent changer le degré de chaoticité, les valeurs de bifurcation ou les valeurs critiques de changement de stabilité.

Cette observation rend l'étude des billards inhomogènes d'autant plus intéressante dans la mesure où elle nous permet d'introduire des paramètres liés à la dynamique sans être directement responsables du scénario de KAM.

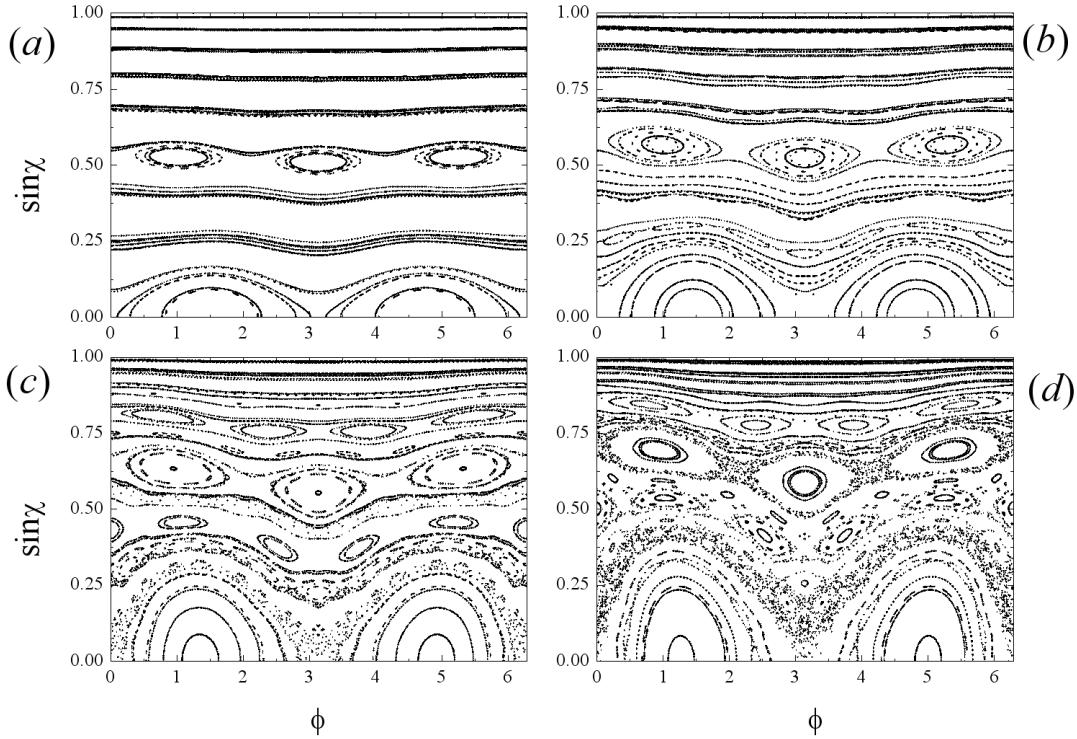


FIG. 3.18 – Effet du degré d’inhomogénéité sur la transition vers le chaos. Différentes sections de Poincaré d’un billard circulaire inhomogène d’indice donné par le profil II avec les paramètres :  $n_0 = 1.5$ ,  $w = a$ ,  $x_0 = 0.5a$ , a)  $\delta n = 0.1$ , b)  $\delta n = 0.25$ , c)  $\delta n = 0.50$ , d)  $\delta n = 0.75$ .

### 3.4 Effet de la symétrie

Cette section étudie l’effet de la symétrie sur la dynamique des billards. La brisure de la symétrie de rotation, cause de la transition vers un régime chaotique, sera accompagnée de l’apparition d’une nouvelle forme de symétrie ou la perte de toute symétrie. Chaque profil présenté dans le tableau (3.1) traduit une forme particulière de symétrie. Le profil 0 impose la symétrie de rotation, le profil I la symétrie ( $Ox[\phi \rightarrow -\phi]$  et  $Oy[\phi \rightarrow \pi - \phi]$ ), le profil II la symétrie ( $Ox[\phi \rightarrow -\phi]$ ), le profil III la symétrie ( $Oy[\phi \rightarrow \pi - \phi]$ ), le profil IV la symétrie ( $OM(x_0, y_0)[\phi \rightarrow 2 \arctan(y_0/x_0) - \phi]$ ) et le profil V représente la perte de toute forme de symétrie.

Nous allons nous intéresser particulièrement à l’impact de la symétrie sur les trajectoires périodiques du système et spécialement sur leur dégénérescence. Nous définissons ici deux types de dégénérescence qui concernent la variable  $\sin \chi$  : la *dégénérescence de composantes* et la *dégénérescence de trajectoires*. Le premier type concerne une seule tra-

symétrie du système	symétrie de la trajectoire	dégénérescence
rotation	quelconque	$\infty$
$Ox$ et $Oy$	$Ox$ et $Oy$	1
$Ox$ et $Oy$	$Ox$ ou $Oy$	2
$Ox$ et $Oy$	non	4
$Ox$	$Ox$	1
$Ox$	$Oy$	2
$Ox$	non	2
aucune	quelconque	1

TAB. 3.2 – Dégénérescence des trajectoires selon leurs propres symétries et de la symétrie du système.

jectoire périodique caractérisée par un ensemble de composantes  $(\sin \chi_i, \phi_i)$  de nombre égal à la période. Selon la symétrie, il se trouve qu'une seule valeur de  $\sin \chi$  est commune à plusieurs composantes. Nous avons rencontré ce type de dégénérescence dans le cas intégrable où quelle que soit la trajectoire, une seule valeur de  $\sin \chi$  est commune à toutes les composantes. Dans le cas non intégrable, nous avons vu que la variation de  $\sin \chi$  en fonction des paramètres de perturbations se fait sur un nombre de branche inférieur aux nombres des composantes associées à la trajectoire. Sur les figures (3.11-a) et (3.11-b) la trajectoire de période 6 est représentée par 2 branches dans le cas du profil I qui possède deux axes de symétrie et 3 dans le cas du profil II qui ne présente qu'un seul axe. Cette dégénérescence dépend de la valeur de la période et de sa parité et elle n'est pas levée automatiquement en enlevant une forme de symétrie particulière. Ceci est indiqué sur les figures (3.11-c) et (3.11-d) où la trajectoire de période 7 est représentée par 4 branches pour les deux cas de profil. La dégénérescence de composantes se manifeste sur la section de Poincaré par l'alignement des points représentant les composantes qui possèdent la même valeur de  $\sin \chi$ .

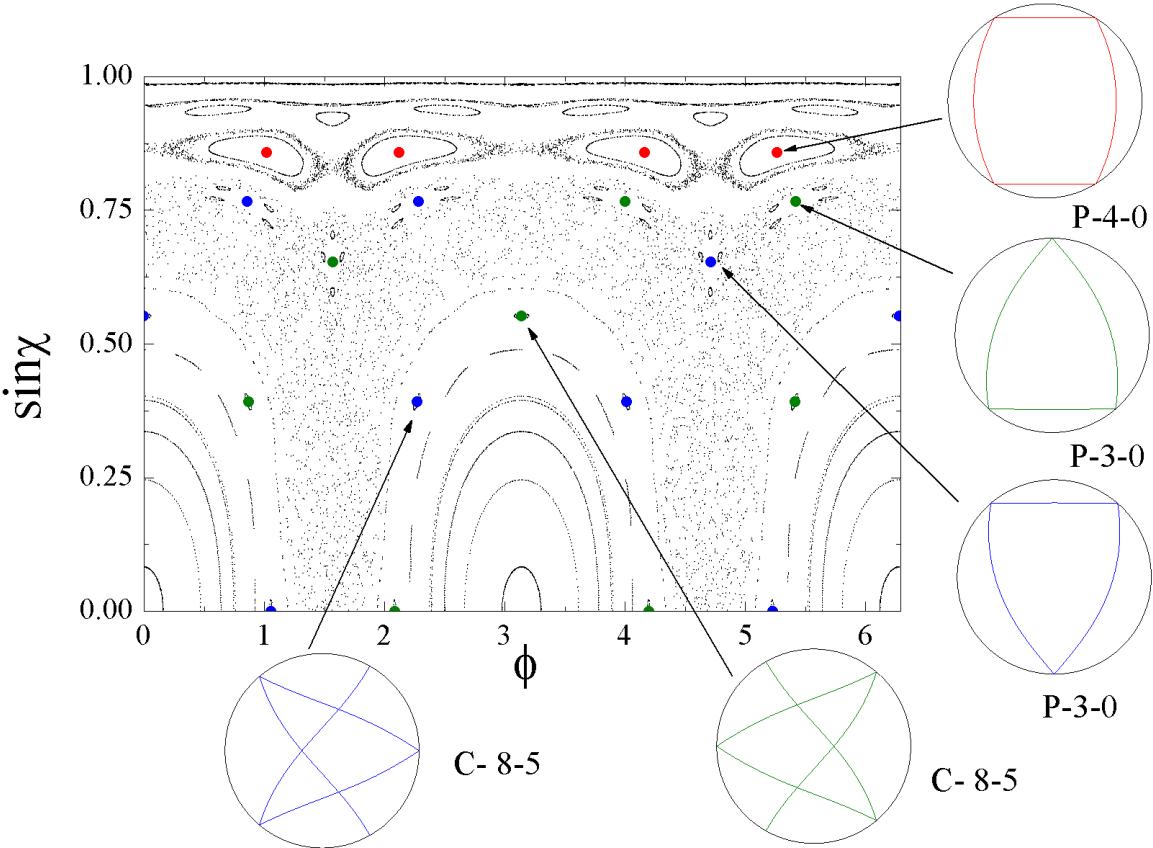


FIG. 3.19 – Dégénérescence de quelques trajectoires dans un billard qui possède deux axe de symétrie ( $Ox$  et  $Oy$ ).

La dégénérescence des trajectoires est définie comme suit : selon la symétrie plusieurs trajectoires périodiques, de même classe, possèdent les mêmes composantes en terme

d'angle d'incidences  $\chi_i$  mais se différencient par leurs points d'intersection avec la cavité  $\phi_i$ . Nous allons nous intéresser spécialement à ce type de dégénérescence qui dépend à la fois de la symétrie du problème et de la symétrie de la trajectoire elle-même.

Le tableau (3.2) présente les différents types de symétries spatiales et la dégénérescence des trajectoires selon leurs propres symétries. Nous nous sommes intéressés particulièrement aux cas d'existence de la symétrie de rotation, de deux axes de symétrie et d'un seul axe de symétrie.

Dans le cas intégrable, chaque trajectoire périodique de période  $n$  est dégénérée un nombre infini de fois. On peut construire cette ensemble infini à partir d'une seule trajectoire, caractérisée par une condition initiale  $(\phi_0, \chi_0)$ , par une simple rotation d'un angle  $\delta\phi \in [0, 2\pi]$ . Ainsi cet ensemble est défini par un seul angle initial  $\chi_0$  et une infinité de positions initiales  $\phi_0 + \delta\phi$ .

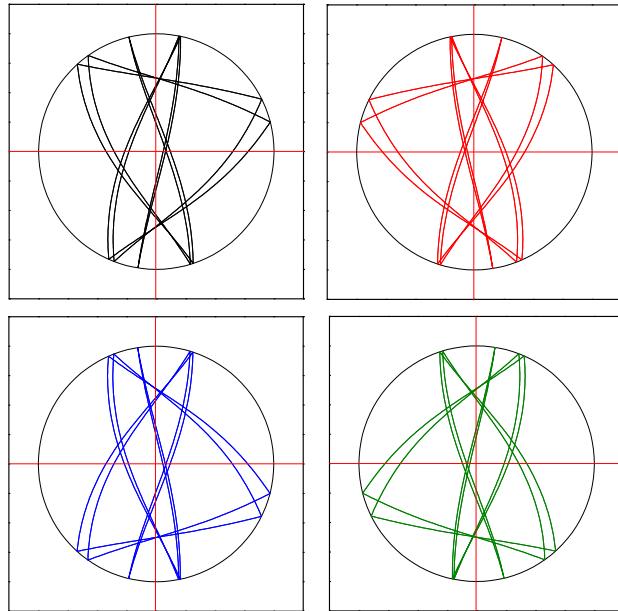


FIG. 3.20 – Dégénérescence d'une trajectoire périodique instable de période 12 qui ne possède aucune symétrie, dans un billard qui possède deux axes ( $Ox$  et  $Oy$ ).

Dans le cas où la brisure de la symétrie de rotation s'accompagne de l'apparition de deux axes de symétrie, toute trajectoire qui possède la même symétrie est dégénérée une

seule fois puisque l'image de cette trajectoire est elle-même (voir la trajectoire P-4-0, figure 3.19). Si la trajectoire est symétrique par rapport à un seul des axes de symétrie elle est alors dégénérée deux fois. On construit la deuxième trajectoire comme l'image de la première à la suite d'une réflexion par rapport à l'autre axe (voir les trajectoires P-3-0, figure 3.19). Si une trajectoire ne possède aucune symétrie (c'est généralement le cas pour les trajectoires instables qui vivent à l'intérieur de la mer chaotique), elle est alors dégénérée quatre fois. On construit la deuxième trajectoire comme l'image de la première par réflexion au premier axe, la troisième est l'image de la deuxième par réflexion au deuxième axe et la quatrième est l'image de la troisième par réflexion au premier axe (voir les trajectoires C-12-10, figure 3.20). De la même manière on peut

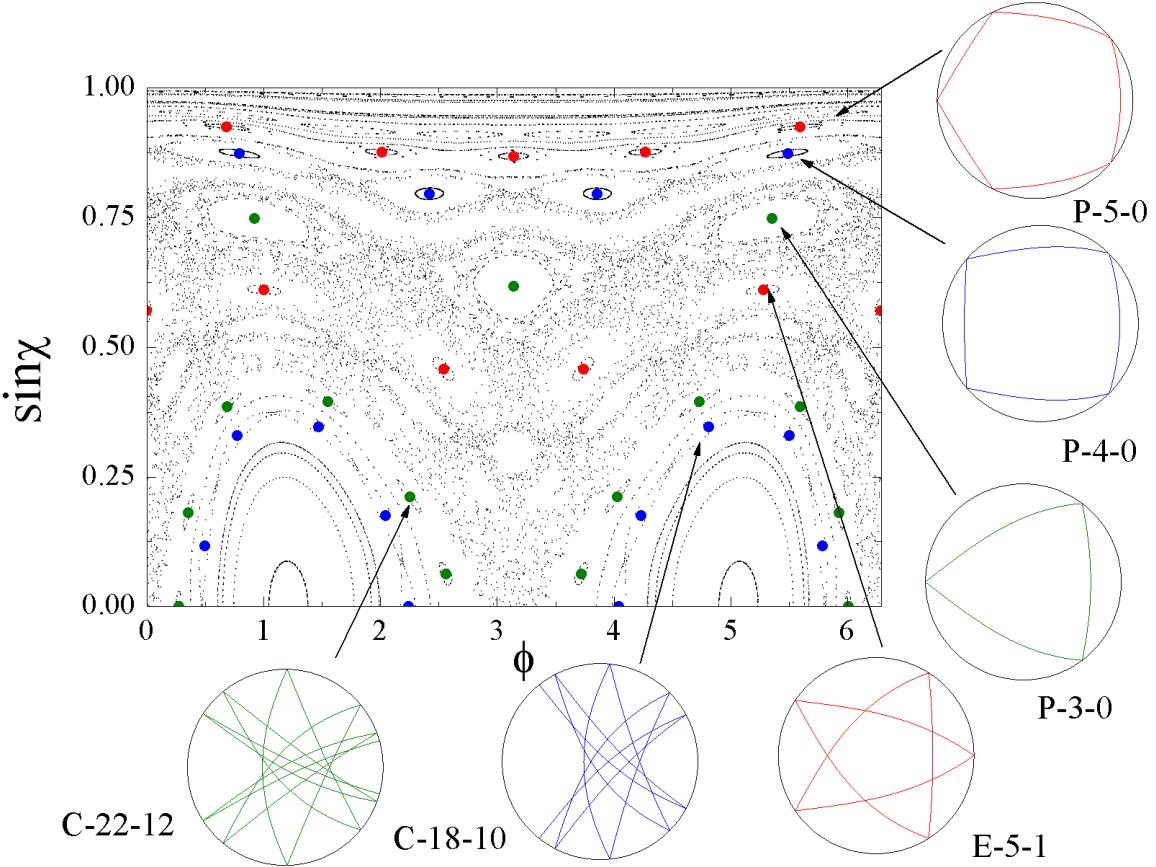


FIG. 3.21 – Dégénérescence de quelques trajectoires dans un billard qui possède un axe de symétrie ( $Ox$ ).

déduire le degré de dégénérescence des trajectoires dans les autres cas de symétrie.

La figure (3.21) montre quelques trajectoires dans un billard d'indice donné par le profil II avec les paramètres :  $n_0 = 1.5$ ,  $\delta n = 1.0$ ,  $w = a$  et  $x_0 = 0.5a$ . Avec ce profil d'indice, un seul axe de symétrie existe : l'axe  $Ox$ . La figure (3.22) montre quelques trajectoires dans un billard d'indice donné par le profil V avec les paramètres :  $n_0 = 1.5$ ,  $\delta n = 1.0$ ,  $w = a$ ,  $\epsilon = 4.0$ ,  $x_0 = 0.5a$  et  $y_0 = 0.5a$ . Avec ce profil d'indice, aucun axe de

symétrie n'existe.

Les propriétés de symétrie se retrouvent sur la section de Poincaré. Celle-ci possède dans son ensemble la symétrie du système. Il faut donc faire attention à ne pas considérer le nombre de points représentant une trajectoire périodique comme étant égal à la période. Sur la figure (3.19) nous voyons un ensemble de 6 îlots autour de la valeur  $\sin \chi = 0.75$ . Nous sommes donc porté à croire que ces îlots entourent les points qui représentent une trajectoire de période 6. Nous voyons clairement que ces îlots entourent un ensemble de points qui représentent une trajectoire de période 3 et son image par l'axe ( $\phi = \pi$ ).

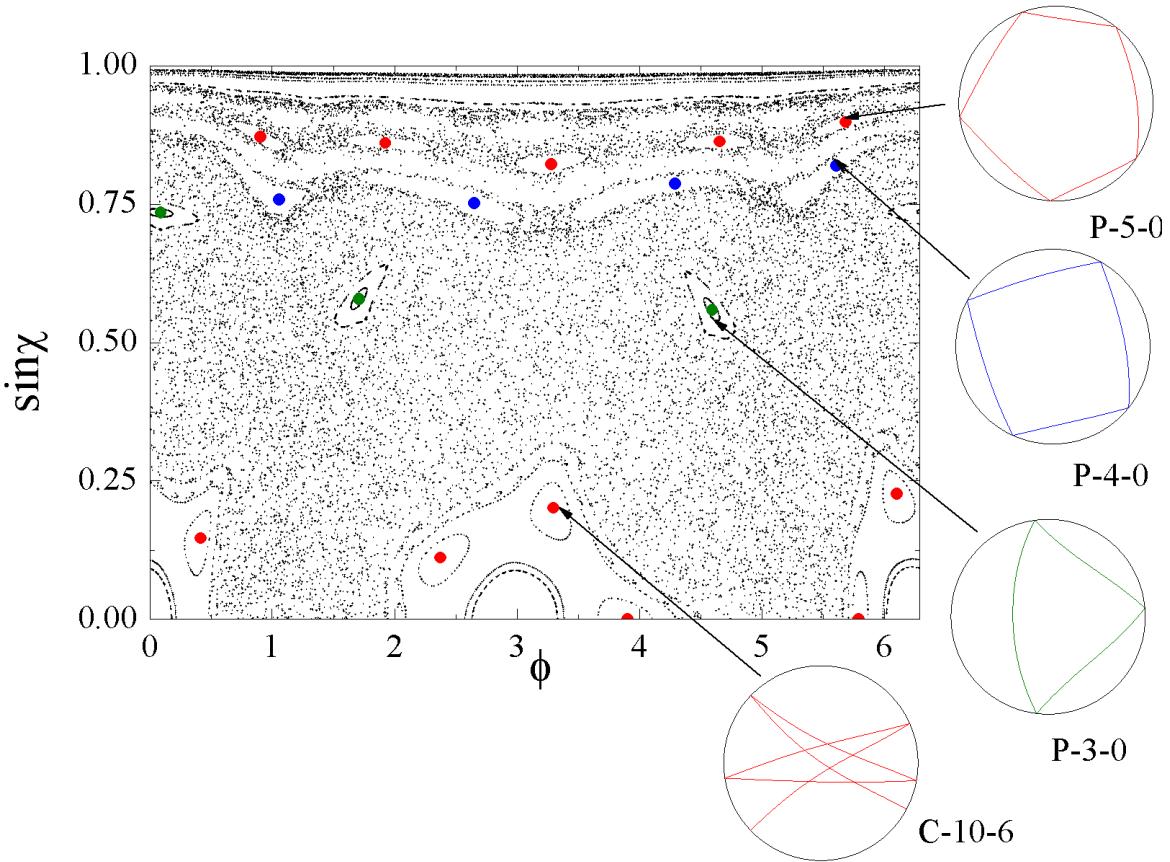


FIG. 3.22 – Dégénérescence de quelques trajectoires dans un billard qui ne possède aucun axe de symétrie.

Ainsi comme on vient de le voir, la perte de symétrie lève la dégénérescence des trajectoires. Ceci influence le scénario de KAM et par conséquent l'aspect général de la section de Poincaré. Imaginons que la brisure de la symétrie de rotation s'accompagne de l'apparition d'une autre forme de symétrie ou par la perte de toute symétrie (exemple du profil I et V). Dans les deux cas, la destruction et la déformation des tores de KAM s'accompagnent de l'apparition de nouveaux points fixes. Le nombre de ces points fixes dépend évidemment de la symétrie. Si nous prenons l'exemple de la période 3 de la figure (3.19), la déformation de la ligne horizontale correspondante à cette classe de

trajectoire, dans le cas intégrable, s'accompagne de l'apparition de 6 nouveaux points elliptiques dans le cas du profil I et uniquement 3 par le profil V.

### 3.5 Processus d'échappement

En considérant la propagation de la lumière à l'intérieur de la cavité il faut tenir compte de l'échappement du rayon lumineux à travers la frontière. En optique géométrique ce processus est régi par la loi de Snell-Descartes :

$$n_{int} \sin \chi_i = n_{ext} \sin \chi_r, \quad (3.39)$$

où  $n_{int}$  est l'indice à l'intérieur de la cavité,  $\chi_i$  l'angle d'incidence,  $n_{ext}$  l'indice à l'extérieur de la cavité et  $\chi_r$  l'angle de réfraction.

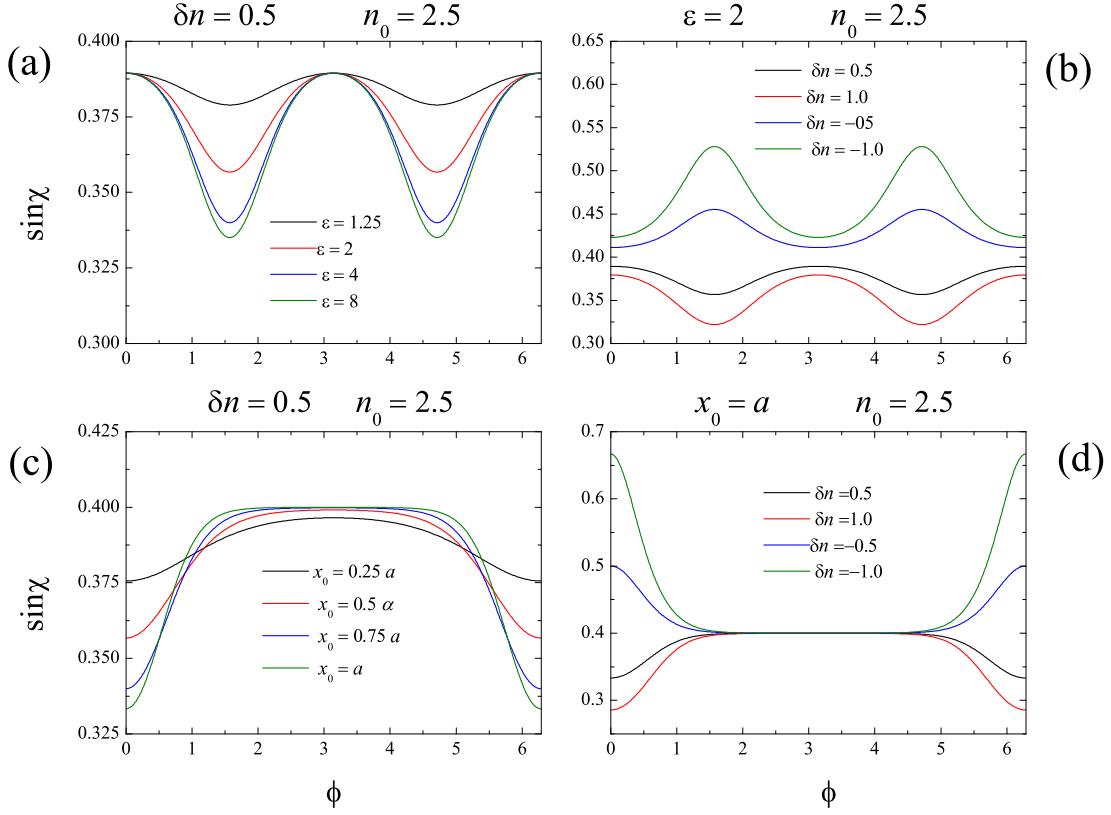


FIG. 3.23 – Déformation et déplacement de la ligne d'échappement pour différents profils d'indice et effet du degré d'inhomogénéité  $\delta n$ .

A cause de la différence d'indice et du fait que la fonction sin soit bornée, l'échappement ne se fait pas pour toute les valeurs de l'angle d'incidence  $\chi_i$ . Ceci définit une condition d'échappement donnée par :

$$\sin \chi_i < \frac{n_{ext}}{n_{int}}. \quad (3.40)$$

Suite à cette condition, la section de Poincaré est partagée en deux régions délimitées par le rapport  $n_{ext}/n_{int}$ . Une région de réflexion totale au-dessus de cette limite et une région d'échappement sous cette limite. Dans les billards homogènes, déjà étudiés, la limite  $n_{ext}/n_{int}$  est indépendante de l'angle  $\phi$ , elle est donc représentée par une ligne horizontale sur la section de Poincaré même en l'absence de symétrie de rotation. Ceci est valable également dans une configuration d'indice où le billard est intégrable (indice purement radial).

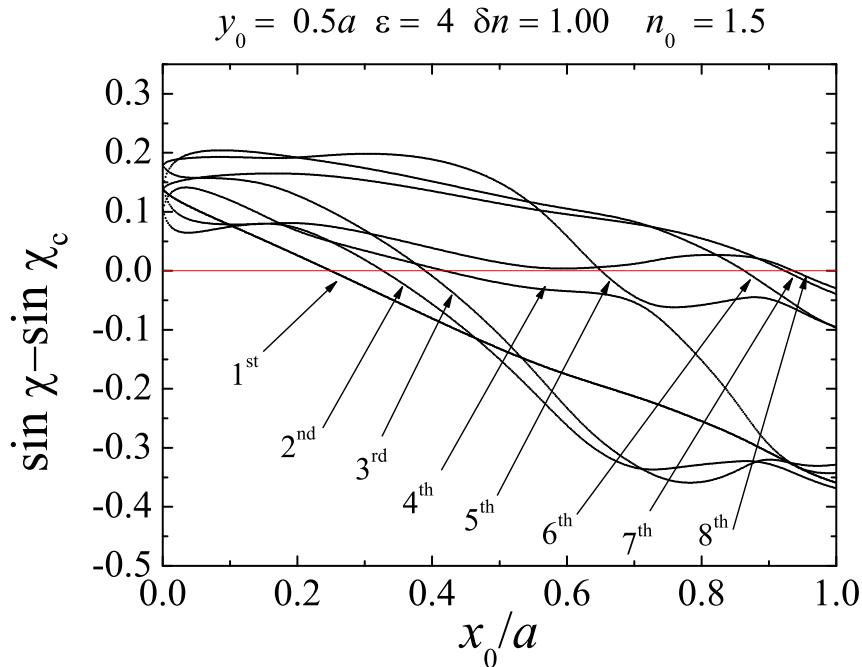


FIG. 3.24 – Variation des différentes branches correspondant à la différence  $\sin \chi_i - n_{ext}/n_{int}$  associée à chaque composante d'une trajectoire de période 8.

La non intégrabilité des billards inhomogènes, induite par l'introduction d'une dépendance angulaire dans l'indice à l'intérieur de la cavité, est accompagnée par la déformation et le déplacement de la ligne d'échappement  $n_{ext}/n_{int}$ . Ce comportement évolue avec la dynamique en fonction des paramètres de perturbation, contrairement au cas des

billards homogènes, où la ligne d'échappement reste fixe (pour une valeur fixe de l'indice) malgré le changement de dynamique. Ceci est dû au fait que dans les billards homogènes le paramètre de perturbation est lié à la géométrie de la cavité et non à l'indice à l'intérieur de celle-ci.

La figure (3.23) montre la déformation de la ligne d'échappement dans un billard inhomogène avec les profils d'indice I et II et l'effet du degré d'inhomogénéité  $\delta n$ . Les figures (3.23-a) et (3.23-c) montrent le comportement de cette ligne en fonction des paramètres de perturbations  $\epsilon$  et  $x_0$  associés à ces deux profils et ceci pour des valeurs fixes de  $n_0$  et de  $\delta n$ . Le degré de déformation dépend du degré d'inhomogénéité caractérisé par le facteur  $\delta n$  de la relation (3.30). Les figures (3.23-b) et (3.23-d) montrent cette dépendance pour les deux profils d'indice à des paramètres de perturbation fixes.

