APCSF and Łojasiewicz Inequalities

Dyne Kim

May 24, 2024

APCSF

일반적인 곡선에 대하여 $W = X_t, V = X_u, v = \langle V, V \rangle^{1/2}$라 하자. 따라서 $ds = v\ du$이다. 그 경우,

$$L_t = -\int \langle W, kN \rangle\ ds \tag{1}$$

$$A_t = -\int \langle W, N \rangle\ ds \tag{2}$$

([G-H] Section 3에서 CSF 방정식을 대입하는 대신 W를 남겨놓으면 이를 얻는다.) CSF 방정식 $X_t = kN$을 변형하여 $A_t = 0$이도록 하기 위해서는 다음이 성립해야 한다.

$$X_t = \left(k - \frac{2\pi}{L} \right) N$$

이를 APCSF라 한다. APCSF의 경우 $A_t = 0, L_t \leq 0$이다:

$$L_t = -\int k^2 - \frac{2\pi\nu}{L} k\ ds = -\int k^2\ ds + \frac{4\pi^2}{L}\nu^2 \tag{3}$$

APCSF

Schwarz inequality를 사용하면 다음을 얻는다.

$$4\pi^2\nu^2 = \left(\int k\ ds\right)^2 \leq \left(\int ds\right)\left(\int k^2\ ds\right) = L\int k^2\ ds \tag{4}$$

[G3] Corollary 2.4. Convex APCSF에 대하여 다음이 성립한다.

$$\left(\frac{L^2}{A} - 4\pi\right) \leq C\exp\left(-\frac{2\pi}{A}t\right)$$

Proof. Isoperimetric inequality에 의해,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{L^2}{A} - 4\pi\right)_t &= -\frac{2}{A}\left(L\int k^2\ ds - \pi\frac{L^2}{A} + \pi\left(\frac{L^2}{A} - 4\pi\right)\right) \\ &\leq -\frac{2\pi}{A}\left(\frac{L^2}{A} - 4\pi\right) \quad \left(\because \int k^2\ ds \geq \frac{\pi L}{A}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{L^2}{A} - 4\pi\right) \leq C\exp\left(-\frac{2\pi}{A}t\right) \quad \square$$

APCSF

[G3] Corollary 2.5. Convex APCSF가 singularity를 형성하지 않는다면 이는 Hausdorff metric 하에서 원으로 수렴한다.

Proof. Bonnesen inequality를 사용하면 다음을 얻는다.

$$\left(\frac{L^2}{A} - 4\pi\right) \geq \frac{\pi^2}{A}(r_{\mathrm{out}} - r_{\mathrm{in}})^2$$

위 보조정리에 의해 inner and outer radii 간의 차가 0으로 감소한다. 따라서 곡선의 내부와 동일한 면적을 가지는 원판 간의 Hausdorff distance가 0으로 감소한다.

Angle Parameter

x축과 tangent vector 간의 angle θ에 의해 곡선들을 parametrize하겠다. 이는 evolution의 tangential component를 선택하여 θ가 t에 depend하지 않도록 하는 것과 동치이다. 다음과 같이 정의하자.

$$X_t = \left(k - \frac{2\pi}{L}\right) N + \alpha(u,t) T \tag{3.1}$$

(3.1)을 u에 대하여 미분하고, 미분의 순서를 변경하고, $X_u = vT$임을 사용한 후 tangential/normal components를 비교하면 다음을 얻는다.

$$T_t = \left(\frac{1}{v} k_u + \alpha k\right) N \tag{3.2}$$

$$v_t = -vk^2 + v\frac{2\pi k}{L} + \alpha_u \tag{3.3}$$

θ가 (따라서 T와 N이) t에 independent해야 한다 하자. (3.2)에 의해,

$$\alpha = -\frac{1}{vk} k_u \tag{3.4}$$

Angle Parameter

(3.2)를 u에 대하여 미분하고 미분의 순서를 변경하면 다음을 얻는다.

$$0 = \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial u} = \frac{\partial}{\partial t}(vkN) \tag{3.5}$$

즉 $(vk)_t = 0$이다. (3.3)과 (3.4)를 이용하여 전개하면,

$$k_t = -\frac{1}{v} k v_t = k^3 - \frac{2\pi k^2}{L} + \frac{k}{v}\left(\frac{1}{vk} k_u\right)_u \tag{3.6}$$

θ coordinate로 변환하면 $d\theta = kv\ du, \partial/\partial\theta = (vk)^{-1}\partial/\partial u$이며,

$$k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3 - \frac{2\pi k^2}{L} \tag{3.7}$$

이는 이 coordinates에서 curvature의 evolution equation이다.

