

CARL ROBERT

LE CONTRÔLE DU CHAOS

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de physique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL

AOÛT 1995

Résumé

L'objectif premier de cette recherche consiste à utiliser et à expliquer la principale méthode de contrôle du chaos: la méthode de Ott, Grebogi et Yorke (OGY). Certains systèmes chaotiques seront pour la première fois stabilisés. Pour ce faire, nous tirerons avantage de la richesse de la dynamique contenue en régime chaotique et de la sensibilité aux conditions initiales. Nous profiterons du fait qu'une des principales propriétés d'un attracteur chaotique est qu'il contient une infinité d'orbites périodiques instables et qu'il en est densément peuplé. Nous utiliserons d'abord cette méthode pour des applications discrètes 1D (logistique, triangulaire et Chrostowski-Vallée-Delisle) et 2D (Hénon, Ikeda-Hammel-Jones-Moloney). La méthodologie sera ensuite illustrée à l'aide de résultats numériques représentatifs. Enfin, nous introduirons une simplification de la méthode d'OGY: le *Simple Proportional Feedback* (SPF). Cette approche servira à contrôler certains systèmes dynamiques 3D hautement dissipatifs tels que le système de Rössler et l'oscillateur de Chua.

Avant-propos

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse, monsieur le professeur Louis-Jean Dubé. Ses judicieux conseils et ses encouragements m'ont apporté beaucoup de motivation et d'enthousiasme.

Je remercie aussi messieurs les professeurs Pierre Amiot et Gabriel Bédard qui ont eu l'amabilité d'examiner ce travail. Je tiens à exprimer ma reconnaissance au CRSNG qui m'a fait confiance en me soutenant financièrement.

Table des Matières

Introduction	1
1 Contrôle en 1D	4
1.1 Présentation du système	4
1.2 Position de la stratégie	5
1.3 Le ciblage	7
1.4 Quelques symboles	8
1.5 Le temps de transition moyen	9
1.6 Stabilisation d'une période quelconque	10
1.7 Détermination des cibles	11
1.8 Le bruit déterministe	12
1.9 Exemples numériques	13
1.9.1 L'application logistique	13
1.9.2 L'application de Chrostowski-Vallée-Delisle (CVD)	14
1.9.3 L'application triangulaire	18
2 Contrôle en 2D	20
2.1 Présentation du système	20
2.2 Détermination des cibles	23
2.3 Explication intuitive de la perturbation	24

2.4 L'application de Hénon	28
2.4.1 Présentation du système	28
2.4.2 Recherche des points fixes	28
2.4.3 Recherche des valeurs propres de \mathbf{A}	29
2.4.4 Recherche des vecteurs \mathbf{e}_s et \mathbf{e}_u	30
2.4.5 Recherche des vecteurs contravariants \mathbf{f}_s et \mathbf{f}_u	30
2.4.6 Une méthode numérique pour les variétés	31
2.4.7 Résultats numériques	33
2.4.8 Contrôle sans bruit non-déterministe	33
2.4.9 Contrôle avec bruit non-déterministe	33
2.5 L'application de Ikeda-Hammel-Jones-Moloney	35
2.5.1 Présentation du système	35
2.5.2 Contrôle sans bruit non-déterministe	36
2.5.3 Contrôle avec bruit non-déterministe	37
3 Contrôle de systèmes continus en 3D	41
3.1 Stratégie de contrôle	43
3.2 Esquisse de démonstration: $g \simeq \text{cte}$	48
3.3 Stabilisation du système de Rössler	50
3.4 L'oscillateur de Chua	51
3.4.1 Présentation du système	51
3.4.2 Le système de Chua	53
3.4.3 Le système de Nishio	60
Conclusion	65
Bibliographie	68

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	iii
Annexe	72
A Esquisse de la méthode numérique pour contrôler des systèmes 1D	72
B Esquisse de la méthode numérique pour contrôler des systèmes 2D	73
C Esquisse du SPF	74

Liste des Figures

1.1	Graphique illustrant la loi de puissance reliant τ à ϵ pour l'application logistique	9
1.2	Le contrôle de l'application logistique sans bruit de fond pour des périodes 5, 2, 1 et 5	14
1.3	Le contrôle de l'application logistique avec du bruit de fond pour une période 1	15
1.4	Agrandissement autour du point fixe pour bien distinguer que la stabilisation est moins précise en présence de bruit aléatoire	16
1.5	Le contrôle de l'application CVD sans bruit non-déterministe pour une orbite de période 1	17
1.6	Le contrôle de l'application triangulaire sans bruit non-déterministe pour une orbite de période 1	19
2.1	La non-orthogonalité des variétés	22
2.2	Les vecteurs contravariants	23
2.3	Les variétés stable W_s et instable W_u	24
2.4	Les variétés locales stable et instable	25
2.5	(a) Les itérés successifs tendent vers la direction de la variété instable. (b) La première perturbation modifie la position du point fixe de telle sorte que l'itéré suivant se rapproche de celui-ci. (c) Éventuellement, la perturbation pousse un des itérés sur la variété stable du point fixe non-perturbé.	26
2.6	L'attracteur de Hénon	29

2.7 (a) La déformation d'un cercle unitaire centré en \mathbf{x} sous itérations successives de \mathbf{F} . (b) La déformation d'un cercle unitaire centré en \mathbf{F}^N sous itérations successives de \mathbf{F}^{-1} . (c) La déformation d'un cercle unitaire centré en \mathbf{F}^{-N} sous itérations successives de \mathbf{F} .	32
2.8 Le contrôle de l'application de Hénon sans bruit non-déterministe pour des périodes 1, 3 et 1	34
2.9 Le contrôle de l'application de Hénon avec du bruit non-déterministe pour une période 2	35
2.10 L'attracteur de Ikeda-Hammel-Jones-Moloney	37
2.11 Le contrôle de l'application de Ikeda-Hammel-Jones-Moloney pour des périodes de 4 et de 1, sans bruit de fond.	38
2.12 Le contrôle de l'application de Ikeda-Hammel-Jones-Moloney pour une période 4 avec du bruit de fond. Cas stable	39
2.13 Le contrôle de l'application de Ikeda-Hammel-Jones-Moloney pour une période 4 avec du bruit de fond. Cas intermittent	40
 3.1 L'attracteur de Rössler	44
3.2 Esquisse d'une orbite coupée par une section de Poincaré. Seuls les points provenant d'un certain sens sont conservés.	45
3.3 L'application de premier retour du système de Rössler	46
3.4 L'application de deuxième retour du système de Rössler	47
3.5 Schéma intuitif montrant le principe de contrôle du système de Rössler	49
3.6 Contrôle d'une orbite de période 1 du système de Rössler. Graphe de y_n en fonction de n	51
3.7 Stabilisation d'une orbite de période 1 du système de Rössler	52
3.8 L'attracteur de Chua	55
3.9 L'application de premier retour du système de Chua	56
3.10 Stabilisation d'une orbite de période 1 du système de Chua	57
3.11 L'application de deuxième retour du système de Chua	58
3.12 Stabilisation d'une orbite de période 2 du système de Chua	59

LISTE DES FIGURES

vi

3.13 L'attracteur de Nishio	61
3.14 L'application de premier retour du système de Nishio	62
3.15 Stabilisation d'une orbite de période 1 du système de Nishio	63
3.16 L'application de deuxième retour du système de Nishio	64

Introduction

De tout temps, l'homme a tenté de maîtriser son environnement. Il a développé pour cela différentes théories avec lesquelles il pouvait mieux décrire et prévoir les phénomènes physiques qui l'entouraient. Il y eut entre autres le rêve laplacien, qui prônait l'existence du destin et d'un monde entièrement prévisible. Puis, la mécanique quantique commença à détruire ces idées d'un monde prédéterminé. La théorie du chaos élimina définitivement ce rêve de prédiction déterministe. En fait, avec l'avènement de cette nouvelle théorie, le dernier bastion du monde du prévisible venait de s'écrouler.

Malgré presqu'un siècle d'élaboration de théories qui ne font que renforcer l'idée d'un monde mené par des probabilités et des instabilités, voilà qu'en 1990, trois chercheurs de l'université du Maryland, E. Ott, C. Grebogi et J. A. Yorke (OGY), mettent au point une technique de contrôle du chaos [Ott, Grebogi et Yorke, 90a, b]. Depuis lors, il est possible de diriger là où bon nous semble le comportement d'un système chaotique.

Quand nous sommes en présence d'un comportement chaotique, un de nos premiers réflexes est de nous en débarrasser. Or, la méthode d'OGY fait tout le contraire. Elle profite plutôt de la richesse de la dynamique contenue dans le chaos. Afin d'atteindre de tels objectifs, ce nouveau schème de pensée consiste à se servir de certaines propriétés du chaos qui sont à première vue indésirables. Premièrement, un attracteur chaotique étant densément peuplé d'une infinité d'orbites périodiques *instables*, toute trajectoire passera éventuellement dans le voisinage d'une orbite [Bowen, 71; Auerbach *et al.*, 87; Grebogi, Ott et Yorke, 88]. Le contrôle consistera à stabiliser une de ces nombreuses orbites instables. Deuxièmement, ces orbites périodiques instables correspondent à un certain point fixe qui est un point de selle. Ce dernier possède donc des variétés stables et instables. C'est en fait de là que provient l'extrême sensibilité aux conditions initiales qui est le propre du chaos. L'idée maîtresse de la méthode d'OGY est donc de perturber de façon infime un paramètre accessible du système afin que l'évolution de ce dernier tombe directement sur une des variétés stables d'un point fixe désiré. Lorsque la trajectoire se situe sur une de ces variétés, elle converge exponentiellement vers le point fixe correspondant à l'orbite que nous voulons stabiliser. La perturbation se doit d'être une portion infime de la valeur du paramètre, car nous voulons stabiliser une orbite déjà existante dans le

régime chaotique, non en créer une.

L'objectif principal de cette recherche consiste donc à utiliser la méthode d'OGY et une de ses variantes, afin de contrôler des systèmes chaotiques qui ne l'ont pas été jusqu'à maintenant. Le second objectif consiste à expliquer ces techniques de contrôle par des exemples numériques représentatifs.

Cette recherche se divise en trois parties distinctes, mais complémentaires. Dans la première partie, nous stabiliserons différentes applications discrètes unidimensionnelles telle que l'application logistique. Deux applications seront stabilisées pour la première fois: les applications triangulaire et de Chrostowski-Vallée-Delisle. Dans la partie suivante, la suite logique de la méthode sera généralisée aux applications discrètes bidimensionnelles. Nous expliquerons en détail comment obtenir des orbites périodiques pour ensuite les stabiliser. L'application de Hénon servira de modèle à ces explications. Puis, l'application de Ikeda-Hammel-Jones-Moloney sera stabilisée pour la première fois à l'aide de la méthode d'OGY standard. Notons que pour ces deux premières parties, nous ajouterons une composante aléatoire à certains systèmes pour mieux tenir compte du bruit de fond toujours présent dans des systèmes physiques réels. Enfin, la dernière partie sera quelque peu différente. En effet, nous contrôlerons le comportement de systèmes d'équations différentielles non-linéaires 3D hautement dissipatifs. Ce contrôle s'effectuera à l'aide d'une modification de la méthode d'OGY: le *Simple Proportional Feedback* (SPF) [Peng, Petrov et Showalter, 91; Rollins, Parmananda et Sherard, 93]. La méthode sera illustrée de façon interactive avec le système de Rössler. Pour terminer, nous nous servirons du SPF pour contrôler pour la première fois de façon numérique des orbites périodiques instables de deux systèmes provenant de l'oscillateur de Chua.

Le lecteur réalisera que l'emphase est mise sur la méthode d'OGY. Un tel choix provient du fait que cette technique de contrôle est la plus couramment utilisée et qu'elle a été la première à avoir réussi à stabiliser une orbite instable provenant d'un régime chaotique. Cette popularité est sans doute attribuable à sa facilité d'utilisation et à ses résultats très convaincants. De plus, la plupart des autres méthodes de contrôle du chaos sont des dérivées de la méthode d'OGY. Dans la conclusion de cette recherche, nous discuterons quelque peu de d'autres techniques de contrôle et référerons le lecteur aux principaux ouvrages de synthèse sur le sujet.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il serait bon d'attirer l'attention du lecteur sur le fait que plusieurs équipes de recherche ont réussi à contrôler expérimentalement le chaos. Voici une liste sommaire de quelques domaines de recherche qui ont exploité avec succès la méthode d'OGY ou une de ses variantes.

Médecine

- Arythmie cardiaque [Garfinkel *et al.*, 92].

- Traitement de l'épilepsie [Schiff *et al.*, 94].

Optique et électronique

- Stabilisation d'orbites de hautes périodes dans un résonateur à diodes [Hunt, 91].
- Contrôle de comportements irréguliers dans des circuits électroniques [Johnson et Hunt, 93; Hunt et Johnson, 93].
- Contrôle d'un laser multimodes [Roy *et al.*, 92; Roy, Gills et Thornburg, 94].
- Contrôle d'instabilités d'une onde de spins [Azevedo et Rezende, 91].

Chimie

- Contrôle du chaos chimique observé durant l'électrolyse d'un disque de cuivre en rotation dans un tampon rempli d'acide [Parmananda *et al.*, 93].
- Stabilisation d'orbites instables provenant d'un chaos chimique isothermal [Peng, Petrov et Showalter, 91, 92; Petrov, Peng et Showalter, 92].
- Stabilisation de la réaction de Belousov-Zhabotinsky [Petrov *et al.*, 93; Petrov, Crowley et Showalter, 94].

Plasma

- Contrôle du chaos dans une décharge plasma [Ding *et al.*, 94].

Mécanique et hydrodynamique

- Contrôle du mouvement d'un ruban magnéto-élastique paramétriquement entretenu (la première démonstration en laboratoire de la méthode d'OGY) [Ditto, Rauseo et Spano, 90].
- Contrôle d'un pendule entretenu et d'un ruban de bronze entretenu [Hübinger *et al.*, 94].
- Contrôle du chaos dans un mince film de grenat circulaire de yttrium [Ye, Jones et Wigen, 93].
- Suppression d'oscillations dans une boucle de convection thermale [Singer, Wang et Bau, 91].

Chapitre 1

Contrôle en 1D

1.1 Présentation du système

Dans ce qui suit, notre objectif sera de stabiliser une orbite instable quelconque provenant d'une application discrète non-linéaire unidimensionnelle. En fait, il s'agit d'un système dynamique discret de la forme:

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu), \quad (1.1)$$

μ étant un paramètre. Cette application correspond à un flot ϕ qui lui, constitue véritablement le système dynamique,

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbf{R} \times \mathbf{Z} &\mapsto \quad \mathbf{R} \\ (x, n) &\mapsto \quad F^n(x), \end{aligned}$$

où

$$F^n = \underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{n \text{ fois}}.$$

Nous voyons très bien que la suite qui nous intéresse fera partie de l'ensemble $\{F^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, qui est en fait l'orbite du système.

1.2 Position de la stratégie

Il est à noter que $F(x_n, \mu)$ doit être non-inversible pour pouvoir comporter une dynamique chaotique (ceci implique que $n \in \mathbf{N}$) [Ott, 93]. Supposons que tel est le cas et que pour une certaine condition initiale x_0 et pour un paramètre μ_0 (qui est fixe tout au long de l’itération, pour le moment), nous itérons (1.1) et que l’orbite résultante est chaotique. Même si le tout se déroule en une dimension, l’orbite est inévitablement attirée vers un ensemble attractif nommé *attracteur chaotique* (tout au long de ce travail, nous parlerons d’attracteur chaotique plutôt que d’attracteur étrange, car ce dernier ne comporte pas nécessairement une dynamique chaotique [Grebogi *et al.*, 86]). La caractéristique d’un tel objet est qu’il contient une infinité d’orbites périodiques instables. C’est ici que repose l’essentiel du raisonnement. Nous avons donc à notre disposition un très grand nombre d’orbites périodiques qui existent déjà, nous n’avons pas besoin de les produire. Mais il y a un problème, elles sont instables. Et c’est justement pour cette raison que nous sommes en présence d’un comportement irrégulier et plus précisément, chaotique.

Supposons que nous voulons stabiliser une orbite de période 1 (un point fixe) x_* . Donc, nous itérons (1.1). Après un certain nombre d’itérés n , x_n va nécessairement entrer dans le voisinage de x_* . La raison de cette dernière affirmation est qu’en plus de posséder une infinité d’orbites périodiques instables, l’attracteur en est densément peuplé. Ceci implique que toute région membre de l’attracteur est visitée avec une probabilité unitaire, mais pas nécessairement avec la même fréquence.

Mais lorsque l’itéré x_n entre dans le voisinage du point fixe, ce dernier étant instable principalement à cause de la propriété de sensibilité extrême aux conditions initiales, il va rapidement s’éloigner de x_* , même exponentiellement. À première vue, nous serions portés à croire qu’une telle propriété est désavantageuse. Au contraire, nous pouvons en profiter. Elle nous permet d’appliquer une très légère perturbation au système pour que l’itéré suivant tombe encore plus près du point fixe. Due à cette sensibilité exponentielle aux conditions initiales, une légère perturbation, disons sur le paramètre μ_0 , entraîne un effet démesuré sur l’itéré suivant. Toutefois, la perturbation apportée étant si minuscule, le système dynamique perturbé demeure pratiquement inchangé du cas non-perturbé. Le processus de contrôle se déroule donc entièrement à l’intérieur du régime chaotique. En fait, c’est ce dernier point qui distingue particulièrement cette approche.

Il s’agit donc de développer une méthode de perturbation qui nous permet de nous rapprocher exponentiellement d’un point fixe désiré (choisi préalablement) plutôt que de nous en éloigner exponentiellement (sans perturbation). Cette perturbation s’effectuant dans le voisinage de x_* , nous pouvons donc linéariser la dynamique de (1.1) autour du point fixe et du paramètre initial μ_0 . Au premier ordre, nous avons:

$$x_{n+1} = F(x_*, \mu_0) + (x_n - x_*) \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} \Bigg|_{\substack{x=x_* \\ \mu=\mu_0}} + (\mu - \mu_0) \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial \mu} \Bigg|_{\substack{x=x_* \\ \mu=\mu_0}}. \quad (1.2)$$

Simplifions la notation:

$$A \equiv \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} \Bigg|_{\substack{x=x_* \\ \mu=\mu_0}}, \quad B \equiv \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial \mu} \Bigg|_{\substack{x=x_* \\ \mu=\mu_0}}.$$

Notons aussi que $F(x_*, \mu_0) = x_*$ par la définition même d'un point fixe. Nous avons alors:

$$x_{n+1} = x_* + A(x_n - x_*) + B(\mu - \mu_0). \quad (1.3)$$

Et nous désirons que l'itéré suivant x_{n+1} se rapproche de plus en plus de x_* . À la limite, il faut que $|x_{n+1} - x_*| = 0$, c'est-à-dire que x_{n+1} tende vers x_* . Pour ce faire, nous imposons la condition recherchée, i.e.

$$x_{n+1} - x_* = 0. \quad (1.4)$$

Substituons (1.4) dans la relation (1.3), afin d'obtenir

$$A(x_n - x_*) + B(\mu - \mu_0) = 0,$$

$$\mu_n = \frac{A(x_* - x_n)}{B} + \mu_0. \quad (1.5)$$

Cette valeur modifiée de μ_0 doit être calculée à chacun des itérés (raison de la présence de l'indice n pour μ), car l'expression (1.5) dépend de x_n . Bien sûr, si l'itéré sort du voisinage de x_* , cette méthode n'est plus valide car elle est basée sur une linéarisation et une telle démarche n'a de sens que localement. Il faut donc perturber μ_0 de $A(x_* - x_n)/B$ à chaque $n^{\text{ième}}$ itéré pour stabiliser l'évolution de la dynamique autour de x_* , mais, pour ce faire, nous devons être dans le voisinage de x_* .

Il serait bon d'expliquer un peu plus la signification de (1.5). D'abord, définissons deux quantités:

$$\Delta x_n \equiv x_n - x_* \quad \text{et} \quad \Delta \mu_n \equiv \mu_n - \mu_0. \quad (1.6)$$

Pour un point fixe donné, les quantités A et B sont constantes. Donc seuls μ_n et x_n peuvent varier. Appelons K , la partie constante, pour écrire

$$\Delta\mu_n = K \cdot \Delta x_n. \quad (1.7)$$

Il est clair ici que la perturbation requise pour stabiliser le système est proportionnelle à l'écart de l'itéré x_n et du point fixe x_* . Ceci veut dire que si nous voulons imposer une très légère perturbation au système, nous devrons attendre que l'itéré entre dans un voisinage Δx_n très petit de x_* , ce qui peut s'avérer d'une durée inadmissible.

1.3 Le ciblage

Un observateur averti ne tardera pas à constater qu'une telle attente est inacceptable pour une situation réelle de contrôle. Imaginons-nous devant un patient souffrant d'arythmie cardiaque, pouvons-nous nous permettre d'attendre 1000 ans avant d'entrer dans le voisinage d'un point fixe désiré? Une méthode appelée *ciblage* a été développée pour diminuer ce temps d'attente. Cette méthode exige un examen poussé du système à l'étude et une connaissance parfaite des équations menant au chaos. Une fois que toutes les données nécessaires à cette étude sont à la disposition de l'utilisateur, le principe de base consiste à effectuer de très légères perturbations au système, mais cette fois elles sont effectuées hors de la région des points fixes. En prenant note de l'effet de diverses perturbations pour une certaine position initiale, nous pouvons déduire la perturbation requise pour atteindre le plus rapidement possible la cible désirée. En fait, l'idée principale du ciblage est de construire des structures arborescentes menant à la cible [Barreto *et al.*, 95]. Ces structures sont préalablement construites en prenant note de diverses routes possibles menant à la cible. Puis, aussitôt qu'un itéré entre dans le voisinage d'une de ces structures, de légères perturbations successives peuvent alors être activées pour converger vers la cible initiale. En fait, cette étude préliminaire permet de trouver des raccourcis. Bien entendu, plus nous trouvons de ces chemins, plus le temps de transition sera court. Ces structures sont communément appelées *arbres*. Notons qu'ici la cible peut être tout point membre de l'attracteur, il n'est pas nécessaire que ce soit un point fixe. Un exemple de la très grande efficacité de ce procédé est donné dans [Shinbrot *et al.*, 90]. Il y est mentionné qu'en n'utilisant aucun ciblage, le voisinage d'un état désiré n'est visité qu'au 6000^{ème} itéré et qu'avec ciblage ce temps d'attente est ramené à 12! Une étude approfondie et l'application de cette technique demanderaient à elles seules une recherche de plusieurs mois. Nous préférons référer le lecteur aux ouvrages principaux sur cette technique [Shinbrot *et al.*, 90, 92a, b, c; Kostelich *et al.*, 93; Bradley, 91]. Pour un exemple simple en une dimension voir [Shinbrot *et al.*, 93].

Donc, toute équipe de recherche voulant utiliser la méthode d'OGY pour stabiliser une orbite instable d'un système chaotique devrait d'abord s'assurer d'effectuer préalablement un ciblage d'un point fixe visé. Par contre, si une équipe n'a pas en sa possession toutes les équations régissant le mouvement, alors elle ne pourra pas utiliser le ciblage.

Les derniers résultats dans ce domaine s'avèrent fort encourageants. En effet, les méthodes de ciblage qui étaient jusqu'à maintenant restreintes aux systèmes dissipatifs sont maintenant accessibles pour les systèmes hamiltoniens [Bollt et Meiss, 95a]. L'application standard a été traitée avec succès [Bollt et Meiss, 95a] et des calculs de transferts d'orbites pour des systèmes à trois corps (Terre, Lune, satellite) sont maintenant optimisés à l'aide du ciblage [Bollt et Meiss, 95b]. Ces nouveaux procédés permettent de diminuer l'impulsion spécifique totale du satellite de l'ordre de 40%. Avec toutes ces nouvelles approches, le ciblage permet maintenant de diminuer le temps de transition de 4 ordres de grandeur [Bollt et Meiss, 95a; Barreto *et al.*, 95].

