영역, 차원, 경계의 불변성

Articles

김다인 (수리과학부)

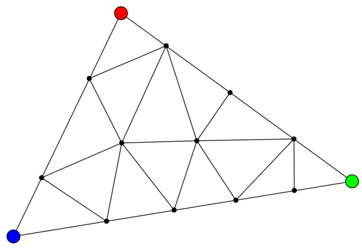
다양체는 기하학적으로 굉장히 중요한 대상이다. 이는 우리에게 친숙한 곡선, 곡면 등을 고차원으로 확장한 것이기 때문이다. 이러한 다양체들은 각각 차원이라는 음 아닌 정수를 가지며, 다양체를 확장한 경계다양체들은 경계라 불리는 부분집합을 가진다. 직관적으로 이러한 차원과 경계는 유일하게 잘 정의되어야 할 것처럼 보인다. 그러나 이것이 유일하다는 사실은 상당히 비자명하며 이를 증명하기 위해서는 **영역의 불변성**INVARIANCE OF DOMAIN 정리를 사용해야 한다. 이 아티클에서는 Brouwer 고정점 정리를 조합론적으로 증명하고 이를 이용하여 영역의 불변성을 증명할 것이다.

정의 1

제2가산 Hausdorff 위상공간 X가 n차원 **다양체**MANIFOLD라는 것은 각 점 $x \in X$가 Euclid 공간 $\mathbb{R}^n$의 열린 부분집합과 위상동형인 근방을 가지는 것이다. X가 n차원 **경계다양체**MANIFOLD WITH BOUNDARY라는 것은 각 점 $x \in X$가 $\mathbb{R}^n$ 또는 반공간 $\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$의 열린 부분집합과 위상동형인 근방을 가지는 것이다. x가 $\partial\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_n = 0\}$의 점에 대응되는 $\mathbb{H}^n$의 열린 부분집합과 위상동형인 근방을 가지는 점 x를 X의 **경계점**BOUNDARY POINT, $\mathbb{R}^n$의 열린 부분집합과 위상동형인 근방을 가지는 점 x를 X의 **내부점**INTERIOR POINT이라 하며 이들로 구성된 집합을 각각 X의 **경계**BOUNDARY/**내부**INTERIOR라 한다. x가 $\partial\mathbb{H}^n$의 점에 대응되지 않는 $\mathbb{H}^n$과 위상동형인 근방은 $\mathbb{R}^n$의 열린 부분집합과 위상동형인 부분근방을 가지므로 경계점이 아닌 모든 점은 내부점이다.

정의 2

n차원 **단체**SIMPLEX는 단위 단체 $\{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_i x_i \leq 1\}$를 가역 아핀 변환(가역 선형 변환과 평행이동의 합성)한 것이다. $n = 0$이면 점, $n = 1$이면 폐구간, $n = 2$이면 삼각형, $n = 3$이면 사면체이다. 그 **삼각화**TRIANGULATION는 다음 그림과 같이 더 작은 n차원 단체들로 분할한 것이다.

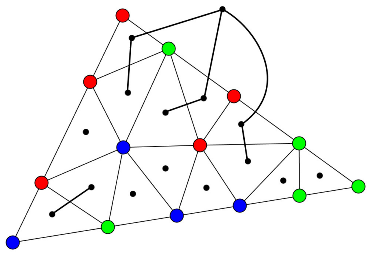


정리 1 Sperner 보조정리 (Sperner's Lemma)

n차원 단체 Δ^n의 꼭짓점들을 $n+1$가지 서로 다른 색으로 색칠하자. 색 k로 칠해진 Δ^n의 꼭짓점을 v_k, v_k의 반대쪽 면을 F_k라 하자. Δ^n의 삼각화의 꼭짓점들을 이러한 색들로 색칠하자. 만약 F_k에 색 k로 색칠된 점이 없다면 홀수 개의 (따라서 적어도 1개의) 작은 단체가 모두 서로 다른 색의 꼭짓점들을 가진다.

증명 귀납법을 사용하자. $n = 0$인 경우는 자명하다. $n - 1$차원에 대해 성립한다 하자. 각각의 작은 단체의 중심 및 Δ^n 밖에 점을 찍자. 두 작은 단체가 한 면에서 교차하며 그 면의 n개 꼭짓점이 색 $1, \cdots, n$으로 정확히 1번씩 칠해졌다면 두 단체의 중심을 변으로 연결하자. 또한 작은 단체가 Δ^n의 경계면과 교차하며 이러한 교집합 면의 n개 꼭짓점이 색 $1, \cdots, n$들로 정확히 1번씩 칠해졌다면 작은 단체의 중심과 Δ^n 밖의 점을 변으로 연결하자. (가정에 의해 이러한 경계면은

항상 F_{n+1}이다.) 이러한 방식으로 우리는 그래프를 얻는다.



