PH231 Classical Electromagnetism I
Final Helpdesk

Dyne Kim

June 05, 2024

연사 소개

이름: 김다인 ($1\ \mathrm{dyn} = 1\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}/\mathrm{s}^2$)
수리과학과 석박사통합과정 1년차 (학번 20248020)
B. Sc. in Mathematics and Physics (KAIST, 학사 21학번)
서울과학고 30기
2020 IPhO 한국 국가대표 최종후보
2021년 전자기학I 수강, A+ 학점 획득:
궁금한 것이 있다면 +82 10 8210 8772 또는 physics0907@kaist.ac.kr로 연락해 주세요.

정전기 에너지

시험전하 q가 $\mathbf{a}$에서 $\mathbf{b}$로 이동한 경우 전기력이 한 일은 다음과 같다:

$$\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\ dt = \int q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\ dt = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -qV(\mathbf{b}) + qV(\mathbf{a})$$

따라서 고정된 전위 내에서 시험전하의 에너지는 qV이다.
반면에 시험전하가 아닌 전하분포 전체의 에너지를 구하고자 할 경우 자신이 만드는 퍼텐셜은 자신에게 일하지 않으므로 두 번 세어지는 일을 막기 위해 계수 $1/2$이 필요하다. 이는 부분적분하면 다음과 같아진다:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho V\ d^3\tau = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V \nabla^2 V\ d^3\tau \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V|^2\ d^3\tau = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}^2|\ d^3\tau \end{aligned}$$

그러므로 $\frac{\varepsilon_0}{2}|\mathbf{E}|^2$를 **에너지 밀도(energy density)**로 간주할 수 있다.
에너지가 전하에 있는지, 장에 있는지는 관점의 차이로, 두 공식 모두 실제로 보존되는 퍼텐셜 에너지를 제공한다.

점전하의 형성에너지

점전하가 생성하는 전기장은 r^{-2}에 비례하므로, 이를 제곱하여 적분하면 ∞가 나온다. 그러므로 점전하의 형성에너지를 위 공식으로 구할 수 없다. 이러한 모순은 고전 전자기학의 문제점 중 한 가지이다. 이에 대한 대안으로 (i) 점전하는 이미 형성되어 있으므로 그 형성 과정에서 드는 에너지를 논할 수 없다, (ii) 사실 점전하는 존재하지 않으며, 소립자들은 끈 (e.g. 초끈 이론) 등 다른 형태이다, 등이 존재한다.
또한 정전기 에너지는 전하에 대하여 *선형이 아니다* - 따라서 전하분포를 분할하여 각각의 에너지를 구한 후 합할 수 *없다*.

선형 매질에서의 정전기 에너지

우리가 통제할 수 있는 자유전하의 에너지만을 계산하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \rho_f V \, d^3\tau = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V\nabla\cdot\mathbf{D} \, d^3\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \, d^3\tau = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon|\mathbf{E}^2| \, d^3\tau \end{aligned}$$

매질에 이력(hysteresis) 등 비선형성이 있는 경우에는 매질 내에서 정전기 에너지가 열에너지로 전환되며 손실이 발생할 수 있다.

퍼텐셜계수

연결 도체 영역 $U_1, \ldots, U_n$과 그 밖의 자유 영역을 고려하자. 고정된 i에 대하여 U_i의 전위가 V이며 나머지 도체들이 접지되었을 경우 도체 U_j에 유도된 전하량 Q_i는 V에 비례한다 - 이 비례계수를 C_{ji}라 한다. 그러므로 각각의 i에 대하여 U_i에 대전된 전하량을 Q_i, U_j의 전위를 V_j라 하면 다음이 성립한다:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_j, \quad V_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} Q_i$$

여기에서 $(C_{ij})_{i,j}$의 역행렬을 $(P_{ij})_{i,j}$라 한다. 에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} Q_i Q_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_i V_j$$

퍼텐셜계수

U_i에 전하 Q, 다른 곳에 전하 εQ ($\varepsilon \ll 1$)가 대전된 경우의 에너지는 두 가지 방식으로 구할 수 있다. 따라서 $P_{ij} = P_{ji}$이다.

