

Convergence of CSF and APCSF (곡선단축류 및 면적보존 곡선단축류의 수렴)

Dyne Kim

May 17, 2024

복습

호길이 매개화된 폐곡선 $\gamma(s)$ 에 대하여, $T(s), N(s)$ 는 단위접선/단위내향법선벡터이다. $k(s)$ 는 곡률이다. 특히,

$$X'(s) = T(s), T'(s) = kN(s), N'(s) = -kT(s)$$

지지함수는 $p(s) = \langle X, -N \rangle$ 이다. L 과 A 가 γ 의 길이 및 γ 가 둘러싸는 영역의 면적이라 하면,

$$A = \frac{1}{2} \int_0^L \langle X, -N \rangle \, ds = \frac{1}{2} \int_0^L p \, ds, \quad L = \int p k \, ds$$

감은수가 ν 이면 전곡률은 $2\pi\nu$ 이다:

$$\int k \, ds = 2\pi\nu$$

볼록 곡선의 경우 s 대신 T 와 x 축의 각도 θ 를 매개변수로 사용 가능하다.

Bonnesen 부등식

[Ep-G] Proposition A.1. 전곡률 $2\pi\nu$ 의 곡선에서 임의의 상수 r 에 대하여 다음 공식이 성립한다:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi\nu} [p_\theta^2 - (p - r)^2] d\theta = rL - A - \nu\pi r^2 \quad (\text{A.1})$$

Proof. $(p - r)^2$ 를 전개하고 공식 (3.3)과 (3.4)를 적용하라.

[Ep-G] Lemma A.2. (A.1)의 좌변은 다음 중 하나가 성립하면 양수이다:

(i) $\int_0^{2\pi\nu} (p - r) d\theta = 0$, i.e. $r = \frac{L}{2\pi\nu}$ 이며, $0 < l < \nu$ 에 대하여

$$\int_0^{2\pi\nu} e^{il\theta/\nu} p(\theta) d\theta = 0.$$

(ii) $(p - r)$ 의 이웃한 영점들 간의 거리가 항상 π 이하이다.

Bonnesen 부등식

Proof. Poincaré 부등식은 f 가 고유치가 1 미만인 $\frac{d^2}{dx^2}$ 의 모든 고유함수들에 수직하면 다음이 성립한다고 기술한다:

$$\int_0^{2\pi\nu} (f_\theta^2 - f^2) d\theta \geq 0$$

보조정리의 (a) 부분은 이 사실에서 즉시 따라온다. 만약 f 가 $f(a) = f(b) = 0$ 을 만족시키는 함수이며 $|a - b| \leq \pi$ 이면 다음의 Wirtinger 부등식에서 (b)가 따라온다.

$$\int_a^b (f_\theta^2 - f^2) d\theta \geq 0$$

Bonnesen 부등식

[Ep-G] **Proposition A.3.** 볼록 매장 곡선에 대하여 다음이 성립한다.

$$rL - A - \pi r^2 \geq 0 \quad (r \in [r_{\text{in}}, r_{\text{out}}])$$

여기에서 r_{in} 은 최대 내접원의 반경이며 r_{out} 은 최소 외접원의 반경이다.

Proof. $rL - A - \pi r^2$ 가 오목 함수이므로 $r = r_{\text{in}}$ 또는 r_{out} 에서 이것이 양수임을 보이면 충분하다. 최대 내접원의 중심을 원점으로 하여 지지함수 p 를 정의한다면 $p - r_{\text{in}}$ 의 이웃한 두 영점 간의 거리는 π 이하이다; 만약 이것이 성립하지 않으면 간단한 변분법적 논의에 의해 r_{in} 이 최대 내접원 반경이 아니다. 마찬가지로 최소 외접원의 중심을 원점으로 하여 p 를 정의하면 $p - r_{\text{out}}$ 의 영점들은 π 이하로 떨어져 있다. 두 경우 모두 Lemma A.2는 $rL - A - \pi r^2 \geq 0$ 임을 함의한다.

Bonnesen 부등식

[Ep-G] Corollary A.4. 볼록 단순곡선에 대하여 다음이 성립한다:

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A} (r_{\text{out}} - r_{\text{in}})^2 \quad (\text{A.2})$$

Proof. $rL - A - \pi r^2 = 0$ 의 작은 근이 r_{in} 이하이며 큰 근이 r_{out} 이상임을 관찰한 후 2차방정식의 근의 공식을 적용하라.

[G2] Lemma 3.1. 만약 $\lim_{t \rightarrow T} A(t) = 0$ 이면 다음이 성립한다.

$$\liminf_{t \rightarrow T} L(t) \left(\int_{\gamma(t)} k^2 ds - \pi \frac{L(t)}{A(t)} \right) \leq 0$$

Proof. 등주비의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\frac{L^2}{A} \right)_t = -2 \frac{L}{A} \left(\int k^2 ds - \pi \frac{L}{A} \right) \quad (8)$$

만약 T 의 근방에서 $L \left(\int k^2 ds - \pi \frac{L}{A} \right) > \varepsilon$ 이면 다음이 성립한다.

$$\left(\frac{L^2}{A} \right)_t \leq -2 \frac{\varepsilon}{A} = \frac{\varepsilon}{\pi} (\log A)_t \quad (t_1 < t < T) \quad (9)$$

$$\frac{L^2}{A}(t) \leq \frac{L^2}{A}(t_1) - \frac{\varepsilon}{\pi} \log(A(t_1)) + \frac{\varepsilon}{\pi} \log(A(t)), \quad (t_1 \leq t < T) \quad (10)$$

좌변은 4π 초과이지만 우변은 $t \rightarrow T$ 에서 $-\infty$ 로 발산하므로 모순이다.

Hausdorff 거리

A, B 가 볼록 닫힌집합이라 하자. $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$ 라 하면 집합 A 와 B 간의 Hausdorff 거리는 다음과 같다.

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon : A \subseteq B_\varepsilon \text{ and } B \subseteq A_\varepsilon\}$$

Blaschke 선택 정리(Blaschke selection theorem)는 \mathbb{R}^2 의 고정된 유계 영역에 포함된 볼록집합들의 임의의 무한족이 Hausdorff 거리 하에서 극한 볼록집합으로 수렴하는 부분열을 가짐을 보장한다.

집합 G 의 내반경 r_{in} 은 최대 내접원의 반경이며 외반경 r_{out} 은 최소 외접원의 반경이다. 볼록집합에 대하여 $L, A, r_{\text{in}}, r_{\text{out}}$ 은 Hausdorff 거리에 의해 유도된 위상에 대하여 연속한 범함수들이다.

[G2] Lemma 3.2. 모든 C^1 볼록 곡선 γ 에 대하여 정의된 음 아닌 범함수 $F(\gamma)$ 가 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$LA(1 - F(\gamma)) \geq \pi \int p^2 \, ds \quad (11)$$

$\lim_{i \rightarrow \infty} F(\gamma_i) = 0$ 을 만족시키는 볼록 곡선들의 열 γ_i 가 주어진 경우

정규화된 곡선 $\eta_i = \sqrt{\pi/A}\gamma_i$ 들을 고려하자. 이러한 정규화된 곡선들이 평면의 고정된 유계 영역에 포함된다면 이들에 의해 둘러싸인 영역 H_i 들은 Hausdorff 거리 하에서 단위원판으로 수렴한다. 마지막으로 $F(\gamma) = 0$ 일 필요충분조건은 γ 가 원인 것이다.

Proof. 증명은 3단계로 진행된다: 먼저 원점에 대하여 대칭인 볼록 곡선에 대하여 부등식 (11)을 증명할 것이다; 그 후 $\lim_{i \rightarrow \infty} F(\gamma_i) = 0$ 인 경우의 γ_i 의 수렴성을 분석할 것이다; 마지막으로 이러한 결과들을 모든 볼록 곡선들로 확장할 것이다.