1.4 Quelques symboles

Avant de continuer notre analyse, nous définirons quelques symboles que nous utiliserons par la suite. Présentons le tout sous forme de tableau:

SYMBOLE	SIGNIFICATION
ϵ	rayon du voisinage d'un point fixe
τ	temps de transition moyen
$\Delta\mu_{\max}$	perturbation maximale permise
h	pas d'intégration

De plus, tous les calculs numériques dans cette recherche ont été effectués en double précision. Les fonctions développées pour obtenir les différents résultats sont en C/C++. Nous avons ajouté en annexe les grandes lignes des méthodes numériques employées pour les dimensions 1, 2 et 3. Notons que l'utilisateur doit spécifier les valeurs de $\Delta\mu_{\max}$ et de ϵ . Idéalement, ces valeurs doivent être très petites. Pour ce qui est de $\Delta\mu_{\max}$, nous avons limité sa valeur à un certain pourcentage de μ_0 . Ce pourcentage a été fixé à 0,3% pour les cas 1D et 3D, et à 4% en 2D. L'unique critère est que $\Delta\mu_{\max}$ soit une portion infime de μ_0 , afin que nous ne changions pas la dynamique du système de façon significative. Quant à lui, le voisinage ϵ est choisi de telle sorte que le temps de transition avant d'atteindre le voisinage d'une cible ne soit pas trop grand. Une dernière précision concerne le choix du paramètre de contrôle. Lorsqu'une application comporte plus qu'un paramètre, nous sommes en droit de nous demander lequel servira de paramètre de contrôle. Dans cette situation, nous avons essayé différents paramètres jusqu'à ce qu'un

de ceux-ci nous permette de contrôler. Nous aurions pu aussi développer une technique de contrôle basée sur un ensemble de paramètres telle que celle décrite dans [Petrov, Peng et Showalter, 92], mais nous avons plutôt choisi de nous concentrer sur le contrôle à un paramètre.

1.5 Le temps de transition moyen

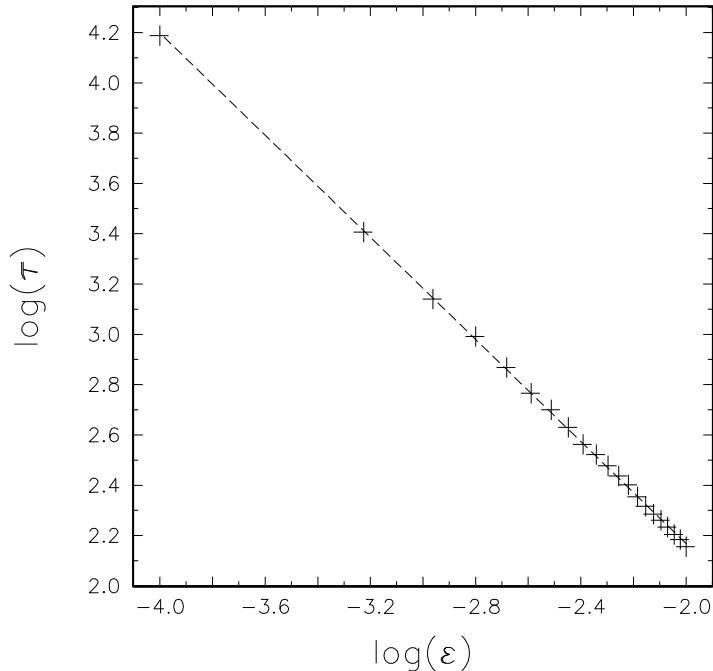


Figure 1.1: Graphique illustrant la loi de puissance reliant τ à ϵ pour l’application logistique avec $\mu_0 = 3,9$. Nous obtenons une pente de -1,01475 avec une corrélation de -0,999862.

Il serait judicieux d’établir un lien entre la dimension du voisinage du point fixe et le temps que prend l’itéré avant de tomber dans ce voisinage. Pour ce faire, nous choisirons de façon aléatoire un certain nombre de conditions initiales prises à partir d’une distribution gaussienne de moyenne 0 et d’écart type 1. Pour un voisinage ϵ , nous noterons le temps τ que prend chacun des itérés provenant de ces conditions initiales avant d’atteindre le

voisinage ϵ . Nous calculerons la moyenne de ces temps de transition. L'ensemble de ce procédé sera effectué pour différentes grandeurs de ϵ . Nous pourrons alors tenter de déduire une relation entre τ et ϵ .

C'est donc ce que nous avons fait pour l'application logistique (cette dernière est introduite en 1.9.1). La figure 1.1 illustre nos résultats. D'abord, pour chacune des valeurs de ϵ , nous avons noté le nombre d'itérations nécessaires pour tomber dans le voisinage ϵ pour 5000 conditions initiales prises au hasard dans l'intervalle $[0,1]$. Nous avons calculé la moyenne de cet ensemble pour obtenir le temps de transition moyen pour chacun des ϵ . À l'aide d'une régression linéaire, nous obtenons une pente de -1,01475 avec une corrélation de -0,999862. Nous obtenons donc la relation recherchée¹ qui est $\tau \propto 1/\epsilon$. Notre résultat est plus précis que celui obtenu dans [Lai, 94].

1.6 Stabilisation d'une période quelconque

Soit une orbite de période M : $x(1), x(2), \dots, x(M)$, obéissant à $F(x(1), \mu_0) = x(2)$, $F(x(2), \mu_0) = x(3)$, $F(x(3), \mu_0) = x(4), \dots, F(x(M), \mu_0) = x(1)$.

Après itération de (1.1), nous nous retrouvons nécessairement dans un voisinage d'un des points membres de la séquence décrite ci-haut. À ce moment, nous devons appliquer une perturbation pour stabiliser cette orbite de période M . Appelons $x(i)$ les membres de la séquence périodique. Effectuons un développement de Taylor similaire à (1.2).

$$x_{n+1} = F(x(i), \mu_0) + (x_n - x(i)) \left. \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x(i) \\ \mu=\mu_0}} + (\mu - \mu_0) \left. \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\substack{x=x(i) \\ \mu=\mu_0}} \quad (1.8)$$

Simplifions la notation. Posons A_i et B_i représentant les mêmes objets que A et B respectivement, sauf que x est ici évalué à $x(i)$ plutôt qu'à x_* . De plus $F(x(i), \mu_0) = x(i+1)$ et nous voulons que $x_{n+1} - x(i+1) = 0$. C'est-à-dire que plus nous avançons dans la séquence en perturbant, plus nous nous approchons des points de la séquence. Nous obtenons

$$A_i (x_n - x(i)) + B_i (\mu - \mu_0) = 0,$$

¹De façon générale, il existe une loi de puissance $\tau \propto \epsilon^{-\gamma}$ où $\gamma > 0$. En une dimension, $\gamma = 1$, car la densité de probabilité d'une trajectoire de points sur l'attracteur chaotique est continue. Pour des dimensions supérieures à 1, γ dépend des valeurs propres de A des différents points fixes (explication détaillée dans [Lai, 94]).

à partir duquel nous déterminons une relation nous permettant d'évaluer μ pour toutes les cibles de la période.

$$\mu_n = \frac{A_i(x(i) - x_n)}{B_i} + \mu_0 \quad (1.9)$$

Il s'agit en fait d'un résultat semblable à (1.5), sauf qu'ici le calcul de la perturbation s'effectue pour plusieurs itérés qui sont en fait des cibles faisant partie d'une orbite périodique. Il est à noter que si $x(i) = x_*$, donc que la période de la séquence est 1, l'équation (1.9) se ramène exactement à (1.5). Donc l'équation (1.5) n'est qu'un cas particulier de (1.9).

1.7 Détermination des cibles

Avant de procéder à un contrôle quelconque, il est primordial de bien choisir ce que nous désirons contrôler. Pour ce qui est de la méthode d'OGY, les cibles autour desquelles nous voulons stabiliser le mouvement sont des points fixes de l'application en question. Ici, l'expression *point fixe* est employée volontairement même pour désigner une orbite. Expliquons plus en détail ce dernier énoncé. Pour une période 1, la cible s'obtient en déterminant le point fixe de F ,

$$F(x_*, \mu_0) = x_* \quad (1.10)$$

Pour une période M , les cibles s'obtiennent en évaluant les points fixes de F^M ,

$$F^M(x(i), \mu_0) = x(i) \quad (1.11)$$

Ceci implique en fait que les points fixes de $F^M(x, \mu_0)$ correspondent aux points membres de la période M . Par exemple, pour $M = 3$:

$$F^3(x(i), \mu) = F^2(F(x(i), \mu)) = F(F(F(x(i), \mu))) = x(i)$$

En pratique, il peut s'avérer fort laborieux, voire impossible, d'évaluer analytiquement ces points fixes, principalement à cause de la présence de non-linéarités. C'est pourquoi nous nous servons plutôt de la méthode de Newton-Raphson [Press *et al.*, 92] en une dimension. Un autre fait qu'il peut être important de mentionner, est qu'un point fixe

de $F^M(x, \mu)$ ne fait pas nécessairement partie de la période M , il peut faire partie d'une période inférieure à M , mais pas n'importe laquelle. En effet, cette période doit être un diviseur de M pour que l'énoncé précédent soit valide. Donc pour obtenir véritablement une séquence M -périodique, nous devons itérer $F(x, \mu)$ $M + 1$ fois. De plus, il faut que les M premiers itérés soient différents, et que $x(M + 1) = x(1)$. Ensuite, il peut arriver que tout point fixe de $F^M(x, \mu)$ ne fasse pas partie d'une séquence M -périodique, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de période M . Dans ce cas, le point fixe trouvé correspond à une période-diviseur de M . Nous obtenons cela lorsque l'application étudiée n'est pas dans un régime complètement chaotique. Pour s'assurer que tel est le cas, un excellent test est de vérifier s'il y a présence d'une période trois, si oui, il y a nécessairement du chaos [Li et Yorke, 75], donc une infinité d'orbites.

1.8 Le bruit déterministe

Jusqu'à présent, nous considérons l'application discrète (1.1) exempte de bruit complètement aléatoire ou simplement non-déterministe. Notre système possédait des comportements irréguliers, mais ces derniers provenaient de la nature même de (1.1). Autrement dit nous n'étions en présence que de bruit déterministe (le chaos). Il serait intéressant de voir jusqu'à quel point la méthode d'OGY demeure valide en présence d'un bruit de fond. Cet intérêt n'est pas fortuit, car la quasi-totalité des phénomènes physiques réels possède un tel bruit de fond. Afin d'étudier si notre méthode de contrôle est robuste même en présence d'un bruit aléatoire, nous ajouterons un terme de cette nature à l'application discrète (1.1). Appelons-le ξ . Ce terme est constitué d'une amplitude \mathcal{A} , qui est fixé au début de l'étude, et d'une variable aléatoire ϕ . De plus, imposons à ϕ une distribution gaussienne² de moyenne 0 et d'écart type 1 [Lai, 94]. Voici l'application discrète que nous devons maintenant évaluer:

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu) + \xi, \quad (1.12)$$

où $\xi = \mathcal{A}\phi$. Avant même d'effectuer toute simulation numérique, nous pouvons prévoir aisément le comportement engendré par ξ . Soit un voisinage ϵ d'un point fixe instable x_* . Premièrement, si l'amplitude de ξ est nulle, un itéré entrant dans le voisinage ϵ va y demeurer tant et aussi longtemps que l'algorithme de contrôle sera activé. Par contre, si l'amplitude \mathcal{A} est plus grande ou égale à la dimension de ϵ , presqu'aussitôt que x_n va tomber à l'intérieur de ϵ , le terme ξ va pousser $x_{n+\ell}$ ($\ell \in \mathbf{N}$) à l'extérieur de ϵ , et le contrôle devra être désactivé. Dans ce cas, le contrôle est à toute fin pratique impossible.

²Nous avons choisi ce type de distribution pour être en mesure de mieux comparer nos résultats avec certains résultats déjà publiés. Ces derniers utilisent ce type de distribution.

Néanmoins, si \mathcal{A} est plus petit que ϵ , mais assez grand pour avoir un effet mesurable, le contrôle va être possible tant que x va être dans le voisinage de x_* . Pour un rapport \mathcal{A}/ϵ très petit, le temps de contrôle sera d'autant plus long. Éventuellement, l'itéré va sortir de ϵ à cause du bruit non-déterministe et nous devrons attendre que x retombe dans ϵ . Nous voyons donc que le contrôle ne sera plus indéfini, mais interrompu de bouffées non-contrôlées. La méthode d'OGY est donc inutile pour un système comportant un trop grand bruit de fond. Un avantage de ce bruit de fond est que les solutions du système chaotique sont encore plus ergodiques qu'avec du chaos pur. Ceci implique que le voisinage de x_* va être visité plus rapidement, ce qui peut être très avantageux.

Il est à noter que le terme aléatoire ξ n'est ajouté que lors de l'itération de l'application discrète. La recherche des points fixes et de la perturbation se fait sans ce terme. Bien sûr, dans un système réel, ce bruit serait présent même lors de la détermination des points fixes.

1.9 Exemples numériques

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus à partir des outils informatiques que nous avons développés. Avec ces outils, nous pouvons déterminer l'orbite désirée de n'importe quelle application de type (1.1), stabiliser ces orbites à l'aide de la méthode d'OGY, et ce, même en présence de bruit non-déterministe. Enfin, une fonction faisant partie de cet algorithme nous permet de calculer le temps de transition moyen pour qu'un itéré tombe dans le voisinage d'un point fixe choisi préalablement.

1.9.1 L'application logistique

L'application logistique, sans doute la plus connue des applications unidimensionnelles, a été contrôlée avec la méthode d'OGY par Y.-C. Lai [Lai, 94]. Cette application a la forme suivante:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n). \quad (1.13)$$

Cette équation sert de modèle pour l'évolution d'une population au cours du temps. Détaillons la signification des variables:

n : année de la prise de mesure

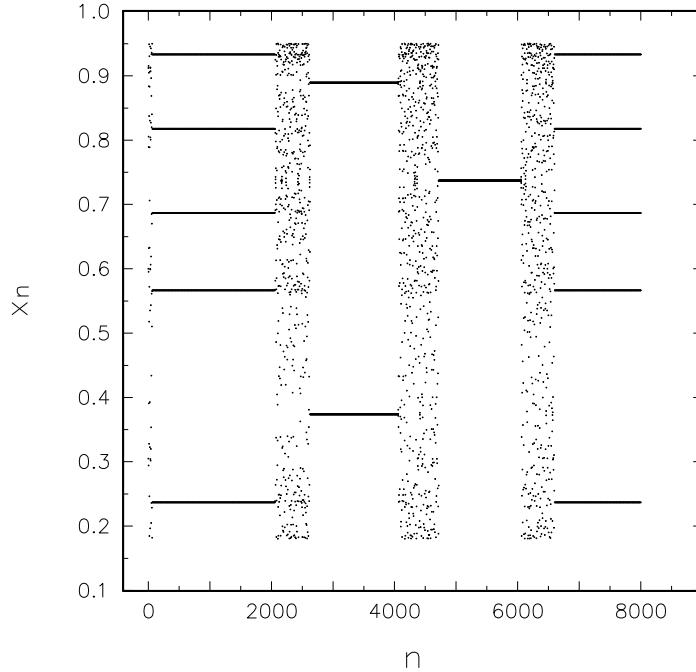


Figure 1.2: Le contrôle de l’application logistique sans bruit de fond ($\mathcal{A} = 0$). Conditions: $\mu_0 = 3, 8$, $x_0 = 0, 6$, $\epsilon = 10^{-3}$, $\Delta\mu_{\max} = 5 \times 10^{-3}$. Les orbites de périodes 5, 2, 1 et 5 sont respectivement stabilisées. C’est l’utilisateur qui choisit le moment où il désire arrêter le contrôle. Le tout est effectué à l’intérieur de chaque 2000 itérés.

x : quantité normée d’individus dans la population

μ : paramètre tenant compte des facteurs environnementaux

Cette application comporte certains intervalles de paramètres menant à des comportements chaotiques. Ceux-ci ne sont possibles que pour $\mu > 3,57\dots$. En dessous de cette valeur critique, seule une évolution périodique est possible. Ce qui nous intéresse est justement ce régime chaotique.

1.9.2 L’application de Chrostowski-Vallée-Delisle (CVD)

L’application de CVD est une relation modélisant le comportement d’un système

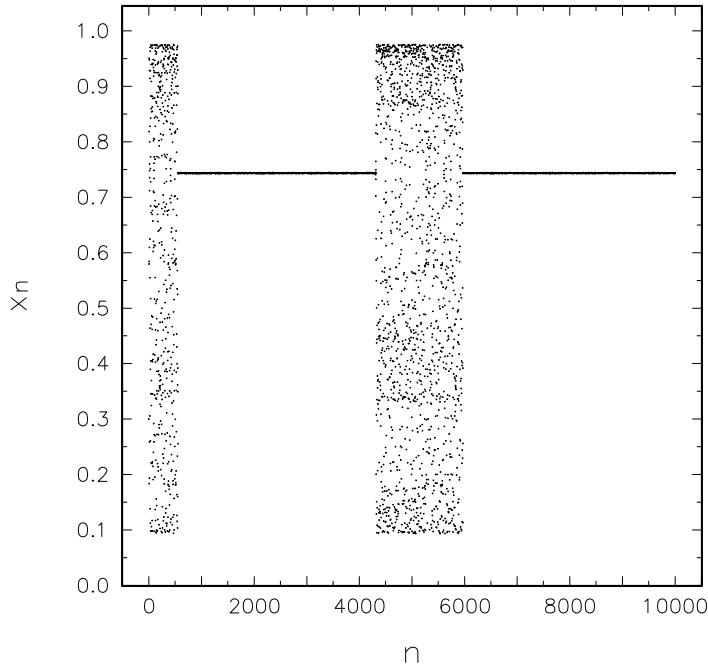


Figure 1.3: Le contrôle de l’application logistique avec bruit de fond $\mathcal{A} = 2,5 \times 10^{-4}$. Conditions: $\mu_0 = 3,9$, $x_0 = 0,3$, $\epsilon = 10^{-3}$, $\Delta\mu_{\max} = 10^{-2}$. Le point fixe (période 1) $x_* = 0,74359$ est stabilisé au 555^e itéré. L’itéré sort du voisinage de x_* au 4309^e itéré, le contrôle est alors interrompu. Au 5971^e itéré le contrôle est réactivé.

acousto-optique. Elle est décrite dans [Chrostowski, Vallée et Delisle, 83] et constitue une simplification d’une équation différentielle à délai. Les détails du dispositif expérimental sont traités dans [Chrostowski et Delisle, 83a, b]. En résumé, ce montage est constitué d’une cellule de Bragg alimentée par un générateur de fréquences radio, ce qui produit un réseau acoustique à l’intérieur de la cellule. Le faisceau d’un laser He-Ne est introduit dans cette cellule. Il en résulte un patron de diffraction. Seul le premier ordre est conservé et redistribué afin de moduler le signal rf. Il s’agit donc d’une boucle de rétroaction. La variable dynamique que nous stabiliserons est l’amplitude du voltage à l’entrée du modulateur acousto-optique. Le paramètre de contrôle dépendra de l’intensité du laser. Voici donc l’équation discrète en question:

$$x_{n+1} = \pi \left[A - \mu \sin^2(x_n - x_0) \right]. \quad (1.14)$$

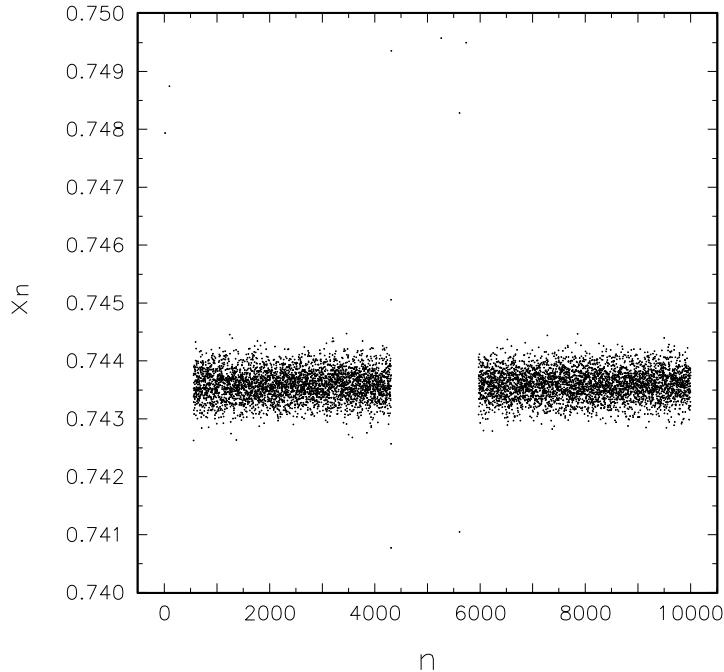


Figure 1.4: Ce graphique est un agrandissement du dernier graphe. Cet agrandissement est effectué dans le but de bien réaliser que la stabilisation de x_* se fait en réalité autour de celui-ci et non pas directement sur lui. Sans bruit numérique, la stabilisation de x_* aurait été parfaite.

Dans cette forme normalisée, μ contient l'intensité du faisceau laser, tandis que l'amplitude du voltage à l'entrée du modulateur acousto-optique se retrouve dans la variable x . Pour leur part, $(A; x_0) = (1/2; \pi/4)$ ne sont que des paramètres que nous gardons fixes. Après avoir analysé le diagramme de bifurcation de ce système, nous nous apercevons rapidement qu'il fait partie de la même famille que l'application logistique.

Notons qu'aucune des orbites instables de ce système acousto-optique n'a été stabilisée jusqu'à maintenant, que ce soit expérimentalement ou numériquement. Nous nous proposons donc d'appliquer la méthode d'OGY, vue dans ce chapitre, afin de contrôler la dynamique chaotique de ce système. Ce contrôle sera en fait une simulation numérique de la situation réelle. Les fonctions informatiques que nous avons développées étant très générales, nous n'avons qu'à entrer l'application CVD dans une fonction conçue à cet effet et la dérivée de cette dernière par rapport à x dans une autre fonction faisant partie elle

aussi du programme global.

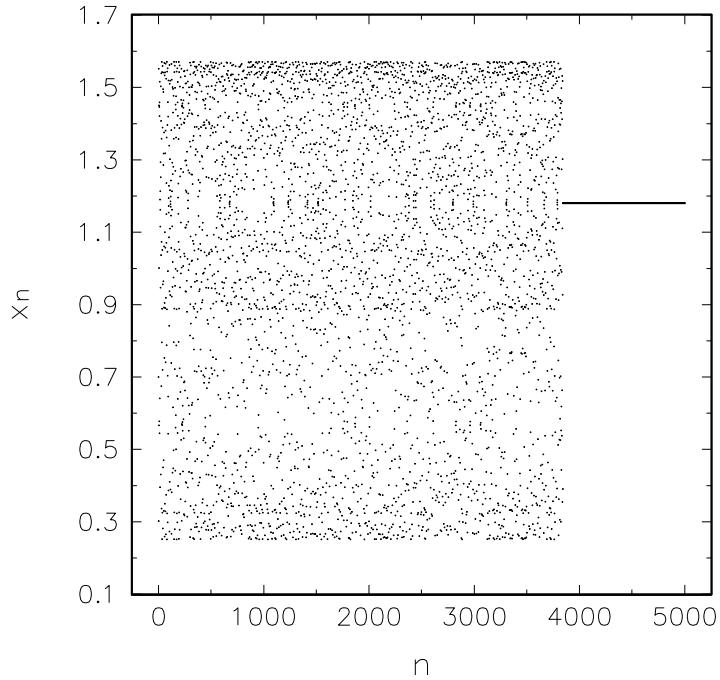


Figure 1.5: Le contrôle de l’application CVD sans bruit non-déterministe ($\mathcal{A} = 0$) pour une orbite de période 1 qui vaut 1,18027. $\epsilon = 10^{-3}$, $\Delta\mu_{\max} = 1,4 \times 10^{-4}$, $x_0 = 0,7$, $\mu_0 = 0,84$.

Lorsque l’itéré se retrouve dans le voisinage de x_* et qu’une perturbation $\Delta\mu < \Delta\mu_{\max}$ est possible, l’algorithme de contrôle entre alors en fonction. Normalement, la convergence vers le point fixe étant exponentielle, nous devrions par conséquent nous y rendre de façon très rapide. En effet, l’application logistique requiert pour des données similaires une transition de 3 à 4 itérés. Tandis que la transition dans le cas de CVD demande environ 65 itérés. Cette différence vient probablement des différences d’amplitude des exposants de Lyapunov. Mis à part ce détail, la stabilisation est parfaite une fois arrivé sur x_* , comme le démontre la figure 1.5.

