

PH231 Classical Electromagnetism I

Midterm Helpdesk

Dyne Kim

April 03, 2024

연사 소개

이름: 김다인 ($1 \text{ dyn} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}/\text{s}^2$)

수리과학과 석박사통합과정 1년차 (학번 20248020)

B. Sc. in Mathematics and Physics (KAIST, 학사 21학번)

서울과학고 30기, 재학 중 물리 과목 하나 제외 모두 A+

2020 IPhO 한국 국가대표 최종후보

2021년 전자기학 수강, A+ 학점 획득:

중간고사 143/150 (평균 75.4), 기말고사 전기학 문제 40/40

궁금한 것이 있다면 +82 10 8210 8772 또는 physics0907@kaist.ac.kr로
연락해 주세요.

Descartes 좌표계에서의 벡터 도함수

구배(gradient) ∇ , 회전(curl) $\nabla \times$, 발산(divergence) $\nabla \cdot$.

$$\nabla f = (\partial_i f) \mathbf{e}_i, \quad \nabla \times \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k) \mathbf{e}_i, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_i A_i$$

de Rham sequence in \mathbb{R}^3 :

$$C^\infty(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\nabla} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\nabla \times} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\nabla \cdot} C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

Laplace 작용소(Laplacian)도 정의할 수 있다:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \partial_i^2 f$$

곱의 미분법

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

일반화 Stokes 정리

Γ, Σ, V : 각각 곡선, 곡면, 체적영역. ∂ 는 그 경계.

\mathbf{T}, \mathbf{n} : 각각 (단위속도 매개화 시) 곡선 속도, 외향 단위 법선

$d^0c, dl, d^2A, d^3\tau$: 선적분요소, 선적분요소, 면적분요소, 체적분요소

$\mathbf{T} dl = d\mathbf{l}, \mathbf{n} d^2A = d^2\mathbf{A}$ 로 표기하기도 함.

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \int_{\partial M} \omega \\ \Rightarrow \int_{\Gamma} \nabla f \cdot \mathbf{T} dl &= \int_{\partial \Gamma} f d^0c = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \\ \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d^2A &= \int_{\partial \Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} dl \\ \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3\tau &= \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d^2A\end{aligned}$$

위의 가장 일반적인 경우를 3차원 공간 \mathbb{R}^3 에 매장된 곡선, 곡면, 부피 영역에 적용하면 아래의 세 식, 즉 벡터미적분학의 기본정리, Stokes 정리, 발산 정리를 얻는다.

de Rham 코호몰로지 (수학과 아니라면 안 보셔도 됩니다.)

이는 다음의 도표가 가환 도표(commutative diagram)이며, de Rham map ψ 가 de Rham 복합체에서 쌍대 단체 복합체로의 사상임을 의미한다:

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\nabla} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\nabla \times} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\nabla \cdot} & C^\infty(\mathbb{R}^3) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ \text{Hom}(\Delta_0, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{Hom}(\partial, 1)} & \text{Hom}(\Delta_1, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{Hom}(\partial, 1)} & \text{Hom}(\Delta_2, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{Hom}(\partial, 1)} & \text{Hom}(\Delta_3, \mathbb{R}) \end{array}$$

(여담: de Rham 정리는 ψ 가 복합체 동형사상(isomorphism)임을 보여주며, 따라서 다양체(manifold)의 코호몰로지(cohomology)를 de Rham 코호몰로지로 계산할 수 있다.)

부분적분

$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot (f \mathbf{A}) d^3\tau &= \int_V f(\nabla \cdot \mathbf{A}) d^3\tau + \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla f) d^3\tau \\ &= \int_{\partial V} f \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d^2A\end{aligned}$$

즉 $\mathbf{A} \cdot (\nabla f)$ 의 적분을 $-f(\nabla \cdot \mathbf{A})$ 의 적분과 경계항으로 전환할 수 있다. 만약 f, \mathbf{A} 가 충분히 좋은 decay를 가진다면 (r^{-2} 보다 빠르게 감소하면) $r \rightarrow \infty$ 의 극한에서 경계항이 0으로 수렴하며, 따라서 전체 공간에서의 적분들을 서로 전환 가능하다.

(다른 종류의 곱의 미분법에 대해서도 유사한 부분적분을 수행할 수 있다.)