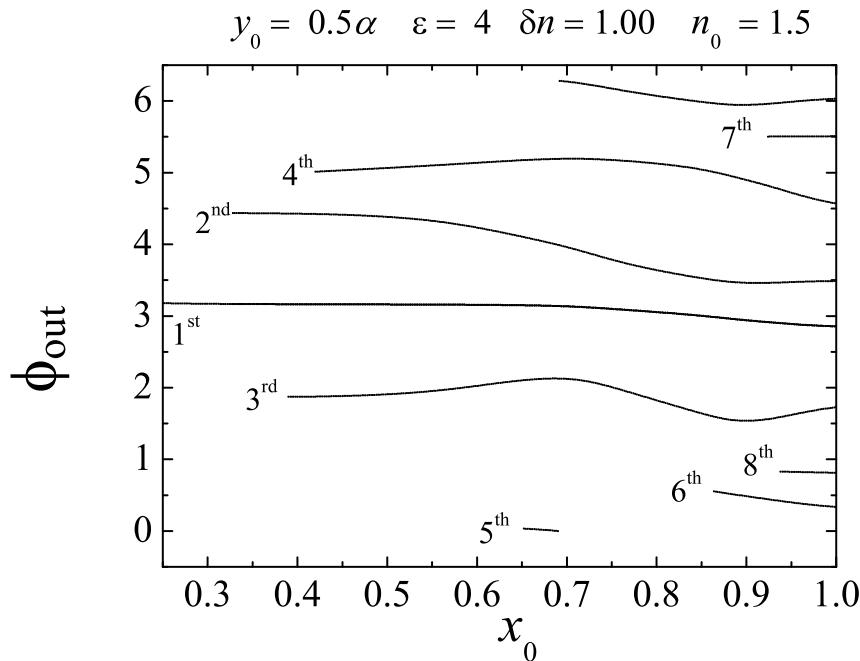


FIG. 3.25 – Positions d'échappement correspondant à chaque composante, caractérisées par l'angle polaire  $\phi_{out}$  et leur variation en fonction de  $x_0$ .

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à l'échappement d'un rayon lumineux qui se propage sur une trajectoire périodique donnée. La réfraction se produit dès que l'une des composantes de cette trajectoire se trouve sous la ligne  $n_{ext}/n_{int}$ . A cause de la non conservation de l'angle d'incidence  $\chi$ , les composantes d'une trajectoire périodique ne se positionnent pas de la même manière par rapport à cette ligne. La perturbation

du système induit, en plus de la déformation de la ligne réfractive, un déplacement des composantes d'une trajectoire périodique donnée (figure 3.11). Une trajectoire, initialement dans la région de réflexion totale, peut alors migrer vers la région d'échappement sous perturbation. Nous avons étudié en particulier le comportement d'une trajectoire de période 8, vis-à-vis de ce processus, dans une configuration d'indice donnée par le profil V, avec les paramètres ( $n_0 = 1.5$ ,  $\delta n = 1$ ,  $w = a$ ,  $\epsilon = 4$ ,  $y_0 = 0.5a$  et  $n_{ext} = 1$ ). Ce choix a pour but la brisure de toute forme de symétrie pour mettre en évidence toutes les composantes de la trajectoire en levant la dégénérescence sur les valeurs de  $\sin \chi_i$ . Nous avons choisi comme paramètre variable l'abscisse du centre de la Gaussienne  $x_0$ . La figure (3.24) montre la différence entre les valeurs de  $\sin \chi_i$  de toutes les composantes et les valeurs de  $\sin \chi_c = n_{ext}/n_{int}(a, \phi_i)$  calculées pour les angles  $\phi_i$  correspondant à ces composantes. Cette différence est ainsi positive pour les composantes qui sont au-dessus de la ligne de réfraction et négative dans le cas contraire.

Pour  $x_0 = 0$  toutes les composantes de la trajectoire choisie sont dans la région de réflexion totale. En augmentant la valeur de  $x_0$  la différence  $\sin \chi_i - n_{ext}/n_{int}$  varie sur huit branches différentes à cause du déplacement des composantes et de la déformation de la ligne de réfraction. A partir d'une valeur de  $x_0$  donnée, une première branche franchit la ligne  $\sin \chi_i = \sin \chi_c$  ce qui traduit l'échappement de la lumière par la composante correspondante. Le processus se répète de manière progressive et les autres composantes passent une par une dans la région de réfraction. L'ordre avec lequel les composantes s'échappent n'est pas évident et ne correspond pas à la position initiale qu'avaient ces composantes à  $x_0 = 0$ . Une composante initialement proche de la ligne de réfraction s'échappe après une composante qui était positionnée plus loin. De plus, la direction d'échappement n'est pas évidente. La figure (3.25) nous donne les positions de sortie correspondant à chaque composante et qui sont caractérisées par l'angle polaire  $\phi_{out}$ .



# Chapitre 4

## Modes propres d'une cavité inhomogène

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'effet de l'inhomogénéité sur les modes propres d'une cavité diélectrique. La notion de modes propres a été abordée, de manière générale, dans le chapitre 2. Nous avons défini les étapes essentielles pour déterminer les caractéristiques d'un mode donné. Une des difficultés, sur laquelle nous avons insisté, est la résolution de l'équation de propagation. Cette difficulté vient du couplage entre la variable radiale  $r$  et la variable angulaire  $\phi$  via l'indice de réfraction  $n(r, \phi)$ . La première partie de ce chapitre sera consacrée à l'étude du cas où se couplage n'existe pas. Ceci est possible dans le cas où le système présente une symétrie de rotation. Dans la deuxième partie, nous allons présenter une méthode numérique pour résoudre l'équation de propagation. Cette méthode peut être appliquée dans le cas d'une cavité quelconque et d'un indice de réfraction quelconque.

Toute la philosophie de cette étude est basée sur l'idée suivante : le problème que nous traitons est assimilé à un *problème de diffusion*, la cavité représente une région d'interaction qui transforme une onde entrante, venant de l'infini, en une onde sortante retournant vers l'infini.

### 4.1 Symétrie de rotation

Comme nous l'avons indiqué au chapitre 3, la symétrie de rotation existe dans le cas d'une cavité circulaire, de rayon  $a$ , avec un indice de réfraction purement radial. Nous avons étudié le cas d'un profil d'indice défini par :

$$n(r) = \begin{cases} n_0 + \delta n e^{-2r^2/w^2} & (\forall r < a) \\ 1 & (\forall r > a). \end{cases} \quad (4.1)$$

Avec ce profil nous disposons de deux paramètres, l'amplitude de la Gaussienne  $\delta n$  et sa largeur  $w$ , pour modifier les caractéristiques des modes, à savoir la longueur d'onde  $\lambda$ , le facteur de qualité  $Q$ , la position et la valeur du maximum d'intensité.

L'ensemble des résultats numériques que nous allons présenter sera interprété à l'aide de deux notions : le comportement classique du rayon lumineux et l'analogie entre l'optique ondulatoire et la mécanique quantique.

Nous nous sommes limités au cas des modes de polarisation TM. Pour ces modes, l'équation de propagation, pour le champ électrique, est une équation de Helmholtz en fonction des variables  $r$  et  $\phi$ , soit :

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z(r, \phi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z(r, \phi)}{\partial \phi^2} + k^2 [1 - n^2(r, \phi)] E_z(r, \phi) = k^2 E_z(r, \phi). \quad (4.2)$$

C'est cette équation que nous allons solutionner, dans le cas d'une symétrie de rotation, afin de déterminer les caractéristiques des modes propres.

#### 4.1.1 Solution de l'équation de Helmholtz

En présence d'une symétrie de rotation, la solution de l'équation de Helmholtz s'écrit comme le produit d'une fonction radiale et une fonction angulaire, soit :

$$E_z(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi). \quad (4.3)$$

En remplaçant cette forme de solution dans l'équation (4.2), nous obtenons :

$$-\left[ \Phi(\phi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{R(r)}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} \right] + k^2 (1 - n^2(r)) R(r)\Phi(\phi) = k^2 R(r)\Phi(\phi). \quad (4.4)$$

En divisant cette dernière équation par  $R(r)\Phi(\phi)/r^2$ , nous obtenons :

$$-\left[ \frac{r}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} \right] + r^2 k^2 (1 - n^2(r)) = r^2 k^2. \quad (4.5)$$

Puisque  $R(r)$  et  $\Phi(\phi)$  ne dépendent que d'une seule variable, nous pouvons remplacer les dérivées partielles  $\partial$  par les dérivées totales  $d$  par rapport à chaque variable. Grâce à la relation :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) = r \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{dR(r)}{dr}, \quad (4.6)$$

l'équation (4.5) devient :

$$\frac{1}{R(r)} \left[ r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} \right] + r^2 k^2 n^2(r) = -\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2}. \quad (4.7)$$

Chaque terme de cette équation constitue une équation différentielle à une seule variable,  $r$  ou  $\phi$ , et chaque équation doit être égale à une constante de séparation, notée

$m^2$ . Ainsi l'équation de Helmholtz (4.2) se transforme en un système de deux équations pour chaque variable, soit :

$$\begin{cases} - \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] R(r) + \left[ k^2 (1 - n^2(r)) + \frac{m^2}{r^2} \right] R(r) = k^2 R(r) \\ \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = -m^2 \Phi(\phi). \end{cases} \quad (4.8)$$

L'équation angulaire est une équation aux valeurs propres. Pour chaque valeur propre  $m$  correspond une fonction propre  $\Phi^m(\phi) = A \exp(im\phi) + B \exp(-im\phi)$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration, et une solution de l'équation radiale  $R^m(r)$ . La solution de l'équation de propagation est donc donnée par :

$$E_z(r, \phi) = R^m(r) \Phi^m(\phi). \quad (4.9)$$

C'est la solution  $R^m(r)$  qui dépend de la forme de l'indice de réfraction dans l'espace. Dans le système que nous étudions, l'espace est divisée en deux régions : la région externe à la cavité, caractérisée par un indice constant, et la région interne à la cavité, caractérisée par un indice variable (équation (4.1)).

Dans la région externe l'équation radiale est une équation différentielle de type Bessel. Pour s'en convaincre, remplaçons la valeur de l'indice  $n_{ext} = 1$  dans cette équation et faisant le changement de variable  $x = kr$ . Nous obtenons alors :

$$x^2 \frac{d^2 R^m(x)}{dx^2} + x \frac{dR^m(x)}{dx} + (x^2 - m^2) R^m(x) = 0. \quad (4.10)$$

Cette équation admet donc des solutions sous forme de combinaison linéaire de fonctions spéciales du même type, à savoir : les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce,  $J_m(x)$  et  $Y_m(x)$ , et les fonctions de Hankel de première et de deuxième espèce  $H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iY_m(x)$  et  $H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iY_m(x)$  [1]. Le choix de la bonne combinaison, qui représente au mieux l'état physique du système, dépend des conditions asymptotiques du problème. Dans notre cas la solution est donnée par :

$$R_{ext}^m(r) = H_m^{(2)}(kr) + S_m H_m^{(1)}(kr). \quad (4.11)$$

En assimilant le problème de l'émission de la lumière dans une cavité diélectrique à un problème de diffusion, la fonction de Hankel de deuxième espèce  $H_m^{(2)}(kr)$  représente l'onde entrante dans la région d'interaction, représentée par la cavité, et la fonction de Hankel de première espèce  $H_m^{(1)}(kr)$  représente l'onde sortante<sup>1</sup>. Dans ce cas les coefficients  $S_m$  sont simplement les éléments de la matrice de diffusion  $S$ . À cause de la conservation du moment cinétique, cette matrice est diagonale dans la base des moments angulaires.

---

<sup>1</sup>Ce choix est justifié, dans la mesure où les fonctions  $H_m^{(1)}(x)$  et  $H_m^{(2)}(x)$  ont un comportement à l'infini d'une onde entrante et d'une onde sortante, contrairement aux fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce.

Dans le cas où l'indice à l'intérieur de la cavité est inhomogène, la solution de l'équation radiale n'est pas donnée analytiquement<sup>2</sup>. Pour trouver numériquement la solution dans cette région, nous avons utilisé l'algorithme de Runge-Kutta à pas adaptatifs [80], qui donne la valeur de la fonction et de sa dérivée en tout point  $r$ , avec les conditions initiales :  $R^m(r=0) = A_m J_m(0)$  et  $dR^m(r)/dr|_{r=0} = A_m dJ_m(r)/dr|_{r=0}$ . Ces conditions sont en accord avec la condition de régularité à l'origine.

Une fois les solutions de l'équation radiale trouvées, nous cherchons les modes propres de la cavité. En effet, à cause de la discontinuité de l'indice sur la frontière de la cavité, le couplage avec l'extérieur se fait pour des valeurs discrètes du nombre d'onde  $k$ . Ces valeurs sont associées aux solutions de l'équation radiale qui vérifient les conditions de continuité sur cette frontière.

Dans le chapitre 2, nous avons défini ces conditions de continuité, pour les deux modes de polarisation possible TM et TE. Notre choix étant d'étudier les modes TM, rappelons les conditions de passage associées. Le champ électrique, polarisé linéairement suivant la direction perpendiculaire au plan de la cavité, doit être continue et sa dérivée par rapport à la variable  $r$  doit être continue, soit :

$$\begin{cases} E_{int}(a) = E_{ext}(a) \\ \frac{dE_{int}(r)}{dr}\Big|_{r=a} = \frac{dE_{ext}(r)}{dr}\Big|_{r=a} \end{cases} \quad (4.12)$$

A cause de la symétrie de rotation, toutes les directions sont équivalentes, il n'y a pas de direction privilégiée dans le système. Ainsi les conditions de continuités sont appliquées uniquement aux solutions radiales de l'équation de Helmholtz  $R^m(r)$ . En remplaçant ces solutions dans les conditions (4.12), nous obtenons un système d'équations pour les coefficients  $A_m$  et  $S_m$ , soit :

$$\begin{cases} A_m R_{int}^m(a) = H_m^{(2)}(ka) + S_m H_m^{(1)}(ka) \\ A_m \frac{dR_{int}^m(r)}{dr}\Big|_{r=a} = \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr}\Big|_{r=a} + S_m \frac{dH_m^{(1)}(kr)}{dr}\Big|_{r=a} \end{cases} \quad (4.13)$$

↓

$$\begin{cases} A_m R_{int}^m(a) - S_m H_m^{(1)}(ka) = H_m^{(2)}(ka) \\ A_m \frac{dR_{int}^m(r)}{dr}\Big|_{r=a} - S_m \frac{dH_m^{(1)}(kr)}{dr}\Big|_{r=a} = \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr}\Big|_{r=a} \end{cases} \quad (4.13)$$

---

<sup>2</sup>Dans le cas homogène  $n(r) = n_0$ , la solution est donnée par une fonction de Bessel du première ordre :  $R_{int}^m(r) = A_m J_m(n_0 kr)$ .

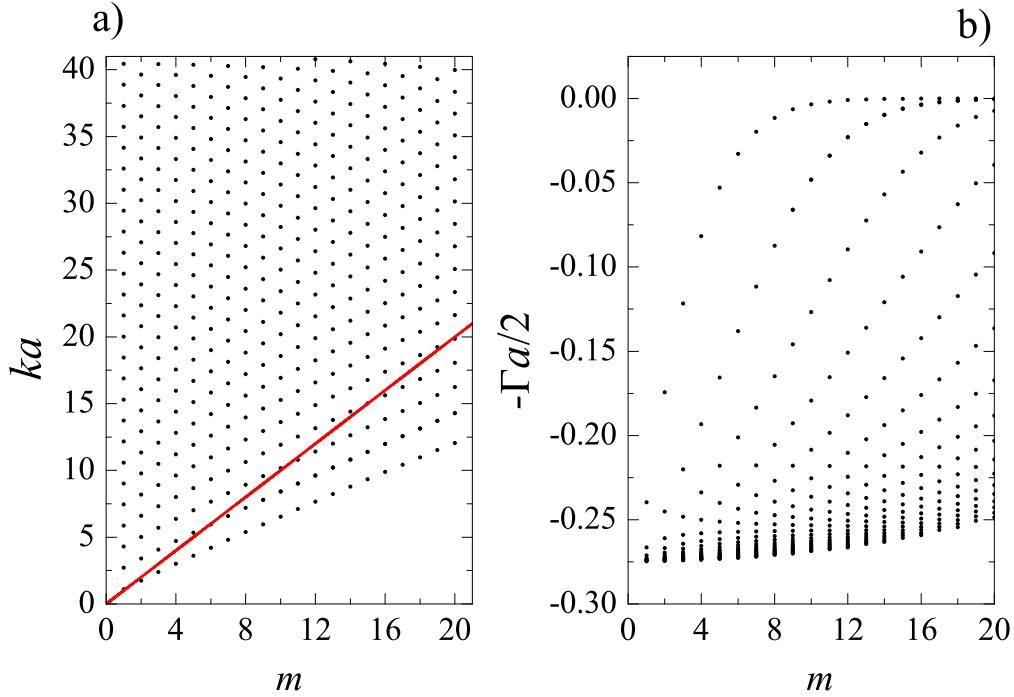


FIG. 4.1 – Les valeurs du nombre d'onde  $k_c$  en fonction du nombre  $m$  : (a) partie réelle  $k$ , (b) partie imaginaire  $-\Gamma/2$ . Les solutions sont obtenues avec un indice de réfraction donné par le profil (4.1) avec les paramètres :  $n_0 = 2$ ,  $\delta n = 0.1$  et  $w = a$ .

Le problème que nous sommes entrain d'étudier n'est pas vraiment un problème de diffusion d'une onde électromagnétique mais un problème d'émission de la lumière à partir d'une cavité. Cette situation nous impose une condition supplémentaire aux conditions de continuité à savoir la possibilité d'avoir, dans la région externe, une onde sortante  $H_m^{(1)}(kr)$  en absence d'une onde entrante  $H_m^{(2)}(kr)$ . Avec ceci les valeurs du nombre d'onde  $k$  correspondent à la possibilité d'avoir une solution non triviale au système d'équations (4.13) dans sa forme homogène. Les valeurs de  $k$  sont donc simplement les racines du déterminant de Cramer associé :

$$\Delta_{Cramer} = R_{int}^m(a) \left. \frac{dH_m^{(1)}(k_cr)}{dr} \right|_{r=a} - \left. \frac{dR_{int}^m(r)}{dr} \right|_{r=a} H_m^{(1)}(k_ca). \quad (4.14)$$

A cause du couplage avec l'extérieur, nous cherchons des valeurs du nombre d'onde complexe  $k_c = k - i(\Gamma/2)$ . La partie réel est reliée à la longueur d'onde du mode par la relation  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$  et  $\Gamma > 0$  est inversement proportionnelle à la durée de vie du mode à l'intérieur de la cavité  $\tau = 1/(c\Gamma)$ .

La figure (4.1) montre un ensemble de solutions de l'équation (4.14), pour les vingt premiers  $m$ . Le comportement de la partie réelle et de la partie imaginaire de  $k_c$  en

fonction de  $m$  est semblable à celui du cas homogène [69]. La quantification des solutions se fait en fonction de  $m$  comme elle se fait également pour une valeur fixe de  $m$ . Ceci est la signature de l'existence de deux bons nombres quantiques pour caractériser un mode donné. Le nombre  $m$  qui représente la valeur propre de la composante  $L_z$  du moment cinétique, et le nombre  $l$ , appelé nombre d'onde radial, qui représente le nombre de noeuds du champ électrique à l'intérieur de la cavité. Dans la suite de ce texte, chaque mode propre sera donc dénoté par  $\text{TM}_{m,l}$ .

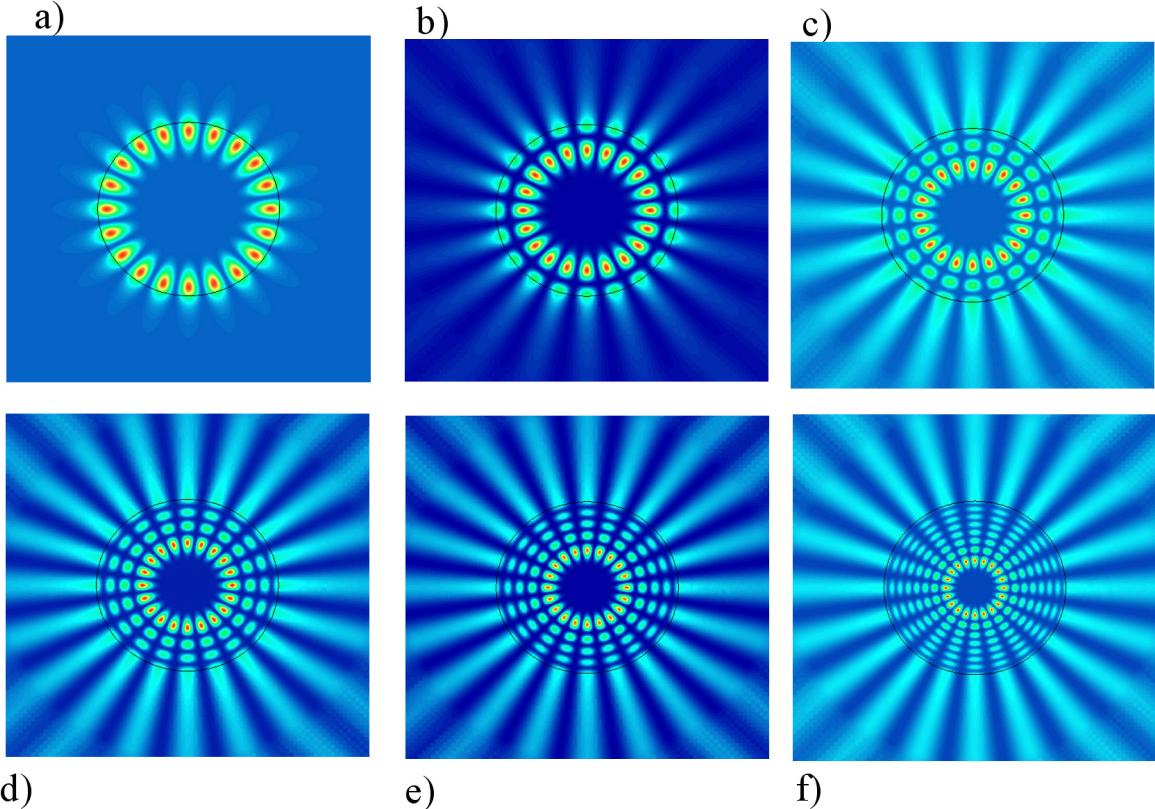


FIG. 4.2 – Structure spatiale de quelques modes correspondants à une valeur  $m = 10$  et différentes valeurs de  $l$  : (a :  $l = 1$ ), (b :  $l = 2$ ), (c :  $l = 3$ ), (d :  $l = 4$ ), (e :  $l = 5$ ), (f :  $l = 8$ ). Le profil d'indice est donné par (4.1) avec les paramètres :  $n_0 = 2$ ,  $\delta n = 0.1$  et  $w = a$ .

La figure (4.2) montre la structure de quelques modes projetés sur le plan de la cavité. Ces modes sont tracé en choisissant une dépendance angulaire de la forme  $\Phi_m(\phi) = \cos(m\phi)$ . Dans ce cas le nombre de noeuds dans la direction angulaire est donné par  $2m$  et dans la direction radiale par  $l$ . La distribution de l'intensité dépend de la valeur de  $l$ . Le maximum de celle-ci s'éloigne de la frontière de la cavité en augmentant  $l$ . Les modes les plus intéressants pour l'émission laser sont donc ceux qui correspondent à la valeur minimale  $l = 1$ . Les durées de vie associées à cette classe sont les plus grandes comparées aux modes qui ont le même  $m$  et  $l > 1$ .

### 4.1.2 Effet de l'inhomogénéité

Nous allons présenter les résultats numériques concernant l'effet de l'inhomogénéité, caractérisé par  $\delta n$  et  $w$ , sur le nombre d'onde  $k$ , le facteur de qualité  $Q$  et le profil d'intensité du mode.

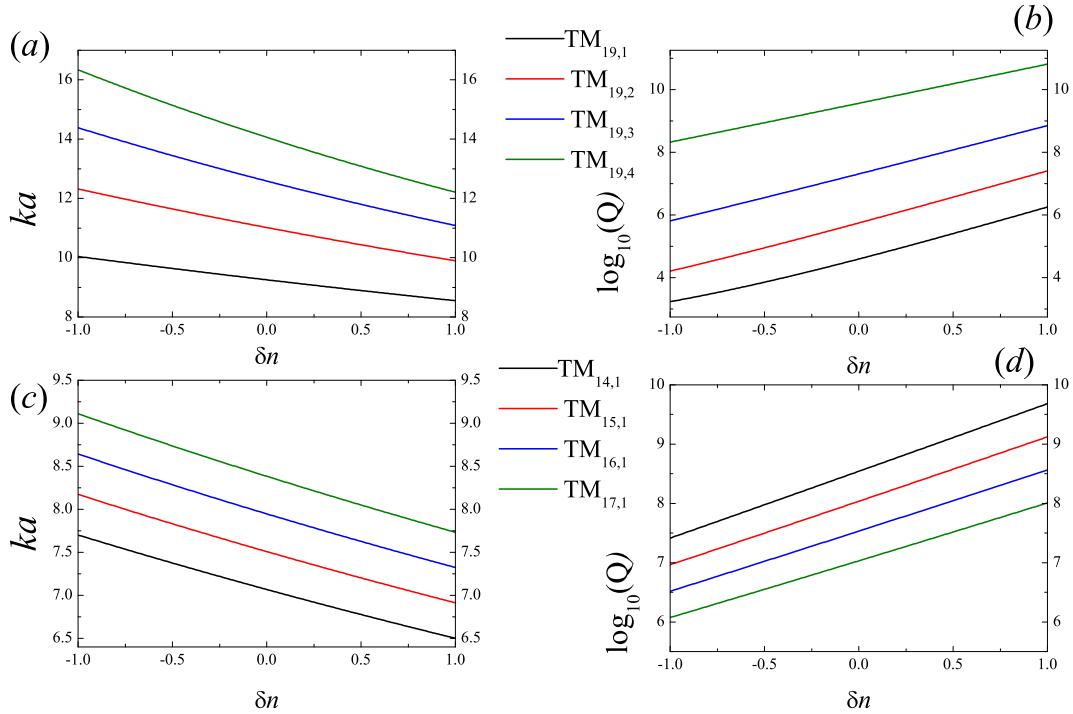


FIG. 4.3 – Variation du nombre d'onde et du facteur de qualité en fonction de  $\delta n$ . Le code couleur représente différents modes propres. Les figures (a-b) représentent les comportements des modes :  $\text{TM}_{19,1}$ ,  $\text{TM}_{19,2}$ ,  $\text{TM}_{19,3}$ ,  $\text{TM}_{19,4}$ , en fonction de  $\delta n$  et les figures (c-d) représentent les modes :  $\text{TM}_{14,1}$ ,  $\text{TM}_{15,1}$ ,  $\text{TM}_{16,1}$  et  $\text{TM}_{17,1}$ .

La figure (4.3) montre la variation du nombre d'onde  $k$  et du facteur de qualité  $Q$  en fonction de  $\delta n$  variant dans l'intervalle :  $[-1, 1]$ , avec les paramètres : ( $n_0 = 2.5$ ,  $w = a$ ). Cette variation est présentée pour un ensemble de modes de même nombre  $m$  et de nombres  $l$  différentes (figures : 4.3-a, 4.3-b) et un autre ensemble de modes de  $m$  différents et de même  $l$  (figures : 4.3-c, 4.3-d).

Le facteur de qualité est calculé à partir des solutions de l'équation (4.14), en utilisant la relation :

$$Q = \omega\tau = 4k/\Gamma. \quad (4.15)$$

Pour l'ensemble des modes que nous avons étudié, nous avons constaté une augmentation du facteur de qualité en fonction de  $\delta n$  et une diminution du nombre d'onde. Cette diminution est équivalente à une augmentation de la longueur d'onde représentant un décalage vers le rouge du spectre d'émission. Ce décalage est également accompagné d'une diminution de l'écart entre les nombres d'onde associés à une valeur fixe de  $m$ .