Step 1. 원점에 대하여 대칭인 볼록 곡선들에 대하여 다음을 보이자.

$$LA - \pi \int p^2 ds \geq LA \cdot E(\gamma) \quad (17)$$

여기에서 $E(\gamma)$ 는 다음과 같이 정의된 음 아닌 값 범함수이다.

$$E(\gamma) = 1 + \frac{\pi r_{\text{in}} r_{\text{out}}}{A} - \frac{2\pi(r_{\text{out}} + r_{\text{in}})}{L} \quad (18)$$

Bonnensen 부등식을 고려하자. (곡선이 원인 경우에만 등호가 성립한다.)

$$rL - A - \pi r^2 \geq 0 \quad (r_{\text{in}} \leq r \leq r_{\text{out}}) \quad (19)$$

(19)의 좌변은 r 에 대한 오목 함수이며 따라서 그 그래프는 다음 점들을 지나는 할선분의 그래프보다 위쪽에 놓인다.

$$(r_{\text{in}}, r_{\text{in}} - A - \pi(r_{\text{in}}^2)), \quad (r_{\text{out}}, r_{\text{out}}L - A - \pi(r_{\text{out}})^2)$$

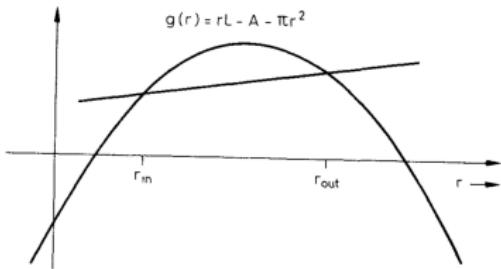


Figure 1

이는 $r_{\text{in}} \leq r \leq r_{\text{out}}$ 인 경우 다음이 성립함을 함의한다.

$$\begin{aligned} rL - A - \pi r^2 &\geq (r - r_{\text{in}}) \frac{(r_{\text{out}}L - A - \pi r_{\text{out}}^2)}{r_{\text{out}} - r_{\text{in}}} \\ &+ (r_{\text{out}} - r) \frac{(r_{\text{in}}L - A - \pi(r_{\text{in}})^2)}{r_{\text{out}} - r_{\text{in}}} \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

볼록 대칭 곡선의 지지함수 p 는 $r_{\text{in}} \leq p \leq r_{\text{out}}$ 을 만족시키므로,

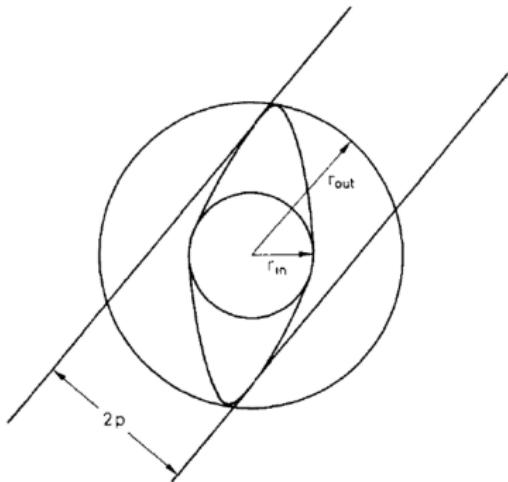


Figure 2

(20)에서 r 을 p 로 대체한 후 곡선 상에서 호길이에 대하여 적분하면 (17)을 얻는다. 만약 $E(\gamma)$ 가 0이면 (20)의 우변이 0이며 따라서 (19)에서 $r = r_{\text{out}}$ 인 경우 등호가 성립한다. 이는 γ 가 원임을 함의한다.

Step 2. γ_i 가 원점에 대하여 대칭인 볼록 곡선들의 열이라 하자.

$\eta_i = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\gamma_i$ 가 정규화된 곡선들의 열이라 하고 H_i 가 η_i 에 의해 둘러싸인 영역이라 하자. 만약 $\lim_{i \rightarrow \infty} E(\gamma_i) = 0$ 이면 (E 가 \mathbb{R}^2 의 척도변환 하에서 불변이므로) $\lim_{i \rightarrow \infty} E(\eta_i) \rightarrow 0$ 이다. $\{H_i\}$ 들이 모두 \mathbb{R}^2 의 유계 영역에 포함된다 가정하자. Blaschke 정리는 부분열 $\{H_{i_k}\}$ 가 존재하여 극한 볼록집합 H_∞ 로 수렴한다고 기술한다. $A, L, r_{\text{in}}, r_{\text{out}}$ 이 모두 볼록집합에 대한 연속 범함수들이므로 E 도 연속이다; 따라서 $E(H_\infty) = \lim E(H_{i_k}) = 0$ 이다. Step 1에 의해 H_∞ 가 단위원판임이 따라온다. $\{H_i\}$ 의 모든 수렴하는 부분열은 단위원판으로 수렴하며 따라서 전체 열 $\{H_i\}$ 도 Hausdorff 거리 하에서 단위원판으로 수렴해야 한다.

Step 3. 임의의 볼록 곡선 γ 에 대하여 곡선이 둘러싸는 영역을 등면적 2분할하는 직선 중 양 끝점에서 γ 의 접선벡터들이 평행하도록 하는 것을 찾을 수 있다. ([1]을 참조하라): 곡선 γ 의 각각의 점 $X(s)$ 에 대하여 $X(s)$ 에서 $Y(s)$ 로의 직선이 γ 에 의해 둘러싸인 영역을 등면적 2분할하도록 하는 유일한 점 $Y(s)$ 가 존재한다. $T_{X(s)}$, $T_{Y(s)}$ 는 각각 $X(s)$, $Y(s)$ 에서의 접선벡터이며 n 이 평면의 양의 방향 법선벡터라 하고 함수 $f(X(s)) = \langle T_{X(s)} \times T_{Y(s)}, n \rangle$ 를 정의하자. γ 가 C^1 이므로 f 는 연속하며 $f(X(s)) = -f(Y(s))$ 가 성립한다. 중간값 정리에 의해 어떠한 s_1 에 대하여 $f(X(s_1)) = 0$ 이며 $T_{X(s_1)} = -T_{Y(s_1)}$ 임이 따라온다.

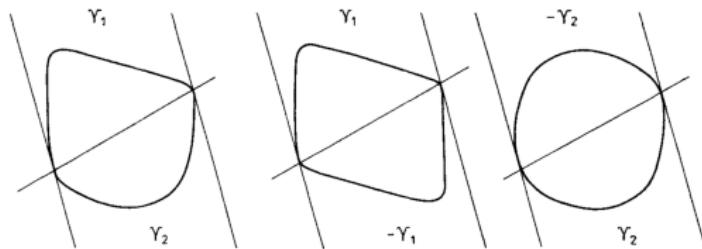


Figure 3

이 선분이 x 축 상에 놓이며 선분의 중점이 원점이도록 하는 좌표계를 선택하자. γ 의 x 축보다 위에 놓인 부분을 γ_1 로 표기하고 이를 원점에 대하여 반사시킨 것을 $-\gamma_1$ 이라 하자. 이들을 합친 것은 원점에 대하여 대칭인 C^1 볼록 폐곡선을 형성한다. (Fig. 3을 참조하라.) 이 곡선에 의해 둘러싸인 면적은 γ 에 의해 둘러싸인 면적과 같다. 이 곡선의 길이를 $2L_1$ 로 표기하자. 부등식 (17)을 $(\gamma_1 \cup (-\gamma_1))$ 에 대하여 적용하고 2로 나누면 다음을 얻는다.

$$L_1 A - \pi \int_{\gamma_1} p^2 ds \geq L_1 A \{ E(\gamma_1 \cup (-\gamma_1)) \} \quad (21)$$

γ 의 x 축보다 아래에 놓인 부분 γ_2 에 대해서도 동일한 부등식을 얻는다. 이들을 조합하면 다음 부등식을 얻는다:

$$LA - \pi \int p^2 ds \geq LA \left\{ \frac{L_1}{L} E(\gamma_1 \cup (-\gamma_1)) + \frac{L_2}{L} E(\gamma_2 \cup (-\gamma_2)) \right\} \quad (22)$$

중괄호 내의 값은 대칭 볼록 곡선을 형성하기 위해 사용된 선분의 선택에 의존할 수 있다. $F(\gamma)$ 가 이러한 모든 선택들에 대한 중괄호 내의 값의 상한이라 하자.

만약 $\eta = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\gamma$ 가 정규화된 볼록 곡선이면 (F 가 척도변환 하에서 불변이므로) $F(\eta) = F(\gamma)$ 이다. 대칭화된 곡선 $\eta_1 \cup (-\eta_1)$ 의 길이 $2L_1$ 은 $\frac{(2L_1)^2}{A} \geq 4\pi$ 를 만족시키며 면적이 π 이므로 2π 에 의해 하방유계이다. 만약 η 의 길이 L 이 상수 C 이하이면 다음이 (22)로부터 따라온다.

$$F(\eta) \geq \frac{\pi}{C} E(\eta_1 \cup (-\eta_1)) \quad (23)$$

동일한 부등식이 η_2 에 대해서도 성립한다.