구면좌표계

$$d\mathbf{l} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi$$

$$d^3\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\nabla f = \partial_r f \mathbf{e}_r + r^{-1} \partial_\theta f \mathbf{e}_\theta + (r \sin \theta)^{-1} \partial_\phi f \mathbf{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= (r \sin \theta)^{-1} (\partial_\theta (\sin \theta A_\theta) - \partial_\phi A_\theta) \mathbf{e}_r \\ &\quad + (r \sin \theta)^{-1} (\partial_\phi A_r - \sin \theta \partial_r (r A_\phi)) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + r^{-1} (\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta (A_r)) \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = r^{-2} \partial_r (r^2 A_r) + (r \sin \theta)^{-1} \partial_\theta (\sin \theta A_\theta) + (r \sin \theta)^{-1} \partial_\phi A_\phi$$

$$\nabla^2 f = r^{-2} \partial_r (r^2 \partial_r f) + (r^2 \sin \theta)^{-1} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + (r^2 \sin^2 \theta)^{-1} \partial_\phi^2 f$$

원통좌표계

$$d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\phi \mathbf{e}_\phi + dz \mathbf{e}_z$$

$$d^3\tau = \rho d\rho d\phi dz$$

$$\nabla f = \partial_\rho f \mathbf{e}_\rho + \rho^{-1} \partial_\phi f \mathbf{e}_\phi + \partial_z f \mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= (\rho^{-1} \partial_\phi A_z - \partial_z A_\phi) \mathbf{e}_\rho + (\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z) \mathbf{e}_\phi \\ &\quad + \rho^{-1} (\partial_\rho (\rho A_\phi) - \partial_\phi A_\rho) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho^{-1} \partial_\rho (\rho A_\rho) + \rho^{-1} \partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z$$

$$\nabla^2 f = \rho \partial_\rho^2 f + \partial_\rho f + \rho^{-1} \partial_\phi^2 f + \partial_z^2 f$$

정전기 방정식

정전기학(electrostatics)은 장을 발생시키는 전하들이 정지한 경우에 대하여 전기장을 다루는 학문이다. 기본 방정식들은 다음과 같다:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \rho \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

ρ 는 공간의 전하 밀도, \mathbf{f} 는 전하밀도가 받는 단위부피당 힘이다.
(특정 영역에서 ρ 를 체적분한 값이 그 영역 내의 총 전하량이다.)
비회전성에 의해 어떠한 스칼라장 (**전위(electric potential)**) V 가 존재하여 $\mathbf{E} = -\nabla V$ 로 표현 가능하며, **Poisson 방정식**이 성립한다:

$$\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0$$

만약 전하 밀도가 0이면 다음의 **Laplace 방정식**이 성립한다:

$$\nabla^2 V = 0$$

전체 공간에서의 해

3차원에서 Laplace 방정식은 다음과 같은 기본해를 가진다.

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

그러므로 (경계가 없다면) 다음의 합성곱이 Poisson 방정식의 해가 된다:

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}') d^3\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\tau'$$

미분하면 전기장을 얻는다.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\tau'$$

점전하

전하밀도 ρ 는 함수일 수도 있지만, 일반적인 **분포(distribution)**일 수도 있다. 이 경우에도 위의 합성곱 방식을 통해서 Poisson 방정식의 **약한 해(weak solution)**를 구할 수 있다.

먼저 한 점 \mathbf{r}_0 에 전하량 q 가 집중된 경우 (**점전하(point charge)**의 경우),

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

선전하

전하밀도는 곡선 Γ 에 집중된 측도일 수도 있다. 즉, 임의의 (좋은) 집합 A 에 대하여 A 내의 총 전하량이

$$Q(A) = \int_{\Gamma \cap A} \lambda \, d\mathbf{l}$$

를 만족시키는 곡선 Γ 와 Γ 에서의 함수 λ 가 존재하는 경우, λ 를 Γ 에서의 **선전하밀도(line charge density)**라 한다. Γ 가 x 축이며 λ 가 상수함수인 경우, 전하밀도, 전위, 전기장은 다음과 같다.

$$\rho(\mathbf{r}) = \lambda \delta(y) \delta(z)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{r} - x'\mathbf{e}_x|} \, dx' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{r} - x'\mathbf{e}_x}{|\mathbf{r} - x'\mathbf{e}_x|^3} \, dx' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_r}{r}$$

면전하

전하밀도는 곡면 Σ 에 집중된 측도일 수도 있다. 즉, 임의의 (좋은) 집합 A 에 대하여 A 내의 총 전하량이

$$Q(A) = \int_{\Sigma \cap A} \sigma \, d^2\mathbf{A}$$

를 만족시키는 곡면 Σ 와 Σ 에서의 함수 σ 가 존재하는 경우, σ 를 Σ 에서의 **면전하밀도(surface charge density)**라 한다. Σ 가 xy 평면이며 σ 가 상수함수인 경우, 전하밀도, 전위, 전기장은 다음과 같다.