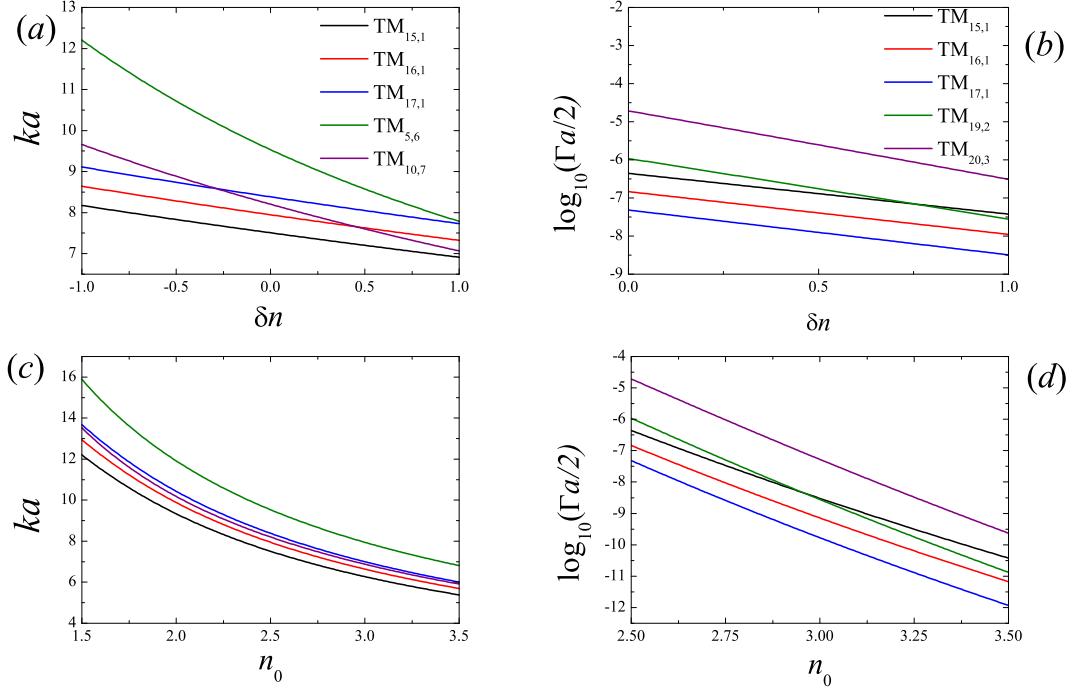


FIG. 4.4 – Intersection des branches de variation de la partie réelle et la partie imaginaire de  $k_c$ . (a)-(b) : variation en fonction de  $\delta n$ . (c)-(d) : variation en fonction de la valeur de l'indice  $n_0$  dans un milieu homogène. Les modes étudiés sont :  $TM_{15,1}$ ,  $TM_{16,1}$ ,  $TM_{17,1}$ ,  $TM_{5,6}$  et  $TM_{10,7}$ .

En suivant l'évolution des modes en fonction de  $\delta n$ , nous avons mis en évidence un ensemble d'intersections entre les branches qui représentent la variation de modes de différents  $m$  et  $l$ . Ces intersections existent pour la partie réelle et la partie imaginaire de  $k_c$ . Ce résultat est intéressant dans la mesure où, pour un ensemble discret de valeurs de  $\delta n$ , on peut trouver des modes propres de la cavité qui ont la même longueur d'onde et des durées de vie différentes et des modes qui ont des longueurs d'ondes différentes mais avec la même durée de vie. La figure (4.4) montre un certain nombre de ces intersections (en utilisant les paramètres :  $n_0 = 2.5$  et  $w = a$ ).

Pour la partie réelle de  $k_c$  ces intersections sont l'effet unique de l'inhomogénéité. Pour se convaincre, nous avons tracé l'évolution de  $k$  d'un nombre de modes en fonction de  $\delta n$  et qui présente des intersections de branches (figure 4.4-a). Nous l'avons ensuite comparé à l'évolution de  $k$  de ces mêmes modes dans une cavité homogène en fonction de l'indice  $n_0$  (figure 4.4-c). Nous avons choisi un intervalle de variation de  $n_0$  qui est le même pour la valeur de l'indice (4.1) à  $r = 0$ .

Pour la partie imaginaire de  $k_c$  ces intersections existent même dans le cas homogène. Une simple variation de la valeur de l'indice  $n_0$  met en évidence des modes qui ont la même durée de vie et des longueurs d'ondes différentes.

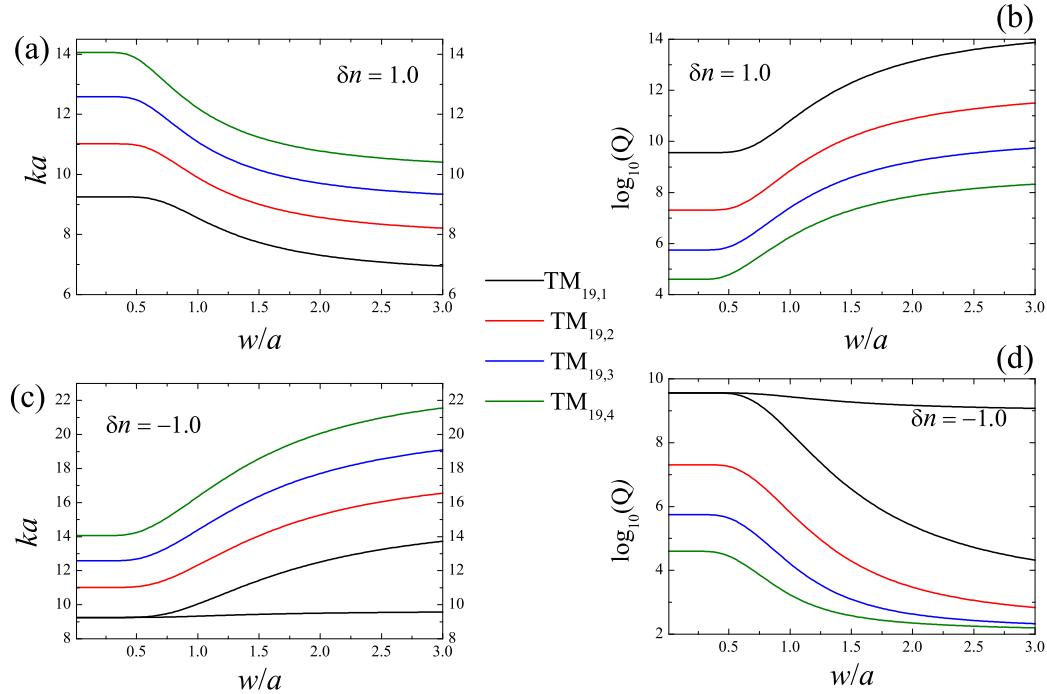


FIG. 4.5 – Variation du nombre d'onde et du facteur de qualité en fonction de  $w$ . (a)-(b) : variation pour une valeur de  $\delta n$  positive. (c)-(d) : variation pour une valeur de  $\delta n$  négative. Les modes étudiés sont : TM<sub>19,1</sub>, TM<sub>19,2</sub>, TM<sub>19,3</sub> et TM<sub>19,4</sub>.

La figure (4.5) montre la variation du nombre d'onde  $k$  et du facteur de qualité  $Q$  en fonction de la largeur de la Gaussienne  $w$ , variant dans l'intervalle :  $[0.1a, 3a]$ , pour un ensemble de modes caractérisées par le même nombre  $m$  et des valeurs de  $l$  différentes (en utilisant les paramètres :  $n_0 = 2.5$  et  $\delta n = \pm 1$ ).

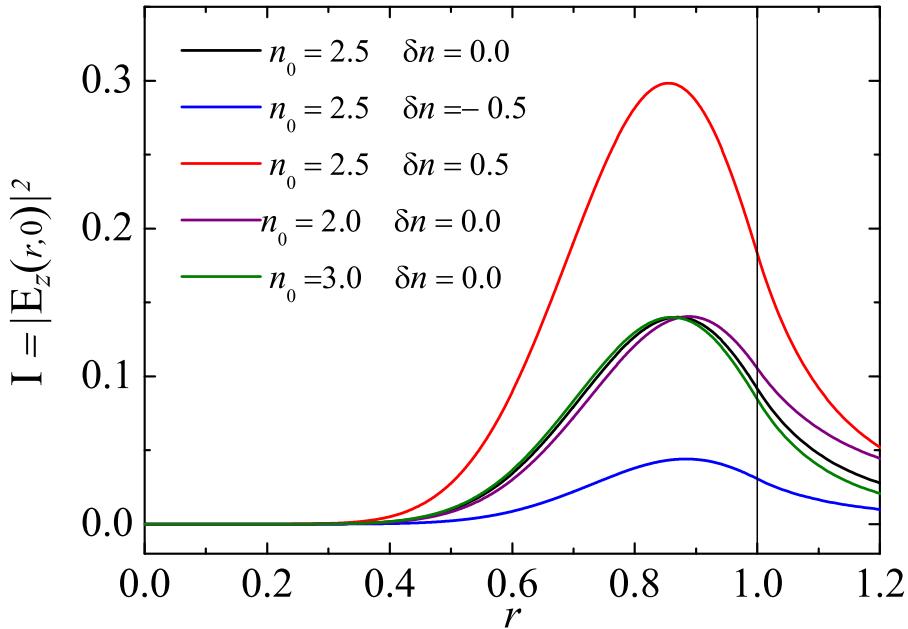


FIG. 4.6 – Variation du profil d'intensité, dans la direction  $\phi = 0$ , en fonction de  $\delta n$ . Cette variation est comparée à la variation due au changement de la valeur de l'indice  $n_0$  dans un milieu homogène.

Le comportement de ces quantités en fonction de  $w$  dépend du signe et de la valeur de  $\delta n$ . Pour des valeurs de  $\delta n$  positives nous observons une diminution de la valeur du nombre d'onde  $k$  et une augmentation du facteur de qualité  $Q$ . Pour les valeurs de  $\delta n$  négatives nous observons un comportement contraire. Indépendamment du signe de  $\delta n$  nous avons constaté que la variation de  $k$  et de  $Q$  est significative à partir d'une valeur critique  $w_c$ . Cette valeur varie très peu en fonction de la valeur absolue de  $\delta n$ . Les valeurs de  $k$  et de  $Q$  pour  $w < w_c$  tendent vers leur valeurs dans le cas homogène ( $\delta n = 0$ ). Sur les figures (4.5-c, 4.5-d), la courbe en trait discontinu représente la variation de  $k$  et des  $Q$  du mode  $TM_{19,1}$  pour une valeur de  $\delta n = -0.5$ . La variation de la valeur absolue de  $\delta n$  ne change pas la valeur de  $w_c$  mais change le taux de variation de  $k$  et de  $Q$  au-delà de cette limite.

La figure (4.6) montre la variation du profil d'intensité ( $I = |E_z(r, \phi)|^2$ ) en fonction de  $\delta n$  pour un mode  $TM_{5,1}$ , avec les paramètres :  $n_0 = 2.5$ ,  $w = a$ . Cette variation est caractérisée par la variation de trois paramètres : la valeur du maximum d'intensité, la position de ce maximum et la valeur de la pente au bord de la cavité. De manière générale, ces trois variations sont reliées : une augmentation de la valeur maximale de

l'intensité engendre un décalage de la position vers le centre de la cavité est une augmentation de la pente sur le bord. Les différents profils sont comparés en imposant au coefficient de la solution radiale à l'intérieur de la cavité d'être égal à l'unité ( $A_m = 1$ ). Avec ce critère nous constatons une augmentation de la valeur maximale de l'intensité en fonction de  $\delta n$ . Cette variation est significative à cause de l'inhomogénéité du milieu. Pour confirmer cette constatation nous avons comparé cette variation d'intensité avec celle due à une simple variation de la valeur de l'indice  $n_0$  dans un milieu homogène. La figure (4.7) montre la variation du profil d'intensité en fonction de la largeur de la Gaussienne  $w$ . Cette variation dépend également de la valeur et du signe de  $\delta n$ . D'après la figure, la meilleure configuration pour obtenir le maximum d'intensité est d'imposer un indice avec une faible largeur de Gaussienne et une grande valeur de  $\delta n$  positive, mais en payant le prix de diminuer le facteur de qualité (figure 4.5-b).

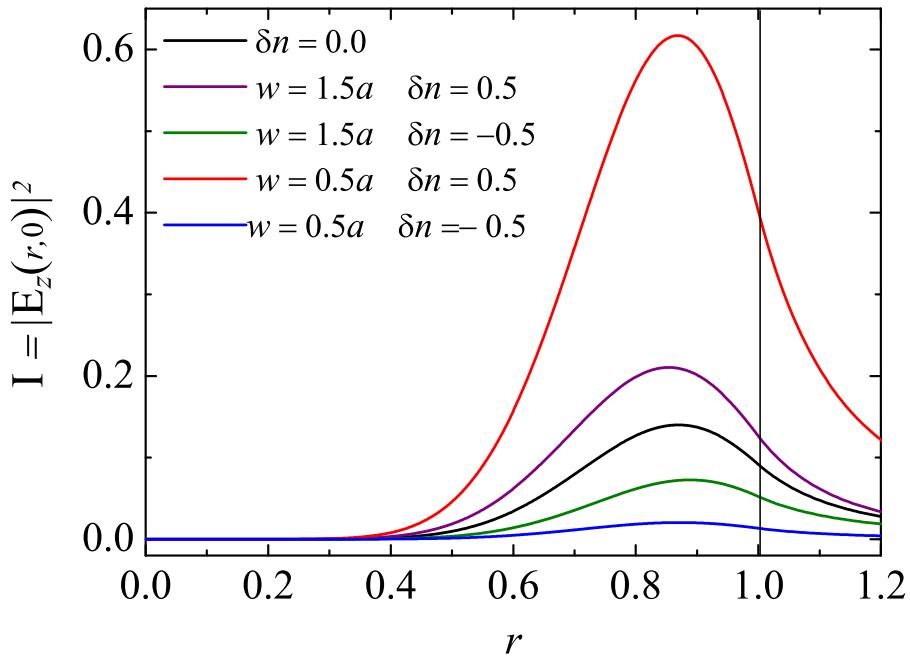


FIG. 4.7 – Variation du profil d'intensité, dans la direction  $\phi = 0$ , en fonction de la largeur de la Gaussienne  $w$ . Cette variation dépend du signe et de la valeur de  $\delta n$ .

## 4.2 Discussion

Dans la section précédente, nous avons montré l'ensemble des résultats concernant l'effet d'une inhomogénéité radiale, caractérisée par les deux paramètres  $\delta n$  et  $w$ , sur les paramètres qui caractérisent un mode propre donné. Dans cette section nous allons tenter de donner une interprétation à nos résultats pour expliquer en particulier la variation de la longueur d'onde  $\lambda$  et du facteur de qualité  $Q$ .

### 4.2.1 Relation semi classique

La relation semi-classique va nous permettre d'associer un mode propre de la cavité à une trajectoire classique donnée. Le système optique sera donc assimilé à un billard inhomogène. Dans le cas où le système possède une symétrie de rotation, chaque trajectoire est caractérisée par un seul paramètre  $\sin \chi$  où  $\chi$  est l'angle d'incidence entre la trajectoire et la normale à la cavité. Ce paramètre reste constant pendant la propagation à cause de la conservation du moment cinétique.

La manière la plus appropriée pour déterminer cette relation est d'utiliser une méthode de quantification semi-classique telle que la méthode WKB revue par Berry et Mount [11] ou la méthode EBK (Einstein-Brillouin-Keller) [24, 14, 48]. Il existe néanmoins un moyen plus simple d'obtenir cette relation en quantifiant le moment cinétique, soit :

$$L_z = n\hbar k a \sin \chi = \hbar m \implies \sin \chi = \frac{m}{n(a)ka}. \quad (4.16)$$

Cette dernière relation relie donc une quantité ondulatoire qui est le nombre d'onde  $k$  à une quantité purement classique qui est  $\sin \chi$ .

Quelque soit la méthode utilisée pour déterminer une telle relation, il est difficile de l'obtenir dans le cas d'un système non intégrable. Si nous utilisons une méthode de quantification, la difficulté réside dans le fait qu'il n'existe pas de points tournants. Nous rappelons que ces méthodes sont basées sur la quantification de l'intégrale d'action. Cette intégrale est calculée entre ces points tournants. D'autre part, dans le cas non intégrable il existe des trajectoires chaotiques qui visitent toute la surface de la cavité, il n'existe donc pas de régions classiquement interdites pour ces trajectoires et par conséquence pas de points de rebroussement. Pour la méthode que nous avons adoptée, à savoir la quantification du moment cinétique, la difficulté vient du fait que ce moment n'est pas conservé. D'une part la variable  $\sin \chi$  n'est pas conservée et d'autre part le nombre  $m$  n'est plus un bon nombre quantique. Nous ne pouvons pas associer dans ce cas une trajectoire classique à une seule valeur de  $\sin \chi$  et un mode à une seule valeur de  $m$ .

### 4.2.2 Analogie avec la mécanique quantique

Le deuxième aspect qui va être utilisé pour l'interprétation des résultats sera l'analogie entre l'optique ondulatoire et la mécanique quantique. Cette analogie a été exploitée par Johnson [47] pour donner une interprétation aux pics qui apparaissent dans la section efficace de diffusion d'une onde électromagnétique avec une sphère diélectrique. Ces pics sont la manifestation des états de résonances, connus sous le nom de *morphology-dependent-resonances* (MDR's) [43, 74, 33], dans lesquels l'onde est piégée temporellement à l'intérieur de la sphère. Ces résonances sont similaires aux résonances de forme (*shape resonances*), connues en mécanique quantique, et qui sont associées à l'effet tunnel.

Cette analogie existe dans le cas où le système possède une symétrie de rotation. Dans ce cas l'équation de Helmholtz radiale :

$$-\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right]R(r) + V_{eff}(r)R(r) = k^2R(r), \quad (4.17)$$

est analogue à l'équation de Schrödinger à une dimension avec un terme de potentiel effectif  $V_{eff}(r)$  donné par l'expression :

$$V_{eff}(r) = \begin{cases} \left[k^2(1 - n^2(r)) + \frac{m^2}{r^2}\right] & (\forall r < a) \\ \frac{m^2}{r^2}. & (\forall r > a) \end{cases} \quad (4.18)$$

Cette correspondance n'est pas exacte à cause du terme de dérivée première  $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}$ . Pour retrouver l'équation de Schrödinger à une dimension il faut faire le changement de variable  $x = \ln(kr)$ , pour obtenir :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + q^2(x)\psi(x) = 0. \quad q^2(x) = n^2e^{2x} - m^2 \quad (4.19)$$

C'est cette équation qui représente l'équation de Schrödinger à une dimension avec un nombre d'onde effectif :

$$q(x) = q(r) = r\sqrt{k^2 - V_{eff}(r)}. \quad (4.20)$$

Le signe de  $q^2(r)$  va déterminer le comportement de la fonction d'onde et ses racines les points de rebroussement du potentiel.

Le potentiel donné par la relation (4.18) est la combinaison d'un potentiel attractif  $k^2[1 - n^2(r)]$  et d'une barrière centrifuge  $m^2/r^2$ . La combinaison de ces deux potentiels donne naissance à un potentiel métastable qui présente un puit de potentiel suivi d'une

barrière. Les modes propres de la cavité sont donc associés aux états quantiques qui vivent initialement dans le puit et qui s'échappent à travers la barrière par effet tunnel. La figure (4.8) montre l'allure du potentiel effectif  $V_{eff}(r)$ . Un potentiel donné par cette forme est caractérisé par quatre paramètres : la hauteur de la barrière  $k_{max}^2$  et la profondeur du puit  $k_{min}^2$  données par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{max}^2 = V_{eff}(a)|_{n=n_{ext}} = \frac{m^2}{a^2} \\ k_{min}^2 = V_{eff}(a)|_{n=n_{int}} = \frac{m^2}{a^2 n^2(a)}. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

La détermination de ces deux valeurs nous permet de distinguer deux types de résonance : Les résonances fines, caractérisées par une grande durée de vie et un nombre d'onde  $k$  tel que :

$$k_{min}^2 < k^2 < k_{max}^2. \quad (4.22)$$

Ces résonances vivent donc à l'intérieur du puit de potentiel et sont connectées directement à la barrière.

L'autre catégorie de résonances sont les résonances larges, ils ont un nombre d'onde tel que :  $k^2 > k_{max}^2$  et vivent au-delà du puit de potentiel. De ce fait ils ne voient pas directement la barrière et possèdent une durée de vie petite. La ligne rouge  $m = ka$  dans la figure (4.1-a) délimite ces deux types de résonances. Dans le spectre des nombres d'ondes donné par cette figure, les résonances fines sont en-dessous de cette ligne.

Cette distinction est importante dans la mesure où les modes qui nous intéressent doivent avoir un facteur de qualité élevé donc une grande durée de vie (équation 4.15). Nous chercherons donc les modes correspondant aux états de résonances fines.

Pour avoir une autre image de cette distinction, il est intéressant de remplacer la relation semi-classique (4.16) dans la condition (4.22) nous obtenons ainsi une condition pour l'angle d'incidence  $\chi$ , soit :

$$\frac{1}{n(a)} < \sin \chi < 1. \quad (4.23)$$

Cette condition n'est d'autre que la condition de réflexion totale pour un rayon lumineux qui arrive sur la frontière de la cavité avec un angle d'incidence  $\chi$ . Ainsi la notion de résonance fine est reliée à la notion de réflexion totale et l'effet tunnel à la notion d'évanescence.

Les deux autres paramètres qui caractérisent le potentiel de la figure (4.8) sont les points tournants ou points de rebroussement. Ces points sont les zéros du nombre d'onde

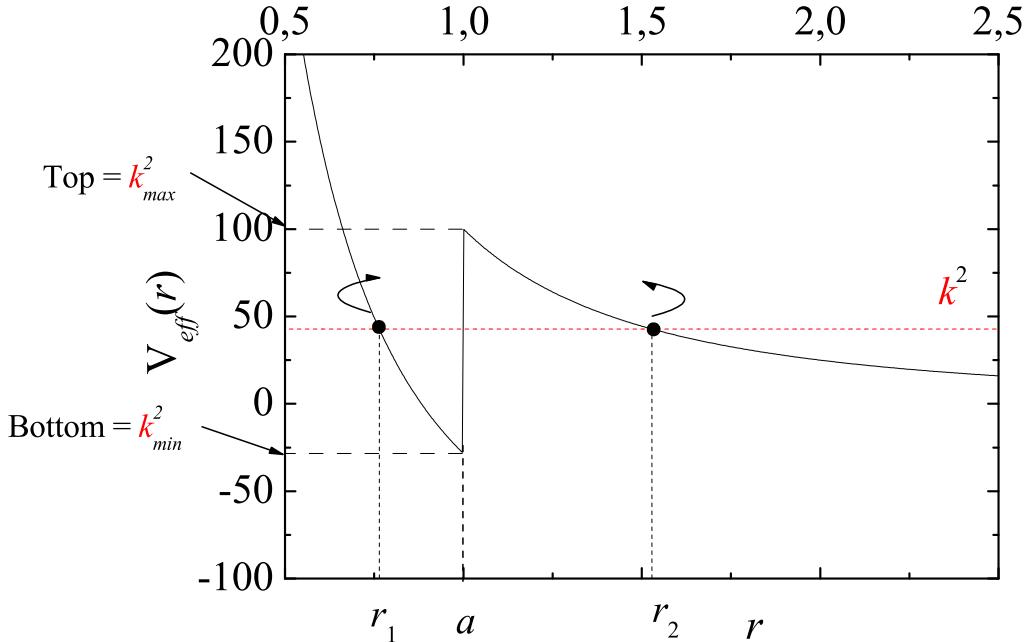


FIG. 4.8 – Forme du potentiel effectif  $V_{eff}(r)$ .  $r_1$  et  $r_2$  représentent les deux points tournants du potentiel.  $k_{min}^2$  et  $k_{max}^2$  représentent respectivement la profondeur du puit et la hauteur de la barrière.

effectif  $q(r)$  et ils délimitent les frontières entre les régions classiquement interdites et classiquement permises. Ils sont donnés donc par les expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} n(r_1)r_1 = \frac{m}{k} \\ r_2 = \frac{m}{k}. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

En remplaçant la relation semi-classique dans la première relation on obtient l'équation :

$$r_1n(r_1) = an(a) \sin \chi. \quad (4.25)$$

La solution de cette équation n'est d'autre que le rayon de la caustique de la trajectoire classique associé. Le deuxième point tournant  $r_2$  définit la largeur de la barrière de potentiel vue par un mode de nombre d'onde  $k$ , soit :

$$\Delta(m, k) = r_2 - a = \frac{m}{k} - a \propto \tau. \quad (4.26)$$

La valeur de  $\Delta$  est reliée directement à la durée de vie du mode. Un mode qui voit une barrière large possède une durée de vie grande et inversement. Ceci est important car la variation de la durée de vie (donc du facteur de qualité) est inversement proportionnelle à la variation du nombre d'onde  $k$ .

### 4.2.3 Interprétation des résultats

La relation entre la durée de vie et le nombre d'onde, via le potentiel, va définir la logique de notre interprétation des résultats présentés dans la section précédente : la variation du nombre d'onde  $k$  en fonction des paramètres d'inhomogénéité ( $\delta n$  et  $w$ ) sera interprétée par la variation de  $\sin \chi$  de la trajectoire correspondante, en fonction de ces mêmes paramètres. Une fois le comportement de  $k$  expliqué, on obtient le comportement de la durée de vie  $\tau$  et donc du facteur de qualité  $Q$  grâce à la relation (4.26). Nous avons étudié dans le chapitre précédent (section 3-3-1-c) l'influence d'une inhomogénéité, représentée par le même profil donné par la relation (4.1), sur les trajectoires périodiques et quasi-périodiques du système. En se servant des résultats obtenus dans cette section et en utilisant la relation semi-classique (4.16), nous allons relier le comportement du nombre d'onde  $k$  à celui de  $\sin \chi$  en fonction de  $\delta n$  et  $w$ .

La figure (3.6-a) montre la variation de  $\sin \chi$ , correspondant à plusieurs trajectoires périodiques, en fonction de l'amplitude de la Gaussienne  $\delta n$ . Nous constatons donc une augmentation de  $\sin \chi$  qui explique, par la relation (4.16), la diminution des valeurs de  $k$  en fonction de  $\delta n$  (figures 4.3-a, 4.3-c). Comme pour les trajectoires classiques, le taux de variation de  $k$  en fonction de  $\delta n$  est différent d'un mode à l'autre. Pour les trajectoires ceci dépend du confinement de celle-ci à l'intérieur de la cavité. Ce même constat s'applique sur les modes propres de la cavité. Si le mode possède une grande valeur de  $m$ , donc confiné dans une région  $(a - r_1)$  où  $r_1$  est grand (voir relation (4.24)), le taux de variation du nombre d'onde  $k$  associé, en fonction de  $\delta n$ , diminu. Ceci explique la possibilité d'avoir des croisements entre les branches de variation associées à des modes de différents  $m$  et différents  $l$ .

La figure (3.6-b) montre d'un autre côté la variation de  $\sin \chi$ , correspondant à plusieurs trajectoires périodiques, en fonction de la largeur de la Gaussienne  $w$ . Le comportement de  $\sin \chi$  est en accord avec la variation de  $k$  en fonction de  $w$  via la relation semi classique (4.16) jusqu'à une valeur limite  $w_l$ .

La figure (4.9) montre cette différence de comportement. En variant  $w$ ,  $\sin \chi$  passe par un maximum contrairement à  $k$  qui passe par un point d'inflexion. Cette différence vient du fait que pour ces deux limites ( $w = 0, +\infty$ ) le milieu devient homogène avec un indice de réfraction :

$$\left\{ \begin{array}{ll} n(r) = n_0 & w \longrightarrow 0 \\ n(r) = n_0 + \delta n. & w \longrightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Dans le cas d'un milieu homogène la différence majeure entre la dynamique classique et la dynamique ondulatoire est que la dynamique classique est indépendante de la valeur de l'indice contrairement au cas ondulatoire. Pour obtenir une trajectoire périodique de période donnée ou une trajectoire quasi-périodique avec un rayon de caustique donné, il faut utiliser la même condition initiale  $\sin \chi$  quelque soit la valeur de l'indice. Dans le cas des modes propres, la détermination du nombre d'onde  $k$  est par contre dépendante de la valeur de l'indice par la relation :

$$k_1 = k_0 \frac{n_0}{n_1}, \quad (4.28)$$

où  $k_1$  est la valeur du nombre d'onde d'un mode donné dans un milieu homogène d'indice  $n_1$  et  $k_0$  le nombre d'onde du même mode dans un milieu d'indice  $n_0$ .

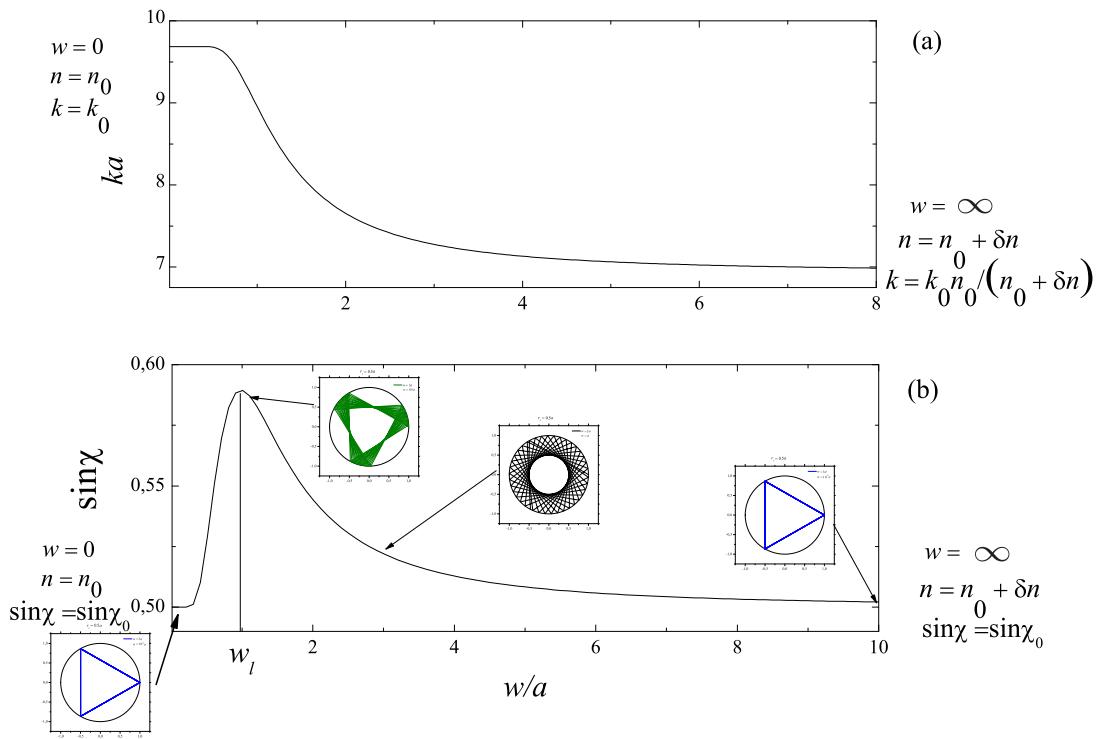


FIG. 4.9 – Différence de comportement entre la variation du nombre d'onde  $k$  et de  $\sin \chi$  en fonction de  $w$ . (a) Variation du nombre d'onde d'un mode  $TM_{20,1}$ . (b) Variation de  $\sin \chi$  en imposant que le rayon de la caustique soit égal à  $r_c = 0.5a$ .