또한 다음을 간단히 확인할 수 있다.

$$r_{\text{in}}(\eta) \geq \min\{r_{\text{in}}(\eta_1 \cup (-\eta_1)), r_{\text{in}}(\eta_2 \cup (-\eta_2))\} \quad (24)$$

$$r_{\text{out}}(\eta) \leq \max\{r_{\text{out}}(\eta_1 \cup (-\eta_1)), r_{\text{out}}(\eta_2 \cup (-\eta_2))\} \quad (25)$$

고정된 유계 평면 영역에 포함된 정규화된 볼록 폐곡선들의 열 η_i 가 주어진 경우 이들의 길이가 고정된 유계 영역의 볼록포함체(convex hull)의 경계의 길이 이하여야 함을 보일 수 있다. 만약 $\lim_{i \rightarrow \infty} F(\eta_i) = 0$ 이면

(23)에 의해 대칭화된 곡선들에 적용한 범함수 E 가 0으로 수렴할 것이다. Step 2에 의해 대칭화된 곡선들이 둘러싸는 영역이 단위원판으로 수렴한다 결론지을 수 있다; 특히 대칭화된 곡선들의 내반경 및 외반경이 1로 수렴한다. 부등식 (24)와 (25)는 원래 곡선 η_i 들의 내반경 및 외반경들이 1로 수렴해야 하며 따라서 이들에 의해 둘러싸인 영역이 Hausdorff 거리 하에서 단위원판으로 수렴함을 보여준다.

[G2] Lemma 3.3. 동일한 범함수 $F(\gamma)$ 에 대하여, 만약 γ 가 C^2 볼록 곡선이면 다음이 성립한다:

$$\left(\int k^2 ds \right) (1 - F(\gamma)) - \pi \frac{L}{A} \geq 0 \quad (12)$$

Proof.

$$L = \int kp ds \leq \left(\int p^2 ds \right)^{1/2} \left(\int k^2 ds \right)^{1/2} \quad (13)$$

(13)을 제곱하고 부등식 (11)을 사용하면 (12)가 증명된다.

[G2] Theorem 3.4. C^2 볼록 곡선들의 촉 $\gamma(t)$ 가 $0 < t < T$ 에 대하여 CSF 방정식을 만족시키며 $\lim_{t \rightarrow T} A(t) = 0$ 이면 $\lim_{t \rightarrow T} \frac{L^2(t)}{A(t)} = 4\pi$ 가 성립한다. 이에 더해 정규화된 곡선 $\eta(t) = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\gamma(t)$ 에 의해 둘러싸인 볼록 영역 $H(t)$ 는 Hausdorff 거리 하에서 단위원판으로 수렴한다.

Remark. 원점을 적절히 선택하여 $0 \leq t < T$ 에서 항상 원점이 항상 볼록 곡선 $\gamma(t)$ 안쪽에 놓이도록 할 수 있다. 그 경우 정규화된 곡선들의 수렴을 다음과 같이 표현할 수 있다: 각각의 ε 에 대하여 $t_1 < T$ 가 존재하여 $t_1 < t < T$ 에 대하여 $\eta(t)$ 가 원환(annulus) $\{(x, y) : (1 - \varepsilon) < \sqrt{x^2 + y^2} < 1 + \varepsilon\}$ 에 포함되도록 한다.

Proof. (12)를 재정비하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\int k^2 \, ds - \pi \frac{L}{A} \geq \left(\int k^2 \, ds \right) F(\gamma) \quad (14)$$

Schwarz 부등식과 단순폐곡선의 전곡률이 2π 라는 사실에 의해,

$$L \int k^2 \, ds \geq \left(\int k \, ds \right)^2 = 4\pi^2$$

이를 (14)와 조합하면 다음을 얻는다.

$$L \left(\int k^2 \, ds - \pi \frac{L}{A} \right) \geq 4\pi^2 F(\gamma) \quad (15)$$

Lemma 3.1에 의해 곡선들의 부분열 $\gamma(t_i)$ 가 존재하여 (15)의 좌변이 0으로 접근하도록 한다 결론지울 수 있다; 따라서 $F(\gamma(t_i)) \rightarrow 0$ 이다.

다음으로 정규화된 곡선들이 유계 영역에 포함됨을 보이자. 곡선의 척도변환을 할 때 어떤 원점을 사용할지 주의해서 선택해야 한다. 등주비의 도함수 공식으로부터 등주비 L^2/A 가 감소함을 관찰할 수 있다. Bonnesen 부등식과 조합하면,

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A}(r_{\text{out}} - r_{\text{in}})^2 \quad (16)$$

모든 t 에 대하여 정규화된 곡선 $\eta(t)$ 들의 외반경이 상수 R 에 의해 유계임을 알 수 있다. 발전방정식을 만족시키는 볼록 곡선들의 족이 (곡률이 양수이므로) 시간에 따라 수축함은 자명하며, 따라서 연관된 볼록 영역은 $t_2 > t_1$ 일 경우 $\bar{G}(t_2) \subseteq \bar{G}(t_1)$ 을 만족시킨다: 이는 집합

$\bigcap_{0 \leq t < T} \bar{G}(t)$ 가 적어도 한 점으로 구성됨을 함의한다. 이러한 점들 중

하나를 \mathbb{R}^2 의 닮음팽창(homothetic expansion)의 원점으로 사용하면 모든 정규화된 곡선 $\eta(t)$ 들이 이 점을 중심으로 하는 반경 $2R$ 의 원판에 포함된다.

Lemma 3.2를 적용하면 Hausdorff 거리 하에서 단위원판으로 수렴하는 정규화된 영역 $H(t_i)$ 들의 열을 얻는다. L 과 A 가 볼록 영역에 대한 연속 범함수이므로 이 열에 대한 L^2/A 는 4π 로 수렴한다. L^2/A 는 곡선단축 과정 하에서 감소하므로 L^2/A 는 곡선들의 1매개변수족 전체에 대하여 4π 로 수렴해야 한다. 정규화된 곡선에 대해서는 (16)이 r_{out} 과 r_{in} 이 1로 수렴함을 보여주며 이는 정규화된 영역이 단위원판이 되도록 강제한다.

다음과 같이 정의하자. (이는 곡률중간값의 일반화이다.)

$$k_w^* = \sup\{b : \text{길이 } w\text{의 어떠한 구간에서 } k(\theta) > b\}$$

[G-H] Lemma 5.1. r_{in} 과 r_{out} 이 각각 $k(\cdot, t)$ 에 의해 정의된 곡선의 최대 내접원의 반경 및 최소 외접원의 반경이라 하자. w 에 대한 양의 값 감소함수 K 가 존재하여 $K(0) = \infty, K(\pi) = 0$ 이며 다음을 만족시킨다.

$$k_w^*(t)r_{\text{in}}(t) < \frac{1}{1 - K(w)(r_{\text{out}}/r_{\text{in}} - 1)}$$

Proof. $M < k_w^*(t)$ 라 하자. 집합 $\{\theta : k(\theta, t) > M\}$ 은 길이 w 이상의 구간을 포함한다. 매개화를 변경하여 이것이 구간 $(-\pi/2, \pi/2)$ 를 포함한다 가정할 수 있다. 곡선과 $\theta = 0$ 에서 접하는 곡률 M , 각도 w 을 가지는 원호를 구축하면 볼록 곡선이 원호와 원호의 끝점에서 접하는 반직선들을 경계로 가지는 영역에 포함되어야 함을 알 수 있다.

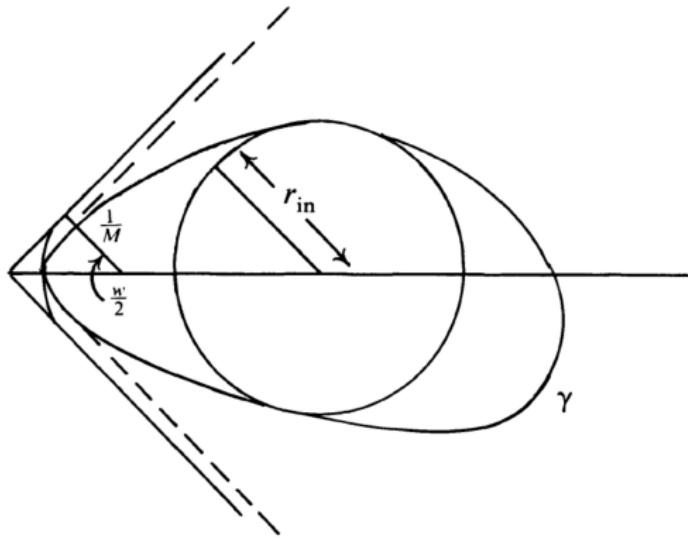


Figure 3

볼록성 가정은 γ 가 점선들보다 안쪽에 놓임을 보장한다. $(-\frac{w}{2}, \frac{w}{2})$ 에서의 추산 $k(\theta) > M$ 은 점선들이 원호와 실선 직선들에 의해 형성된 '뿔' 안쪽에 포함됨을 보장한다.