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma \delta(z)$$

$$V(\mathbf{r}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq R^2} \frac{1}{|\mathbf{r} - x'\mathbf{e}_x - y'\mathbf{e}_y|} d^2A' \rightarrow -\infty \quad (???)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq R^2} \frac{\mathbf{r} - x'\mathbf{e}_x - y'\mathbf{e}_y}{|\mathbf{r} - x'\mathbf{e}_x - y'\mathbf{e}_y|^3} d^2A' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \mathbf{e}_z$$

일반화 Stokes 정리의 적용; 대칭성

FTC에 의해 곡선 Γ 의 양 끝점의 전위차는 다음과 같다.

$$\Delta V = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} \, dl$$

발산 정리를 이용해 Gauss 법칙의 적분형태를 얻을 수 있다:

$$\frac{Q(V)}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \, d^3\tau = \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d^2A = \Phi_{\mathbf{E}}(\partial V)$$

여기에서 $\Phi_{\mathbf{E}}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d^2A$ 는 Σ 를 통과하는 **전기선속(electric flux)**이라 불린다. 즉, **폐곡면을 통과하는 전기선속은 그 폐곡면에 의해 둘러싸인 영역 내의 총 전하량에 비례한다.**

정전기 방정식들은 공간의 특정 방향에 의존하지 않으므로, 전하 분포가 대칭성을 가지는 경우 해도 대칭적이다. 이를 이용하면 위 예시들에서 등장하는 적분을 간단히 해결할 수 있다.

Dirichlet 경계조건 문제

전체 공간 대신 공간의 일부 영역에서만 문제를 해결할 수도 있다. 그러나 이 경우 해를 유일하게 결정하기 위해서는 경계조건이 필요하다.

정전기학에서의 가장 널리 사용되는 경계조건은 바로 **도체(conductor)**이다; 도체에 전기장이 들어온다면 도체 내의 자유전하가 즉시 전기장에 의해 힘을 받아 이동하여, 결과적으로 전기장을 상쇄시킨다. 따라서 도체 내에서는 항상 전위가 상수이다. 특히 **접지(ground)**된 도체의 전위는 항상 0이다.

Dirichlet 문제의 해는 **경계에서만** 경계조건을 만족시키면 되므로, 문제의 원래 영역이 아닌 곳까지 영역을 확장시킨 후 확장된 곳에 **영상전하**를 두는 것으로 경계조건을 만족시키도록 할 수 있다. 이러한 방식으로 얻은 전 공간에서의 해를 다시 원래 영역으로 제한하면 원래 Dirichlet 문제의 해를 얻는다.

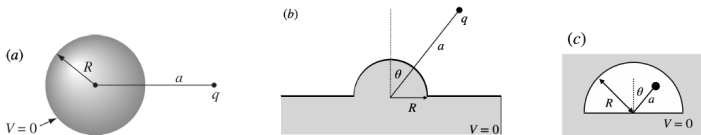
영상전하법

3. Methods of image (30pt). Using the method of image charge, find the electrostatic potential and total charges induced on the conductors.

(a) 10pt. A point charge q is situated a distance a from the center of a grounded conducting sphere of radius R .

(b) 10pt. An infinite plane conductor with a hemispherical of radius R . A point charge q is located at a distance $a > R$ with an angle θ .

(c) 10pt. An infinite conductor has a hemisphere cavity of radius R . We put a point charge q inside the cavity with an angle θ .



영상전하법

(a) Let \vec{a} be the position of the point charge about the center of the sphere.

For $\gamma \equiv \frac{R}{a}$ (< 1)

given	q at \vec{a}
image	$- \gamma q$ at $\gamma^2 \vec{a}$

Outside the sphere,

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} + \frac{-\gamma}{|\vec{r} - \gamma^2 \vec{a}|} \right).$$

And the total induced charge is

$$Q_{\text{ind}} = \boxed{-\gamma q}.$$

영상전하법

For $\gamma \equiv \frac{R}{a} (< 1)$

given	q at $\vec{r}'(a, \theta)$
image	$-\gamma q$ at $\vec{r}'_{-\gamma}(\gamma^2 a, \theta)$
	$+\gamma q$ at $\vec{r}'_{+\gamma}(\gamma^2 a, \pi - \theta)$
	$-q$ at $\vec{r}'_1(a, \pi - \theta)$

* All the position vectors are about the center of the spherical surface and on the same plane which is determined by the given point charge and the dotted line in the figure.

** the first coordinate indicates a distance from the center of the spherical surface and the second one indicates an angle from the dotted line, clockwise.

In the white colored region,

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{-\gamma}{|\vec{r} - \vec{r}'_{-\gamma}|} + \frac{\gamma}{|\vec{r} - \vec{r}'_{+\gamma}|} + \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|} \right).$$

$$Q_{\text{ind}} = -\gamma q + \gamma q - q = \boxed{-q}$$

Neumann 경계조건 문제

공간에 면전하가 존재한다 하자. 점 x 에서 면전하밀도가 $\sigma(x)$ 인 경우 앞의 논의에 의해 x 에 충분히 가까운, 전하가 분포한 면을 기준으로 양쪽에 위치한 두 지점에서 전기장의 차가 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}$$

그러므로 여러 영역 사이의 경계면에서 면전하밀도를 제공한 후 해당 면전하밀도가 생성하는 전위를 구하라는 문제를 고려할 수 있다. 이렇게 대상 함수 V 의 구배 $\nabla V = -\mathbf{E}$ 에 대한 경계조건이 주어진 문제를 **Neumann 경계조건 문제**라 한다.

