분리공리와 분리공간 Part II: 근방에 의한 집합의 분리

Articles

김다인 (수리과학부)

Part I에서는 점과 점을 근방에 의해 분리할 수 있는 분리공간들을 다루었다. Part II에서는 이를 확장하여 점과 닫힌집합/닫힌집합과 닫힌집합/두 분리집합을 분리할 수 있는 공간을 도입할 것이다. T_1 공간에서는 점이 닫힌집합이므로 이 경우 새로운 분리공리들은 Part I의 분리공리들을 함의한다. 명시적으로 부정하지 않는 한 X는 위상공간이다.

6 정칙 Hausdorff(T_3, Regular Hausdorff) 공간

정의 1

X가 **정칙**REGULAR이라는 것의 정의는 임의의 닫힌집합 $C \subset X$와 임의의 점 $x \in X - C$가 서로 소 근방에 의해 분리되는 것이다. 또한 X가 T_3라는 것의 정의는 정칙 Hausdorff인 것이다.

정리 1 정칙 $\to R_1$, 정칙 $T_0 \leftrightarrow T_3 \to T_{2\frac{1}{2}}$

(a) 정칙 공간은 R_1이다.
(b) 정칙 공간 X가 T_3일 필요충분조건은 T_0인 것이다. 특히 정칙 공간의 Kolmogorov 몫공간은 T_3이다.
(c) T_3 공리는 $T_{2\frac{1}{2}}$ 공리를 함의한다.

증명 (a) 정칙 공간 X의 임의의 위상수학적으로 구별 불가능한 점 x, y를 선택하자. w.l.o.g. $x \in U$이며 $y \notin U$이도록 하는 열린집합 U

가 존재한다 하자. 정칙성에 의해 $\overline{\{y\}} = C \subset X - U$와 x를 분리하는 서로 소 근방이 존재한다.
(b) 정칙 T_0 공간은 R_1이므로 T_2이며 따라서 T_3이다. 역은 자명하다.
(c) T_3 공간 X에서 임의의 서로 다른 점 x, y를 선택하자. Hausdorff 성에 의해 이들을 분리하는 서로 소 열린 근방 U, V가 존재한다. 정칙성에 의해 x와 $\overline{V}$를 분리하는 서로 소 열린 근방 U', V'이 존재한다. 그 경우 $X - V'$과 $\overline{V}$는 x와 y를 분리하는 서로 소 닫힌 근방이다. □

예시 1 비-Hausdorff 정칙 공간

$X = \{0, 1, 2\}$에 위상 $\{\emptyset, \{0, 1\}, \{2\}, X\}$를 부여하면 정칙 공간이지만 0과 1이 위상수학적으로 구별 불가능하므로 이 공간은 T_0가 아니다.

예시 2 Cocountable Extension Topology: $T_3 \neq T_{2\frac{1}{2}}$

실수선 $\mathbb{R}$ 상의 여가산위상(가산집합의 여집합과 $\emptyset$가 열린집합인 위상)과 표준위상의 합집합에 의해 생성된 위상을 확장 여가산위상으로 정의하자. 이러한 위상 하에서 $A \subset \mathbb{R}$이 열린집합일 필요충분조건은 표준위상 하에서의 열린집합과 가산집합의 차인 것이다.
임의의 두 점(w.l.o.g 0과 1)을 선택하면 이들을 분리하는 서로 소 닫힌 근방 $(-\infty, 1/3]$과 $[2/3, \infty)$가 존재하므로 이 공간은 $T_{2\frac{1}{2}}$이다.
$\mathbb{Q}$는 가산집합이므로 닫힌집합이다. 그 근방은 $\mathbb{R}$ 전체에서 가산 개 점을 뺀 것들뿐인데 공집합을 제외한 모든 열린집합은 비가산집합이므로 닫힌집합 $\mathbb{Q}$와 점 $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$는 서로 소 근방에 의해 분리될 수 없다. 따라서 이 공간은 T_3가 아니다.