내접원이 뿐 안쪽에 포함되며 외접원이 곡선의 모든 점을 둘러싸야 하므로, r_{in} 이 주어진 경우 최소 r_{out} 은 Figure 4에서 나타난 배치에 의해 달성된다.

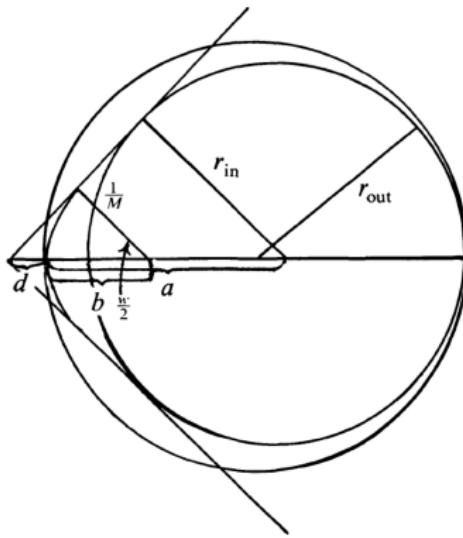


Figure 4

Figure 4와 삼각법에 의해 $|b| = 1/M$ 이며 다음이 성립한다.

$$\cos\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{1/M}{1/M + |d|} = \frac{r_{\text{in}}}{|a| + |d|} \quad (5.1.1)$$

$$2r_{\text{out}} \geq r_{\text{in}} + |a| \quad (5.1.2)$$

따라서,

$$\left(\frac{r_{\text{out}}}{r_{\text{in}}} - 1\right) \geq -\frac{1}{2} + \frac{|a|}{2r_{\text{in}}} \quad (5.1.3)$$

$$|a| = \frac{r_{\text{in}}}{\cos(w/2)} = -\frac{1}{M} \left(\frac{1}{\cos(w/2)} - 1\right) \quad (5.1.4)$$

(5.1.4)를 (5.1.3)에 대입하고 정리하면 다음을 얻는다.

$$Mr_{\text{in}} \leq \frac{1}{1 - K(w)(r_{\text{out}}/r_{\text{in}} - 1)}$$

$$K(w) := \left(\frac{1}{2\cos(w/2)} - \frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2\cos(w/2)}{1 - \cos(w/2)}$$

M 이 $k_w^*(t)$ 에 임의로 가깝게 선택 가능하므로 증명이 완료된다.

[G-H] Corollary 5.2. 임의의 작은 양수 ε 에 대하여 다음이 성립한다.

$$k_{\max}(t)r_{\text{in}} \leq \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} \right) \frac{1}{1 - C_2(\varepsilon)(r_{\text{out}}/r_{\text{in}} - 1)}$$

Proof. 점별 추산의 증명에서, 임의의 ε 에 대하여 만약 $w/2 < \delta$ 이면 모든 $\theta \in (\theta_0 - w/2, \theta_0 + w/2)$ 에 대하여 $k(\theta, t) > (1 - \varepsilon)k_{\max}(t)$ 임을 알 수 있다. (여기에서 $k_{\max}(t) = k(\theta_0, t)$ 이다.) 따라서 모든 t 에 대하여 $k_w^*(t) \geq k_{\max}(t)(1 - \varepsilon)$ 이다. δ 의 선택은 초기 곡선에만 의존한다.

[G-H] Proposition 5.3. 임의의 양수 ε 에 대하여 T 에 충분히 가까운 모든 t 에 대하여 다음이 성립한다.

$$k_{\max}(t)r_{\text{in}}(t) \leq (1 - \varepsilon)^{-2}$$

Proof. Bonnesen 부등식에 의해 다음 추산이 성립한다.

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A}(r_{\text{out}} - r_{\text{in}})^2 \geq \left(1 - \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{out}}} \right)^2$$

CSF 하에서 $r_{\text{out}}/r_{\text{in}} \rightarrow 10$ 으로 결과를 얻는다.

참조: 점별 추산의 증명

$\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$ 가 유계이므로 길이 δ 이하의 구간 $[a, b]$ 를 제외한 곳에서 $k \leq C$ 가 성립한다. 이러한 구간에서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} k(\phi) &= k(a) + \int_a^\phi \frac{\partial k}{\partial \theta} d\theta \leq C + \sqrt{\delta} \left(\int \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right)^{1/2} \\ &\leq C + \sqrt{\delta} \left(\int k^2 d\theta + D \right)^{1/2} \end{aligned}$$

k_{\max} 가 k 의 최댓값이라 하면 이는 다음을 보여준다.

$$k_{\max} \leq C + \sqrt{\delta}(2\pi k_{\max}^2 + D)^{1/2} \leq C + 2\pi\sqrt{\delta}k_{\max} + \sqrt{\delta}D$$

δ 를 작게 선택하면 $k_{\max} \leq 2C$ 가 성립한다.

[G-H] Theorem 5.4. $k(\theta, t)r_{\text{in}}(t)$ 는 1로 균등수렴한다.

Proof. 점별 추산을 증명하기 위해 사용했던 기법을 사용하면 족 $k(\theta, t)r_{\text{in}}(t)$ 가 동등연속(equicontinuous)함수를 간단히 보일 수 있다. 함수 $f(\theta)$ 로 균등수렴하는 부분열이 존재하며, 위 추산으로부터 $f(\theta) \leq 1$ 임이 따라온다. 이제 $(k(\theta, t_i)r_{\text{in}}(t_i))^{-1}$ 이 (확장 실수 체계에서) $f(\theta)^{-1}$ 로 점별 수렴하므로 Fatou 보조정리에 의해 다음이 성립한다.

$$\int \frac{1}{f(\theta)} d\theta \leq \liminf \int \frac{d\theta}{I(\theta, t_i)r_{\text{in}}(t_i)} = \liminf \frac{\int L(t_i)}{r_{\text{in}}(t_i)} = 2\pi$$

반면에 $2\pi \leq \int \frac{1}{f(\theta)} d\theta$ 이다; 따라서 $f(\theta) \equiv 1$ 이다. 모든 수렴하는 부분열이 1로 균등수렴하므로 $k(\theta, t)r_{\text{in}}(t)$ 가 1로 균등수렴한다.

[G-H] Corollary 5.5. $k_{\min}(t)/k_{\max}(t)$ 가 1로 수렴한다.

[G-H], Corollary 5.6. $k(\theta, t)\sqrt{2T - 2t}$ 가 1로 균등수렴한다. (T 에서 곡선에 둘러싸인 면적이 0이다.)

Proof. Bonnesen 부등식에 의해 다음이 성립한다.

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{(L - 2\pi r_{\text{in}})^2}{A} = \left(\frac{L}{\sqrt{A}} - \frac{2\pi r_{\text{in}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right)^2$$

$L/\sqrt{A} \rightarrow 2\sqrt{\pi}$ 로부터 $r_{\text{in}}/\sqrt{T-t} \rightarrow \sqrt{2}$ 임이 따라온다. 이를 Theorem 5.4와 조합하면 증명이 완료된다.

정규화 곡률의 수렴

k 의 도함수들의 수렴 속도를 결정하기 위한 가장 효율적인 방법은 '정규화된' 곡률 κ 의 발전을 고려하는 것이다. κ 는 다음에 의해 정의된다.

$$\kappa(\theta, t) = k(\theta, t) \sqrt{2T - 2t}$$

시간 매개변수를 $\tau = -\frac{1}{2} \log((T-t)/T)$ 로 변경하자. 그 경우,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} \kappa(\theta, \tau) &= \frac{\partial \kappa}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = 2(T-t) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2T-2t}} k(\theta, t) + \sqrt{2T-2t} \frac{\partial k}{\partial t} \right) \\ &= 2(T-t) \left[-\frac{1}{(2T-2t)} \kappa + \sqrt{2T-2t} \left(k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 \right) \right] \\ &= 2(T-t) \left[-\frac{1}{(2T-2t)} \kappa + \frac{1}{2T-2t} \left(\kappa^2 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa^3 \right) \right] \\ \frac{\partial \kappa}{\partial \tau} &= \left(\kappa^2 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa^3 - \kappa \right)\end{aligned}\tag{5.7.0}$$

목표

[G-H] **Theorem 5.7.1.** $I \geq 1, 0 < \alpha < 1$ 에 대하여

$$\left\| \frac{\partial^I \kappa}{\partial \theta^I} \right\|_{\infty} \leq C(I) e^{-2\alpha\tau} \text{이다.}$$

[G-H] **Corollary 5.7.2.** 모든 $I \geq 1, 0 < \alpha < 1$ 에 대하여

$\left\| \frac{\partial^I k}{\partial \theta^I} \right\|_{\infty} \leq \bar{C}(I)(T-t)^{\alpha-1/2}$ 이다. 이는 원래 (정규화되지 않은) 곡률의 도함수들이 0으로 균등수렴함을 함의한다.

