곡선단축류 1 - 정의와 기본 성질

Articles

김다인 (수리과학과)

기하학적 류(geometric flow)는 시간에 따라 발전하는(time-evolution) 미분방정식이며, 기하학적해석학(geometric analysis)라 불리는 분야의 연구대상이다. 특히 그리고리 페렐만이 Ricci 류의 특이점 분석을 통해 Poincare 추측을 증명한 것이 유명하다. 이 아티클 시리즈에서는 기하학적 류 중 가장 간단한 경우라 할 수 있는 곡선단축류(curve shortening flow)를 통해 독자들에게 기하학적해석학을 소개하고자 한다.

1 평면곡선의 미분기하학

정의 1 평면곡선

구간 $I \subset \mathbb{R}$에서 정의된 연속함수 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$는 C^0 **평면곡선**C^0 PLANE CURVE, 또는 간단히 **평면곡선**PLANE CURVE이라 불린다. 정의역 I는 γ의 **매개변수구간**PARAMETER INTERVAL이라 불린다. γ가 $n \in \mathbb{Z}^+$회 연속적으로 미분가능하면(i.e. n회 미분가능하며 n계도함수가 연속이면) C^n **평면곡선**C^n PLANE CURVE, 무한계 미분가능하면(i.e. 모든 n에 대하여 n회 미분가능하면) C^∞ **평면곡선**C^∞ PLANE CURVE이라 한다. 특히 $n, m \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$에 대하여 $n \geq m$이면 임의의 C^n 곡선은 항상 C^m 곡선이다.

C^1 평면곡선 γ에 대하여 도함수 $\gamma'(u)$ $(u \in I)$는 **속도**VELOCITY벡터이며 그 크기 $v = |\gamma'(u)|$는 **속력**SPEED이라 불린다. γ가 **정칙**REGULAR 곡선임은 어떠한 $u \in I$에 대해서도 속도가 0이 아닌 것이다; **단위속력**UNIT-SPEED곡선임은 속력이 항상 1인 것이다.

정리 1 단위속력 재매개화

임의의 C^n ($n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$) 정칙 평면곡선 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$에 대하여 기준점 $a \in I$를 고정하자. **길이**LENGTH함수를 $L_\gamma(u) = \int_a^u |\gamma'(w)|\, dw$로 정의하면 이는 증가함수이고 자신의 상 $L_\gamma(I) \subset \mathbb{R}$로의 전단사 함수이며 C^n 함수이고 그 역함수 L_γ^{-1}도 C^n 함수이다. 또한 **단위속력 재매개화**UNIT-SPEED REPARAMETRIZATION $\tilde{\gamma} = \gamma \circ L_\gamma^{-1} : L_\gamma(I) \to \mathbb{R}^2$는 C^n 단위속력곡선이다.

증명 미적분학의 기본정리에 의해 $L'_\gamma(u) = |\gamma'(u)| = v > 0$이다. (정칙성에 의해 속력이 양수이다.) 그러므로 이는 (강한) 증가함수이며 따라서 전단사이다. 만약 γ가 C^n이면 통상적인 미분법을 적용하여 n계도함수 $L_\gamma^{(n)}(u)$를 $\gamma'(u), \gamma''(u), \ldots, \gamma^{(n)}(u)$를 이용하여 나타낼 수 있으며 따라서 L_γ도 C^n이다. 음함수 미분법에 의해 L_γ^{-1}도 C^n임을 알 수 있다. 마지막으로 $(\gamma \circ L_\gamma^{-1}(s))' = \gamma'(L_\gamma^{-1}(s))(L_\gamma^{-1})'(s) = \gamma'(L_\gamma^{-1}(s))/|\gamma'(L_\gamma^{-1}(s))|$의 크기가 1이다. □

정의 2 폐곡선

만약 $I = [a, b]$가 폐구간이며 $\gamma(a) = \gamma(b)$이면 γ는 C^0 **폐곡선**CLOSED CURVE이라 불린다. (폐구간 $[0, 2\pi]$의 양 끝 점을 동일시하면 원 $\mathbb{S}^1$이 되므로, γ를 $\mathbb{S}^1$에서 정의된 함수로 간주할 수도 있다.) 이것이 **단순 폐곡선**SIMPLE CLOSED CURVE임은 $[a, b)$에서 단사인 것이다. C^0 폐곡선 중 C^n ($n \in \mathbb{Z}^+$) 곡선이며 $\gamma'(a) = \gamma'(b), \ldots, \gamma^{(n)}(a) = \gamma^{(n)}(b)$를 만족시키는 것을 C^n **폐곡선**C^n CLOSED CURVE이라 한다. 모든 $n \in \mathbb{Z}^+$에 대하여 이를 만족시키면 C^∞ **폐곡선**C^∞ CLOSED CURVE이라 한다.

