곡선단축류 2 - 해의 존재성

Articles

김다인 (수리과학과)

지난 아티클에서 우리는 기하학적 류(geometric flow)의 일종인 곡선단축류(curve shortening flow)를 정의하고, 곡선단축류 하에서 길이, 면적, 곡률 등이 어떻게 시간-발전하는지를 계산했으며 또한 곡선단축류에서 자기교차점이 발생하지 않는다는 사실을 보였다. 다음을 상기하라:

정의 4 곡선단축류

$F : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \to \mathbb{R}^2$가 **곡선단축류**CURVE SHORTENING FLOW라는 것의 정의는 $F(u, t)$가 $\partial F/\partial t = kN$을 만족시키는 것이다. (여기에서 k, N은 시간 t에서의 곡선 $\gamma_t(u) = F(u, t)$의 곡률과 법선벡터이다.)

이 아티클에서는 평면에서의 강 볼록 C^2-단순폐곡선에서 시작하는 곡선단축류가 어떠한 비선형 포물형 편미분방정식(parabolic PDE)에 대한 초기값 문제와 동치임을 보일 것이다. 그 후 우리는 최대 원리를 이용하여 단시간 존재성을 수립할 것이며, 곡률에 관한 여러 값에 대한 추산을 통해 이를 장시간 존재성으로 확장할 것이다.

지난 아티클에서 본 바와 같이, 볼록 곡선에 대하여 접선벡터 T와 x축이 이루는 각도 (회전각) θ를 매개변수로 사용할 수 있다. 곡선의 곡률을 매개변수 θ에 대하여 $k(\theta)$로 나타내면 이는 양의 값 2π-주기함수가 된다. 반대로, 우리는 양의 값 2π-주기함수들 중 어떤 함수가 볼록 곡선의 곡률 함수로서 등장할 수 있는지를 결정할 것이다. 이를 통해 곡선을 훨씬 더 다루기 쉬운 대상인 함수와 동일시할 수 있게 된다.

정리 9

양의 값 2π-주기 함수가 C^2 강 볼록 평면 단순폐곡선의 곡률함수를 나타낼 필요충분조건은 다음이 성립하는 것이다.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{k(\theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{k(\theta)}\, d\theta = 0$$

증명 만약 k가 어떠한 곡선의 곡률함수이면 이 관계식은 곡선이 폐곡선이라는 (즉 $\displaystyle\int_0^L T\ ds = 0$) 사실에서 즉시 따라온다. 다른 방향, 즉 주어진 임의의 k에 대하여 다음과 같이 정의된 연관된 곡선이 (평행이동 하에서) 존재한다.

$$x(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\cos\tau}{k(\tau)}\, d\tau, \quad y(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\sin\tau}{k(\tau)}\, d\tau$$

이 곡선이 폐곡선이고 요구된 것과 같은 곡률을 가지며 Gauss 사상이 단사임을 (따라서 단순곡선임을) 간단히 확인할 수 있다. □

θ를 매개변수로 사용하여 곡률에 대한 발전방정식을 결정하기 위해 t를 시간 매개변수로 취하고 θ를 다른 좌표로 사용하자. (즉 (u,t)에서 (θ,t)로 변수변환을 한다.) 여기에서, $\partial/\partial t|_u$는 u를 고정한 편도함수이지만 $\partial/\partial t|_\theta$는 θ를 고정한 편도함수이므로 $\partial/\partial t|_u \neq \partial/\partial t|_\theta$이다. 이러한 매개변수를 사용하면 다음이 성립한다.

정리 10 θ와 k로 표현한 곡선단축류 방정식

$$\left.\frac{\partial k}{\partial t}\right|_\theta = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3$$

증명 연쇄법칙에 의해 다음이 성립한다.

$$\left.\frac{\partial k}{\partial t}\right|_u = \left.\frac{\partial k}{\partial t}\right|_\theta + \frac{\partial k}{\partial \theta}\left.\frac{\partial \theta}{\partial t}\right|_u = \left.\frac{\partial k}{\partial t}\right|_\theta + \frac{\partial k}{\partial \theta}\frac{\partial k}{\partial s} = \left.\frac{\partial k}{\partial t}\right|_\theta + k\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2$$
$$\frac{\partial^2 k}{\partial s^2} = \frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial k}{\partial \theta}\right) = k\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 + k^2\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}$$

여기에서 $k\partial/\partial\theta = \partial/\partial s$이며 $\partial\theta/\partial t = \partial k/\partial s$임을 (정리 4) 사용했다. 이를 정리 4(c)의 공식 $\partial k/\partial t = \partial^2 k/\partial s^2 + k^3$에 대입하라. □

정리 11

볼록 곡선에 대한 곡선단축 과정은 다음의 PDE 초기값 문제와 동치이다: 다음을 만족시키는 $k : S^1 \times [0, T) \to \mathbb{R}$을 찾아라.

