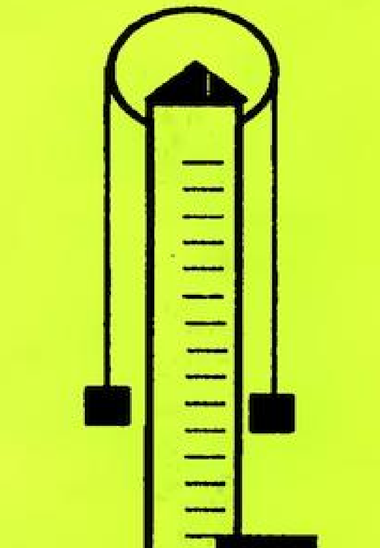
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕХАНИКА

Лабораторный практикум



Пенза ИИЦ ПГУ2007

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕХАНИКА

Лабораторный практикум

ПЕНЗА ИИЦ ПГУ 2007

УДК 531.(076)
М 55

М 55 **Механика** : лабораторный практикум (№ 1–4, 10, 12) / сост.: С. Е. Кривецков, Е. В. Щербакова ; под ред. Л. И. Мокиевского. – Пенза : Информационно-издательский центр ПГУ, 2007. – 56 с.

Данные методические указания охватывают лабораторные работы по разделу «Механика» курса общей физики (№ 1–4, 10, 12). Во введении рассмотрены простейшие методы обработки результатов измерений, знание которых необходимо при выполнении лабораторных работ. Указания к каждой работе содержат общие теоретические сведения, описание установки и метода измерений, порядок выполнения измерений, порядок обработки результатов измерений и контрольные вопросы.

Методические указания соответствуют программе курса общей физики и предназначены для студентов технических специальностей Пензенского государственного университета.

УДК 531.(076)

ВВЕДЕНИЕ

В.1. Виды измерений и погрешностей

Измерение – *нахождение значения физической величины с помощью измерительных инструментов или приборов.*

Различают измерения прямые и косвенные.

Прямое измерение – *измерение, при котором значение искомой величины получают непосредственно по показаниям измерительного инструмента или прибора* (измерение размеров линейкой, углов – транспортиром, времени – секундомером, силы – динамометром, температуры – термометром, силы электрического тока – амперметром и т.д.).

Косвенное измерение – *измерение, при котором значение искомой величины получают расчетом по результатам прямых измерений других физических величин, связанных с искомой величиной известным соотношением (формулой).* Например, измерение площади прямоугольника по размерам его сторон; плотности – по массе и объему; определение удельного сопротивления проводника по его длине, диаметру, силе тока и напряжению на нем.

Результатом измерения величины A является некоторое число $A_{из}$. Это число всегда, в той или иной степени, отличается от истинного значения измеряемой величины. Т.е. любое измерение производится с некоторой погрешностью (неточностью). Поэтому результат измерения записывают в виде

$$A = A_{из} \pm \Delta A, \qquad (В.1)$$

где ΔA – **абсолютная погрешность** измерения величины A.

Такое представление результата измерений означает, что истинное значение измеряемой величины вероятнее всего находится в интервале от $A_{из} - \Delta A$ до $A_{из} + \Delta A$. Этот интервал называется **доверительным интервалом.** Вероятность того, что истинное значение A находится внутри указанного интервала называется **доверительной вероятностью** P. Чем больше P и меньше ΔA, тем ближе результат измерения к истинному значению. Для технических измерений обычно достаточной является доверительная вероятность 0,95 (или 95%).

Погрешности разделяют на случайную $\Delta A_{сл}$ и систематическую $\Delta A_{сист}$. Абсолютная погрешность находится по правилу:

$$\Delta A = \sqrt{(\Delta A_{сл})^2 + (\Delta A_{сист})^2}. \qquad (В.2)$$

Относительной погрешностью измерения величины A называется *отношение абсолютной погрешности к результату измерения*

$$\delta A = \frac{\Delta A}{A_{из}}. \qquad (В.3)$$

Относительная погрешность – величина безразмерная. Часто ее выражают в процентах: $\delta A(\%) = \frac{\Delta A}{A_{из}} \cdot 100\%$.

В.2. Случайные погрешности

Случайная погрешность – *это погрешность, изменяющаяся случайным образом при многократных измерениях одной и той же величины.*

Случайные погрешности обусловлены совокупным действием многих факторов (колебания температуры окружающей среды, атмосферного давления, влажности, постоянное сотрясение пола и стен здания и т.д.). Устранить их часто невозможно или сложно. В этом случае для повышения точности измерения проводят многократно. Чем больше число измерений, тем меньше будет случайная погрешность. Если проведена серия из n измерений одной и той же величины A, то наилучшим приближением к истинному значению этой величины является среднее арифметическое результатов всех измерений

$$A_{из} = \langle A \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i, \qquad (В.4)$$

где A_i – результат i – го измерения.

Случайная абсолютная погрешность $\Delta A_{сл}$ может быть найдена по формуле

$$\Delta A_{сл} = t_{P,n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(A_i - \langle A \rangle\right)^2}{n(n-1)}}, \qquad (В.5)$$

где $t_{P,n}$ – коэффициент Стьюдента, зависящий от заданной доверительной вероятности P и числа измерений n. Значения коэффициента Стьюдента приведены в таблице В.1.

Табл. В.1. Коэффициенты Стьюдента $t_{P,n}$ для некоторых значений n и P

$n \backslash P$	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,7
6	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
20	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
∞	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

Одной из разновидностей случайных погрешностей являются грубые погрешности. **Грубая погрешность (промах)** – *это погрешность, являющаяся либо следствием неисправности средства измерения, либо ошибки экспериментатора в отсчете или записи показаний приборов, либо резкого изменения условий проведения измерения.* Результаты измерений, соответствующие грубым ошибкам, нужно отбрасывать и взамен проводить новые измерения.

В.3. Систематические погрешности

Систематическая погрешность – *погрешность, которая остается постоянной или закономерно изменяется при многократных измерениях одной и той же величины.* Например, при измерении малого электрического сопротивления можно получить завышенное значение из–за сопротивления соединительных проводов и контактов. Повторные измерения теми же приборами не могут устранить и даже обнаружить систематическую погрешность.

Систематические погрешности в зависимости от причин их появления разделяют на методические и инструментальные (приборные).

Методические погрешности – *это погрешности, возникающие из-за несовершенства метода измерения.* Например, при взвешивании тел на рычажных весах будет присутствовать ошибка из-за действия выталкивающей силы воздуха. При измерении малых сопротивлений может сказаться влияние сопротивлений соединительных проводов и контактов.

Инструментальные (приборные) погрешности – *это погрешности, связанные с неточностью измерительных инструментов и приборов.*

Измерительные приборы характеризуется классом точности ($K_т$), который обычно указан на его шкале. Существует семь классов точности приборов: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4. Приборы класса точности 0,1; 0,2; 0,5 называют прецизионными. Их применяют для точных измерений. В технике применяют приборы классов 1,0; 1,5; 2,5; 4 (технические).

По классу точности вычисляется инструментальная погрешность. У одних приборов в пределах всей шкалы отсчета постоянной остается относительная инструментальная погрешность, у других – абсолютная. Поэтому по–разному ведется и расчет инструментальных погрешностей.

а) **Класс точности задан числом, обведенным кружком.**

В этом случае одинаковой при всех показаниях измерительного прибора остается относительная погрешность. Число в кружке и есть относительная инструментальная погрешность, выраженная в процентах: $K_т = \frac{\Delta A_{ин}}{A_{из}} \cdot 100$, где $A_{из}$ – результат измерения Поэтому абсолютная инструментальная погрешность такого прибора

$$\Delta A_{ин} = \frac{K_т \cdot A_{из}}{100}. \qquad (В.6)$$

б) **Класс точности задан числом без кружка.** В этом случае при всех измерениях в пределах одного диапазона постоянной остается абсолютная инструментальная погрешность. Класс точности такого прибора выражает относительную инструментальную погрешность в процентах для результата измерений равного пределу диапазона A_{max}: $K_т = \frac{\Delta A_{ин}}{A_{max}} \cdot 100$. Поэтому абсолютная инструментальная погрешность найдется как

$$\Delta A_{ин} = \frac{K_т \cdot A_{max}}{100}. \qquad (В.7)$$

в) В тех случаях, когда на приборе **класс точности не указан**, *абсолютная инструментальная погрешность принимается равной половине цены наименьшего деления.* Например, при измерении длины линейкой с миллиметровыми делениями инструментальную погрешность необходимо считать равной 0,5 мм.

Для приборов, оснащенных нониусом, за инструментальную погрешность принимают цену деления нониуса (для штангенциркуля – 0,1 или 0,05 мм, для микрометра – 0,01 мм).

Инструментальная погрешность прибора, стрелка которого перемещается не равномерно, а скачкообразно, равна шагу перемещения стрелки. Например, инструментальную погрешность стрелочного секундомера с шагом в 0,1 с необходимо считать равной 0,1 с.

Инструментальную погрешность цифрового измерительного прибора, класс точности которого неизвестен, считают равной единице последнего разряда.

В.4. Порядок обработки результатов прямых измерений

1. В качестве оценки истинного значения измеряемой величины A принять: при однократном измерении – результат этого измерения; при многократных измерениях – среднее арифметическое результатов всех измерений

$$A_{из} = \langle A \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i .$$

2. Для многократных измерений вычислить случайную абсолютную погрешность

$$\Delta A_{сл} = t_{P,n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(A_i - \langle A \rangle\right)^2}{n(n-1)}} .$$

Коэффициент Стьюдента $t_{P,n}$ определить по таблице В.1. Доверительная вероятность, как правило, принимается равной 0,95.

Для однократного измерения $\Delta A_{сл} = 0$.

3. По классу точности измерительного прибора найти инструментальную погрешность $\Delta A_{ин}$. Если это возможно, оценить методическую погрешность $\Delta A_{мт}$ и рассчитать систематическую абсолютную погрешность $\Delta A_{сист} = \sqrt{(\Delta A_{ин})^2 + (\Delta A_{мт})^2}$. Если оценить методическую погрешность не представляется возможным, то считать систематическую погрешность равной инструментальной.

4. Найти абсолютную погрешность

$$\Delta A = \sqrt{(\Delta A_{сл})^2 + (\Delta A_{сист})^2} .$$

Если одна из погрешностей составляет менее 1/3 от другой, то ею можно пренебречь.

5. Рассчитать относительную погрешность

$$\delta A = \frac{\Delta A}{A_{из}}$$

и выразить её в процентах.

6. Записать окончательный результат в виде $A = A_{из} \pm \Delta A$ с указанием размерности измеряемой величины. Здесь же привести значение относительной погрешности δA. <u>При записи результата</u>: *абсолютную ΔA и относительную δA погрешности округлить до одной или двух значащих цифр (если первая значащая цифра – 1 или 2); величину $A_{из}$ округлить так, чтобы разряд ее последней значащей цифры совпал с разрядом последней значащей цифры абсолютной погрешности.*

В.5. Погрешности косвенных измерений

Пусть A – косвенно измеряемая величина, связанная с величинами B,C,D... некоторой формулой

$$A = f(B,C,D\ldots).$$

В этом случае наилучшим приближением к истинному значению величины A будет среднее значение, определяемое выражением

$$\langle A\rangle = f(\langle B\rangle,\langle C\rangle,\langle D\rangle\ldots).$$

Абсолютную погрешность косвенно измеряемой величины A можно оценить по правилу

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial B}\Delta B\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\Delta C\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial D}\Delta D\right)^2 \ldots}, \qquad (В.5)$$

где $\frac{\partial f}{\partial B},\frac{\partial f}{\partial C},\frac{\partial f}{\partial D}\ldots$ – частные производные, вычисленные при средних значениях величин B,C,D...; $\Delta B,\Delta C,\Delta D\ldots$ – абсолютные погрешности величин $B,C,D\ldots$.

Пример 1. Пусть $A = B + 2C + \frac{1}{3}D$. Тогда абсолютная погрешность

$$\Delta A = \sqrt{(\Delta B)^2 + (2\Delta C)^2 + \left(\frac{1}{3}\Delta D\right)^2}.$$

Относительная погрешность $\delta A = \dfrac{\sqrt{(\Delta B)^2 + (2\Delta C)^2 + \left(\frac{1}{3}\Delta D\right)^2}}{B + 2C + \frac{1}{3}D}$.