7 정규 Hausdorff(T_4, Normal Hausdorff) 공간

정의 2

X가 **정규**NORMAL라는 것의 정의는 임의의 서로 소 닫힌 부분집합 A, B가 서로 소 근방에 의해 분리되는 것이다. 또한 X가 T_4라는 것의 정의는 정규 Hausdorff인 것이다.

T_4 공간에서 한 점 집합은 닫힌집합이므로 T_4는 T_3을 함의한다; 그러나 정규성이 정칙성을 함의하지는 않는다. 문헌에 따라서는 정칙/정규성의 정의에 T_2 조건을 추가하는 경우도 있다. (Munkres - Topology 등)

예시 3 정규성 $\not\to$ 정칙성, 비-Hausdorff 정규 공간

$(X = \{0,1,2\}, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, X\})$에는 $\emptyset$가 아닌 서로 소 닫힌 집합들의 쌍이 존재하지 않으므로 자명하게 정규이다. 그러나 점 0과 닫힌집합 $\{1,2\}$를 열린 근방에 의해 분리할 수 없으므로 X는 정칙이 아니다. X가 T_0임은 자명하다. 그러나 $2 \in U, 1 \notin U$인 열린집합 U가 존재하지 않으므로 이 공간은 T_1이 아니며 T_4도 아니다.

정칙 공간에서는 T_0가 T_2를 함의하였으나 정규 공간에서는 그렇지 않다.

정리 2 정규 $T_1 \to T_4$, 정규 $R_0 \to$ 정칙성

(a) 정규 공간 X가 T_4일 필요충분조건은 T_1인 것이다.
(b) 정규 공간 X가 정칙일 필요충분조건은 R_0인 것이다.

증명 (a) X가 정규 T_1이라 하고 $x, y \in X$를 선택하자. 열린집합 U가 존재하여 $x \in U \subset X - \{y\}$를 만족시킨다. $\{y\}$가 닫힌집합이므로

$X-U$와 $\{y\}$를 분리하는 서로 소 근방 U'과 V가 존재한다. 이들은 x와 y 또한 분리하므로 X는 T_2이며 따라서 T_4이다. 역은 자명하다.
(b) X가 정규 R_0라 하자. 닫힌집합 $C \subset X$와 임의의 $x \in X - C$를 선택하자. C가 닫힌집합이므로 $\forall y \in C$와 x는 위상수학적으로 구별 불가능하며 R_0성에 의해 이들을 분리하는 열린 근방들이 존재한다. 그러므로 $y \notin \overline{\{x\}}$이며 $\overline{\{x\}} \cap C = \emptyset$이고 정규성에 의해 이들을 서로 소 근방들로 분리 가능하다. 역은 자명하다. □

정리 3

(a) X가 정칙 iff 임의의 $x \in X$와 x의 임의의 열린 근방 U에 대하여 x의 근방 V가 존재하여 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$를 만족시킨다.
(이는 x의 닫힌 근방들이 국소기저를 형성함을 의미한다.)
(b) X가 정규 iff 임의의 닫힌집합 $C \neq \emptyset$와 C의 임의의 열린 근방 U에 대하여 C의 근방 V가 존재하여 $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$를 만족시킨다.

증명 (a) X가 정칙이면 $x \in X$와 그 근방 U에 대하여 x와 $X-U$를 분리하는 서로 소 열린 근방 V와 V'이 존재한다. $X-V'$은 닫힌집합이며 V를 포함하므로 $\overline{V}$도 포함한다. 역으로 임의의 닫힌집합 C와 $x \notin C$에 대하여 열린 근방 V가 존재하여 $x \in V \subset \overline{V} \subset X - C$이면 $x \in V$이고 $C \subset X - \overline{V}$이므로 X는 정칙이다.
(b) X가 정규이면 닫힌집합 C와 그 근방 U에 대하여 C와 $X-U$를 분리하는 서로 소 열린 근방 V와 V'가 존재한다. $X-V'$은 닫힌집합이며 V를 포함하므로 $\overline{V}$도 포함한다. 역으로 임의의 서로 소 닫힌집합 C_1, C_2에 대하여 열린 근방 V가 존재하여 $C_1 \subset V \subset \overline{V} \subset X - C_2$이면 $C_1 \subset V$이고 $C_2 \subset X - \overline{V}$이므로 X는 정규이다. □