Si on impose à une trajectoire classique d'avoir le même rayon de caustique, égal au rayon correspondant au cas homogène ( $r_c = a \sin \chi_0$ ), en variant  $w$ ,  $\sin \chi$  démarre

d'une valeur donnée à  $w = 0$  pour atteindre la même valeur pour  $w \rightarrow +\infty$ . Ceci explique évidemment le passage par un extremum. Pour un mode donné la valeur du nombre d'onde  $k$  démarre d'une valeur  $k_0$  à ( $w = 0$ ) pour atteindre une autre limite  $k = n_0 k_0 / (n_0 + \delta n) \neq k_0$  quand ( $w \rightarrow +\infty$ ) et ceci explique le passage par un point d'inflexion. Dans notre cas, la deuxième limite est supérieure ou inférieure à  $k_0$  dépendant du signe de  $\delta n$ , ce qui explique l'augmentation (la diminution) de  $k$  en fonction de  $w$  pour  $\delta n$  négatif (positif).

### 4.3 Modes propres d'une cavité non-intégrable

Dans les sections précédentes, nous avons étudié l'effet d'une inhomogénéité sur les caractéristiques d'un mode propre d'une cavité diélectrique, en présence d'une symétrie de rotation. Nous avons mis en évidence des comportements propres à l'inhomogénéité telles que le croisement de branches de variation  $k = k(\delta n)$  ou l'effet de  $\delta n$  et  $w$  sur le profil d'intensité des modes.

Malgré ces nouveaux comportements, l'inhomogénéité représentée par le profil d'indice (4.1) ne modifie pas le caractère directionnel de l'émission. C'est en bonne partie cet effet qui donne de l'importance à l'étude théorique des microcavités diélectriques. En brisant la symétrie de rotation, l'émission est plus intense dans des directions bien définies. En plus, le nombre d'onde et la durée de vie des modes changent en fonction des paramètres de perturbation qui mènent à la brisure de cette symétrie. Ces variations sont fortement reliées à l'apparition d'un régime chaotique dans la dynamique classique associé. Un nombre important de travaux ont mis en évidence ces effets mais uniquement dans le cadre de la déformation géométrique de la cavité.

Dans le chapitre précédent nous avons proposé un nouveau scénario de transition vers le chaos basé sur l'introduction d'une dépendance angulaire dans la forme de l'indice de réfraction à l'intérieur de la cavité. Avec un profil d'indice donné par la forme générale (3.30), la brisure de la symétrie de rotation se fait par le déplacement du centre de la Gaussienne, la dissymétrie de celle-ci ou une combinaison de ces deux effets. Nous espérons donc que l'application de ces scénarios modifie, au même titre que l'effet de la géométrie, les caractéristiques d'émission des modes propres de la cavité. Pour confirmer ces intuitions, il est indispensable de déterminer les modes associés à une configuration d'indice donnée ou à une géométrie donnée.

Dans le cas des cavités correspondantes à une dynamique classique intégrable, avec un indice de réfraction constant, une solution analytique de l'équation de propagation peut être déterminée. C'est le cas par exemple d'une cavité sphérique homogène [6], d'un billard annulaire symétrique [41] ou d'une cavité parabolique [70]. Ceci est possible dans la mesure où l'équation d'onde est séparable dans un système de coordonnées approprié à la géométrie. Quand cette séparation ne peut pas avoir lieu, une méthode numérique s'impose pour déterminer les solutions de l'équation d'onde et les nombres d'onde complexes associés à chaque mode d'émission.

Dans cette section nous allons présenter quelques méthodes numériques utilisées dans le cas des cavités asymétriques homogènes(ARCs). Nous allons par la suite détailler une méthode qui nous semble la plus appropriée pour traiter le cas inhomogène.

### 4.3.1 Les méthodes WMM

Nous allons présenter deux méthodes numériques qui ont été utilisé pour traiter le cas d'une cavité asymétrique homogène plongée dans un milieu également homogène. Ces méthodes sont appropriées au cas d'une cavité qui présente une déformation du cercle. L'équation polaire de ces cavités est donnée par la fonction  $R(\phi)$  qui doit posséder une dérivée définie en tout point  $\phi$ . D'autres méthodes sont utilisées pour traiter le cas contraire telles que les cavités polygonales. Ces méthodes sont connues sous le nom de *Boundary Element Method* (BEMs), elles consistent à transformer une équation différentielle à deux dimensions, telle que l'équation de Helmholtz, en une équation intégrale à une dimension et de discréteriser par la suite la frontière de la cavité. Cette méthode est très efficace pour traiter les problèmes de coins dans les polygones. Nous ne nous sommes pas intéressé à ces méthodes vu notre choix de cavité mais le lecteur intéressé pourra consulter les travaux de Wiersig à la référence [107].

La base théorique des méthodes que nous allons exposer, est le développement de la solution de l'équation de propagation dans la base des solutions obtenues pour le cas intégrable (cavité circulaire). L'homogénéité du milieu nous permet d'avoir des solutions analytiques de l'équation d'onde. Ces solutions s'écrivent donc comme une combinaison linéaire de fonctions de Hankel de première et de deuxième espèce, telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{int}(r, \phi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\alpha_l H_l^{(1)}(n_{int}kr) + \beta_l H_l^{(2)}(n_{int}kr)] e^{il\phi} \\ \Psi_{ext}(r, \phi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\gamma_l H_l^{(1)}(n_{ext}kr) + \delta_l H_l^{(2)}(n_{ext}kr)] e^{il\phi}, \end{array} \right. \quad (4.29)$$

$\Psi_{int}$  et  $\Psi_{ext}$  sont les solutions à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité et  $n_{int}$  et  $n_{ext}$  sont les valeurs de l'indice de réfraction à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité.

A ces solutions nous imposons les conditions de continuité, données par (4.12). Ces méthodes consistent donc à mélanger les solutions de l'équation de propagation, dans différentes régions de l'espace, et sont donc connues sous le nom de *Wave Matching method* (WMM).

Le but de telles méthodes est de trouver à la fois les coefficients de développement  $\alpha_l$ ,  $\beta_l$ ,  $\gamma_l$  et  $\delta_l$  et le spectre des nombres d'onde complexes pour lesquels la condition de continuité est réalisée. Pour cela, réécrivons les conditions (4.12) avec les solutions

(4.29), soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\alpha_l H_l^{(1)}(n_{int}kr) + \beta_l H_l^{(2)}(n_{int}kr)] e^{il\phi} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \gamma_l H_l^{(1)}(n_{ext}kr) e^{il\phi} \\ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\alpha_l H_l'^{(1)}(n_{int}kr) + \beta_l H_l'^{(2)}(n_{int}kr)] e^{il\phi} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \gamma_l H_l'^{(1)}(n_{ext}kr) e^{il\phi}, \end{array} \right. \quad (4.30)$$

où le symbole prime ('') représente la dérivée des fonctions de Hankel par rapport à la variable  $r$ . Ici les coefficients  $\delta_l$  sont nuls dans la mesure où nous traitons le problème d'émission. Dans ce cas, nous considérons la possibilité d'avoir une onde sortante, à l'extérieur de la cavité, en l'absence d'une onde entrante dans la même région.

Une deuxième condition doit être satisfaite par les solutions de l'équation de propagation, c'est la régularité à l'origine. Pour cela il faut trouver les bons coefficients  $\alpha_l$  et  $\beta_l$  pour que la solution ne diverge pas à  $r = 0$ . Du fait que les fonctions de Hankel divergent à l'origine, la seule combinaison possible pour assurer la régularité est telle que  $\alpha_l = \beta_l$ . Dans ce cas la somme des fonctions de Hankel de première et de deuxième espèce est égale à la fonction de Bessel de premier type  $J_l(n_{int}kr)$ .

### a) La méthode Nöckel

La première méthode que nous allons présenté a été développée par J. U Nöckel [69]. Ces travaux étaient les premiers dans l'étude théorique des cavités asymétriques. Il a développé une méthode qui a pour but de suivre l'évolution des résonances en fonction de la perturbation. Il a étudié le cas particulier d'une cavité appelée quadripôle, définie par l'équation polaire :

$$R(\phi) = a(1 + \epsilon \cos(2\phi)) \quad (4.31)$$

$\epsilon$  est le taux de déformation et à  $\epsilon = 0$  on retrouve l'équation d'un cercle de rayon  $a$ . L'idée de Nöckel est d'écrire les conditions de continuité (4.30) sous forme matricielle en tenant compte de la condition de régularité, soit :

$$\mathbf{M}(\phi, k_c)\mathbf{X} = 0 \quad (4.32)$$

ou :

- $\mathbf{M}(\phi)$  contient les ondes partielles :  $J_l(n_{int}k_c R(\phi))$  et  $H_l^{(1)}(n_{ext}k_c R(\phi))$ .
- $\mathbf{X}$  contient les coefficients de développement :  $\alpha_l$  et  $\gamma_l$ .
- Les lignes de  $\mathbf{M}$  sont indicées par la variable continue  $\phi$ .
- Les colonnes de  $\mathbf{M}$  sont indicées par la variable discrète  $l$ .

L'équation (4.32) doit être satisfaite pour toute les valeurs de  $\phi$ . La méthode numérique la plus appropriée pour la résoudre est la méthode de décomposition *Singular Value Decomposition* (SVD) [80].

Le choix de cette méthode est dû essentiellement au fait que nous allons définir la matrice  $\mathbf{M}$  comme une matrice rectangulaire, ce qui veut dire que le système d'équations doit contenir plus d'équations que de variables. Ce choix nous permet de déterminer simultanément et avec plus de précision les variables  $\alpha_l$  et  $\gamma_l$  et les valeurs de  $k$  complexes.

La résolution numérique n'est évidemment possible que si les séries données par (4.29) sont tronquées à une certaine valeur maximum  $l_{max}$ . Cette valeur va donc définir le nombre de coefficients à déterminer qui sera également le nombre de colonnes de la matrice  $\mathbf{M}$ . Le choix de  $l_{max}$  doit être judicieux. Il ne faut pas qu'il soit trop petit pour ne pas négliger certaines valeurs de  $l$ , qui ont une contribution importante dans le mode, ni trop grand pour maintenir une bonne précision qui peut être affectée par la divergence des fonctions de Hankel d'ordre élevé.

Pour la résolution numérique, il faut également discréteriser l'indice continue  $\phi$ , le choix de la discréétisation n'a pas beaucoup d'importance, du moment où elle est représentative de toute la frontière de la cavité  $R(\phi)$ . Le choix le plus facile est un découpage équidistant de la frontière tel que :

$$\phi_j = (j - 1) \frac{2\pi}{N_\phi} \quad j = 1, \dots, N_\phi \quad (4.33)$$

Ainsi  $2N_\phi$  va déterminer le nombre d'équations à résoudre et qui sera le nombre de lignes de la matrice  $\mathbf{M}$ . En tenant compte de ces procédures, la matrice  $\mathbf{M}$  va s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M}(\phi, k_c) = \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{cc} \mathbf{M}_{l=-l_{max}}^{11}(\phi_1) & \mathbf{M}_{l=-l_{max}}^{12}(\phi_1) \\ \mathbf{M}_{l=-l_{max}}^{21}(\phi_1) & \mathbf{M}_{l=-l_{max}}^{22}(\phi_1) \end{array} \right) & \cdots & \left( \begin{array}{cc} \mathbf{M}_{l=l_{max}}^{11}(\phi_1) & \mathbf{M}_{l=l_{max}}^{12}(\phi_1) \\ \mathbf{M}_{l=l_{max}}^{21}(\phi_1) & \mathbf{M}_{l=l_{max}}^{22}(\phi_1) \end{array} \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \left( \begin{array}{cc} \mathbf{M}_{l=-l_{max}}^{11}(\phi_j) & \mathbf{M}_{l=-l_{max}}^{12}(\phi_j) \\ \mathbf{M}_{l=-l_{max}}^{21}(\phi_j) & \mathbf{M}_{l=-l_{max}}^{22}(\phi_j) \end{array} \right) & \cdots & \left( \begin{array}{cc} \mathbf{M}_{l=l_{max}}^{11}(\phi_j) & \mathbf{M}_{l=l_{max}}^{12}(\phi_j) \\ \mathbf{M}_{l=l_{max}}^{21}(\phi_j) & \mathbf{M}_{l=l_{max}}^{22}(\phi_j) \end{array} \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \left( \begin{array}{cc} \mathbf{M}_{l=-l_{max}}^{11}(\phi_{N_\phi}) & \mathbf{M}_{l=-l_{max}}^{12}(\phi_{N_\phi}) \\ \mathbf{M}_{l=-l_{max}}^{21}(\phi_{N_\phi}) & \mathbf{M}_{l=-l_{max}}^{22}(\phi_{N_\phi}) \end{array} \right) & \cdots & \left( \begin{array}{cc} \mathbf{M}_{l=l_{max}}^{11}(\phi_{N_\phi}) & \mathbf{M}_{l=l_{max}}^{12}(\phi_{N_\phi}) \\ \mathbf{M}_{l=l_{max}}^{21}(\phi_{N_\phi}) & \mathbf{M}_{l=l_{max}}^{22}(\phi_{N_\phi}) \end{array} \right) \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

où :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{l=l}^{11}(\phi_j) = e^{il\phi_j} J_l(n_{int} k_c R(\phi_j)) \\ \mathbf{M}_{l=l}^{12}(\phi_j) = -e^{il\phi_j} H_l^{(1)}(n_{ext} k_c R(\phi_j)) \\ \mathbf{M}_{l=l}^{21}(\phi_j) = e^{il\phi_j} [l J_l(n_{int} k_c R(\phi_j)) - n_{int} k_c R(\phi_j) J_{l+1}(n_{int} k_c R(\phi_j))] \\ \mathbf{M}_{l=l}^{22}(\phi_j) = -e^{il\phi_j} [l H_l^{(1)}(n_{ext} k_c R(\phi_j)) - n_{ext} k_c R(\phi_j) H_{l+1}^{(1)}(n_{ext} k_c R(\phi_j))]. \end{cases} \quad (4.35)$$

A ce stade, la méthode SVD ne peut pas être utilisée. Elle donnerait une solution triviale,  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , au système homogène (4.32). L'idée de Nöckel est de définir un nouveau système non homogène en déplaçant une colonne de la matrice  $\mathbf{M}$  de l'autre côté de l'équation matricielle. Cette technique repose sur une idée physique qui suppose que les modes propres sont une combinaison d'ondes partielles, dont une possède une grande contribution. L'onde en question possède un moment cinétique  $l = m$ . Il est donc supposé que le coefficient associé dans la solution extérieure vaut un, soit :

$$\gamma_{l=m} = 1. \quad (4.36)$$

En remplaçant cette valeur dans les équations (4.30), nous pouvons faire passer le terme correspondant de l'autre côté. Ceci nous définit une nouvelle équation matricielle :

$$\mathbf{M}' \mathbf{X}' = \mathbf{C}, \quad (4.37)$$

où  $\mathbf{M}'$  est obtenue à partir de la matrice  $\mathbf{M}$  en enlevant la colonne  $(2l_{max} + 2m + 2)$ ,  $\mathbf{C}$  est le vecteur qui contient les mêmes éléments que cette colonne multiplié par  $(-1)$  et le vecteur  $\mathbf{X}'$  est le même que  $\mathbf{X}$  sans l'élément  $(2l_{max} + 2m + 2)$  qui correspond à  $\gamma_m = 1$ .

Il est maintenant possible d'utiliser la méthode SVD pour résoudre le système (4.37) pour une valeur de  $k_c$  donnée. Nous chercherons néanmoins les valeurs complexes de  $k_c$  qui minimisent la fonction  $|\mathbf{M}'(k_c)\mathbf{X}' - \mathbf{C}(k_c)|$  pour une valeur de la déformation  $\epsilon$ . Cette minimisation est difficile dans le plan complexe. Pour l'atteindre il faut donner une valeur initiale à  $k_c$  proche du minimum. Nous utiliserons pour cela la valeur de la résonance correspondante au mode circulaire. Soit donc  $k_0$  une valeur pour  $\epsilon = 0$ , il faut trouver la valeur  $k_{\delta\epsilon}$  qui minimise la différence  $|\mathbf{M}'(k_c)\mathbf{X}' - \mathbf{C}(k_c)|$  à  $\epsilon = \delta\epsilon$ . Il faut par la suite itérer cette opération par pas de  $\delta\epsilon$  et ceci en prenant la valeur  $k_{\delta\epsilon}$  comme valeur initiale pour trouver la valeur  $k_{2\delta\epsilon}$ . Comme nous l'avons déjà vu, chaque mode circulaire correspond à une valeur de  $m$  donnée. C'est cette valeur qui sera utilisée pour transformer le système homogène à un système représenté par (4.37).

La figure (4.10) montre le résultat du calcul numérique basé sur cette méthode. Nous obtenons donc une courbe lisse qui représente la variation adiabatique de la position

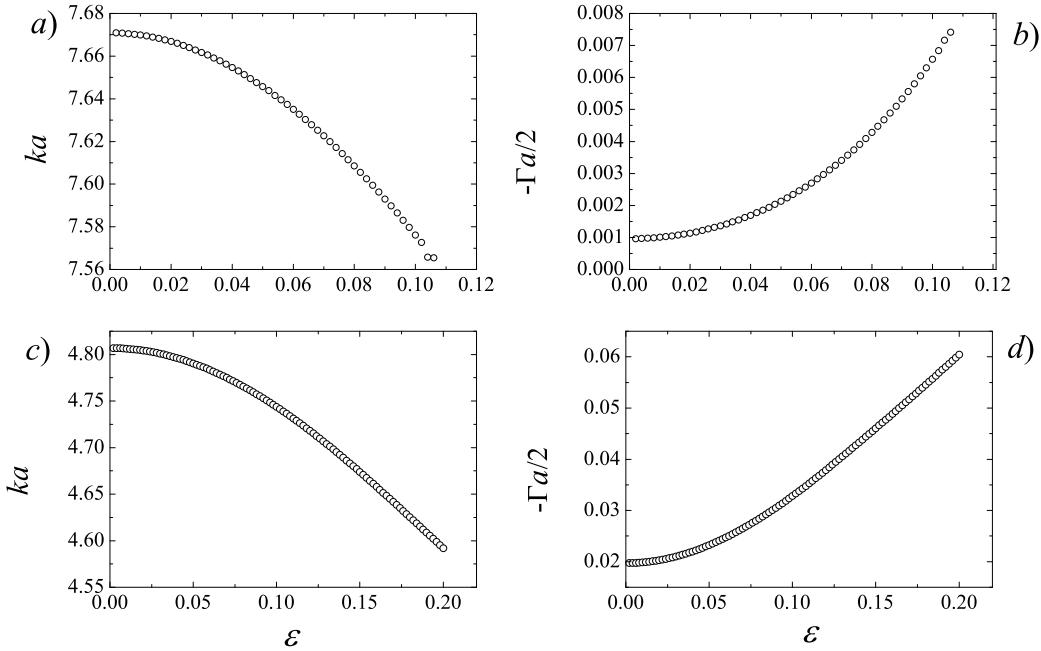


FIG. 4.10 – Evolution adiabatique du nombre d'onde  $k_c$  complexe en fonction de la déformation  $\epsilon$ . Étude portée sur deux modes avec une contribution maximale d'un  $m$  pair et un  $m$  impair : (a-b) partie réelle et partie imaginaire pour un mode circulaire  $k_c a = 4.8069 - i0.0197$  et une contribution maximale  $m = 7$ , (c-d) partie réelle et partie imaginaire pour un mode circulaire  $k_c a = 7.67092 - i9.594 \cdot 10^{-4}$  et une contribution maximale  $m = 12$ . La valeur de l'indice de réfraction à l'intérieur de la cavité vaut :  $n_{int} = 2$ .

et de la largeur d'une résonance en fonction de la perturbation. Nous avons fait l'étude sur une cavité quadripôle. Ce résultat est obtenue en suivant deux résonances du cercle qui correspondent à un moment angulaire pair  $m = 12$  et un moment angulaire impair  $m = 7$ .

### b) La méthode Tureci

La deuxième méthode a été développée par H. E. Tureci [101]. Vu l'importance de construire une méthode numérique pour chercher les modes propres d'une cavité non-intégrable, Tureci y a consacré une grande partie de ces premiers travaux de recherche. Sa méthode est basée sur le mélange des fonctions d'onde à la frontière de la cavité. C'est une méthode WMM qui repose donc sur le système d'équations (4.30).

La première étape dans l'implémentation de la méthode consiste à enlever toute la

dépendance angulaire dans les équations (4.30). Ceci constitue une différence majeure avec la méthode Nöckel. Pour enlever cette dépendance, on multiplie chaque terme des équations (4.30) par le facteur  $e^{-im\phi}$  et on intègre par rapport à  $\phi$ . Ainsi le système d'équations représentants les conditions de continuité se transforme en un système d'équations matricielles :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1^{(1)}|\alpha> + \mathbf{H}_1^{(2)}|\beta> = \mathbf{H}_2^{(1)}|\gamma> \\ \mathcal{D}\mathbf{H}_1^{(1)}|\alpha> + \mathcal{D}\mathbf{H}_1^{(2)}|\beta> = \mathcal{D}\mathbf{H}_2^{(1)}|\gamma>. \end{cases} \quad (4.38)$$

L'indice représente la région de l'espace où la solution est définie (1 : intérieur de la cavité, 2 : extérieur de la cavité) et l'exposant la nature de la fonction de Hankel (1 : première espèce, 2 : deuxième espèce). Les éléments de chaque matrice sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} [\mathbf{H}_{(1,2)}^{(1,2)}]_{lm} = \int_0^{2\pi} H_l^{(1,2)}(n_{(1,2)}kR(\phi))e^{i(l-m)\phi} \\ [\mathcal{D}\mathbf{H}_{(1,2)}^{(1,2)}]_{lm} = \int_0^{2\pi} H_l'^{(1,2)}(n_{(1,2)}kR(\phi))e^{i(l-m)\phi}. \end{cases} \quad (4.39)$$

La structure de ces matrices traduit la structure des modes résonnants de la cavité.

Dans le cas intégrable ( $\epsilon = 0$ ) ces matrices sont diagonales, les fonctions de Hankel à l'intérieur des intégrales (4.39) sont indépendantes de  $\phi$ . Ces intégrales se transforment donc en un symbole de Kronecker  $\delta_{lm}$ . Ceci traduit la conservation du moment cinétique et donc le fait que  $l$  est un bon nombre quantique. En théorie de la diffusion ceci veut dire qu'une onde incidente de moment cinétique  $l$  se diffuse par une seule voie de sortie possédant le même moment cinétique. Avec la perturbation,  $l$  n'est plus un bon nombre quantique. L'onde incidente est dans ce cas connectée à plusieurs voies de sortie avec des probabilités différentes. Chaque mode est ainsi constitué de plusieurs ondes partielles avec différentes contributions. La figure (4.11) montre la structure de l'une de ces matrice à savoir  $\mathbf{H}_1^{(2)}$ . L'étalement autour de la diagonale est proportionnel à la déformation  $\epsilon$ .

La deuxième étape dans la construction de l'algorithme est de définir une équation matricielle qui relie les vecteurs  $|\alpha>$  et  $|\beta>$ . Pour cela il faut éliminer le vecteur  $|\gamma>$  des équations (4.38). Ainsi nous obtenons l'équation aux valeurs propres :

$$\mathbf{S}(k)|\alpha> = \lambda|\alpha>. \quad (4.40)$$

Ceci est écrit en supposant la relation :

$$|\alpha> = \lambda|\beta>, \quad (4.41)$$

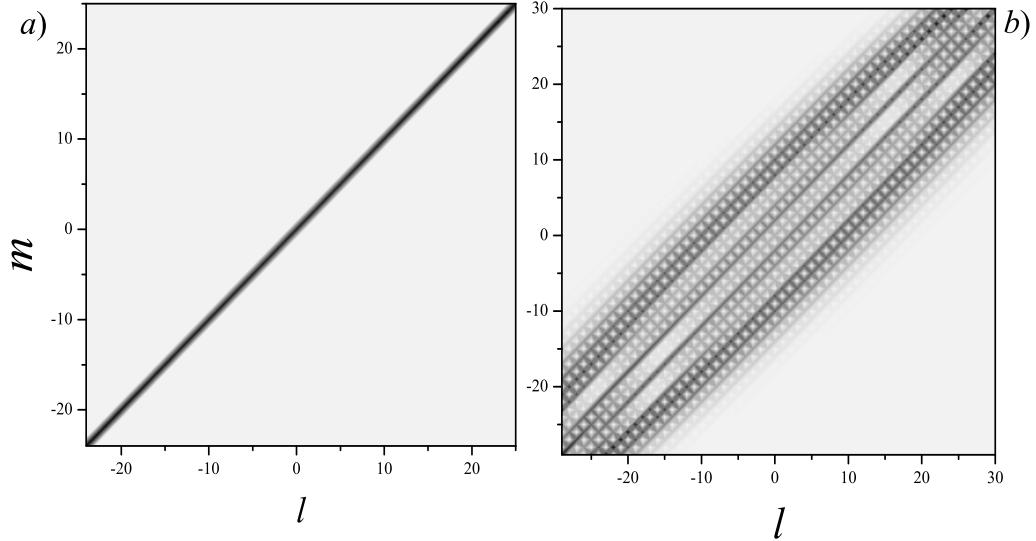


FIG. 4.11 – Représentation de la matrice  $\mathbf{H}_1^{(2)}$  donnée par la relation (4.39). La cavité est représentée par un quadripôle d'équation polaire (4.31) : a) cas  $\epsilon = 0$ , b) cas  $\epsilon = 0.15$ . L'indice de réfraction à l'intérieur de la cavité est  $n_{int} = 2.5$  et le nombre d'onde est tel que :  $n_{int}ka = 42$ .

et la forme de la matrice  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{S}(k) = \left\{ -[\mathbf{H}_2^{(1)}]^{-1} \mathbf{H}_1^{(2)} + [\mathcal{D}\mathbf{H}_2^{(1)}]^{-1} \mathcal{D}\mathbf{H}_1^{(2)} \right\}^{-1} \left\{ [\mathbf{H}_2^{(1)}]^{-1} \mathbf{H}_1^{(1)} - [\mathcal{D}\mathbf{H}_2^{(1)}]^{-1} \mathcal{D}\mathbf{H}_1^{(1)} \right\}. \quad (4.42)$$

Toute la stratégie de la méthode repose sur l'équation (4.40). L'idée principale consiste à changer la condition de quantification du nombre d'onde  $k$ . Dans la méthode de Nöckel nous avons cherché les valeurs de  $k$  complexes qui satisfont la condition de continuité et ceci en assurant la régularité de la solution à  $r = 0$ . Dans la méthode Tureci nous chercherons les valeurs de  $k$  qui vérifient la condition de régularité en assurant la continuité de la solution sur la frontière. Nous avons déjà vu qu'avec le développement en série de la solution en terme de fonctions de Hankel, la seule possibilité pour assurer la régularité à l'origine est d'avoir l'égalité :

$$|\alpha| = |\beta|. \quad (4.43)$$

Ainsi la nouvelle condition de continuité est la suivante : il faut chercher les valeurs discrètes du nombre d'onde  $k$  telles que le spectre des valeurs propres de l'équation (4.40) contient des valeurs  $\lambda = 1$ .

Avant de définir la stratégie de recherche des valeurs de  $k$ , nous allons parler des dimensions de la matrice  $\mathbf{S}(k)$  à diagonaliser. Pour utiliser une méthode numérique il faut absolument tronquer les dimensions des matrices intervenant dans le problème. Pour la méthode WMM cette troncature se fait au niveau du développement en série des solutions (4.29). Chaque mode est constitué d'un ensemble d'ondes partielles qui ont une grande contribution. Cet ensemble est partagé en deux catégories. La première contient les ondes partielles qui possèdent un moment angulaire correspondant à une trajectoire classique possible. Cette correspondance est donnée par la relation semi classique (4.16). Cette relation définit donc la dimension de ce premier ensemble soit :

$$\Lambda_{clas} = n_{int} k r_{min}. \quad (4.44)$$

Ici le rayon du cercle  $a$  est remplacé par  $r_{min}$ , qui définit le rayon minimum de la cavité<sup>3</sup>. En tenant compte uniquement de cet ensemble, certains modes ne satisfont pas les conditions de continuité dans certaines directions. Il est suggéré de prendre un nombre supplémentaire d'ondes partielles [23]. Ces ondes sont appelées les composantes évanescentes du mode et leur nombre, noté  $\Lambda_{ev}$ , n'est pas défini par une règle particulière. Il est choisi généralement comme une limite au delà de laquelle le résultat du calcul ne change plus. Ainsi la dimension de la matrice  $\Lambda_{\mathbf{S}}$  est égale à :

$$\Lambda_{\mathbf{S}} = 2(\Lambda_{clas} + \Lambda_{ev}) + 1. \quad (4.45)$$

La stratégie de recherche repose sur le comportement des valeurs propres  $\lambda$  par rapport à la variation du nombre d'onde  $k$  complexe. Si on considère que les valeurs propres, à priori complexes s'écrivent sous la forme :

$$\lambda = e^{i(\theta+i\eta)}. \quad (4.46)$$

On peut démontrer, en utilisant les propriétés des fonctions de Hankel, que la vitesse de variation de  $\theta$  en fonction de la partie réelle de  $k$  et la vitesse de variation de  $\eta$  en fonction de la partie imaginaire de  $k$  sont constantes. Les étapes à suivre pour trouver les valeurs de  $k$  qui vérifient la condition de quantification est la suivante :

1. Faire la diagonalisation de la matrice  $\mathbf{S}$  pour une valeur arbitraire de  $k^1 = k_r^1 + i k_i^1$  et une valeur de la perturbation  $\epsilon$  donnée. Ceci nous donne un ensemble de  $\Lambda_{\mathbf{S}}$  valeurs propres complexes  $\lambda_i^1$  définie chacune par un couple  $(\theta_i^1, \eta_i^1)$ . La figure (4.12) montre un exemple de cet ensemble pour une valeur de  $k = 6$  avec une perturbation  $\epsilon = 0.1$ .
2. Faire une deuxième diagonalisation pour la même valeur de  $\epsilon$  mais à une valeur  $k^2 = k^1 + \Delta k$ .  $\Delta k = \delta k_r + i \delta k_i$  est une faible perturbation par rapport à  $k^1$  de l'ordre de 1%. Ceci nous définit un nouvel ensemble de valeurs propres définies par les couples  $(\theta_i^2, \eta_i^2)$ .