[G-H] **Corollary 5.7.3** $t \rightarrow T$ 에서 $k_{\max}(t) - k_{\min}(t) \rightarrow 0$ 이다.

유용한 부등식

Peter-Paul 부등식(Peter-Paul inequality). (Paul의 것을 훔쳐 Peter에게 준다 [9].) 임의의 양수 ε 에 대하여 $ab \leq \varepsilon a^2 + b^2/4\varepsilon$ 이다.

Wirtinger 부등식(Wirtinger inequality). 만약 $\int_0^{2\pi} f = 0$ 이면 $\int_0^{2\pi} f^2 \leq \int_0^{2\pi} (f')^2$ 이다.

Sobolev 부등식(Sobolev inequality). 만약 $\|f\|_2 \leq C$ 이며 $\|f'\|_2 \leq C$ 이면 $\|f\|_\infty \leq (1/\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi})C$ 이다. (여기에서 $\|\cdot\|_2$ 는 L_2 노름이며 $\|\cdot\|_\infty$ 는 S^1 에서 정의된 함수에 대한 상한 노름이다.)

뒤쪽 2개 부등식들은 계도함수의 L_2 노름에 대한 지수함수 상계가 모든 저계도함수들의 L_∞ 노름에 대한 (동일한 지수를 가지는) 지수함수 상계를 보장함을 함의한다.

유용한 부등식

[G-H] Lemma 5.7.4. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 가 $df/d\tau \leq cf^{1-1/p} - 2pf$ 를 만족시킨다 하자. 그 경우 다음이 성립한다.

$$f(\tau)^{1/p} \leq \left(\frac{c}{2p} + De^{-2\tau} \right) \leq \bar{c}(p)$$

Proof.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(e^{2\tau} f^{1/p}) &= 2e^{2\tau} f^{1/p} + \frac{1}{p} f^{1/p-1} \frac{\partial f}{\partial \tau} e^{2\tau} \\ &\leq 2e^{2\tau} f^{1/p} + \left(\frac{c}{p} - 2f^{1/p} \right) e^{2\tau} = \frac{c}{p} e^{2\tau} \end{aligned}$$

따라서 $e^{2\tau} f^{1/p} \leq D + ce^{2\tau}/2p$ 이며 결과가 따라온다.

[G-H] Lemma 5.7.5. $df/d\tau \leq -\alpha f + Ce^{-\beta\tau}$ 이면 다음이 성립한다.

$$f(\tau) \leq \begin{cases} De^{-\alpha\tau} + \frac{C}{\alpha-\beta} e^{-\beta\tau} & (\alpha \neq \beta) \\ De^{-\alpha\tau} + C\tau e^{-\alpha\tau} & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

[G-H] Lemma 5.7.6. $\|\kappa'\|_2$ 와 $\|\kappa'\|_4$ 는 τ 에 독립적인 상수에 의해 유계이다.

Proof. 방정식 (5.7.0)과 부분적분을 이용하여 다음을 계산하자.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa')^4 &= 4 \int (\kappa')^3 (\kappa^2 \kappa'' + \kappa^3 - \kappa)' \\ &= \int -4(\kappa')^4 - 12\kappa^2(\kappa')^2(\kappa'')^2 - 12\kappa^3(\kappa')^2\kappa''\end{aligned}$$

마지막 항은 Peter-Paul 부등식을 사용하면 $12\kappa^2(\kappa')^2(\kappa'')^2 + 3(\kappa')^2\kappa^4$ 에 의해 유계이다. κ 가 1로 수렴하므로 Hölder 부등식을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} \leq -4f + Cf^{1/2}$$

여기에서 $f(\tau) = \int (\kappa')^4$ 이다. $\|\kappa'\|_4$ 에 대한 결론은 $p = 2$ 에 대한 Lemma 5.7.4에서 따라온다. $\|\kappa'\|_2$ 의 유계성은 Hölder 부등식에서 즉시 따라온다.

[G-H] Lemma 5.7.7. $\|\kappa''\|_2$ 는 τ 에 독립적인 상수에 의해 유계이다.

Proof. 앞에서와 마찬가지로 부분적분하자.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa'')^2 = \int -2(\kappa'')^2 - 2\kappa(\kappa''')^2 - 4\kappa\kappa'\kappa''\kappa''' - 6\kappa^2\kappa'\kappa'''$$

Peter-Paul 부등식을 사용하여 마지막 2개 항을 통제하자.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa'')^2 \leq c_1 \int (\kappa')^2 (\kappa'')^2 + c_2 \int \kappa^2 (\kappa')^2 - 2 \int (\kappa'')^2 \quad (5.7.7a)$$

공식 (5.7.6)의 항들을 재배열하여 $(\kappa')^2 (\kappa'')^2$ 의 상계를 얻을 수 있다:

$$\int 12\kappa^2 (\kappa')^2 (\kappa'')^2 \leq -\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa')^4 + \int -4(\kappa')^4 - 12\kappa^3 (\kappa')^2 (\kappa'') \quad (5.7.7b)$$

M 이 κ 의 하계라 하고 Peter-Paul 부등식을 통해 마지막 항을 통제하자:

$$12M^2 \int (\kappa')^2 (\kappa'')^2 \leq -\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa')^4 + 12 \int \varepsilon (\kappa'')^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (\kappa')^4 \kappa^6 \quad (5.7.7c)$$

$f = \int (\kappa'')^2$ 라 하고 충분히 작은 ε 에 대하여 (5.7.7a)와 (5.7.7c)를 사용하면 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} \leq -c_3 \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa')^4 + c_4 - f$$

여기에서 우리는 (5.7.6)에서의 상계들을 사용했다. 이것에 e^τ 를 곱하고 τ 에 대하여 적분하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{\partial}{\partial \tau} (e^\tau f) d\tau &\leq -c_3 \int_0^A e^\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_0^{2\pi} (\kappa')^4 \right) d\tau + c_4 e^A \\ &\leq c_3 \int_0^A e^\tau \left(\int_0^{2\pi} (\kappa')^4 \right) d\tau - \left\{ c_3 e^\tau \int_0^{2\pi} (\kappa')^4 \right\} \Big|_0^A + c_4 A^4 \end{aligned} \quad (5.7.7f)$$

(5.7.6)의 상계들을 다시 사용하면 다음을 얻는다.

$$e^A f(A) \leq c_5 e^A + c_6 + c_4 e^A \quad (5.7.7g)$$

[G-H] Lemma 5.7.8. $\tau \rightarrow \infty$ 에서 $\|\kappa'\|_\infty \rightarrow 0$ 으로 수렴한다.

Proof. Sobolev 부등식과 Lemma 5.7.6 및 5.7.7에 의해 $\|\kappa'\|_\infty < \infty$ 이다. $\|\kappa''\|_2$ 에 대한 상계는 κ' 이 동등연속함을 함의하며 따라서 어떠한 $g(\theta)$ 로 균등수렴하는 부분열이 존재한다. κ' 의 역도함수 κ 는 g 의 역도함수로 수렴해야 한다. 그러나 κ 는 1로 균등수렴하므로 $g \equiv 0$ 이다. 모든 부분열이 0으로 수렴하므로 $\kappa'(\theta, \tau)$ 는 0으로 균등수렴한다.

[G-H] Lemma 5.7.9. 임의의 $0 < \alpha < 1$ 에 대하여 A 를 선택하여 $\tau > A$ 이면 다음이 성립하도록 할 수 있다.

$$\int (\kappa'')^2 \geq 4\alpha \int (\kappa')^2$$

Proof. $\int \cos \theta / \kappa = \int \sin \theta / \kappa = 0$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\int \frac{\kappa'}{\kappa^2} \cos \theta = \int \frac{\kappa'}{\kappa^2} \sin \theta = \int \frac{\kappa'}{\kappa^2} = 0$$

κ'/κ^2 가 첫째 고유벡터들에 수직하므로 Wirtinger 부등식은 다음과 같아진다.

$$\int \left[\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)' \right]^2 \geq 4 \int \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)^2$$

그 좌변은 ($\|\kappa'\|_\infty \rightarrow 0$ 이므로) 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\kappa''}{\kappa^2} - 2 \frac{(\kappa')^2}{\kappa^3} \right)^2 &= \int \frac{(\kappa'')^2}{\kappa^4} - 4 \frac{(\kappa')^2 \kappa''}{\kappa^5} + 4 \frac{(\kappa')^4}{\kappa^6} \\ &\leq \int \left(\frac{\kappa''}{\kappa^2} \right)^2 + 4 \frac{(\kappa')^4}{\kappa^6} + 4\varepsilon \frac{(\kappa'')^2}{\kappa^4} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(\kappa')^4}{\kappa^6} \\ &\leq (1 + 4\varepsilon) \int \left(\frac{\kappa''}{\kappa^2} \right)^2 + o(\tau) \cdot \int \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)^2 \end{aligned}$$

충분히 큰 A 에 대하여 $\kappa \sim 1$ 이라 가정할 수 있다; 따라서 요구된 것과 같이 $0 < \alpha < 1$ 인 임의의 α 에 대하여 $4\alpha \int (\kappa')^2 \leq \int (\kappa'')^2$ 이다.