한 단체에 꼭짓점이 모두 서로 다른 색들로 칠해진 면은 많아야 2개 존재하므로 작은 단체의 중심점들의 차수(연결된 변의 수)는 0, 1, 2 중 하나이다. 차수 1인 경우는 $n+1$개 꼭짓점들이 모두 색이 다른 경우에 대응한다. 외부 점의 차수는 꼭짓점이 모두 서로 다른 색인 $n-1$차원 단체 F_{n+1}의 삼각화에서 꼭짓점이 모두 서로 다른 색인 작은 $n-1$ 단체의 개수이다; 귀납가정에 의해 이는 홀수이다. 각 변은 2개의 점에 연결되므로 차수의 총합은 짝수이며 따라서 차수 1인 작은 단체의 중심점은 홀수 개 존재해야 한다. □

정의 3

$\mathbb{R}^n$에서 $B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n : |y-x|<r\}, \bar{B}(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n : |y-x|\le r\}\mathbb{B}^n = B(0,1), \bar{\mathbb{B}}^n=\bar{B}(0,1)$이다. **연속 사상**CONTINUOUS MAP은 공역의 부분집합 U가 열린집합이면 $f^{-1}(U)$가 열린집합이도록 하는 함수이다. **열린 사상**OPEN MAP은 정의역의 부분집합 U가 열린집합이면 $f(U)$가 열린집합이도록 하는 함수이다. **닫힌 사상**CLOSED MAP은 정의역의 부분집합 C가 닫힌집합이면 $f(C)$가 닫힌집합이도록 하는 함수이다. **위상동형사상**HOMEOMORPHISM은 역함수도 연속한 전단사 연속 함수이다. 이는 전단사 연속 열린 사상/전단사 연속 닫힌 사상임과 동치이다.

정리 2 Brouwer 고정점 정리 (Brouwer's Fixed Point Theorem)

연속 함수 $f : \bar{\mathbb{B}}^n \to \bar{\mathbb{B}}^n$은 고정점($f(x) = x$인 점 x)을 가진다.

증명 $\Delta^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0, \sum_i x_i = 1\}$이라 하자. 이는 n차원 단체이며 $\bar{\mathbb{B}}^n$과 위상동형이다. (Δ^n의 내부의 한 점을 고정하고 그 점에서 경계까지의 각각의 선분을 그 길이로 나눈 것으로 대응시키면 $\bar{\mathbb{B}}^n$으로의 위상동형사상이 된다.) 연속 함수 $f : \Delta^n \to \Delta^n$가 주어졌다 하자. $\mathscr{T}$가 임의의 삼각화라 하자. $\mathscr{T}$를 $n+1$개 색으로 색칠하자; k째 좌표 단위벡터 e_k를 색 k로 칠하고, 각각의 꼭짓점 v를 $f_i(v) \leq v_i$를 만족시키는 색 i로 칠하자. 특히 만약 $v \in F_k$이면 $i \neq k$이도록 선택한다. (이는 항상 가능하다: $\forall i\ f_i(v) > v_i$이면 $\sum_i f_i(v) = \sum_i v_i = 1$임에 모순이다. 특히 $v \in F_k$이면 $v_k = 0$이므로 $i \neq k$가 존재한다.) Sperner 보조정리에 의해 $\mathscr{T}$에서의 작은 단체가 존재하여 그 꼭짓점들이 모두 다른 색이다.
삼각화의 **그물 크기**MESH는 삼각화에 속한 작은 단체들의 지름의 최댓값이다. 그물 크기가 0으로 수렴하는 삼각화의 열 $\mathscr{T}_m$을 선택하자. $\mathscr{T}_m$에서의 꼭짓점들이 모두 다른 색인 작은 단체 δ^m에서 임의의 한 점 x_m을 선택하자. Δ^n이 컴팩트하므로 x_m의 어떠한 부분점렬이 존재하여 어떠한 $x \in \Delta^n$으로 수렴한다. δ^m은 $i = 1, \cdots, n+1$에 대하여 $f_i(v) \leq v_i$인 꼭짓점을 하나 이상 가진다. 그물 크기가 0으로 수렴하므로 δ^m의 꼭짓점들의 부분점렬도 x로 수렴한다. f가 연속하므로 이는 $i = 1, \cdots, n+1$에 대하여 $f_i(x) \leq x_i$임을 함의한다. 그러나 $\sum_i f_i(x) = \sum_i x_i = 1$이므로 $f(x) = x$가 성립해야 한다. □