예시 4 Sorgenfrey Plane: $T_4 \neq T_3$

Sorgenfrey line $\mathbb{R}_l$을 실수선 $\mathbb{R}$에 부분기저 $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$이 생성한 위상이 부여된 공간으로 정의하자. 이는 자명하게 T_2이다. 정규성을 증명하기 위해 서로 소 닫힌집합 $A, B \neq \emptyset$를 선택하자. 각각의 $a \in A$에 대하여 $[a,a') \cap B = \emptyset$이도록 하는 $a' > a$을 선택할 수 있다; 그렇지 않으면 a는 B의 극한점이며 B가 닫힌집합이므로 서로소임에 모순이다. 그 경우 $U = \bigcup_{a\in A}[a,a')$은 A를 포함하는 열린집합이다. 동일한 방식으로 각각의 $b \in B$에 대하여 $b' > b$를 선택하여 B를 포함하는 열린집합 $V = \bigcup_{b\in B}[b,b')$를 얻을 수 있다.

임의의 $a \in A, b \in B$를 선택하자. w.l.o.g $a < b$라 하자. $[a,a') \cap B = \emptyset$이므로 $b \geq a'$이며 $[a,a') \cap [b,b') = \emptyset$가 성립한다. 따라서 $U \cap V = \emptyset$이다. 그러므로 $\mathbb{R}_l$은 T_4이고 따라서 T_3이다.

정리 5(a)와 곱공간의 정의를 이용하면 정칙[resp. T_2, T_3] 공간들의 곱공간이 정칙[T_2, T_3]임을 보일 수 있다. (Part IV에서 다시 다룰 것이다.) 따라서 Sorgenfrey plane을 $\mathbb{R}_l^2 = \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$로 정의하면 T_3이다. 이것이 T_4가 아님을 증명할 것이다.

$\Delta_- = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}, \Delta_0 = \{(x,-x) : x \in \mathbb{Q}\}, \Delta_1 = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$라 하자. Δ_i는 열린집합 $\bigcup\{[x,\infty) \times [y,\infty) : ((x,y) \in \Delta_- - \Delta_i) \vee y > -x\} \cup \bigcup\{[x-a,x) \times [-x-a,-x) : x \in \mathbb{R}, a > 0\}$의 여집합이므로 닫힌집합이다. Δ_i의 임의의 근방 U_i들을 선택하자. $\forall p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\ \exists a(p) \in \mathbb{R}$ s.t. $W_p = [p, p+a(p)) \times [-p, -p+a(p)) \subset U_1$이다. $P_n = \{p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : a(p) > 1/n\}$이라 하면 $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \bigcup_n P_n$이다. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$가 $\mathbb{R}$의 F_σ 부분집합이 아니므로 $z \in \mathbb{Q}$와 n이 존재하여 z가 P_n의 표준-폐포에 속하도록 한다.

V가 점 $(z,-z)$를 포함하는 임의의 $\mathbb{R}_l^2$-열린집합이라 하자. w.l.o.g. 필요하다면 이를 축소하여 V가 $t < 1/2n$을 만족시키는 기저 원소 $[z,t) \times [-z,-z+t)$라 하자. $(z,-z)$가 P_n의 표준-폐포에 속하므로 $p \in P_n$이 존재하여 $|z-p| < t/10$을 만족시킨다. $x \in [z, z+t) \cap [p, p+$

$t), y \in [-z, -z+t) \cap [-p, -p+t)$를 선택하자. 그 경우 $(x, y) \in V$이다. 또한 $t < 1/2n$이므로 $(x, y) \in W_p \subset U_1$이다. 따라서 $V \cap U_1 \neq \emptyset$이며 $(z, -z)$는 U_1의 $\mathbb{R}_l^2$-폐포에 속한다. $(z, -z) \in \Delta_0 \subset U_0$이며 U_0이 열린집합이므로 $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$이며 $\mathbb{R}_l^2$는 정규가 아니다.