1.9.3 L'application triangulaire

L'application triangulaire est particulière, car elle est continue mais non dérivable à $x = 1/2$. Voici quelle est sa forme [Hilborn, 94]:

$$x_{n+1} = \mu \left(1 - 2 \left| \frac{1}{2} - x_n \right| \right) \quad (1.15)$$

Elle non plus n'a pas encore été contrôlée. C'est donc ce que nous allons faire. La figure 1.6 montre la stabilisation d'une orbite de période 1.

En analysant le contenu du fichier correspondant à ce graphe, nous remarquons premièrement qu'une fois dans le voisinage de x_* , la convergence vers ce dernier est très rapide, à peu près de l'ordre de celle de l'application logistique. Mais le plus frappant est que le comportement asymptotique oscille en fait autour de deux points très voisins de x_* . Ces points sont successivement 0,635021 avec $\Delta\mu = 0,57243 \times 10^{-5}$ et 0,635052 de perturbation $-1,57248 \times 10^{-5}$. Ce comportement particulier est probablement attribuable à la discontinuité de pente présente dans (1.15).

Pour ces différentes applications, nous aurions pu stabiliser diverses orbites, le faire avec ou sans bruit de fond, analyser la vitesse de convergence ou le temps de transition. Mais il devient quelque peu redondant de refaire toutes ces étapes à chaque fois. Nous croyons qu'il est suffisant de constater que l'algorithme de contrôle fonctionne très bien pour divers cas.

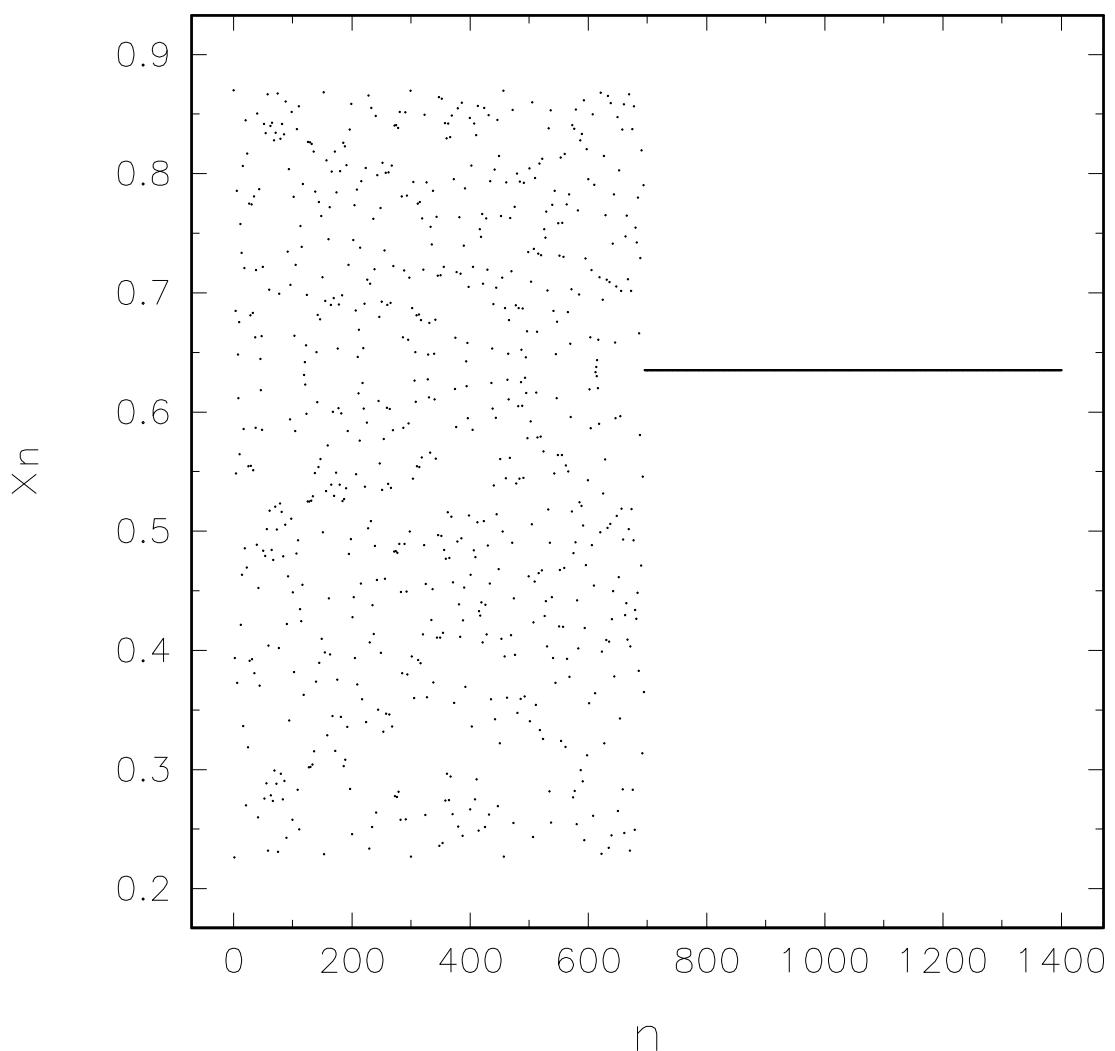


Figure 1.6: Le contrôle de l'application triangulaire sans bruit non-déterministe ($\mathcal{A} = 0$) pour une orbite de période 1 qui vaut 0.635036 . $\epsilon = 10^{-3}$, $\Delta\mu_{\max} = 1,6 \times 10^{-5}$, $x_0 = 0,87$, $\mu_0 = 0,87$.

Chapitre 2

Contrôle en 2D

2.1 Présentation du système

En deux dimensions, la démarche requise afin de stabiliser une orbite instable est semblable au cas unidimensionnel. Néanmoins, le raisonnement demande une plus grande connaissance de la dynamique autour des points fixes. Le système non-linéaire en question est de la forme

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\boldsymbol{x}_n, \mu). \quad (2.1)$$

Sachant que notre méthode de contrôle ne s'effectue que par un seul paramètre, nous écrirons plutôt (2.1) de la manière suivante, en considérant μ comme un scalaire:

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\boldsymbol{x}_n, \mu), \quad (2.2)$$

les autres paramètres étant constants tout au long de l'évolution. Nous pouvons aussi développer de façon explicite:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= F_x(\boldsymbol{x}, \mu) \\ y_{n+1} &= F_y(\boldsymbol{x}, \mu). \end{aligned}$$

Le flot peut s'écrire de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\phi : \quad & \mathbf{R}^2 \times \mathbf{Z} \quad \mapsto \quad \mathbf{R}^2 \\ & (\mathbf{x}, n) \quad \mapsto \quad \mathbf{F}^n(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Encore une fois, si (2.1) est dans un régime chaotique, l'évolution du système à l'étude va être poussée vers un attracteur chaotique densément peuplé d'une infinité d'orbites périodiques instables confinées dans un espace topologique bidimensionnel. Nous pouvons donc développer en série autour des points d'une séquence périodique. Soit la séquence périodique suivante pour μ_0 non perturbé: $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \mathbf{x}(3), \dots, \mathbf{x}(M), \mathbf{x}(M+1), \mathbf{x}(M+2), \dots$, où $\mathbf{x}(M+1) = \mathbf{x}(1)$.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(i), \mu_0) + \mathbf{D}_x \mathbf{F} \Big|_{\substack{x=\mathbf{x}(i) \\ \mu=\mu_0}} (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}(i)) + \mathbf{D}_\mu \mathbf{F} \Big|_{\substack{x=\mathbf{x}(i) \\ \mu=\mu_0}} (\mu_n - \mu_0) \quad (2.3)$$

Définissons $\mathbf{A}_i \equiv \mathbf{D}_x \mathbf{F} \Big|_{\substack{x=\mathbf{x}(i) \\ \mu=\mu_0}}$ et $\mathbf{B}_i \equiv \mathbf{D}_\mu \mathbf{F} \Big|_{\substack{x=\mathbf{x}(i) \\ \mu=\mu_0}}$. De plus, nous voyons que $\mathbf{F}(\mathbf{x}(i), \mu_0) = \mathbf{x}(i+1)$. Notons que \mathbf{A}_i est une matrice de Jacobi, car nous dérivons deux composantes. Par contre, \mathbf{B}_i est un vecteur puisque μ est un scalaire. Développons ce que cela signifie vraiment:

$$\mathbf{A}_i = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{x=\mathbf{x}(i) \\ \mu=\mu_0}}, \quad \mathbf{B}_i = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial F_x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \mu} \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{x=\mathbf{x}(i) \\ \mu=\mu_0}},$$

ce qui donne:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}(i+1) + \mathbf{A}_i(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}(i)) + \mathbf{B}_i(\mu_n - \mu_0). \quad (2.4)$$

Mais lorsque le système à l'étude en est un de dimension supérieure à 1, un élément important vient s'ajouter: chacun des points membres d'une orbite M -périodique, donc points fixes de \mathbf{F}^M , possède une structure géométrique distincte. Lorsque nous sommes dans un régime chaotique, ces points membres de cette séquence et leur voisinage possèdent un comportement hyperbolique¹ (Bien sûr, il peut aussi y avoir des points non-hyperboliques, mais ces derniers nous interdisent toute linéarisation. Par conséquent, nous devons les rejeter.). C'est cette hyperbolicité qui entraîne une instabilité du point fixe $\mathbf{F}^M(\mathbf{x}_*, \mu_0) = \mathbf{x}_*$. Nous sommes en fait en présence d'un point de selle, qui en 2D est constitué d'une variété stable et d'une instable. En termes plus techniques, ces variétés peuvent s'obtenir en calculant les valeurs propres² de \mathbf{A}_i . Nous obtiendrons nécessairement

¹point fixe hyperbolique: la matrice de Jacobi correspondante ne possède aucune valeur propre de module unitaire [Guckenheimer et Holmes, 83]

²Nous les nommerons λ_s et λ_u .

$|\Re\{\lambda_s\}| < 1 < |\Re\{\lambda_u\}|$, propriété d'un point de selle. Puis, les vecteurs propres stable et instable nous donneront les directions des deux variétés. Donc, si nous réussissons à perturber un itéré de telle sorte que le vecteur $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}(i+1)$ pointe exactement dans la direction de la variété stable, l'itéré suivant va alors tendre exponentiellement vers le point fixe de \mathbf{F}^M . Mais il y a un petit détail à ne pas négliger, les variétés stable $\mathbf{e}_{s,i}$ et instable $\mathbf{e}_{u,i}$ ne sont pas nécessairement orthogonales. Donnons un exemple pour nous en convaincre. Supposons que la projection de $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}(i+1)$ sur $\mathbf{e}_{u,i}$ soit nulle.

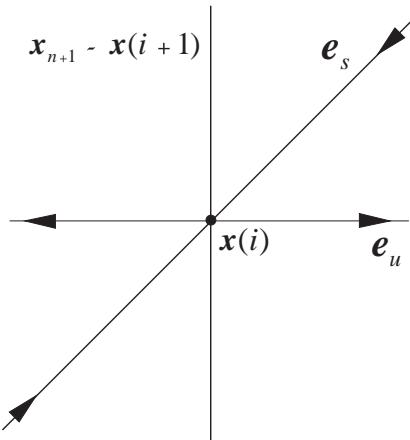


Figure 2.1: Les directions \mathbf{e}_s et \mathbf{e}_u qui correspondent respectivement aux variétés stable et instable ne sont pas nécessairement orthogonales. Ceci implique que même si $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}(i+1)$ tombe sur la direction perpendiculaire à \mathbf{e}_u , les itérés suivants ne tendront pas vers un membre de la séquence périodique.

Et bien, ceci n'implique pas obligatoirement que le vecteur $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}(i+1)$ pointe entièrement dans la direction de $\mathbf{e}_{s,i}$, il n'y a donc pas de convergence exponentielle. Par contre, nous pouvons trouver aisément des vecteurs tels que $\mathbf{f}_u - \mathbf{e}_s$ et $\mathbf{f}_s - \mathbf{e}_u$, i.e. $\mathbf{f}_s \cdot \mathbf{e}_u = 0$, $\mathbf{f}_u \cdot \mathbf{e}_s = 0$, et de normalisation; $\mathbf{f}_s \cdot \mathbf{e}_s = 1$, $\mathbf{f}_u \cdot \mathbf{e}_u = 1$. Ce sont en fait des vecteurs contravariants.

Donc si $[\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}(i+1)] \cdot \mathbf{f}_{u,i+1} = 0$, il s'ensuit que le prochain itéré va tendre exponentiellement vers le point fixe. Effectuons le produit scalaire:

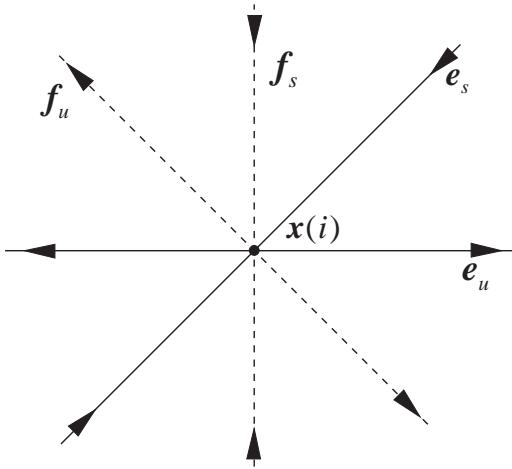


Figure 2.2: Les vecteurs \mathbf{f}_s et \mathbf{f}_u représentent les vecteurs contravariants de \mathbf{e}_s et \mathbf{e}_u .

$$[\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}(i+1)] \cdot \mathbf{f}_{u,i+1} = [\mathbf{A}_i(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}(i)) + \mathbf{B}_i(\mu_n - \mu_0)] \cdot \mathbf{f}_{u,i+1} = 0 \quad (2.5)$$

Nous n'avons plus qu'à isoler μ_n .

$$\mu_n = \frac{[\mathbf{A}_i(\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}_n)] \cdot \mathbf{f}_{u,i+1}}{\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{f}_{u,i+1}} + \mu_0 \quad (2.6)$$

Ceci constitue la nouvelle valeur du paramètre qui est requise à chacun des itérés dans la phase de contrôle.

2.2 Détermination des cibles

Pour les dimensions supérieures à 1, le raisonnement est semblable au cas unidimensionnel, c'est-à-dire que les cibles s'obtiennent en évaluant les points fixes de

$$\mathbf{F}^M(\mathbf{x}(i), \mu_0) = \mathbf{x}(i), \quad (2.7)$$

sauf que numériquement la méthode de Newton-Raphson [Press *et al.*, 92] doit être généralisée pour des systèmes d'équations.

2.3 Explication intuitive de la perturbation

Supposons que nous avons pour cible le point fixe $\mathbf{x}_*(\mu_0)$ (ou tout point $\mathbf{x}(i)$ membre d'une séquence périodique) et que ce dernier soit un point fixe instable ou plus exactement un point de selle. Ceci implique qu'il y a présence d'une variété stable et d'une variété instable. Représentons cette situation par:

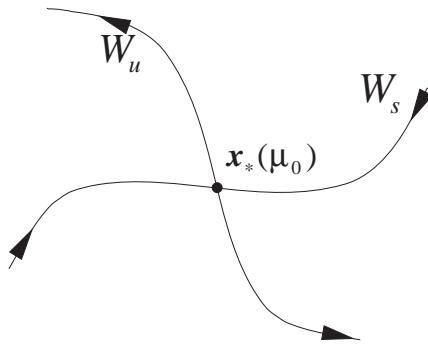


Figure 2.3: W_s et W_u représentent les variétés stable et instable du point fixe $\mathbf{x}_*(\mu_0)$.

Une variété stable est l'union des orbites qui parviennent au point fixe et du point fixe lui-même. Une variété instable est l'union des orbites qui sortent du point fixe et de ce même point fixe. Pour être en mesure d'analyser la dynamique autour d'un tel point, nous avons deux choix. Le premier serait d'utiliser le théorème de la variété centrale [Guckenheimer et Holmes, 83]. Cette méthode est essentielle lorsque le point fixe n'est pas hyperbolique. De plus, elle est très efficace, mais cette efficacité a un prix: le traitement analytique peut s'avérer complexe voire impossible. Certes, cette méthode serait

théoriquement très fiable, mais pour notre stratégie de contrôle, un tel degré d'efficacité n'est pas nécessaire, il est même inutile. Nous devons donc nous contenter de la deuxième méthode: la linéarisation. Nous linéarisons donc autour du point fixe et obtenons une autre variété stable E_s et une instable E_u . Ces dernières sont en fait respectivement tangentes à W_s et W_u . De plus, E_s et E_u sont de même dimension que W_s et W_u .

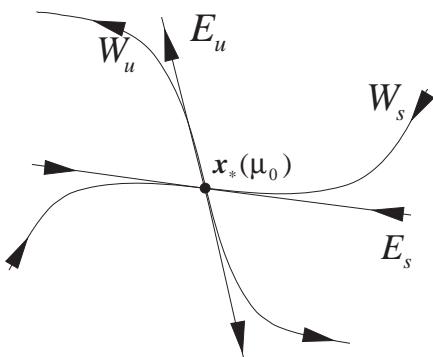


Figure 2.4: E_s et E_u sont les variétés locales stable et instable de $\mathbf{x}_*(\mu_0)$.

Ainsi la connaissance de E_s et E_u est suffisante, car nous ne nous intéressons qu'au voisinage immédiat du point fixe. Supposons qu'un itéré \mathbf{x}_n tombe dans ce voisinage, l'algorithme de contrôle entre alors en action. La perturbation imposée au système modifie la position de $\mathbf{x}_*(\mu_0)$ de telle sorte que \mathbf{x}_{n+1} se retrouve le plus voisin possible (voire superposé) de la variété stable du point fixe non-perturbé. Règle générale, il ne se retrouvera pas directement dessus, car la linéarisation ne se fait qu'au premier ordre. Notons ici que nous sommes en présence d'un nouveau point fixe $\mathbf{x}_*(\mu_0 + \Delta\mu)$ qui est quelque peu différent de $\mathbf{x}_*(\mu_0)$, car la perturbation est effectuée sur le système même. À la prochaine itération \mathbf{x}_{n+2} va donc avoir encore plus tendance à se rapprocher directement de $\mathbf{x}_*(\mu_0)$. S'il n'y a aucun bruit non-déterministe (nous pouvons définir le chaos comme étant un bruit déterministe et un bruit non-déterministe comme un bruit de fond complètement aléatoire), \mathbf{x}_n va nécessairement demeurer dans le voisinage de $\mathbf{x}_*(\mu_0)$ jusqu'à ce qu'il tombe exactement sur $\mathbf{x}_*(\mu_0)$. Mais il ne faut pas oublier que dans la plupart des cas, $\mathbf{x}_*(\mu_0)$ est un irrationnel. Il ne peut donc pas être évalué de façon exacte.

Ceci signifie que même si $\mathbf{x}_{n+\ell}$ (où $\ell \in \mathbb{N}$ quelconque) tombe directement sur $\mathbf{x}_*(\mu_0)$ préalablement calculé, nous devons maintenir la perturbation à tous les itérés, car $\mathbf{x}_*(\mu_0)$

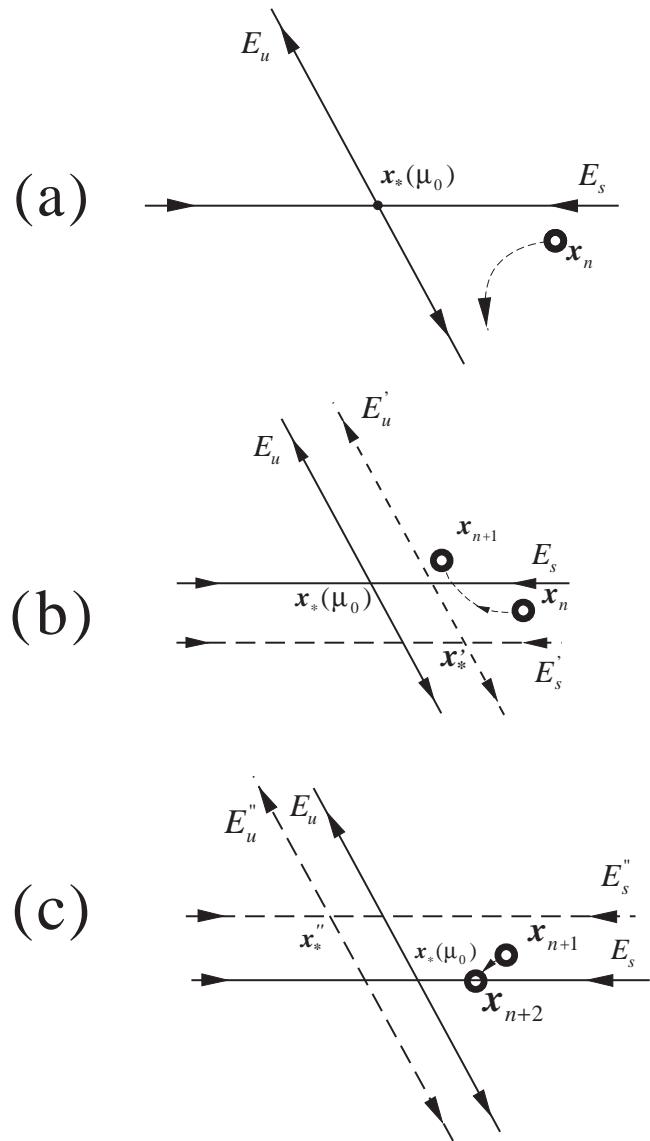


Figure 2.5: (a) Les itérés successifs tendent vers la direction de la variété instable. (b) La première perturbation modifie la position du point fixe de telle sorte que l’itéré suivant se rapproche de celui-ci. S’il n’y avait aucune erreur numérique ou approximation, cet itéré tomberait exactement sur la variété stable E_s de $\mathbf{x}_*(\mu_0)$. (c) Éventuellement, la perturbation pousse un des itérés sur la variété stable du point fixe non-perturbé. Ici, nous avons supposé qu’il s’agissait du deuxième itéré. Les symboles affectés d’un prime correspondent au système perturbé.

n'est pas exact, donc $\mathbf{x}_{n+\ell}$ n'est pas de façon précise sur $\mathbf{x}_*(\mu_0)$. Si nous arrêtons l'algorithme de contrôle, l'itéré va éventuellement sortir du voisinage et prendre sa direction naturelle vers la variété instable. Nous devrons alors attendre à nouveau qu'il repasse dans le voisinage de $\mathbf{x}_*(\mu_0)$ pour réactiver le contrôle. Cette attente peut s'avérer très longue d'autant plus que le voisinage est petit. Bien sûr, nous pourrions utiliser une autre méthode appelée ciblage pour diminuer le temps de transition entre deux présences dans le voisinage de $\mathbf{x}_*(\mu_0)$. Nous avons quelque peu discuté de cette méthode au dernier chapitre. Pour un traitement aux dimensions supérieures à 1, voir [Kostelich *et al.*, 93; Barreto *et al.*, 95].

En termes plus imagés, le système point fixe-variétés peut être représenté par une selle et l'itéré par une bille. Si nous plaçons la bille au sommet de la selle, elle n'y restera pas longtemps, elle va avoir tendance à rouler du côté droit ou gauche (variété instable). Mais si nous bougeons légèrement la selle de telle sorte que la bille se retrouve dans l'axe central comportant les élévations arrière et devant (variété stable), elle va retrouver momentanément sa stabilité. Elle va alors avoir tendance à rouler d'un côté ou de l'autre, nous devrons alors bouger la selle différemment et ainsi de suite. Le contrôle peut être aussi représenté par une personne tenant dans la paume de sa main un crayon à la verticale, c'est une situation très instable. Si le crayon tangue d'un côté, nous ajustons la position de la main afin de préserver cet équilibre labile. Donc, cette méthode de contrôle semble être tout à fait naturelle pour nous dans la vie de tous les jours.

Ce qui est intéressant avec cette sorte de contrôle, c'est que l'objet dont nous modifions la position (la selle, la main, le système point fixe-variétés) n'a pas lui-même à être modifié. C'est-à-dire que si nous voulons contrôler un système physique, nous n'avons pas à modifier la nature (la forme, la géométrie) de la dynamique du système pour avoir un contrôle convenable, nous n'avons qu'à le déplacer très légèrement. Ce très léger déplacement est nécessaire afin de ne pas modifier de façon significative le système à l'étude. Ce déplacement infime se traduit en pratique par une contrainte sur la variation de la perturbation $\Delta\mu$. Donc, deux conditions doivent être respectées pour qu'il y ait contrôle.