Пример 2. Пусть $A = \dfrac{BC^2}{DE^3}$. В этом случае

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{C^2}{DE^3}\Delta B\right)^2 + \left(\frac{2BC}{DE^3}\Delta C\right)^2 + \left(\frac{BC^2}{D^2E^3}\Delta D\right)^2 + \left(\frac{3BC^2}{DE^4}\Delta E\right)^2},$$

$$\delta A = \sqrt{\left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta C}{C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{3\Delta E}{E}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(\delta B)^2 + (2\delta C)^2 + (\delta D)^2 + (3\delta E)^2}.$$

В примере 2 выражение для абсолютной погрешности оказалось более сложным, чем для относительной. В таких случаях удобнее вычислить сначала относительную погрешность δA, а затем по ней и среднему значению $\langle A\rangle$ найти абсолютную погрешность $\Delta A = \langle A\rangle \cdot \delta A$.

Описанная методика оценки погрешности косвенных измерений применима в тех случаях, когда условия проведения эксперимента не изменяются. Но иногда в процессе эксперимента какие-то из параметров $B,C,D\ldots$ изменяются. В таких случаях бессмысленно находить средние значения величин $B,C,D\ldots$ и по ним определять среднее значение A. При обработке результатов таких измерений вычисляют n значений косвенно измеряемой величины A и оценивают её погрешность по правилам обработки результатов прямых измерений.

Среди переменных $B,C,D\ldots$ могут быть величины четырех видов.

1. *Величины, полученные в результате прямых измерений в ходе выполнения лабораторной работы*. Пусть, например, такой величиной является B. Тогда результаты её измерений должны быть обработаны по правилам обработки результатов прямых измерений и должна быть найдена абсолютная погрешность ΔB и относительная δ_B.

2. *Данные лабораторной установки*. Погрешность таких величин нужно считать равной половине единицы разряда последней значащей цифры. Например, задано некоторое расстояние $l = 0{,}35$ м. Единица разряда последней значащей цифры 0,01 м. В этом случае абсолютная погрешность считается равной $\Delta l = 0{,}005$ м.

3. *Табличные величины.* Абсолютную погрешность величины, взятой из справочника, можно считать равной половине единицы разряда последней значащей цифры. Например, вам необходима для расчетов плотность алюминия. В справочнике она представлена в виде $\rho_{Al} = 2{,}69 \cdot 10^3$ кг/м^3. Разряд последней значащей цифры $0{,}01 \cdot 10^3$ кг/м^3. Следовательно, абсолютную погрешность плотности алюминия нужно считать равной $\Delta\rho_{Al} = 0{,}005 \cdot 10^3$ кг/м^3 $= 5$ кг/м^3.

4. *Константы.* Абсолютная погрешность таких величин – это погрешность округления. Например, часто при выполнении лабораторных работ необходимо использовать число $\pi = 3{,}1416\ldots$. При вычислениях необходимо брать такое число значащих цифр в представлении числа π, чтобы относительная погрешность округления не оказывала существенного влияния на погрешность значения косвенно измеряемой величины. И если, например, принять $\pi = 3{,}14$, то относительная погрешность округления составит $\delta\pi = \dfrac{\Delta\pi}{\pi} \approx \dfrac{0{,}0016}{3{,}14} \approx 0{,}0005$ $(\delta\pi(\%) \approx 0{,}05\%)$.

Другой пример – значение ускорения свободного падения. На широте нашей местности $g = 9{,}81\ldots$. Если при вычислениях принять $g = 9{,}8$, то при этом будет допущена ошибка $\Delta g \approx 0{,}01$. Следовательно, относительная ошибка округления $\delta g \approx \dfrac{0{,}01}{9{,}8} \approx 0{,}001$ $(\delta g(\%) \approx 0{,}1\%)$.

В.6. Порядок обработки результатов косвенных измерений

Вариант 1. Косвенные измерения величины $A = f(B, C, D\ldots)$ проводятся при одних и тех же условиях.

1. Для тех величин, которые находятся прямыми измерениями найти средние значения $\langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle\ldots$, абсолютные погрешности $\Delta B, \Delta C, \Delta D\ldots$ и относительные $\delta B, \delta C, \delta D\ldots$ по правилам обработки результатов прямых измерений (см. § В.4).

2. Вычислить среднее значение $\langle A\rangle = f(\langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle\ldots)$.

3. Вывести формулы для абсолютной и относительной погрешностей косвенного измерения величины A (в описании лабораторных работ эти формулы приведены).

4. Если выражение для абсолютной погрешности является более простым, чем для относительной, то вычислить абсолютную погрешность, а затем найти относительную.

5. Если более простой является формула для относительной погрешности, то найти сначала её δA, а затем рассчитать абсолютную погрешность $\Delta A = \langle A\rangle \cdot \delta A$.

6. Записать окончательный результат в виде $A = \langle A\rangle \pm \Delta A$ и указать, чему равна относительная погрешность $\delta A(\%)$. При записи результата использовать те же правила округления, что и для прямых измерений.

Вариант 2. В процессе многократных косвенных измерений хотя бы какие-то из величин $B, C, D\ldots$ изменяются.

1. Для каждого из n измерений найти значение $A_i = f(B_i, C_i, D_i\ldots)$, где i – номер измерения от 1 до n.

2. Обработать полученные значения A_i по правилам обработки результатов прямых измерений. При этом систематическую погрешность $\Delta A_{сист}$ оценить для одного из результатов A_i.

Лабораторная работа № 1

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы: изучить применение законов сохранения импульса, момента импульса и механической энергии при измерении скорости пули с помощью баллистического маятника.

Оборудование: баллистический маятник, пружинный пистолет, пуля, линейка.

Общие сведения

Импульсом материальной точки *называется векторная физическая величина* $\vec{p} = m\vec{v}$, *где* $m, \vec{v}$ *– масса и скорость материальной точки, соответственно.*

Импульс системы материальных точек *равен сумме импульсов всех материальных точек системы:*

$$\vec{p}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

Закон сохранения импульса: *если сумма всех сил, действующих на систему материальных точек, равна нулю* $\left(\sum_i \vec{F}_i = 0\right)$, *то импульс системы есть величина постоянная:* $\vec{p}_c = const$. Это значит, что при любых взаимодействиях тел такой системы импульс до взаимодействия равен импульсу после взаимодействия: $\vec{p}_{снач} = \vec{p}_{скон}$.

В частности, закон сохранения импульса выполняется для замкнутой (изолированной) системы материальных точек.

Момент импульса $\vec{L}$ **материальной точки** *– векторная физическая величина равная векторному произведению* $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$, *где* $\vec{r}$, $\vec{p}$ *– радиус-вектор и импульс материальной точки, соответственно.*

Момент импульса системы материальных точек *равен сумме моментов импульса всех материальных точек системы:* $\vec{L}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$.

Закон сохранения момента импульса: *если сумма моментов сил, действующих на систему материальных точек, равна нулю* $\left(\sum_i \vec{M}_i = 0\right)$, *то момент импульса системы есть величина постоянная:* $\vec{L}_c = const$. Это значит, что при любых взаимодействиях тел такой системы момент импульса до взаимодействия равен моменту импульса после взаимодействия: $\vec{L}_{снач} = \vec{L}_{скон}$.

В частности закон сохранения момента импульса выполняется для замкнутой (изолированной) системы.

Проекцию момента импульса тела на ось вращения Z представляют в виде $L_z = J_z\omega$, где J_z – момент инерции тела относительно оси Z, ω – угловая скорость тела. Для данной работы необходимо знать, что момент инерции материальной точки равен $J_z = mr^2$, где m – масса материальной точки, r – ее расстояние от оси. Момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, $J_z = \frac{1}{3}ml^2$, где m – масса стержня, l – его длина.

Кинетическая энергия тела

– при поступательном движении равна $W_к = \frac{mv^2}{2}$, где $m, \vec{v}$ – масса и скорость тела, соответственно;

– при вращательном движении $W_к = \frac{J\omega^2}{2}$, где J, ω – момент инерции тела и его угловая скорость, соответственно.

Потенциальная энергия

– материальной точки в поле тяжести Земли $W_п = mgh$, где h – высота относительно нулевого уровня; (эта формула справедлива при h<<радиуса Земли);

– упруго деформированного тела $W_п = \frac{kx^2}{2}$, где k, x – жесткость и деформация тела, соответственно.

Механическая энергия системы *равна сумме кинетической и потенциальной энергий:* $W_м = W_к + W_п$.

Закон сохранения механической энергии: *если в системе действуют только потенциальные силы, то механическая энергия системы есть величина постоянная.*

Ударом *называется кратковременное взаимодействие тел, при котором возникают силы, существенно большие, чем все внешние силы, действующие на сталкивающиеся тела. В результате удара изменяются скорости и форма соударяющихся тел.* Для удара можно пренебречь внешними силами и считать, что система соударяющихся тел является замкнутой.

Абсолютно неупругим *называется удар, после которого тела движутся как одно целое с одной и той же скоростью.* При таком ударе происходят неупругие деформации тел.

Для абсолютно неупругого удара двух тел закон сохранения импульса записывают в виде: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$, где $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ – скорости тел до удара, $\vec{u}$ – их общая скорость после удара.

Закон сохранения механической энергии для неупругого удара не выполняется, т.к. силы неупругой деформации являются непотенциальными (их относят к диссипативным силам). При неупругом ударе часть механической энергии переходит во внутреннюю, т.е. тела при ударе нагреваются.

Баллистический маятник – *маятник, собственный период колебаний которого гораздо больше, чем время взаимодействия при ударе о маятник какого–то тела.* Такой маятник за время удара практически не успевает сместиться от положения равновесия.

Описание установки и метода измерений

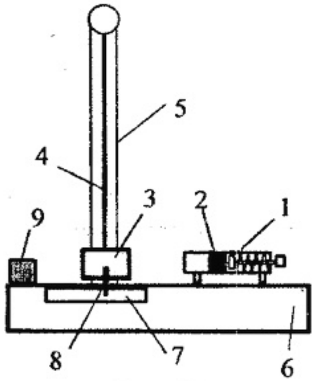


Рис. 1.1

Лабораторная установка (рис. 1.1) состоит из пружинного пистолета 1, заряжаемого пулей 2, маятника в виде цилиндра 3, подвешенного на стержне 4. Внутри цилиндра находится пластилин, в котором застревает пуля после выстрела. Маятник закреплен на стойке 5, которая установлена на подставке 6. Под маятником на подставке закреплена линейка 7 для измерения отклонения цилиндра после попадания в него пули. На цилиндре имеется указатель отклонения 8. К установке прилагается добавочный груз 9, который можно установить внутрь цилиндра для увеличения его массы.

Рассмотрим процессы, происходящие при выполнении работы. Сжимая пружину пистолета, мы сообщаем ей потенциальную энергию упругой деформации. При выстреле эта энергия частично переходит в кинетическую энергию пули. Пуля попадает в пластилин, находящийся внутри цилиндра маятника, и застревает в нем, т.е. происходит абсолютно неупругий удар. Часть кинетической энергии пули переходит в кинетическую энергию маятника с застрявшей в нем пулей. Маятник приходит в движение по дуге окружности, т.к. он подвешен на жестком стержне. При этом увеличивается потенциальная энергия маятника в поле тяжести Земли. В положении максимального отклонения кинетическая энергия маятника будет полностью израсходована на увеличение его потенциальной энергии. Измерив максимальное отклонение маятника, можно рассчитать скорость, которую имела пуля после выстрела.

Теперь опишем данные процессы с помощью законов сохранения.

Расчет проведем в двух вариантах: 1) считая, что массой стержня можно пренебречь; 2) с учетом массы стержня.

1 вариант.

Удар. Закон сохранения механической энергии для абсолютно неупругого удара не выполняется. Но можно применить закон сохранения импульса, т.к. до удара пуля движется горизонтально и сразу после удара цилиндр с пулей движутся горизонтально. В горизонтальном направлении внешних сил нет. Кроме того, маятник – баллистический, т.к. его масса гораздо больше, чем масса пули. За время удара, он практически не успевает сместиться от положения равновесия. Поэтому

$$m_п v = (m_п + m_ц)u,$$

где $m_п$ – масса пули, v – скорость пули перед ударом, $m_ц$ – масса цилиндра, u – скорость цилиндра с пулей сразу после удара.

Отклонение. Состояние сразу после удара показано на рис. 1.2. Для перехода в положение максимального отклонения применим закон сохранения механической энергии:

$$\frac{(m_п + m_ц)u^2}{2} = (m_п + m_ц)gh \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{2gh},$$

где h– высота, на которую поднимается центр тяжести. Следовательно, скорость пули перед ударом

$$v = \frac{m_п + m_ц}{m_п}\sqrt{2gh}.$$

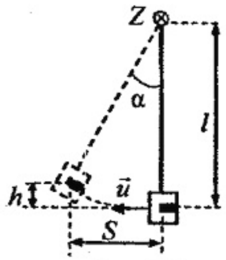


Рис. 1.2

Высоту подъема выразим геометрически (см. рис. 1.2): $h = l(1-\cos\alpha) = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Учитывая, что при выполнении измерений на наших лабораторных установках угол отклонения α мал ($\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$), используем приближенное выражение: $h \approx 2l\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{l\alpha^2}{2} \approx \frac{S^2}{2l}$, где S – горизонтальное смещение маятника при отклонении. Таким образом, получаем расчетную формулу для скорости пули

$$v \approx \frac{m_п + m_ц}{m_п} S\sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (1.1)$$

2 вариант.