$$U = \frac{1}{2} P_{ii} Q^2 + \sum_{i \neq j} \frac{\varepsilon}{2} (P_{ij} + P_{ji}) Q^2 + \mathrm{O}(\varepsilon^2) = \frac{1}{2} P_{ii} Q^2 + \sum_{i \neq j} P_{ij} \varepsilon Q^2 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$$

퍼텐셜계수

$i \neq j$를 고정하자. U_i에 Q, U_j에 xQ ($x \in \mathbb{R}$)이 분포하는 경우 에너지는,

$$P_{jj}Q^2x^2 + 2P_{ij}Q^2x + P_{ii}Q^2 \geq 0$$

따라서 판별식 $4(P_{ij}^2 - P_{ii}P_{jj}) \leq 0$이며 $P_{ij} \leq \sqrt{P_{ii}P_{jj}}$이다. U_i와 U_j를 도체선으로 연결하고, 둘에 대전된 전하량이 Q, Q'이라 하자. $P_{ii}Q + P_{ij}Q' = P_{jj}Q' + P_{ij}Q$이므로 $Q' = \frac{P_{ii}-P_{ij}}{P_{jj}-P_{ij}}Q$이다. $P_{ii} < P_{ij}$라 가정하자. 그 경우 위 논의에 의해 $P_{jj} > P_{ij}$이다. 이는 두 도체 중 하나에는 양전하가, 다른 것에는 음전하가 분포함을 의미한다. 일반성을 잃지 않고 도체의 퍼텐셜이 양수라 하자. 면전하의 경계조건에 의해 음전하가 있는 쪽 도체에 가까운 도체 바깥 지점에서 퍼텐셜이 더 크다. 이는 Laplace 방정식의 해가 영역 내부에서 최댓값을 가지지 않음에 모순이다. 따라서 모든 i, j에 대하여 $P_{ij} \leq P_{ii}$이다.

축전기

도체 U_1, U_2에 각각 전하 $+Q, -Q$가 분포한다 하자. 그 경우 두 도체 사이의 전위차는 다음과 같다.

$$\Delta V = (P_{11} + P_{22} - 2P_{12})Q$$

이 비례계수의 역수를 **전기용량(capacitance)** C라 한다.

$$Q = C\Delta V, \quad \Delta U = \frac{1}{2}C\Delta V^2$$

예를 들어, 유전율 ε의 매질로 채워진 면적 A, 거리 d의 평행판 축전기의 경우 $C = \varepsilon A/d$이다. 전기용량은 직렬연결 시 $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$이며 병렬연결 시 $C = C_1 + C_2$이다. (저항과 식이 반대!)

에너지에 의한 힘과 토크의 계산

고립된 (Q가 고정된) 계를 생각하자. 에너지 U가 대상 물체의 좌표 x_i의 함수로 주어진 경우, 해당 물체는 $F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$의 힘을 x_i 방향으로 받는다. 마찬가지로 각도좌표 θ_i의 함수인 경우 $\tau_i = -\frac{\partial U}{\partial \theta_i}$의 토크를 받는다.
반대로 외부에서 전하를 공급하여 전위차 V를 일정하게 유지하고 있는 계를 생각하자. 이 경우에는 외부에서 공급하는 에너지도 계산에 포함시켜야 한다:

$$E = \frac{1}{2}\int \rho V \, d^3\tau - \int \rho V \, d^3\tau$$

그러므로 위 경우와 비교해 힘과 토크의 크기는 같고 방향이 반대이다.

전류밀도

다양한 종류의 전하 운반자들이 움직이는 경우를 생각하자. i번째 종류의 전하 운반자에 의한 전하밀도를 $\rho_i(\mathbf{x})$, 속도장을 $\mathbf{v}_i(\mathbf{x})$라 하자. 그 경우 **전류밀도(current density)**를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_i \rho_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i(\mathbf{x})$$

어떠한 곡면 $\mathcal{S}$에 대하여 전류밀도를 면적분한 값을 해당 곡면을 통과하는 **전류(current)**라 한다.

$$I = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

전하의 경우와 마찬가지로, $\mathbf{J}$가 곡선/곡면에 지지되는 δ 함수 형태인 경우 **선전류**와 **면전류**를 얻는다.