정의 4

함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$이 **Lipschitz**라는 것은 고정된 상수 K가 존재하여 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$에 대하여 $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$가 성립하는 것이다. 집합 $X \subset \mathbb{R}^n$이 **측도 0**MEASURE ZERO이라는 것은 임의의 양수 ε에 대하여 $\sum_i r_i^n$이 ε보다 작은 가산 개 열린 공 $B(x_i, r_i)$들이 존재하여 $X \subset \bigcup_i B(x_i, r_i)$를 만족시키는 것이다. $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$이 $\mathbb{R}^n$에서 측도 0임이 알려져 있다.

보조정리 1

(a) Tietze 확장 정리: T_4(정규 Hausdorff) 공간 X의 닫힌집합 C에서 $\mathbb{R}$로의 연속 함수는 X 전체에서 $\mathbb{R}$로의 연속 함수로 확장될 수 있다.
(b) 닫힌 사상 보조정리: 컴팩트 공간에서 Hausdorff 공간으로의 연속 함수는 닫힌 사상이다.
(c) 유계집합 $A \subset \mathbb{R}^n$ 상에서 다항함수 $P : A \to \mathbb{R}^n$은 Lipschitz이다.
(d) Lipschitz 함수 f 하에서 측도 0인 집합의 상은 측도 0이다.

증명 (a) 생략. (b) 컴팩트 집합의 닫힌 부분집합은 컴팩트하며 컴팩트 집합의 연속 상은 컴팩트하고 Hausdorff 공간의 컴팩트 부분집합은 닫혀 있으므로 이러한 함수는 닫힌 사상이다.
(c) $A \subset B(0, M)$이라 하자. P의 k차항 계수가 a_k라 하자. $|P(x) - P(y)| \leq \sum_k |a_k||x^k - y^k| \leq |x - y| \sum_k k|a_k|M^{k-1} = K|x - y|$이다.
(d) 측도 0인 집합 X에 대하여 $\varepsilon > 0$이면 어떤 x_i, r_i들이 존재하여 $X \subset \bigcup_i B(x_i, r_i)$이며 $\sum_i r_i^n < \varepsilon$이다. $f(X) \subset \bigcup_i f(B(x_i, r_i)) \subset \bigcup_i B(f(x_i), Kr_i)$이며 $\sum_i (Kr_i)^n < K^n\varepsilon$이고 그 상도 측도 0이다. □

정리 3 영역의 불변성 (Invariance of Domain)

$U \subset \mathbb{R}^n$이 열린집합이라 하자. 만약 $f : U \to \mathbb{R}^n$이 단사 연속 함수이면 $f(U)$는 $\mathbb{R}^n$에서 열려 있으며 f는 U와 $f(U)$ 간의 위상동형사상이다.

증명 다음을 증명하자: 만약 $f : \bar{\mathbb{B}}^n \to \mathbb{R}^n$이 단사 연속 함수이면 $f(0)$은 $f(\bar{\mathbb{B}}^n)$의 내부점이다. 이것을 증명했다면 모든 열린집합 $V \subset U$에 대하여 $x \in V$이면 $\exists r > 0$ $B(x,r) \subset V$이고 $f(x)$가 $f(\bar{B}(x,r/2)) \subset f(V)$의 내부점이므로 $f(V)$가 열린집합임이 따라오며 따라서 f는 U에서 $f(U)$로의 전단사 연속 열린 사상이므로 위상동형사상이다.