Preservation of Convexity

[G3] Lemma 3.1. Convex APCSF는 convexity를 유지한다.

$W(\theta,t) = k(\theta,t)e^{\mu t}$이며 μ가 constant라 하면 다음이 성립한다.

$$W_t = k^2 W_{\theta\theta} + \left(k^2 - \frac{2\pi}{L}k + \mu\right) W \tag{3.8}$$

W의 계수는 k에 대한 2차다항식이며 그 판별식 $(4\pi^2/L^2) - 4\mu$는 $\mu \gg 0$ 에서 음수이고 따라서 W의 계수가 양수이다.

$$W_{\min}(t) := \inf\{W(\theta,t) : 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

어떠한 $t > 0$에서 $0 < \beta < W_{\min}(0)$에 대하여 $W_{\min}(t) = \beta$라 하자.
$t_0 = \inf\{t : W_{\min}(t) := \beta\}$라 하자. $\beta = W(\theta_0, t_0)$라 하면 이곳에서,

$$W_t \le 0, \quad W_{\theta\theta} \ge 0, \quad W = \beta > 0$$

이는 (3.8)에 모순이며, 따라서 $W_{\min}(t)$가 nondecreasing이다. 그러므로,

$$k_{\min}(t) = W_{\min}(t) \cdot e^{-\mu t} \ge W_{\min}(0) \cdot e^{-\mu t} > 0$$

Boundedness of Log Curvature

[G-H] Lemma 4.3.2 Convex closed plane curve에서 $k^*(t) < L/A$이다.

[G3] Lemma 3.3. $\forall t \in (0, T)$에서 $k^*(t) < M$이면 다음이 bounded이다.

$$\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t)\, d\theta$$

Proof.

$$\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \log k\, d\theta = \int_0^{2\pi} -(k_\theta)^2 + k^2 - \frac{2\pi}{L} k\, d\theta \tag{3.10}$$

Open set $U = \{\theta : k(\theta, t) > k^*(t)\}$는 countable disjoint open interval I_i들의 union이다. Median curvature의 정의에 의해 $|I_i| \le \pi$이다. $\forall I_i$에서,

$$\int_{\bar{I}_i} \left\{ -(k_\theta)^2 + k^2 - \frac{2\pi}{L} k \right\} d\theta \le \left(2k^* - \frac{2\pi}{L} \right) \int_{\bar{I}_i} k\, d\theta \tag{3.11}$$

(여기에서 $k^2 = (k - k^*)^2 + 2kk^* - (k^*)^2$라는 사실과 Wirtinger inequality $\int_{\bar{I}_i} k_\theta^2 \ge \int_{\bar{I}_i} (k - k^*)^2$를 사용했다.)

Boundedness of Log Curvature

U의 complement에서 estimate $k(\theta,t) \leq k^*(t)$가 성립하므로,

$$\int_{U^C} \left\{ -(k_\theta)^2 + k^2 - \frac{2\pi k}{L} \right\} d\theta \leq (k^*(t))^2 \, |U^C| - \frac{2\pi}{L} \int_{U^C} k \; d\theta \tag{3.12}$$

(3.10), (3.11), (3.12)와 $\frac{4\pi^2}{L^2} - L_t = \int k^2 \; ds = \int k \; d\theta$임을 조합하면,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \log k \; d\theta &\leq 2k^* \int k \; d\theta - \frac{2\pi}{L} \int k \; d\theta + 2\pi \, (k^*(t))^2 \\ &\leq 2M \left(\frac{4\pi^2}{L} - \frac{dL}{dt} \right) + 2\pi M^2 \qquad (3.13) \\ &\leq 2M \left(2\pi \sqrt{\frac{\pi}{A}} - \frac{dL}{dt} \right) + 2\pi M^2 \end{aligned}$$