1° L'itéré \mathbf{x}_n doit être dans le voisinage de $\mathbf{x}_*(\mu_0)$.

2° La perturbation $\Delta\mu$ doit être dans l'intervalle $|\Delta\mu| < \Delta\mu_{\max}$ et $\Delta\mu_{\max} \ll \mu_0$.

2.4 L'application de Hénon

2.4.1 Présentation du système

L'application de Hénon [Hénon, 76] a initialement été étudiée afin de modéliser l'application de Poincaré résultant de l'attracteur de Lorenz [Lorenz, 63; Hilborn, 94]. Ce système est décrit par deux équations couplées:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mu - x_n^2 + B y_n \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Une seule de ces deux équations possède une non-linéarité. Le paramètre μ sera notre paramètre de contrôle. Les valeurs de μ et B les plus souvent utilisées dans la littérature pour obtenir un comportement chaotique sont $\mu_0 = 1,4$ et $B = 0,3$. Trouvons analytiquement toutes les valeurs nécessaires pour stabiliser une orbite instable. Mais d'abord présentons l'attracteur chaotique résultant de l'itération de l'application de Hénon (voir figure 2.6).

Cet attracteur a été obtenu avec la condition initiale $(x_0; y_0) = (0,3; 0,4)$. Les 2000 premiers itérés n'ont pas été retenus afin de se débarrasser du mouvement transitoire. Notons la structure presqu'unidimensionnelle de l'attracteur. Ceci dénote la propriété d'un système hautement dissipatif. En fait, l'attracteur possède une dimension de capacité³ d_c de 1,26 [Rasband, 90].

2.4.2 Recherche des points fixes

Avant toute chose, nous devons identifier l'orbite que nous désirons stabiliser. Pour fin de simplicité et de clarté, choisissons une orbite de période 1 (un point fixe). La recherche d'un point fixe exige que nous imposions $\mathbf{F}(\mathbf{x}_*, \mu_0) = \mathbf{x}_*$, donc que

$$\mu_0 - x_*^2 + B y_* = x_* \tag{2.9}$$

$$x_* = y_*. \tag{2.10}$$

Substituons la valeur de y_* dans (2.9). Il ne reste qu'à isoler x_* . Ceci donne

³dimension de capacité: dimension fractale couramment appelée *box-counting* [Falconer, 90]

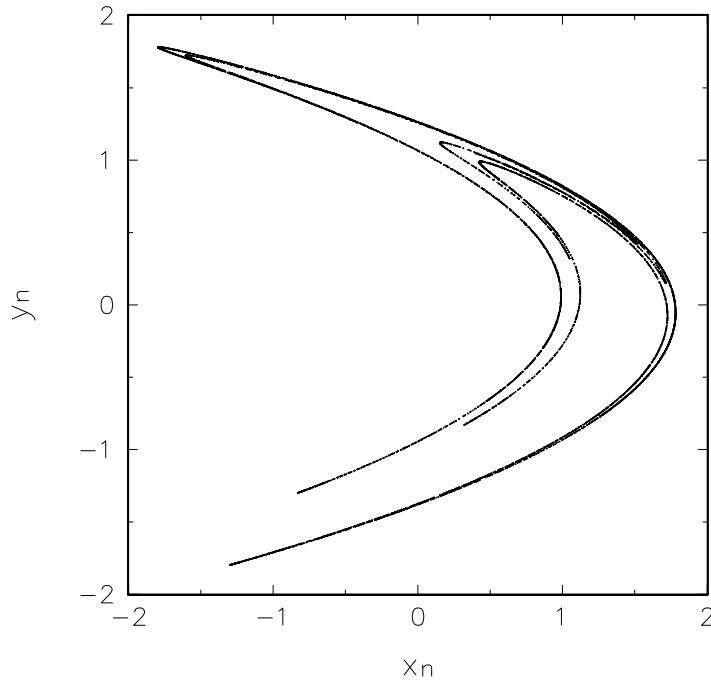


Figure 2.6: Attracteur de Hénon obtenu avec $x_0 = 0,3$ et $y_0 = 0,4$ comme conditions initiales. Les paramètres μ_0 et B sont respectivement 1,4 et 0,3. L'attracteur est constitué de 10^4 points.

$$x_* = y_* = \frac{1}{2} \left[(B - 1) \pm \sqrt{(B - 1)^2 + 4\mu_0} \right]. \quad (2.11)$$

2.4.3 Recherche des valeurs propres de \mathbf{A}

La matrice de Jacobi est la suivante:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{x=x_* \\ \mu=\mu_0}} = \begin{pmatrix} -2x_* & B \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Nous devons rechercher les valeurs propres de \mathbf{A} afin d'obtenir les différentes variétés. Ce

résultat s'obtient directement.

$$\lambda_{\pm} = -x_* \pm \sqrt{x_*^2 + B} \quad (2.13)$$

Donc, à partir de la valeur de B et du point fixe x_* , nous obtenons deux valeurs propres devant respecter la relation $|\Re\{\lambda_s\}| < 1 < |\Re\{\lambda_u\}|$.

2.4.4 Recherche des vecteurs \mathbf{e}_s et \mathbf{e}_u

Afin de trouver les directions stable et instable de x_* , nous n'avons qu'à calculer les vecteurs propres stable et instable qui correspondent respectivement à λ_s et λ_u . Nous ne nous intéressons qu'à la direction. Nous pouvons donc normaliser ces vecteurs. Nous obtenons alors les directions stable et instable dans le voisinage de x_* .

$$\mathbf{e}_s = \frac{1}{\sqrt{\lambda_s^2 + 1}}(\lambda_s \mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{\sqrt{\lambda_u^2 + 1}}(\lambda_u \mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (2.15)$$

2.4.5 Recherche des vecteurs contravariants \mathbf{f}_s et \mathbf{f}_u

À partir des relations imposées plus tôt, celles portant sur l'orthogonalité et la normalisation des différents vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{e}_u &= \mathbf{f}_u \cdot \mathbf{e}_s = 0 \\ \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{e}_s &= \mathbf{f}_u \cdot \mathbf{e}_u = 1, \end{aligned}$$

nous obtenons directement la forme des vecteurs contravariants.

$$\mathbf{f}_s = \frac{\sqrt{\lambda_s^2 + 1}}{(\lambda_s - \lambda_u)}(\mathbf{i} - \lambda_u \mathbf{j}) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{f}_u = \frac{\sqrt{\lambda_u^2 + 1}}{(\lambda_u - \lambda_s)}(\mathbf{i} - \lambda_s \mathbf{j}) \quad (2.17)$$

Tous ces résultats sont en parfait accord avec ceux obtenus dans [Ott, Grebogi et Yorke, 90a], sauf pour \mathbf{f}_u , où nous avons décelé une erreur de signe.

2.4.6 Une méthode numérique pour les variétés

La méthode que nous avons utilisée afin de calculer les différentes variétés est analytique. C'est-à-dire que nous déterminons analytiquement les vecteurs propres stable et instable de la matrice de Jacobi de l'application discrète à l'étude. C'est en fait de cette manière que le premier contrôle numérique à l'aide de l'algorithme d'OGY a été effectué [Ott, Grebogi et Yorke, 90a, b].

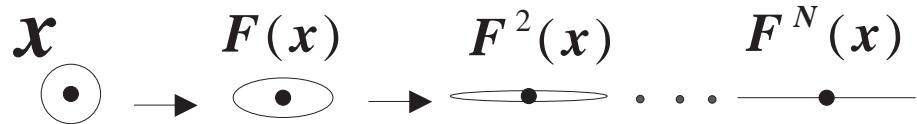
Or, il existe une stratégie numérique utilisée dans la plupart des publications relatives au contrôle du chaos, qui consiste plutôt à utiliser le comportement des itérés voisins du point analysé. Les références à consulter pour mieux comprendre cette technique sont: [Lai *et al.*, 93; Lai, Ding et Grebogi, 93].

Expliquons à l'aide de schémas en quoi consiste l'essentiel de ce procédé (voir la figure à la page suivante). Premièrement, supposons que nous voulons obtenir les directions \mathbf{e}_s et \mathbf{e}_u d'un point \mathbf{x} . Pour trouver \mathbf{e}_s , il faut d'abord itérer \mathbf{x} , et ce, N fois (N assez grand, en général 20 itérations sont amplement suffisantes) et conserver la valeur des itérés. Si nous plaçons un cercle unitaire centré en \mathbf{x} , à $\mathbf{F}^N(\mathbf{x})$ ce cercle va être déformé en forme d'ellipse d'axe majeur coïncidant avec \mathbf{e}_u .

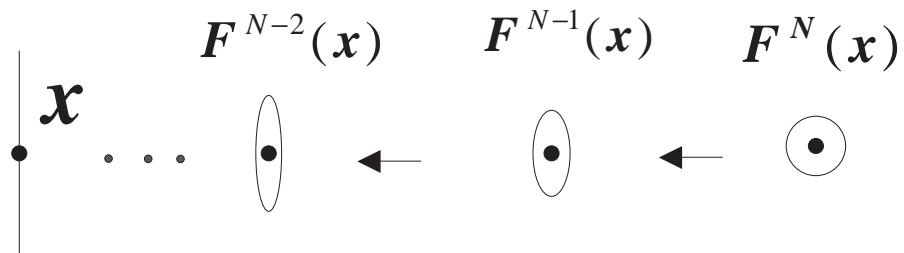
Mais nous recherchons la structure géométrique autour de \mathbf{x} , non pas autour de $\mathbf{F}^N(\mathbf{x})$. Donc, il s'agit plutôt de placer le cercle unitaire en $\mathbf{F}^N(\mathbf{x})$ et d'itérer de façon inverse (i.e. $\mathbf{F}^N(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}^{N-1}(\mathbf{x})$, ..., \mathbf{x}). Étant donné que nous itérons dans le sens contraire, l'axe majeur de l'ellipse va plutôt se diriger naturellement vers la direction stable de \mathbf{x} , c'est-à-dire \mathbf{e}_s .

De façon similaire, nous pouvons calculer \mathbf{e}_u . Dans ce cas, nous calculons les itérés précédents à \mathbf{x} , c'est-à-dire $F^{-1}(\mathbf{x})$, $F^{-2}(\mathbf{x})$, ..., $F^{-N}(\mathbf{x})$. Puis, nous plaçons un cercle unitaire en $F^{-N}(\mathbf{x})$. En itérant $F^{-N}(\mathbf{x})$ vers \mathbf{x} , le cercle va se déformer en une ellipse d'axe majeur situé dans la direction de \mathbf{e}_u en \mathbf{x} .

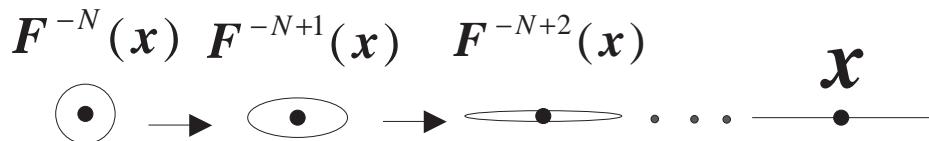
L'avantage de cette technique est qu'elle est très versatile et s'adapte bien à toute situation. Par contre, le temps de calcul est augmenté de façon significative et la précision est moindre que celle de la méthode analytique.



(a)



(b)



(c)

Figure 2.7: (a) La déformation d'un cercle unitaire centré en \mathbf{x} sous itérations successives de \mathbf{F} . L'axe principal se positionne de façon naturelle dans la direction de la variété instable. (b) La déformation d'un cercle unitaire centré en \mathbf{F}^N sous itérations successives de \mathbf{F}^{-1} . L'axe principal se positionne de façon naturelle dans la direction de la variété stable. (c) La déformation d'un cercle unitaire centré en \mathbf{F}^{-N} sous itérations successives de \mathbf{F} . L'axe principal se positionne de façon naturelle dans la direction de la variété instable.

2.4.7 Résultats numériques

En ce qui nous concerne, la démarche que nous avons utilisée peut s'avérer impossible à faire analytiquement. Pour des périodes plus élevées ou pour d'autres applications discrètes, la recherche de points fixes de façon analytique devient rapidement irréalisable. C'est la raison pour laquelle nous faisons appel à la méthode de Newton-Raphson [Press *et al.*, 92]. De plus, les étapes de calcul pour trouver les différentes variétés sont effectuées par un algorithme que nous avons développé. Afin de contrôler une application discrète, l'utilisateur n'a qu'à fournir l'application désirée et la matrice de Jacobi correspondante. Le calcul de points fixes, variétés et forme de la perturbation se fait alors automatiquement. Voici donc quelques résultats obtenus avec l'aide du programme que nous avons développé.

2.4.8 Contrôle sans bruit non-déterministe

Dans ce qui suit, nous stabilisons successivement des orbites de périodes 1, 2 et 1. À tous les 3000 itérés, l'algorithme de contrôle est activé pour stabiliser une période différente. L'utilisateur a donc le loisir de choisir à tout instant l'orbite périodique instable qu'il veut maintenir. Dans l'exemple de la figure 2.8, il n'y a aucun bruit non-déterministe. C'est-à-dire qu'il n'y a aucun bruit de fond provenant d'une source externe aux équations de l'application. Le paramètre μ_0 est fixé à 1,4, tandis que B est fixé à 0,3. Les conditions initiales sont $x_0 = 0,6$ et $y_0 = 0,5$. La perturbation maximale permise est de 5×10^{-2} et le rayon du voisinage du ou des points fixes est de 1×10^{-2} .

2.4.9 Contrôle avec bruit non-déterministe

L'ajout d'un aspect complètement aléatoire au problème est nécessaire, car tout système physique réel est empreint, ne serait-ce que de façon minime, d'un bruit de fond. Dans notre cas, nous devrons ajouter artificiellement ce bruit à notre système chaotique de façon numérique. De la même manière qu'à la section 1.8, nous ajoutons un terme aléatoire ξ de distribution gaussienne, de moyenne 0 et d'écart type unitaire. Ici, $\xi = \mathcal{A}\phi$. De façon développée, l'application que nous devons maintenant itérer est:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mu - x_n^2 + By_n + \mathcal{A}\phi_x \\ y_{n+1} &= x_n + \mathcal{A}\phi_y. \end{aligned} \tag{2.18}$$

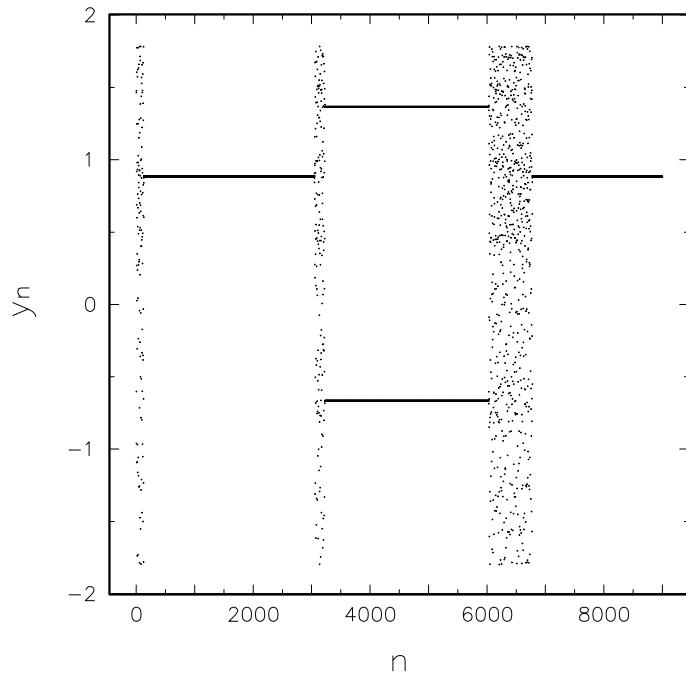


Figure 2.8: Le contrôle de l’application de Hénon sans bruit non-déterministe pour des périodes 1, 2 et 1 à tous les 3000 itérés. Conditions: $\epsilon = 10^{-2}$, $\Delta\mu_{\max} = 5 \times 10^{-2}$, $x_0 = 0, 6$, $y_0 = 0, 5$, $(\mu_0; B) = (1, 4; 0, 3)$.

L’importance de l’amplitude \mathcal{A} n’est pas à négliger, car si elle est trop grande par rapport à la perturbation maximale permise, l’itéré suivant va presqu’immédiatement sortir du voisinage du point fixe et le contrôle devra alors être interrompu. La figure 2.9 représente le contrôle d’une orbite de période 2 de l’application de Hénon comportant un terme aléatoire. Notons les pertes et les reprises de contrôle. En diminuant progressivement \mathcal{A} , nous aurions des périodes de contrôle de plus en plus longues. C’est donc dire qu’en plus de contrôler un système empreint de bruit déterministe, nous pouvons contrôler à nouveau un tel système dans lequel du bruit non-déterministe a été ajouté.

Notons que la stabilisation ne se fait plus directement (à la précision optimale) sur le point fixe mais dans son voisinage, car le bruit de fond déplace constamment les itérés successifs même lorsque l’algorithme de contrôle est en place.

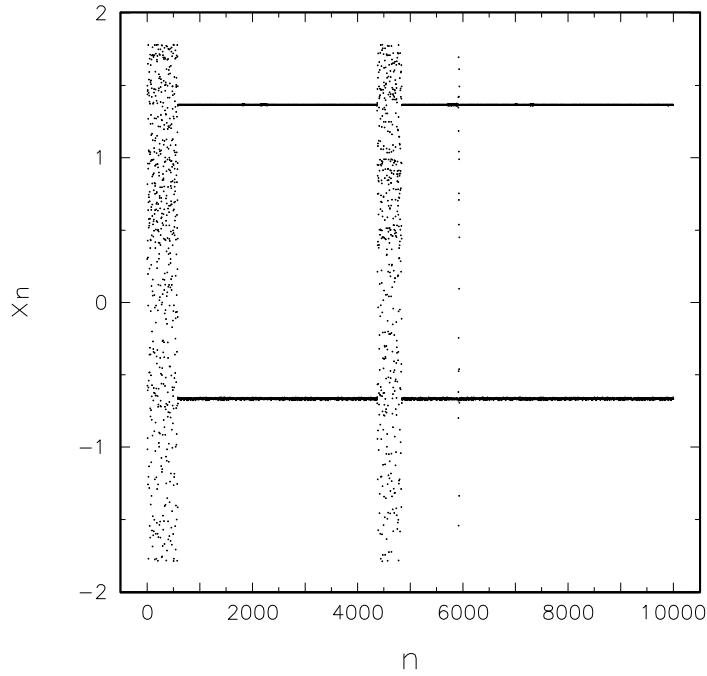


Figure 2.9: Le contrôle de l’application de Hénon avec du bruit non-déterministe ($\mathcal{A} = 3 \times 10^{-3}$) pour une période 2. $\epsilon = 10^{-2}$, $\Delta\mu_{\max} = 5 \times 10^{-2}$, $x_0 = 0,3$, $y_0 = 0,4$, $(\mu_0; B) = (1, 4; 0, 3)$. Notons les pertes et reprises successives de contrôle.

2.5 L’application de Ikeda-Hammel-Jones-Moloney

2.5.1 Présentation du système

Cette application a récemment été synchronisée [Lai et Grebogi, 93a], mais à notre connaissance, aucune de ses orbites n’a été proprement stabilisée avec la méthode d’OGY standard. Par contre l’exercice a été suggéré dans [Lai, 94]. Notons aussi qu’une nouvelle variation de la méthode d’OGY a été utilisée afin de stabiliser cette application [So et Ott, 95]. Dans cette partie, nous nous proposons donc de stabiliser différentes orbites de cette application,

$$z_{n+1} = a + bz_n \exp \left(ik - \frac{i\mu}{1 + |z_n|^2} \right). \quad (2.19)$$

Cette équation modélise une cavité optique en forme d'anneau. Le comportement chaotique provient d'un milieu non-linéaire introduit dans la cavité. Pour un survol bien expliqué de la signification des différents paramètres et de la situation physique, nous référons le lecteur à [Lai et Grebogi, 93a]. Pour une étude approfondie du système, voir [Hammel, Jones et Moloney, 85]. À première vue, cette application semble unidimensionnelle. Il n'en est rien. En effet, il ne s'agit que d'une représentation complexe d'un système comportant un ensemble de deux équations couplées. Nous n'avons qu'à prendre les parties réelle et imaginaire de (2.19), et nous retrouvons une forme qui nous est plus familière:

$$\begin{aligned} \Re\{z_{n+1}\} = x_{n+1} &= a + bx_n \cos \theta - by_n \sin \theta \\ \Im\{z_{n+1}\} = y_{n+1} &= by_n \cos \theta + bx_n \sin \theta \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec

$$\theta = k - \frac{\mu}{1 + x_n^2 + y_n^2}. \quad (2.21)$$

Présentons maintenant l'attracteur chaotique (voir figure 2.10) correspondant à cette application pour les paramètres suivants que nous garderons fixes pour nos simulations, sauf μ_0 , qui bien sûr va être perturbé un peu plus loin.

PARAMÈTRE	VALEUR
a	1
b	0,9
k	0,4
μ_0	6

2.5.2 Contrôle sans bruit non-déterministe

Afin de stabiliser une orbite instable qui est déjà présente dans l'attracteur, nous utilisons le même algorithme que pour l'application de Hénon, c'est-à-dire la méthode d'OGY. Parfois, il peut s'avérer assez difficile de trouver une cible. Nous avons réussi à en trouver une de période 4 et une de période 1. La figure 2.11 est un exemple de contrôle de cette application modélisant ce système optique.

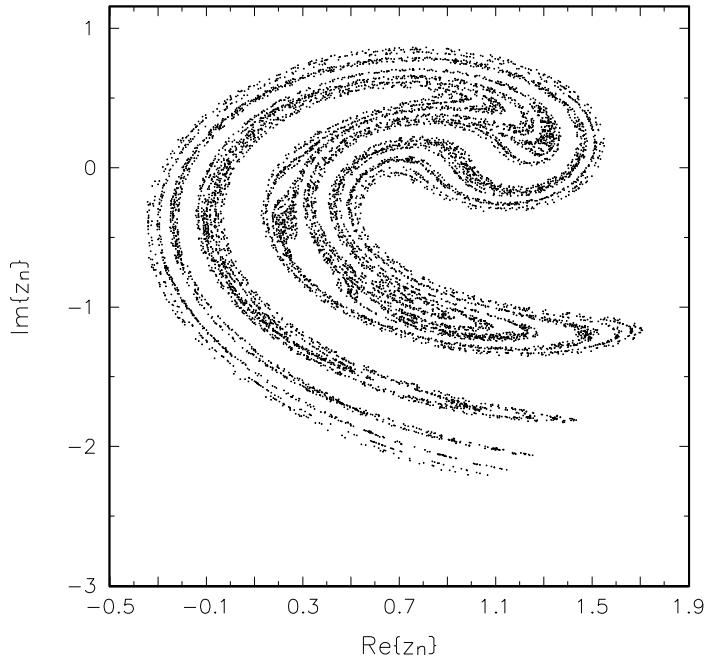


Figure 2.10: L'attracteur de Ikeda-Hammel-Jones-Moloney pour les paramètres: $\mu_0 = 6$, $a = 1$, $b = 0,9$ et $k = 0,4$. Le mouvement transitoire a été enlevé en retranchant les 2000 premiers itérés.

2.5.3 Contrôle avec bruit non-déterministe

Lorsque vient le temps d'incorporer un bruit aléatoire à un système chaotique, nous devons principalement nous demander jusqu'à quelle amplitude \mathcal{A} nous pouvons aller sans pour autant perdre tout contrôle. La limite est parfois très étroite. Ici, nous nous contentons d'illustrer ce fait avec deux exemples numériques comportant des amplitudes très voisines, mais produisant des résultats très différents. Dans la figure 2.12, pour $\mathcal{A} = 1,790 \times 10^{-3}$, aussitôt que l'itéré entre dans le voisinage d'un des membres de la séquence périodique, la stabilisation est permanente pour tout itéré subséquent. Or, pour les mêmes paramètres et conditions initiales, mais avec une amplitude légèrement supérieure, soit de $\mathcal{A} = 1,793 \times 10^{-3}$, le contrôle devient alors intermittent et les intervalles de non-stabilisation deviennent prédominants (voir la figure 2.13). Nous avons obtenu cette valeur seuil (entre $\mathcal{A} = 1,790 \times 10^{-3}$ et $\mathcal{A} = 1,793 \times 10^{-3}$) en effectuant plusieurs

simulations avec différents \mathcal{A} . Toutes les conditions menant à la réalisation des deux simulations retenues sont données dans les commentaires des figures.