단순폐곡선이 주어진 경우 단순폐곡선에 '둘러싸인 부분'과 단순폐곡선 '바깥쪽 부분'으로 평면이 분할된다. (증명은 생략한다; 이전 아티클 중 Jordan 곡선 정리를 다룬 아티클을 참조하라.)

정리 2 Jordan 곡선 정리(Jordan curve theorem)

단순폐곡선 γ에 대하여 $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(I)$의 연결성분(connected component)은 정확히 2개이며, 하나는 비유계(unbounded)이고 하나는 유계(bounded)이다.

정의 3 접선벡터, 법선벡터, 곡률

C^1 평면 정칙곡선 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$에 대하여, u에서의 **단위접선벡터**UNIT TANGENT VECTOR를 $\gamma'(u)/v(u)$로 정의한다. (이는 $\tilde{\gamma}'(s)$와 일치한다. 길이 매개변수에 대하여 계산할 경우 $T(s)$로 표기하겠다.) C^1 평면 정칙 폐곡선 γ에 대하여, $T(u)$에 수직한 2개의 단위벡터 중 $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(I)$의 유계 연결성분을 향하는 것을 **내향단위법선벡터**INWARD UNIT NORMAL VECTOR N이라 하며, 내향단위법선벡터가 단위접선벡터를 반시계 방향으로 $\pi/2$ 회전시킨 것일 경우 γ가 **양의 방향**POSITIVE DIRECTION이라 한다. (이는 '반시계 방향'에 해당한다.)
γ가 C^2일 경우 $|\partial T/\partial u|/v(u)$를 **곡률**CURVATURE k로 정의한다. (이는 $|\partial T/\partial s| = |\tilde{\gamma}''(s)|$와 일치한다.)

단위속력 재매개화 $\tilde{\gamma}$에서의 미분을 $\partial/\partial s = v^{-1}(\partial/\partial u)$로 나타내자. $\partial T/\partial u$는 T에 수직하며, 따라서 N과 평행하다. (왜냐하면 $0 = (\partial/\partial u)1 = (\partial/\partial u)\langle T, T\rangle = 2\langle T, \partial T/\partial u\rangle$이기 때문이다.) 그러므로 $\partial T/\partial u = vkN, \partial T/\partial s = kN$이다. 또한 $\partial N/\partial u = -vkT, \partial N/\partial s = -kT$임을 알아낼 수 있다. 이를 **Frenet 방정식계**FRENET EQUATIONS라 부른다.

2 곡선단축류 (Curve Shortening Flow)

정의 4 곡선단축류

$F : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \to \mathbb{R}^2$가 **곡선단축류**CURVE SHORTENING FLOW라는 것의 정의는 $F(u, t)$가 $\partial F/\partial t = kN$을 만족시키는 것이다. (여기에서 k, N은 시간 t에서의 곡선 $\gamma_t(u) = F(u, t)$의 곡률과 법선벡터이다.)

이렇게 시간도함수를 명시하여 류(flow)를 기술하는 방정식을 **발전방정식**EVOLUTION EQUATION이라 부른다. 여기에서 kN은 매장된 초곡면(hypersurface) - 평면 $\mathbb{R}^2$에서는 단순히 곡선 γ_u - 에서의 Laplacian 작용소에 해당한다. 따라서 곡선단축류의 방정식은 $\partial F/\partial t = \Delta F$, 잘 알려진 미분방정식인 **열방정식**HEAT EQUATION의 곡선으로의 일반화로 볼 수 있다.

곡선단축류는 재료공학에서 탄성을 가진 고무줄의 움직임을 기술하기 위한 모델로서 처음 등장했다; 고무줄이 팽팽하게 당겨진 (곡률이 큰) 곳은 빠르게 수축하고, 느슨한 (곡률이 작은) 곳은 느리게 수축하기 때문이다. 더 많이 구부러진 곳일수록 빨리 줄어들기 때문에, 곡선단축류는 시간이 지날수록 점점 원형에 가까워지면서 한 점으로 수렴하게 된다. (평형 상태에서의 크기는 아주 작으나 탄성한계가 커서 원래의 크기보다 매우 크게 늘어날 수 있는 고무줄을 생각하면, 늘어난 크기에 비해 원래의 크기는 점에 가까울 것이다.) 이 아티클 시리즈에서는 이 사실을 증명하는 것을 목표로 한다.