Descartes 좌표계에서의 변수분리법

만약 함수 $V(\mathbf{r})$ 이 $V_1(x_1)V_2(x_2)V_3(x_3)$ 형태의 곱으로 표현 가능하다면 이들은 전하가 없는 영역에서 다음을 만족시킨다.

$$\begin{aligned}0 &= \nabla^2 V = V_2 V_3 (\partial_1^2 V_1) + V_3 V_1 (\partial_2^2 V_2) + V_1 V_2 (\partial_3^2 V_3) \\0 &= V^{-1} \nabla^2 V = V_1^{-1} (\partial_1^2 V_1) + V_2^{-1} (\partial_2^2 V_2) + V_3^{-1} (\partial_3^2 V_3)\end{aligned}$$

우변의 첫째 항은 x 에만 의존하는 함수, 둘째 항은 y 에만 의존하는 함수, 셋째 항은 z 에만 의존하는 함수이므로 이들의 합이 0이기 위해서는 모든 항이 상수함수여야 한다. 그러므로 V_i 들은 ($\sum \lambda_i = 0$ 인) 어떠한 상수 λ_i 들에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$\partial_i^2 V_i = \lambda_i V_i \quad , \quad V_i = A \exp^{\sqrt{\lambda_i} x_i} + B \exp^{-\sqrt{\lambda_i} x_i}$$

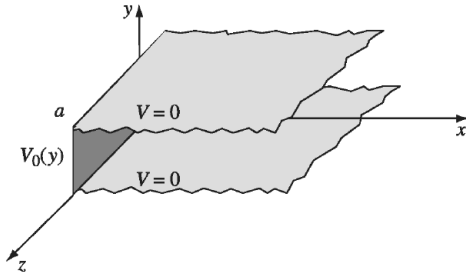
만약 λ_i 가 음수인 경우 $\pm\sqrt{\lambda_i}$ 가 허수이므로 이는 다음 형태이다.

$$V_i(x_i) = A \sin(\sqrt{-\lambda_i} x_i) + B \cos(\sqrt{-\lambda_i} x_i)$$

Descartes 좌표계에서의 변수분리법

모든 해 V 가 이러한 형태의 변수분리해인 것은 아니다; 하지만 (충분히 좋은 상황에서는) Fourier 급수에 의해 해 V 를 변수분리해들의 합으로 표현 가능하다.

Example 3.3. Two infinite grounded metal plates lie parallel to the xz plane, one at $y = 0$, the other at $y = a$ (Fig. 3.17). The left end, at $x = 0$, is closed off with an infinite strip insulated from the two plates, and maintained at a specific potential $V_0(y)$. Find the potential inside this “slot.”



Descartes 좌표계에서의 변수분리법

z -대칭성에 의해 x, y 좌표만 고려하자. 변수분리해 중에서 $x \rightarrow \infty$ 에서 $V \rightarrow 0$ 이고 $y = 0$ 에서 0인 것은 다음 형태이다.

$$V(x, y) = Ce^{-kx} \sin ky$$

이것이 $y = a$ 에서 0이기 위해서는 $k = n\pi/a$ ($n \in \mathbb{N}^+$) 여야 한다. 그러므로 일반적인 해는 다음과 같다.

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-n\pi x/a) \sin(n\pi y/a)$$

경계조건 $V(0, y) = V_0(y)$ 를 만족시키기 위해 양변에 $\sin(n'\pi y/a)$ 를 곱한 후 $[0, a]$ 에서 적분하자.

$$\frac{a}{2} C_{n'} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a}{2} \delta_{nn'} = \int_0^a V_0(y) \sin(n'\pi y/a) dy$$

Descartes 좌표계에서의 변수분리법

따라서 해는 다음과 같다.

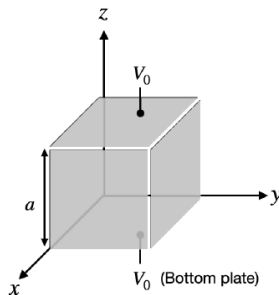
$$\therefore V(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a V_0(y) \sin(n'\pi y/a) dy \exp(-n\pi x/a) \sin(n\pi y/a)$$

만약 V_0 가 상수함수인 경우에는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{2 \nmid n} \frac{1}{n} \exp(-n\pi x/a) \sin(n\pi y/a) \\ &= \frac{2V_0}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\pi y/a)}{\sinh(\pi x/a)} \right) \end{aligned}$$

Descartes 좌표계에서의 변수분리법

6. 10pt. A cubic box with six metal plates are welded together as shown in below figure. We apply a constant voltage V_0 at the top and bottom plates ($z = 0$ and $z = a$ plane), and other sides are grounded ($V = 0$). What is the electrostatic potential at the center?