국소적 전하량 보존

국소적 전하량 보존은 다음의 연속방정식에 의해 표현된다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

이는 Maxwell 방정식으로부터 유도될 수 있다:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}) = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

상대론적 4-벡터 표현으로는 다음과 같다.

$$J^\alpha = (c\rho, \mathbf{J}), \quad \partial_\alpha = (c^{-1}\partial_t, \nabla), \quad \partial_\alpha J^\alpha = 0$$

Ohm의 법칙

도체에 전기장이 가해지면 전기장에 비례하는 전류밀도가 발생한다. 그 비례상수를 **전기전도도** σ, 역수를 **비저항** ρ라 한다.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$$

단면적 A, 길이 L, 비저항 ρ의 물질에 전류밀도 $\mathbf{J}$가 균일하게 길이에 평행한 방향 $\mathbf{n}$으로 흐를 경우 양단의 전위차는 다음과 같다.

$$\Delta V = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} L = \rho \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} L = \rho \frac{L}{A} I = IR$$

그러므로 저항값은 $R = \rho L / A$이다.

정전류와 Kirchoff 법칙

[fragile] 전류 및 전하 분포가 정적(시간에 따라 불변)이라 하자. 그 경우,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

전기전도도가 σ로 일정한 도체 내에서 다음이 성립한다.

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

전기전도도가 변화하는 경계면에서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{n} \quad &\Rightarrow \quad \sigma_1 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n} = \sigma_2 \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad &\Rightarrow \quad (\mathbf{E}_1)_{||} = (\mathbf{E}_2)_{||} \end{aligned}$$

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$과 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$을 폐곡선/폐곡면에서 적분하면 다음을 얻는다.

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} \, dl = \Delta V_{\mathcal{C}} = 0 \quad , \quad \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = I_{\mathcal{S}} = 0$$

정자기학의 기본법칙

Lorentz 힘 법칙:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B}, \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

Ampere 법칙:

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} \quad , \quad \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{B}\cdot\mathbf{T}\,dl = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,dS = I_{\mathcal{S}}$$

자기 Gauss 법칙:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \quad , \quad \Phi_{\mathbf{B}}(\partial\mathcal{V}) = \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$$

Biot-Savart 법칙:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d\tau'$$

벡터 퍼텐셜

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$이므로 어떠한 (유일하지 않은) $\mathbf{A}$에 대하여 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$로 표현 가능하다. $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$인 것을 선택하면 (쿨롱 게이지),

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, d\tau'$$

이는 원천이 ρ 대신 $\mathbf{J}$임을 제외하면 스칼라 퍼텐셜과 동일한 형태이다:

$$A_i(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}|^{l+1}} \int_{\mathbb{R}^3} J_i(\mathbf{r}') |\mathbf{r}'|^l P_l(\cos\theta) \, d\tau' \qquad (|\mathbf{r}'| > |\mathbf{r}|)$$

따라서 **쌍극자 모멘트** $\mathbf{m}$을 정의한다:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \, d\tau', \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \mathrm{O}(r^{-3})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}}{r^3} \right]$$

매질 내의 자기 쌍극자

매질 $\mathcal{V}_0$ 내에 단위부피당 자기 쌍극자 밀도 $\mathbf{M}$이 존재한다 하자. 이는 다음의 벡터 퍼텐셜을 생성한다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}_0} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}_0} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}_0} \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}_0} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\partial\mathcal{V}_0} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dS'
\end{aligned}$$

따라서 이는 매질 내에서 $\mathbf{J}_b(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$, 표면에서 $\mathbf{K}_b(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}$의 속박전류가 생성하는 벡터 퍼텐셜과 동일하다.