(i) 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 $k \in C^{2+\alpha,1+\alpha}(S^1 \times [0, T - \varepsilon])$

(ii) $\dfrac{\partial k}{\partial t} = k^2\dfrac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3$

(iii) 다음을 만족시키는 주어진 ψ에 대하여 $k(\theta, 0) = \psi(\theta)$이다.

  (a) $\psi \in C^{1+\alpha}(S^1)$

  (b) $\psi(\theta) > 0$

  (c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{\psi(\theta)}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{\psi(\theta)}\,d\theta = 0$

증명 정리 10에 의해 곡선단축류의 해가 주어진 경우 θ 좌표계에서 표현된 곡률함수가 (ii)를 만족시킴을 보여준다. 제시된 문제의 해가 주어진 경우 각각의 t에서 정리 9의 전제조건들이 만족되며 정리 9의 증명에서 등장하는 공식들에 의해 정의된 대응하는 곡선들은 다음의

발전방정식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial X}{\partial t} = kN - \frac{\partial k}{\partial \theta}T$$

(여기에서 t에 대한 편도함수는 θ를 고정하면서 취했다.)
공간변수를 변환하는 것으로 곡선의 형상을 변화시키지 않고 접선방향 성분을 없앨 수 있다. 간단히 말하면 X의 t에 대한 u를 *고정하면서 취한* 편도함수가 $\partial X/\partial t = kN$을 만족시켜야 한다고 요구하며, θ를 t와 u의 함수로 표현하면

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k(\theta(u,t),t) \cdot \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)(\theta(u,t),t)$$

를 만족시켜야 한다. 초기정보 $\theta(u,0) = 2\pi u$에 대하여 이를 해결하면 $\theta(u+1,t) = \theta(u,t)$와 $\partial\theta/\partial u \geq 0$을 만족시키는 함수를 얻는다. 따라서 반대로 u를 t와 θ의 함수로 표현할 수 있다. □

이 방정식은 비선형 강 포물형 (nonlinear strictly parabolic) 방정식이며, 따라서 최대 원리 등 좋은 성질들을 얻을 수 있다. 특히, 최대 원리에 의해 강 볼록 곡선들이 이 방정식 하에서 시간-발전하면서 볼록성을 유지한다. (따라서 정리 9에 의한 대응을 잘 적용할 수 있다.)

정리 12 곡선단축류에 대한 최대 원리

만약 k가 정리 10의 발전방정식을 만족시키면 $k_{\min}(t) = \inf\{k(\theta,t) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$가 비감소 함수이다.

증명 귀류법을 사용하자. ε가 $k_{\min}(0) > \varepsilon > 0$를 만족시키며 어떠한 t에 대하여 $k_{\min}(t) = k_{\min}(0) - \varepsilon$라 하자. $t_0 = \inf\{t : k_{\min}(t) = k_{\min}(0) - \varepsilon\}$라 하자. k의 연속성에 의해 어떠한 점 (θ_0, t_0)에서 이

최솟값이 달성된다. 그러나 이곳에서 다음이 성립해야 한다.

$$\frac{\partial k}{\partial t}(\theta_0, t_0) \leq 0, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} \geq 0, \quad k(\theta_0, t_0) > 0$$

이는 k가 4.1.4(ii)를 만족시킨다는 전제조건에 모순이다. □

정의 5

곡선의 **곡률중간값(median curvature)**을 다음과 같이 정의한다.

$$k^* = \sup\{b : \text{길이 } \pi\text{의 어떠한 구간에서 } k(\theta) > b\}$$

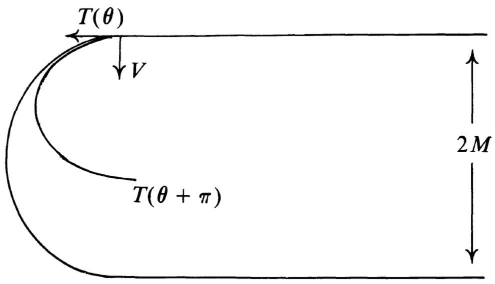
이제 우리는 곡률에 관한 3가지 추산을 증명하고, 그 결과로 곡선단축류를 따라 곡률이 균등유계라는 사실을 증명할 것이다. 이는 곡선단축류를 따라 시간-발전하는 곡선이 ’뾰족해지는’ 특이점이나 ’평평해지는’ 특이점을 갖지 않음을 말해준다.