[G-H] Lemma 5.7.10. $0 < \alpha < 1$ 인 임의의 α 에 대하여 $\|\kappa'\|_2 \leq Ce^{-2\alpha\tau}$ 를 만족시키는 상수 C 가 존재한다.

Proof. 다음을 다시 고려하자.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa')^2 = 2 \int \kappa' (\kappa^2 \kappa'' + \kappa^3 - \kappa)' = \int -2\kappa^2 (\kappa'')^2 + 6\kappa^2 (\kappa')^2 - 2(\kappa')^2$$

$0 < \alpha < 1$ 인 임의의 α 에 대하여 A 를 선택하여 $\tau > A$ 에 대하여 다음이 성립하도록 할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa')^2 \leq -8\alpha \int (\kappa')^2 + 6\alpha \int (\kappa')^2 - 2 \int (\kappa')^2$$

정리하면,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa')^2 \leq -4\alpha \int (\kappa')^2$$

따라서 $\|\kappa'\|_2^2 \leq Ce^{-4\alpha\tau}$ 이며 보조정리가 즉시 따라온다.

[G-H] Lemma 5.7.11. $0 < \alpha < 1$ 인 임의의 α 에 대하여
 $\|\kappa''\|_2 \leq Ce^{-2\alpha\tau}$ 를 만족시키는 상수 C 가 존재한다.

Proof.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa'')^2 &= \int -2(\kappa'')^2 - 2\kappa^2(\kappa''')^2 - 4\kappa\kappa'\kappa''\kappa''' - 6\kappa^2\kappa'\kappa''' \\ &\quad + e \int -2(\kappa'')^2 - (2)\kappa^2(\kappa''')^2 + 4\varepsilon(\kappa\kappa''')^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\kappa')^2(\kappa'')^2 + 6\varepsilon\kappa^2(\kappa''')^3 \end{aligned}$$

ε 를 매우 작게 선택한 후 A 를 충분히 크게 선택하여 $\tau > A$ 에 대하여
 $\|\kappa'\|_\infty$ 가 매우 작도록 하자:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa'')^2 \leq \int -2\bar{\alpha}(\kappa'')^2 - 2\bar{\alpha}\kappa^2(\kappa''')^2 + Ce^{-4\bar{\alpha}\tau}$$

통상적인 Wirtinger 부등식과 $\kappa \rightarrow 1$ 로 균등수렴한다는 사실을 이용하면
다음을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa'')^2 \leq -4\bar{\alpha} \int (\kappa'')^2 + Ce^{-4\bar{\alpha}\tau}$$

Lemma 5.7.5에 의해 $\forall \alpha < \bar{\alpha}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa'')^2 \leq \bar{C}e^{-4\alpha\tau} \quad \square$$

[G-H] Corollary 5.7.12. $0 < \alpha < 1$ 인 임의의 α 에 대하여
 $\|\kappa'\|_\infty \leq Ce^{-2\alpha\tau}$ 를 만족시키는 상수 C 가 존재한다.

[G-H] Lemma 5.7.13. $0 < \alpha < 1$ 인 임의의 α 에 대하여 $\|\kappa''\|_4 \leq Ce^{-\alpha\tau}$ 를 만족시키는 상수 C 가 존재한다.

Proof. 표준적인 기법을 사용하여 다음을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa'')^4 &= 4 \int (\kappa'')^3 (\kappa^2 \kappa'' + \kappa^3 - \kappa)'' \\ &= 4 \int -3(\kappa'')^2 \kappa''' (\kappa^2 \kappa'''' + 2\kappa \kappa' \kappa'' + 3\kappa^2 \kappa') - (\kappa'')^4 \\ &= 4 \int -3\kappa^2 (\kappa'')^2 (\kappa''')^2 - 6\kappa \kappa' (\kappa'')^3 \kappa''' - 9\kappa^2 \kappa' (\kappa'')^2 \kappa''' - (\kappa'')^4 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa'')^4 &\leq 4 \int -3\kappa^2 (\kappa'')^2 (\kappa''')^2 + 6\varepsilon \kappa^2 (\kappa''')^2 + \frac{6}{4\varepsilon} (\kappa')^2 (\kappa'')^4 \\ &\quad + 9\varepsilon \kappa^2 (\kappa'' \kappa''')^2 + \frac{9}{4\varepsilon} \kappa^2 (\kappa')^2 (\kappa'')^2 - (\kappa'')^4 \end{aligned}$$

ε 를 작게 선택하고 $\|\kappa'\|_\infty, \|\kappa'\|_2$ 의 상계들을 사용하면 큰 τ 에 대하여,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa'')^4 \leq -4\bar{\alpha} \int (\kappa'')^4 + Ce^{-8\bar{\alpha}\tau}$$

보조정리는 Lemma 5.7.5에서 따라온다.

[G-H] Lemma 5.7.14. $0 < \alpha < 1$ 인 임의의 α 에 대하여
 $\|\kappa'''\|_2 \leq Ce^{-2\alpha\tau}$ 를 만족시키는 상수 C 가 존재한다.

Proof.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa''')^2 &= -2 \int (\kappa''''(\kappa^2 \kappa'''' + 2\kappa \kappa' \kappa''' + 2(\kappa')^2 \kappa'' + 2\kappa(\kappa'')^2 \\
 &\quad + 2\kappa \kappa' \kappa''' + 6\kappa(\kappa')^2 + 3\kappa^2 \kappa'' + (\kappa''')^2)) \\
 &\leq \int \left\{ -2\kappa^2 (\kappa'''')^2 + C_1 \varepsilon \kappa^2 (\kappa'''')^2 + \frac{C_2}{\varepsilon} (\kappa')^2 (\kappa''')^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_3}{\varepsilon} \frac{(\kappa')^4 (\kappa'')^2}{\kappa^2} + \frac{C_4}{\varepsilon} (\kappa'')^4 + \frac{C_5}{\varepsilon} (\kappa')^4 + \frac{C_6}{\varepsilon} \kappa^2 (\kappa'')^2 - 2(\kappa''')^2 \right\} \\
 &\leq -4\alpha \int (\kappa''')^2 + Ce^{-4\alpha\tau}
 \end{aligned}$$

마지막 부등식은 τ 가 충분히 커서 C_2 항이 흡수될 수 있는 경우에 성립한다. Peter-Paul 부등식과 Wirtinger 부등식이 앞의 Lemma 5.7.12 및 5.7.11에서와 같이 사용되었다. Lemma 5.7.5를 적용하면 결과를 얻는다.

[G-H] Lemma 5.7.15. $I \geq 4$, $0 < \bar{\alpha} < 1$, $\|\kappa^{(I-1)}\|_2 \leq C_1 e^{-2\alpha\tau}$, $\|\kappa^{(j)}\|_\infty \leq C_2 e^{-2\alpha\tau}$ ($j = 1, 2, \dots, I-2$)라 하자. 그 경우 $\|\kappa^{(I)}\|_2 \leq C_3 e^{-2\alpha\tau}$ 이며 $\|\kappa^{(I-1)}\|_\infty \leq C_4 e^{-2\alpha\tau}$ 이다.