Step I. $f : \bar{\mathbb{B}}^n \to \bar{\mathbb{B}}^n$이 전단사 연속 함수라 하자. $\bar{\mathbb{B}}^n$이 컴팩트하며 $\mathbb{R}^n$이 Hausdorff이므로 닫힌 사상 보조정리에 의해 f는 위상동형사상이다. $f^{-1} : f(\bar{\mathbb{B}}^n) \to \bar{\mathbb{B}}^n$의 각 좌표성분은 닫힌집합 $f(\bar{\mathbb{B}}^n)$에서 $[-1,1]$로의 연속 함수이므로 이들을 각각 Tietze 확장 정리에 의해 $\mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}$로의 함수로 확장할 수 있으며 따라서 f^{-1}은 이들을 좌표로 가지는 연속 함수 $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$으로 확장될 수 있다. 구축에 의해 $x \in \bar{\mathbb{B}}^n$에 대하여 $G(f(x)) = x$이다.

Step II. 함수 G는 컴팩트 집합 $f(\bar{\mathbb{B}}^n)$ 상에서 정확히 하나의 영점 $f(0)$를 가진다. 만약 $\tilde{G} : f(\bar{\mathbb{B}}^n) \to \mathbb{R}^n$이 모든 $y \in f(\bar{\mathbb{B}}^n)$에 대하여 $|G(y) - \tilde{G}(y)| \leq 1$을 만족시키는 연속 함수이면 $\tilde{G}$도 컴팩트 집합 $f(\bar{\mathbb{B}}^n)$ 상에서 적어도 하나의 영점을 가짐을 증명하자. 연속 함수 $\bar{\mathbb{B}}^n \to \bar{\mathbb{B}}^n, x \mapsto x - \tilde{G}(f(x)) = G(f(x)) - \tilde{G}(f(x))$를 고려하자. $\tilde{G}$에 대한 가정은 이것이 $\bar{\mathbb{B}}^n$을 자기 자신으로 사상함을 보장한다. Brouwer 고정점 정리에 의해 이 함수의 고정점 $x \in \bar{\mathbb{B}}^n$이 존재한다: $x = x - \tilde{G}(f(x)), \tilde{G}(f(x)) = 0$. 따라서 $\tilde{G}$의 영점 $f(x)$가 존재한다.

Step III. $f(\bar{\mathbb{B}}^n)$의 내부점이 아닌 $f(0)$이 존재한다 하자. 즉 함수 G는 경계에서 영점을 가진다. 이 경우 $\bar{\mathbb{B}}^n$에서 영점을 갖지 않는 G를

약간 변화시킨 함수 $\tilde{G}$를 구축하여 Step II에 모순임을 보이자. G가 연속하므로 $\varepsilon > 0$이 존재하여 $|y - f(0)| \le 2\varepsilon$이면 $|G(y)| \le 1/10$을 만족시킨다. $f(0)$이 $f(\bar{\mathbb{B}}^n)$의 내부점이 아니므로 어떠한 $c \in \mathbb{R}^n$이 존재하여 $|c - f(0)| < \varepsilon$이지만 $c \notin f(\bar{\mathbb{B}}^n)$이다. 평행이동을 통해 w.l.o.g. $c = 0$이라 가정할 수 있다: 그 경우 $0 \notin f(\bar{\mathbb{B}}^n), |f(0)| < \varepsilon$, $|y| \le \varepsilon$이면 $|G(y)| \le 1/10$이다. 닫힌집합 $C_1 = \{y \in f(\bar{\mathbb{B}}^n) : |y| \ge \varepsilon\}, C_2 = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = \varepsilon\}$를 정의하자. $f(\bar{\mathbb{B}}^n)$이 컴팩트하므로 이들 역시 컴팩트하다. G는 C_1에서 영점을 갖지 않는다. $0 \notin f(\bar{\mathbb{B}}^n)$이므로 연속 함수 $\phi : f(\bar{\mathbb{B}}^n) \to C_1 \cup C_2$를 다음과 같이 정의하자.

$$\phi(y) = \max(1, \varepsilon/|y|) \cdot y$$

$y \in C_1$에 대하여 $\phi(y) = y$이다. $y \in f(\bar{\mathbb{B}}^n), |y| \le \varepsilon$에 대하여 $\phi(y) = \varepsilon y/|y| \in C_2$이다.

Step IV. G가 컴팩트 집합 C_1에서 영점을 갖지 않으므로 실수 $\delta \in (0, 1/10]$가 존재하여 모든 $y \in C_1$에 대하여 $|G(y)| \ge \delta$를 만족시킨다. 해석학의 Weierstrass 근사 정리에 의해 다항함수 $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$이 존재하여 $y \in C_1 \cup C_2$에 대하여 $|G(y) - P(y)| < \delta$를 만족시킨다. $y \in C_1$에 대하여 $P(y) = 0$이면 $|G(y)| < \delta$이며 이는 모순이다. 따라서 P는 C_1에서 영점을 갖지 않는다. 만약 P가 C_2에서 영점을 가지더라도 측도 0인 집합 C_2의 Lipschitz 함수 P 하에서의 상 $P(C_2)$는 측도 0이므로 P에 적당한 작은 상수함수를 더하는 것으로 $C_1 \cup C_2$에서 영점을 갖지 않도록 할 수 있다.