마지막 줄은 isoperimetric inequality에서 따라온다. 적분하면,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log k(\theta,t) \; d\theta \leq \int_0^{2\pi} \log k(\theta,0) \; d\theta + 4\pi M \cdot \sqrt{\frac{\pi}{A}} t \\ - 2M(L(t) - L(0)) + 2\pi M^2 t \end{aligned} \tag{3.14}$$

Estimates for APCSF

[G3] Lemma 3.4. Initial curve에만 의존하는 상수 C가 존재하여,

$$\int_0^{2\pi} (k_\theta)^2 \, d\theta \le \int_0^{2\pi} k^2 \, d\theta - \int_0^t \left\{ \frac{4\pi L_t}{L^2} \int_0^{2\pi} k(\theta,t) \, d\theta \right\} d\tau + C \quad (3.15)$$

Proof. curvature의 evolution equation을 사용하자.

$$\frac{d}{dt}\left(\int -(k_\theta)^2 + k^2 - \frac{4\pi}{L} k \, d\theta \right) = 2\int_0^{2\pi} k^2 (k_{\theta\theta} + k - \frac{2\pi}{L})^2 + \frac{4\pi}{L^2}\frac{dL}{dt}\int k \, d\theta \quad (3.16)$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dt}\left(\int (k_\theta)^2 \right) \le -\frac{4\pi}{L^2}\frac{dL}{dt}\int k \, d\theta + \frac{d}{dt}\left(k^2 \, d\theta\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{L}\int k \, d\theta \right) \quad (3.17)$$

이 방정식을 적분하면 (3.15)를 얻는다.

Estimates for APCSF

[G3] Lemma 3.5. 만약 $[0, 2\pi] \times [0, T)$에서 $k(\theta, t) \le M$이면,

$$\int_0^{2\pi} (k_\theta)^2 \, d\theta \le 2\pi M^2 + DM + C$$

여기에서 D, C는 initial curve에만 의존하는 상수들이다.

Proof. $dL/dt \le 0$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} -\int_0^t \left\{ \frac{4\pi}{L^2} \frac{dL}{d\tau} \int_0^{2\pi} k(\theta, t) \, d\theta \right\} d\tau &\le -2\pi M \int_0^t \frac{4\pi^2}{L} \frac{dL}{d\tau} \, d\tau \\ &= 8\pi^2 M \left(\frac{1}{L(t)} - \frac{1}{L(0)} \right) \qquad (3.18) \\ &\le DM \end{aligned}$$

Isoperimetric inequality에 의해 $L(t)$는 bounded below이다. (3.15)에서 (3.18)을 사용하라. □

[G3] Proposition 3.6. $M := \sup\{k_{\max}(t) : t \in [0, T)\}$라 하면 initial condition에만 의존하는 constant들이 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$\sup\left\{\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t)\, d\theta : t \in [0, T)\right\} + C_2 T \geq C_3 \log M + C_4 \quad (3.19)$$

Proof. t_1에서 $k_{\max}(t_1) = \frac{3}{4}M > 0$이고 θ_1에서 $k(\theta_1, t_1) = \frac{3}{4}M$라 하면,

$$\begin{aligned} k(\theta_1, t_1) - k(\theta, t_1) = \int_\theta^{\theta_1} k_\theta\, d\theta &\leq \left(\int_0^{2\pi} (k_\theta)^2\right)^{1/2} (\theta_1 - \theta)^{1/2} \\ &\leq (2\pi M^2 + DM + C)^{1/2} (\theta_1 - \theta)^{1/2} \\ &\leq M\left(2\pi + \frac{D}{M} + \frac{C}{M^2}\right)^{1/2} (\theta_1 - \theta)^{1/2} \\ &\leq MC_1(\theta_1 - \theta)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

(Lemma 3.5, $2\pi = \int k\, ds \leq k_{\max} L$, isoperimetric inequality를 사용했다.)

Estimates for APCSF

(3.20)을 다음과 같이 재표현하자.

$$k(\theta, t_1) \geq \frac{3}{4}M - MC_1(\theta_1 - \theta)^2$$

이제 만약 $C_1(\theta_1 - \theta)^{1/2} \leq 1/4$이면 다음과 같이 estimate할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t_1)\, d\theta &\geq \int_{|\theta_1 - \theta| < (1/4C_1)^2} \log k(\theta, t_1) + \int_{|\theta - \theta_1| > (1/4C_1)^2} \log k(\theta, t_1) \\ &\geq \log\left(\frac{M}{2}\right) \cdot \frac{2}{(4C_1)^2} + \left(2\pi - \frac{2}{(4C_1)^2}\right) \log(k_{\min}(0) e^{-\mu t_1})\end{aligned} \tag{3.21}$$

둘째 적분의 lower bound는 Lemma 3.1에서 주어진 curvature lower bound에서 따라온다. 식 (3.19)는 (3.21)에서 직접 따라온다.