Proof. 앞에서와 마찬가지로 계산하자.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa^{(I)})^2 d\theta &= 2 \int \kappa^{(I)} (\kappa^2 \kappa'' + \kappa^3 - \kappa)^{(I)} \\ &= \int -2\kappa^{(I+1)} (\kappa^2 \kappa'' + \kappa^3 - \kappa)^{(I-1)} - 2(\kappa^{(I)})^2 \\ &= \int \left\{ -2\kappa^2 (\kappa^{(I+1)})^2 \right. \end{aligned} \tag{a}$$

$$- 2\kappa^{(I+1)} (\kappa^2)' \kappa^{(I)} \tag{b}$$

$$- 2\kappa^{(I+1)} (\kappa^2)'' \kappa^{(I-1)} \tag{c}$$

$$- 2\kappa^{(I+1)} (\kappa^2)^{(j)} \kappa^{I+1-j} \quad (2 \leq j \leq I-2) \tag{d}$$

$$- 2\kappa^{(I+1)} (\kappa^2)^{(I-1)} \kappa'' \tag{e}$$

$$- 2\kappa^{(I+1)} (\kappa^3)^{(I-1)} \tag{f}$$

$$\left. - 2(\kappa^{(I)})^2 \right\} \tag{g}$$

중간 항들은 모두 (a)의 충분히 작은 비율 및 다음 항들에 의해 통제될 수 있다:

$$C_1 \cdot \frac{((\kappa^2)')^2 (\kappa^{(l)})^2}{\kappa^2} \quad (b)$$

$$C_2 \cdot \frac{((\kappa^2)'')^2 (\kappa^{(l-1)})^2}{\kappa^2} \quad (c)$$

$$C_3 \cdot \frac{((\kappa^2)^{(j)})^2 (\kappa^{(l+1-j)})^2}{\kappa^2} \quad (d)$$

$$C_4 \cdot \frac{((\kappa^2)^{(l-1)})^2 (\kappa'')^2}{\kappa^2} \quad (e)$$

$$C_5 \cdot \frac{(\kappa^3)^{(l-1)}}{\kappa^2} \quad (f)$$

만약 τ 가 충분히 크게 선택되었다면 항 (b)는 항 (g)의 임의로 작은 비율에 의해 통제될 수 있다. $\bar{\alpha} \in (\alpha, 1)$ 이라 하자. 저계도함수에 대한 L_∞ 노름과 $(I - 1)$ 계도함수에 대한 L_2 노름을 사용하면 항 (c)와 (e)는 $Ce^{-4\bar{\alpha}\tau}$ (또는 이보다 나은 항)에 의해 통제된다. (d)의 항은 L_∞ 노름만을 사용하여 $Ce^{-4\bar{\alpha}\tau}$ 에 의해 통제된다. 마지막으로 Wirtinger 부등식과 $\kappa \rightarrow 1$ 로 균등수렴한다는 사실에 의해 (a)가 $-\int (\kappa^{(I)})^2$ 에 의해 통제된다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int (\kappa^{(I)})^2 \leq -4\alpha \int (\kappa^{(I)})^2 + Ce^{-4\bar{\alpha}\tau}$$

Lemma 5.7.5를 사용하면 증명이 완료된다.

Theorem 5.7.1의 증명은 귀납법에 의해 위 보조정리들로부터 따라온다.

$$X_t = \left(k - \frac{2\pi}{L} \right) N$$

일반적인 곡선에 대하여 $W = X_t$, $V = X_u$, $\nu = \langle V, V \rangle^{1/2}$ 라 하자. 따라서 $ds = \nu du$ 이다. 그 경우,

$$L_t = - \int \langle W, kN \rangle \ ds \quad (1)$$

$$A_t = - \int \langle W, N \rangle \ ds \quad (2)$$

([G-H] Section 3에서 CSF 방정식을 대입하는 대신 W 를 남겨놓으면 이를 얻는다.) APCS의 경우 $A_t = 0$, $L_t \leq 0$ 이다:

$$L_t = - \int k^2 - \frac{2\pi\nu}{L} k \ ds = - \int k^2 \ ds + \frac{4\pi^2}{L} \nu^2 \quad (3)$$

Schwarz 부등식을 사용하면 다음을 얻는다.

$$4\pi^2 \nu^2 = \left(\int k \ ds \right)^2 \leq \left(\int ds \right) \left(\int k^2 \ ds \right) = L \int k^2 \ ds \quad (4)$$

[G3] Corollary 2.4. 볼록 폐곡선에 대하여 다음이 성립한다.

$$\left(\frac{L^2}{A} - 4\pi \right) \leq C \exp \left(-\frac{2\pi}{A} t \right)$$

Proof.

$$\int k^2 \, ds \geq \frac{\pi L}{A}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{L^2}{A} - 4\pi \right)_t &= -\frac{2}{A} \left(L \int k^2 \, ds - \pi \frac{L^2}{A} + \pi \left(\frac{L^2}{A} - 4\pi \right) \right) \\ &\leq -\frac{2\pi}{A} \left(\frac{L^2}{A} - 4\pi \right) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{L^2}{A} - 4\pi \right) \leq C \exp \left(-\frac{2\pi}{A} t \right) \quad \square$$

[G3] Corollary 2.5. 볼록 APCS가 특이점을 형성하지 않는다면 이는 Hausdorff 거리 하에서 원으로 수렴한다.

Proof. Bonnesen 부등식을 사용하면 다음을 얻는다.

$$\left(\frac{L^2}{A} - 4\pi \right) \geq \frac{\pi^2}{A} (r_{\text{out}} - r_{\text{in}})^2$$

위 보조정리에 의해 내반경과 외반경 간의 차가 0으로 감소한다. 따라서 곡선의 내부와 동일한 면적을 가지는 원판 간의 Hausdorff 거리가 0으로 감소한다.

각도 매개변수

x 축과 법선벡터 간의 각도 θ 에 의해 곡선들을 매개화하겠다. 이는 발전의 접선방향 성분을 선택하여 θ 가 t 에 의존하지 않도록 하는 것과 동치이다. 다음과 같이 정의하자.

$$X_t = \left(k - \frac{2\pi}{L} \right) N + \alpha(u, t) T \quad (3.1)$$

만약 (3.1)을 u 에 대하여 미분하고 미분의 순서를 변경하고 $X_u = vT$ 임을 관찰하고 접선방향 및 법선방향 성분들을 비교하면 다음을 얻는다.

$$T_t = \left(\frac{1}{v} k_u + \alpha k \right) N \quad (3.2)$$

$$v_t = -vk^2 + v \frac{2\pi k}{L} + \alpha_u \quad (3.3)$$

θ 가 (따라서 T 와 N 이) t 에 독립적이어야 한다고 요구하자. 이는 (3.2)로부터 다음을 제공한다:

$$\alpha = -\frac{1}{vk} k_u \quad (3.4)$$

각도 매개변수

(3.2)를 u 에 대하여 미분하고 미분의 순서를 변경하면 다음을 얻는다.

$$0 = \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial u} = \frac{\partial}{\partial t}(\nu k N) \quad (3.5)$$

즉 $(\nu k)_t = 0$ 이다. (3.3)과 (3.4)를 이용하여 이를 전개하면 다음을 얻는다.

$$k_t = -\frac{1}{\nu} k \nu_t = k^3 - \frac{2\pi k^2}{L} + \frac{k}{\nu} \left(\frac{1}{\nu k} k_u \right)_u \quad (3.6)$$

마지막으로 θ 좌표로 변환하면 $d\theta = \nu k du, \partial/\partial\theta = (\nu k)^{-1}\partial/\partial u$ 이며 다음이 성립한다.

$$k_t = k^2 k_{\theta\theta} + k^3 - \frac{2\pi k^2}{L} \quad (3.7)$$

이는 이 좌표계에서 곡률의 발전방정식이다.

[G3] Lemma 3.1. 방정식 (3.1)에 의해 발전하는 (강) 볼록 곡선은 볼록성을 유지한다.

$W(\theta, t) = k(\theta, t)e^{\mu t}$ 이며 μ 가 어떠한 상수라 하면 다음이 성립한다.

$$W_t = k^2 W_{\theta\theta} + \left(k^2 - \frac{2\pi}{L} k + \mu \right) W \quad (3.8)$$

W 의 계수는 k 에 대한 2차다항식이며 그 판별식은 $(4\pi^2/L^2) - 4\mu$ 이다. 등주부등식은 A 에 의한 L 의 하계를 제공한다. 따라서 충분히 큰 μ 에 대해서는 판별식이 음수이며 W 의 계수가 양수이다. 이 계수가 항상 양수이도록 하는 μ 를 선택하자. 이제

$W_{\min}(t) = \inf\{W(\theta, t) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ 라 하고 어떤 시간 $t > 0$ 에서 $0 < \beta < W_{\min}(0)$ 에 대하여 $W_{\min}(t) = \beta$ 라 하자.

$t_0 = \inf\{t : W_{\min}(t) = \beta\}$ 라 하자. 그 경우 β 는 $W(\theta_0, t_0)$ 에서 처음 달성되고 이 점에서 다음이 성립한다.

$$W_t \leq 0, \quad W_{\theta\theta} \geq 0, \quad W = \beta > 0$$

이는 (3.8)에 모순이며, 따라서 $W_{\min}(t)$ 가 비감소 함수이다. 그러므로,

$$k_{\min}(t) = W_{\min}(t) \cdot e^{-\mu t} \geq W_{\min}(0) \cdot e^{-\mu t} > 0$$

[G-H] Lemma 4.3.2 평면 볼록 폐곡선의 경우 $k^*(t) < L/A_0$ 이다.