---

<sup>3</sup>Dans le cas d'un quadripôle on a :  $r_{min} = 1 - \epsilon$

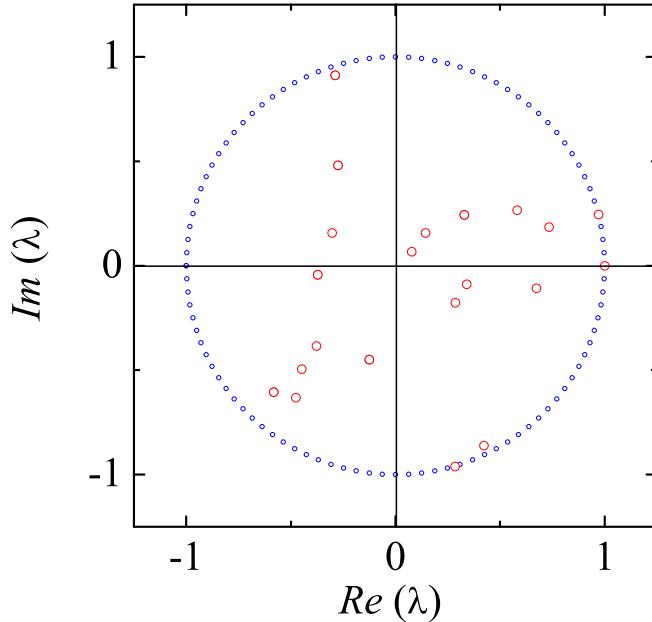


FIG. 4.12 – Spectre de valeurs propres de la matrice  $\mathbf{S}(k)$ . Calcul établit pour les paramètres :  $k = 6$ ,  $n_{int} = 2$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $\Lambda_{clas} = 11$  et  $\Lambda_{ev} = 5$ .

3. Tracer, à l'aide des couples  $(\theta_i^{1,2}, \eta_i^{1,2})$  et  $(k_r^{1,2}, k_i^{1,2})$ , les courbes  $\theta = \theta(\Re(k))$  et  $\eta = \eta(\Im(k))$ . A cause du comportement linéaire que nous avons évoqué, ces courbes sont des droites.
4. Trouver l'intersection de ces droites avec l'axe des abscisses ( $\theta = 0$ ) et ( $\eta = 0$ ). Pour chaque droite, la valeur de l'abscisse au point d'intersection donne  $\Re(k_c)$  pour  $\theta = 0$  et  $\Im(k_c)$  pour  $\eta = 0$ .

Cette méthode est très efficace, elle permet de trouver les résonances, avec une bonne précision, en effectuant deux diagonalisations seulement et pour une seule application de l'algorithme de trouver plusieurs résonances à la fois.

La figure (4.13) montre une application de cette méthode. Le calcul est effectué pour un quadripôle avec un paramètre de déformation  $\epsilon = 0.1$  et un indice de réfraction à l'intérieur de la cavité  $n_{int} = 2$ . La valeur initiale du nombre d'onde est  $k^1 = 2$  et la dimension de la matrice  $\mathbf{S}$  est telle que :  $\Lambda_{clas} = 4$  et  $\Lambda_{ev} = 2$ . Vu la taille de la matrice à diagonaliser nous avons effectué le calcul en faisant une cinquantaine de diagonalisation avec un pas de  $\Delta k = 0.01 + i0.01$ . La figure montre clairement la variation linéaire de  $\theta$  et  $\eta$  en fonction de la partie réelle et la partie imaginaire de  $k$ .

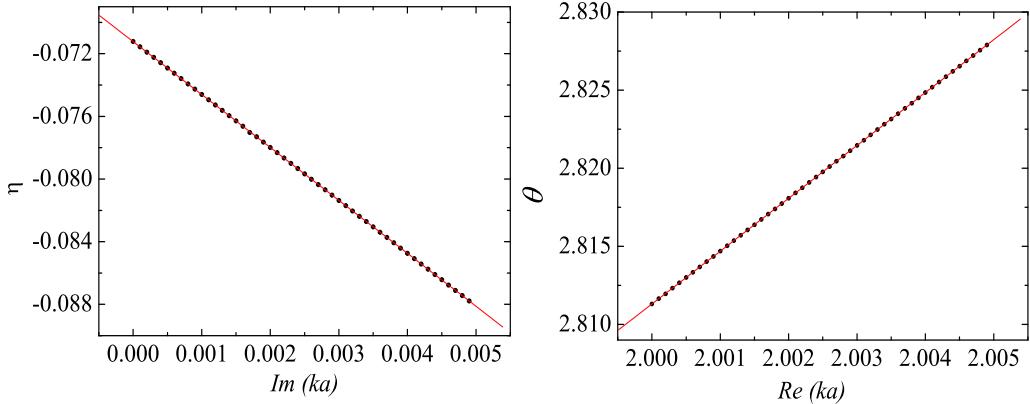


FIG. 4.13 – Variation de  $\theta$  et  $\eta$  en fonction de  $\Re(k)$  et  $\Im(k)$ . Calcul effectué pour une valeur initiale  $k^1 = 2$  avec une déformation  $\epsilon = 0.1$  et un indice  $n_{int} = 2$ . La dimension de la matrice  $\mathbf{S}$  est définie en prenant  $\Lambda_{clas} = 4$  et  $\Lambda_{ev} = 2$ .

Pour avoir la meilleure précision nous avons fait un lissage linéaire avec l'ensemble des points issus des diagonalisations successives. Le résultat de ce lissage donne les équations des droites associées, soit :

$$\begin{cases} \theta \simeq -3.957423 + 3.384365 \Re(k) \\ \eta \simeq -0.071223 - 3.380031 \Im(k). \end{cases} \quad (4.47)$$

L'intersection de ces droites avec l'axe des abscisses nous permet d'obtenir la valeur de  $k_c$  à la résonance, soit :

$$\begin{cases} \Re(k) \simeq 1.1693249 \\ \Im(k) \simeq -0.0210719. \end{cases} \quad (4.48)$$

Cette opération va être itérée pour l'ensemble des  $\Lambda_{\mathbf{S}}$  valeurs propres issues de la première diagonalisation. Ceci nous permet d'avoir un nombre de valeurs de  $k$ , proche de la dimension de  $\mathbf{S}$ , correspondants à un ensemble de modes résonants de la cavité.

Nous avons présenté deux méthodes numériques permettant la recherche des valeurs de  $k$  correspondants aux modes propres d'une cavité homogène convexe. La méthode de Nöckel permet de voir l'évolution des valeurs de  $k$  en fonction de la déformation. Elle présente néanmoins quelques inconvénients :

1. Absence de critère formel pour déterminer les valeurs de  $k$  à la résonance.

2. Imposition d'une contribution principale  $m = l$  dans la décomposition en ondes partielles.
3. Echec de la méthode aux points d'intersection entre les branches d'évolution  $k = k(\epsilon)$ . L'état du système n'est pas bien défini après l'intersection. Ceci est une conséquence de la dépendance de la valeur de  $k$  à une déformation  $\epsilon$  de sa valeur à  $\epsilon - \delta\epsilon$ .
4. Obtention d'une *seule* valeur de  $k$  pour une valeur de  $\epsilon$  donnée.

La méthode de Tureci résout la totalité de ces problèmes. L'évolution linéaire de la phase des valeurs propres en fonction de  $k$  permet de trouver en une seule fois un ensemble considérable de valeurs de  $k$  et avec une grande précision. Le calcul pour une déformation donnée ne dépend pas du calcul pour une autre déformation. Les modes sont définis clairement par l'ensemble des vecteurs propres issues de la diagonalisation aux valeurs de  $k$  qui vérifient la condition de quantification. Cette méthode reste la plus efficace pour la recherche des modes résonants d'une cavité asymétrique homogène convexe.

### 4.3.2 La méthode RZ

Malgré la puissance de la méthode Tureci, qualifiée comme la plus efficace des méthodes WMM, celle-ci ne peut être appliquée dans le cas qui nous intéresse, à savoir les cavités inhomogènes convexes. Les méthodes WMM sont basées sur le développement de la solution à l'intérieur de la cavité dans la base des solutions du cas intégrable. Dans le cas d'une cavité homogène, les éléments de cette base sont données par les fonctions :  $H_l^{1,2}(nkr) \exp(il\phi)$ . Chaque élément de cette base est solution de l'équation de propagation (4.2) avec un indice de réfraction constant  $n = n_0$ . Ce n'est pas le cas pour une cavité inhomogène car la dépendance de l'indice des variables d'espace couple la variation angulaire et radiale du champ électromagnétique. D'un autre côté, la force de la méthode Tureci est basée sur la variation linéaire des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{S}$ , qui vérifie l'équation (4.40), en fonction du nombre d'onde complexe  $k$ . La démonstration de cette propriété est basée sur les propriétés des fonctions de Hankel. Il n'est pas certain que si l'équation de propagation admet une autre solution cette propriété reste conservée. Il est donc nécessaire pour trouver les modes propres d'une cavité inhomogène de développer une méthode numérique qui nous permet, à la fois, de résoudre l'équation (4.2) avec  $n = n(r, \phi)$  et de trouver les valeurs du nombre d'onde qui vérifient la condition de quantification.

Nous proposons donc d'étudier une méthode qui nous semble appropriée pour résoudre ce problème. Cette méthode a été développée en grande partie par A. I. Rahachou et I. V. Zozoulenko [81], d'où l'appellation : méthode RZ. Elle a été utilisée pour l'étude de l'effet des imperfections de la frontière de la cavité sur les caractéristiques des modes propres d'une cavité homogène. Ces imperfections impliquent une inhomogénéité du milieu mais dans une région limitée de l'espace près de la frontière. Conceptuellement

elle peut être adaptée au cas d'une inhomogénéité qui couvre toute la surface de la cavité.

La méthode est basée sur le formalisme de la matrice diffusion  $\mathbf{S}$ . L'idée principale consiste à diviser l'espace en un nombre  $N$  de domaines en forme de cercles concentriques. A chaque  $i^{\text{ème}}$  frontière entre deux domaines voisins la matrice  $\mathbf{S}^i$ , qui relie l'état qui se propage vers la frontière et l'état qui se propage loin de celle-ci (ou en d'autres termes, plus utilisé en théorie de diffusion, l'onde entrante et l'onde sortante) est déterminée. La matrice  $\mathbf{S}$  totale qui décrit l'état de la diffusion est calculée par une combinaison de toutes les matrices  $\mathbf{S}^i$ . Une fois la matrice  $\mathbf{S}$  calculée on en déduit une matrice, appelé matrice à délais, ou la matrice de Wigner-Smith  $\mathbf{Q}$  [92]. La variation des éléments diagonaux de cette matrice en fonction du nombre d'onde réel  $k$  va permettre de trouver la position et la largeur des résonances recherchées.

### a) Solution de l'équation de propagation

Nous considérons donc une cavité bidimensionnelle de frontière  $\partial D$  d'indice  $n(r, \phi)$ , plongée dans un milieu d'indice  $n = 1$ . En s'intéressant uniquement au mode de polarisation TM, la propagation de la composante  $E_z$  du champ électrique est régie par l'équation de Helmholtz (4.2). Afin de résoudre cette équation, l'espace est divisé en trois parties délimitées par deux cercles de rayons  $d$  et  $R$  avec ( $d < R$ ). Les régions  $(0 < r < d)$  et  $(R < r < \infty)$  sont caractérisées par des indices de réfraction  $(n_1, n_3)$  constants et la région intermédiaire  $(d < r < R)$  contient l'inhomogénéité du milieu  $n_2 = n_2(r, \phi)$  (figure 4.14).

Dans les régions où l'indice est constant la solution est donnée par la combinaison linéaire des fonctions de Hankel du premier et du deuxième espèce ( $H_q^{(1)}, H_q^{(2)}$ ) d'ordre  $q$ , soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{III}(r, \phi) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} [A_q H_q^{(2)}(n_3 kr) + B_q H_q^{(1)}(n_3 kr)] e^{iq\phi} \\ \Psi_I(r, \phi) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} [a_q^0 H_q^{(2)}(n_1 kr) + b_q^0 H_q^{(1)}(n_1 kr)] e^{iq\phi}. \end{array} \right. \quad (4.49)$$

La région I contient l'origine. La solution correspondante doit satisfaire la condition de régularité. Comme nous l'avons déjà évoqué ceci correspond à une combinaison des fonctions de Hankel telle que ( $a_q^0 = b_q^0$ ). Avec ce critère, la solution est simplement donnée par :

$$\Psi_I(r, \phi) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} a_q^0 J_q(n_1 kr) e^{iq\phi}. \quad (4.50)$$

Dans la région intermédiaire l'indice de réfraction dépend des deux variables  $r$  et  $\phi$ . A cause de cette dépendance, la séparation des variables dans l'équation de Helmholtz

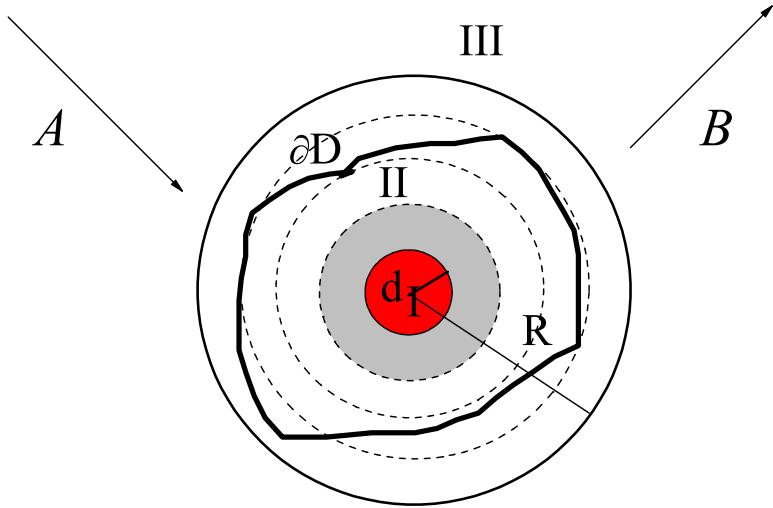


FIG. 4.14 – Division de l'espace en trois domaines. Les domaines I et III sont caractérisées par des indices de réfraction constants  $n_1$  et  $n_3$  et le domaine II par un indice variable  $n_2(r, \phi)$ .

n'est pas possible. En divisant le domaine II en  $N$  domaines, il est toutefois possible de trouver une solution approximative dans chaque domaine. Nous supposons pour cela que la largeur de chaque région  $i$  tend vers 0 ( $2\Delta_i \rightarrow 0$ ), dans ce cas nous considérons que la variable  $r$  est une constante  $r \approx \rho_i$  et que l'indice ne dépend ainsi que de la variable angulaire  $\phi$ ,  $n(r, \phi) = n_i(\rho_i, \phi)$ . Avec ces hypothèses nous chercherons les solutions de l'équation de Helmholtz comme le produit d'une fonction radiale et une fonction angulaire, soit :

$$\Psi_{II}(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi). \quad (4.51)$$

En substituant cette forme de solution dans l'équation (4.2) nous obtenons :

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} = -\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} - r^2 k^2 n_2^2(r, \phi) = \xi, \quad (4.52)$$

où  $\xi$  est une constante de séparation. En remplaçant  $r$  par  $\rho_i$  nous obtenons, pour chaque domaine  $i$ , une équation différentielle pour chaque fonction, soit :

$$\frac{\partial^2 \Phi^i(\phi)}{\partial \phi^2} + (\rho_i^2 k^2 n_2^2(\rho_i, \phi) + \xi_i) \Phi^i(\phi) = 0 \quad (4.53)$$

et

$$\frac{\partial^2 R^i(r_i)}{\partial r_i^2} + \frac{\partial R^i(r_i)}{\partial r_i} - \xi_i R^i(r_i) = 0. \quad (r_i = r/\rho_i) \quad (4.54)$$

L'équation (4.54) possède une solution analytique donnée par :

$$R^i(r_i) = a e^{(-1/2 + i\gamma_i)r_i} + b e^{(-1/2 - i\gamma_i)r_i}, \quad (4.55)$$

avec :

$$\gamma_i = i\sqrt{1/4 + \xi_i}. \quad (4.56)$$

L'équation (4.53) n'a pas de solution analytique, elle est donc résolue numériquement et les solutions doivent satisfaire la condition cyclique :  $\Phi^i(0) = \Phi^i(2\pi)$ . Cette équation est une équation aux valeurs propres qui admet une infinité de valeurs  $\xi_m^i$  associées à une infinité de fonctions propres  $\Phi_m^i$ . Pour chaque valeur propre, nous associons une solution de l'équation radiale  $R_m^i(r_i)$ , donnée par la relation (4.55). Ainsi la solution de l'équation de Helmholtz dans un domaine  $i$  est donnée par le produit de ces deux solutions et la solution générale comme une combinaison linéaire de ces produits, soit :

$$\Psi_i(r_i, \phi) = \sum_m \left[ a_m^i e^{(-1/2 + i\gamma_m^i)r_i} + b_m^i e^{(-1/2 - i\gamma_m^i)r_i} \right] \Phi_m^i(\phi). \quad (4.57)$$

Dans la partie radiale de cette solution le terme  $\exp(+i\gamma_m^i r_i)$  correspond aux solutions qui se propagent dans le sens de  $r$  croissant (loin de l'origine), et le terme  $\exp(-i\gamma_m^i r_i)$  aux solutions qui se propagent dans le sens des  $r$  décroissant. En adoptant comme convention de notation que les coefficients  $a_m$  correspondent aux ondes entrantes et les coefficients  $b_m$  aux ondes sortantes la solution de l'équation de Helmholtz dans le domaine  $i + 1$  est donnée par :

$$\Psi_{i+1}(r_{i+1}, \phi) = \sum_m \left[ a_m^{i+1} e^{(-1/2 - i\gamma_m^{i+1})r_{i+1}} + b_m^{i+1} e^{(-1/2 + i\gamma_m^{i+1})r_{i+1}} \right] \Phi_m^{i+1}(\phi). \quad (4.58)$$

### b) Définition de la matrice de diffusion $\mathbf{S}$

Avant de décrire le processus de détermination de la matrice  $\mathbf{S}$  totale, nous allons donner un bref rappel de la définition de celle-ci et quelques unes de ses propriétés. En considérant une région d'interaction, la matrice  $\mathbf{S}$  relie l'état initial  $\mathbf{A}$  du système à l'état final  $\mathbf{B}$ <sup>4</sup> par la relation :

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{A}. \quad (4.59)$$

La matrice  $\mathbf{S}$  doit conserver le flux de probabilité.  $|A_q|^2$  étant la probabilité d'être dans l'état  $q$ , nous avons :

$$\sum_i |A_q|^2 = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = 1. \quad (4.60)$$

$\mathbf{A}^\dagger$  est le vecteur adjoint (transposé et complexe conjugué de  $\mathbf{A}$ ). A cause de la conservation de la probabilité, le vecteur  $\mathbf{B}$  doit satisfaire la même condition (4.60). En utilisant la relation (4.59) nous obtenons :

$$\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{A} = 1 \implies \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \mathbf{I} \implies \mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}^{-1}. \quad (4.61)$$

---

<sup>4</sup>Ces vecteurs contiennent les coefficients de développement  $A_q$  et  $B_q$  dans une base donnée.

Ainsi la matrice  $\mathbf{S}$  est unitaire et l'élément  $S_{qm}$  représente la probabilité de transition de l'état  $q$  à l'état  $m$ . L'inversion du temps impose une autre propriété à la matrice  $\mathbf{S}$  qui doit être symétrique :  $S_{qm} = S_{mq}$ . Ces deux propriétés de la matrice  $\mathbf{S}$  peuvent être utilisées comme test lors de l'implémentation numérique.

### c) Combinaison des matrices $\mathbf{S}^i$

Afin d'appliquer la technique de la matrice de diffusion, la région II est partagée en un nombre  $N$  de domaines circulaires concentriques distants de  $2\Delta_i$  (figure 4.15). Dans chaque domaine, l'équation de Helmholtz est solutionnée afin d'écrire la matrice de diffusion  $\mathbf{S}^i$  sur la frontière de chaque domaine. Cette matrice reliera les états qui se propagent vers la frontière, représentés par les coefficients de développement  $\{a_m^i\}$  et  $\{a_m^{i+1}\}$ , et les états qui se propagent loin de la frontière, représentés par les coefficients de développement  $\{b_m^i\}$  et  $\{b_m^{i+1}\}$  (voir figure (4.15) et relations (4.57) et (4.58)). Soit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}^i \\ \mathbf{b}^{i+1} \end{pmatrix} = \mathbf{S}^i \begin{pmatrix} \mathbf{a}^i \\ \mathbf{a}^{i+1} \end{pmatrix} \quad 0 \leq i \leq N \quad (4.62)$$

$\mathbf{a}^i$  et  $\mathbf{b}^i$  sont les vecteurs colonnes qui contiennent les coefficients de développement  $a_m^i$  et  $b_m^i$  de la solution de l'équation de Helmholtz à l'intérieur du  $i^{\text{ème}}$  domaine.

Comme le montre la figure (4.15), l'onde entrante  $\mathbf{a}_{i+1}$  pour la frontière  $i$  est une onde sortante pour la frontière  $i + 1$  et l'onde sortante  $\mathbf{b}_{i+1}$  pour la frontière  $i$  est une onde entrante pour la frontière  $i + 1$ . Ceci nécessite l'écriture de la matrice  $\mathbf{S}^{i+1}$ , qui décrit l'interaction sur la frontière  $i + 1$ , de manière différente que  $\mathbf{S}^i$ , soit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}^{i+1} \\ \mathbf{a}^{i+2} \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{i+1} \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{i+1} \\ \mathbf{b}^{i+2} \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

Pour déterminer ces matrices de façon itérative, l'indice  $i$  dans les relations (4.62) et (4.63) varie donc par pas de deux entre 0 et  $N$  ( $i$  pair).  $i = 0$  correspond à la frontière entre la région I et la région II et  $i = N$  à la frontière entre la région II et la région III. Les matrices de diffusion ( $\mathbf{S}^0$  et  $\mathbf{S}^N$ ) associées à ces deux valeurs sont donc données par<sup>5</sup> :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}^0 \\ \mathbf{b}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{b}^1 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^0 \begin{pmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}^1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{b}^N \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{S}^N \begin{pmatrix} \mathbf{a}^N \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

La technique de la matrice de diffusion consiste à trouver la matrice  $\mathbf{S}$  qui représente l'interaction avec la cavité. L'idée principale de la technique consiste à ne pas considérer l'interaction de manière globale mais de la suivre étape par étape sur chaque domaine  $i$ .

<sup>5</sup>Pour que le vecteur  $\mathbf{A}$  de la solution  $\Psi_{III}(r, \phi)$  représente une onde entrante et le vecteur  $\mathbf{B}$  une onde sortante, le nombre  $N$  de domaines doit être pair.

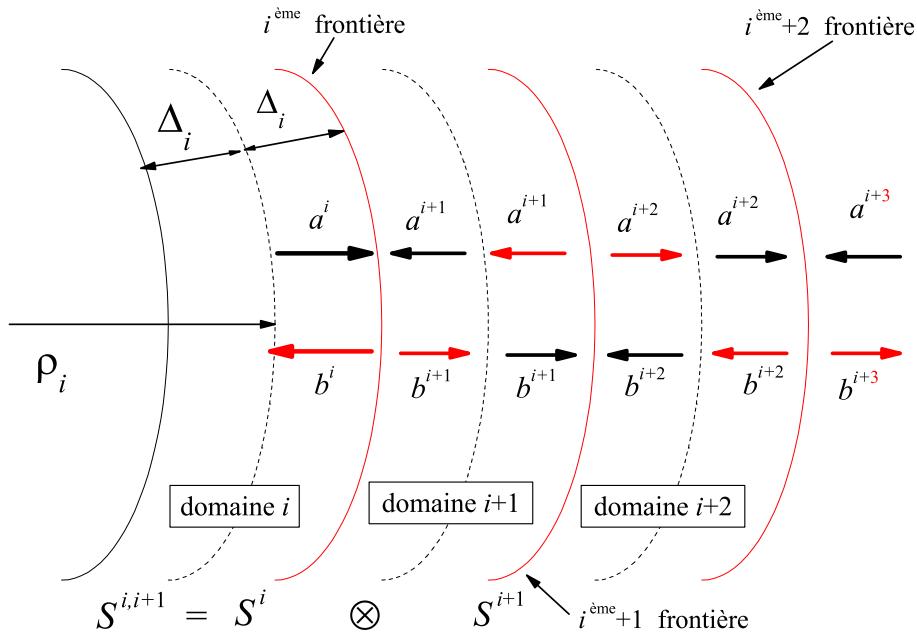


FIG. 4.15 – Division de la région II en \$N\$ domaines concentriques de rayons \$\rho\_i + \Delta\_i\$ et de largeurs \$2\Delta\_i\$. Sur chaque frontière une onde représentée par le vecteur \$\mathbf{a}^i\$ se transforme en une onde représentée par le vecteur \$\mathbf{b}^i\$ et une onde \$\mathbf{a}^{i+1}\$ en une onde \$\mathbf{b}^{i+1}\$ par la matrice de diffusion \$\mathbf{S}^i\$.

Pour trouver la matrice \$\mathbf{S}\$ il faut combiner toutes les matrices \$\mathbf{S}^i\$ afin de relier la région I et III par une matrice \$\tilde{\mathbf{S}}^{0,N}\$ telle que :

$$\tilde{\mathbf{S}}^{0,N} = \mathbf{S}^0 \otimes \mathbf{S}^1 \otimes \mathbf{S}^2 \dots \otimes \mathbf{S}^N. \quad (4.65)$$

Cette matrice vérifie l'équation :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{S}}^{0,N} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

et la matrice \$\mathbf{S}\$ est simplement calculée en éliminant le vecteur \$\mathbf{a}^0\$ de cette dernière relation, soit :

$$\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}}_{21}^{0,N} \left( I - \tilde{\mathbf{S}}_{11}^{0,N} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{12}^{0,N} + \tilde{\mathbf{S}}_{22}^{0,N}. \quad (4.67)$$

Le symbole \$\otimes\$ dans la relation (4.65) définit la combinaison de deux matrices de diffusion qui représentent l'interaction sur deux frontières successives \$(i)\$ et \$(i+1)\$. Cette combinaison définit une nouvelle matrice \$\tilde{\mathbf{S}}^{i,i+1} = \mathbf{S}^i \otimes \mathbf{S}^{i+1}\$ qui relie les ondes qui se propagent vers les frontières \$(i)\$ et \$(i+1)\$ aux ondes qui se propagent loin de ces frontières et qui appartiennent aux domaines \$(i)\$ et \$(i+2)\$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}^i \\ \mathbf{a}^{i+2} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{S}}^{i,i+1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^i \\ \mathbf{b}^{i+2} \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Les éléments de la matrices  $\tilde{\mathbf{S}}^{i,i+1}$  s'écrivent en fonction de celles des matrices  $\mathbf{S}^i$  et  $\mathbf{S}^{i+1}$  comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{S}}_{11}^{i,i+1} = \mathbf{S}_{11}^i + \mathbf{S}_{12}^i \mathbf{S}_{11}^{i+1} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}^i \mathbf{S}_{11}^{i+1})^{-1} \mathbf{S}_{21}^i \\ \tilde{\mathbf{S}}_{12}^{i,i+1} = \mathbf{S}_{12}^i (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{11}^{i+1} \mathbf{S}_{22}^i)^{-1} \mathbf{S}_{12}^{i+1} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{21}^{i,i+1} = \mathbf{S}_{21}^{i+1} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}^i \mathbf{S}_{11}^{i+1})^{-1} \mathbf{S}_{21}^i \\ \tilde{\mathbf{S}}_{22}^{i,i+1} = \mathbf{S}_{22}^{i+1} + \mathbf{S}_{21}^{i+1} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}^i \mathbf{S}_{11}^{i+1})^{-1} \mathbf{S}_{22}^i \mathbf{S}_{12}^{i+1}. \end{array} \right. \quad (4.69)$$

Ce processus va être itéré jusqu'à ce qu'on trouve les éléments de la matrice  $\tilde{\mathbf{S}}^{0,N}$  qui va nous permettre de calculer la matrice  $\mathbf{S}$  par la relation (4.67).