Convergence of APCSF

[G3] Theorem 4.1. Convex APCSF는 convexity를 유지하며 C^∞ distance 하에서 원으로 수렴한다. 곡선에 의해 둘러싸인 넓이는 항상 일정하다.

Proof. [**G-H**] Section 2에서 사용한 것과 동일한 기법에 의해 임의의 initial curve에 대하여 (4.1)의 해가 짧은 시간 동안 존재한다. (4.1)의 해가 time interval $[0, T)$ ($T < \infty$)에서 존재한다면 Proposition 3.2, 3.3, 3.6에 의해 k^*, $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t)\, d\theta$, $k(\theta, t)$가 이곳에서 bounded이다. [**G-H**] Section 4.4에서와 유사한 k의 고계도함수의 L_2-norm에 대한 estimate 들을 사용하면 k의 모든 고계도함수들도 bounded이며 따라서 k가 T에서 C^∞ 함수로 수렴하여 closed curve를 정의함을 알 수 있다. (일반적으로 추가적인 항 $-2\pi k^2/L$은 estimate을 더 간단히 만들어주거나, 적어도 더 어렵게 만들지는 않는다.)

Convergence of APCSF

이제 단시간 존재성을 이용하여 해가 정의되도록 하는 time interval을 확장할 수 있다. 따라서 해가 time interval $[0, \infty)$에서 정의된다. Convergence를 확인하자. Corollary 2.4에 의해 곡선이 Hausdorff distance 하에서 원으로 converge함을 알 수 있다; [**G-H**]의 Lemma (5.1)-(5.5)는 maximum/minimum curvature의 비가 1로 converge함을 보여준다; 따라서 curvature k는 initial area에 의해 결정된 constant로 converge 한다. 이제 [**G-H**]의 Section 5.7에서의 estimate들을 모방하면 k의 모든 도함수들이 0으로 converge한다.

First Łojasiewicz Inequality

$f : U \to \mathbb{R}$이 $\mathbb{R}^n$의 open subset에서의 real analytic function이며 Z가 f의 zero set이라 하자. Z가 nonempty라 가정하자. 그 경우 U에서의 임의의 compact set K에 대하여 $\alpha \geq 2$와 positive constant C가 존재하여 모든 $x \in K$에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$\inf_{z \in Z} |x - z|^\alpha \leq C|f(x)| \tag{0.1}$$

여기에서 α는 클 수도 있다.

Second Łojasiewicz Inequality

f에 대한 동일한 가정 하에서, 모든 $p \in U$에 대하여 p의 (더 작을 수 있는) neighborhood W와 constant $\beta \in (0,1)$과 $C > 0$이 존재하여 모든 $x \in W$에 대하여 다음이 성립하도록 한다.

$$|f(x) - f(p)|^{\beta} \leq C|\nabla_x f| \tag{0.2}$$

이 부등식은 p가 f의 critical point가 아닌 경우에는 자명하게 성립함을 기억해 두라.
(0.2)의 한 가지 즉각적인 결과는 f의 임의의 critical point에 대하여 neighborhood가 존재하여 해당 neighborhood 내의 다른 모든 critical point가 동일한 값을 가지도록 한다는 것이다. 이것이 성립하지 않는 smooth function을 간단히 구축할 수 있다.

Łojasiewicz Theorem

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$이 analytic function이고 $x = x(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$이 curve이며 $x'(t) = -\nabla f$이고 $x(t)$가 accumulation point x_∞를 가지면 curve의 길이가 유한하며 다음이 성립한다.

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\infty \tag{0.11}$$

이에 더해 x_∞는 f의 critical point이다.