Удар. Если массой стержня нельзя пренебречь, то для удара необходимо использовать закон сохранения момента импульса. Это связано с тем, что в результате удара цилиндр и стержень приходят во вращательное движение относительно оси Z, проходящей через точку подвеса стержня.

Для маятника, находящегося в положении равновесия, момент всех внешних сил относительно оси Z равен нулю. Рассматривая состояния системы непосредственно перед ударом и сразу же после удара, запишем закон сохранения момента импульса:

$$L_{cz}(\text{до удара}) = L_{cz}(\text{после удара}).$$

До удара движется только пуля: $L_{cz}(\text{до удара}) = m_{\text{п}} \text{v} l$. После удара вся система приобретает угловую скорость ω: $L_{cz}(\text{после удара}) = (J_{\text{п}} + J_{\text{ц}} + J_{\text{c}})\omega$, где $J_{\text{п}}, J_{\text{ц}}, J_{\text{c}}$ – моменты инерции пули, цилиндра и стержня, соответственно, относительно оси Z. Приравнивая эти выражения, получим $m_{\text{п}} \text{v} l = (J_{\text{п}} + J_{\text{ц}} + J_{\text{c}})\omega$. Откуда

$$\text{v} = \frac{(J_{\text{п}} + J_{\text{ц}} + J_{\text{c}})\omega}{m_{\text{п}} l}. \tag{1.2}$$

Отклонение. Закон сохранения механической энергии для отклонения маятника в данном случае запишется в виде:

$$\frac{(J_{\text{п}} + J_{\text{ц}} + J_{\text{c}})\omega^2}{2} = (m_{\text{п}} + m_{\text{ц}})gh + m_{\text{c}} g \frac{h}{2}.$$

Левая часть этого уравнения выражает кинетическую энергию системы при вращательном движении. Правая часть равна приращению потенциальной энергии системы при подъеме, где учтено, что центры тяжести цилиндра и пули поднимаются на h, а стержня – только на $\frac{h}{2}$. Выразив из этого уравнения угловую скорость ω и подставив в (1.2), получим

$$\text{v} = \frac{1}{m_{\text{п}} l} \sqrt{2(J_{\text{п}} + J_{\text{ц}} + J_{\text{c}})(m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + \frac{m_{\text{c}}}{2}) g h}.$$

Учитывая, что $J_{\text{п}} = m_{\text{п}} l^2$, $J_{\text{ц}} = m_{\text{ц}} l^2$, $J_{\text{c}} = \frac{1}{3} m_{\text{c}} l^2$, получим

$$\text{v} = \frac{1}{m_{\text{п}}} \sqrt{2(m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + \frac{m_{\text{c}}}{3})(m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + \frac{m_{\text{c}}}{2}) g h}.$$

Выразив h так же, как в 1 варианте, придем к расчетной формуле

$$\text{v} \approx \frac{S}{m_{\text{п}}} \sqrt{(m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + \frac{m_{\text{c}}}{3})(m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + \frac{m_{\text{c}}}{2}) \frac{g}{l}}. \tag{1.3}$$

Очевидно, что если пренебречь массой стержня, то формула (1.3) перейдет в (1.1).

Порядок выполнения измерений

1. Подготовить рабочую тетрадь для записи результатов измерений в виде табл. 1.1.

Таблица 1.1

$l = \ldots$ см, $\Delta l = \ldots$ см, $m_{\text{п}} = \ldots$ г, $\Delta m_{\text{п}} = \ldots$ г, $m_{\text{ц}} = \ldots$ г,

$\Delta m_{\text{ц}} = \ldots$ г, $m_{\text{c}} = \ldots$ г, $\Delta m_{\text{c}} = \ldots$ г, $\Delta S_{\text{ин}} =$ мм

i	1	2	3	4	5	$\langle\ \rangle$
S_i, мм						

2. Получить от преподавателя допуск к выполнению работы по 1 или 2 варианту.

3. Получить у дежурного лаборанта добавочный груз и пулю.

4. Измерить с помощью линейки длину стержня маятника l (от оси вращения до центра тяжести цилиндра). Погрешность Δl принять равной радиусу цилиндра. Результаты измерений записать в рабочую тетрадь.

5. Записать в рабочую тетрадь параметры установки: $m_{\text{п}}, \Delta m_{\text{п}}, m_{\text{ц}}, \Delta m_{\text{ц}}, m_{\text{c}}, \Delta m_{\text{c}}$ (при выполнении по 1 варианту $m_{\text{c}} = 0, \Delta m_{\text{c}} = 0$).

6. 5 раз провести измерения отклонения маятника при попадании в него пули. Для этого:

- с помощью регулировочных винтов в основании установки отрегулировать положение цилиндра относительно пистолета; при этом стремиться к тому, чтобы оси цилиндра и пистолета совпали;
- сжать пружину пистолета, оттянув назад ударный стержень; спусковым крючком зафиксировать положение стержня;
- вложить пулю в ствол до упора;
- произвести выстрел и заметить величину отклонения S маятника;
- результаты измерений занести в таблицу 1.1

7. Записать в рабочую тетрадь инструментальную погрешность $\Delta S_{\text{ин}}$.

8. По указанию преподавателя изменить или массу цилиндра, добавив к нему дополнительный груз, или массу пули, или и то, и другое. Снова выполнить пп. 5 – 7. Для записи результатов измерений подготовить в рабочей тетради еще одну таблицу в виде табл. 1.1. Если в цилиндр вкладывается дополнительный груз, то в таблице в качестве $m_ц$ укажите суммарную массу цилиндра и дополнительного груза.

9. Предъявить результаты измерений преподавателю.

10. Сдать дежурному лаборанту добавочный груз и пулю.

Обработка результатов измерений

Для каждой серии из 5 измерений:

1. Обработать результаты измерения S по правилам обработки результатов прямых измерений (см. § В.4).

2. Рассчитать среднюю скорость пули $\langle v \rangle$ по ф. (1.1) (1 вариант) или (1.3) (2 вариант), подставляя в них $\langle S \rangle$. Перед вычислениями перевести единицы измерения S и l в систему СИ.

3. Вычислить относительную погрешность по формуле

1 вариант:

$$\delta v = \sqrt{\left(\frac{m_ц}{(m_п + m_ц)}\right)^2 \left((\delta m_ц)^2 + (\delta m_п)^2\right) + (\delta S)^2 + \left(\frac{1}{2}\delta g\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\delta l\right)^2}$$

2 вариант:

$$\delta v = \sqrt{(\delta S)^2 + (\delta m_п)^2 + \left(\frac{m_ц\left(m_п + m_ц + \frac{5}{12}m_с\right)}{\left(m_п + m_ц + \frac{1}{2}m_с\right)\left(m_п + m_ц + \frac{1}{3}m_с\right)}\delta m_ц\right)^2 + \left(\frac{m_с\left(\frac{5}{12}(m_п + m_ц) + \frac{1}{6}m_с\right)}{\left(m_п + m_ц + \frac{1}{2}m_с\right)\left(m_п + m_ц + \frac{1}{3}m_с\right)}\delta m_с\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\delta g\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\delta l\right)^2}.$$

При вычислении малыми слагаемыми в этих формулах можно пренебречь.

4. Вычислить абсолютную погрешность $\Delta v = \langle v \rangle \cdot \delta v$.

5. Записать результат вычислений в виде $v = (\langle v \rangle \pm \Delta v)$ м/с, $\delta v = \ldots$

Обработав результаты каждой серии измерений, сравните полученные значения. Сделайте выводы.

Контрольные вопросы

1. Что такое импульс материальной точки, импульс системы материальных точек? Сформулируйте закон сохранения импульса.

2. Что такое удар? Запишите закон сохранения импульса для удара двух тел.

3. Что такое абсолютно неупругий удар? Запишите закон сохранения импульса для абсолютно неупругого удара двух тел.

4. Что понимается под баллистическим маятником? Почему в данной работе маятник можно считать баллистическим?

5. Что такое кинетическая энергия? Каким выражением она определяется при поступательном движении? Какие тела и в какие моменты времени в данной работе обладают кинетической энергией?

6. Что такое потенциальная энергия? С какими видами потенциальной энергии приходится иметь дело в механике и какими формулами они выражаются? Какие тела и в какие моменты времени в данной работе обладают потенциальной энергией?

7. Что такое механическая энергия? Сформулируйте закон сохранения механической энергии. На каких этапах в данной работе выполняется закон сохранения механической энергии? Какие допущения при этом необходимо сделать?

8. Почему при ударе пули о цилиндр не выполняется закон сохранения механической энергии. Оцените по вашим результатам измерений, какая часть механической энергии теряется при ударе.

9. Почему при отклонении маятника после застревания в нем пули не выполняется закон сохранения импульса?

10. Расскажите о лабораторной установке и порядке выполнения измерений.

11. Какие величины в данной работе вы находили прямыми измерениями, а какие – косвенными? Поясните, как вы определяли абсолютные погрешности $\Delta m_п$, $\Delta m_ц$, $\Delta m_с$, Δl, ΔS.

12. Вывести расчетную формулу (1.1) для скорости пули.

Дополнительные вопросы при выполнении работы по 2 варианту.

13. Что такое момент импульса материальной точки, момент импульса системы материальных точек? Сформулируйте закон сохранения момента импульса.

14. Запишите и поясните закон сохранения момента импульса для удара пули о цилиндр маятника.

15. Как выражается кинетическая энергия при вращательном движении? Запишите и поясните закон сохранения механической энергии для отклонения маятника.

16. Вывести расчетную формулу (1.3) для скорости пули.

17. Оцените по результатам ваших измерений относительную методическую погрешность при измерении скорости пули по 1 варианту.

Лабораторная работа № 2

ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНОГО ЗАКОНА ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Цель работы: изучение II закона Ньютона, проверка справедливости II закона Ньютона для поступательного движения при помощи машины Атвуда.

Оборудование: машина Атвуда (установка с блоком и грузами), секундомер, добавочные грузики.

Общие сведения

Поступательным движением тела *называется такое движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается, оставаясь параллельной самой себе*. При поступательном движении траектории всех точек тела одинаковы. Поэтому одинаковы скорости и ускорения всех его точек.

Основной закон динамики поступательного движения тела: *в инерциальных системах отсчета сумма всех сил, действующих на тело, равна быстроте изменения импульса тела, т.е.*

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

где $\vec{p} = m\vec{v}_C$ – импульс тела, m – масса тела, $\vec{v}_C$ скорость центра масс тела.

Если масса тела не изменяется, то основной закон динамики поступательного движения можно представить в виде

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d(m\vec{v}_C)}{dt} = m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = m\vec{a}_C,$$

где $\vec{a}_C$ – ускорение центра масс тела.

Рассмотрим задачу о движении тел, связанных нитью, перекинутой через блок (рис. 2.1). Сделаем следующие допущения:

- массой блока можно пренебречь;
- трением в блоке и силой сопротивления воздуха можно пренебречь;
- нить можно считать невесомой и нерастяжимой.

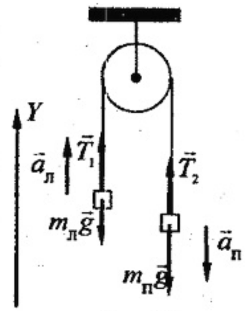


Рис. 2.1

Предположим, что масса правого груза больше, чем масса левого: $m_п > m_л$. Тогда грузы будут двигаться с ускорением, причем, вследствие нерастяжимости нити, $|\vec{a}_л| = |\vec{a}_п| = a$.

На каждый из грузов будут действовать сила тяжести и сила натяжения нити. Запишем II закон Ньютона в проекциях на ось Y для каждого из тел:

$$T_1 - m_л g = m_л a,$$
$$T_2 - m_п g = -m_п a.$$

Т.к. мы пренебрегаем массой блока, массой нити, трением в блоке и силой сопротивления воздуха, то силы натяжения будут одинаковы по величине: $T_1 = T_2 = T$.