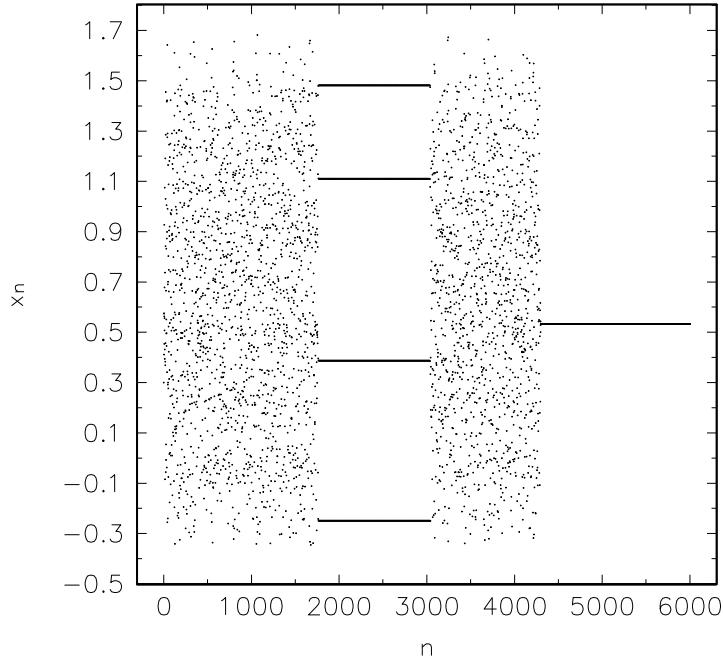


Figure 2.11: Le contrôle de l’application de Ikeda-Hammel-Jones-Moloney pour des périodes de 4 et de 1, sans bruit de fond ($\mathcal{A} = 0$). La stabilisation pour différentes périodes est effectuée pour des intervalles de 3000 itérés. $(x_0; y_0) = (0, 3; 0, 4)$, $(\mu_0; a; b; k) = (6; 1; 0, 9; 0, 4)$, $\epsilon = 10^{-2}$, $\Delta\mu_{\max} = 5 \times 10^{-2}$.

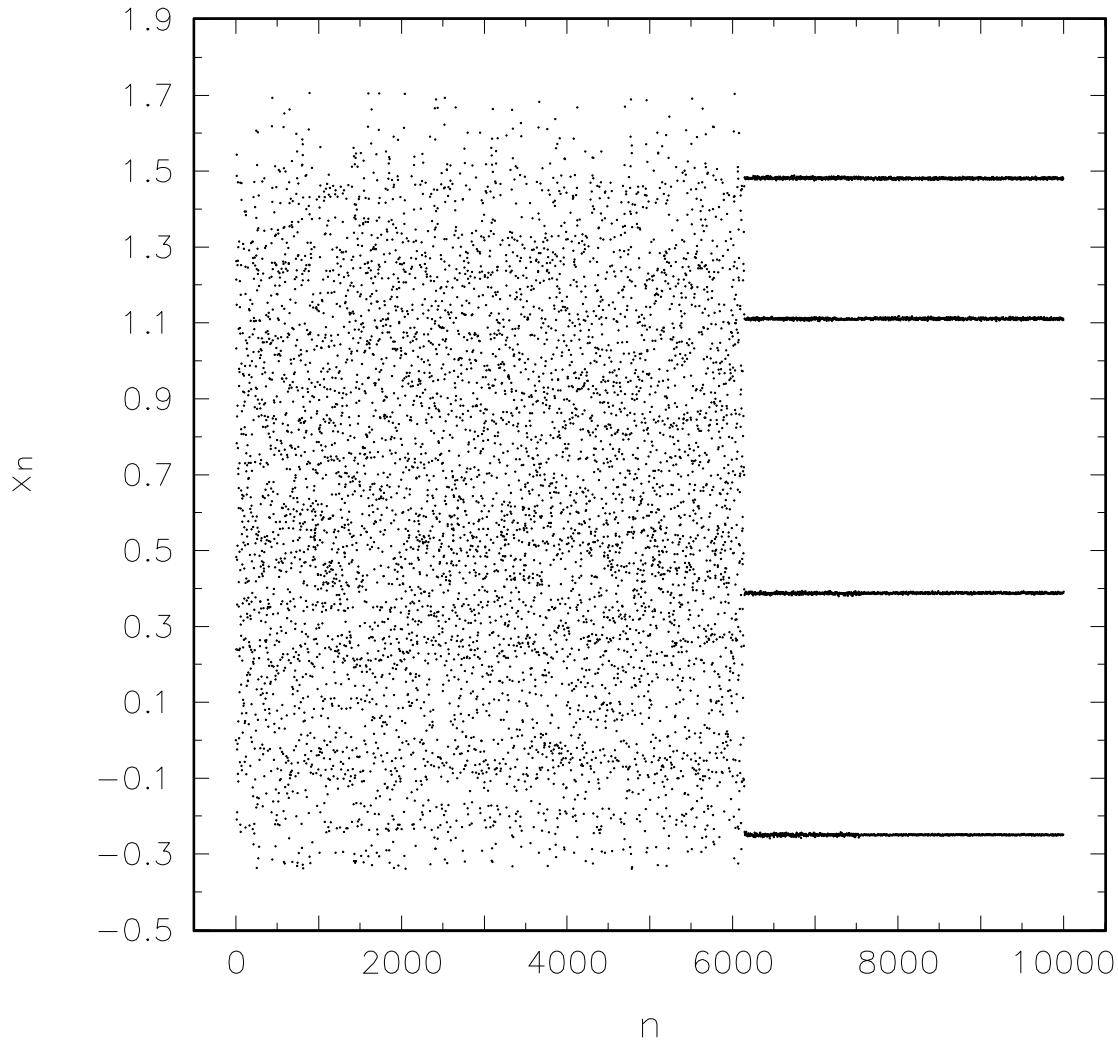


Figure 2.12: Le contrôle de l’application de Ikeda-Hammel-Jones-Moloney avec du bruit de fond ($\mathcal{A} = 1,790 \times 10^{-3}$) pour une période de 4. $(x_0, y_0) = (0; -0,05)$, $(\mu_0; a; b; k) = (6; 1; 0,9; 0,4)$, $\Delta\mu_{\max} = 5 \times 10^{-2}$, $\epsilon = 10^{-2}$. Pour cette amplitude \mathcal{A} , le contrôle est très stable.

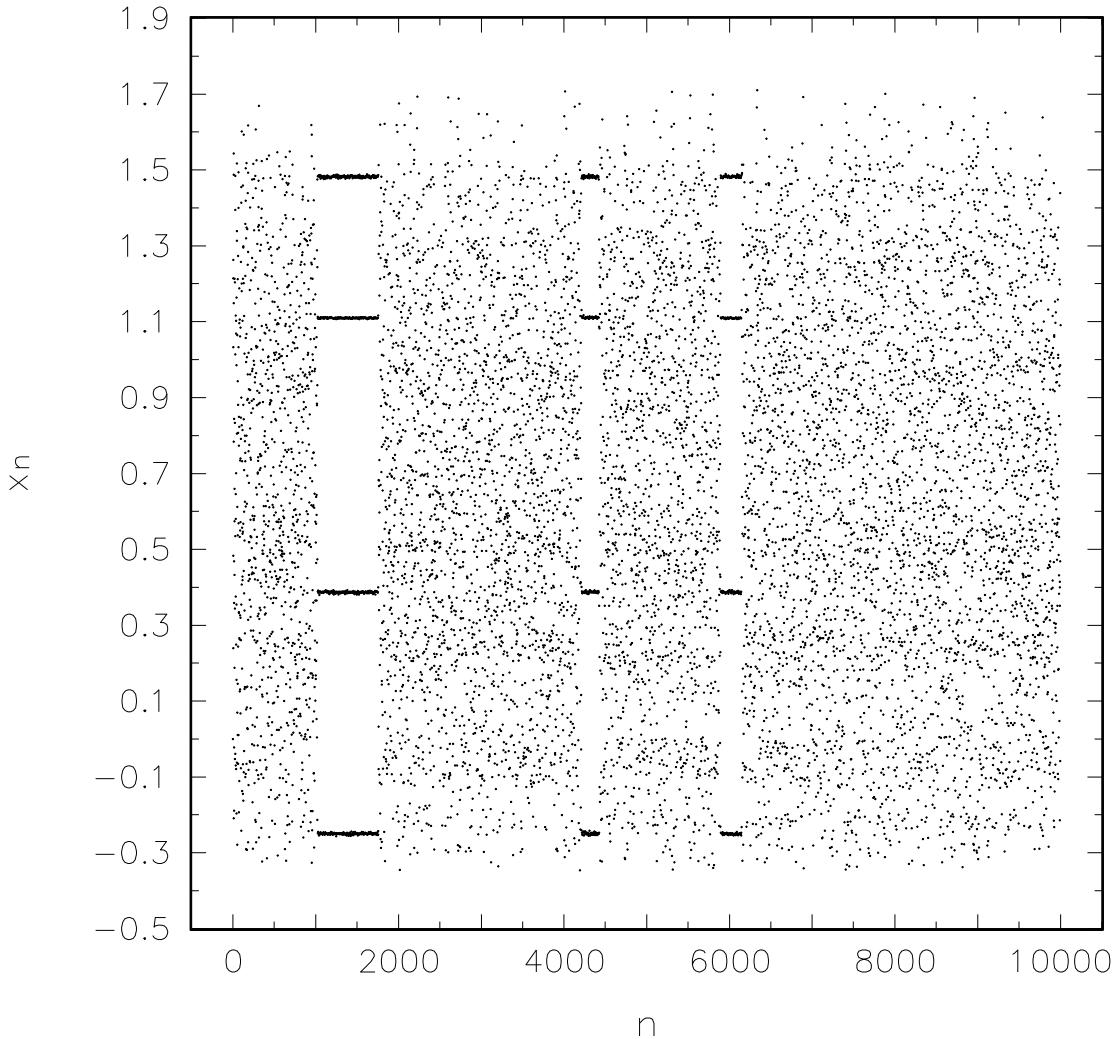


Figure 2.13: Le contrôle de l’application de Ikeda-Hammel-Jones-Moloney pour une période de 4. L’amplitude du bruit de fond est $\mathcal{A} = 1,793 \times 10^{-3}$. $(x_0; y_0) = (0; -0,05)$, $(\mu_0; a; b; k) = (6; 1; 0,9; 0,4)$, $\Delta\mu_{\max} = 5 \times 10^{-2}$, $\epsilon = 10^{-2}$. Pour cette amplitude \mathcal{A} , le contrôle est entrecoupé de bouffées chaotiques.

Chapitre 3

Contrôle de systèmes continus en 3D

Dans ce qui suit, nous aurons à faire face à une complication supplémentaire: l'application discrète n'est plus directement accessible, elle doit s'obtenir en effectuant une section de Poincaré. Nous y reviendrons. Présentons d'abord le genre de système que nous aurons à stabiliser. Il s'agit d'un système tridimensionnel d'équations différentielles non-linéaires couplées comportant des régimes chaotiques.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) \quad (3.1)$$

Étant en 3D, nous pouvons représenter ce système de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_x(\mathbf{x}, \mu) \\ \dot{y} &= f_y(\mathbf{x}, \mu) \\ \dot{z} &= f_z(\mathbf{x}, \mu)\end{aligned} \quad (3.2)$$

De plus, nous exigeons que ce système soit hautement dissipatif afin que la dynamique dans l'espace des phases soit presqu'entièrement confinée sur une surface excessivement mince. Afin de déterminer si un tel système est dissipatif et quel est son niveau de dissipation, il s'agit tout simplement d'utiliser le théorème de divergence [Ott, 93].

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{S_t} \nabla \cdot \mathbf{f} d^n x \quad (3.3)$$

Ce théorème nous permet de savoir s'il y a contraction (système dissipatif), dilatation (divergence) ou préservation des volumes $V(t)$ dans l'espace des phases. Nous n'avons qu'à évaluer (3.3) pour un volume initial $V(0)$ et un système d'équations \mathbf{f} . Si $V(t) = V(0)$ nous sommes en présence d'un système conservatif, alors que $V(t) < V(0)$ est indicatif d'un système dissipatif.

Donnons un exemple. Le système de Lorenz [Lorenz, 63] est probablement le plus connu parmi les systèmes dissipatifs. À l'origine, ce système d'équations différentielles a été conçu afin de modéliser le comportement d'une couche de fluide chauffée à sa base et refroidie à son extrémité supérieure. Voici le système en question:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + Rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Les constantes σ , R et b sont respectivement proportionnelles au nombre de Prandtl, au nombre de Rayleigh et à la dimension de la région étudiée. Utilisons le théorème de la divergence afin d'évaluer le comportement temporel d'un volume de l'espace des phases.

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &= \int_{S_t} (-\sigma - 1 - b)d^n x = -(\sigma + 1 + b)V \\ \Rightarrow V(t) &= V(0) \exp[-(\sigma + b + 1)t]\end{aligned}\tag{3.5}$$

Et nous savons que pour les valeurs: $\sigma = 10$, $R = 28$ et $b = 8/3$ (valeurs les plus couramment utilisées) nous sommes dans un régime chaotique. Pour ces valeurs, nous avons

$$V(t) = V(0)e^{-\frac{41t}{3}},\tag{3.6}$$

ce qui entraîne une très forte contraction des volumes dans l'espace des phases. Donc ce système est hautement dissipatif. L'essentiel de sa dynamique se retrouve donc confiné sur une surface bidimensionnelle¹ dans un espace de recouvrement tridimensionnel. En pratique, le calcul des exposants de Lyapunov se révèle essentiel, car dans la plupart des cas, le théorème de la divergence ne peut pas s'appliquer directement. En ce qui concerne nos simulations, nous n'utiliserons aucune de ces deux techniques. Nous procéderons plutôt

¹ d_c (attracteur de Lorenz) = 2,073 [Lorenz, 84]

de façon “expérimentale”. C'est-à-dire que nous calculerons numériquement les sections de Poincaré, pour ensuite vérifier si la dynamique est bel et bien unidimensionnelle.

Pour commencer notre étude, nous nous servirons d'une simplification du système de Lorenz, il s'agit du système de Rössler [Rössler, 76]. Il ne modélise qu'une seule boucle de convection². Ce système peut modéliser d'autres phénomènes physiques tels que le phénomène de la goutte d'eau du robinet et possiblement quelques aspects du comportement du cœur. Il se présente comme suit:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - \mu)\end{aligned}\tag{3.7}$$

Notons que seule la troisième composante comporte une non-linéarité. Ce système est lui aussi hautement dissipatif. Nous savons qu'il y a présence du chaos pour les valeurs suivantes des constantes: $a = 0,2$, $b = 0,2$ et $\mu = 5,7$ (valeurs standards). En intégrant le système un certain temps, nous nous éloignons du mouvement transitoire et le système est attiré vers une structure géométrique dans l'espace des phases, un attracteur chaotique. La figure 3.1 illustre un exemple d'un tel attracteur. Notons que pour l'ensemble de l'intégration numérique de ce travail, nous utilisons un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4.

3.1 Stratégie de contrôle

Dans cette section, nous expliquons et illustrons par un exemple numérique le *Simple Proportional Feedback* (SPF), une simplification de la méthode d'OGY.

Afin de stabiliser une des nombreuses orbites présentes dans cet attracteur, nous serions a priori tentés de développer une méthode toute autre que celle développée pour les applications discrètes. En effet, étant en présence d'un mouvement continu de la courbe intégrale, une perturbation continue serait à première vue la méthode qui nous viendrait à l'esprit. Or, il en existe une autre nous permettant de simplifier énormément le problème. Cette méthode permet de diminuer l'analyse de la dynamique d'une dimension et de discréteriser le mouvement. Il s'agit d'ajouter dans l'espace des phases une section de Poincaré. Avec ce procédé, seuls les points résultant de l'intersection d'une trajectoire continue et de la section sont retenus. De plus, nous pouvons ajouter une condition

²Tandis que le système de Lorenz en modélise plusieurs.

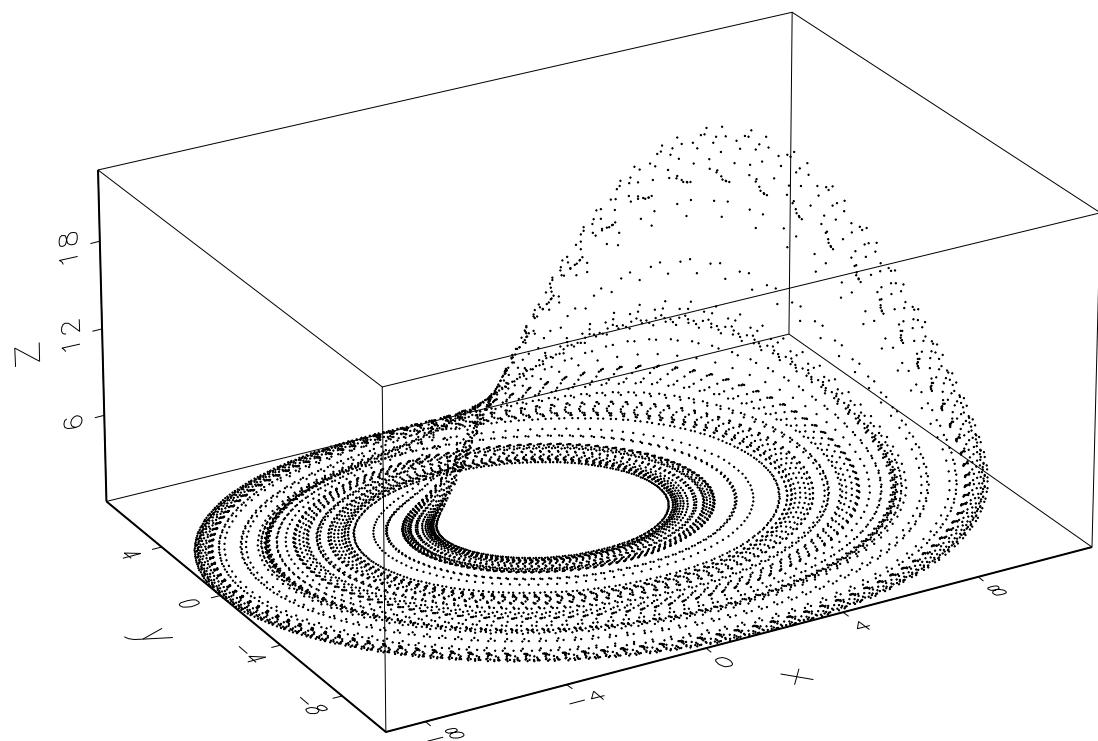


Figure 3.1: L'attracteur de Rössler de paramètres $a = 0,2$, $b = 0,2$ et $\mu_0 = 5,7$. Le pas d'intégration h est 0,05. Ce graphe contient 10^4 points. Les 1000 premiers points ont été retranchés afin d'éliminer la majeure partie du mouvement transitoire.

supplémentaire qui n'enlève aucune information et qui simplifie encore plus le problème. Cette condition consiste à ne garder que les points provenant d'une trajectoire coupant le plan dans un certain sens (voir figure 3.2).

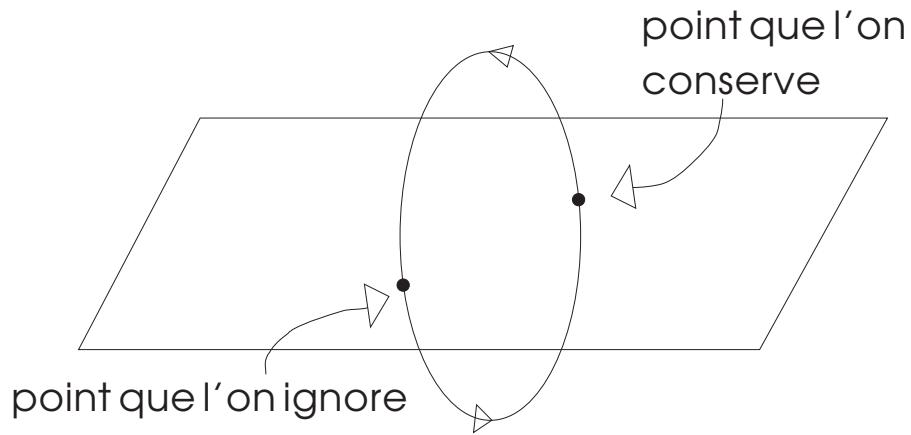


Figure 3.2: Esquisse d'une orbite coupée par une section de Poincaré. Seuls les points provenant d'un certain sens sont conservés.

Initialement, le système (3.7) voit sa dynamique restreinte à un espace de recouvrement tridimensionnel. Puis en appliquant une section de Poincaré à travers l'attracteur chaotique, la dynamique se retrouve entièrement confinée à un espace de recouvrement bidimensionnel et devient discrète. Le passage d'un point à l'autre sur la section se fait bien sûr par une trajectoire continue, mais ce passage peut aussi être vu comme venant d'une application discrète. Cette application se nomme l'application de Poincaré. Donc, en principe, nous avons un système pour lequel nous connaissons une méthode de contrôle, sauf que nous ne connaissons pas de façon analytique l'application de Poincaré. Nous pourrions très bien, de façon numérique, trouver les variétés stable et instable [Lai, 94] et entamer un processus semblable à celui du deuxième chapitre. C'est ici qu'apparaît l'importance d'un système hautement dissipatif.

En effet, nous avons vu qu'un tel système contracte tellement les volumes dans l'espace des phases, que l'attracteur résultant n'est plus qu'un objet 3D devenu tellement contracté qu'il est en pratique une surface 2D. Imaginons une surface, disons une feuille courbée, la figure sur la surface de Poincaré sera une courbe 1D. Donc, d'un problème continu en 3D, il nous est possible de considérer plutôt un système discret et unidimensionnel. Nous pouvons donc penser à une méthode similaire vue au premier chapitre, sauf qu'ici il ne

faut pas oublier que l'application discrète n'est pas analytiquement disponible. Supposons que nous décidons d'insérer une section de Poincaré d'équation $x = 2$ et en ne prenant que les points pour $\dot{x} > 0$ [Petrov, Peng et Showalter, 92]. Les points sur le plan peuvent alors être positionnés uniquement par y et z . De plus, la dynamique étant essentiellement unidimensionnelle, une seule variable suffit pour notre analyse; choisissons y . Plutôt que de travailler directement avec la section de Poincaré qui comporte deux variables, nous allons travailler avec une application de premier retour. Cette dernière a pour abscisse le $(n - 1)$ ^{ième} itéré d'une variable membre de la section de Poincaré et pour ordonnée le n ^{ième} itéré de la même variable, ici cette variable est y . L'application de premier retour est donc une fonction de y_n versus y_{n-1} . Les points fixes s'obtiennent simplement par l'intersection de la courbe obtenue et de la bissectrice.