정리 13 기하학적 추산(geometric estimate)

만약 $k(\theta, t)$가 볼록 평면 폐곡선의 곡률이며 곡선의 길이가 L, 곡선이 둘러싸는 면적이 A이면 $k^*(t) \leq L/A$이다.

증명 만약 $M < k^*(t)$이면 어떠한 구간 $(a, a + \pi)$에서 $k(\theta, t) > M$이다. 이는 볼록 곡선이 다음의 거리만큼 떨어진 2개의 평행선 사이에 놓임을 함의한다.

$$\int_a^{a+\pi} \frac{\sin(\theta - a)}{k(\theta, t)}\, d\theta \leq \frac{2}{M}$$



직경은 $L/2$에 의해 유계이며 면적은 폭 곱하기 직경에 의해 유계이다. M을 $k^*(t)$에 임의로 가깝도록 선택할 수 있으므로 요구된 것과 같이 $k^*(t) \le L/A$가 성립한다. □

보조정리 1 Wirtinger 부등식

만약 $f(a) = 0$이며 $f(b) = 0$이고 $b - a < \pi$이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f^2 \, d\theta \le \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 \, d\theta$$

증명 평행이동에 의해 $a = 0$으로 선택할 수 있다. $b = \pi$로 선택하고 $b \le \theta \le \pi$에 대하여 f를 0으로 확장할 수 있다. 그 경우 f를 Fourier 급수 $f = \sum a_n \sin n\theta$로 전개하면 결과가 따라온다. 등호는 $f(\theta) = \sin\theta$에 대해서만 성립한다. □

정리 14 적분 추산(integral estimate)

만약 $k^*(\theta)$가 $[0, T)$에서 유계이면 $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) \, d\theta$도 그러하다.

증명 정리 10의 발전방정식과 부분적분을 사용하여 다음을 계산할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\log k(\theta,t)\;d\theta=\int_0^L k^2-\left(\frac{\partial k}{\partial\theta}\right)\;d\theta$$

t를 고정하고 열린집합 $U=\{\theta : k(\theta,t)>k^*(t)\}$와 그 여집합 $V=S^1-U$ 상에서 우변의 적분을 추산하자. k^*의 정의는 열린집합 U가 서로 소 구간 I들의 가산 합집합임을 함의한다; 이들의 길이는 모두 π 이하이다. 이러한 구간들의 폐포의 끝점에서 $k(\theta,t)$는 $k^*(t)$와 같으며 따라서 Wirtinger 부등식을 함수 $k(\theta,t)-k^*(t)$에 적용 가능하다. 이 부등식을 간략화하면 다음을 얻는다:

$$\int_{\bar{I}_i}k^2-\left(\frac{\partial k}{\partial\theta}\right)^2\;d\theta\le 2k^*(t)\int_{\bar{I}_i}k(\theta,t)\;d\theta$$

U를 구성하는 각각의 구간에 대한 위 식들을 합하면 다음을 얻는다.

$$\int_U k^2-\left(\frac{\partial k}{\partial\theta}\right)^2\;d\theta\le 2k^*(t)\int_U k(\theta,t)\;d\theta\le 2k^*(t)\int_0^{2\pi}k(\theta,t)\;d\theta$$

집합 V에서의 추산은 더 간단하다:

$$\int_V k^2-\left(\frac{\partial k}{\partial\theta}\right)^2\;d\theta\le\int_V k^2\;d\theta\le 2\pi(k^*(t))^2$$

이 식들을 더하고 $\dfrac{\partial L}{\partial t}=-\displaystyle\int k^2\;ds=-\int k\;d\theta$라는 사실을 상기하면 (정리 3) 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\log k(\theta,t)\;d\theta\le 2k^*(t)\frac{\partial L}{\partial t}+2\pi(k^*(t))^2$$

마지막으로 $k^*(t)<M$이라 가정하고 적분하면 추산을 얻는다:

$$\int_0^{2\pi}\log k(\theta,t)\;d\theta\le\int_0^{2\pi}\log k(\theta,0)\;d\theta+2M(L(0)-L(t)+2\pi M^2t)$$

□

보조정리 2

만약 $\int \log k(\theta,t)\ d\theta$가 $[0,T)$에서 유계이면 임의의 $\delta > 0$에 대하여 길이 δ 이하의 구간을 제외한 곳에서 $k(\theta,t) \leq C$가 성립하도록 하는 상수 C를 찾을 수 있다.