Решив систему уравнений относительно ускорения, получим

$$a = \frac{m_п - m_л}{m_п + m_л} g. \qquad (2.1)$$

Описание установки и метода измерения

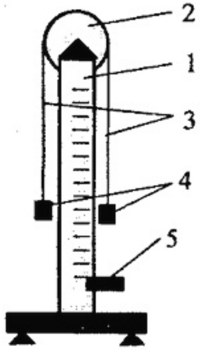


Рис. 2.2

В данной работе используется машина Атвуда. Английский физик Джордж Атвуд (1746–1807) изобрел ее в 1784 г. для проверки законов падения тел. Машина Атвуда (рис. 2.2) представляет собой вертикальную стойку 1, в верхней части которой установлен легкий блок 2. Блок может вращаться вокруг горизонтальной оси. Для уменьшения трения на оси используется подшипник. Через блок перекинута легкая нить 3, к концам которой привязаны одинаковые грузы 4. На стойке 1 нанесена шкала с сантиметровыми делениями и установлена передвижная платформа 5. Платформу можно закреплять в разных местах стойки, задавая путь, проходимый грузами. На основные грузы 4 можно помещать различные дополнительные грузики.

Обозначим как m_0 массу каждого из основных грузов 4. Система из двух одинаковых грузов, закрепленных на машине Атвуда, должна находиться в равновесии. Если теперь легким толчком вывести систему из равновесия, то грузы должны двигаться равномерно. Но нужно учесть, что в реальной установке на оси блока всегда есть трение. Поэтому, прежде чем выполнять измерения, необходимо компенсировать это трение. Для этого на груз, который будет двигаться вниз, помещается дополнительный грузик массой $m_{тр}$. Подбирая этот грузик, нужно добиться, чтобы после легкого толчка грузы двигались медленно и равномерно.

В наших лабораторных установках платформа 5 закреплена с правой стороны. Поэтому при измерениях правый из грузов 4 должен двигаться вниз, левый – вверх. Но, подбирая грузик, компенсирующий трение, нужно учитывать, что основные грузы 4 всегда не точно одинаковы. Погрешность, с которой определены их массы, составляет 0,5 г, а это соизмеримо с массой груза, компенсирующего трение. Может оказаться, что правый основной груз уже сам по себе тяжелее на столько, что трение скомпенсировано. В этом случае нет необходимости помещать на него

добавочный грузик. Может быть и случай, когда для балансировки установки и компенсации трения необходимо грузик $m_{тр}$, помещать на левый основной груз. Поэтому, выполняя часть задания, связанную с компенсацией трения, необходимо проявить определенное искусство экспериментатора.

Предположим, что мы скомпенсировали трение и установка готова для выполнения измерений. Поместим на правый основной груз добавочный грузик массой m_1, на левый – m_2 (причем, $m_1 > m_2$). Таким образом, система грузов будет иметь общую массу, равную $2m_0 + m_1 + m_2 + m_{тр}$. Ускорение системы будет определяться выражением (2.1). В числителе этого выражения фигурирует разность масс левого и правого грузов. В данном случае она будет равна $m_п - m_л = m_1 - m_2$. Вычисляя разность масс, не нужно учитывать массу груза $m_{тр}$, на какой бы стороне он ни находился. Ускорение системы будет равно

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{2m_0 + m_1 + m_2 + m_{тр}} g. \qquad (2.2)$$

Если добавочный грузик массой m_2 переложить с левого груза на правый, то общая масса системы останется неизменной. А разность масс станет равной $m_1 + m_2$. Тогда ускорение системы

$$a_2 = \frac{m_1 + m_2}{2m_0 + m_1 + m_2 + m_{тр}} g. \qquad (2.3)$$

Используя выражения (2.2) и (2.3), получим, что отношение ускорений

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (2.4)$$

При выполнении работы задается одно и то же расстояние S и измеряется время прохождения грузами пути S из состояния покоя в первом и втором случаях. Для каждого из случаев $S = \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{a_2 t_2^2}{2}$, откуда

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2. \qquad (2.5)$$

Формулы (2.4) и (2.5) выражают одно и то же отношение ускорений. Формула (2.4) получена как следствие II закона Ньютона, формула(2.5) получена из известного кинематического соотношения. В данной работе проверяется, дают ли эти формулы одинаковые числовые значения с учетом погрешности измерений.

Порядок выполнения измерений

1. Подготовить рабочую тетрадь для записи результатов измерений в виде табл. 2.1.

Таблица 2.1

$S = \ldots$ см, $m_1 = \ldots$ г, $\Delta m_1 = \ldots$ г, $m_2 = \ldots$ г, $\Delta m_2 = \ldots$ г, $\Delta t_{1ин} = \Delta t_{2ин} = \ldots$ с

i	t_{1i}, с	t_{2i}, с
1		
2		
$\vdots$		
10		
$\langle\ \rangle$		

2. Получить у дежурного лаборанта комплект добавочных грузиков.

3. Получить от преподавателя допуск к выполнению работы и указания по значениям S, m_1, m_2.

4. Установить передвижную платформу на заданном расстоянии S от нулевой метки. Записать значение S в рабочую тетрадь.

5. Подобрать из имеющихся в наличии добавочные грузики m_1, m_2. Записать значения их масс в рабочую тетрадь.

6. Определить погрешности $\Delta m_1, \Delta m_2$ как половину единицы разряда последней значащей цифры, указанной на грузиках. В случае, если какой-то из грузиков является наборным, погрешность его массы найти как для результата косвенных измерений. Например, если грузик m_1 набран из N отдельных: $m_1 = m_{11} + m_{12} + \ldots + m_{1N}$, то абсолютная погрешность

$$\Delta m_1 = \sqrt{(\Delta m_{11})^2 + (\Delta m_{12})^2 + \ldots + (\Delta m_{1N})^2},$$

где $\Delta m_{11}, \Delta m_{12}, \ldots \Delta m_{1N}$ определяются как половина единицы разряда последней значащей цифры. Записать полученные значения $\Delta m_1, \Delta m_2$ в рабочую тетрадь.

7. Произвести балансировку установки и компенсацию трения. Для этого:

- с помощью регулировочных винтов у основания машины Атвуда установить ее стойку вертикально; убедиться, что правый груз при движении попадает на передвижную платформу;
- установить левый и правый грузы на одинаковой высоте и убедиться, что они находятся в равновесии;
- слегка толкнув один из грузов, привести систему в движение и понаблюдать за его характером;
- используя легкие (картонные) добавочные грузики, скомпенсировать трение; при этом добиться, чтобы после легкого толчка грузы двигались практически равномерно.

8. Предъявить преподавателю результаты балансировки установки и компенсации трения.

9. Положить на правый груз добавочный грузик m_1, на левый – m_2 ($m_1 > m_2$). С помощью секундомера 10 раз измерить время t_1 прохождения грузами расстояния S. Результаты измерений записать в таблицу 2.1.

10. Переложить добавочный грузик m_2 с левой стороны на правую и 10 раз измерить время движения t_2. Результаты измерений записать в таблицу 2.1.

11. Предъявить результаты измерений преподавателю.

12. Сдать дежурному лаборанту комплект добавочных грузиков.

Обработка результатов измерений

1. Обработать результаты прямых измерений t_1 и t_2 (см. § В.4).

2. Вычислить величину $\langle A\rangle = \left(\dfrac{\langle t_2\rangle}{\langle t_1\rangle}\right)^2$.

3. Найти относительную погрешность $\delta A = 2\sqrt{(\delta t_1)^2 + (\delta t_2)^2}$ и абсолютную погрешность $\Delta A = \langle A\rangle \cdot \delta A$.

4. Вычислить величину $\langle B\rangle = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$.

5. Найти абсолютную погрешность

$$\Delta B = \frac{2}{(m_1 + m_2)^2}\sqrt{(m_2 \Delta m_1)^2 + (m_1 \Delta m_2)^2}$$

и относительную погрешность $\delta B = \dfrac{\Delta B}{\langle B\rangle}$.

6. Записать окончательный результат в виде: $A = \langle A\rangle \pm \Delta A$, $\delta A = \ldots$, $B = \langle B\rangle \pm \Delta B$, $\delta B = \ldots$.

7. Вычислить разность $|\langle A\rangle - \langle B\rangle|$ и сравнить ее с ΔA и ΔB. Сделать выводы.

Указания. Величины A и B, согласно формулам (2.4), (2.5), выражают одно и то же отношение ускорений. В идеальном случае они должны быть равны друг другу. Но из-за погрешности измерений они всегда отличаются. Можно оценить качество измерений по следующим критериям.

а) $|\langle A\rangle - \langle B\rangle| < \{\Delta A, \Delta B\}_{min}$;

б) $\{\Delta A, \Delta B\}_{min} < |\langle A\rangle - \langle B\rangle| < \{\Delta A, \Delta B\}_{max}$;

в) $|\langle A\rangle - \langle B\rangle| > \{\Delta A, \Delta B\}_{max}$, но доверительные интервалы A и B перекрываются;

г) доверительные интервалы A и B вообще не перекрываются.

Здесь $\{\Delta A, \Delta B\}_{\min}$ – минимальная из погрешностей ΔA и ΔB, $\{\Delta A, \Delta B\}_{\max}$ – максимальная из погрешностей ΔA и ΔB.
Определите, к какому случаю относятся результаты ваших измерений.

Контрольные вопросы

1. Что такое система отсчета? Какие системы отсчета называются инерциальными? Сформулируйте I закон Ньютона.
2. Дайте определение понятий **сила, масса**. Сформулируйте II и III законы Ньютона.
3. Какое движение тела называется поступательным? Сформулируйте основной закон динамики поступательного движения.
4. Вывести формулу для ускорения тел, связанных нитью, перекинутой через блок.
5. Опишите лабораторную установку, применяемую в данной работе. Расскажите о порядке выполнения измерений.
6. Какие величины в данной работе вы находили прямыми измерениями, а какие – косвенными?
7. Как вы проводили балансировку установки и компенсацию трения?
8. Расскажите о методе проверки II закона Ньютона, применяемом в данной работе.
9. Изобразите на числовой оси полученные вами доверительные интервалы для A и B. Поясните ваши выводы по работе.

Лабораторная работа № 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы: изучение закономерностей вращательного движения, измерение момента инерции крестовины с грузами.

Оборудование: крестовина с грузами, груз с нитью, линейка, секундомер.

Общие сведения

Вращательным *называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела движутся по окружностям. Центры этих окружностей лежат на одной прямой, называемой* ***осью вращения***.

Угловая скорость $\vec{\omega}$ – *физическая величина, характеризующая быстроту вращения, равная производной от угла поворота по времени:*

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Векторы $\vec{\omega}$ и $\overrightarrow{d\varphi}$ направлены вдоль оси вращения и связаны с направлением вращения правилом правого винта.

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ – *физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости, равная производной от угловой скорости по времени:*

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}' = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Инертность тела при вращательном движении характеризует момент инерции. **Моментом инерции материальной точки** *относительно некоторой оси Z называется физическая величина, равная*

$$J_z = mr^2,$$

где m – масса точки, r – её расстояние от оси.

Момент инерции тела *равен сумме моментов инерции всех материальных точек, образующих тело:*

$$J_z = \sum_{i=1}^{N} J_{zi} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2.$$

Как следует из определения, момент инерции зависит не только от массы, но и от того, как масса распределена относительно оси. Чем дальше части тела от оси, тем больше момент инерции.

Момент инерции любого тела можно вычислить теоретически, но можно определить и экспериментально.

Момент силы $\vec{F}$, перпендикулярной к оси Z, равен $M_z = Fl$, где l – плечо силы (кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси) (рис. 3.1).

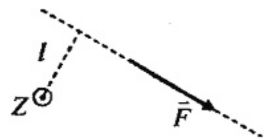


Рис.3.1

Основным законом динамики вращательного движения относительно неподвижной оси вращения Z называется уравнение

$$M_z = J_z\varepsilon,$$

где M_z – результирующий момент сил относительно оси Z.

Основной закон динамики вращательного движения является следствием II закона Ньютона. Поэтому, так же, как и II закон Ньютона, он выполняется в инерциальных системах отсчета.

Описание установки и метода измерения

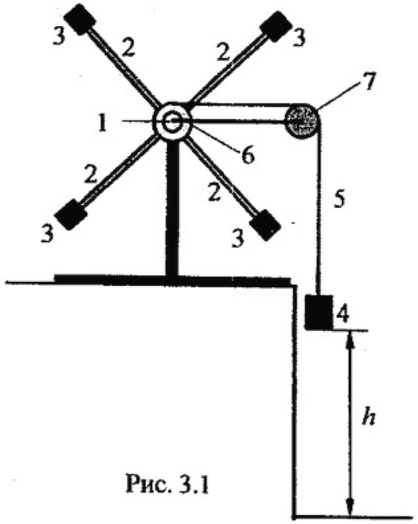


Рис. 3.1

Лабораторная установка состоит из: вала 1, закрепленного в подшипниках; крестовины из четырех стержней 2 с грузами 3; груза 4 с нитью 5. Грузы 3 можно закреплять в разных местах стержней 2. На валу имеется шкив 6, на который наматывается нить 5. Эта же нить перекинута через легкий блок 7. Вся установка помещается на краю стола так, что груз 4 может перемещаться вертикально. Перед выполнением измерений нить 5 наматывается на шкив 6, груз 5 отпускают и он приводит всю крестовину во вращательное движение.