L'ensemble de ces itérations nécessite la connaissance des éléments de chaque matrice  $\mathbf{S}^i$ . Ces éléments sont déterminés en imposant les conditions de passage sur chaque frontière aux solutions de l'équation de propagation dans chaque domaine de part et d'autre de celui-ci. Nous présentons dans l'annexe B les étapes de calculs effectuées pour la détermination de ces éléments et les matrices  $\mathbf{S}^i$  qui vont être utilisées lors de l'implémentation numérique de la méthode.

Une fois la matrice de diffusion déterminée, la matrice à délais  $\mathbf{Q}$  est calculée à partir de la relation [92] :

$$\mathbf{Q} = \frac{i}{c} \frac{d\mathbf{S}^+}{dk} \mathbf{S} = \frac{i}{c} \frac{d\mathbf{S}}{dk} \mathbf{S}^+. \quad (4.70)$$

$c$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $\mathbf{S}^+$  est la matrice adjointe de  $\mathbf{S}$ . Les éléments diagonaux de cette matrice représentent le retard dû à la diffusion d'une onde incidente, dans une voie d'entrée  $q$  vers l'ensemble des voies de sortie. Ces éléments sont données par :

$$\tau^q(k) = Q_{qq} = \frac{i}{c} \sum_{q'} \frac{dS_{qq'}^+}{dk} S_{qq'}. \quad (4.71)$$

Le temps de retard total correspondant à un ensemble de  $M$  voies d'entrée est donnée par la moyennes sur les  $M$  éléments diagonaux correspondants, soit [7] :

$$\begin{aligned} \tau(k) &= \frac{1}{M} \sum_q^M \tau^q = \frac{1}{M} \frac{i}{c} \text{Tr} \left( \frac{d\mathbf{S}^+}{dk} \mathbf{S} \right) \\ &= \frac{1}{cM} \sum_q^M \frac{d\theta_q}{dk} = \frac{1}{cM} \frac{d\theta}{dk}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

où  $\theta_q$  représentent les phases des valeurs propres de la matrice de diffusion  $\mathbf{S}$  et  $\theta$  la phase totale du déterminant de cette matrice. Le nombre d'onde  $k_c$ , correspondant à un mode résonnant de la cavité, se détermine par le tracé de la fonction  $\tau(k)$  donnée par (4.72). L'allure de cette fonction présente des pics correspondant aux états de résonance. La position de ces pics correspond à la valeur de  $k_c$  et la hauteur est reliée au facteur

de qualité du mode par la relation :

$$Q = \omega\tau(k_c). \quad (4.73)$$

Nous avons ainsi décrit toutes les étapes importantes pour développer la méthode RZ. Cette méthode est en phase d'implémentation numérique. L'ensemble des tests sera d'abord effectué sur le système intégrable étudié au début de ce chapitre. La matrice de diffusion calculée par cette méthode sera comparée à celle définie par les relations (4.13) et le spectre des nombre d'onde à celui donnée par la figure (4.1).

# Chapitre 5

## Discussion générale et perspectives

Le travail que nous avons présenté est basé sur l'étude d'une nouvelle classe de microcavités diélectriques. La dynamique classique du rayon lumineux à l'intérieur de ces résonateurs, ainsi que les caractéristiques d'émission de leurs modes propres sont affectées par la perturbation du milieu à l'intérieur et non pas par leurs géométries. Une des motivations qui nous a poussé à développer ce nouveau concept est notre conviction que la manipulation expérimentale de l'indice de réfraction, très bien maîtrisée par les opticiens travaillant sur les guides d'onde, est plus simple et plus flexible que la déformation des cavités. Les cavités inhomogènes présente donc une alternative théorique et expérimentale au concept de cavité asymétrique (ARCs) développé par J. U. Nöckel et al.

Du point de vue de la dynamique classique les deux systèmes restent équivalents. Les billards inhomogènes et les cavités asymétriques établissent une transition vers le chaos selon le scénario de KAM- Lazutkin. Ainsi la structure de l'espace des phases est la même dans les deux systèmes et présente les mêmes caractéristiques telles : l'autosimilarité, la destruction progressive et pas totale des régions régulières et la diffusion anomale. Toutes ces propriétés ont permis de prédire et d'expliquer le processus d'émission laser dans les microcavités asymétriques à travers la connexion entre la dynamique mixte des systèmes hamiltoniens et le processus d'échappement par effet tunnel (Chaos-Assisted Tunneling). Le même procédé peut donc être appliqué pour le traitement de l'émission dans les cavités inhomogènes convexes.

Les billards inhomogènes convexes restent néanmoins un système plus général et plus complet que les cavités asymétriques homogènes. La nouveauté de notre concept consiste dans la dépendance de la dynamique classique de l'indice de réfraction même dans le cas intégrable. Dans le cas homogène, la variation de la valeur de l'indice ne fait que déplacer la ligne d'échappement, tout en gardant sa forme rectiligne et horizontale, et ne joue aucun rôle dans la dynamique classique. Dans le chapitre 3, nous avons montré que la variation de l'inhomogénéité, représentée par les paramètres  $\delta n$  et  $w$ , cause la variation des composantes des trajectoires périodiques et ceci même dans le cas intégrable. Sous perturbation, nous avons aussi montré que l'introduc-

tion d'une dépendance angulaire dans la forme de l'indice modifie la forme de la ligne d'échappement réfractif et change sa position dans la section de Poincaré. La combinaison de cet effet avec le déplacement des îlots de régularité et la variation de leurs tailles vont nous permettre de contrôler les largeurs des régions classiquement interdites et les distances entre ces îlots et la ligne d'échappement. Ceci permet le contrôle de l'effet CAT et par conséquent la durées de vie des modes propres, associés aux trajectoires périodiques, et leurs directionnalité.

Dans notre étude de la dynamique des billards inhomogènes, nous avons mis en évidence de nouvelles trajectoires issues de la bifurcation des trajectoires périodiques déjà existantes. Une étude en cours est consacrée à décrire plus en détail ces trajectoires périodiques, leurs stabilités, et la mise en évidence de toutes les classes de bifurcation établies par Meyer [64] dans les systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté. Dans le cas des cavités asymétriques, des modes propres d'émission ont été associés à de telles trajectoires, tel que le mode Bow-Tie dans le quadripôle. Ce mode a été mis en évidence expérimentalement et présente une forte directionnalité [29]. Un tel mode apparaît à partir d'une valeur de la déformation  $\epsilon_b \approx 1.1$  qui reste fixe et incontrôlable. Ce n'est pas le cas pour les billards inhomogènes que nous avons étudiés. En effet, malgré le fait d'avoir un seul paramètre de perturbation qui est responsable de la bifurcation ( $\epsilon$  pour le profil I et  $x_0$  pour le profil II), nous disposons en plus de deux autres paramètres d'inhomogénéité qui contrôlent la dynamique ( $\delta n$  et  $w$ ). La valeur de la bifurcation qui fait apparaître une nouvelle trajectoire croisée C-i-j peut être modifiée et donc contrôlée par la variation de ces deux paramètres. Nous pouvons ainsi décider jusqu'à un certain point de l'apparition de ces trajectoires.

Nous avons discuté dans le chapitre 3 de la relation entre la symétrie du système et la dégénérescence des trajectoires et de leurs composantes. Cette étude s'avère importante pour expliquer la directionnalité de l'émission. Les études sur le procédé CAT ont montré la relation entre la directionnalité et la distance entre les îlots de régularité et la ligne d'échappement dans la section de Poincaré. A cause de la dégénérescence des composantes (plusieurs composantes de la même trajectoire possèdent la même valeur de  $\sin \chi$ ) on peut avoir plusieurs pics de maximum d'intensité dans plusieurs directions. Pour collecter le maximum d'intensité à la sortie, il faut donc avoir des modes unidirectionnels. Ceci se fait soit en créant des symétries d'ordre inférieur soit en brisant toute forme de symétrie. Avec la forme de l'indice de réfraction que nous avons proposé, il est possible d'atteindre ce but par exemple à l'aide du profil II, qui préserve un seul axe de symétrie, ou encore avec le profil V qui ne possède aucune symétrie.

Le système que nous avons étudié reprend toutes les propriétés des cavités asymétriques vis-à-vis de la dynamique classique. De plus, il met à notre disposition plusieurs paramètres pour contrôler cette dynamique, contrairement aux ARCS qui n'en offrent qu'un seul ou plus rarement deux (tableau 1.1). Le point fort de notre profil est qu'il dispose de cinq paramètres : trois paramètres qui brisent la symétrie de rotation et mènent vers le régime mixte ( $\epsilon, x_0, y_0$ ) et deux paramètres d'inhomogénéité ( $\delta n$  et  $w$ )

qui jouent un rôle important même dans le cas intégrable.

Nous nous sommes néanmoins intéressés à la combinaison des deux concepts. Nous avons commencé l'étude du cas particulier d'un quadripôle inhomogène avec la forme de l'indice gaussien que nous proposons. En prenant par exemple le profil 0, nous avons établi quelques schémas de bifurcation qui n'existaient pas dans le cas homogène. On peut voir sur la figure (5.1) la bifurcation du Bow-Tie en un triple Bow-Tie. Le mode propre associé à cette nouvelle trajectoire peut entrer en compétition avec le mode simple qui était dominant dans le cas homogène pour une valeur de l'indice donnée. Un autre aspect qui nous a intéressé est la combinaison d'un profil et d'une cavité

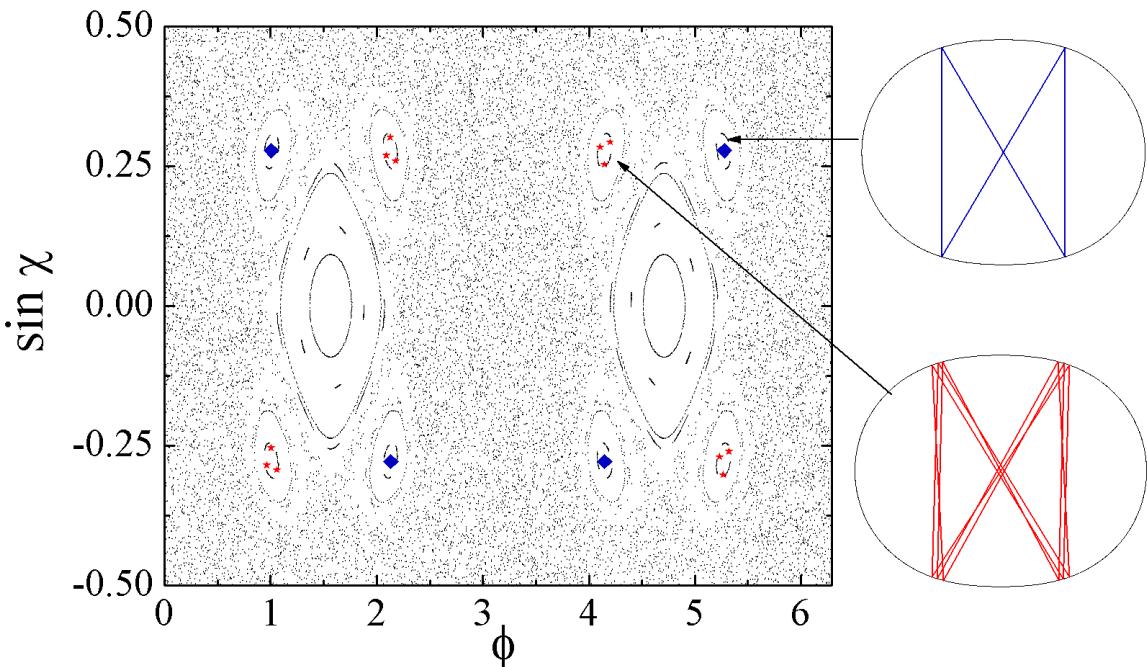


FIG. 5.1 – Bifurcation d'une trajectoire de type Bow-Tie en un triple Bow-Tie en appliquant à un quadripôle, défini par une déformation de 0.15, un indice de réfraction donné par le profil 0 avec les paramètres :  $n_0 = 1.5$ ,  $\delta n = 0.2$  et  $w = a$ .

qui possède la même symétrie. Ainsi nous avons étudié le cas du quadripôle avec une déformation de 0.1 combiné à un profil I avec les paramètres  $n_0 = 1.5$ ,  $\delta n = 0.5$  et  $w = a$ . Pour la valeur  $\epsilon = 1$ , la section de Poincaré est semblable au cas homogène et la proportion de la mer chaotique est assez importante. En augmentant la valeur de  $\epsilon$ , nous avons constaté un retour de la régularité et la réapparition de structures régulières dans l'espace des phase. Ceci semble être un *scénario de KAM inverse* où les

tores de KAM se reconstruisent à nouveau (voir figure 5.2). La cause de ce scénario est la manière de combiner les deux effets : la déformation quadripolaire du cercle brise la symétrie de rotation en appliquant la déformation sur l'axe  $Oy$  par diminution du rayon du cercle. Le profil I, avec  $\epsilon > 1$  brise par contre la symétrie de rotation sur le même axe mais en augmentant la largeur de la Gaussienne. Il semble donc que l'anisotropie due à la déformation est compensée par l'élargissement de la Gaussienne et on retrouve à la fin un système qui est moins anisotrope que le premier. Nous allons étudier cet effet de plus près dans nos travaux à venir.

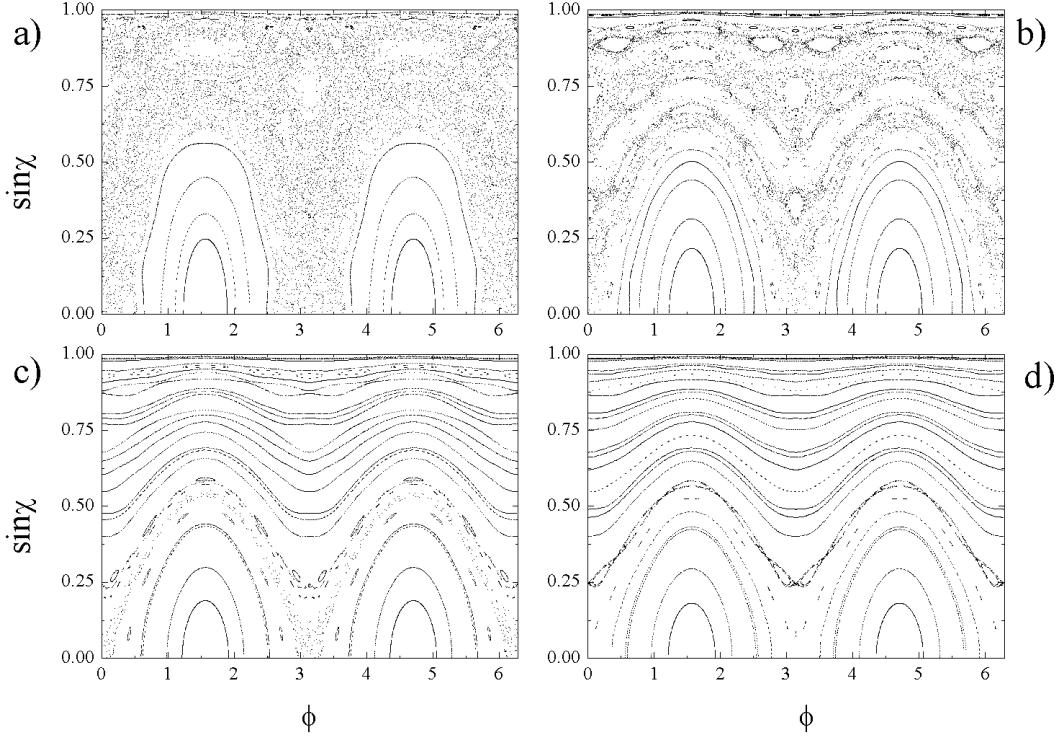


FIG. 5.2 – Sections de Poincaré d'un quadripôle inhomogène de déformation 0.1, pour différentes valeurs de la dissymétrie de la Gaussienne : a)  $\epsilon = 1$ , b)  $\epsilon = 1.25$ , c)  $\epsilon = 4$ , d)  $\epsilon = 8$ . L'indice de réfraction est donné par le profil I avec les paramètres :  $n_0 = 1.5$ ,  $\delta n = 0.5$  et  $w = a$ .

Dans le chapitre 4, nous avons présenté l'essentiel des résultats montrant l'effet d'une inhomogénéité, purement radiale, sur les caractéristiques des modes propres d'émission d'une cavité diélectrique de forme circulaire. Nous avons tenté également de donner une explication qualitative à ces résultats, en se basant essentiellement sur deux aspects, à savoir, la relation semi-classique et l'analogie avec la mécanique quantique. Nous avons pris soin de comparer ces résultats à ceux obtenus par une simple variation

de la valeur de l'indice dans un milieu homogène. Ainsi, nous avons mis en évidence des comportements qui sont une conséquence directe de l'inhomogénéité telles que la variation d'intensité ou le croisement de branches de variation du nombre d'onde  $k$  en fonction de  $\delta n$ .

L'utilisation de la notion d'effet tunnel pour traiter le couplage de la cavité avec l'extérieur est une manière particulière d'aborder le problème. Une autre vision, propre à l'optique ondulatoire, est l'utilisation des lois de Fresnel. Nous allons adopter pour cela la même démarche, utilisée par M. Hentschel [40, 42], pour traiter le cas inhomogène. Il faut donc calculer de la même manière les coefficients de réflexion et de transmission corrigés par rapport au cas d'une onde plane et une interface plane. Hentschel a utilisé pour cela les solutions analytiques de l'équation de propagation, à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité, et la relation semi-classique pour déterminer le rapport de ces solutions, sur l'interface, en fonction de  $\sin \chi$ . Etant donné que nous ne disposons pas dans le cas inhomogène d'expression analytique du champ à l'intérieur de la cavité, nous allons calculer ces coefficients numériquement et voir l'effet de l'inhomogénéité, caractérisée par  $\delta n$  et  $w$ , sur la transmission.

Afin de compléter l'étude de l'émission laser dans les microcavités diélectriques il faut absolument traiter le problème des *cavités actives*. La plupart des études effectuées sur les micro-résonateurs s'intéressent à la résonance optique uniquement en négligeant le processus d'émission stimulée. Le premier qui s'est penché sur ce problème est T. Harayama [34, 38] pour traiter le cas d'une cavité circulaire homogène. Il a pour cela utilisé les équations de Bloch optiques pour réécrire l'équation de Helmholtz radiale dans sa forme non linéaire. Le terme non linéaire de cette équation contient le pompage, la fréquence de transition et les coefficients de perte par émission spontanée. D'autres travaux ont suivi pour traiter des géométries plus complexes tel que le stade. Dans ces études, le problème de compétition de modes est abordé directement car l'approximation linéaire n'en permet pas l'accès [35, 37, 90, 97, 98].

Le travail que nous effectuons à l'heure actuelle est consacré à l'implémentation numérique de la méthode RZ présenté à la fin du chapitre 4. Cette méthode aura pour but de déterminer les modes propres d'émission d'une cavité ouverte dans le cas où la symétrie de rotation est brisée. A défaut, nous avons traité le cas d'un système fermé. La dynamique de ce système est régie par les mêmes équations de propagation mais possède des conditions aux limites différentes du cas ouvert, à savoir des conditions de type Dirichlet, où le champ électromagnétique et sa dérivée sont nuls sur la frontière. S. Shinohara a déjà exploité la correspondance entre les deux systèmes dans le cas d'une cavité sous forme de stade [90]. L'ouverture du système ne modifie pas énormément la structure spatiale des modes propres et corrige légèrement la longueur d'onde d'émission, en plus de rajouter une partie imaginaire au nombre d'onde pour tenir compte du couplage avec l'extérieur.

Pour obtenir une idée sur la structure spatiale du champ électrique et la directionnalité de l'émission, nous avons utilisé le logiciel Femlab [45] qui solutionne les équations différentielles avec des conditions aux limites en utilisant la méthode des

éléments finis. Nous présentons ici les premiers résultats obtenus en suivant adiabatiquement l'évolution des modes du cas intégrable en fonction de la perturbation. Nous avons étudié le cas de deux perturbations, qui brisent la symétrie de rotation, et qui sont basées sur la forme d'indice que nous proposons, à savoir : la dissymétrie de la Gaussienne représentée par le profil I et le déplacement de son centre sur l'axe  $Ox$  représentée par le profil II. Les paramètres de perturbation sont le taux d'élargissement  $\epsilon = w_y/w_x$  sur l'axe  $Oy$  et la position du centre  $x_0$  sur l'axe  $Ox$ .

Les figures (5.3) et (5.4) montrent la variation du nombre d'onde  $k$  en fonction de ces deux paramètres pour le mode  $TM_{2,1}$ . La première observation est la levée de dégénérescence due à la brisure de symétrie de rotation. Quand cette symétrie existe, il existe une infinité de modes  $TM_{2,1}$  correspondant à une trajectoire classique de période 4. La différence entre ces modes est une simple rotation d'un angle arbitraire  $\delta\phi$  (exactement comme la trajectoire classique). En brisant la symétrie, tous les modes disparaissent sauf les deux qui possèdent la symétrie du profil. Le mode 1 correspond à la trajectoire de période 4 qui coupe la cavité aux points  $[\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4]$  et le mode 2 à celle qui coupe la cavité aux points  $[0, \pi/2, \pi, 3\pi/2]$ .

Sur les figures (5.5) et (5.6), nous montrons la structure du deuxième mode issu de la levée de dégénérescence du mode intégrable et qui présente une directionnalité plus intéressante que l'autre. Ce mode est caractérisé par une plus grande variation de  $k$  et possède un maximum d'intensité dans la direction de la perturbation, c'est-à-dire  $\phi = \pi/2$  et  $\phi = 3\pi/2$  pour le profil I (la Gaussienne s'élargie dans ces directions), et  $\phi = 0$  pour le profil II (la Gaussienne s'éloigne du centre dans cette direction).

Sur les figures (5.7) et (5.8), nous montrons le profil d'intensité du champ électrique du deuxième mode issu de la levée de dégénérescence du mode  $TM_{2,1}$  en fonction de  $\phi$ , pris à la valeur de  $r$  qui correspond au maximum d'intensité<sup>1</sup>. En s'appuyant sur ces profils, nous mettons en évidence le caractère directionnelle des modes issus des scénarios de brisure de la symétrie de rotation basés sur l'inhomogénéité du milieu à l'intérieur de la cavité. Un mode unidirectionnel est produit dans le cas du profil II par réduction de la symétrie du système. Nous travaillons actuellement sur le profil V de l'indice de réfraction, qui ne présente aucune forme de symétrie, afin de définir un système où tous les modes propres posséderaient cette propriété.

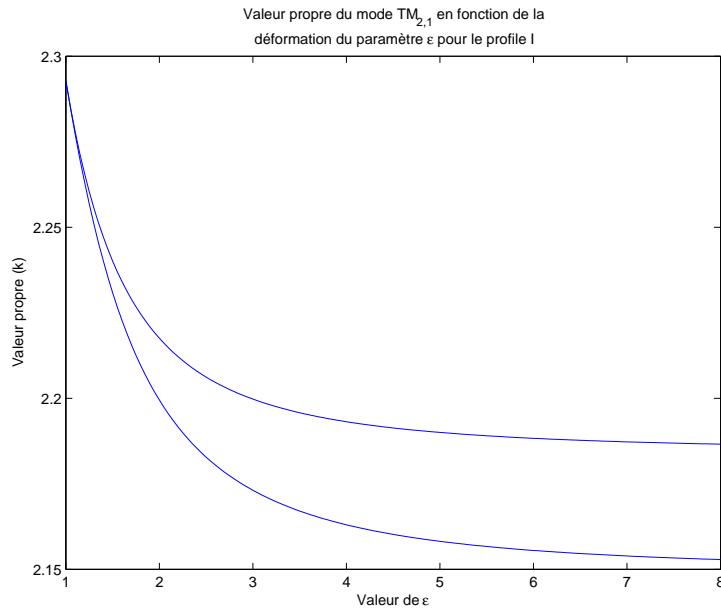


FIG. 5.3 – Evolution du nombre d’onde  $k$  en fonction de l’asymétrie de la Gaussienne  $\epsilon$ . Cas d’un mode  $\text{TM}_{2,1}$  d’une cavité circulaire inhomogène fermée. L’indice de réfraction à l’intérieur est donné par le profil I avec les paramètres :  $n_0 = 2$ ,  $\delta n = 0.5$ , et  $w = a$ .

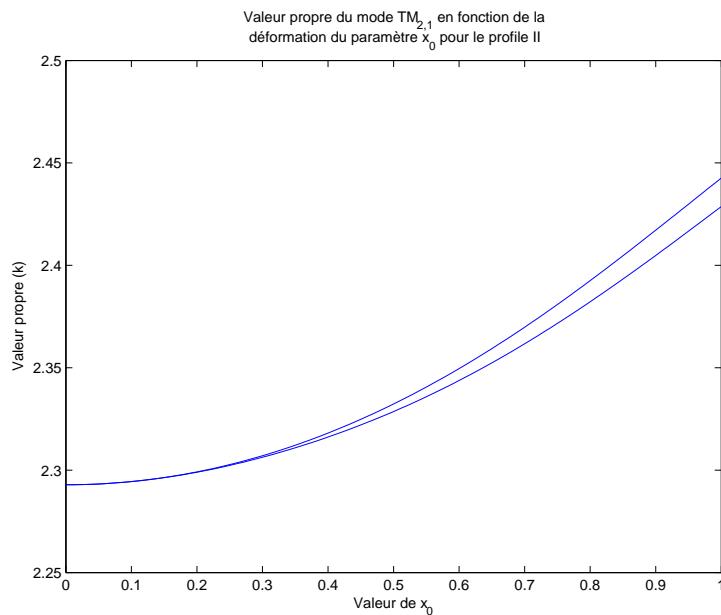


FIG. 5.4 – Evolution du nombre d’onde  $k$  en fonction du déplacement du centre de la Gaussienne sur l’axe  $Ox$ ,  $x_0$ . Cas d’un mode  $\text{TM}_{2,1}$  d’une cavité circulaire inhomogène fermée. L’indice de réfraction à l’intérieur est donné par le profil II avec les paramètres :  $n_0 = 2$ ,  $\delta n = 0.5$ , et  $w = a$ .

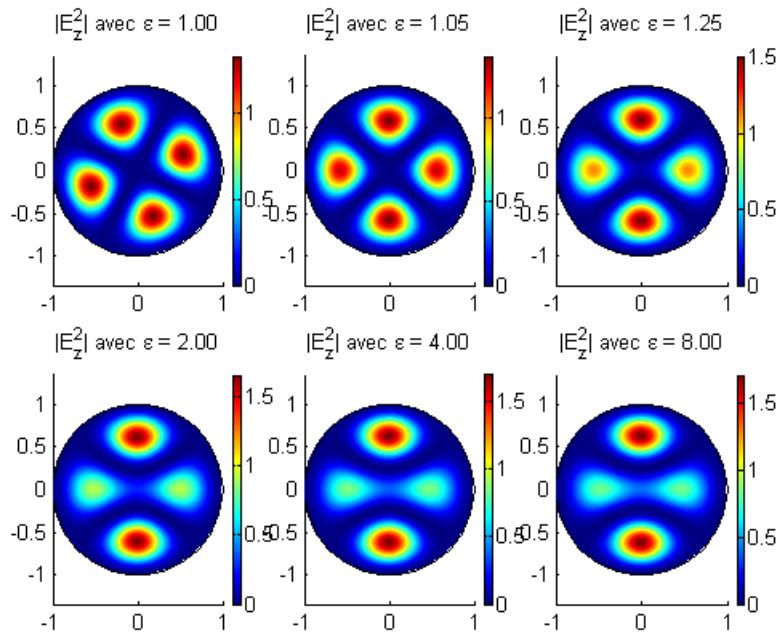


FIG. 5.5 – Structure du deuxième mode, ayant la plus forte variation en  $k$ , en fonction de l'asymétrie de la Gaussienne  $\epsilon$  (Profil I).

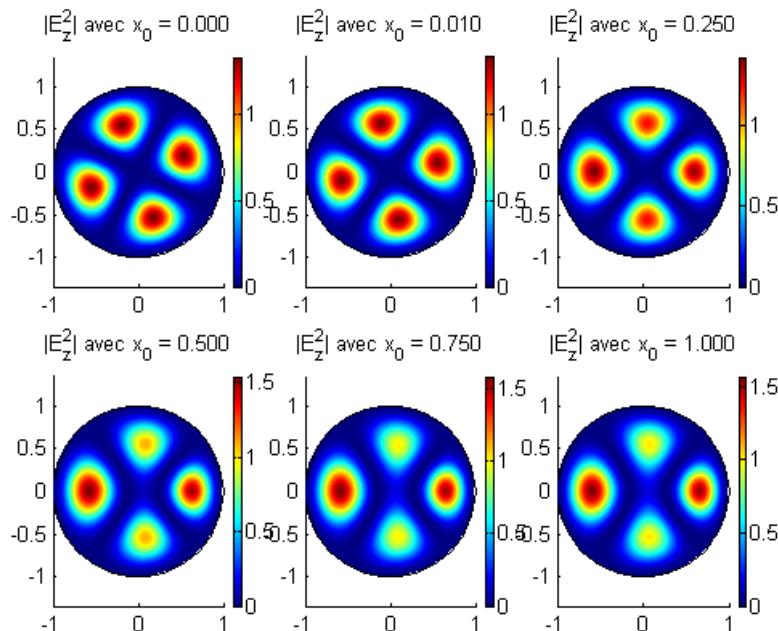


FIG. 5.6 – Structure du deuxième mode, ayant la plus forte variation en  $k$ , en fonction du déplacement du centre de la Gaussienne  $x_0$  (Profil II).