자유전류와 H장

우리가 통제할 수 없는 속박전류를 제외한 자유전류 $\mathbf{J}_f = \mathbf{J} - \mathbf{J}_b$를 고려하자. 그 경우, 다음과 같이 정의된 장

$$\mathbf{H} := \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$$

는 다음을 만족시킨다:

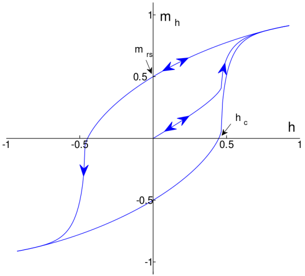
$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J} - \mathbf{J}_b = \mathbf{J}_f$$

$\mathbf{M}$이 외부 자기장 $\mathbf{B}$에 비례하는 경우, 자기감수율 χ_m과 투자율 μ:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\chi_m}{1+\chi_m}\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\chi_m}\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0(1+\chi_m)}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$$

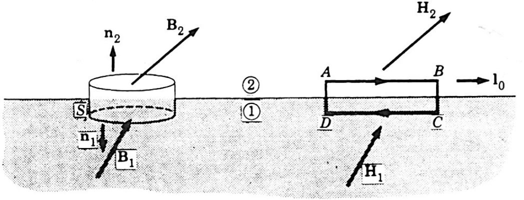
자성체의 분류

반자성체: 감수율 $\chi_m \sim -10^{-5}$.
상자성체: 감수율 $\chi_m \sim 10^{-5}$.
강자성체: 선형 영역에서는 감수율 큰 양수. 자기이력(hysteresis) 발생.
자기장을 없앤 후에도 반영구적인 쌍극자 모멘트가 잔존하므로
영구자석을 만들 수 있다.



정자기학의 경계조건

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad , \quad \mathbf{n}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$



선형 매질의 경우,

$$\mathbf{n}_2 \times (\mu_2^{-1}\mathbf{B}_2 - \mu_1^{-1}\mathbf{B}_1) = \mathbf{K}$$

또한, 선형 매질 내에서 $\mathbf{J}_f$는 다음을 만족시킨다.

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_f$$

예시: 균등하게 자화된 구

상수 $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$를 가지는 반경 a의 구를 고려하자. 자유전류가 없으므로 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$이며, 따라서 $\mathbf{H} = -\nabla \phi_M$으로 표현 가능하다.

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla^2 \phi_M = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{M}$$

그러므로 이는 (ε_0를 제외하면) $-\nabla \cdot \mathbf{M}$의 전하분포에 의해 생성된 전기퍼텐셜과 동일한 방식으로 계산할 수 있다:

$$\phi_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{3} M a^2 \frac{r_<}{r_>^2} \cos\theta$$

$$\mathbf{H}_{\rm in} = -\frac{1}{3}\mathbf{M}, \quad \mathbf{B}_{\rm in} = \mu_0(\mathbf{H}_{\rm in} + \mathbf{M}) = \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M}$$

$$\mathbf{H}_{\rm out} = \frac{r^2}{a^3}(M\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \tfrac{1}{3}M\hat{\mathbf{z}}) = \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}}{4\pi r^2}$$

예시: 균등하게 자화된 구

Biot-Savart 법칙에 의해 **A**를 계산할 수도 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \oint_{\mathcal{S}} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dS' \\
&= \frac{\mu_0 M a^2}{4\pi} \hat{\phi} \oint_{\mathcal{S}} \frac{\sin\theta' \cos\phi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dS' \\
&= \frac{\mu_0 M a^2}{3} \frac{r_<}{r_>^2} \sin\theta
\end{aligned}$$

이를 미분하면 위와 같은 **B**장을 얻을 수 있다.

Faraday 법칙과 Lenz 법칙

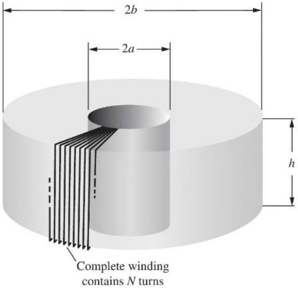
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

시간-의존하는 곡면 $\mathcal{S}(t)$를 고려하자. $\Phi(t)$가 시간 t에서 $\mathcal{S}(t)$를 통과하는 자기선속이라 하자. 그 경우,

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\mathcal{S}(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{n}\, dS - \int_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n}\, dS \right) \\
&= \int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{T})\, dl + \int_{\mathcal{S}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS \\
&= \int_{\partial \mathcal{S}} -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}\, dl = -\mathscr{E}
\end{aligned}$$