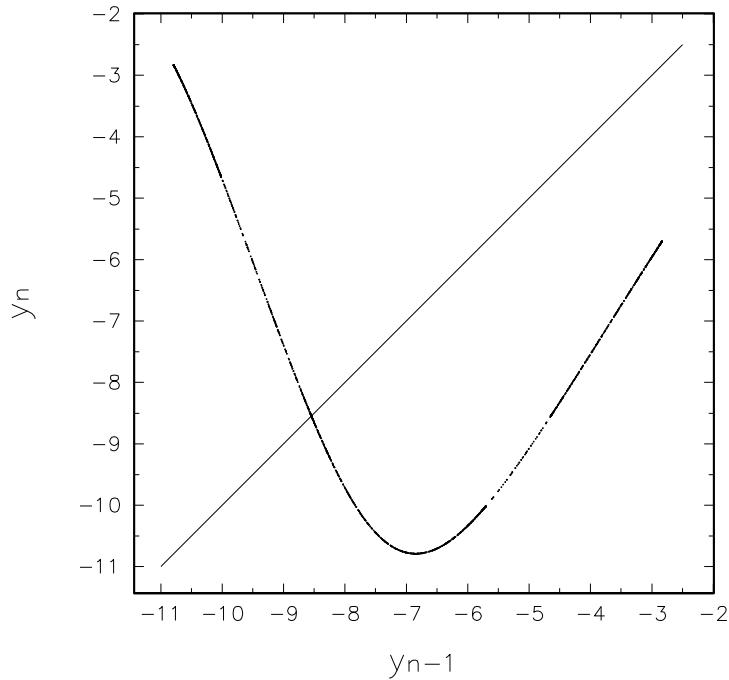


Figure 3.3: L'application de premier retour du système de Rössler pour une coupe à $x = 2$ et en imposant $\dot{x} > 0$. 2000 points sont tracés. Ce nombre explique l'apparence discontinue de la courbe par endroits. En effet, pour un nombre très grand de points, la discontinuité ne serait pas visible. La droite $y_n = y_{n-1}$ est tracée pour identifier la position du point fixe. Le caractère unidimensionnel de la courbe est sans équivoque.

Pour obtenir une orbite périodique M , il faut tracer l'application du M ^{ième} retour et

tracer $y_n = y_{n-M}$. La figure 3.4 est un exemple d'application de deuxième retour qui nous permet d'identifier des points fixes de P^2 (où P est l'application de Poincaré).

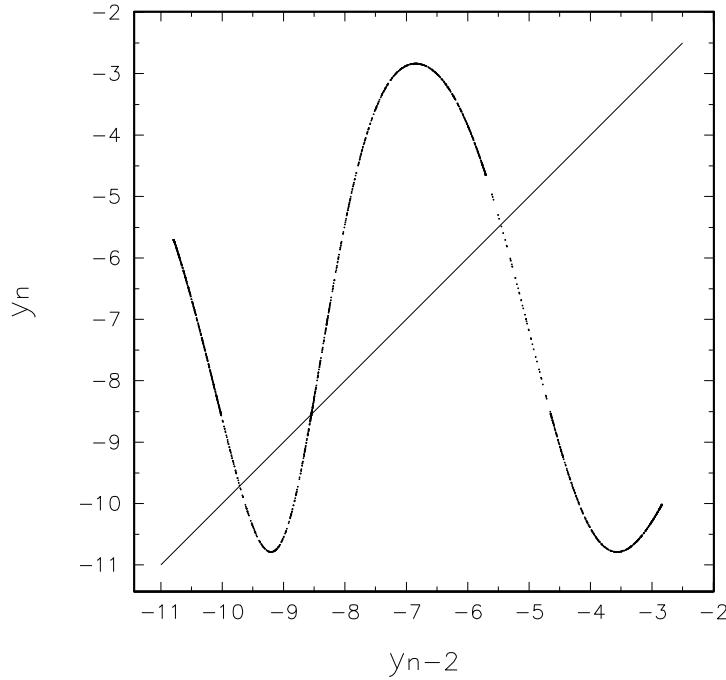


Figure 3.4: L'application de deuxième retour du système de Rössler pour une coupe à $x = 2$ et en imposant $\dot{x} > 0$. 2000 points sont tracés. La droite $y_n = y_{n-2}$ est tracée pour identifier la position des points fixes. Le caractère unidimensionnel de la courbe est encore une fois sans équivoque. La deuxième intersection correspond à la période 1, tandis que les deux autres forment une période 2.

En intégrant le système (3.7) jusqu'à ce qu'une courbe intégrale tombe dans le voisinage d'un point fixe désiré (encore ici l'attracteur étant densément peuplé d'orbites périodiques instables, le voisinage d'un point fixe a une probabilité unitaire d'être visité) nous pouvons alors linéariser le mouvement autour du point fixe:

$$y_{n+M} = y_*^{(M)} + (y_n - y_*^{(M)}) \left. \frac{dy_{n+M}}{dy_n} \right|_{y_*^{(M)}} \quad (3.8)$$

où $y_*^{(M)}$ représente le point fixe de l'application du $M^{\text{ième}}$ retour (P^M).

Expliquons maintenant comment obtenir la forme de la perturbation. Choisissons μ comme étant le paramètre de contrôle. Effectuons une légère perturbation, d'amplitude inférieure à 1% de $\mu_0 = 5,7$. Cette perturbation va entraîner une translation de la courbe y_n en fonction de y_{n-1} sans pour autant changer l'allure de la courbe de façon significative. Nous pouvons mesurer cette translation de bien des façons. Contentons-nous de mesurer le déplacement horizontal de y par rapport à $y_*^{(M)}$. Ce déplacement va bien entendu être proportionnel à l'amplitude de la perturbation. Or, il peut être démontré (c'est ce que nous ferons dans la prochaine section) que le rapport du déplacement Δy_{n-1} et d'une très légère variation du paramètre $\Delta\mu$ est en première approximation constant. C'est ce dernier énoncé qui nous permet de trouver l'amplitude et la direction de la perturbation nécessaire à la stabilisation d'une orbite. En effet, ce rapport que nous appellerons g est donné par $g = \Delta y / \Delta\mu$. Donc, lorsqu'un itéré tombe dans le voisinage de $y_*^{(M)}$, le contrôle s'effectue comme suit. Connaissant préalablement g (étape qui se fait avant toute tentative de contrôle), nous obtenons immédiatement la nouvelle valeur requise du paramètre

$$\mu_n = \frac{(y_n - y_*^{(M)})}{g} + \mu_0, \quad (3.9)$$

qui se calcule elle aussi à tous les itérés. Cette perturbation peut se comprendre de façon plus intuitive. Comme nous l'avons vu, la nouvelle valeur du paramètre entraîne un léger déplacement de l'attracteur chaotique, donc nécessairement aussi un déplacement de l'application de premier retour (ou de n'importe quel retour que nous désirons obtenir). Soit un itéré dans le voisinage de $y_*^{(M)}$, ce dernier point fixe obtenu sans aucune perturbation. L'itéré suivant est obtenu avec le nouveau paramètre, donc graphiquement, il s'agit de relier y_n à la nouvelle courbe (le point d'intersection sera nommé y'), et nous nous rendons compte que l'itéré subséquent va tomber plus proche de la cible que s'il n'y avait pas eu de perturbation (voir figure à la page suivante).

3.2 Esquisse de démonstration: $g \simeq \text{cte}$

Cette méthode repose en grande partie sur un fait qu'il serait temps d'éclaircir. Il s'agit du facteur de proportionnalité g que nous avons supposé constant. Pour ce faire, repensons le problème à partir du début, d'une manière semblable au raisonnement effectué au premier chapitre. En réalité, lorsque l'itéré $x_n(\mu_0)$ tombe dans le voisinage de $x_*(\mu_0)$, nous désirons que l'itéré suivant demeure dans ce voisinage, et même plus, nous voulons que ce prochain itéré tombe directement sur $x_*(\mu_0)$. Pour y arriver, nous devons imprimer à μ une légère perturbation. Voici ce que nous voulons dire en termes plus mathématiques.

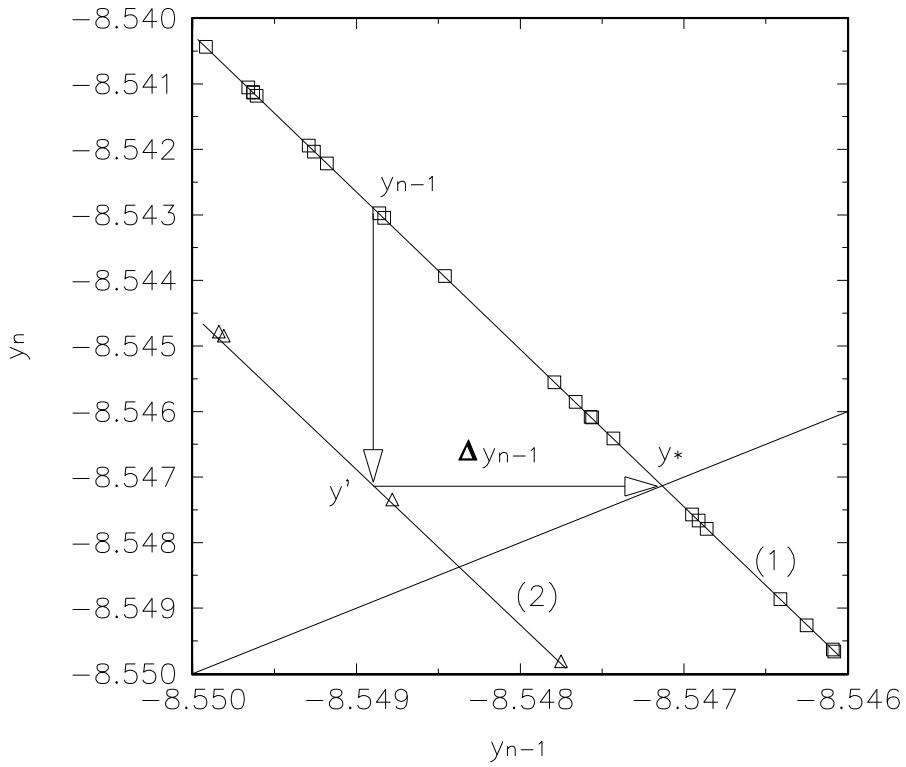


Figure 3.5: Schéma intuitif montrant le principe de contrôle du système de Rössler. Il s'agit d'un agrandissement de l'application de premier retour pour le cas non-perturbé (1) et perturbé (2). Il est montré qu'une perturbation appropriée force l'itéré y_{n+1} à se rapprocher du point fixe non-perturbé $y_*(\mu_0)$. Le terme Δy_{n-1} représente la distance horizontale entre $y_*(\mu_0)$ et l'application perturbée de premier retour. La droite $y_n = y_{n-1}$ ne coupe pas le graphe de façon égale, car l'agrandissement n'a pas été fait symétriquement.

Nous voulons que $x_{n+1}(\mu_0 + \Delta\mu) = x_*(\mu_0)$. Or, $x_{n+1}(\mu_0 + \Delta\mu) \equiv P(x_n, \mu_0 + \Delta\mu)$, où P est l'application de Poincaré. Il s'agit alors de développer au premier ordre autour de $x_*(\mu_0)$ et de μ_0 . Ce développement revient exactement à la même chose que (1.2), sauf qu'ici nous explicitons la valeur du paramètre pour x .

$$\begin{aligned} P(x_n, \mu_0 + \Delta\mu) &= P(x_*(\mu_0), \mu_0) + (x_n - x_*(\mu_0)) \left. \frac{\partial P(x_n, \mu)}{\partial x} \right|_{x_*(\mu_0), \mu_0} \\ &\quad + (\mu - \mu_0) \left. \frac{\partial P(x_n, \mu)}{\partial \mu} \right|_{x_*(\mu_0), \mu_0} \\ &= x_*(\mu_0) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Sachant que $P(x_*(\mu_0)) = x_*(\mu_0)$, par la définition même d'un point fixe, nous retrouvons alors le même résultat que (1.5) que nous écrivons de façon quelque peu différente.

$$\frac{x_n - x_*(\mu_0)}{\Delta\mu} = - \left. \frac{\partial P(x_n, \mu)}{\partial \mu} \right|_{x_*(\mu_0), \mu_0} \Bigg/ \left. \frac{\partial P(x_n, \mu)}{\partial x} \right|_{x_*(\mu_0), \mu_0} \tag{3.11}$$

Toutes ces valeurs sont constantes pour un même point fixe. Nous appelons donc cette expression g . Évidemment, ce résultat n'est valide que pour le voisinage immédiat de x_* .

3.3 Stabilisation du système de Rössler

Aussitôt que l'intégration de (3.7) mène à un point y_n du voisinage de $y_*(\mu_0)$, l'algorithme de contrôle est activé. Le paramètre μ_0 est alors modifié très légèrement de façon instantanée. Cette valeur est maintenue jusqu'à ce que la courbe intégrale recoupe la section de Poincaré. À ce moment, si toutes les étapes précédentes ont été bien respectées, y_{n+1} devrait se retrouver encore plus près du point fixe. Ceci ne tient que pour le cas où un bruit de fond est absent; dans le cas contraire, la convergence n'est pas assurée. Le processus est répété jusqu'à ce que l'itéré se retrouve à la précision du point fixe. Les perturbations subséquentes sont alors identiques, car la précision optimale est atteinte. Nous avons réussi un tel contrôle pour le système de Rössler avec les mêmes paramètres ($\mu_0 = 5, 7$, $a = b = 0, 2$) et conditions ($x = 2$, $\dot{x} > 0$) mentionnés dans [Petrov, Peng et Showalter, 92]. Nous avons imposé une précision de 10^{-3} au calcul du point fixe. La même précision a été utilisée pour la position de la courbe perturbée. La figure 3.6 est un exemple de contrôle que nous avons réussi.

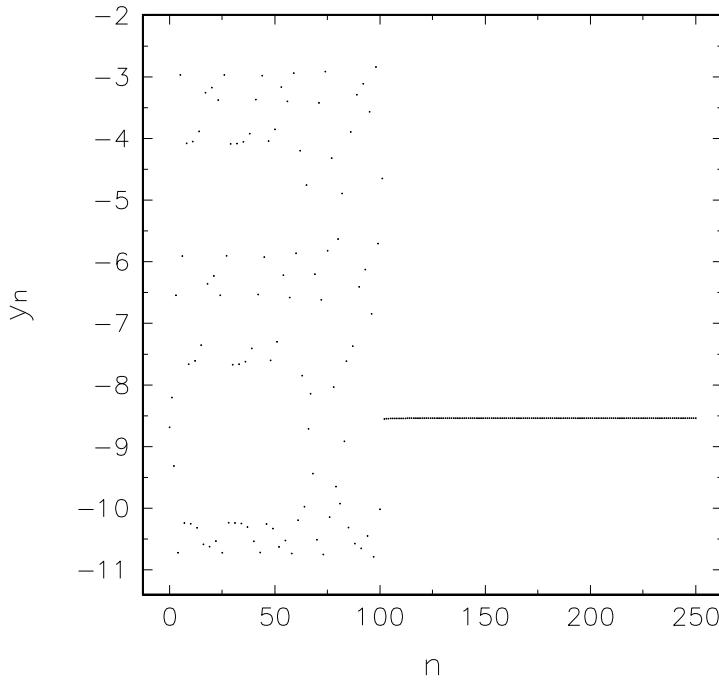


Figure 3.6: Contrôle d'une orbite de période 1 du système de Rössler. Graphe de y_n en fonction de n . Voici quelques détails techniques: $\epsilon = 10^{-2}$, $\Delta\mu_{\max} = 5,3 \times 10^{-3}$, $\Delta\mu = 10^{-3}$, $y_* = (-8, 547 \pm 0, 001)$, $y' = (-8, 548 \pm 0, 001)$, $g \simeq -1,32$.

La façon la plus adéquate de représenter la stabilisation de ce point fixe est de faire le même genre de graphe que celui de la figure 3.6. Par contre, étant dans un régime continu, c'est en fait une orbite continue qui est stabilisée via un point fixe sur la surface de Poincaré. Il est donc intéressant de visualiser quelle est l'allure de l'orbite obtenue. La figure 3.7 illustre cette orbite.

3.4 L'oscillateur de Chua

3.4.1 Présentation du système

Lorsque nous avons en notre possession tous les outils numériques nécessaires au

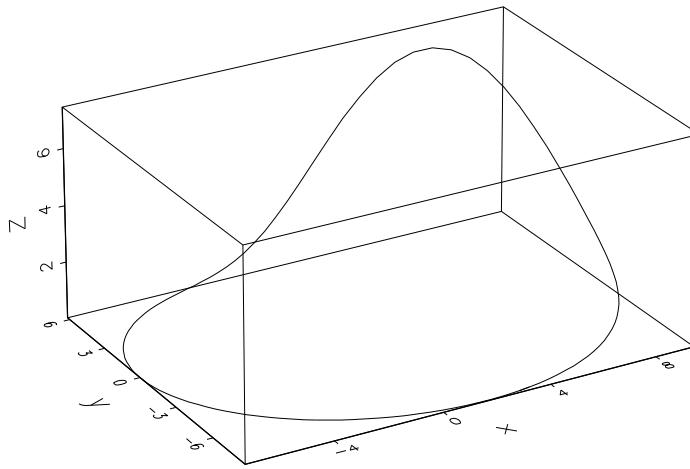


Figure 3.7: Stabilisation d'une orbite de période 1 du système de Rössler. Afin de mieux apprécier la provenance de cette orbite périodique, nous suggérons au lecteur de comparer ce graphe à la figure 3.1.

contrôle d'un système tridimensionnel hautement dissipatif, il est aisément de stabiliser tout système de même type. Dans cette section, nous nous proposons donc de stabiliser un système qui fait présentement l'objet d'un nombre sans cesse croissant de publications. Il s'agit de l'oscillateur de Chua qui est un circuit électronique non-linéaire qui possède un vaste amalgame de comportements chaotiques [Madan, 92]. L'étude détaillée de ce circuit est faite dans [Chua *et al.*, 93]. L'auteur nous fait découvrir la famille composée de différents circuits membres de la classe de l'oscillateur de Chua. Mais plus important encore, plusieurs tableaux, portant sur la valeur de différents paramètres, sont présentés dans l'article. Et pour ces différentes valeurs, les attracteurs correspondants sont aussi présentés. Donc, notre idée consiste à observer la section de Poincaré des différents attracteurs pour ensuite déterminer les systèmes pour lesquels la dynamique sur cette section se ramène à un système dynamique unidimensionnel. Une fois cette étape franchie, nous n'avons qu'à appliquer l'algorithme de contrôle SPF. L'oscillateur de Chua a été contrôlé avec succès dans quelques publications, mais à notre connaissance,

jusqu'à maintenant, il n'a pas été stabilisé numériquement avec cette simplification de la méthode d'OGY. Voici quelques références relatives à ces différentes approches: [Chen, 93; Chen et Dong, 93a, b; Genesio et Tesi, 93; Hartley et Mossayebi, 93; Johnson et Hunt, 93; Johnson, Tigner et Hunt, 93; Murali et Lakshmanan, 93]

Présentons ce système tridimensionnel sous forme normalisée. En ce qui nous concerne, nous nous intéressons à la stabilisation de ce système et non pas à l'étude détaillée de sa dynamique.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= k\alpha(y - x - \zeta(x)) \\ \dot{y} &= k(x - y + z) \\ \dot{z} &= k(-\beta y - \gamma z)\end{aligned}\tag{3.12}$$

avec

$$\zeta(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)(|x + 1| - |x - 1|)\tag{3.13}$$

Il est à noter que la non-linéarité est entièrement contenue dans les valeurs absolues de la fonction $\zeta(x)$. Le paramètre α s'est avéré le plus adéquat pour le contrôle, donc $\mu \equiv \alpha$.

3.4.2 Le système de Chua

Après plusieurs tentatives, nous avons trouvé deux systèmes pour lesquels la dynamique se retrouve presqu'entièrement confinée sur une courbe unidimensionnelle (sur la surface de Poincaré). Dans un premier temps, nous avons stabilisé le système correspondant aux valeurs des paramètres de l'attracteur tracé au cliché 17 de la référence [Chua et al., 93]. Nous l'avons appelé: *système de Chua*. Les valeurs des différents paramètres pour lesquels le système est hautement dissipatif sont présentées dans le tableau suivant:

PARAMÈTRE	VALEUR
α	-1,3635256878
β	-0,0874054928
γ	-0,3114345114
a	1,292150
b	-0,7224511209
k	1

L'attracteur correspondant aux valeurs de ces derniers paramètres est présenté à la page suivante.

Maintenant que nous avons choisi un attracteur dont la dynamique est entièrement attirée vers une surface bidimensionnelle dans l'espace de recouvrement 3D, effectuons une coupe dans l'espace des phases. En visualisant l'attracteur de la figure 3.8, nous avons choisi d'effectuer une coupe à $x = 7$. La principale raison d'un tel choix est que la dynamique à cet endroit ne semble pas trop foliée. Pour simplifier encore plus le problème, nous ne retenons que les points qui satisfassent à $\dot{x} > 0$. Les applications de premier et de deuxième retour de l'attracteur de Chua qui en résultent ressemblent étrangement à celles de l'application logistique (voir figures 3.9 et 3.11).

Nous sommes donc en droit de nous attendre à un contrôle très efficace de la période 1 de l'application de Poincaré ou en d'autres termes de l'orbite de période 2 du système 3D (raisonnement similaire pour la période 2 de l'application de Poincaré). Il est à noter que y a été choisie comme variable témoin pour le processus de contrôle. Nous aurions tout aussi bien pu choisir z . En effet, le contrôle a été obtenu pour ces deux périodes (voir les figures 3.10 et 3.12).

Les pages suivantes consistent en une suite logique du raisonnement suivi pour stabiliser le système de Chua. D'abord, l'attracteur chaotique est présenté. Puis, nous nous servons de l'application de premier retour pour identifier une orbite de période 1. Enfin, nous présentons l'orbite périodique stabilisée dans l'espace des phases. Les deux dernières étapes sont reproduites pour une orbite de période 2. C'est-à-dire que l'application de deuxième retour est tracée, de même que l'orbite de période 2. Toutes ces étapes sont suivies avec l'aide de graphiques représentant les résultats obtenus. De plus, les éléments essentiels nécessaires pour reproduire ces derniers sont présentés dans les commentaires des figures.

Pour ce système, nous avons eu de la facilité à identifier des points fixes et à les stabiliser. Ceci est certainement dû au fait que les applications de $M^{\text{ième}}$ retour sont des courbes continues et dérивables en tout point. Et par-dessus tout elles sont unidimensionnelles, ce qui nous permet d'utiliser le SPF.

Il serait important de mentionner que pour identifier un point fixe correspondant à P^2 , il faut d'abord déterminer les points fixes de P^1 . Car, si nous n'effectuons pas cette étape, nous ne pourrons pas discerner la véritable période de l'orbite à stabiliser. En fait, cette remarque est équivalente à celle faite à la section 1.7. Bien sûr, le même raisonnement reste valide pour des périodes supérieures.

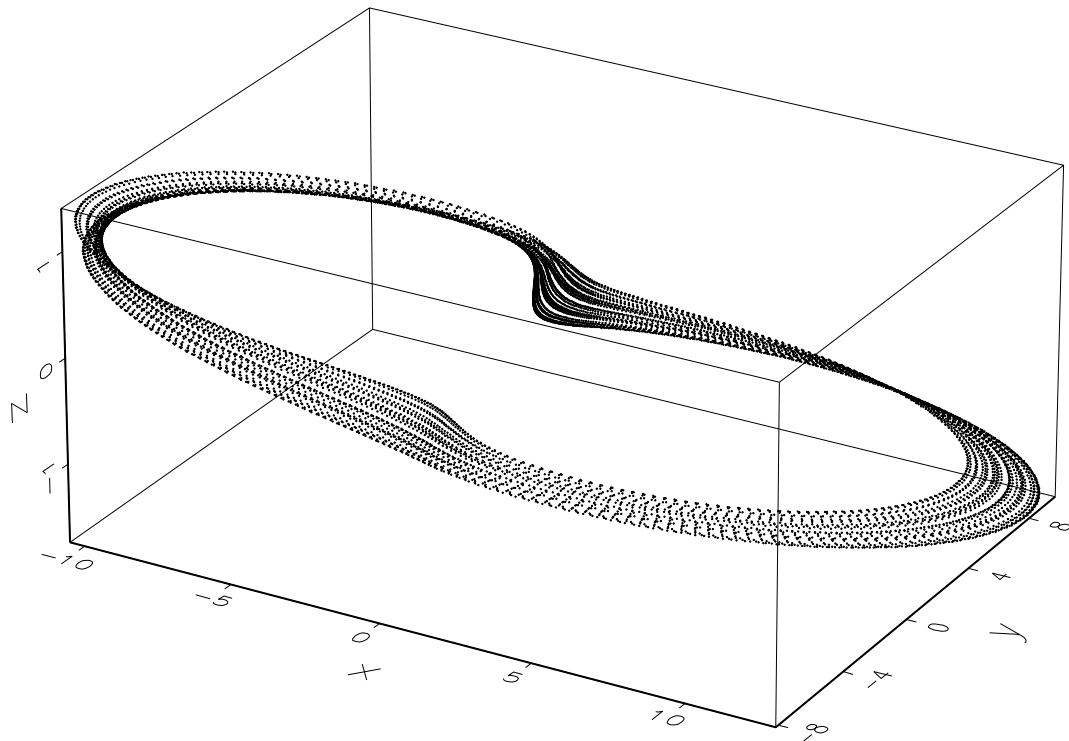


Figure 3.8: L'attracteur de Chua. Le mouvement transitoire a été enlevé en retranchant les 1000 premiers itérés. Le pas d'intégration est de 0,05. 10^4 points sont tracés. Les conditions initiales sont choisies dans le voisinage de l'origine, dans le cas présent $(x_0; y_0; z_0) = (0,1; 0,1; 0,1)$. De plus, la section de Poincaré à $x = 7$ est placée de telle sorte que $\dot{x} > 0$ soit respecté.