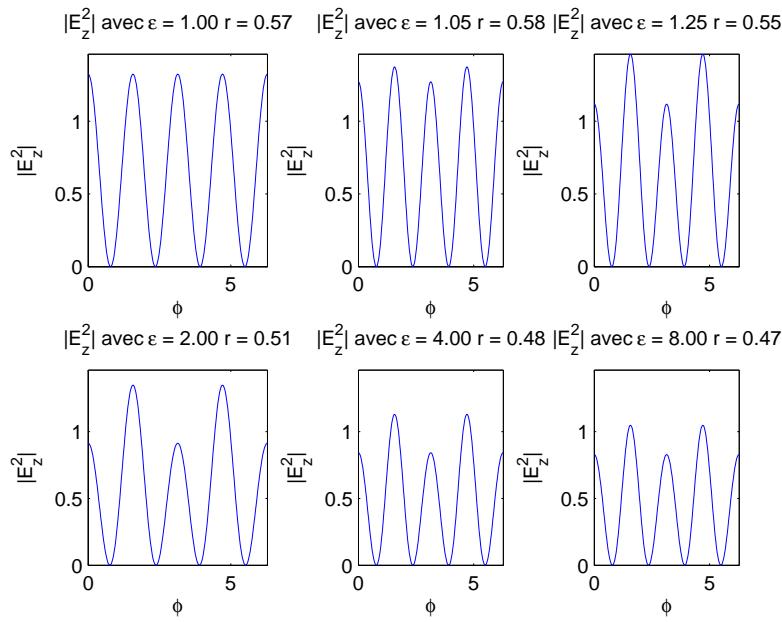


FIG. 5.7 – Profil d'intensité  $|E_z(\phi)|_{r=r_{max}}^2$  du deuxième mode, ayant la plus forte variation en  $k$ , en fonction de l'asymétrie de la Gaussienne  $\epsilon$  (Profil I).

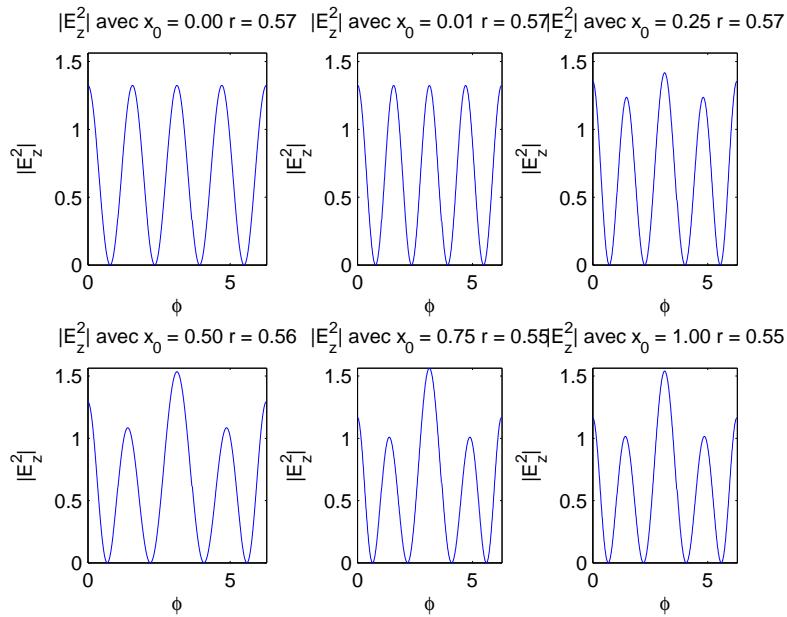


FIG. 5.8 – Profil d'intensité  $|E_z(\phi)|_{r=r_{max}}^2$  du deuxième mode, ayant la plus forte variation en  $k$ , en fonction du déplacement du centre de la Gaussienne  $x_0$  (Profil II).

Ces derniers résultats sont encourageants quoiqu'il faudra attendre une étude plus exhaustive sur la cavité ouverte pour en apprécier toute la richesse. Malgré ses limites naturelles, notre étude exploratoire nous a permis d'obtenir un certain nombre de nouveaux résultats sur la dynamique classique et ondulatoire d'une nouvelle classe de billards, les billards inhomogènes. Ce travail s'insère naturellement dans les efforts entrepris depuis quelques années pour la compréhension de l'émission laser en microcavités et offre une voie différente pour une réalisation souple et flexible du contrôle des micro-résonateurs optiques.

---

<sup>1</sup>Dans le cas d'un système ouvert, les intensités sont prises sur la cavité.

# Annexe A

## Combinaison des matrices $S^i$

### A.1 Relation entre les matrices $S$ et $\tilde{S}^{0,N}$

Pour trouver la relation (4.67), écrivons la relation (4.66) sous forme de système d'équations matricielles :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^0 = \tilde{S}_{11}^{0,N} a^0 + \tilde{S}_{12}^{0,N} A \\ B = \tilde{S}_{21}^{0,N} a^0 + \tilde{S}_{22}^{0,N} A \end{cases} &\implies \begin{cases} (I - \tilde{S}_{11}^{0,N}) a^0 = \tilde{S}_{12}^{0,N} A \\ B = \tilde{S}_{21}^{0,N} a^0 + \tilde{S}_{22}^{0,N} A \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \tilde{S}_{21}^{0,N} a^0 = \tilde{S}_{21}^{0,N} (I - \tilde{S}_{11}^{0,N})^{-1} \tilde{S}_{12}^{0,N} A \\ B = \tilde{S}_{21}^{0,N} a^0 + \tilde{S}_{22}^{0,N} A \end{cases} \\ &\implies B = \left[ \tilde{S}_{21}^{0,N} (I - \tilde{S}_{11}^{0,N})^{-1} \tilde{S}_{12}^{0,N} + \tilde{S}_{22}^{0,N} \right] A = S A. \end{aligned}$$

### A.2 Relation entre les matrices $\tilde{S}^{i,i+1}$ et $(S^i, S^{i+1})$

Pour trouver les éléments de la matrices  $\tilde{S}^{i,i+1}$  en fonction de celles des matrices  $S^i$  et  $S^{i+1}$  écrivons les systèmes suivants :

$$\begin{pmatrix} b^i \\ b^{i+1} \end{pmatrix} = S^i \begin{pmatrix} a^i \\ a^{i+1} \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b^i = S_{11}^i a^i + S_{12}^i a^{i+1} \\ b^{i+1} = S_{21}^i a^i + S_{22}^i a^{i+1} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

et

$$\begin{pmatrix} a^{i+1} \\ a^{i+2} \end{pmatrix} = S^{i+1} \begin{pmatrix} b^{i+1} \\ b^{i+2} \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a^{i+1} = S_{11}^{i+1} b^{i+1} + S_{12}^{i+1} b^{i+2} \\ a^{i+2} = S_{21}^{i+1} b^{i+1} + S_{22}^{i+1} b^{i+2}. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

La matrice  $\tilde{S}^{i,i+1}$  est définie en éliminant les vecteurs  $a^{i+1}$  et  $b^{i+1}$  de ces deux systèmes. En multipliant, à gauche, l'équation (A.1.2) par la matrice  $S_{11}^{i+1}$  et l'équation (A.2.1) par la matrice  $S_{22}^i$ , on peut trouver facilement une relation entre ces vecteurs et les vecteurs  $a^i$  et  $b^{i+2}$ , soient :

$$\begin{cases} a^{i+1} = \left[ (I - S_{11}^{i+1} S_{22}^i)^{-1} S_{11}^{i+1} S_{21}^i \right] a^i + \left[ (I - S_{11}^{i+1} S_{22}^i)^{-1} S_{12}^{i+1} \right] b^{i+2} \\ b^{i+1} = \left[ (I - S_{22}^i S_{11}^{i+1})^{-1} S_{21}^i \right] a^i + \left[ (I - S_{22}^i S_{11}^{i+1})^{-1} S_{22}^i S_{12}^{i+1} \right] b^{i+2}. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

En remplaçant ces deux expressions dans les équations (A.1.1) et (A.2.2) on trouve les éléments de la matrice  $\tilde{S}^{i,i+1}$  en fonction des éléments des matrices  $S^i$  et  $S^{i+1}$ , soit :

$$\begin{cases} b^i = S_{11}^i a^i + S_{12}^i \left\{ \left[ (I - S_{11}^{i+1} S_{22}^i)^{-1} S_{11}^{i+1} S_{21}^i \right] a^i + \left[ (I - S_{11}^{i+1} S_{22}^i)^{-1} S_{12}^{i+1} \right] b^{i+2} \right\} \\ a^{i+2} = S_{21}^{i+1} \left\{ \left[ (I - S_{22}^i S_{11}^{i+1})^{-1} S_{21}^i \right] a^i + \left[ (I - S_{22}^i S_{11}^{i+1})^{-1} S_{22}^i S_{12}^{i+1} \right] b^{i+2} \right\} + S_{22}^{i+1} b^{i+2} \\ \quad \Downarrow \\ b^i = \left[ S_{11}^i + S_{12}^i (I - S_{11}^{i+1} S_{22}^i)^{-1} S_{11}^{i+1} S_{21}^i \right] a^i + \left[ S_{12}^i (I - S_{11}^{i+1} S_{22}^i)^{-1} S_{12}^{i+1} \right] b^{i+2} \\ a^{i+2} = \left[ S_{21}^{i+1} (I - S_{22}^i S_{11}^{i+1})^{-1} S_{21}^i \right] a^i + \left[ S_{22}^{i+1} + S_{21}^{i+1} (I - S_{22}^i S_{11}^{i+1})^{-1} S_{22}^i S_{12}^{i+1} \right] b^{i+2} \\ \quad \Downarrow \\ \tilde{S}_{11}^{i,i+1} = S_{11}^i + S_{12}^i S_{11}^{i+1} (I - S_{22}^i S_{11}^{i+1})^{-1} S_{21}^i & ([I - AB]^{-1} A = A [I - BA]^{-1}) \\ \tilde{S}_{12}^{i,i+1} = S_{12}^i (I - S_{11}^{i+1} S_{22}^i)^{-1} S_{12}^{i+1} \\ \tilde{S}_{21}^{i,i+1} = S_{21}^{i+1} (I - S_{22}^i S_{11}^{i+1})^{-1} S_{21}^i \\ \tilde{S}_{22}^{i,i+1} = S_{22}^{i+1} + S_{21}^{i+1} (I - S_{22}^i S_{11}^{i+1})^{-1} S_{22}^i S_{12}^{i+1}. \end{cases}$$

## Annexe B

# Détermination des éléments de la matrice $S^i$

Nous allons déterminer les éléments de la matrice  $S^i$  en reliant les solutions de l'équation de Helmholtz à l'intérieur des domaines  $i$  et  $i + 1$ . Ces solutions sont reliées par les conditions de continuité de la composante tangentielle du champ électrique et magnétique sur la  $i^{\text{ème}}$  frontière. Ces conditions s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \psi_i(r_f, \phi) = \psi_{i+1}(r_f, \phi) \\ \frac{1}{\Gamma_i^2(\phi)} \frac{\partial \psi_i(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=r_f} = \frac{1}{\Gamma_{i+1}^2(\phi)} \frac{\partial \psi_{i+1}(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=r_f} \end{cases}. \quad (\text{B.1})$$

ou  $\Gamma_i^2(\phi) = 1$  pour les modes TM et  $\Gamma_i^2(\phi) = k^2 n_i^2(\phi)$  pour les mode TE. Les solutions de l'équation de propagation sont différentes entre les régions I, II et III. Ainsi les éléments des matrices  $S^i$  diffèrent de ceux des matrices  $S^0$  et  $S^N$ . Nous allons ainsi faire le calcul pour ces trois cas en tenant compte de la différence entre les solutions.

### B.1 Cas d'une frontière intermédiaire

Ecrivons pour la région II la forme des solutions de l'équation de Helmholtz et leurs dérivés à ( $r = r_f$ ) en utilisant les relations (4.57) et (4.58) et le changement de variable

$(r \longleftrightarrow \tilde{r}_i = (r - \rho_i)/\rho_i)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_i(r_f, \phi) = \sum_m \left[ a_m^i e^{Z_{+m}^i(\Delta_i/\rho_i)} + b_m^i e^{Z_{-m}^i(\Delta_i/\rho_i)} \right] \Phi_m^i(\phi) \\ \frac{\partial \Psi_i(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=r_f} = \sum_m \frac{1}{\rho_i} \left[ a_m^i Z_{+m}^i e^{Z_{+m}^i(\Delta_i/\rho_i)} + b_m^i Z_{-m}^i e^{Z_{-m}^i(\Delta_i/\rho_i)} \right] \Phi_m^i(\phi) \\ \Psi_{i+1}(r_f, \phi) = \sum_m \left[ a_m^{i+1} e^{-Z_{-m}^{i+1}(\Delta_{i+1}/\rho_{i+1})} + b_m^{i+1} e^{-Z_{+m}^{i+1}(\Delta_{i+1}/\rho_{i+1})} \right] \Phi_m^{i+1}(\phi) \\ \frac{\partial \Psi_{i+1}(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=r_f} = \\ \sum_m \frac{1}{\rho_{i+1}} \left[ a_m^{i+1} Z_{-m}^{i+1} e^{-Z_{-m}^{i+1}(\Delta_{i+1}/\rho_{i+1})} + b_m^{i+1} Z_{+m}^{i+1} e^{-Z_{+m}^{i+1}(\Delta_{i+1}/\rho_{i+1})} \right] \Phi_m^{i+1}(\phi). \end{array} \right. \quad (B.2)$$

Nous avons utilisé les notations :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{+m}^i = -1/2 + i\gamma_m^i \\ Z_{-m}^i = -1/2 - i\gamma_m^i \end{array} \right. \quad (B.3)$$

et l'expression de  $\tilde{r}_i$  à  $(r = r_f)$ , soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}_i = (r - \rho_i)/\rho_i \\ \tilde{r}_{i+1} = (r - \rho_{i+1})/\rho_{i+1} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}_i(r = r_f) = ((\rho_i + \Delta_i) - \rho_i)/\rho_i = \Delta_i/\rho_i \\ \tilde{r}_{i+1}(r = r_f) = ((\rho_{i+1} - \Delta_{i+1}) - \rho_{i+1})/\rho_{i+1} = -\Delta_{i+1}/\rho_{i+1}. \end{array} \right. \quad (B.4)$$

En remplaçant les expressions (B.2) dans les conditions (B.1) nous obtenons un système d'équations pour les coefficients  $a_m^i$ ,  $b_m^i$ ,  $a_m^{i+1}$  et  $b_m^{i+1}$ , soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m \left[ a_m^i e^{Z_{+m}^i(\Delta_i/\rho_i)} + b_m^i e^{Z_{-m}^i(\Delta_i/\rho_i)} \right] \Phi_m^i(\phi) = \\ \sum_m \left[ a_m^{i+1} e^{-Z_{-m}^{i+1}(\Delta_{i+1}/\rho_{i+1})} + b_m^{i+1} e^{-Z_{+m}^{i+1}(\Delta_{i+1}/\rho_{i+1})} \right] \Phi_m^{i+1}(\phi) \\ \sum_m \left[ a_m^i Z_{+m}^i e^{Z_{+m}^i(\Delta_i/\rho_i)} + b_m^i Z_{-m}^i e^{Z_{-m}^i(\Delta_i/\rho_i)} \right] \Phi_m^i(\phi) = \\ \sum_m \left[ a_m^{i+1} Z_{-m}^{i+1} e^{-Z_{-m}^{i+1}(\Delta_{i+1}/\rho_{i+1})} + b_m^{i+1} Z_{+m}^{i+1} e^{-Z_{+m}^{i+1}(\Delta_{i+1}/\rho_{i+1})} \right] \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} \frac{\Gamma_i^2(\phi)}{\Gamma_{i+1}^2(\phi)} \Phi_m^{i+1}(\phi). \end{array} \right. \quad (B.5)$$

En multipliant ces équations par  $\Phi_j^{*i}$  et en utilisant la relation d'orthogonalité :

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^i(\phi) \Phi_j^{*i}(\phi) d\phi = \delta_{mj}, \quad (B.6)$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m \left[ a_m^i e^{Z_{+m}^i (\Delta_i / \rho_i)} + b_m^i e^{Z_{-m}^i (\Delta_i / \rho_i)} \right] \delta_{mj} = \\ \sum_m \left[ a_m^{i+1} e^{-Z_{-m}^{i+1} (\Delta_{i+1} / \rho_{i+1})} + b_m^{i+1} e^{-Z_{+m}^{i+1} (\Delta_{i+1} / \rho_{i+1})} \right] \int_0^{2\pi} \Phi_m^{i+1}(\phi) \Phi_j^{*i}(\phi) d\phi \\ \sum_m \left[ a_m^i Z_{+m}^i e^{Z_{+m}^i (\Delta_i / \rho_i)} + b_m^i Z_{-m}^i e^{Z_{-m}^i (\Delta_i / \rho_i)} \right] \delta_{mj} = \\ \sum_m \left[ a_m^{i+1} Z_{-m}^{i+1} e^{-Z_{-m}^{i+1} (\Delta_{i+1} / \rho_{i+1})} + b_m^{i+1} Z_{+m}^{i+1} e^{-Z_{+m}^{i+1} (\Delta_{i+1} / \rho_{i+1})} \right] \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma_i^2(\phi)}{\Gamma_{i+1}^2(\phi)} \Phi_m^{i+1}(\phi) \Phi_j^{*i}(\phi) d\phi \end{array} \right. \quad (B.7)$$

Les coefficients multipliés par l'ensemble  $(a_m^i, b_m^i, a_m^{i+1}, b_m^{i+1})$  s'écrivent comme le produit d'éléments de matrices définies par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\mathbf{P}^i)_{mj} = Z_{+m}^i \delta_{mj} & (\mathbf{Q}^i)_{mj} = Z_{-m}^i \delta_{mj} \\ (\mathbf{V}^{i,i+1})_{mj} = \int_0^{2\pi} \Phi_m^{i+1}(\phi) \Phi_j^{*i}(\phi) d\phi & \\ (\mathbf{U}^{i,i+1})_{mj} = \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma_i^2(\phi)}{\Gamma_{i+1}^2(\phi)} \Phi_m^{i+1}(\phi) \Phi_j^{*i}(\phi) d\phi & \\ (\Lambda_{11})_{mj} = e^{(1/2)\Delta_i} \delta_{mj} & (\Lambda_{22})_{mj} = e^{-(1/2)\Delta_{i+1}} \delta_{mj} \\ (\mathbf{K}_{11})_{mj} = e^{(i\gamma_m^i)\Delta_i} \delta_{mj} & (\mathbf{K}_{22})_{mj} = e^{(i\gamma_m^{i+1})\Delta_{i+1}} \delta_{mj}. \end{array} \right. \quad (B.8)$$

En remplaçant les variables  $Z_{+m}^i$  et  $Z_{-m}^i$  par leurs expressions dans les termes exponentiels :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{Z_{+m}^i \Delta_i} = \frac{\delta_{mj}}{\delta_{mj} e^{(1/2)\Delta_i}} e^{(+i\gamma_m^i)\Delta_i} = \frac{(\mathbf{K}_{11})_{mj}}{(\Lambda_{11})_{mj}} \\ e^{Z_{-m}^i \Delta_i} = \frac{\delta_{mj}}{e^{(1/2)\Delta_i} \delta_{mj} e^{(i\gamma_m^i)\Delta_i}} = \frac{(\Lambda_{11}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{11})_{mj}} \\ e^{-Z_{+m}^{i+1} \Delta_{i+1}} = \frac{\delta_{mj}}{e^{(-1/2)\Delta_{i+1}} \delta_{mj} e^{(+i\gamma_m^{i+1})\Delta_{i+1}}} = \frac{(\Lambda_{22}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{22})_{mj}} \\ e^{-Z_{-m}^{i+1} \Delta_{i+1}} = \frac{\delta_{mj}}{\delta_{mj} e^{(-1/2)\Delta_{i+1}}} e^{(i\gamma_m^{i+1})\Delta_{i+1}} = \frac{(\mathbf{K}_{22})_{mj}}{(\Lambda_{22})_{mj}} \end{array} \right. \quad (B.9)$$

et en utilisant les notations (B.8) nous pouvons écrire les conditions de continuité sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m \left[ a_m^i \frac{(\mathbf{K}_{11})_{mj}}{(\Lambda_{11})_{mj}} + b_m^i \frac{(\Lambda_{11}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{11})_{mj}} \right] = \\ \sum_m \left[ a_m^{i+1} \frac{(\mathbf{K}_{22})_{mj}}{(\Lambda_{22})_{mj}} + b_m^{i+1} \frac{(\Lambda_{22}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{22})_{mj}} \right] (\mathbf{V}^{i,i+1})_{mj} \\ \sum_m \left[ a_m^i (\mathbf{P}^i)_{mj} \frac{(\mathbf{K}_{11})_{mj}}{(\Lambda_{11})_{mj}} + b_m^i (\mathbf{Q}^i)_{mj} \frac{(\Lambda_{11}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{11})_{mj}} \right] = \\ \sum_m \left[ a_m^{i+1} (\mathbf{Q}^{i+1})_{mj} \frac{(\mathbf{K}_{22})_{mj}}{(\Lambda_{22})_{mj}} + b_m^{i+1} (\mathbf{P}^{i+1})_{mj} \frac{(\Lambda_{22}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{22})_{mj}} \right] (\mathbf{U}^{i,i+1})_{mj}. \end{array} \right. \quad (B.10)$$

Pour déterminer les éléments de la matrice  $S^i$  il faut écrire les composantes des vecteurs  $b^i$  et  $b^{i+1}$  en fonction de ceux des vecteurs  $a^i$  et  $a^{i+1}$  à partir du système (B.10), soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m -b_m^i \frac{(\Lambda_{11}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{11})_{mj}} + b_m^{i+1} \frac{(\Lambda_{22}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{22})_{mj}} (\mathbf{V}^{i,i+1})_{mj} = \\ \sum_m a_m^i \frac{(\mathbf{K}_{11})_{mj}}{(\Lambda_{11})_{mj}} - a_m^{i+1} \frac{(\mathbf{K}_{22})_{mj}}{(\Lambda_{22})_{mj}} (\mathbf{V}^{i,i+1})_{mj} \\ \sum_m -b_m^i (\mathbf{Q}^i)_{mj} \frac{(\Lambda_{11}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{11})_{mj}} + b_m^{i+1} (\mathbf{P}^{i+1})_{mj} \frac{(\Lambda_{22}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{22})_{mj}} (\mathbf{U}^{i,i+1})_{mj} = \\ \sum_m a_m^i (\mathbf{P}^i)_{mj} \frac{(\mathbf{K}_{11})_{mj}}{(\Lambda_{11})_{mj}} - a_m^{i+1} (\mathbf{Q}^{i+1})_{mj} \frac{(\mathbf{K}_{22})_{mj}}{(\Lambda_{22})_{mj}} (\mathbf{U}^{i,i+1})_{mj}. \end{array} \right. \quad (B.11)$$

Puisque les matrices  $(\Lambda_{11}, \Lambda_{22}, \mathbf{K}_{11}, \mathbf{K}_{22}, \mathbf{P}^i, \mathbf{Q}^i)$  sont diagonales, il est facile d'écrire le système d'équations (B.11) sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{V}^{i,i+1} \\ -\mathbf{Q}^i & \mathbf{U}^{i,i+1}\mathbf{P}^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b^i \\ b^{i+1} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{V}^{i,i+1} \\ \mathbf{P}^i & \mathbf{U}^{i,i+1}\mathbf{Q}^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a^i \\ a^{i+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (B.12)$$

La matrice  $S^i$  s'écrit simplement comme un produit de ces matrices tel que :

$$\begin{aligned} S^i = & \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{V}^{i,i+1} \\ -\mathbf{Q}^i & \mathbf{U}^{i,i+1}\mathbf{P}^{i+1} \end{pmatrix}^{-1} \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{V}^{i,i+1} \\ \mathbf{P}^i & \mathbf{U}^{i,i+1}\mathbf{Q}^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned} \quad (B.13)$$

Ce produit est valable pour toutes les matrices  $S^i$  à l'exception des matrices  $S^0$  et  $S^N$  qui connectent les régions I, II et II, III. Pour ces matrices la forme du produit reste la même mais les matrices données par les expressions (B.8) prennent des éléments différents et ceci à cause des solutions différentes des équations de Helmholtz dans les domaines I et III. Pour déterminer les éléments de ces matrices nous réécrivons les conditions de continuité (B.1) en fonctions des solutions données par les relations (4.49) et (4.50).

## B.2 Cas de la frontière $i = 0$

En remplaçant la solution  $\Psi_I(r, \phi)$  donnée par la relation (4.50) et la solution donnée par (4.58) avec ( $i = 0$ ), les conditions de continuité s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m \left[ a_m^0 J_m(n_1 k d) \right] e^{im\phi} = \\ \sum_m \left[ a_m^1 e^{-Z_{-m}^1(\Delta_1/\rho_1)} + b_m^1 e^{-Z_{+m}^1(\Delta_1/\rho_1)} \right] \Phi_m^1(\phi) \\ \sum_m \left[ a_m^0 n_1 k \frac{\partial J_m(n_1 k r)}{\partial r} \Big|_{r=d} \right] e^{im\phi} = \\ \sum_m \left[ a_m^1 Z_{-m}^1 e^{-Z_{-m}^1(\Delta_1/\rho_1)} + b_m^1 Z_{+m}^1 e^{-Z_{+m}^1(\Delta_1/\rho_1)} \right] \frac{1}{\rho_1} \frac{\Gamma_0^2(\phi)}{\Gamma_1^2(\phi)} \Phi_m^1(\phi). \end{array} \right. \quad (\text{B.14})$$

En multipliant les équations (B.14) par  $e^{-ij\phi}$  et en utilisant la relation d'orthogonalité :

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-ij\phi} d\phi = \delta_{mj}, \quad (\text{B.15})$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m \left[ a_m^0 J_m(n_1 k d) \right] \delta_{mj} = \\ \sum_m \left[ a_m^1 e^{-Z_{-m}^1(\Delta_1/\rho_1)} + b_m^1 e^{-Z_{+m}^1(\Delta_1/\rho_1)} \right] \int_0^{2\pi} \Phi_m^1(\phi) e^{-ij\phi} d\phi \\ \sum_m \left[ a_m^0 \frac{\partial J_m(n_1 k r)}{\partial r} \Big|_{r=d} \right] \delta_{mj} = \\ \sum_m \left[ a_m^1 Z_{-m}^1 e^{-Z_{-m}^1(\Delta_1/\rho_1)} + b_m^1 Z_{+m}^1 e^{-Z_{+m}^1(\Delta_1/\rho_1)} \right] \int_0^{2\pi} \frac{1}{n_1 k \rho_1} \frac{\Gamma_0^2(\phi)}{\Gamma_1^2(\phi)} \Phi_m^1(\phi) e^{-ij\phi} d\phi. \end{array} \right. \quad (\text{B.16})$$

En utilisant les notations :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{V}^{0,1})_{mj} = \int_0^{2\pi} \Phi_m^1(\phi) e^{-ij\phi} d\phi \\ (\mathbf{U}^{0,1})_{mj} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{n_1 k \rho_1} \frac{\Gamma_0^2(\phi)}{\Gamma_1^2(\phi)} \Phi_m^1(\phi) e^{-ij\phi} d\phi \\ (\mathbf{J})_{mj} = J_m(n_1 k d) \delta_{mj} \\ (\mathbf{J}')_{mj} = \left. \frac{\partial J_m(n_1 k r)}{\partial r} \right|_{r=d} \delta_{mj}, \end{array} \right. \quad (B.17)$$

nous obtenons le système d'équations pour les coefficients  $(a_m^0, a_m^1, b_m^0 = a_m^0, b_m^1)$ , soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m a_m^0 (\mathbf{J})_{mj} = \sum_m \left[ a_m^1 \frac{(\mathbf{K}_{22})_{mj}}{(\Lambda_{22})_{mj}} + b_m^1 \frac{(\Lambda_{22}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{22})_{mj}} \right] (\mathbf{V}^{0,1})_{mj} \\ \sum_m a_m^0 (\mathbf{J}')_{mj} = \sum_m \left[ a_m^1 (\mathbf{Q}^1)_{mj} \frac{(\mathbf{K}_{22})_{mj}}{(\Lambda_{22})_{mj}} + b_m^1 (\mathbf{P}^1)_{mj} \frac{(\Lambda_{22}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{22})_{mj}} \right] (\mathbf{U}^{0,1})_{mj} \end{array} \right.$$

↓

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m a_m^0 (\mathbf{J})_{mj} - a_m^1 \frac{(\mathbf{K}_{22})_{mj}}{(\Lambda_{22})_{mj}} (\mathbf{V}^{0,1})_{mj} = \sum_m 0 a_m^0 + b_m^1 \frac{(\Lambda_{22}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{22})_{mj}} (\mathbf{V}^{0,1})_{mj} \\ \sum_m 0 a_m^0 - a_m^1 (\mathbf{Q}^1)_{mj} \frac{(\mathbf{K}_{22})_{mj}}{(\Lambda_{22})_{mj}} (\mathbf{U}^{0,1})_{mj} = \sum_m - a_m^0 (\mathbf{J}')_{mj} + b_m^1 (\mathbf{P}^1)_{mj} \frac{(\Lambda_{22}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{22})_{mj}} (\mathbf{U}^{0,1})_{mj}. \end{array} \right. \quad (B.18)$$