Descartes 좌표계에서의 변수분리법

Let P be the electric potential value in the center. As the six sides of the cube are in the same relative geometrical position with respect to the center, The center of the potential is :

$$P = C(V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6) \text{ [4pt]}$$

where V_i is the potential value of each surface of metal planes. If each of the six sides has same potential K , then the potential at the center will become K too. (Electric field inside of the Conductor is 0). To satisfy this condition, C must be $1/6$. [4pt]

$$P = \frac{1}{6}(V_0 + V_0 + 0 + 0 + 0 + 0) = \frac{1}{3}V_0 \text{ [2pt]}$$

Descartes 좌표계에서의 변수분리법

Other method

$$V(x, y, z) = \sum \sum C_{n,m} \cosh\left(\frac{\pi\sqrt{n^2 + m^2}(z - \frac{a}{2})}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \quad [4pt]$$

By boundary condition,

$$V_0 = \sum \sum C_{n,m} \cosh\left(\frac{\pi\sqrt{n^2 + m^2}}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \text{ for all } x, y$$

$$C_{n,m} \cosh\left(\frac{\pi\sqrt{n^2 + m^2}}{2}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)^2 V_0 \int_0^a \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dx dy = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ or } m \text{ is even} \\ \frac{16V_0}{\pi^2 nm} & \text{if both } n \text{ and } m \text{ are odd} \end{cases}$$

Therefore,

$$V(x, y, z) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{\text{odd } n} \sum_{\text{odd } m} \frac{\cosh\left(\frac{\pi\sqrt{n^2 + m^2}(z - \frac{a}{2})}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)}{nm \cosh\left(\frac{\pi\sqrt{n^2 + m^2}}{2}\right)} \quad [4pt]$$

Descartes 좌표계에서의 변수분리법

Let's get potential in the center.

$$\begin{aligned} V\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) &= \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{\text{odd } n} \sum_{\text{odd } m} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{nm \cosh\left(\frac{\pi\sqrt{n^2 + m^2}}{2}\right)} \\ &= \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_i \sum_j \frac{(-1)^{i+j}}{(2i+1)(2j+1) \cosh\left(\frac{\pi\sqrt{(2i+1)^2 + (2j+1)^2}}{2}\right)} \quad [2pt] \\ &= \frac{16V_0}{\pi^2} \frac{\pi^2}{48} = \frac{1}{3} V_0 \end{aligned}$$

In the last part, Mathematica was used.

구면좌표계에서의 변수분리법

만약 $V(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ 이면 Laplace 방정식은 다음과 같이 변수분리된다.

$$\partial_{\phi}^2 \Phi = -m^2 \Phi \qquad \Phi = e^{\pm im\phi}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta \partial_{\theta} \Theta) = - \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta \qquad \Theta = P_l^m(\cos \theta)$$

$$\partial_r^2 U = r^{-2} l(l+1) U \qquad U = rR = Ar^{l+1} + Br^{-l}$$

P_l^m 은 **연관 Legendre 함수(associated Legendre function)**라 불리는 특수함수이다. 여기에서 정수 l, m 에 대하여 Θ 와 Φ 를 곱한 후 정규화한 것을 **구면조화함수(spherical harmonics)** $Y_l^m(\theta, \phi)$ 라 한다.

구면좌표계에서의 변수분리법

만약 문제가 ϕ -대칭성을 가지면 $m = 0$ 이며 $P_l^m = P_l$ 은 **Legendre 다항식 (Legendre polynomial)**이라 불리는 다항식들이다.

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$V(r, \theta) = (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1} &= \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx \\ &= \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

구면좌표계에서의 변수분리법

반경 R 의 구체가 영역이며, 경계인 반경 R 의 구면에 퍼텐셜 $V_0(\theta)$ 가 분포한다 하자. $r \rightarrow 0$ 에서 발산하지 않기 위해서는 퍼텐셜이 다음 형태여야 한다.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

경계조건을 만족시키기 위해서는 다음이 성립해야 한다.

$$\frac{2}{2l'+1} A_{l'} R^{l'} = \sum A_l R^l \frac{2\delta_{ll'}}{2l'+1} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

만약 $V_0(\theta)$ 가 상수함수이면 자명하게 $V(r, \theta) = V_0$ 이다.