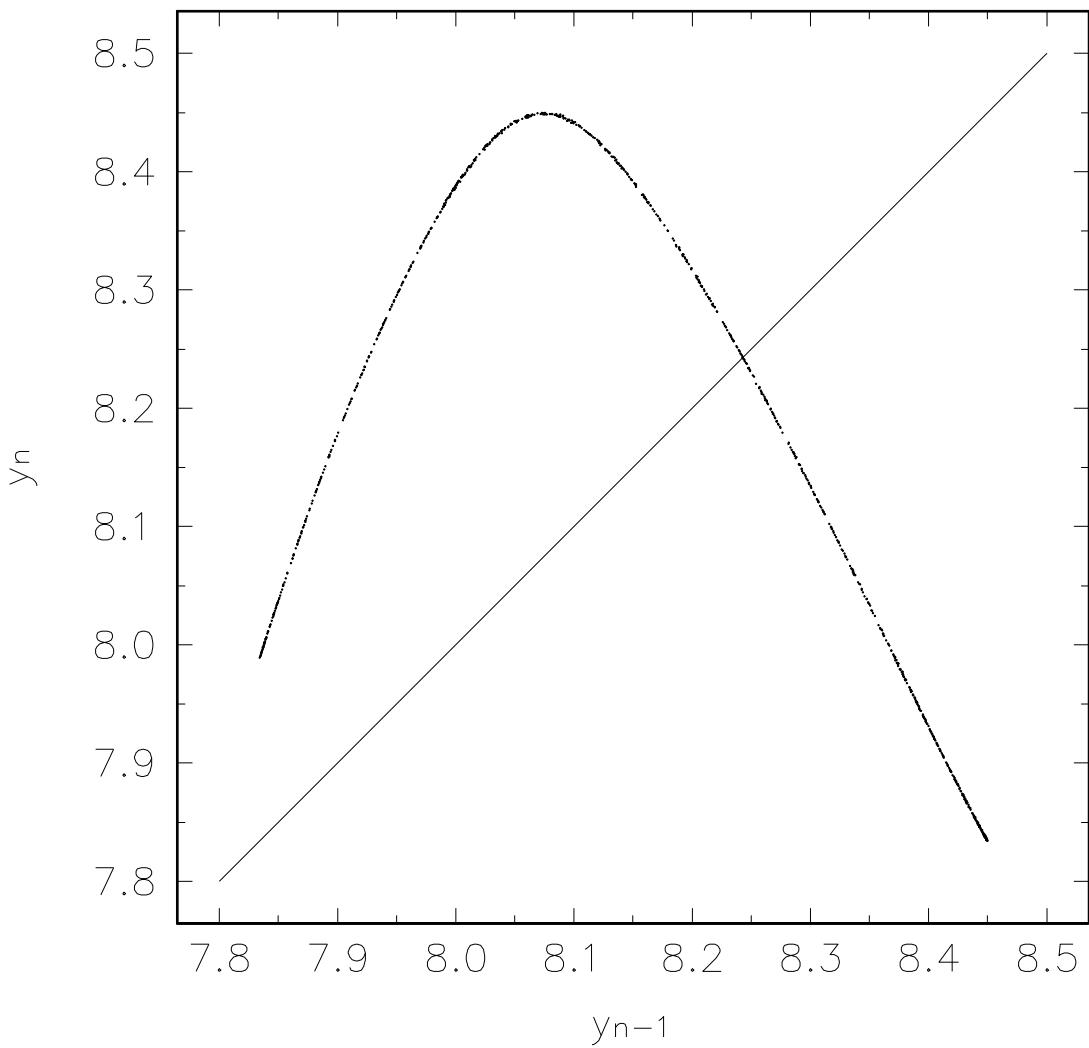


Figure 3.9: L'application de premier retour du système de Chua. La section a été effectuée à $x = 7$ pour $\dot{x} > 0$. 1000 points ont été tracés. La variable y a été choisie comme variable témoin de l'évolution.

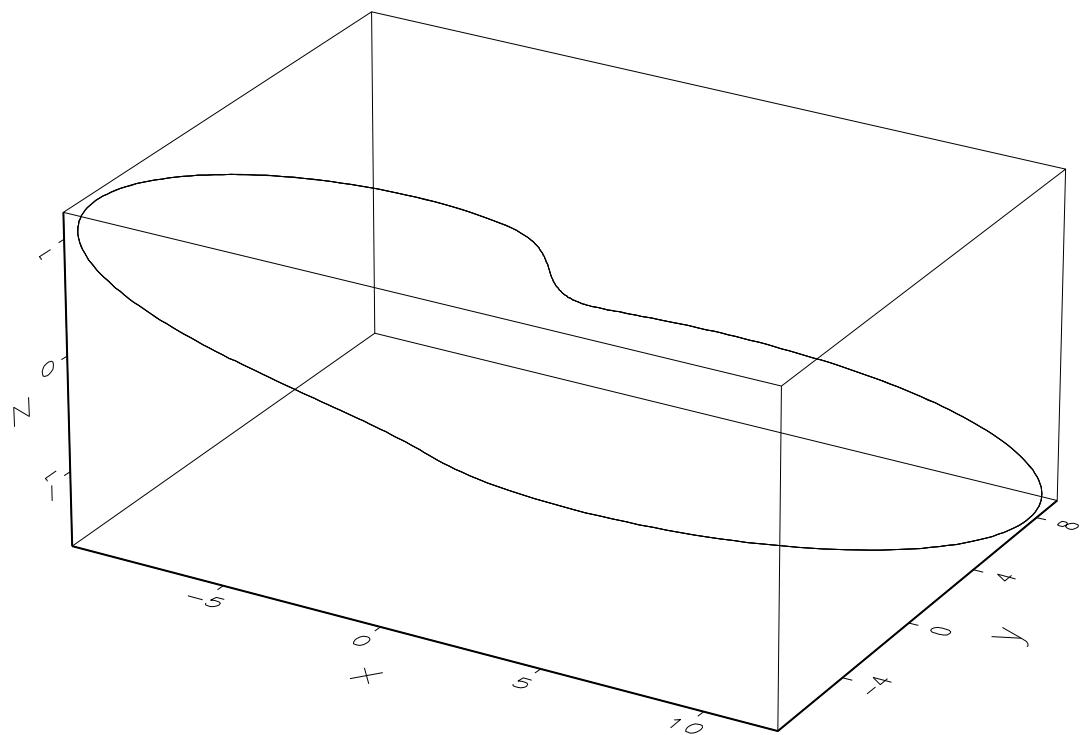


Figure 3.10: Stabilisation d'une orbite de période 1 du système de Chua. Voici quelques détails techniques: $\epsilon = 10^{-2}$, $\Delta\mu_{\max} = 3,9 \times 10^{-5}$, $\Delta\mu = 10^{-4}$, $y_* = (8, 2427 \pm 0,0001)$, $y' = (8, 2416 \pm 0,0001)$, $g \simeq -10, 96$.

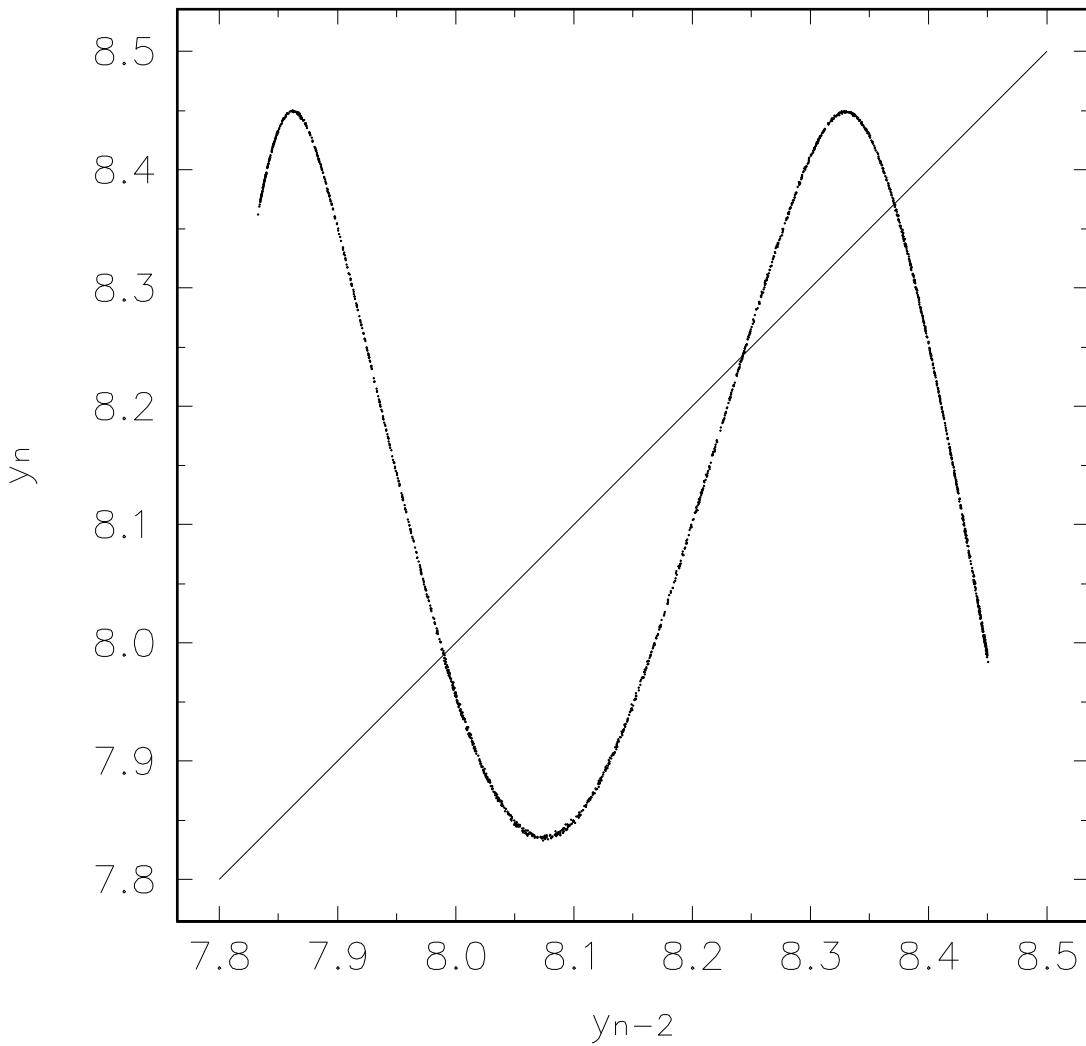


Figure 3.11: L'application de deuxième retour du système de Chua. La section a été effectuée à $x = 7$ pour $\dot{x} > 0$. 2000 points ont été tracés. La variable y a été choisie comme variable témoin de l'évolution.

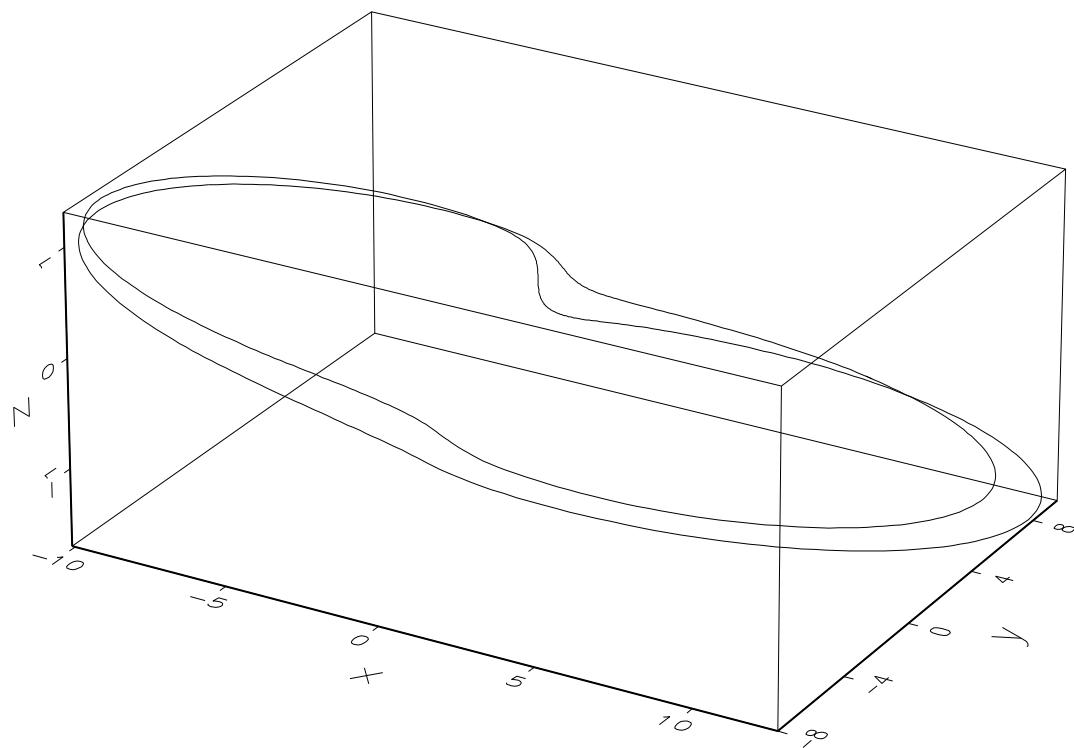


Figure 3.12: Stabilisation d'une orbite de période 2 du système de Chua. Voici quelques détails techniques: $\epsilon = 10^{-2}$, $\Delta\mu_{\max} = 5, 5 \times 10^{-4}$, $\Delta\mu = 10^{-4}$, $y(1) = (8, 3708 \pm 0, 0001)$, $y(2) = (7, 9897 \pm 0, 0001)$, $y' = (7, 9906 \pm 0, 0001)$, $g \simeq 9, 25$.

3.4.3 Le système de Nishio

Puis, l'attracteur de Nishio [Chua *et al.*, 93; Nishio, Inaba et Mori, 90], qui n'est en fait qu'un autre cas particulier de l'oscillateur de Chua, s'est avéré un bon candidat pour le SPF. Voici les paramètres le décrivant:

PARAMÈTRE	VALEUR
α	-0,03258462
β	1,207525
γ	-1,098891
a	-6,058885
b	-112,264
k	1

À première vue cet attracteur (voir figure 3.13) semble posséder tous les attributs de l'attracteur de Rössler, ce qui suggère la possibilité d'un contrôle. Pour cet attracteur, le choix des conditions initiales doit être fait de façon plus méthodique, car le bassin d'attraction est plus restreint.

Puis, nous effectuons les mêmes étapes que précédemment. La section de Poincaré est située à $z = -1,5$ et $\dot{x} > 0$. La variable témoin est z . L'application de premier retour ne peut être approximée par une courbe continue (voir figure 3.14). Néanmoins la stabilisation d'une orbite de période 1 ne cause aucun problème (voir figure 3.15). Par contre, vu ces discontinuités, la dynamique contenue sur l'application de deuxième retour n'est plus du tout confinée dans une courbe unidimensionnelle (voir figure 3.16). La stabilisation d'une orbite de période supérieure à 1 s'en trouve donc fortement compromise. En fait, certainement pour cette raison, nous n'avons pu stabiliser cette dernière.

La présentation des prochaines pages est la même que celle utilisée pour le système de Chua. Nous présentons l'attracteur de Nishio, l'application de premier retour et l'orbite de période 1 stabilisée. Puis, nous verrons, avec l'application de deuxième retour, la raison pour laquelle il est si difficile d'identifier une cible adéquate pour le contrôle de périodes supérieures à 1. Ces résultats sont présentés sous forme de graphiques.

Donc, le lecteur, qui voudrait utiliser le SPF afin de stabiliser des orbites supérieures à 1, devrait s'assurer de la continuité de la pente de la courbe de l'application de $M^{\text{ième}}$ retour.

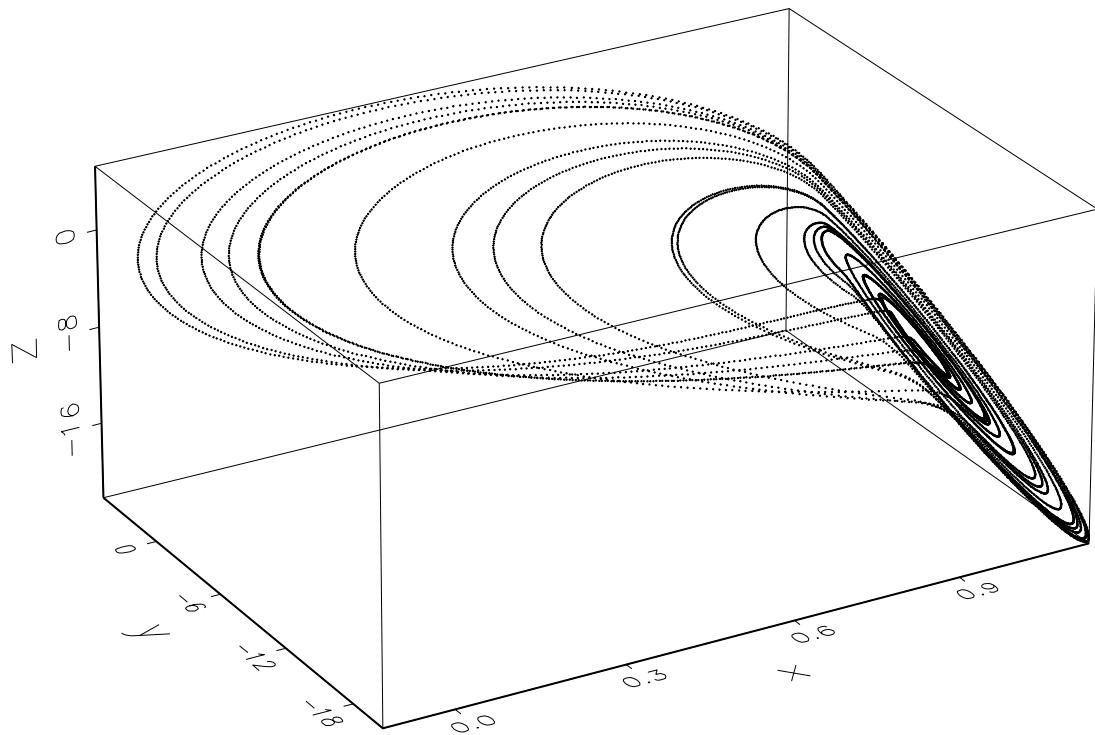


Figure 3.13: L'attracteur de Nishio pour les paramètres: $\alpha = -0,03258462$, $\beta = 1,207525$, $\gamma = -1,098891$, $a = -6,058885$, $b = -112,264$ et $k = 1$. Le mouvement transitoire a été enlevé en retranchant les 1000 premiers itérés. Le pas d'intégration est de 0,05. Il y a 10^4 points qui sont tracés. Les conditions initiales sont $(x_0; y_0; z_0) = (0,63069; 3,21152; 4,15898)$. La section de Poincaré est située à $y = -1,5$ pour $\dot{y} > 0$.

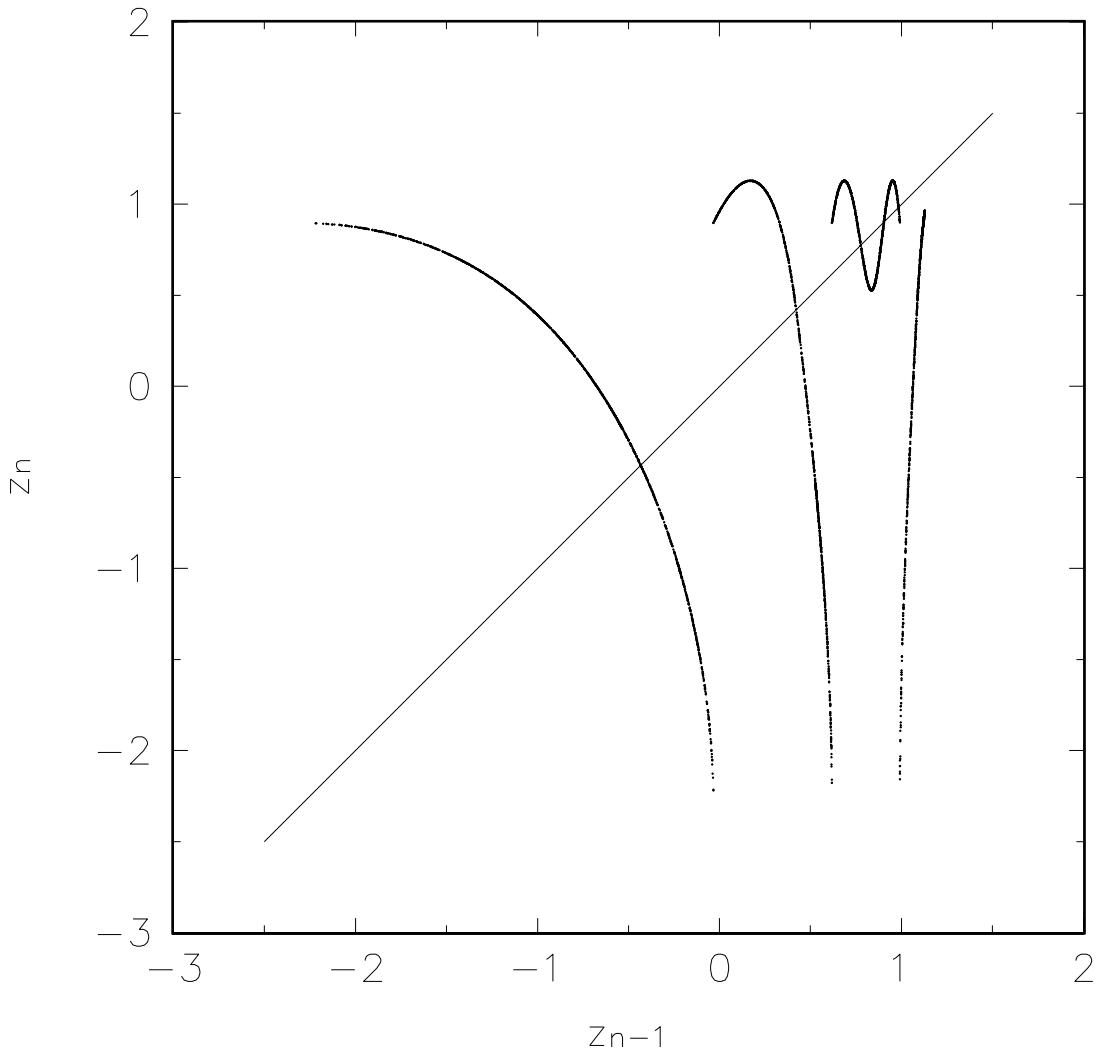


Figure 3.14: L'application de premier retour du système de Nishio. La section a été effectuée à $y = -1,5$ pour $\dot{y} > 0$. 5000 points ont été tracés. La variable z a été choisie comme variable témoin de l'évolution.