먼저, 곡선단축류에 대하여 여러 가지 값들이 어떻게 시간-발전(time-evolve)하는지, 즉 시간 t가 지남에 따라서 어떻게 변화하는지를 계산하겠다. 특히 길이와 면적이 감소한다는 사실을 알아낼 수 있다: 길이는 약하게 감소하며 (볼록한 곡선의 경우에는 강하게 감소한다) 면적은 일정 비율로 강하게 감소한다.

정리 3 속력, 길이의 시간-발전

(a) $\frac{\partial v}{\partial t} = -k^2 v$, (b) $\frac{\partial L}{\partial t} = -\int k^2 \, ds \le 0$, (c) $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} + k^2 \frac{\partial}{\partial s}$

증명

(a) $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(v^2) &= \frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u}\rangle = 2\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial u}\rangle = 2\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u \partial t}\rangle \\ &= 2\langle vT, \frac{\partial}{\partial u}(kN)\rangle = 2\langle vT, \frac{\partial k}{\partial u}N - vk^2 T\rangle = -2v^2k^2\end{aligned}$$

(b) $$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} v \, du = -\int_0^{2\pi} k^2 v \, du = -\int_0^L k^2 \, ds$$

(c) $$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u}\right) = k^2 \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial t} = k^2 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}$$

(u와 t가 독립적인 좌표들이므로 $\partial/\partial u$와 $\partial/\partial t$가 교환 가능하다.) □

이제 단위접선/법선벡터, 곡률, 면적의 시간도함수를 계산하자. 곡률의 계산을 간단히 하기 위해, $T(s,t)$와 x축 사이의 각도를 $\theta(s,t)$라 하자. 그 경우 $T = (\cos\theta, \sin\theta), N = (-\sin\theta, \cos\theta)$로 간단히 나타낼 수 있다.

정리 4 기본단위벡터, 곡률, 면적의 시간-발전

(a) $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s}N, \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial k}{\partial s}T$, (b) $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s}, \frac{\partial \theta}{\partial s} = k$

(c) $\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3$, (d) $\frac{\partial A}{\partial t} = -2\pi$

증명

(a)
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} F = \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} + k^2 \frac{\partial F}{\partial s}$$
$$= \frac{\partial}{\partial s}(kN) + k^2 T = \frac{\partial k}{\partial s} N - k^2 T + k^2 T$$

$\partial N/\partial t$가 N에 수직하므로, 둘째 방정식은 다음 식에서 따라온다.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \langle T, N \rangle = \langle \frac{\partial k}{\partial s} N, N \rangle + \langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \rangle$$

(b)
$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial k}{\partial s} N = \frac{\partial k}{\partial s}(-\sin\theta, \cos\theta)$$

성분들을 비교하면 첫 번째 공식이 증명된다. 이러한 방식으로 Frenet 방정식을 사용하면 두 번째 공식이 증명된다.

(c)
$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial t} + k^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3$$

(d)
$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) \, du = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle F, vN \rangle \, du$$
$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle \frac{\partial F}{\partial t}, vN \rangle + \langle F, \frac{\partial v}{\partial t} N \rangle + \langle F, v \frac{\partial N}{\partial t} \rangle \, du$$
$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} vk - \langle F, vk^2 N \rangle + \langle F, -\frac{\partial k}{\partial u} T \rangle \, du$$

마지막 항을 부분적분하자. $\partial F/\partial u = vT$이며 단순폐곡선의 **전곡률**TOTAL CURVATURE가 $\int k \, ds = \int vk \, du = 2\pi$이므로 (이는 잘 알려진 사실이다; 학부 미분기하학 교재 참조.) 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} vk - \langle F, vk^2 N \rangle + \langle \frac{\partial F}{\partial u}, kT \rangle + \langle F, vk^2 N \rangle \, du$$
$$= -\int_0^{2\pi} vk \, du = -2\pi \qquad \square$$

3 자기교차점의 부존재성

지금까지의 내용은 곡선단축류, 즉 곡선단축 방정식의 해가 '주어진' 경우 그 주어진 해가 어떤 성질을 만족시키는지에 관한 것이다. 우리는 아직 초기 곡선이 주어졌을 경우 여기에서 시작하는 곡선단축류가 실제로 존재하는지는 알지 못한다. 그러므로 우리는 이제 (i) (적절한 조건을 만족시키는) 초기 조건이 주어졌을 경우, 적어도 짧은 시간 동안은 해가 존재한다 (ii) 곡선단축류의 해가 한 점으로 수렴할 때까지 항상 존재한다 (iii) 곡선단축류의 해가 존재한다면 좋은 성질 (예를 들어 '교차점이 생기지 않고 계속 단순폐곡선으로 남아 있는다' 등) 을 만족시킨다 등 여러 가지 사실들을 보여야 한다.