증명 만약 $a \leq \theta \leq b$에서 $k \geq C$이며 $b-a \geq \delta$이면 다음이 성립한다.

$$\int_0^{2\pi} \log k(\theta,t)\ d\theta \geq \delta \log C + (2\pi - \delta)\log k_{\min}(0)$$

여기에서 $k_{\min}(0)$은 k의 하계이다. ($k_{\min}(t)$가 시간에 대하여 감소하지 않음을 상기하라.) 이는 C가 큰 경우 모순을 제공한다. □

보조정리 3

$0 \leq t < T$에 대하여 다음이 성립하도록 하는 상수 D를 찾을 수 있다.

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} k^2\ d\theta + D$$

증명 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 d\theta &= 2\int \left(k\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial k}{\partial \theta}\frac{\partial^2 k}{\partial \theta \partial t}\right) d\theta \\ &= 2\int \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k\right)\frac{\partial k}{\partial t} = 2\int k^2\left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k\right)^2 \geq 0\end{aligned}$$

이 부등식을 적분하면 증명이 완료된다. □

정리 15 점별 추산(pointwise estimate)

만약 $\int_0^{2\pi} \log k(\theta,t)\ d\theta$가 $[0,T)$에서 유계이면 $k(\theta,t)$가 $S^1\times[0,T)$에서 균등유계이다.

증명 $\int_0^{2\pi} \log k(\theta,t)\ d\theta$가 유계이므로 길이 δ 이하의 구간 $[a,b]$를 제외한 곳에서 $k \le C$가 성립한다. 이러한 구간에서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} k(\phi) = k(a) + \int_a^{\phi} \frac{\partial k}{\partial \theta}\ d\theta &\le C + \sqrt{\delta}\left(\int \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2\ d\theta\right)^{1/2} \\ &\le C + \sqrt{\delta}\left(\int k^2\ d\theta + D\right)^{1/2} \end{aligned}$$

$k_{\max}$가 k의 최댓값이라 하면 이는 다음을 보여준다.

$$k_{\max} \le C + \sqrt{\delta}(2\pi k_{\max}^2 + D)^{1/2} \le C + 2\pi\sqrt{\delta}k_{\max} + \sqrt{\delta}D$$

δ를 작게 선택하면 $k_{\max} \le 2C$가 성립한다. $\square$

정리 16

만약 $k : S^1\times[0,T) \to \mathbb{R}$이 정리 10의 발전방정식을 만족시키며 연관된 곡선들에 의해 둘러싸인 면적이 어떠한 양수 균등 하계를 가지면 곡률 k가 $S^1 \times [0,T)$에서 균등유계이다.

증명 곡선단축류에서 곡선의 길이가 감소하며 따라서 면적의 균등 하계는 $k^*(t)$의 균등 상계를 제공한다. 적분 및 점별 추산의 결과로 $k(\theta,t)$에 대한 균등 상계를 얻는다. □

즉, 면적이 양수인 한 곡선단축류의 곡률은 균등유계이다.

다음으로 우리는 k의 유계성을 가정하고 k의 고계도함수에 대한 상하계를 찾겠다. 이러한 고계도함수에 관한 추산을 사용하면 해의 단시간 존재성을 장시간 존재성으로 확장할 수 있다. 표기법을 간략화하기 위해 앞으로 θ에 대한 편도함수를 k'로 표기하겠다.

보조정리 4

만약 k가 유계이면 $k' = \partial k/\partial\theta$가 유계이다.

증명 다음을 계산하자.

$$\frac{\partial^2 k}{\partial t\partial\theta} = k^2\frac{\partial^3 k}{\partial\theta^3} + 2k\frac{\partial k}{\partial\theta}\frac{\partial^2 k}{\partial\theta^2} + 3k^2\frac{\partial k}{\partial\theta}$$

이는 $k' = \partial k/\partial\theta$가 지수 이하로 성장함을 함의한다. ($e^{\alpha t}k'$가 만족시키는 PDE를 고려하고 최대 원리를 사용할 수 있도록 하는 α를 선택하면 이를 보일 수 있다.) 그러므로 유한 시간 구간에서 k'은 유계로 남아 있다. □

보조정리 5

만약 k와 k'이 유계이면 $\displaystyle\int_0^{2\pi}(k'')^4$가 유계이다.