유도계수

코일에 전류가 흐를 경우, 해당 코일을 통과하는 자기선속 Φ_B는 전류 I에 비례한다. 비례계수를 **자기유도계수**(인덕턴스) L이라 한다: $\Phi_B = LI$.
예를 들어 내반경 a, 외반경 b, 높이 h의 원판에 N회 감긴 코일의 경우,



Ampere 법칙의 적분형에서 대칭성을 사용하면, 축에서 r 떨어진 곳에서,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\hat{\phi} \quad , \quad \Phi_B = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi}\log(b/a) \quad , \quad L = \frac{\mu_0 N h}{2\pi}\log(b/a)$$

유도계수

마찬가지로, 전류가 흐르는 코일이 *다른 코일에* 생성하는 자기선속을 고려할 수도 있다. 이 경우의 비례계수를 **상호유도계수** M_{ij}라 한다.

$$\Phi_j = \sum_i M_{ij} I_i$$

이는 다음 공식을 통해 계산할 수 있다 (특히 $M_{ij} = M_{ji}$이다):

$$\Phi_1 = \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_{\partial\mathcal{S}_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_1\, dl_1 = I_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{S}_1} \oint_{\partial\mathcal{S}_2} \frac{\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\, dl_1\, dl_2$$

이를 통해 자기 에너지를 계산할 수 있다.

$$E = \sum_i \frac{1}{2} L_i I_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} M_{ij} I_i I_j$$

정전기 에너지와 마찬가지로, 이를 통해 힘과 토크를 구할 수 있다.

자기 에너지 밀도

그러므로 코일들로 구성된 계에서,

$$dW = I\delta\Phi_B = \frac{1}{2}I\int \delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\,dl = \int(\nabla\times\mathbf{H})\cdot\delta\mathbf{A}\,d\tau = \int\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B}\,d\tau$$

따라서 선형 매질의 경우,

$$E = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{2\mu}|\mathbf{B}|^2$$

자기이력이 발생하는 경우 매질 내에서 에너지가 소모된다.

Ampere-Maxwell 법칙

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_E) = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

여기에서 $\mathbf{J}_E = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$를 **변위전류(displacement current)**라 한다.
$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_E) = 0$이다. 매질이 있는 경우, 전기 쌍극자 $\mathbf{P}$가 시간에 따라 변한다면 다음의 쌍극자 변위전류가 발생한다.

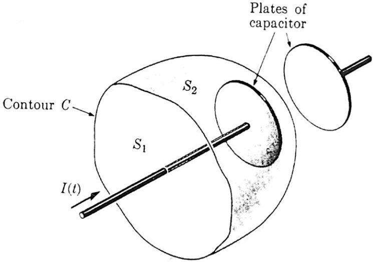
$$\mathbf{J}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho_b}{\partial t} = \frac{\partial(-\nabla \cdot \mathbf{P})}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_P$$

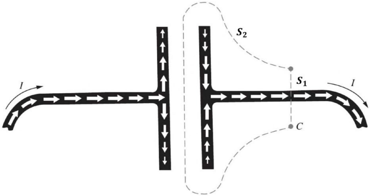
따라서 $\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$라 하면,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_D = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_D) = 0$$

예시: 평행판 축전기

평행판 축전기가 충전될 경우 변위전류가 발생하며, 이것이 다시 자기장의 원천으로 작용한다:





Poynting 정리

전자기력이 하는 단위부피당 일은 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} &= (\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} \\
&= \mathbf{E}\cdot\left(\mu_0^{-1}\nabla\times\mathbf{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{E})+\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right) \\
&= -\nabla\cdot(\mu_0^{-1}\mathbf{E}\times\mathbf{B})-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)
\end{aligned}
$$

따라서 일반적인 경우에 $\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$가 전자기 에너지 밀도이며, Poynting 벡터 $\mathbf{S}=\mu_0^{-1}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$가 에너지 수송 밀도이다.
일 대신 힘 $\mathbf{f}$에 대하여 유사한 계산을 수행하면 $\mathbf{f}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}}-\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t}$를 얻는다. 따라서 $\mathbf{S}$는 운동량 밀도이며 **Maxwell 변형력 텐서**라 불리는 $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$가 운동량 수송 밀도이다. (운동량의 방향과 운동량이 수송되는 방향이라는 2가지 방향 정보를 가지므로 이는 텐서이다.)