이 아티클에서는 먼저 포물형 편미분방정식(parabolic partial differential equation) 이론의 핵심 도구 중 하나인 최대 원리(maximum principle)를 이용하여 곡선단축류의 해가 주어진 경우 '자기교차점이 발생하지 않음'을 보이겠다. 해의 단시간 존재성 (i)은 다음 아티클에서 보이겠다.

정리 5

함수 $f : S^1 \times S^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}$을 $f(u_1,u_2,t) := |F(u_1,t) - F(u_2,t)|^2$ 로 정의하면, 이는 다음 방정식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f - 4 = \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial f^2}{\partial s_2^2} - 4$$

증명 발전방정식 및 직접 미분을 통해 다음을 알아낼 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\left\langle F(u_1,t) - F(u_2,t), kN(u_1,t) - kN(u_2,t)\right\rangle$$
$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = 2\left\langle F(u_1,t) - F(u_2,t), T(u_1,t)\right\rangle$$

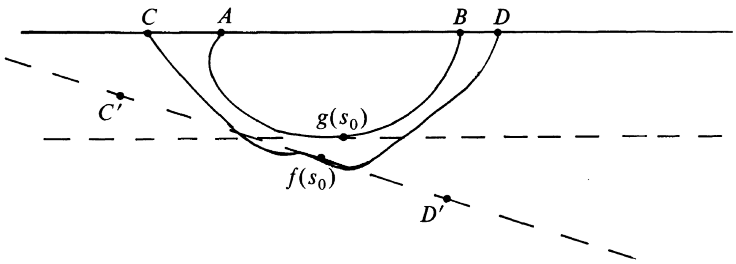
$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} = 2\langle T(u_1,t), T(u_1,t)\rangle + 2\langle F(u_1,t) - F(u_2,t), kN(u_1,t)\rangle$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} = 2 - 2\langle F(u_1,t) - F(u_2,t), kN(u_2,t)\rangle$$

아래쪽 2개 식들을 더하고 $\partial f/\partial t$와 비교하면 증명이 완료된다. □

$s(u_1,u_2,t) = \left|\int_{u_1}^{u_2} v(u,t)\,dt\right|$가 u_1에서 u_2까지 양의 방향으로 곡선을 따라간 거리라 하자. 이제 곡률의 상계 $|k| \leq c$가 존재한다 하자; $s(u_1,u_2,t) \leq 2/c$인 경우 $f(u_1,u_2,t) = 0$일 필요충분조건이 $u_1 = u_2$인 것임을 보이겠다. 이는 기하학적으로 곡선들이 '짧은 구부러짐에서 기인하는 자기교차점'을 갖지 않음을 의미한다.

정리 6

$g : [0,L] \to \mathbb{R}^2$가 A에서 B로의 단위속력 매개화된 곡선이며, g와 A에서 B까지의 선분을 결합하면 볼록 곡선을 형성한다 하자. f가 동일한 길이 L을 가지며 끝점이 C, D인 두 번째 곡선이라 하자. 이러한 곡선들의 접선벡터들이 연속하고 곡률이 조각별 연속하며 (i.e. 유한 개 점에서만 불연속하다) 곡선 g가 양의 방향이라 (따라서 곡률이 양수라) 하자. 만약 g의 각 점에서의 곡률이 f의 대응하는 점에서의 곡률의 절댓값보다 크다면 (i.e. $k_g(s) \geq |k_f(s)|$) $\mathrm{dist}(A,B) \leq \mathrm{dist}(C,D)$이다.



증명 곡선을 회전시켜 AB와 CD가 x축 상에 놓이도록 하자. 이 보조정리에서는 곡선족을 다루는 것이 아니므로 두 곡선 모두에 대하여 호길이 매개변수 s를 사용하자. $\theta_g(s)$가 곡선 g의 s에서의 접선벡터의 각도라 하자. $g(s_0)$에서의 접벡터가 x축에 평행하도록 하는 (i.e. $\theta_g(s_0) = 0$) s_0가 유일하게 존재한다. 다음이 성립하므로,

$$\frac{d\theta_g}{ds} = k_g \geq |k_f| = \left|\frac{d\theta_f}{ds}\right|$$

적분하면 다음을 얻는다.

$$|\theta_f(s) - \theta_f(s_0)| \leq |\theta_g(s)|$$

g가 볼록하므로 $0 \leq s \leq L$에 대하여 $|\theta_g(s)| \leq \pi$이며 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\int_0^L \cos(\theta_f(s) - \theta_f(s_0))\, ds &= \int_0^L \cos|\theta_f(s) - \theta_f(s_0)|\, ds \\ &\geq \int_0^L \cos|\theta_g(s)| = \operatorname{dist}(A, B)\end{aligned}$$