[G3] Lemma 3.3. 만약 $t \in (0, T)$ 에 대하여 $k^*(t) < M$ 이면 다음이 유계이다.

$$\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$$

Proof.

$$\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \log k d\theta = \int_0^{2\pi} - (k_\theta)^2 + k^2 - \frac{2\pi}{L} k d\theta \quad (3.10)$$

열린집합 $U = \{\theta : k(\theta, t) > k^*(t)\}$ 는 가산 개 서로 소 개구간 I_i 들의 합집합으로 유일하게 표현 가능하다. 곡률중간값의 정의에 의해 이러한 각각의 구간의 길이는 π 이하이다. 각각의 구간에서 다음이 성립한다.

$$\int_{I_i} \left\{ - (k_\theta)^2 + k^2 - \frac{2\pi}{L} k \right\} d\theta \leq \left(2k^* - \frac{2\pi}{L} \right) \int_{I_i} k d\theta \quad (3.11)$$

(여기에서 $k^2 = (k - k^*)^2 + 2kk^* - (k^*)^2$ 라는 사실과 Wirtinger 부등식 $\int_{I_i} k_\theta^2 \geq \int_{I_i} (k - k^*)^2$ 를 사용했다.)

U 의 여집합에서 추산 $k(\theta, t) \leq k^*(t)$ 가 성립하므로,

$$\int_{U^C} \left\{ -(k_\theta)^2 + k^2 - \frac{2\pi k}{L} \right\} d\theta \leq (k^*(t))^2 |U^C| - \frac{2\pi}{L} \int_{U^C} k d\theta \quad (3.12)$$

(3.10), (3.11), (3.12), (2.4)를 조합하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \log k d\theta &\leq 2k^* \int k d\theta - \frac{2\pi}{L} \int k d\theta + 2\pi (k^*(t))^2 \\ &\leq 2M \left(\frac{4\pi^2}{L} - \frac{dL}{dt} \right) + 2\pi M^2 \\ &\leq 2M \left(2\pi \sqrt{\frac{\pi}{A}} - \frac{dL}{dt} \right) + 2\pi M^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

L 에 대한 추산은 등주부등식에서 따라온다. 적분하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta &\leq \int_0^{2\pi} \log k(\theta, 0) d\theta + 4\pi M \cdot \sqrt{\frac{\pi}{A}} t \\ &\quad - 2M(L(t) - L(0)) + 2\pi M^2 t \end{aligned} \quad (3.14)$$

[G3] Lemma 3.4. 초기곡선에만 의존하는 상수 C 가 존재하여 다음이 성립한다.

$$\int_0^{2\pi} (k_\theta)^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} k^2 d\theta - \int_0^t \left\{ \frac{4\pi L_t}{L^2} \int_0^{2\pi} k(\theta, t) d\theta \right\} d\tau + C \quad (3.15)$$

Proof. 곡률의 발전방정식을 사용하여 다음을 계산할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\int -(k_\theta)^2 + k^2 - \frac{4\pi}{L} k d\theta \right) = 2 \int_0^{2\pi} k^2 (k_{\theta\theta} + k - \frac{2\pi}{L})^2 + \frac{4\pi}{L^2} \frac{dL}{dt} \int k d\theta \quad (3.16)$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dt} \left(\int (k_\theta)^2 \right) \leq -\frac{4\pi}{L^2} \frac{dL}{dt} \int k d\theta + \frac{d}{dt} (k^2 d\theta) - \frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi}{L} \int k d\theta \right) \quad (3.17)$$

이 방정식을 적분하면 (3.15)를 얻는다.

[G3] Lemma 3.5. 만약 $[0, 2\pi] \times [0, T]$ 에서 $k(\theta, t) \leq M$ 이면 다음이 성립한다.

$$\int_0^{2\pi} (k_\theta)^2 d\theta \leq 2\pi M^2 + DM + C$$

여기에서 D, C 는 초기곡선에만 의존하는 상수들이다.

Proof. $dL/dt \leq 0$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} - \int_0^t \left\{ \frac{4\pi}{L^2} \frac{dL}{d\tau} \int_0^{2\pi} k(\theta, t) d\theta \right\} d\tau &\leq -2\pi M \int_0^t \frac{4\pi^2}{L} \frac{dL}{d\tau} d\tau \\ &= 8\pi^2 M \left(\frac{1}{L(t)} - \frac{1}{L(0)} \right) \quad (3.18) \\ &\leq DM \end{aligned}$$

등주부등식은 $L(t)$ 에 대한 하계를 제공한다. (3.15)에서 (3.18)을 사용하면 따름정리가 증명된다.

[G3] Proposition 3.6. 다음과 같다 하자.

$$M = \sup\{k_{\max}(t) : t \in [0, T]\}$$

그 경우 초기조건에만 의존하는 상수들이 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$\sup \left\{ \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta : t \in [0, T] \right\} + C_2 T \geq C_3 \log M + C_4 \quad (3.19)$$

Proof. t_1 에서 $k_{\max}(t_1) = \frac{3}{4}M > 0$ 이고 θ_1 에서 $k(\theta_1, t_1) = \frac{3}{4}M$ 라 하면,

$$\begin{aligned} k(\theta_1, t_1) - k(\theta, t_1) &= \int_\theta^{\theta_1} k_\theta d\theta \leq \left(\int_0^{2\pi} (k_\theta)^2 d\theta \right)^{1/2} (\theta_1 - \theta)^{1/2} \\ &\leq (2\pi M^2 + DM + C)^{1/2} (\theta_1 - \theta)^{1/2} \\ &\leq M \left(2\pi + \frac{D}{M} + \frac{C}{M^2} \right)^{1/2} (\theta_1 - \theta)^{1/2} \\ &\leq MC_1(\theta_1 - \theta)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

(Lemma 3.5, $2\pi = \int k ds \leq k_{\max} L$, 등주부등식을 사용했다.)

(3.20)을 다음과 같이 재표현하자.

$$k(\theta, t_1) \geq \frac{3}{4}M - MC_1(\theta_1 - \theta)^2$$

이제 만약 $C_1(\theta_1 - \theta)^{1/2} \leq 1/4$ 이면 다음과 같이 추산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t_1) d\theta &\geq \int_{|\theta_1 - \theta| < (1/4C_1)^2} \log k(\theta, t_1) + \int_{|\theta - \theta_1| > (1/4C_1)^2} \log k(\theta, t_1) \\ &\geq \log\left(\frac{M}{2}\right) \cdot \frac{2}{(4C_1)^2} + \left(2\pi - \frac{2}{(4C_1)^2}\right) \log(k_{\min}(0)e^{-\mu t_1}) \end{aligned} \tag{3.21}$$

둘째 적분의 하계는 Lemma 3.1에서 주어진 곡률의 하계에서 따라온다.
식 (3.19)는 (3.21)에서 직접적으로 따라온다.

[G3] Theorem 4.1. 볼록 APCSF는 볼록성을 유지하며 C^∞ 거리 하에서 원으로 수렴한다. 곡선에 의해 둘러싸인 넓이는 항상 일정하다.

Proof. [G-H] Section 2에서 사용한 것과 동일한 기법에 의해 임의의 초기곡선에 대하여 (4.1)의 해가 단시간 동안 존재한다. (4.1)의 해가 어떠한 $T < \infty$ 에 대한 시간 구간 $[0, T)$ 에서 존재한다 하자; 그 경우 Proposition 3.2에 의해 k^* 은 이 구간에서 유계이다; Proposition 3.3은 $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$ 가 유계임을 함의한다; Proposition 3.6은 $k(\theta, t)$ 가 $[0, T)$ 에서 유계임을 함의한다. **[G-H]** Section 4.4에서와 유사한 k 의 고계도함수의 L_2 노름에 대한 추산들을 사용하면 k 의 모든 고계도함수들도 유계이며 따라서 k 가 T 에서 C^∞ 함수로 수렴하여 폐곡선을 정의함을 알 수 있다. (일반적으로 추가적인 항 $-2\pi k^2/L$ 은 추산을 더 간단히 만들어주거나, 적어도 더 어렵게 만들지는 않는다.) 이제 단시간 존재성을 이용하여 해가 정의되도록 하는 시간 구간을 확장할 수 있다. 이는 해가 시간 구간 $[0, \infty)$ 에서 정의됨을 보여준다. 수렴성을 확인하자. Corollary 2.4에 의해 곡선이 Hausdorff 거리 하에서 원으로 수렴함을 알 수 있다; **[G-H]**의 Lemma (5.1)-(5.5)는 최대 및 최소 곡률의 비가 1로 수렴함을 보여준다; 따라서 곡률 k 는 초기 면적에 의해 결정된 상수로 수렴한다. 이제 **[G-H]**의 Section 5.7에서의 추산을 모방하면 k 의 모든 도함수들이 0으로 수렴함을 증명할 수 있다.