Puisque les matrices  $(\Lambda_{22}, \mathbf{K}_{22}, \mathbf{P}^1, \mathbf{Q}^1, \mathbf{J}, \mathbf{J}')$  sont diagonales, le système (B.18) s'écrit simplement sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{V}^{0,1} \\ -\mathbf{J}' & \mathbf{U}^{0,1} \mathbf{P}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a^0 \\ b^1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{V}^{0,1} \\ 0 & \mathbf{U}^{0,1} \mathbf{Q}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (B.19)$$

La matrice  $S^0$  est donc donnée par un produit de matrices tel que :

$$\begin{aligned} S^0 = & \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{V}^{0,1} \\ -\mathbf{J}' & \mathbf{U}^{0,1} \mathbf{P}^1 \end{pmatrix}^{-1} \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{V}^{0,1} \\ 0 & \mathbf{U}^{0,1} \mathbf{Q}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned} \quad (B.20)$$

### B.3 Cas de la frontière $i = N$

En remplaçant la solution  $\Psi_{III}(r, \phi)$  donnée par la relation (4.49) et la solution donnée par (4.57) avec ( $i = N$ ), les conditions de continuité s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m \left[ a_m^N e^{Z_{+m}^N(\Delta_N/\rho_N)} + b_m^N e^{Z_{-m}^N(\Delta_N/\rho_N)} \right] \Phi_m^N(\phi) = \\ \sum_m \left[ A_m H_m^{(2)}(n_3 k R) + B_m H_m^{(1)}(n_3 k R) \right] e^{im\phi} \\ \sum_m \left[ a_m^N Z_{+m}^N e^{Z_{+m}^N(\Delta_N/\rho_N)} + b_m^N Z_{-m}^N e^{Z_{-m}^N(\Delta_N/\rho_N)} \right] \Phi_m^N(\phi) = \\ \sum_m (n_3 k) \left[ A_m \frac{\partial H_m^{(2)}(n_3 k r)}{\partial r} \Big|_{r=R} + B_m \frac{\partial H_m^{(1)}(n_3 k r)}{\partial r} \Big|_{r=R} \right] \rho_N \frac{\Gamma_N^2(\phi)}{\Gamma_{N+1}^2(\phi)} e^{im\phi}. \end{array} \right. \quad (\text{B.21})$$

En multipliant les équations (B.21) par  $\Phi_j^{*N}$  et en utilisant la relation d'orthogonalité :

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^N(\phi) \Phi_j^{*N}(\phi) d\phi = \delta_{mj}, \quad (\text{B.22})$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m \left[ a_m^N e^{Z_{+m}^N(\Delta_N/\rho_N)} + b_m^N e^{Z_{-m}^N(\Delta_N/\rho_N)} \right] \delta_{mj} = \\ \sum_m \left[ A_m H_m^{(2)}(n_3 k R) + B_m H_m^{(1)}(n_3 k R) \right] \int_0^{2\pi} e^{im\phi} \Phi_j^{*N}(\phi) d\phi \\ \sum_m \left[ a_m^N Z_{+m}^N e^{Z_{+m}^N(\Delta_N/\rho_N)} + b_m^N Z_{-m}^N e^{Z_{-m}^N(\Delta_N/\rho_N)} \right] \delta_{mj} = \\ \sum_m \left[ A_m \frac{\partial H_m^{(2)}(n_3 k r)}{\partial r} \Big|_{r=R} + B_m \frac{\partial H_m^{(1)}(n_3 k r)}{\partial r} \Big|_{r=R} \right] \int_0^{2\pi} n_3 k \rho_N \frac{\Gamma_N^2(\phi)}{\Gamma_{N+1}^2(\phi)} e^{im\phi} \Phi_j^{*N}(\phi) d\phi. \end{array} \right. \quad (\text{B.23})$$

En utilisant les notations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\mathbf{V}^{N,N+1})_{mj} = \int_0^{2\pi} e^{im\phi} \Phi_j^{*N}(\phi) d\phi & (\mathbf{U}^{N,N+1})_{mj} = \int_0^{2\pi} n_3 k \rho_N \frac{\Gamma_N^2(\phi)}{\Gamma_{N+1}^2(\phi)} e^{im\phi} \Phi_j^{*N}(\phi) d\phi \\ (\mathbf{H}^{(1,2)})_{mj} = H_m^{(1,2)}(n_3 k R) \delta_{mj} & (\mathbf{H}'^{(1,2)})_{mj} = \frac{\partial H_m^{(1,2)}(n_3 k r)}{\partial r} \Big|_{r=R} \delta_{mj}, \end{array} \right. \quad (\text{B.24})$$

nous obtenons le système d'équations pour les coefficients  $(a_m^N, A_m, b_m^N, B_m)$ , soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m \left[ a_m^N \frac{(\mathbf{K}_{11})_{mj}}{(\Lambda_{11})_{mj}} + b_m^N \frac{(\Lambda_{11}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{11})_{mj}} \right] = \\ \quad \sum_m \left[ A_m (\mathbf{H}^{(2)})_{mj} + B_m (\mathbf{H}^{(1)})_{mj} \right] (\mathbf{V}^{N,N+1})_{mj} \\ \sum_m \left[ a_m^N (\mathbf{P}^N)_{mj} \frac{(\mathbf{K}_{11})_{mj}}{(\Lambda_{11})_{mj}} + b_m^N (\mathbf{Q}^N)_{mj} \frac{(\Lambda_{11}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{11})_{mj}} \right] = \\ \quad \sum_m \left[ A_m (\mathbf{H}'^{(2)})_{mj} + B_m (\mathbf{H}'^{(1)})_{mj} \right] (\mathbf{U}^{N,N+1})_{mj} \\ \quad \Downarrow \\ \sum_m -b_m^N \frac{(\Lambda_{11}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{11})_{mj}} + B_m (\mathbf{H}^{(1)})_{mj} (\mathbf{V}^{N,N+1})_{mj} = \\ \quad \sum_m a_m^N \frac{(\mathbf{K}_{11})_{mj}}{(\Lambda_{11})_{mj}} - A_m (\mathbf{H}^{(2)})_{mj} (\mathbf{V}^{N,N+1})_{mj} \\ \sum_m -b_m^N (\mathbf{Q}^N)_{mj} \frac{(\Lambda_{11}^{-1})_{mj}}{(\mathbf{K}_{11})_{mj}} + B_m (\mathbf{H}'^{(1)})_{mj} (\mathbf{U}^{N,N+1})_{mj} = \\ \quad \sum_m a_m^N (\mathbf{P}^N)_{mj} \frac{(\mathbf{K}_{11})_{mj}}{(\Lambda_{11})_{mj}} - A_m (\mathbf{H}'^{(2)})_{mj} (\mathbf{U}^{N,N+1})_{mj}. \end{array} \right. \quad (B.25)$$

Puisque les matrices  $(\Lambda_{11}, \mathbf{K}_{11}, \mathbf{P}^N, \mathbf{Q}^N, \mathbf{H}^{(1,2)}, \mathbf{H}'^{(1,2)})$  sont diagonales, le système (B.25) s'écrit simplement sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{V}^{N,N+1} \mathbf{H}^{(1)} \\ -\mathbf{Q}^N & \mathbf{U}^{N,N+1} \mathbf{H}'^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b^N \\ B \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{V}^{N,N+1} \mathbf{H}^{(2)} \\ \mathbf{P}^N & -\mathbf{U}^{N,N+1} \mathbf{H}'^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a^N \\ A \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (B.26)$$

La matrice  $S^N$  est donc donnée par un produit de matrices tel que :

$$\begin{aligned} S^N = & \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{V}^{N,N+1} \mathbf{H}^{(1)} \\ -\mathbf{Q}^N & \mathbf{U}^{N,N+1} \mathbf{H}'^{(1)} \end{pmatrix}^{-1} \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{V}^{N,N+1} \mathbf{H}^{(2)} \\ \mathbf{P}^N & -\mathbf{U}^{N,N+1} \mathbf{H}'^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned} \quad (B.27)$$

# Bibliographie

- [1] M. ABRAMOVITZ AND I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.
- [2] J. ARGYRIS, G. FAUST, AND M. HAASE, *An Exploration of Chaos*, Dover, North-Holland, 1994.
- [3] V. I. ARNOLD, *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Uspehi Mat. Nauk (Russ. Math. Surv.), 18 (1963), pp. 91–192.
- [4] ——, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [5] A. BÄCKER, S. FÜRSBERGER, AND R. SCHUBERT, *Poincaré Husimi representation of eigenstates in quantum billiards*, Phys. Rev. E, 70 (2004), pp. 036204(1–10).
- [6] P. W. BARBER AND S. C. HILL, eds., *Light Scattering by Particles : Computational Methods*, World Scientific, Singapore, 1990.
- [7] M. BAUER, P. A. MELLO, AND K. W. MCVOY, *Time delay in nuclear reactions*, Z. Physik. A, 293 (1979), pp. 293–151.
- [8] T. BEN-MESSAOUD AND J. ZYSS, *Unidirectional laser emission from polymer-based spiral microdisks*, Appl. Phys. Lett., 86 (2005), pp. 241110 (1–3).
- [9] G. BENETTIN AND J. M. STRELCYN, *Numerical experiments on the free motion of a mass point moving in a plane convex region : Stochastic transition and entropy*, Phys. Rev. A., 17 (1978), pp. 773–785.
- [10] M. V. BERRY, *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of circular 'billard'*, Eur. J. Phys, 2 (1981), pp. 91–102.
- [11] M. V. BERRY AND K. E. MOUNT, *Semiclassical approximations in wave mechanics*, Rep. Prog. Phys, 35 (1972), pp. 315–397.
- [12] G. D. BIRKHOFF, *On the periodic motions of dynamical systems*, Acta Math, 50 (1927), pp. 359–379.
- [13] S. BORISKINA, T. M. BENSON, P. SEWELL, AND A. I. NOSICH, *Spectral shift and Q change of circular and square-shaped optical microcavity modes due to periodic sidewall surface roughness*, J. Opt. Soc. Am. B, 21 (2004), pp. 1792–1796.

- [14] L. BRILLOUIN, *Remarques sur la mécanique ondulatoire*, J. Phys. Radium, 7 (1926), pp. 353–368.
- [15] R. K. CHANG AND A. J. CAMPILLO, eds., *Optical Processes in Microcavities*, World Scientific, Singapore, 1996.
- [16] G. CHEN, R. K. CHANG, S. C. HILL, AND P. W. BARBER, *Frequency splitting of degenerate spherical cavity modes - stimulated Raman-scattering spectrum of deformed droplets*, Opt. Lett., 16 (1991), pp. 1269–1271.
- [17] G. CHEN, M. M. MAZUMDER, Y. R. CHEMLA, A. SERPENGUZEL, R. K. CHANG, AND S. C. HILL, *Wavelength variation of laser-emission along the entire rim of slightly deformed microdroplets*, Opt. Lett., 18 (1993), pp. 1993–1995.
- [18] G. D. CHERN, A. W. POON, R. K. CHANG, T. BEN-MESSAOUD, O. ALLOSCHERY, E. TOUSSAERE, J. ZYSS, AND S.-Y. KUO, *Direct evidence of open ray orbits in a square two-dimensional resonator of dye-doped polymers*, Opt. Lett., 29 (2004), pp. 1674–1676.
- [19] D. Q. CHOWDHURY, S. C. HILL, AND P. W. BARBER, *Morphology-dependent resonances in radially inhomogeneous spheres*, J. Opt. Soc. Am. A, 8 (1991), pp. 1702–1705.
- [20] L. COLLOT, V. LEFEVRE-SEGUIN, M. BRUNE, J. M. RAIMOND, AND S. HAROCHE, *Very high-Q whispering-gallery mode resonances observed on fused-silica microspheres*, Europhys. Lett., 23 (1993), pp. 327–334.
- [21] F. COURVOISIER, V. BOUTOU, J. P. WOLF, R. K. CHANG, AND J. ZYSS, *Deciphering output coupling mechanisms in spiral microcavities with femtosecond light bullets*, Opt. Lett., 30 (2005), pp. 738–740.
- [22] B. CRESPI, G. PEREZ, AND S. J. CHANG, *Quantum Poincaré sections for two dimensional billiards*, Phys. Rev. E, 47 (1993), pp. 986–991.
- [23] E. DORON AND U. SMILANSKY, *Semiclassical quantization of chaotic billiards : A scattering theory approach*, Nonlinearity, 5 (1992), pp. 1055–1084.
- [24] A. EINSTEIN, *Zur Quantensatz von Sommerfeld und Epstein*, Verh. Deut. Phys. Ges., 19 (1917), pp. 82–92.
- [25] T. FUKUSHIMA, *Analysis of resonator eigenmodes in symmetric quasi-stadium laser diodes*, J. Lightwave Tech., 18 (2000), pp. 2208–2216.
- [26] T. FUKUSHIMA AND T. HARAYAMA, *Stadium and quasi-stadium laser diodes*, IEEE of Sel. Topics in Quan. Electronics, 10 (2004), pp. 1039–1051.
- [27] T. FUKUSHIMA, T. HARAYAMA, P. DAVIS, P. O. VACCARO, T. NISHIMURA, AND T. AIDA, *Ring and axis mode lasing in quasi-stadium laser diodes with concentric end mirrors*, Opt. Lett., 27 (2002), pp. 1430–1432.
- [28] ——, *Quasi-stadium laser diodes with an unstable resonator condition*, Opt. Lett., 28 (2003), pp. 408–410.
- [29] C. GMACHL, F. CAPASSO, E. E. NARIMANOV, J. U. NÖCKEL, A. D. STONE, J. FAIST, D. L. SIVCO, AND A. Y. CHO, *High-power directional emission from microlaser with chaotic resonators*, Science, 280 (1998), pp. 1556–1564.

- [30] C. GMACHL, E. E. NARIMANOV, F. CAPASSO, J. N. BAILLARGEON, AND A. Y. CHO, *Kolmogorov-Arnold-Moser transition and laser action on scar modes in semiconductor diode lasers with deformed resonators*, Opt. Lett., 27 (2002), pp. 824–826.
- [31] S. I. GMBH. [www.sentech.com](http://www.sentech.com).
- [32] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Massachusetts, 2 ed., 1980.
- [33] L. G. GUIMARAES AND H. M. NUSSENZVEIG, *Theory of Mie resonances and ripple fluctuations*, Opt. Commun., 89 (1992), pp. 363–369.
- [34] T. HARAYAMA AND P. DAVIS, *Nonlinear whispering gallery modes*, Phys. Rev. Lett., 82 (1999), pp. 3803–3806.
- [35] T. HARAYAMA, P. DAVIS, AND K. S. IKEDA, *Stable oscillations of spatially chaotic wave function in microstadium laser*, Phys. Rev. Lett., 90 (2003), pp. 063901 (1–4).
- [36] T. HARAYAMA, T. FUKUSHIMA, P. DAVIS, P. O. VACCARO, T. MIYASAKA, T. NISHIMURA, AND T. AIDA, *Lasing on scar modes in fully chaotic microcavities*, Phys. Rev. E, 67 (2003), pp. 015207 (1–4).
- [37] T. HARAYAMA, T. FUKUSHIMA, S. SUNADA, AND K. S. IKEDA, *Asymmetric stationary lasing patterns in 2D symmetric microcavities*, Phys. Rev. Lett., 91 (2003), pp. 073903 (1–4).
- [38] T. HARAYAMA, A. SHUDO, AND S. TASAKI, *Semiclassical Fredholm determinant for strongly chaotic billiards*, Nonlinearity, 12 (1999), pp. 1113–1149.
- [39] E. J. HELLER, *Bound-state eigenfunctions of classically chaotic Hamiltonian systems : Scars of periodic orbits*, Phys. Rev. Lett., 53 (1984), pp. 1515–1518.
- [40] M. HENTSCHEL AND J. U. NÖCKEL, *The sequential-reflection model in deformed dielectric cavities*, in Quantum Optics of Small Structures, D. Lenstra, T. D. Visser, and K. A. H. van Leeuwen, eds., KNAW, Amsterdam, 2000.
- [41] M. HENTSCHEL AND K. RICHTER, *Quantum chaos in optical systems : The annular billiard*, Phys. Rev. E, 66 (2002), pp. 056207 (1–13).
- [42] M. HENTSCHEL AND H. SCHOMERUS, *Fresnel laws at curved dielectric interfaces of microresonators*, Phys. Rev. E, 65 (2002), pp. 045603 (1–4).
- [43] S. C. HILL AND R. E. BENNER, *Morphology-dependent resonances*, in Optical Effects Associated with Small Particles, P. W. Barber and R. K. Chang, eds., World Scientific, Singapore, 1988.
- [44] K. HUSIMI, *Some formal properties of the density matrix*, Proc. Phys. Math. Soc. Jpn, 22 (1940), pp. 264–314.
- [45] C. INC. [www.comsol.com](http://www.comsol.com).
- [46] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York, 1998.
- [47] B. R. JOHNSON, *Theory of morphology-dependent resonances : Shape resonances and width formulas*, J. Opt. Soc. Am. A, 10 (1993), pp. 343–352.

- [48] J. B. KELLER, *Corrected Bohr-Sommefeld quantum conditions for nonseparable systems*, Ann. Phys., 4 (1958), pp. 180–188.
- [49] S. Y. KIM, S. H. KIM, G. H. KIM, H. G. PARK, D. J. SHIN, AND Y. H. LEE, *Highly directional emission from few-micron-size elliptical microdisks*, Appl. Phys. Lett., 84 (2004), pp. 861–863.
- [50] M. KNEISSL, M. TEEPE, N. MIYASHITA, N. M. JOHNSON, G. D. CHERN, AND R. K. CHANG, *Current-injection spiral-shaped microcavity disk laser diodes with unidirectional emission*, Appl. Phys. Lett., 84 (2004), pp. 2485–2587.
- [51] A. N. KOLMOGOROV, *On conservation of conditionally periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 98 (1954), pp. 527–530.
- [52] M. S. KURDOGLYAN, S. Y. LEE, S. RIM, AND C. M. KIM, *Unidirectional lasing from a microcavity with a rounded isosceles triangle shape*, Opt. Lett., 29 (2004), pp. 2758–2760.
- [53] L. D. LANDAU AND E. M. LIFSHITZ, *Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 2 ed., 1960.
- [54] V. F. LAZUTKIN, *KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions*, Springer, New York, 1993.
- [55] S. Y. LEE, S. RIM, J. W. RYU, T. Y. KWON, M. CHOI, AND C. M. KIM, *Quasiscarred resonances in a spiral-shaped microcavity*, Phys. Rev. Lett., 93 (2004), pp. 164102 (1–4).
- [56] A. F. J. LEVI, R. E. SLUSHER, S. L. McCALL, T. TANBUNEK, D. L. COBLENTZ, AND S. J. PEARTON, *Electrically pumped, room-temperature microdisk semiconductor lasers with submilliampere threshold currents*, IEEE Trans. Electron Devices, 39 (1992), pp. 2651–2651.
- [57] T. LING, L. LIU, Q. SONG, L. XU, AND W. WANG, *Intense directional lasing from a deformed square-shaped organic-inorganic hybrid glass microring cavity*, Opt. Lett., 28 (2003), pp. 1784–1786.
- [58] B. LITTLE, S. CHU, H. HAUS, J. FORESI, AND J.-P. LAINE, *Microring resonator channel dropping filters*, Journal of Lightwave Technology, 15 (1997), pp. 998–1005.
- [59] J. M. MAO AND J. B. DELOS, *Hamiltonian bifurcation theory of closed orbits in the diamagnetic Kepler problem*, Phys. Rev. A., 45 (1992), pp. 1746–1761.
- [60] S. McCALL, A. LEVI, R. SLUSHER, S. PEARTON, AND R. LOGAN, *Whispering-gallery mode microdisk lasers*, Appl. Phys. Lett., 60 (1992), pp. 289–291.
- [61] J. D. MEISS, *Symplectic maps, variational principles, and transport*, Rev. Mod. Phys., 64 (1992), pp. 795–848.
- [62] A. MEKIS, J. U. NÖCKEL, G. CHEN, A. D. STONE, AND R. K. CHANG, *Ray chaos and Q spoiling in lasing droplets*, Phys. Rev. Lett., 75 (1995), pp. 2682–2685.

- [63] I. MELNGAILIS, *Longitudinal injection-plasma laser of InSb*, Appl. Phys. Lett, 6 (1965), pp. 59–60.
- [64] K. R. MEYER, *Generic bifurcation of periodic points*, Trans. Am. Math. Soc., 149 (1970), pp. 95–107.
- [65] T. MIYAGUCHI AND Y. AIZAWA, *Anomalous diffusion in a Hamiltonian system*, Prog. Theor. Phys, 109 (2003), pp. 145–149.
- [66] J. MOSER, *Convergent series expansions for quasi-periodic motions*, Math. Ann., 169 (1967), pp. 136–176.
- [67] A. MOUCHET, C. MINIATURA, R. KAISER, B. GRÉMAUD, AND D. DELANDE, *Chaos-assisted tunneling with cold atoms*, Phys. Rev. E, 64 (2001), pp. 016221 (1–15).
- [68] T. NOBIS, E. M. KAIDASHEV, A. RAHM, M. LORENZ, AND M. GRUNDMANN, *Whispering gallery modes in nanosized dielectric resonators with hexagonal cross section*, Phys. Rev. Lett, 93 (2004), pp. 103903 (1–4).
- [69] J. U. NÖCKEL, *Resonances in Nonintegrable Open Systems*, PhD thesis, Yale University, 1997.
- [70] ——, *Mode structure and ray dynamics of a parabolic dome microcavity*, Phys. Rev. E, 62 (2000), pp. 8677–8699.
- [71] J. U. NÖCKEL AND A. D. STONE, *Ray and wave chaos in asymmetric resonant optical cavities*, Nature, 385 (1997), pp. 45–47.
- [72] J. U. NÖCKEL, A. D. STONE, AND R. K. CHANG, *Q spoiling and directionality in deformed ring cavities*, Opt. Lett, 19 (1994), pp. 1693–1695.
- [73] J. U. NÖCKEL, A. D. STONE, G. CHEN, H. L. GROSSMAN, AND R. K. CHANG, *Directional emission from asymmetric resonant cavities*, Opt. Lett, 21 (1996), pp. 1609–1611.
- [74] H. M. NUSSENZVEIG, *Tunneling effects in diffractive scattering and resonances*, Comments At. Mol. Phys., 23 (1989), pp. 175–187.
- [75] E. PETER, P. SENELLART, D. MARTROU, A. LEMAÎTRE, J. HOURS, J. M. GERARD, AND J. BLOCH, *Exciton-photon strong-coupling regime for a single quantum dot embedded in a microcavity*, Phys. Rev. Lett, 95 (2005), pp. 067401 (1–4).
- [76] V. A. PODOLSKIY AND E. E. NARIMANOV, *Semiclassical description of chaos-assisted tunneling*, Phys. Rev. Lett, 91 (2003), pp. 263601 (1–4).
- [77] ——, *Chaos-assisted tunneling in dielectric microcavities*, Opt. Lett., 30 (2005), pp. 474–476.
- [78] H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1899.
- [79] ——, *Science et Méthodes*, Ernest Flammarion, Paris-Dover-New York, 1908.
- [80] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, AND B. P. FLANNERY, *Numerical Recipes in Fortran 77*, Cambridge University Press, 2 ed., 1992.

- [81] A. I. RAHACHOU AND I. V. ZOZOULENKO, *Scattering matrix approach to the resonant states and Q values of microdisk lasing cavities*, Appl. Opt., 43 (2004), pp. 1761–1772.
- [82] L. RAYLEIGH, *The Problem of the Whispering Gallery*, Cambridge University Press, Cambridge, 1912.
- [83] J. P. REITHMAIER. [http ://opto.physik.uni-wuerzburg.de](http://opto.physik.uni-wuerzburg.de).
- [84] N. B. REX, *Regular and Chaotic Orbit Gallium Nitride Microcavity Lasers*, PhD thesis, Yale University, 2001.
- [85] N. B. REX, H. E. TURECI, H. G. L. SCHWEFEL, R. K. CHANG, AND A. D. STONE, *Fresnel filtering in lasing emission from scarred modes of wave-chaotic optical resonators*, Phys. Rev. Lett., 88 (2002), pp. 094102 (1–4).
- [86] M. ROBNIK, *Classical dynamics of a family of billiards with analytic boundaries*, J. Phys. A : Math. Gen., 16 (1983), pp. 3971–3986.
- [87] H. G. L. SCHWEFEL, *Directionality and Vector Resonances of Regular and Chaotic Dielectric Microcavities*, PhD thesis, Yale University, 2004.
- [88] H. G. L. SCHWEFEL, N. B. REX, E. TURECI, R. K. CHANG, A. D. STONE, T. BEN-MESSAOUD, AND J. ZYSS, *Dramatic shape sensitivity of directional emission patterns from similarly deformed cylindrical polymer lasers*, J. Opt. Soc. Am. B, 21 (2004), pp. 923–934.
- [89] H. G. L. SCHWEFEL, H. E. TURECI, A. D. STONE, AND R. K. CHANG., *Progress in asymmetric resonant cavities : Using shape as a design parameter in dielectric microcavity lasers*, in Optical Microcavities, K. J. Vahala, ed., World Scientific, Singapore, 2004.
- [90] S. SHINOHARA, S. SUNADA, T. HARAYAMA, AND K. S. IKEDA, *Mode expansion description of stadium-cavity laser dynamics*, Phys. Rev. E, 71 (2005), pp. 036203 (1–6).
- [91] R. E. SLUSHER, A. F. J. LEVI, U. MOHIDEEN, S. L. MCCALL, S. J. PEARTON, AND R. A. LOGAN, *Threshold characteristics of semiconductor microdisk lasers*, Appl. Phys. Lett., 63 (1993), pp. 1310–1312.
- [92] F. T. SMITH, *Lifetime matrix in collision theory*, Phys. Rev., 118 (1960), pp. 349–356.
- [93] H. SODA, K. IGA, C. KITAHARA, AND Y. SUEMATSU, *GaInAsP/InP surface emitting injection lasers*, Jpn. J. Appl. Phys., 18 (1979), pp. 2329–2330.
- [94] S. M. SPILLANE, T. J. KIPPENBERG, AND K. J. VAHALA, *Ultralow-threshold Raman laser using a spherical dielectric microcavity*, Nature, 415 (2002), pp. 621–623.
- [95] A. D. STONE, *Classical and wave chaos in asymmetric resonant cavities*, Physica A, 288 (2000), pp. 130–151.
- [96] S. H. STROGATZ, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Addison-Wesley, 1994.

- [97] S. SUNADA, T. HARAYAMA, AND K. S. IKEDA, *Nonlinear whispering-gallery modes in a microellipse cavity*, Opt. Lett., 29 (2004), pp. 718–720.
- [98] ——, *Multimode lasing in two-dimensional fully chaotic cavity lasers*, Phys. Rev. E, 71 (2005), pp. 046209 (1–5).
- [99] M. TABOR, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, Wiley, New York, 1989.
- [100] S. TOMSOVIC AND D. ULLMO, *Chaos-assisted tunneling*, Phys. Rev. E, 50 (1994), pp. 145–162.
- [101] H. E. TURECI, *Wave Chaos in Dielectric Resonators : Asymptotic and Numerical Approaches*, PhD thesis, Yale University, 2003.
- [102] H. E. TURECI, H. G. L. SCHWEFEL, A. D. STONE, AND P. JACQUOD, *Modes of wave-chaotic dielectric resonators*, Prog. in Opt., 47 (2005). (in press).
- [103] H. E. TURECI, H. G. L. SCHWEFEL, A. D. STONE, AND E. E. NARIMANOV, *Gaussian-optical approach to stable periodic orbit resonances of partially chaotic dielectric micro-cavities*, Opt. Express, 10 (2002), pp. 752–776.
- [104] H. M. TZENG, K. F. WALL, M. B. LONG, AND R. K. CHANG, *Laser emission from individual droplets at wavelengths corresponding to morphology-dependent resonances*, Opt. Lett, 9 (1984), pp. 499–501.
- [105] K. J. VAHALA, *Optical microcavities*, Nature, 424 (2003), pp. 839–846.
- [106] J. WIERSIG, *Quantum-classical correspondence in polygonal billiards*, Phys. Rev. E, 64 (2001), pp. 026212 (1–8).
- [107] ——, *Boundary element method for resonances in dielectric microcavities*, J. Opt. Soc. Am. A, 5 (2003), pp. 53–60.
- [108] ——, *Hexagonal dielectric resonators and microcrystal lasers*, Phys. Rev. A, 67 (2003), pp. 023807 (1–12).
- [109] P. WILKINSON, T. FROMHOLD, C. TENCH, R. TAYLOR, A. MICOLICH, AND R. NEWBURY, *Chaotic ray dynamics and fast optical switching in micro-cavities with a graded refractive index*, Physica B, 272 (1999), pp. 484–487.
- [110] P. B. WILKINSON, T. M. FROMHOLD, R. P. TAYLOR, AND A. P. MICOLICH, *Effects of geometrical ray chaos on the electromagnetic eigenmodes of a gradient index optical cavity*, Phys. Rev. E, 64 (2001), pp. 026203 (1–7).
- [111] ——, *Electromagnetic wave chaos in gradient refractive index optical cavities*, Phys. Rev. Lett, 86 (2001), pp. 5466 (1–4).
- [112] Y. YAMAMOTO AND R. E. SLUSHER, *Optical processes in microcavities*, Phys. Today, 46 (1993), pp. 66–73.
- [113] J. ZAKRZEWSKI, D. DELANDE, AND A. BUCHLEITNER, *Ionization via chaos assisted tunneling*, Phys. Rev. E, 57 (1998), pp. 1458–1474.
- [114] G. M. ZASLAVSKY, *Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport*, Phys. Rep., 371 (2002), pp. 461–580.