Step V. $\tilde{G} = P \circ \phi : f(\bar{\mathbb{B}}^n) \to \mathbb{R}^n$라 하자. 이는 연속하며 위 논의에 의해 $f(\bar{\mathbb{B}}^n)$에서 영점을 갖지 않는다. $y \in f(\bar{\mathbb{B}}^n)$이 임의의 점이라 하자. 만약 $|y| \ge \varepsilon$이면 $\phi(y) = y$이며 $|G(y) - \tilde{G}(y)| = |G(y) - P(y)| < \delta \le \frac{1}{10}$이다. 만약 $|y| \le \varepsilon$이면 $\phi(y) \in C_2$이며 $|\phi(y)| = \varepsilon$이므로 $|G(y) - \tilde{G}(y)| \le |G(y)| + |G(\phi(y))| + |G(\phi(y)) - P(\phi(y))| \le \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \delta \le \frac{3}{10}$이다. 두 경우 모두 Step II의 전제조건을 만족시키므로 영점을 갖지 않음에 모순이다. $\square$

따름정리 1 경계의 불변성 (Invariance of Boundary)

n차원 경계다양체 X의 점은 경계점이며 동시에 내부점일 수 없다.

증명 $x \in X$가 경계점이며 내부점이고 $x \in U, x \in V, \varphi : U \cong U' \subset \mathbb{R}^n, \psi : V \cong V' \subset \mathbb{H}^n, \psi(x) \in \partial\mathbb{H}^n$가 근방과 위상동형사상이라 하자. $\iota : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^n$이 포함사상이라 하자. 열린집합 $\varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$은 연속 함수 $\iota \circ \psi \circ \varphi^{-1}$에 의해 $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$으로 사상된다. 영역의 불변성에 의해 이는 $\mathbb{R}^n$에서의 열린집합이다. 그러나 $\psi(x) \in \partial\mathbb{H}^0$의 $\mathbb{R}^n$에서의 임의의 근방은 $n+1$번째 좌표가 음수인 점을 가지므로 $\psi(U \cap V)$에 포함되지 않는다. 따라서 열린집합임은 모순이다. □

따름정리 2 차원의 불변성 (Invariance of Dimension)

위상공간 X의 임의의 점 x는 동시에 서로 다른 차원의 Euclid 공간의 열린 부분집합과 위상동형인 근방들을 가질 수 없다. 특히 공집합이 아닌 임의의 n차원 다양체/경계다양체는 동시에 m차원일 수 없다.
(단, 공집합은 모든 차원의 다양체이며 경계다양체이다.)

증명 $x \in X, x \in U, x \in V, \varphi : U \cong U' \subset \mathbb{R}^n, \psi : V \cong V' \subset \mathbb{R}^m$이 근방과 위상동형사상이며 $m < n$이라 하자. $\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$이 포함사상이라 하자. ($\mathbb{R}^m$을 앞쪽 m개 좌표들의 초평면으로 간주한다.) 열린집합 $\varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$은 연속 함수 $\iota \circ \psi \circ \varphi^{-1}$에 의해 $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$으로 사상된다. 영역의 불변성에 의해 이는 $\mathbb{R}^n$에서의 열린집합이다. 그러나 $\psi(x) \in \mathbb{R}^m$의 $\mathbb{R}^n$에서의 임의의 근방은 $m+1$번째 좌표가 0이 아닌 점을 가지므로 $\psi(U \cap V)$에 포함되지 않는다. 따라서 열린집합임은 모순이다.

그러므로 공집합이 아닌 다양체는 유일한 차원을 가진다. 임의의 공집합이 아닌 경계다양체는 내부점을 가지므로 (모든 점이 경계점일 수 없다: 경계점 x와 $x \in U, \varphi : U \cong U' \subset \mathbb{H}^n, \varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^n$에 대하여 $\varphi^{-1}(U' - \partial\mathbb{H}^n)$의 점들은 내부점이다.) 동일하게 증명된다. □