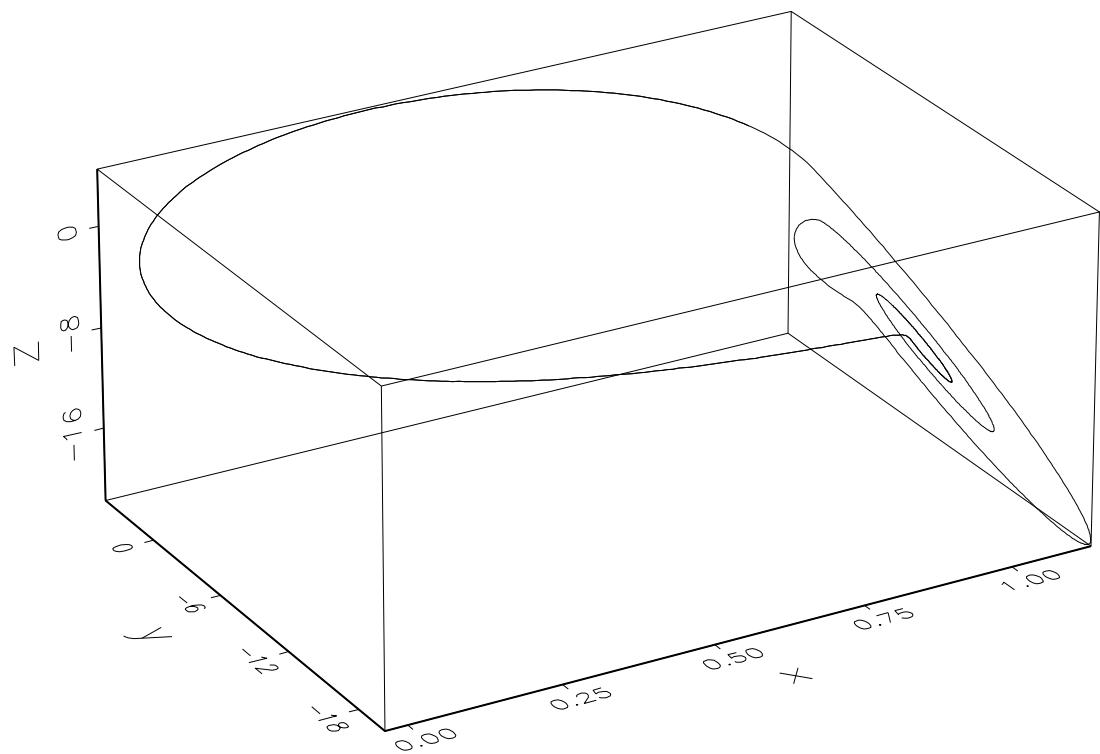


Figure 3.15: Stabilisation d'une orbite de période 1 du système de Nishio. Voici quelques détails techniques: $\epsilon = 5 \times 10^{-2}$, $\Delta\mu_{\max} = 7,4 \times 10^{-5}$, $\Delta\mu = 10^{-4}$, $z_* = (0, 9022 \pm 0,0001)$, $z' = (0, 902 \pm 0,001)$, $g \simeq 136, 21$.

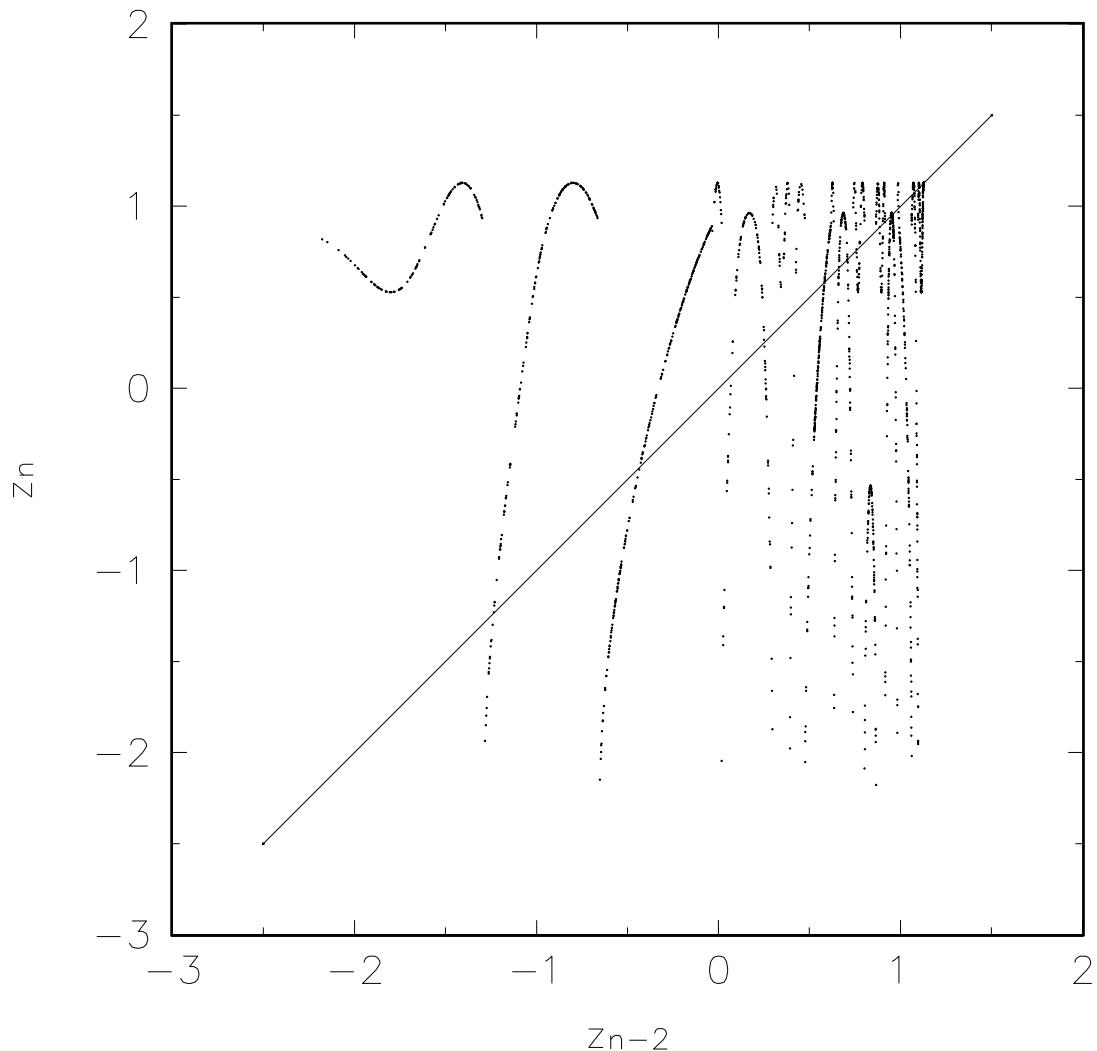


Figure 3.16: L'application de deuxième retour du système de Nishio. La section a été effectuée à $y = -1,5$ pour $\dot{y} > 0$. 5000 points ont été tracés. La variable z a été choisie comme variable témoin de l'évolution.

Conclusion

Le travail effectué au cours de cette maîtrise nous a permis de développer des outils théoriques et informatiques utiles pour contrôler le chaos. Nous avons réussi à contrôler certains systèmes chaotiques qui n'avaient pas été stabilisés jusqu'à maintenant. Nous avons utilisé la méthode d'OGY pour maîtriser des applications discrètes non-linéaires 1D et 2D. Nous avons même réussi à stabiliser en présence de bruit aléatoire. Puis, nous nous sommes servis du SPF, afin de stabiliser des systèmes d'équations différentielles non-linéaires 3D qui étaient hautement dissipatifs. C'est-à-dire que la dynamique de ces dernières pouvait se ramener à l'étude d'un système unidimensionnel. Pour tous les cas qui ont été étudiés et stabilisés, les techniques de contrôle ont été très efficaces.

Même si tout au long de cette recherche, nous avions à notre disposition les modèles mathématiques décrivant différents processus physiques, la méthode d'OGY peut être utilisée sans *aucun* modèle mathématique. En effet, toutes les quantités telles que points fixes (orbites) [Auerbach *et al.*, 87; Lathrop et Kostelich, 89], matrice de Jacobi et forme de la perturbation [So et Ott, 95], peuvent être déterminées a priori sans aucune information sur la dynamique intrinsèque du système chaotique en question. C'est ce qui fait la notoriété de cette technique. En bref, l'idée de base est de reconstruire la dynamique du système à l'aide de coordonnées à délai temporel [Takens, 81]. Ces coordonnées sont construites en ne mesurant qu'une seule quantité scalaire à des intervalles de temps réguliers. Un attracteur est ainsi reconstruit dans un espace des phases synthétique. Puis, l'information nécessaire au choix des cibles et de la forme de la perturbation s'obtient uniquement à partir de cette reconstruction. Tout se fait expérimentalement sans que l'utilisateur n'ait recours à quelque modèle que ce soit. Nous n'avons besoin que d'une boîte noire (l'expérience) et d'une variable scalaire mesurée à des intervalles de temps réguliers.

Dernièrement, quelques modifications majeures ont été apportées à la méthode d'OGY. La perturbation au $n^{\text{ième}}$ itéré dépend maintenant des perturbations antérieures. Avec ces modifications, le contrôle est encore plus robuste, surtout lorsqu'il est question de reconstruction. La première modification provient de [Dresler et Nitsche, 92; Nitsche et Dressler, 92], alors que la généralisation la plus complète est de [So et Ott, 95].

Bien sûr, il existe plusieurs petites variantes de l'algorithme d'OGY tant expérimentales que théoriques. Lorsque la dynamique peut se ramener à un problème unidimensionnel, le SPF [Peng, Petrov et Showalter, 91] est très pratique, c'est d'ailleurs celui que nous avons utilisé dans le dernier chapitre. De plus, il existe une généralisation du SPF, appelée le *Recursive Proportional Feedback* [Rollins, Parmananda et Sherard, 93]. Cette dernière modification tient compte elle aussi des perturbations précédentes dans la forme de la nouvelle perturbation. Ceci est nécessaire lorsque l'itéré correspondant horizontalement (sur l'application de $M^{\text{ième}}$ retour) au point fixe visé ne se trouve pas sur l'attracteur correspondant à $\mu = \mu_n$.

Parallèlement à la méthode d'OGY, il y a d'autres techniques complètement différentes, et d'autres très similaires. Pour ces différentes approches, nous jugeons plus utile de référer le lecteur à quelques articles qui font la synthèse du sujet. Afin d'avoir un aperçu général, voir [Chen et Dong, 93d]. Pour une étude détaillée des différentes techniques, voir [Chen et Dong, 93c]. Un autre article d'intérêt est [Shinbrot *et al.*, 93].

La méthode d'OGY n'est pas utile uniquement pour la stabilisation d'orbites, mais elle peut l'être aussi pour synchroniser des systèmes chaotiques [Lai et Grebogi, 93b]. L'idée principale est de laisser évoluer librement deux systèmes similaires mais complètement chaotiques. Lorsqu'une des deux trajectoires dans l'espace des phases entre dans le voisinage de l'autre, l'algorithme d'OGY est activé. Sauf qu'au lieu de linéariser autour d'un point fixe, la linéarisation est effectuée autour de l'autre trajectoire. Une fois l'algorithme mis en marche, les deux systèmes évoluent en phase, c'est-à-dire qu'ils suivent exactement le même parcours dans l'espace des phases. On dit alors qu'ils sont synchronisés. Ce qui est intéressant avec ce procédé, c'est que les systèmes évoluent alors toujours dans un régime chaotique, mais ce régime est le même pour les deux. Le procédé peut être généralisé à un ensemble de systèmes. L'avantage de cette technique de synchronisation sur celle qui est la plus couramment utilisée [Pecora et Carroll, 90], c'est qu'aucun sous-système possédant un exposant de Lyapunov positif n'est nécessaire. Les applications présentement les plus en vogue dans ce domaine sont dans les communications sécuritaires. La synchronisation peut aussi être réalisée pour des systèmes chaotiques spatio-temporels [Lai et Grebogi, 94], ce qui ouvre des perspectives encourageantes pour une meilleure compréhension des systèmes de hautes dimensions tels que certains phénomènes hydrodynamiques (turbulence).

Peut-être serait-il approprié de mentionner au lecteur que malgré la précision limitée des calculs,³ les différentes orbites chaotiques calculées numériquement représentent les orbites exactes du système. En effet, il existe un théorème dit de *shadowing* [Hammel, Yorke et Grebogi, 87, 88; Grebogi *et al.*, 90] qui assure l'existence d'une trajectoire réelle⁴ qui demeure à proximité de la trajectoire numérique calculée.

³En fait, ceci génère un bruit de fond.

⁴précision infinie

Enfin, nous pouvons maintenant nous servir de toute la richesse de la dynamique faisant partie du chaos afin de générer des comportements qui étaient jusque-là impossibles à obtenir. Le contrôle du chaos est aujourd’hui effectué dans un nombre sans cesse croissant d’expériences très diversifiées. Nous pouvons envisager dans un proche futur de nouveaux traitements médicaux (épilepsie, arythmie cardiaque de même que la maladie de Parkinson [Beuter et Mackey, 95; Schiff, 95]), de nouvelles approches de fabrication industrielle (appareils tirant profit de la richesse du chaos, diminuant ainsi le nombres d’étapes nécessaires à la fabrication d’un produit), des techniques de transferts d’orbites spatiales (avec le ciblage), et bien d’autres applications qui seraient plus intéressantes à réaliser les unes que les autres. Par contre, toutes ces applications n’en sont encore qu’au stade de l’expérimentation. Il nous reste donc à raffiner ces diverses techniques de contrôle, afin de les transposer dans la vie de tous les jours. En plus de ces différentes percées pratiques possibles, peut-être en viendrons-nous à mieux comprendre certains mécanismes de contrôles naturels, tels que le processus de formation d’une idée abstraite ou l’évolution des espèces. Enfin, si nous réussissons à unifier la théorie du chaos à la mécanique quantique, peut-être parviendrions-nous à développer des techniques de contrôle de l’atome. De nouvelles avenues de recherches sont maintenant ouvertes, et les retombées scientifiques risquent d’être nombreuses dans plusieurs domaines.

Bibliographie

- [1] D. Auerbach *et al.*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2387 (1987).
- [2] A. Azevedo et S. M. Rezende, Phys. Rev. Lett. **66**, 1342 (1991).
- [3] E. Barreto *et al.*, Phys. Rev. E **51**, 4169 (1995).
- [4] A. Beuter et M. C. Mackey, communication privée (1995).
- [5] E. M. Bollt et J. D. Meiss, Physica D **81**, 280 (1995a).
- [6] E. M. Bollt et J. D. Meiss, article non-publié (1995b).
- [7] R. Bowen, Trans. Am. Math. Soc. **154**, 377 (1971).
- [8] E. Bradley, dans *Lecture Notes Control and Information Sciences*, No 165, édité par G. Jacob et F. Lamnabhi-Lagarrigue (Springer, Berlin, 1991), pp. 307-325.
- [9] G. Chen, IEEE Trans. Circuits Syst.-I, **40**, 829 (1993).
- [10] G. Chen et X. Dong, J. Circuits Syst. Comput. **3**, 139 (1993a).
- [11] G. Chen et X. Dong, Proc. 1993 Int. Symp. Circuits (1993b).
- [12] G. Chen et X. Dong, Int. J. Bif. Chaos **3**, 1363 (1993c).
- [13] G. Chen et X. Dong, *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, **1**, 469 (IEEE, New York, NY, 1993d).
- [14] J. Chrostowski et C. Delisle, Opt. Commun. **41**, 1143 (1983a).
- [15] J. Chrostowski et C. Delisle, Can. J. Phys. **61**, 188 (1983b).
- [16] J. Chrostowski, R. Vallée et C. Delisle, Can. J. Phys. **61**, 71 (1983).
- [17] L. O. Chua *et al.*, IEEE Trans. Circuits Syst.-I: **40**, no 10, 745 (1993).
- [18] W. X. Ding *et al.*, Phys. Rev. Lett. **72**, 96 (1994).

- [19] W. L. Ditto, S. N. Rauseo et M. L. Spano, Phys. Rev. Lett. **65**, 3211 (1990).
- [20] U. Dressler et G. Nitsche, Phys. Rev. Lett. **68**, 1 (1992).
- [21] K. Falconer, dans *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications* (Wiley, Chichester, 1990), p. 38.
- [22] A. Garfinkel *et al.*, Science **257**, 1230 (1992).
- [23] R. Genesio et A. Tesi, J. Circuits Syst. Comput. **3**, 151 (1993).
- [24] C. Grebogi *et al.*, Physica D **13**, 261 (1986).
- [25] C. Grebogi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1527 (1990).
- [26] C. Grebogi, E. Ott et J. A. Yorke, Phys. Rev. A **37**, 1711 (1988).
- [27] J. Guckenheimer et P. Holmes, dans *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, édité par F. John, J. E. Marsden et L. Sirovich (Springer-Verlag, New York, 1983), pp. 17 et 127.
- [28] S. M. Hammel, C. K. R. T. Jones et J. V. Moloney, J. Opt. Soc. Am B **2**, 552 (1985).
- [29] S. M. Hammel, J. A. Yorke et C. Grebogi, J. Complexity **3**, 136 (1987).
- [30] S. M. Hammel, J. A. Yorke et C. Grebogi, Bull. Am. Math. Soc. **19**, 465 (1988).
- [31] T. T. Hartley et F. Mossayebi, J. Circuits Syst. Comput. **3**, 173 (1993).
- [32] M. Hénon, Comm. Math. Phys. **50**, 69 (1976).
- [33] R. C. Hilborn, dans *Chaos and Nonlinear Dynamics* (Oxford, New York, 1994), pp. 225 et 240.
- [34] B. Hübinger *et al.*, Phys. Rev. E **50**, 932 (1994).
- [35] E. R. Hunt, Phys. Rev. Lett. **67**, 1953 (1991).
- [36] E. R. Hunt et G. Johnson, IEEE Spectrum, Nov., 32 (1993).
- [37] G. A. Johnson et E. R. Hunt, J. Circuits Syst. Comput. **3**, 119 (1993).
- [38] G. A. Johnson, T. E. Tigner et E. R. Hunt, J. Circuits Syst. Comput. **3**, 109 (1993).
- [39] G. A. Johnston et E. R. Hunt, IEEE Trans. Circuits Syst.-I, **40**, 833 (1993).
- [40] E. J. Kostelich *et al.*, Phys. Rev. A **47**, 305 (1993).

- [41] Y.-C. Lai, Computers in Physics, **8**, no 1, 62 (1994).
- [42] Y.-C. Lai, M. Ding et C. Grebogi, Phys. Rev. E **47**, 86 (1993).
- [43] Y.-C. Lai et C. Grebogi, Proceedings of the SPIE - The International Society for Optical Engineering **2038**, 91 (1993a).
- [44] Y.-C. Lai et C. Grebogi, Phys. Rev. E **47**, 2357 (1993b).
- [45] Y.-C. Lai et C. Grebogi, Phys. Rev. E **50**, 1894 (1994).
- [46] Y.-C. Lai *et al.*, Nonlinearity **6**, 779 (1993).
- [47] D. P. Lathrop et E. J. Kostelich, Phys. Rev. A **40**, 4028 (1989).
- [48] T.-Y. Li et J. A. Yorke, Am. Math. Monthly **82**, 985 (1975).
- [49] E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).
- [50] E. N. Lorenz, Physica D **13**, 90 (1984).
- [51] R. N. Madan, Proc. 35th Midwest Symp. Circuits Syst., 736 (1992).
- [52] K. Murali et M. Lakshmanan, J. Circuits Syst. Comput. **3** 125 (1993).
- [53] Y. Nishio, N. Inaba et S. Mori, in *Proc. ISCAS*, 1990.
- [54] G. Nitsche et U. Dressler, Physica D **58**, 153 (1992).
- [55] E. Ott, dans *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge, 1993), p. 11.
- [56] E. Ott, C. Grebogi et J. A. Yorke, dans *Chaos: Proceedings of a Soviet-American Conference* (American Institute of Physics, New York, 1990a).
- [57] E. Ott, C. Grebogi et J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990b).
- [58] P. Parmananda *et al.*, Phys. Rev. E **47**, R3003 (1993).
- [59] L. M. Pecora et T. L. Carroll, Phys. Rev. Lett. **64**, 821 (1990).
- [60] B. Peng, V. Petrov et K. Showalter, J. Phys. Chem. **95**, 4957 (1991).
- [61] B. Peng, V. Petrov et K. Showalter, Physica A **188**, 210 (1992).
- [62] V. Petrov, B. Peng et K. Showalter, J. Chem. Phys. **96**, 7506 (1992).
- [63] V. Petrov *et al.*, Nature **361**, 240 (1993).
- [64] V. Petrov, M. J. Crowley et K. Showalter, Phys. Rev. Lett. **72**, 2955 (1994).

- [65] W. H. Press *et al.*, dans *Numerical Recipes in C* (Cambridge, 1992).
- [66] S. N. Rasband, dans *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems* (Wiley, New York, 1990), p. 152.
- [67] R. W. Rollins, P. Parmananda et P. Sherard, Phys. Rev. E **47**, R780 (1993).
- [68] O. E. Rössler, Phys. Lett. A **57**, 397 (1976).
- [69] R. Roy *et al.*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1259 (1992).
- [70] R. Roy, Z. Gills et K. S. Thornburg, Optics and Photonics News, May 8 (1994).
- [71] S. J. Schiff *et al.*, Nature **370**, 615 (1994).
- [72] S. J. Schiff, communication privée (1995).
- [73] T. Shinbrot *et al.*, Phys. Rev. Lett. **65**, 3215 (1990).
- [74] T. Shinbrot *et al.*, Phys. Rev. Lett. **68**, 2863 (1992a).
- [75] T. Shinbrot *et al.*, Phys. Rev. A **45**, 4165 (1992b).
- [76] T. Shinbrot *et al.*, Phys. Lett. A **169**, 349 (1992c).
- [77] T. Shinbrot *et al.*, Nature **363**, 411 (1993).
- [78] J. Singer, Y. Z. Wang et H. H. Bau, Phys. Rev. Lett. **66**, 1123 (1991).
- [79] P. So et E. Ott, Phys. Rev. E **51**, 2955 (1995).
- [80] F. Takens, dans *Dynamical Systems and Turbulence*, édité par D. Rand et L. S. Young (Springer-Verlag, Berlin, 1981), p. 230.
- [81] M. Ye, D. E. Jones et P. E. Wigen, J. Appl. Phys. **73**, 6822 (1993).

Annexe A

Esquisse de la méthode numérique pour contrôler des systèmes 1D

- Choisir l'application F
- Choisir la période M de l'orbite périodique à contrôler
- Déterminer un point fixe de F^M correspondant à la période M (méthode de Newton)
- Obtenir les autres points de l'orbite par itération de F .
- Possibilité d'ajouter du bruit non-déterministe
- Itérer F
- Si $x(i) - \epsilon \leq x_n \leq x(i) + \epsilon$ et $\Delta\mu < \Delta\mu_{\max}$:
 - algorithme d'OGY

Annexe B

Esquisse de la méthode numérique pour contrôler des systèmes 2D

- Choisir l'application \mathbf{F}
- Choisir la période M de l'orbite périodique à contrôler
- Déterminer un point fixe de \mathbf{F}^M (point de selle) correspondant à la période M (méthode de Newton adaptée pour un système d'équations)
- Obtenir les autres points de l'orbite par itération de \mathbf{F} .
- Possibilité d'ajouter du bruit non-déterministe
- Itérer \mathbf{F}
- Si $x(i) - \epsilon \leq x_n \leq x(i) + \epsilon$ et $\Delta\mu < \Delta\mu_{\max}$:
 - Pour chacune des cibles, évaluer \mathbf{A} , \mathbf{B} , λ_s , λ_u et $\mathbf{f}_{u,i+1}$
 - Algorithme d'OGY

Annexe C

Esquisse du SPF

- Choisir le système f
- Intégrer f (Runge-Kutta d'ordre 4)
- Enlever le mouvement transitoire
- Observer l'attracteur
- Choisir un plan ne coupant pas une région trop foliée.
- Visualiser l'application de premier retour d'une variable x
 - Vérifier si l'application est $1D$, sinon recommencer le processus
- Appliquer une très légère perturbation à μ
- Intégrer f avec $\mu' = \mu_0 + \Delta\mu$
- Obtenir une nouvelle application de premier retour
- Déterminer la distance horizontale Δx séparant les deux applications de premier retour à partir de $x_*(\mu_0)$
- Calculer $g = \Delta x / \Delta\mu$
- Intégrer f jusqu'à ce que $x_* - \epsilon \leq x_n \leq x_* + \epsilon$:
 - Intégrer f avec $\mu' = \mu_0 + \Delta x / g \Leftrightarrow \Delta x / g < \Delta\mu_{\max}$
 - Répéter ce processus tant que $x_* - \epsilon \leq x_n \leq x_* + \epsilon$
- Démarche semblable pour une période M , sauf qu'il faut calculer l'application de $M^{\text{ième}}$ retour