Proof. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$이 differentiable function이라 하자. $x = x(t)$가 $[0,\infty)$에서 parametrize된 $\mathbb{R}^n$에서의 curve이며 velocity가 $x' = -\nabla f$라 하자. 제2 Łojasiewicz 부등식이 지수 $1 > \beta > 1/2$에 대하여 성립한다 하자. 곡선 $x(t)$의 길이는 $\int |\nabla f|$이다. 따라서 우리는 $\int_1^\infty |\nabla f|\, ds$가 유한함을 보여야 한다. $f(x_\infty) = 0$이라 가정하자. 만약 $f(t) = f(x(t))$라 하면 $f' = -|\nabla f|^2$이다. 제2 Łojasiewicz 부등식에 의해 $x(t)$가 x_∞에 충분히 가까우면 $f' \le -f^{2\beta}$이며 $(f^{1-2\beta})' \ge (2\beta - 1)$이다. 적분하면,

$$f(t) \le C t^{\frac{-1}{2\beta-1}} \tag{0.12}$$

Łojasiewicz Theorem

$\int_1^\infty |\nabla f|\ ds$가 유한함을 보이자. Schwarz 부등식에 의해,

$$\int_1^\infty |\nabla f|\ ds = \int_1^\infty \sqrt{-f'}\ ds \le \left(-\int_1^\infty f' s^{1+\varepsilon}\ ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^\infty s^{-1-\varepsilon}\ ds\right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.13}$$

그러므로 다음이 uniformly bounded임을 보이면 충분하다.

$$-\int_1^T f' s^{1+\varepsilon}\ ds \tag{0.14}$$

부분적분하면 다음을 얻는다.

$$\int_1^T f' s^{1+\varepsilon}\ ds = |fs^{1+\varepsilon}|_1^T - (1+\varepsilon)\int_1^T fs^\varepsilon\ ds \tag{0.15}$$

$\varepsilon > 0$을 β에 의존하도록 충분히 작게 선택하면 이것이 T에 독립적으로 bounded임을 보일 수 있으며 따라서 $\int_1^\infty |\nabla f|\ ds$가 유한하다. 그러므로 $t \to \infty$에서 $x(t) \to x_\infty$로 수렴한다. x_∞가 $x(t)$의 accumulation point 이며 f가 curve를 따라 nonincreasing이므로 x_∞는 f의 critical point이다.

Result for MCF

M_t가 **mean curvature flow (MCF)**임은 $x_t = -H\mathbf{n}$인 것이다.

Tangential flow는 singularity에서의 rescaling들의 sequence의 limit이다. 예를 들어 M_t의 spacetime origin에서의 tangential flow는 rescaled flow $\frac{1}{\delta_i} M_{\delta_i^2 t}$들의 $\delta_i \to 0$에서의 limit이다. 서로 다른 sequence δ_i들은 서로 다른 tangential flow를 제공할 수 있으며, (sequence에 독립적인) blowup의 유일성 문제는 여러 기하학적 문제에서의 주요 질문이다.
MCF의 경우 tangential flow는 **shrinker**, i.e. rescaling에 의해 time-evolve 하는 MCF의 self-similar solution임이 알려져 있으며, 일반적인 shrinker는 원뿐임이 알려져 있다.
Singularity가 **cylindrical**임을 적어도 하나의 tangential flow가 cylinder $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$인 것으로 정의한다.

Theorem 1.2. M_t가 $\mathbb{R}^{n+1}$에서의 MCF라 하자. 각각의 cylindrical singularity에서 tangential flow가 유일하다. 즉 임의의 다른 tangential flow도 동일한 방향을 가리키는 동일한 $\mathbb{R}^k$ factor를 가지는 cylinder이다.

F-Functional

F**-functional** 또는 **Gaussian area**는 Gaussian의 hypersurface Σ에서의 적분으로 정의된다:

$$F(\Sigma) = (4\pi)^{-n/2} \int_{\Sigma} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4}\right) \, d\mu \tag{2.1}$$

Entropy는 모든 center와 scale에 대한 Gaussian area의 supremum이다:

$$\lambda(\Sigma) = \sup_{t_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}^n} (4\pi t_0)^{-n/2} \int_{\Sigma} \exp\left(-\frac{|x - x_0|^2}{4t_0}\right) \, d\mu \tag{2.2}$$

First variation formula에 의해 F의 gradient는 다음과 같다:

$$\nabla_{\Sigma} F(\psi) = \int_{\Sigma} \left(H - \frac{\langle x, \mathbf{n} \rangle}{2}\right) \psi \exp\left(-\frac{|x|^2}{4}\right) \tag{2.3}$$

그러므로 F의 critical point들은 shrinker, i.e. $H = \frac{1}{2} \langle x, \mathbf{n} \rangle$을 만족시키는 hypersurface들이다. 이들 중 가장 중요한 것은 cylinder $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \in \mathcal{C}_k$ 들이다. $\mathcal{C} = \bigcup_k \mathcal{C}_k$라 하자.