В данной работе измеряется момент инерции той части установки, которая совершает вращательное движение, т.е. крестовины с грузами и валом 1,2,3,6. Грузы 3 можно перемещать, закрепляя в разных точках стержней. При этом необходимо добиваться симметричного расположения грузов, чтобы при ненатянутой нити установка находилась в положении безразличного равновесия. Длина нити 5 должна быть такой, чтобы при опускании груз 4 мог коснуться пола

Измерение производится следующим образом. Нить наматывается на шкив, при этом груз 4 поднимается на исходную высоту h_1 относительно пола. Удерживая крестовину в этом положении, измеряют с помощью линейки высоту h_1. Затем крестовину отпускают и с помощью секундомера измеряют время t движения груза до касания пола. После касания пола крестовина продолжает вращаться по инерции. При этом нить снова наматывается на шкив и груз начинает подниматься. В момент остановки измеряют высоту h_2 максимального подъема груза.

Приведем вывод расчетной формулы, используемой в данной работе.

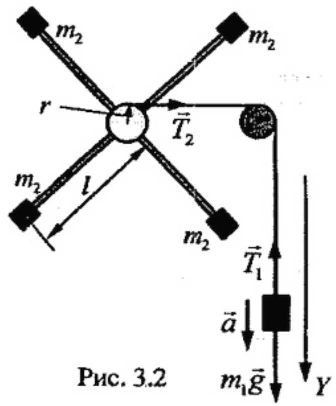


Рис. 3.2

Обозначим: m_1 – масса груза 4, r – радиус шкива 6. На груз действуют (рис.3.2): сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}_1$. Ускорение груза $\vec{a}$ направлено вертикально вниз (и при опускании, и при подъеме). Запишем для груза m_1 II закон Ньютона в проекциях на ось Y:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a,$$

откуда сила натяжения нити

$$T_1 = m_1(g-a). \qquad (3.1)$$

Сила натяжения нити $\vec{T}_2$, создает вращающий момент $M_z = T_2 r$, действующий на крестовину. Трение в подшипниках тормозит вращение. Пусть $M_{\text{тр}}$ – момент силы трения относительно оси вращения. По основному закону динамики вращательного движения при опускании груза

$$T_2 r - M_{\text{тр}} = J\varepsilon, \qquad (3.2)$$

где J – момент инерции крестовины с грузами, ε – ее угловое ускорение.

Если пренебречь массой нити, массой блока 7 и трением в его подшипнике, то можно считать, что сила натяжения нити во всех ее точках одинакова: $T_1 = T_2 = T$. Используя формулы (3.1) и (3.2) получим уравнение

$$m_1(g-a)r - M_{\text{тр}} = J\varepsilon. \qquad (3.3)$$

Предполагая, что нить нерастяжима, можно считать, что ускорения груза и всех точек нити одинаковы. Таким же будет и тангенциальное ускорение крайних точек шкива: $a = a_\tau$. Но тангенциальное ускорение связано с угловым ускорением соотношением $a_\tau = \varepsilon r$. Используя эти соображения, на основе (3.3) получим

$$m_1(g-a)r - M_{\text{тр}} = J\frac{a}{r}. \qquad (3.4)$$

Из уравнения (3.4) следует, что при неизменных параметрах установки m_1, r, J ускорение a будет постоянным, т.е. поступательное движение груза и вращательное движение крестовины будут равноускоренными.

Выразим из (3.4) момент инерции:

$$J = \left(m_1(g-a)r - M_{\text{тр}}\right)\frac{r}{a}. \qquad (3.5)$$

Для определения момента силы трения $M_{\text{тр}}$ рассмотрим движение от начального положения (когда груз на высоте h_1, а крестовина неподвижна) до конечного положения (когда груз на высоте h_2, а крестовина снова неподвижна). Будем отсчитывать потенциальную энергию от уровня пола.

По закону изменения механической энергии

$$m_1gh_1 - m_1gh_2 = A_{\text{тр}} + \frac{m_1v^2}{2}, \tag{3.6}$$

где m_1gh_1, m_1gh_2 – потенциальная энергия груза в начальном и конечном состояниях, соответственно; $A_{\text{тр}}$ – полная работа по преодолению трения, совершенная при опускании и подъеме груза; $\frac{m_1v^2}{2}$ – кинетическая энергия груза непосредственно перед ударом о пол. Здесь мы учли, что кинетическая энергия в начальном и конечном состояниях равна нулю, и что при неупругом ударе о пол кинетическая энергия груза переходит во внутреннюю энергию (т.е. идет на нагрев тел). Из уравнения (3.6) получим, что

$$A_{\text{тр}} = m_1g(h_1 - h_2) - \frac{m_1v^2}{2}. \tag{3.7}$$

Работа по преодолению трения может быть выражена как $A_{\text{тр}} = M_{\text{тр}}\varphi$, где φ – полный угол поворота установки за все время движения. Угол поворота φ можно выразить как $\varphi = \frac{h_1 + h_2}{r}$. Учитывая все это, приведем уравнение (3.7) к виду

$$M_{\text{тр}}\frac{h_1 + h_2}{r} = m_1g(h_1 - h_2) - \frac{m_1v^2}{2},$$

Откуда $M_{\text{тр}} = \frac{m_1r}{h_1 + h_2}\left(g(h_1 - h_2) - \frac{v^2}{2}\right)$. Подставив это выражение в (3.5), после преобразований получим

$$J = \frac{m_1r^2h_2}{h_1 + h_2}\left(\frac{2g}{a} - 1\right)$$

Учитывая то, что в нашей лабораторной установке $a \ll g$, и выражая радиус шкива через диаметр $r = \frac{d}{2}$, получим

$$J \approx \frac{m_1g\,h_2d^2}{2a(h_1 + h_2)} \tag{3.8}$$

Ускорение можно определить, зная время опускания груза. Используя известную из кинематики формулу $h_1 = \frac{at^2}{2}$, выразим ускорение $a = \frac{2h_1}{t^2}$ и подставим его в (3.8):

$$J \approx \frac{m_1g\,h_2d^2t^2}{4h_1(h_1 + h_2)}. \tag{3.9}$$

Таким образом, для определения момента инерции крестовины с грузами необходимо измерить массу груза m_1, диаметр шкива d, время опускания t, начальную высоту h_1 и конечную высоту h_2.

Рассмотрим, как влияет на момент инерции положение передвижных грузов 3 (см. рис. 3.1). Обозначим их массу m_2. Если пренебречь размерами этих грузов и рассматривать их как материальные точки, то момент инерции установки можно представить в виде

$$J = J_0 + 4m_2l^2, \tag{3.10}$$

где J_0 – суммарный момент инерции стержней и вала, l – расстояние между центрами грузов и осью вращения. Из формулы (3.10) следует, что чем меньше l, тем меньше момент инерции. При выполнении работы мы не можем точно измерить l. Поэтому приходится ограничиваться просто оценкой влияния l на момент инерции. Сначала выполняется измерение при наибольшем удалении грузов от оси вращения. Затем грузы смещаются ближе к оси вращения (на расстояние, указанное преподавателем) и снова производится измерение.

Порядок выполнения измерений

1. Подготовить рабочую тетрадь для записи результатов измерений в виде табл. 3.1,3.2.

Таблица 3.1

$d = \ldots$ мм, $\Delta d_{\text{ин}} = \ldots$ мм, $m_1 = \ldots$ г, $\Delta m_1 = \ldots$ г,

$h_1 = \ldots$ см, $\Delta h_{1\text{ин}} = \Delta h_{2\text{ин}} = \ldots$ см, $\Delta t_{\text{ин}} = \ldots$ с

Положение грузов – наиболее удаленное от оси

i	t_i, с	h_{2i}, м
1		
2		
3		
4		
5		
$\langle\ \rangle$		

Таблица 3.2

Грузы ближе к оси на $b = \dots$ см

i	t_i, с	h_{2i}, м
1		
2		
3		
4		
5		
$\langle\ \rangle$		

2. Получить от преподавателя допуск к выполнению работы и указания по значению начальной высоты h_1 и величины b (смещение грузов во втором опыте). Записать h_1 в табл. 3.1, b – в табл. 3.2.

3. Получить у дежурного лаборанта штангенциркуль и ключ для фиксации грузов.

4. Измерить штангенциркулем диаметр шкива d. Погрешность диаметра $\Delta d_{\text{ин}}$ принять равной цене деления нониуса штангенциркуля. Записать d и $\Delta d_{\text{ин}}$ в табл. 3.1.

5. Записать в табл. 3.1 массу груза m_1 и ее погрешность Δm_1 (0,5 единицы разряда последней значащей цифры).

6. Установить передвижные грузы 3 в наиболее удаленном положении от оси вращения и произвести балансировку крестовины с грузами. Для этого:

- ослабить нить; повернуть крестовину так, чтобы два стержня оказались в вертикальном положении; проверить устойчивость равновесия;
- если равновесия нет, то перемещением одного из грузов добиться равновесия;
- повернуть крестовину на 90° и снова добиться положения равновесия;
- повернуть крестовину на 45° и проверить устойчивость равновесия; при необходимости подкорректировать положение грузов.

7. Предъявить преподавателю результаты балансировки.

8. Прикрепить нить к шкиву так, чтобы при размотанной нити груз касался пола.

9. Вращая крестовину, намотать нить на шкив. Когда груз достигнет заданной высоты h_1, остановить крестовину, удерживая ее в этом положении.

10. Отпустив крестовину, измерить время t движения груза до момента касания с полом и максимальную высоту подъема h_2 после касания пола.

11. Повторить пп. 9,10 еще 4 раза. Результаты измерений записать в таблицу 3.1. Вычислить средние значения $\langle t\rangle, \langle h_2\rangle$ и записать их в таблицу.

12. Записать в таблицу 3.1 инструментальные погрешности $\Delta h_{1\text{ин}}, \Delta h_{2\text{ин}}, \Delta t_{\text{ин}}$.

13. Сместить передвижные грузы ближе к оси вращения на расстояние b, произвести балансировку установки и снова выполнить пп. 9 – 11. Результаты записать в таблицу 3.2.

14. Предъявить результаты измерений преподавателю.

15. Сдать дежурному лаборанту штангенциркуль и ключ.

Обработка результатов измерений

1. Обработать результаты прямых измерений времени опускания t и высоты подъема h_2 для каждой серии из 5-ти измерений (см. § В.4).

2. Найти средние значения моментов инерции $\langle J_1\rangle, \langle J_2\rangle$ по формуле (3.9). Перед вычислениями перевести единицы измерения всех величин в систему СИ.

3. Рассчитать относительные погрешности моментов инерции $\delta J_1, \delta J_2$ по формуле

$$\delta J = \sqrt{(\delta m_1)^2 + (\delta g)^2 + (2\delta d)^2 + (2\delta t)^2 + \left(\frac{2\langle h_1\rangle + \langle h_2\rangle}{\langle h_1\rangle + \langle h_2\rangle}\cdot \delta h_1\right)^2 + \left(\frac{\langle h_1\rangle}{\langle h_1\rangle + \langle h_2\rangle}\cdot \delta h_2\right)^2}$$

При расчете малыми погрешностями можно пренебречь.

4. Вычислить абсолютные погрешности $\Delta J_1, \Delta J_2$, используя формулу $\Delta J = \langle J\rangle \cdot \delta J$

5. Записать окончательный результат в виде: $J_1 = \left(\langle J_1\rangle \pm \Delta J_1\right)$ кг $\cdot$ м^2, $\delta J_1 = \dots$, $J_2 = \left(\langle J_2\rangle \pm \Delta J_2\right)$ кг $\cdot$ м^2, $\delta J_2 = \dots$.

6. Сравнить полученные значения моментов инерции. Сделать выводы по результатам работы.

Контрольные вопросы

1. Какое движение называется вращательным? Какие части лабораторной установки совершают поступательное движение, какие – вращательное?

2. Что является мерой инертности при поступательном движении, при вращательном движении?

3. Что такое момент инерции материальной точки, тела? В каких единицах измеряется момент инерции в системах СИ, СГС?

4. Момент инерции какого именно тела определяется в данной работе. Как зависит момент инерции от положения грузов?

5. Как можно рассчитать вклад в момент инерции, определяемый в данной работе, который дают вал, стержни, передвижные грузы?

6. Дайте определение углового ускорения, момента силы. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения относительно неподвижной оси.

7. Укажите силы, действующие на тела в данной лабораторной установке. Какие упрощения можно использовать при выводе расчетной формулы?