만약 $V_0(\theta) = V_1(1 - \cos \theta)$ 이면,

$$V(r, \theta) = V_1 \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right)$$

구면좌표계에서의 변수분리법

반경 R 의 구체형 도체 바깥이 영역이라 하자. ($r = R$ 에서 $V = 0$.)
그리고 $r \rightarrow \infty$ 에서 전기장이 상수벡터 $E_0 \mathbf{e}_z$ 로 수렴한다 하자. 즉,

$$V(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta)$$

경계조건을 만족시키기 위해서는 다음이 성립해야 한다.

$$-E_0 R + B_1 R^{-2} = 0$$

$$\therefore V(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta$$

급수 전개

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (r_{>} = \max(|\mathbf{r}|, |\mathbf{r}'|), r_{<} = \min(|\mathbf{r}|, |\mathbf{r}'|))$$

Sol1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}} \\ &= \frac{1}{r_{>} \sqrt{1 + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 - 2\left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right) \cos \alpha}} \\ &= \frac{1}{r_{>}} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 - 2\left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right) \cos \alpha \right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} \left(\left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 - 2\left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right) \cos \alpha \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)}{3!} \left(\left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 - 2\left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right) \cos \alpha \right)^3 \right. \\ &\quad \left. + \dots \right] \text{ (by the binomial theorem) } \quad (+5\text{pts}) \end{aligned}$$

급수 전개

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{r_{>}} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right) \cos \alpha \right) + \frac{3}{2^2 \cdot 2!} \left(\left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^4 - 4 \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^3 \cos \alpha + 4 \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^2 \cos^2 \alpha \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{2^3 \cdot 3!} \left(\left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^6 - 6 \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^5 \cos \alpha + 12 \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^4 \cos^2 \alpha - 8 \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^3 \cos^3 \alpha \right) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r_{>}} \left[1 + \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right) (\cos \alpha) + \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^2 \frac{(3 \cos^2 \alpha - 1)}{2} + \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^3 \frac{(5 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha)}{2} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r_{>}} \left[P_0(\cos \alpha) + \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right) P_1(\cos \alpha) + \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^2 P_2(\cos \alpha) + \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \right)^3 P_3(\cos \alpha) + \dots \right] \quad (+5\text{pts}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha) \quad (+5\text{pts})$$

급수 전개

Sol2)

General solution of azimuthal symmetric potential: $V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos \theta)$

$$\text{If } \alpha = 0, \quad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}}$$
$$= \frac{1}{|r - r'|}$$

$$= \frac{1}{r_{>} \left(1 - \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)} \quad (\text{where } r_{>} = \max(r, r'), r_{<} = \min(r, r'))$$

$$= \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}$$

$$\text{If } r > r', \quad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{B_l}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos \alpha) \Big|_{\alpha=0} \rightarrow B_l = r'^l \text{ (+3pts)}$$

급수 전개

$$\rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{r'^l}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos \alpha) \quad (+2\text{pts})$$

If $r' > r$, $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l] P_l(\cos \alpha) \Big|_{\alpha=0} \rightarrow A_l = \frac{1}{r'^{l+1}} \quad (+3\text{pts})$

$$\rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \right] P_l(\cos \alpha) \quad (+2\text{pts})$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha) \quad (+5\text{pts})$$

급수 전개

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta) d^3\tau'$$

$|\mathbf{r}'| > |\mathbf{r}|$ 인 경우,

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^{l+1}} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}') |\mathbf{r}'|^l P_l(\cos \theta) d^3\tau'$$

따라서 쌍극자 모멘트 \mathbf{p} , 사중극자 모멘트 텐서 Q 를 정의한다:

$$q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}') d^3\tau'$$

$$\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3\tau'$$

$$Q_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}') (3r'_i r'_j - \delta_{ij} |\mathbf{r}'|^2) d^3\tau'$$

급수 전개

(c) 5pt. Calculate electrostatic potential $V(z)$ along the z -axis (point A) for a circular ring of radius R with a total charge q uniformly distributed around the ring.

Sol)

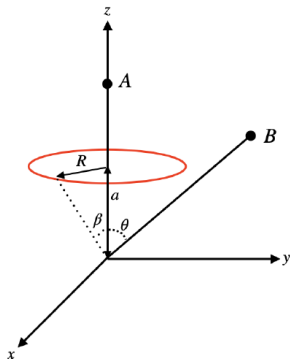
Linear charge density of the ring: $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$

Electric potential by the total charge of the ring:

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + (z-a)^2}} (R d\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + (z-a)^2}} (2\pi R) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + (z-a)^2}} \quad (+5\text{pts for answer}) \end{aligned}$$

급수 전개

(d) 15pt. Using the result (c), calculate the electrostatic potential at off-axis (point B) as a function of $V(r, \theta)$.



급수 전개

Sol)

From the result (c),

$$\begin{aligned} V(r, \theta = 0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + (r-a)^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2ar + r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2ar + r^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(R^2 + a^2) + r^2 - 2(\sqrt{R^2 + a^2} \cos \beta)r}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \beta) \left(\begin{array}{l} \text{where } r_{>} = \max(r, \sqrt{R^2 + a^2}), \\ r_{<} = \min(r, \sqrt{R^2 + a^2}) \end{array} \right) \text{ by the result of (b) (+5pts)} \end{aligned}$$

$$\text{General Solution: } V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos \theta)$$