F-Functional and MCF

Family of hypersurface Σ_s가 다음을 만족시킨다면 이는 F-functional에 대한 negative gradient flow에 의해 evolve한다.

$$(\partial_s x)^{\perp} = -H\mathbf{n} + x^{\perp}/2 \tag{2.4}$$

Σ_s는 MCF M_t로부터 $\Sigma_s \frac{1}{\sqrt{-t}} M_t, s = -\log(-t)$ $(t < 0)$이라 설정하여 얻은 것이므로 rescaled MCF라 불린다. (2.3)에 의해 F-functional의 critical point (이와 동치로 rescaled MCF의 stable point)들은 MCF에 대한 shrinker들이다. Rescaled MCF가 유일한 asymptotic limit을 가질 필요충분조건은 대응하는 MCF가 singularity에서 유일한 tangential flow를 가지는 것이다.

Noncompact Łojasiewicz Inequalities

본질적으로 다음과 유사한 부등식들이 성립한다:

$$\operatorname{dist}(\Sigma, \mathcal{C})^2 \leq C|\nabla_\Sigma F| \tag{2.5}$$

$$(F(\Sigma) - F(\mathcal{C}))^{\frac{2}{3}} \leq C|\nabla_\Sigma F| \tag{2.6}$$

식 (2.5)는 ∇F에 대한 제1 Łojasiewicz 부등식에 대응하며, (2.6)은 F에 대한 제2 Łojasiewicz 부등식에 대응한다.

Euclid 공간에서 classical Łojasiewicz gradient inequality의 결과로 critical point 주위에 다른 critical value가 없다는 사실을 언급했다. Cylinder 주위에서 F-functional에 대한 Łojasiewicz gradient inequality의 결과로 다음이 성립한다:

Theorem 2.7. 큰 컴팩트 집합에서 cylinder에 충분히 가까운 모든 shrinker는 cylinder여야 한다.

Gaussian L^2 Distance From $\mathcal{C}_k$ in a Ball of Radius R

$\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$이 hypersurface라 하고 충분히 작은 $\varepsilon_0 > 0$을 고정하자. 큰 정수 l과 큰 상수 C_l이 주어진 경우 $\mathbf{r}_l(\Sigma)$가 다음을 만족시키는 최대 radius라 하자:

- $B_{\mathbf{r}_l(\Sigma)} \cap \Sigma$가 $\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq \varepsilon_0$를 만족시키는 함수 u의 $\mathcal{C}_k$에 속한 cylinder 상에서의 graph이며 $\|\nabla^l A\| \leq C_l$이다.

주어진 cylinder $\Sigma_k \in \mathcal{C}_k$에 대하여 $w_{\Sigma_k} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$이 Σ_k의 axis로부터의 distance라 하자. Gaussian L^2 distance $d_{\mathcal{C}}(R)$을 다음을 통해 정의한다:

$$d_{\mathcal{C}}^2(R) = \inf_{\Sigma_k \in \mathcal{C}_k} \|w_{\Sigma_k} - \sqrt{2k}\|_{L^2(B_R)}^2 := \inf_{\Sigma_k \in \mathcal{C}_k} \int_{B_R \cap \Sigma_k} (W_{\Sigma_k} - \sqrt{2k})^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}} \tag{2.8}$$

여기에서 Ball B_R에서의 Gaussian L^p norm은 다음과 같다:

$$\|u\|_{L^p(B_R)}^p = \int_{B_R} |u|^p \exp\left(-\frac{|x|^2}{4}\right)$$

First Noncompact Łojasiewicz Inequality

일반적인 hypersurface Σ가 주어진 경우 함수 ϕ를 다음과 같이 정의하는 것이 편리하다. (따라서 ϕ는 F-functional의 negative gradient이다.)