적분의 좌변은 선분 CD의 $f(s_0)$에서의 접선으로의 사영이다. 원래 직선이 사영보다 더 길기 때문에 결과가 증명된다. □

정리 7

만약 $|k(u,t)| \leq c$이면 다음이 성립한다.

$$f(u_1, u_2, t) \geq \left\{\frac{2}{c}\sin\left(\frac{c}{2}s(u_1, u_2, t)\right)\right\}^2$$

증명 g가 반경이 $1/c$인 원에서의 길이 $s(u_1, u_2, t)$의 원호라 하고 위 정리를 적용하라. □

정리 8

$F : S^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}^2$가 곡선단축류라 하자. 만약 $|k(u,t)| < C$이며 초기 곡선 $F(\cdot, 0)$이 단순폐곡선이면 각각의 t에 대하여 $F(\cdot,t) : S^1 \to \mathbb{R}^2$도 단순폐곡선이다.

증명 집합 $E = \{(u_1,u_2,t) : s(u_1,u_2,t) < \pi/c\}$에서 $f(u_1,u_2,t) = 0$일 필요충분조건은 $u_1 = u_2$인 것이다. 이는 위 정리에서 즉시 따라온다. 이제 D를 여집합 $D = (S^1 \times S^1 \times [0,T)) - E$로 제한시키자. D에서 f가 양수 최솟값을 가진다는 사실을 보이기 위해 최대 원리의 일종을 사용할 것이다. f가 양수임은 곡선의 자기교차점이 없음을 의미하므로, 이를 보인다면 증명이 완료된다.

D의 경계는 다음 두 집합의 합집합이다.

$$\{(u_1,u_2,t) : s(u_1,u_2,t) = \pi/c, 0 \le t \le T\},$$
$$\{(s_1,s_2,0) : s(u_1,u_2,t) \ge \pi/c\}$$

전자의 집합에서 위 정리에 의해 $f(s_1,s_2,t) \ge (2/c)^2$이며, (초기 곡선이 단순폐곡선이므로) 후자의 집합에서는 양수 최솟값이 존재한다. m이 이러한 두 값들 중 더 작은 것이라 하자.

함수 $g(u_1,u_2,t) := f(u_1,u_2,t) + \varepsilon t$는 다음 방정식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \Delta g - 4 + \varepsilon \tag{1}$$

귀류법을 사용하자. $0 < \delta < m$이라 하고 g가 $(S^1 \times S^1 \times [0,T)) - E$의 어느 점에서 $m - \delta$를 값으로 가진다 하자. $t_0 = \inf\{t : g(u_1,u_2,t) = m - \delta\}$라 하자. g의 연속성과 D의 컴팩트성과 경계 추산에 의해 값 $m - \delta$를 가지는 점들 중 시간 t가 최소이도록 하는 어떠한 내부점

$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, t)$가 존재한다. 이 점에서 $\partial g/\partial t \leq 0$이며 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2}\right)^2 \geq 0$$

($\partial/\partial s_1$과 $\partial/\partial s_2$는 편도함수가 아니라 작용소이지만 간단한 계산을 통해 이 부등식을 검증할 수 있다.) 최소점에서 s_1에서와 s_2에서의 접선들이 서로 평행해야 하므로 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} = -2 \langle T(u_2, t), T(u_1, t) \rangle = \pm 2$$

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} \geq 2\sqrt{\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2}} \geq 2\left|\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2}\right| \geq 4$$

이는 g가 (1)을 만족시킨다는 가정에 모순이다. δ가 임의로 선택되었으므로 D에서 $g(u_1, u_2, t) \geq m$이 성립한다. 이는 $f(u_1, u_2, t) \geq m - \varepsilon T$임을 함의한다. $\varepsilon \to 0$의 극한을 취하면 D에서 $f(u_1, u_2, t) \geq m > 0$임을 알 수 있으며 이는 증명을 완료한다. □

지금까지 우리는 곡선단축류를 정의하고 곡선단축류 하에서 길이, 면적, 곡률 등 여러 값들이 어떻게 시간-발전하는지를 계산했으며 또한 곡선단축류에서 자기교차점이 발생하지 않는다는 사실을 보였다. 다음 아티클에서는 주어진 초기 곡선에서 시작하는 곡선단축류가 적어도 짧은 시간 동안은 존재한다는 사실을 보이고, 이를 '수렴할 때까지 장시간 동안 해가 존재한다'는 결과로 확장할 것이다.