급수 전개

$$\rightarrow V(r > \sqrt{R^2 + a^2}, \theta = 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{B_l}{r^{l+1}} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[\sqrt{R^2 + a^2}]^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \beta)$$

$$\rightarrow B_l = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [\sqrt{R^2 + a^2}]^l P_l(\cos \beta) \text{ (+3pts)}$$

$$\rightarrow V(r < \sqrt{R^2 + a^2}, \theta = 0) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{[\sqrt{R^2 + a^2}]^{l+1}} P_l(\cos \beta)$$

$$\rightarrow A_l = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[\sqrt{R^2 + a^2}]^{l+1}} P_l(\cos \beta) \text{ (+3pts)}$$

$$\Rightarrow V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \beta) P_l(\cos \theta) \text{ (+4pts)}$$

원통좌표계에서의 변수분리

원통좌표계에서 $V(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ 라 하면,

$$\nabla^2 V = \rho \partial_\rho^2 V + \partial_\rho V + \rho^{-1} \partial_\phi^2 V + \partial_z^2 V = 0$$

$$\partial_z^2 Z = k^2 Z$$

$$Z = e^{\pm kz}$$

$$\partial_\phi^2 \Phi = -\nu^2 \Phi$$

$$\Phi = e^{\pm i\nu t}$$

$$0 = \partial_\rho^2 R + \rho^{-1} \partial_\rho R + (k^2 - (\nu/\rho)^2) R \quad R = AJ_\nu(k\rho) + BN_\nu(k\rho)$$

만약 문제가 z -대칭이면 $k = 0, Z = 1$ 이며 다음이 성립한다.

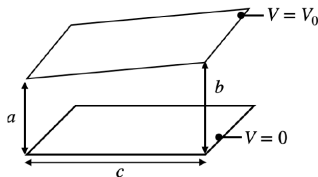
$$R(\rho) = \rho^{\pm\nu} \quad (\nu \neq 0), \quad A \log \rho + B \quad (\nu = 0)$$

$\nu = 0$ 에 대응하는 Φ 는 $\Phi(\phi) = C\phi + D$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} V(\rho, \phi) &= (A_0 \log \rho + B_0)(C_0 \phi + D_0) \\ &\quad + \sum_{\nu} (A_\nu \rho^\nu + B_\nu \rho^{-\nu})(C_\nu \cos \nu \phi + D_\nu \sin \nu \phi) \end{aligned}$$

원통좌표계에서의 변수분리

5. 20pt. Consider a two metal plates with small tilting in Figure. We apply a constant voltage V_0 at the top plate and, the bottom plate is grounded to zero voltage. Neglecting the edge effect, calculate the potential $V(x, y, z)$ between two plates. *Hint: consider the number of independent variables in the potential without the edge effect.*

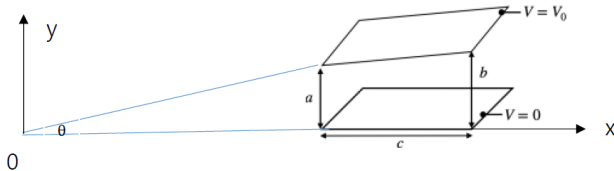


원통좌표계에서의 변수분리

Because it ignores the effect of edge, this problem becomes 2D one.

Let the z axis points into the page. That solution becomes independent of z .

Use cylindrical coordinates (ρ, θ, z) . By symmetry, **potential inside the capacitor will depend only θ** .



Let's Thus the Laplace equation changes as follows

$$\nabla^2 V(\theta) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} V(\theta) = 0 \text{ [10pt]}$$

원통좌표계에서의 변수분리

General solution is :

$$V(\theta) = A + B\theta \text{ [5pt]}$$

Consider the boundary condition.

$$V(0) = 0, V(\theta_0) = V_0$$

So, the constant A and B are respectively :

$$A = 0, B = \frac{V_0}{\theta_0} \text{ [5pt]}$$

Hence,

$$V(x, y) = \frac{V_0}{\theta_0} \theta = \frac{V_0 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\arctan\left(\frac{b-a}{c}\right)}$$

유전체

물질 V 내에 단위부피당 전기쌍극자 \mathbf{P} 가 존재한다 하자. 이는 다음의 퍼텐셜을 생성한다:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\tau'$$

발산 정리를 통해 이를 부분적분할 수 있다:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\tau'$$

즉 전기쌍극자 밀도 \mathbf{P} 의 존재는 경계에 $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ 의 속박면전하밀도, 내부에 $\sigma_f = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 의 속박전하밀도가 존재하는 것과 동치이다.