8. Проведите анализ процессов превращения энергии, происходящих при выполнении данной работы.

9. Вывести расчетную формулу (3.9).

10.Вывести формулу для относительной погрешности момента инерции. Какими из слагаемых в этой формуле при вычислениях можно пренебречь?

11. Объясните, почему при выполнении работы необходимо производить балансировку установки. Как вы ее производили? Каков был бы характер движения при несбалансированной установке?

12. Расскажите о составе лабораторной установки и порядке выполнения измерений.

13. Какие величины в данной работе вы находили прямыми измерениями, а какие – косвенными?

14. По результатам ваших измерений оцените, какая часть механической энергии теряется при движении от начального положения (когда груз на высоте h_1) до конечного положения (груз на высоте h_2).

Лабораторная работа № 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы: а) усвоить понятие момента инерции тела и теорему Штейнера, б) определить момент инерции тела сложной формы методом крутильных колебаний.

Оборудование: тело, подвешенное на металлической проволоке; два груза одинаковой массы; штангенциркуль.

Общие сведения

Ознакомьтесь с общими сведениями из описания Л.р.№ 3.

Абсолютно твердым телом называют недеформируемое тело, т.е. *тело, расстояние между любыми двумя точками которого не изменяется.*

Момент инерции тела относительно некоторой оси Z равен сумме моментов инерции всех его точек:

$$J_z = \sum_{i=1}^{N} J_{zi} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2, \qquad (4.1)$$

где J_z – момент инерции тела, $J_{zi} = m_i r_i^2$ – момент инерции i–той точки, m_i – масса точки, r_i – расстояние от i–той точки до оси Z.

Момент инерции сплошного тела можно вычислить, мысленно разбив его на элементарно малые объемы dV, масса каждого из которых равна $dm = \rho dV$, где ρ – плотность материала, из которого изготовлено тело.

Переходя от суммирования к интегрированию, получим

$$J_z = \int_m dm\, r^2 = \int_V \rho dV\, r^2 \qquad (4.2)$$

Интегрирование производится по всему объему тела.

Для момента инерции однородного сплошного цилиндра (диска) массой m и радиусом R относительно его оси симметрии получается выражение

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2. \qquad (4.3)$$

В некоторых случаях вычисление момента инерции упрощается, если использовать **теорему Штейнера**: *момент инерции тела относительно некоторой оси Z равен сумме момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела C и параллельной оси Z, и произведения массы тела на квадрат расстояния a между осями, т.е.*

$$J_z = J_c + ma^2. \qquad (4.4)$$

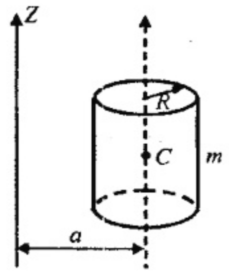


Рис.4.1

Например, для однородного сплошного цилиндра, если ось Z параллельна его оси симметрии (рис. 4.1),

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2 + ma^2. \qquad (4.5)$$

Если тело имеет сложную форму (маховое колесо, коленчатый вал и др.), то рассчитать его момент инерции затруднительно. В таких случаях момент инерции определяют опытным путем. В данной работе для измерения момента инерции используется метод крутильных колебаний.

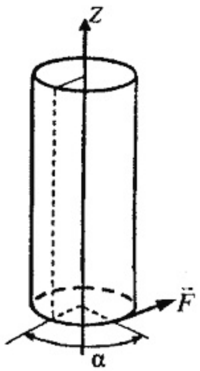


Рис.4.2

Крутильными *называют колебания, сопровождающиеся упругими деформациями кручения.* Поясним это на следующем примере. Возьмем упругую проволоку, закрепим ее верхний конец, а к нижнему приложим силу $\vec{F}$, стремящуюся закрутить проволоку вокруг ее оси Z (рис. 4.2). Произойдет закручивание проволоки: каждый радиус нижнего основания повернется на угол α относительно первоначального положения. При этом в нижнем основании возникнет момент упругих сил кручения, для которого будет справедливым выражение

$$M_{\text{упр. } z} = -C\alpha, \qquad (4.6)$$

которое иногда называют законом Гука для деформации кручения. Здесь: C – постоянная для данной проволоки величина, называемая крутильной жесткостью; α – угол закручивания; Z – ось, проведенная в направлении оси проволоки; положительное направление оси Z связано с направлением закручивания правилом правого винта. Знак "–" указывает на то, что возникающий момент сил упругости противоположен направлению оси Z.

Если к проволоке прикрепить достаточно тяжелое тело, то можно будет наблюдать крутильные колебания. Для этого нужно закрутить тело вместе с проволокой на некоторый угол и отпустить. Найдем выражение для периода таких крутильных колебаний.

При колебаниях все точки тела будут двигаться по дугам окружностей. Поэтому нужно использовать основное уравнение динамики вращательного движения (3.5)

$$M_{\text{упр. } z} = J\varepsilon.$$

Используя (4.5), (3.1) и (3.2), получим $-C\alpha = J\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$, откуда

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{C}{J}\alpha = 0. \qquad (4.7)$$

Полученное уравнение (4.6) по виду совпадает с дифференциальным уравнением гармонического осциллятора (10.2). Следовательно, крутильные колебания будут гармоническими, а их циклическая частота и период, соответственно, равны

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{J}}, \; T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}. \qquad (4.8)$$

Следует отметить, что эти выводы будут справедливыми, если деформации кручения остаются упругими, т.е. работает закон Гука (4.6). Обычно это наблюдается при не слишком больших углах закручивания.

Описание установки и метода измерений

Лабораторная установка (рис. 4.3) состоит из: штатива 1, закрепленной в нем упругой проволоки 2 и подвешенного к нижнему концу проволоки диска 3, момент инерции которого и определяется в данной работе. На диске имеется 2 установочных штифта 4, на которые можно надеть дополнительные грузы в виде цилиндров 5.

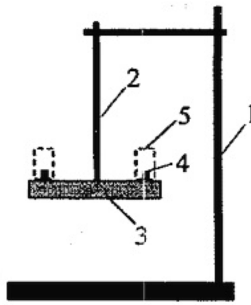


Рис. 4.3

Цель работы – измерить момент инерции диска 3. Для этого нужно измерить период крутильных колебаний и, используя формулу (4.8), рассчитать момент инерции.

Но нам неизвестна крутильная жесткость проволоки C. Поэтому измерение периода колебаний производится дважды. Сначала измеряется период T_1 без добавочных грузов, а затем – с добавочными грузами T_2.

Добавочные грузы представляют собой одинаковые сплошные цилиндры диаметра d и массы m каждый, устанавливаемые симметрично на одинаковом расстоянии a от оси проволоки (рис. 4.4). Установка добавочных цилиндров приводит к увеличению общего момента инерции (см. формулу (4.5)) на величину

$$2\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + ma^2\right) = m\left(\frac{d^2}{4} + 2a^2\right)$$

и, соответственно, к увеличению периода колебаний. Используя (4.8), можно составить систему уравнений

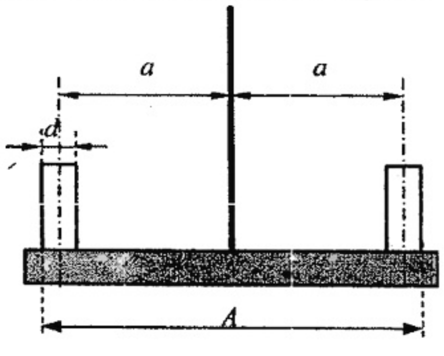


Рис. 4.4

$$\begin{cases} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{C}} \\ T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J + m(2a^2 + \frac{d^2}{4})}{C}} \end{cases}.$$

Исключив C и решив относительно J, получим

$$J = \frac{m(8a^2 + d^2)T_1^2}{4\left(T_2^2 - T_1^2\right)}. \qquad (4.9)$$

Для уменьшения погрешности в работе производится измерение времени не одного колебания, а нескольких: $t = NT$, где N – число колебаний. Поэтому (используя (4.9)) окончательно расчетную формулу можно записать в виде

$$J = \frac{m(8a^2 + d^2)t_1^2}{4\left(t_2^2 - t_1^2\right)}. \qquad (4.10)$$

Порядок выполнения измерений

1. Подготовить рабочую тетрадь для записи результатов измерений в виде табл. 4.1.

Таблица 4.1

$N = \ldots$; $m = \ldots$ г; $\Delta m = \ldots$ г; $d = \ldots$ мм; $\Delta d_{\text{ин}} = \ldots$ мм;

$a = \ldots$ мм; $\Delta a_{\text{ин}} = \ldots$ мм; $\Delta t_{1\text{ин}} = \Delta t_{2\text{ин}} = \ldots$ с

i	t_{1i}, с	t_{2i}, с
1		
2		
3		
4		
5		
$\langle\ \rangle$		

2. Получить допуск от преподавателя к выполнению работы и указания по числу колебаний N, время которых вы должны измерить. Записать значение N в таблицу.

3. Получить у дежурного лаборанта добавочные грузы и штангенциркуль. Записать значение массы m (она указана на грузах) и погрешности Δm (0,5 единицы разряда последней значащей цифры).

4. Штангенциркулем измерить диаметр цилиндров (добавочных грузов) d. Определить расстояние a между осью цилиндра и осью проволоки (см. рис.4.4). Для этого: установить на диск 3 добавочные цилиндры 5 и измерить штангенциркулем расстояние A между крайними точками цилиндров; рассчитать a по формуле $a = \dfrac{A-d}{2}$. Инструментальную погрешность $\Delta a_{\text{ин}}$ можно приближенно считать равной $\Delta a_{\text{ин}} \approx \Delta d_{\text{ин}} = \Delta A_{\text{ин}}$. Записать значения d, a, а также абсолютные погрешности $\Delta d_{\text{ин}}, \Delta a_{\text{ин}}$ в рабочую тетрадь.

5. Снять с диска добавочные цилиндры. Привести диск в состояние крутильных колебаний и 5 раз измерить секундомером время N полных колебаний. Результаты измерения t_1 записать в таблицу 4.1.

6. Установить на диск добавочные цилиндры. Провести 5 раз измерение времени t_2, за которое диск совершит N колебаний. Результаты также записать в таблицу 4.1.

7. Вычислить средние значения $\langle t_1\rangle, \langle t_2\rangle$ и записать их в таблицу.

8. Предъявить результаты измерений преподавателю.

9. Сдать дежурному лаборанту добавочные грузы и штангенциркуль.

Обработка результатов измерений

1. Обработать результаты прямых измерений t_1 и t_2 (см. § В.4).

2. Вычислить среднее значение момента инерции $\langle J\rangle$ по формуле (4.10), используя средние значения $\langle t_1\rangle, \langle t_2\rangle$. Перед вычислениями перевести единицы измерения всех величин в систему СИ.

3. Вычислить относительную погрешность момента инерции по формуле:

$$\delta J = \sqrt{(\delta m)^2 + \left(\frac{2d^2}{8a^2 + d^2}\delta d\right)^2 + \left(\frac{16a^2}{8a^2 + d^2}\delta a\right)^2 + \left(\frac{2\langle t_1\rangle^2}{\langle t_1\rangle^2 - \langle t\rangle^2}(\delta t_1 + \delta t_2)\right)^2}.$$

Малыми слагаемыми в этой формуле можно пренебречь.

4. Вычислить абсолютную погрешность ΔJ, используя формулу $\Delta J = \langle J\rangle \cdot \delta J$.

5. Записать окончательный результат в виде: $J = \left(\langle J\rangle \pm \Delta J\right)$ кг·м^2. $\delta J = \ldots$

6. Сделать выводы по результатам работы.

Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции тела, каков его физический смысл? В каких единицах он измеряется? Как вычисляется момент инерции тела?

2. Сформулируйте теорему Штейнера. Приведите пример ее применения.

3. Момент инерции какого именно тела определяется в данной работе? Как влияет на момент инерции установка добавочных цилиндров?

4. Что такое деформация кручения? Запишите закон Гука для деформации кручения.

5. Что такое крутильные колебания? В каком случае эти колебания будут гармоническими? Вывести формулу для периода крутильных колебаний.

6. Опишите лабораторную установку. Объясните порядок проведения измерений.

7. Вывести расчетную формулу, по которой производится вычисление момента инерции.

8. Какие величины в данной работе вы находили прямыми измерениями, а какие – косвенными? Погрешностями измерения каких величин можно пренебречь при вычислении погрешности δJ?

9. Оцените массу диска, используя значение момента инерции, которое вы получили.

Лабораторная работа № 10

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКОВ

Цель работы: измерить ускорение свободного падения с помощью математического и физического маятников.

Оборудование: математический маятник, оборотный физический маятник, линейка и секундомер.