증명 발전방정식을 이용하여 계산하자:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}(k'')^4 = 4\int_0^{2\pi}(k'')^3(j = k^2k'' + k^3)''$$
$$= -12\int_0^{2\pi}(k'')^2(k''')(k^2k''' + 2kk'k'' + 3k^2k')$$
$$-12\int_0^{2\pi}k^2(k'')^2(k''')^2 + 2kk'(k'')^3(k''') + 3k^2k'(k'')^2k'''$$

부등식 $ab \le 4a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$를 사용하여 둘째 및 셋째 항을 첫째 항 및 추가적인 안 좋은 항을 통해 통제할 수 있다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}(k'')^4 \le \int_0^{2\pi}C_1k'^2(k'')^4 + C_2k^2k'^2(k'')^2$$

k 및 k'에 대한 균등 상하계 및 다음 사실을 사용하면,

$$\int_0^{2\pi}(k'')^2 \le \left(\int_0^{2\pi}(k'')^4\right)^{1/2}\sqrt{2\pi}$$

$\int_0^{2\pi}(k'')^4$가 지수함수 이하로 증가해야 하며 따라서 유한 시간 구간에서 유한한 값으로 남아있는다는 사실을 알 수 있다. □

보조정리 6

만약 $k, k', \int(k'')^4$가 유계이면 $\int(k''')^2$와 k''도 유계이다.

증명 다음을 계산할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int (k''')^2 = 2\int (k''')(k^2k'' + k^3)''' = 2\int k''''(k^2k'' + k^3)''$$
$$= -2\int k^2(k'''')^2 + 4kk'k'''k'''' + 2k(k'')^2k''''$$
$$+ 2(k')^2k''k'''' + 3k^2k''k'''' = 6(k')^2k''''$$

위 보조정리에서와 동일한 기법을 이용하여 뒤쪽 5개 항을 첫째 항과 추가적인 안 좋은 항을 통해 통제할 수 있다. 이는 다음을 제공한다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int (k''')^2 \le C_1\int k'^2(k''')^2 + C_2\int (k'')^4$$
$$+ C_3\int \frac{(k')^4}{k^2}(k'')^2 + C_4\int k^2(k'')^2 + C_5\int (k')^4$$

여기에서 첫째 항을 제외한 각각의 항은 상수에 의해 유계이다. (다시 $k \ge k_{\min}(t) \ge k_{\min}(0)$임을 상기하라.) 첫째 항은 상수 곱하기 $\int (k''')^2$에 의해 유계이다. 이는 성장률이 지수함수 이하이고 따라서 이 값이 유한한 구간에서 유한함을 보여준다.
마지막으로, 1차원에서 다음이 성립한다.

$$\max |f|^2 \le C\int |f'|^2 + f^2$$

이를 $f = k''$에 적용하면 k''도 유계임이 따라온다. □

보조정리 7

만약 k, k', k''이 균등유계이면 k'''과 다른 모든 고계도함수들도 균등유계이다.

증명 이는 최대 원리에서 따라온다. 다음을 계산하자.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}k''' &= (k^2k'' + k^3)''' \\ &= k^2k^{(5)} + 6kk'k^{(4)} + (8kk'' + 6k'^2 + 3k^2)k''' \\ &\quad + (6k'(k'')^2 + 18kk'k'' + 6(k')^3)\end{aligned}$$

만약 k, k', k''이 유계이면 적절한 α에 대한 $k'''e^{\alpha t}$에 최대 원리를 적용 가능하다. 유한 구간에서 이는 $|k'''|$이 유계임을 함의한다. 일반적으로 만약 $k, k', \ldots, k^{n-1}$이 유계이면,

$$\frac{\partial}{\partial t}k^{(n)} \leq k^2k^{(n+2)} + 2nkk'k^{(n+1)} + Ck^{(n)} + C$$

는 $k^{(n)}$이 유한 구간에서 유계임을 보여준다. □

정리 17

정리 10의 발전방정식의 해는 면적이 0으로 수렴할 때까지 지속된다.

증명 면적의 균등 하계가 양수인 경우 k와 그 모든 도함수들에 대한 상/하계를 얻는다. 발전방정식을 이용하면 시간도함수들도 통제할 수 있다. 해가 $[0, T)$에서 존재하며 면적이 0으로 수렴하지 않는다 하자. (i.e. $\lim_{t \to T} A(t) > 0$.) 그 경우 $t \to T$에서 k의 극한이 존재하며 C^∞-곡선이므로, T를 지나서 해를 연장할 수 있다. 따라서 해는 면적이 0으로 수렴할 때까지 지속된다. □

우리는 볼록 C^2-단순폐곡선에서 시작한 곡선단축류의 해가 장시간 동안 존재하며, 볼록성을 유지하고, 여전히 단순폐곡선임을 보였다. 다음 아티클에서 우리는 곡선단축류의 수렴을 살펴볼 것이다.