$$\phi = \frac{\langle x, \mathbf{n} \rangle}{2} - H \tag{2.9}$$

Theorem 2.10. 만약 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$이 $\lambda(\Sigma) \leq \lambda_0$를 만족시키는 hypersurface 이며 $R \in [1, \mathbf{r}_l(\Sigma) - 1]$이면 다음이 성립한다.

$$d_{\mathcal{C}}^2(R) \leq CR^{\rho} \left\{ \|\phi\|_{L^1(B_R)}^{b_{l,n}} + \exp\left(-\frac{b_{l,n} n^2}{4} \right) \right\} \tag{2.11}$$

여기에서 $C = C(n, l, C_l, \lambda_0), \rho = \rho(n), b_{l,n} \in (0, 1), \lim_{l \to \infty} b_{l,n} = 1$이다.

Second Noncompact Łojasiewicz Inequality

Theorem 2.12. 위와 같은 Σ, R과 $\beta \in (0,1)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$|F(\Sigma) - F(\mathcal{C}_k)| \le CR^\rho \left\{ \|\phi\|_{L^2(B_R)}^{c_{l,n}\frac{3+\beta}{2+2\beta}} + \exp\left(-\frac{c_{l,n}(3+\beta)n^2}{8(1+\beta)}\right) + \exp\left(-\frac{(3+\beta)(R-1)^2}{16}\right)\right\} \tag{2.13}$$

여기에서 $C = C(n, l, C_l, \lambda_0), \rho = \rho(n), c_{l,n} \in (0,1), \lim_{l\to\infty} c_{l,n} = 1$이다.

정리를 응용할 때 parameter β, l은 ∇F 항의 exponent가 > 1이도록 선택한다. 이는 본질적으로 $|F(\Sigma) - F(\mathcal{C})|$의 $|\nabla F|$의 1차 초과의 power에 의해 bound되도록 한다. exponential decay하는 error term들을 다루기 위해서는 별개의 논의가 필요하다: Rescaled MCF의 특수한 경우에는 두 항이 모두 $\|\phi\|_{L^2}$의 1차 초과의 power에 의해 bound된다. (제1 부등식에 대한 대응하는 진술도 성립한다.) 그러므로 Rescaled MCF에 대하여,

$$d_{\mathcal{C}}^2 \le C|\nabla_{\Sigma_t} F| \tag{2.14}$$

$$(F(\Sigma_t) - F(\mathcal{C}))^{\frac{2}{3}} \le C|\nabla_{\Sigma_t} F| \tag{2.15}$$

Singular Set of MCF

Theorem 5.1. $M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$이 cylindrical singularity만을 가지는 embedded closed hypersurface의 MCF라 하자. 그 경우 spacetime singular set은 다음을 만족시킨다:

• 이는 $n-1$차원 이하의 유한 개 (compact) embedded Lipschitz submanifold들 및 $n-2$차원 이하의 집합에 포함된다. • 이는 공간에서의 2-Hölder function들의 countably many graph들로 구성된다. • finite parabolic 2-dim Hausdorff measure가 유한하도록 하는 각각의 subset의 time image는 measure zero이다; 이러한 각각의 connected subset은 time-slice에 포함된다.

Corollary 5.2. $M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$이 embedded mean convex closed hypersurface의 MCF이며 generic singularity만을 가진다 하자. 그 경우 Theorem 1.2의 결론(i.e. tangential flow가 유일하다)이 성립한다.

Singular Set of MCF

Corollary 5.3. 만약 M_t가 THeorem 5.1에서와 같으며 $n = 2$ 또는 3이면 evolving hypersurface는 a.e. time에서 smooth hypersurface이다. 특히 spacetime singular set의 임의의 connected subset은 time-slice에 포함된다.

Corollary 5.4. $\mathbb{R}^3$ 또는 $\mathbb{R}^4$에서의 generic MCF 또는 $\mathbb{R}^3$ 또는 $\mathbb{R}^4$에서의 embedded mean convex closed hypersurface에서 시작하는 flow에 대하여 Corollary 5.3의 결론이 성립한다.

Corollary 5.4의 결론들은 initial hypersurface가 2- 또는 3-convex이면 모든 dimension에서 성립한다. (hypersurface *k*-**convex**함은 임의의 k개 principal curvature들의 합이 nonnegative인 것이다.)