Общие сведения

Гармоническими колебаниями *называются колебания, описываемые гармонической функцией (т.е. функцией вида* $\sin\varphi$ *или* $\cos\varphi$). Запишем гармонически изменяющуюся величину $f(t)$ в виде

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (10.1)$$

где A – амплитуда колебаний, $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебаний, φ_0 – начальная фаза колебаний, ω – циклическая частота колебаний, связанная с периодом колебаний T соотношением $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Гармоническим осциллятором *называется любая физическая система, совершающая гармонические колебания.* Состояние гармонического осциллятора описывается уравнением

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0, \qquad (10.2)$$

которое называют **дифференциальным уравнением гармонического осциллятора.** В справедливости этого уравнения можно убедиться, если подставить в него f в виде (10.1).

Физический и математический маятники при малых амплитудах колебаний являются примерами гармонического осциллятора.

Физическим маятником *называется твердое тело, способное под действием силы тяжести совершать колебания относительно горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести (центр масс) тела (рис.10.1). Ось, относительно которой происходят колебания, называют* ***осью колебаний.***

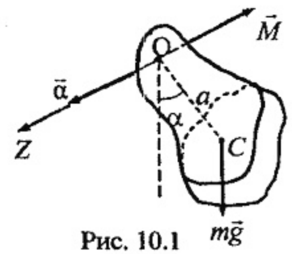


Рис. 10.1

Получим выражение для периода колебаний физического маятника.

При колебаниях все точки маятника движутся по дугам окружностей. Поэтому для описания движения маятника необходимо использовать основной закон динамики вращательного движения относительно неподвижной оси: $M_z = J_z\,\varepsilon$ (см. общие сведения из

Л.р.№ 3). При отклонении маятника на угол α от положения равновесия возникает возвращающий момент силы тяжести, поэтому закон движения примет вид

$$-mga\sin\alpha = J_z \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

где m – масса маятника; a – расстояние между осью колебаний Z и центром тяжести C маятника; α – угол отклонения маятника от положения равновесия; J_z – момент инерции маятника относительно оси колебаний.

При малых углах отклонения $\sin\alpha \approx \alpha$, поэтому

$$-mga\alpha = J_z \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \text{ или } \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mga}{J_z}\alpha = 0.$$

Мы получили уравнение, по виду совпадающее с дифференциальным уравнением гармонического осциллятора. Следовательно, малые колебания физического маятника будут гармоническими с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{J_z}}.$$

Соответственно, период колебаний физического маятника равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mga}}. \qquad (10.3)$$

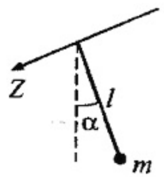


Рис. 10.2

Математический маятник – *материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити (рис. 10.2).* Его можно рассматривать как частный случай физического маятника, для которого $a = l$, $J_z = ml^2$. Тогда период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (10.4)$$

Колебания маятника будут гармоническими только при малых углах отклонения α (когда справедливо приближение $\sin\alpha \approx \alpha$).

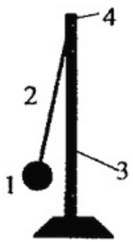


Рис. 10.3

Задание I

Описание установки и метода измерений

Хорошим приближением к математическому маятнику является тяжелый грузик 1, подвешенный на достаточно длинной нити 2 (рис. 10.3). Маятник закреплен на штативе 3. Наматывая нить на ось 4, можно изменять

длину маятника.

Из формулы (10.4) можно выразить g:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}, \qquad (10.5)$$

где l – расстояние от точки подвеса до центра тяжести груза маятника. Таким образом, чтобы определить ускорение свободного падения, необходимо измерить расстояние l и период колебаний T.

Так как точно определить положение центра тяжести мы не можем, измерения проводят при двух значениях длины маятника l_1 и l_2. Соответственно, периоды колебаний будут равны:

$$\begin{cases} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g}}, \\ T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_2}{g}} \end{cases} \qquad (10.6)$$

Решив систему уравнений (10.6) относительно g, получим

$$g = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}. \qquad (10.7)$$

В соответствии с этой формулой, для определения ускорения свободного падения, необходимо измерить периоды колебаний и разность $(l_1 - l_2)$ длин двух математических маятников. Очевидно, что разность длин маятников можно определять по смещению любой точки маятника (например, по нижней точке груза, см рис. 10.4):

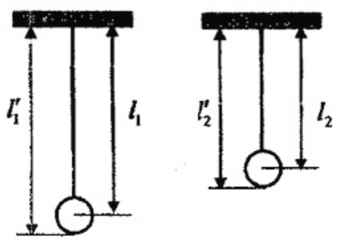


Рис. 10.4

$$l_1 - l_2 = l_1' - l_2'. \qquad (10.8)$$

Для повышения точности в работе производится измерение времени не одного колебания (периода), а нескольких: $t = NT$. Выразив период $T = \frac{t}{N}$ и подставив в (10.7), получим (с учетом (10.8)) расчетную формулу

$$g = \frac{4\pi^2 N^2 (l_1' - l_2')}{t_1^2 - t_2^2}. \qquad (10.9)$$

Порядок выполнения измерений (I задание)

1. Подготовить рабочую тетрадь для записи результатов измерений в виде табл. 10.1.

Таблица 10.1

$N = \ldots;\ l_1' = \ldots$ мм; $l_2' = \ldots$ мм; $\Delta l_{1\text{ин}}' = \Delta l_{2\text{ин}}' = \Delta l_{\text{ин}} = \ldots$мм; $\Delta t_{\text{ин}} = \ldots$ с

i	t_{1i}, с	t_{2i}, с
1		
2		
3		
4		
5		
$\langle\ \rangle$		

2. Получить от преподавателя допуск к выполнению работы и указания по числу колебаний N, время которых вы должны измерить. Записать значение N.
3. Установить наибольшую возможную длину математического маятника.
4. Измерить расстояние l_1' от точки подвеса до нижней точки поверхности груза маятника с помощью угольника и линейки. Записать результат и его инструментальную погрешность.
5. Отклонить маятник на небольшой угол от положения равновесия ($\sim 10° \div 20°$) и, отпустив его, измерить время N колебаний. Результат записать в таблицу 10.1.
6. Повторить п.5 еще 4 раза.
7. Установить длину l_2' примерно на 10-15 см короче, чем l_1'.
8. Повторить пп. 4 – 6 для новой длины маятника.
9. Предъявить результаты измерений преподавателю.

Обработка результатов измерений (I задание)

1. Обработать результаты прямых измерений t_1 и t_2 (см. § В.4).
2. Вычислить среднее значение $\langle g \rangle$ по формуле (10.9), используя средние значения $\langle t_1 \rangle, \langle t_2 \rangle$. Перед вычислениями перевести единицы измерения всех величин в систему СИ.
3. Рассчитать относительную погрешность

$$\delta g = \sqrt{(2\delta\pi)^2 + \frac{(\Delta l_1')^2 + (\Delta l_2')^2}{(l_1' - l_2')^2} + \frac{4\left(\langle t_1 \rangle \Delta t_1 + \langle t_2 \rangle \Delta t_2\right)^2}{\left(\langle t_1 \rangle^2 - \langle t_2 \rangle^2\right)^2}}.$$

Малыми слагаемыми в этой формуле можно пренебречь.

4. Рассчитать абсолютную погрешность $\Delta g = \delta g \cdot \langle g \rangle$.
5. Записать окончательный результат в виде $g = (\langle g \rangle \pm \Delta g)$ м/с^2, $\delta g = \ldots$.

6. Сравнить полученное значение с известным значением ускорения свободного падения и сделать выводы.

Задание II

Описание установки и метода измерений

Выше мы получили выражение для периода колебаний физического маятника в виде (10.3). По теореме Штейнера (4.4) момент инерции

$$J_z = J_C + ma^2.$$

Тогда период колебаний физического маятника выразится как

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_C + ma^2}{mga}}. \qquad (10.10)$$

График зависимости $T(a)$ показан на рис.10.5. Видно, что каждому значению периода соответствует два значения a. Это свойство физического маятника используется при выполнении данного задания.

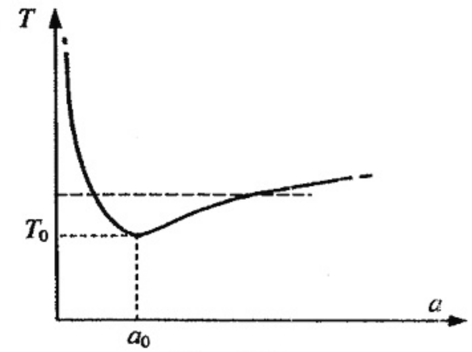


Рис. 10.5

Исследуемый физический маятник имеет две опорные пластины (рис. 10.6). Маятник подвешивается на тот же штатив, который используется в I задании. Центр тяжести маятника C находится в промежутке между опорными пластинами. Расположение опорных пластин подобрано таким образом, что при подвешивании на каждую из них периоды колебаний маятника одинаковы. Такой маятник называется **оборотным.**

Получим расчетную формулу. Обозначим: a_1, a_2 – расстояния от центра тяжести до опорных пластин (см. рис. 10.6); J_C – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс C. Используя формулу (10.10), можно записать систему уравнений

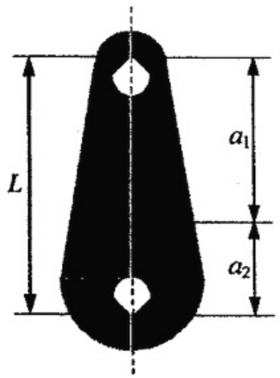


Рис. 10.6

$$\begin{cases} T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_C + ma_1^2}{mga_1}} \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_C + ma_2^2}{mga_2}} \end{cases}. \tag{10.11}$$

Решив ее относительно g, получим

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}, \tag{10.12}$$

где $L = a_1 + a_2$ – расстояние между опорными пластинами.

Таким образом, чтобы определить ускорение свободного падения надо измерить расстояние между опорами оборотного маятника и период его колебаний.

Для повышения точности в работе измеряется время t, за которое маятник совершает N колебаний, а период рассчитывается как $T = \dfrac{t}{N}$.

Порядок выполнения измерений (II задание)

1. Подготовить рабочую тетрадь для записи результатов измерений в виде табл. 10.2.

Таблица 10.2

$N = \ldots$; $L = \ldots$мм; $\Delta L_{ин} = \ldots$мм; $\Delta t_{1ин} = \Delta t_{2ин} = \ldots$ с

i	t_{1i}, с	t_{2i}, с
1		
2		
3		
4		
5		
$\langle\ \rangle$		

2. Измерить расстояние L между опорными пластинами физического маятника. Записать значение L, а также инструментальной погрешности $\Delta L_{ин}$.

3. Подвесить маятник на одну из опорных пластин. Пять раз измерить время t_1, за которое маятник совершает N колебаний. Первоначальный угол отклонения задавать небольшим ($\sim 10° \div 20°$).

4. Подвесить маятник на вторую опорную пластину. Снова пять раз измерить время t_2 совершения N колебаний.

5. Все результаты записать в таблицу 10.2. Предъявить результаты измерений преподавателю.

Обработка результатов измерений (II задание)

1. Обработать результаты прямых измерений t_1 и t_2 (см. § В.4).
2. Найти средние значения периодов колебаний $\langle T_1\rangle = \dfrac{\langle t_1\rangle}{N}$, $\langle T_2\rangle = \dfrac{\langle t_2\rangle}{N}$ и абсолютные погрешности $\Delta T_1 = \langle T_1\rangle \delta t_1$, $\Delta T_2 = \langle T_2\rangle \delta t_2$.
3. Для оборотного маятника периоды колебаний должны быть одинаковы. Но, вследствие неточного подбора расположения опорных пластин и погрешности измерений, получаемые значения $\langle T_1\rangle$ и $\langle T_2\rangle$ всегда неодинаковы. Результаты измерений можно считать удовлетворительными, если доверительные интервалы для T_1 и T_2 перекрываются. В качестве среднего значения периода колебаний оборотного маятника следует принять $\langle T\rangle = \dfrac{\langle T_1\rangle + \langle T_2\rangle}{2}$.
4. Найти абсолютную погрешность $\Delta T = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\Delta T_1)^2 + (\Delta T_2)^2}$, и относительную $\delta T = \dfrac{\Delta T}{\langle T\rangle}$.
5. Найти среднее значение $\langle g\rangle$, используя формулу (10.12). Перед вычислением перевести единицы измерения в систему СИ.
6. Найти относительную погрешность по формуле
$$\delta g = \sqrt{(2\delta\pi)^2 + (\delta L)^2 + (2\delta T)^2}.$$

Малыми слагаемыми в этой формуле можно пренебречь.