유전체

이러한 ‘물질의 쌍극자에 속박된’ 속박전하의 영향을 제거하고 ‘우리가 움직이거나 관찰할 수 있는’ 자유전하의 영향만을 고려하기 위해 다음의 **전기변위장(electric displacement)**을 도입한다:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho - \rho_b = \rho_f$$

만약 전기장 \mathbf{E} 에 비례하는 쌍극자가 발생하는 경우 ($\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$), \mathbf{D} 도 \mathbf{E} 에 비례하며 그 비례계수를 **유전률(permittivity)**이라 한다:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

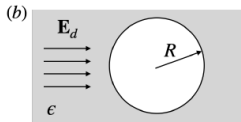
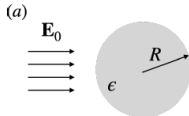
유전체에 대해서도 경계값 문제를 풀 수 있다: 유전체 안과 밖을 다른 영역으로 놓고, 경계에서 퍼텐셜 V 가 연속해야 하며 (자유면전하가 없다면) \mathbf{D} 의 수직 성분이 연속해야 한다는 2가지 경계조건 하에서 문제를 해결할 수 있다.

도체 경계의 경우와 마찬가지로, 몇몇 경우에는 적절한 영상전하를 배치하여 문제를 쉽게 해결할 수도 있다.

1. Electric field in linear dielectric media (40pt).

(a) 20pt. Consider a homogeneous linear dielectric sphere with radius R is placed in a uniform external electric field \mathbf{E}_0 . Evaluate the electric field inside and outside of the sphere. Assume the electric permittivity ϵ is homogenous.

(b) 20pt. Using the result in (a), find the electric field inside a spherical cavity of radius R in a homogenous dielectric medium with homogenous electric permittivity ϵ .



(a) Laplace's equation is the good way to solve. Boundary condition is as follows :

$$V_{in} = V_{out}, \text{ at } r = R \dots (1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial V_{in}}{\partial r} = \varepsilon_0 \frac{\partial V_{out}}{\partial r}, \text{ at } r = R \dots (2)$$

$$V_{out} \rightarrow -E_0 r \cos \theta, \text{ as } r \rightarrow \infty \dots (3) [5pt]$$

We know the general solution. Now the problem is to match the boundary condition.

$$V_{in}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta);$$

$$V_{out}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

This includes a third boundary condition (3).

Using the remaining boundary conditions (1) and (2), the following equality must be satisfied.

BC (1) :

$$A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}}, \text{ for } l \neq 1,$$

$$A_1 R^1 = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2}.$$

BC (2) :

$$\varepsilon l A_l R^{l-1} = -\frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}}, \text{ for } l \neq 1,$$

$$\varepsilon A_1 = -E_0 - \frac{2B_1}{R^3}.$$

Therefore, the following electric potentials can be obtained:

$$A_l = B_l = 0, \text{ for } l \neq 1,$$

$$A_1 = -\frac{3}{\varepsilon + 2} E_0, B_1 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3 E_0$$

It becomes as follows:

$$V_{in}(r, \theta) = -\frac{3}{\varepsilon + 2} E_0 r \cos \theta$$

$$V_{out}(r, \theta) = -\left[r - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{R^3}{r^2} \right] E_0 \cos \theta \quad [5pt]$$

Hence the field inside and outside the sphere is:

$$\vec{E}_{in}(r, \theta) = -\frac{3}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_{out}(r, \theta) = -\vec{E}_0 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{R^3}{r^3} [3(\vec{E}_0 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{E}_0] \quad [10pt]$$

(b) All you have to do is change ε to $\frac{1}{\varepsilon}$ in the solution above.

$$\vec{E}_{in}(r, \theta) = -\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_{out}(r, \theta) = -\vec{E}_0 - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} \frac{R^3}{r^3} [3(\vec{E}_0 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{E}_0] \quad [20pt]$$

정전기 에너지

시험전하 q 가 \mathbf{a} 에서 \mathbf{b} 로 이동한 경우 전기력이 한 일은 다음과 같다:

$$\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, dt = \int q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \, dt = \int_a^b q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -qV(\mathbf{b}) + qV(\mathbf{a})$$

따라서 고정된 전위 내에서 시험전하의 에너지는 qV 이다.

반면에 시험전하가 아닌 전하분포 전체의 에너지를 구하고자 할 경우 자신이 만드는 퍼텐셜은 자신에게 일하지 않으므로 두 번 세어지는 일을 막기 위해 계수 $1/2$ 이 필요하다. 이는 부분적분하면 다음과 같아진다:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho V \, d^3\tau = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V \Delta^2 V \, d^3\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V|^2 \, d^3\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}|^2 \, d^3\tau \end{aligned}$$

그러므로 $\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2$ 를 **에너지 밀도(energy density)**로 간주할 수 있다. 에너지가 전하에 있는지, 장에 있는지는 관점의 차이로, 두 공식 모두 실제로 보존되는 퍼텐셜 에너지를 제공한다.

장 라그랑지안

정전기장 Lagrangian 밀도를 다음과 같이 정의하자:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}) = -\rho V + \frac{\epsilon_0}{2} |\nabla V|^2$$

그 경우 스칼라장 V 에 대한 변분을 취하면 위 Lagrangian에 대응하는 Euler-Lagrange 방정식은 Poisson 방정식이다:

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$$