7. Используя полученные значения $\langle g\rangle$ и δg вычислить абсолютную погрешность Δg.
8. Записать окончательный результат в виде $g = (\langle g\rangle \pm \Delta g)$ м/с^2, $\delta g = \ldots$.
9. Сделать выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называют гармоническими? Изобразите графически гармоническое колебание. Что такое амплитуда, период, частота, фаза, циклическая частота колебаний?

2. Что такое гармонический осциллятор? Запишите дифференциальное уравнение гармонического осциллятора.

3. Что такое физический маятник? Вывести выражение для периода малых колебаний физического маятника.

4. Что такое математический маятник? Объясните, как из формулы периода колебаний физического маятника получить формулу для периода колебаний математического маятника.

5. Рассказать о методе измерения ускорения свободного падения с помощью математического маятника (I задание) и вывести расчетную формулу.

6. Поясните физический смысл графика зависимости $T(a)$, приведенного на рис. 10.5. Какой маятник называют оборотным?

7. Вывести расчетную формулу для определения ускорения свободного падения с помощью оборотного физического маятника.

Лабораторная работа №12

ИЗУЧЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

Цель работы: изучить затухающие колебания на примере крутильного маятника.

Оборудование: крутильный маятник, секундомер.

Общие сведения

Свободными колебаниями называют такие колебания, *которые совершаются в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из состояния равновесия.*

В реальных условиях при механических колебаниях действуют силы сопротивления среды и силы трения в самой системе. На работу против этих сил затрачивается механическая энергия колеблющегося тела, поэтому амплитуда его колебаний уменьшается. *Колебания, происходящие с уменьшением амплитуды, называют* **затухающими колебаниями**.

Во многих случаях затухание свободных колебаний обусловлено действием вязкой среды. Силы сопротивления, возникающие при этом, пропорциональны быстроте изменения положения тела. Колебания тела в вязкой среде описываются уравнением, которое в общем случае имеет вид

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\beta \frac{df}{dt} + \omega_0^2 f = 0. \qquad (12.1)$$

Это уравнение называют **дифференциальным уравнением затухающих колебаний в вязкой среде**.

В уравнении (12.1): f – величина, характеризующая положение тела (обычно, линейная или угловая координата); β – коэффициент затухания; ω_0 – циклическая частота, с которой совершались бы свободные колебания системы при отсутствии сопротивления среды, т.е. при $\beta = 0$.

Коэффициент затухания β – величина положительная. Он характеризует быстроту затухания колебаний в системе. Чем больше β, тем быстрее происходит уменьшение амплитуды колебаний. Если выполняется условие $\beta < \omega_0$, то решение уравнения (12.1) имеет вид

$$f = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (12.2)$$

где $e = 2,7183\ldots$ – основание натурального логарифма, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний.

Множитель

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \qquad (12.3)$$

входящий в выражение (12.2), называют **амплитудой затухающих колебаний**. Величина A_0 равна амплитуде затухающих колебаний в начальный момент времени, т.е., при $t = 0$.

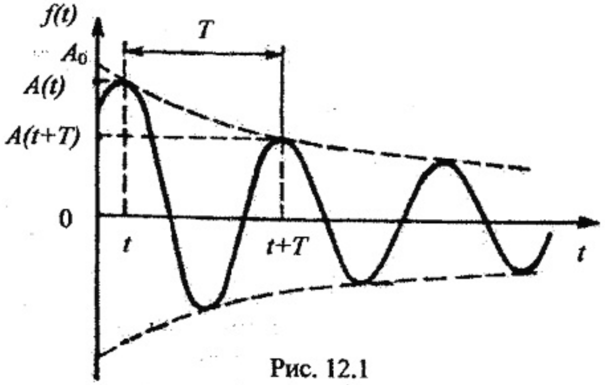


Рис. 12.1

График затухающих колебаний, построенный в соответствии с формулой (12.2), показан на рис. 12.1.

Строго говоря, затухающие колебания не являются периодическими, т.к. амплитуда колебаний уменьшается с течением времени. Но для их описания вводится понятие **периода затухающих колебаний** (см. рис.12.1)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (12.4)$$

Одной из характеристик затухающего колебания является **время релаксации** τ – *время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в* e *раз*. Подставив в выражение амплитуды затухающих колебаний (12.3) значение $A(t) = \frac{A_0}{e}$, получим связь коэффициента затухания и времени релаксации:

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \qquad (12.5)$$

За время релаксации энергия колебаний, пропорциональная квадрату амплитуды, уменьшается в $e^2 \approx 7{,}4$ раза. За время, составляющее несколько τ, колебания практически прекращаются. Так, например, за время 7τ амплитуда уменьшается примерно в 10^3 раз, а энергия – в 10^6 раз.

Число колебаний N_e, совершаемых за время релаксации, очевидно можно найти как

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}. \qquad (12.6)$$

Описание установки и метода измерений

Исследуемый крутильный маятник (рис.12.2) состоит из горизонтального металлического стержня 1, подвешенного на упругой проволоке 2. Проволока натянута вертикально между зажимами штатива 3. На

стержне закреплена стрелка 4, с помощью которой по шкале 5 можно определять положение крутильного маятника. Грузы 6, закрепленные на концах стержня, предназначены для увеличения момента инерции маятника.

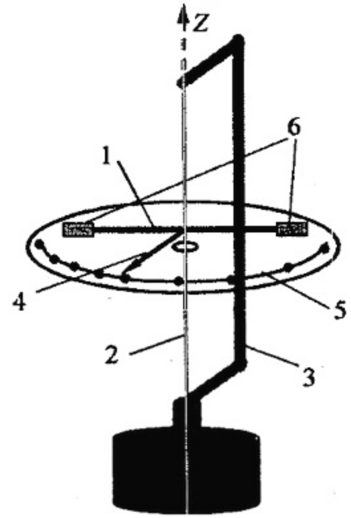


Рис. 12.2

Если повернуть стержень вокруг оси проволоки Z и затем отпустить, то он начнет совершать затухающие колебания. С помощью стрелки 4 и шкалы 5 можно наблюдать, как уменьшается амплитуда колебаний с течением времени.

Покажем, что движение крутильного маятника описывается уравнением вида (12.1). По основному закону динамики вращательного движения

$$M_z = J_z \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \qquad (12.7)$$

где M_z – проекция момента сил, действующих на маятник, на ось колебаний Z; J_z – момент инерции маятника относительно оси колебаний; α – угол отклонения маятника от положения равновесия.

При крутильных колебаниях возвращающий момент силы пропорционален углу отклонения (закручивания):

$$M_{\text{упр.}\,z} = -C\alpha, \qquad (12.8)$$

где C – крутильная жесткость.

Затухание колебаний в данном случае обусловлено, в основном, действием силы сопротивления воздуха (вязкой среды). Как показывает опыт, величина момента силы сопротивления пропорциональна угловой скорости:

$$M_{cz} = -r\frac{d\alpha}{dt}, \qquad (12.9)$$

где r – коэффициент сопротивления, зависящий от формы и размеров маятника, а также от вязкости воздуха. Знак "–" отражает то, что силы сопротивления, действующие на части маятника, направлены противоположно скоростям этих частей.

Подставив (12.8) и (12.9) в (12.7) получим

$$-C\alpha - r\frac{d\alpha}{dt} = J_z \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

или, после преобразований,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{r}{J_z}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{C}{J_z}\alpha = 0. \qquad (12.10)$$

Полученное уравнение по виду совпадает с дифференциальным уравнением затухающих колебаний в вязкой среде. Следовательно, колебания маятника будут затухающими, т.е. зависимость угла отклонения от времени будет иметь вид

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (12.11)$$

Коэффициент затухания будет равен

$$\beta = \frac{r}{2J_z}, \qquad (12.12)$$

а циклическая частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{J_z} - \frac{r^2}{4J_z^2}}. \qquad (12.13)$$

В данной работе производится измерение периода затухающих колебаний T, коэффициента затухания β, времени релаксации τ и числа колебаний за время релаксации N_e.

Для измерения периода маятник отклоняется на угол α_0, отпускается и измеряется время t_N, за которое маятник совершает некоторое число колебаний N (обычно, 10 – 20). Период рассчитывается как $T = \frac{t_N}{N}$.

Для измерения коэффициента затухания, маятник снова отклоняется на некоторый угол α_0, отпускается и измеряется амплитуда колебаний α_N в момент окончания N – го колебания. Используя (12.3), можно записать $\alpha_N = \alpha_0 e^{-\beta t_N}$, или $e^{\beta t_N} = \frac{\alpha_0}{\alpha_N}$. Прологарифмировав обе части равенства и выразив β, получим

$$\beta = \frac{1}{t_N} \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_N}. \qquad (12.14)$$

После расчета β, по формулам (12.5) и (12.6) вычисляются время релаксации τ и число колебаний N_e за время релаксации.

Измерение угла отклонения α производится в делениях равномерной круговой шкалы, вдоль которой движется конец указателя положения маятника.

<u>Порядок выполнения измерений</u>

1. Подготовить рабочую тетрадь для записи результатов измерений в виде табл. 12.1, 12.2.

Табл.12.1

$N = \ldots, \quad \Delta t_{N\text{ин}} = \ldots$

i	α_0, дел.	t_N, с
1		
2		
3		
4		
5		

Табл. 12.2

$N = \ldots, \quad \alpha_0 = \ldots, \quad \Delta\alpha_{0\text{ин}} = \Delta\alpha_{N\text{ин}} = 0{,}5$ дел.

i	1	2	3	4	5	$\langle\,\rangle$
α_N, дел.						

2. Получить от преподавателя допуск к выполнению работы и указания по значению числа колебаний N.
3. Измерить время N колебаний при пяти различных значениях начального угла отклонения α_0 (в пределах 30° – 60°). Результаты записать в таблицу 12.1.
4. Задавая один и тот же начальный угол отклонения $\alpha_0 \approx 45°$, пять раз измерить амплитуду α_N в момент окончания N – го колебания. Результаты записать в табл. 12.2.
5. Предъявить результаты измерений преподавателю.

<u>Обработка результатов измерений</u>

1. Обработать результаты прямых измерений времени t_N (см. § В.4).
2. Найти среднее значение периода затухающих колебаний $\langle T \rangle = \frac{\langle t_N \rangle}{N}$ и абсолютную погрешность $\Delta T = \langle T \rangle \cdot \delta t_N$.
3. Обработать результаты прямых измерений амплитуды α_N.
4. Найти среднее значение коэффициента затухания $\langle \beta \rangle$ по формуле (12.14), используя средние значения $\langle t_N \rangle, \langle \alpha_N \rangle$.
5. Вычислить абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta\beta = \frac{1}{\langle t_N \rangle} \sqrt{\left(\delta T \cdot \ln \frac{\alpha_0}{\langle \alpha_N \rangle}\right)^2 + (\delta\alpha_0)^2 + (\delta\alpha_N)^2}.$$

6. Вычислить среднее значение времени релаксации $\langle\tau\rangle = \dfrac{1}{\langle\beta\rangle}$ и абсолютную погрешность $\Delta\tau = \langle\tau\rangle \cdot \delta\beta$.

7. Вычислить среднее значение числа колебаний за время релаксации $\langle N_e \rangle = \dfrac{1}{\langle\beta\rangle\langle T\rangle}$; вычислить относительную погрешность $\delta N_e = \sqrt{(\delta\beta)^2 + (\delta T)^2}$, а затем абсолютную погрешность $\Delta N_e = \langle N_e \rangle \cdot \delta N_e$.

8. Записать окончательный результат в виде

$$T = \langle T \rangle \pm \Delta T,\ \text{с} \quad \delta T = \ldots$$

$$\beta = \langle\beta\rangle \pm \Delta\beta,\ \text{с}^{-1} \quad \delta\beta = \ldots$$

$$\tau = \langle\tau\rangle \pm \Delta\tau,\ \text{с} \quad \delta\tau = \ldots$$

$$N_e = \langle N_e \rangle \pm \Delta N_e,\ \ \delta N = \ldots$$

9. Сделать выводы о проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются свободными? В чем причина затухания свободных колебаний?
2. Напишите в общем виде дифференциальное уравнение затухающих колебаний в вязкой среде. Поясните смысл величин, входящих в него.
3. Какова зависимость колеблющихся величин от времени при затухающих колебаниях? Изобразите график затухающих колебаний.
4. Что такое время релаксации? Как оно связано с коэффициентом затухания?
5. Изобразите схематично лабораторную установку. Расскажите о том, какие измерения производятся в данной работе.
6. Вывести дифференциальное уравнения затухающих колебаний крутильного маятника.
7. Вывести формулу, по которой в данной работе производится вычисление коэффициента затухания.

Содержание

МЕХАНИКА

Лабораторный практикум

Подписано в печать 28.03.07. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 3,26.
Заказ № 63. Тираж 300.

Информационно-издательский центр ПГУ
Пенза, Красная, 40, т.: 56-47-33