8 완비 정규 Hausdorff(T_5, Completely Normal Hausdorff) 공간

위상공간의 부분집합 A, B가 서로 분리집합이라는 것의 정의는 $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$인 것이다. 특히 두 서로 소 닫힌집합들은 분리집합이다.

정의 3

X가 **완비 정규**COMPLETELY NORMAL라는 것의 정의는 임의의 두 분리집합을 서로 소 열린 근방으로 분리 가능한 것이다. 또한 X가 T_5라는 것의 정의는 완비 정규 Hausdorff인 것이다.

자명하게 완비 정규 $\to$ 정규, $T_5 \to T_4$이다. 위 절에서의 논의에 의해 T_0 완비 정규 $\not\to T_5$이며 T_1 완비 정규 $\to T_5$이다.

정리 4

X가 완비 정규임은 X의 모든 부분공간이 정규임과 동치이다.

증명 X가 완비 정규 공간이라 하자. $Y \subset X$가 임의의 부분공간이면 Y에서의 임의의 서로 소 닫힌집합 A, B에 대하여 $A = Y \cap \overline{A}, B = Y \cap \overline{B}$이다. (여기에서 폐포는 X에 대한 것이다.) 따라서 $\overline{A} - A$와

$\overline{B}-B$는 $X-Y$의 부분집합이고 각각 B, A와 교차하지 않는다. X의 완비 정규성에 의해 $V_A \supset A$와 $V_B \supset B$가 존재하여 $V_A \cap V_B = \emptyset$이므로 $Y \cap V_A$와 $Y \cap V_B$가 Y에서 A, B를 분리한다. 따라서 Y는 정규 공간이다.

역으로 X의 모든 부분공간이 정규라 하자. 분리집합 A, B에 대하여 $Y = X-(\overline{A}\cap\overline{B})$라 하면 Y는 X에서의 열린집합이다. 부분공간 Y에서의 폐포에 아래첨자 Y를 붙여 표기하면 $\overline{A}_Y = Y\cap\overline{A}$와 $\overline{B}_Y = Y\cap\overline{B}$가 Y에서의 서로 소 닫힌집합이다. Y의 정규성에 의해 Y에서의 열린집합 $V_A \supset \overline{A}_Y, V_B \supset \overline{B}_Y$가 존재하여 $V_A\cap V_B = \emptyset$를 만족시킨다. Y가 X에서 열려 있으므로 V_A와 V_B는 X에서도 열린집합이다. 따라서 X가 완비 정규이다. □

따라서 완비 정규성을 **유전 정규성**HEREDITARY NORMALITY이라고도 한다.

예시 5 비-Hausdorff 완비 정규 공간

예시 3의 세 점 공간 $(\{0,1,2\},\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\},\{0,1,2\}\})$의 부분공간 $(\{0,1\},\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\})$은 이산위상을 가지므로 정규 공간이며 나머지 부분공간에서는 $\emptyset$가 아닌 서로 소 닫힌집합의 쌍이 없으므로 자명하게 정규이다. 따라서 이는 완비 정규이다.

예시 6 완비 정규성 $\neq$ 정규성

공간 $(X=\{0,1,2,3\},\{\{0,1\},\{1\},\{1,2\},\{0,1,2\},X\})$에는 $\emptyset$가 아닌 두 서로 소 닫힌집합이 존재하지 않으므로 자명하게 정규이다. 그러나 부분공간 $(\{0,1,2\},\{\{0,1\},\{1\},\{1,2\},\{0,1,2\}\})$에서 닫힌집합 $\{0\},\{2\}$를 서로 소 근방으로 분리할 수 없으므로 정규가 아니다. 따라서 X는 완비 정규가 아니다.

정리 5

컴팩트 Hausdorff 공간은 정규이다.

증명 $(X, \mathscr{T})$가 컴팩트 Hausdorff 공간이라 하자. 컴팩트 공간의 닫힌집합은 컴팩트하다.

먼저 정칙성을 증명하자. 임의의 공집합이 아닌 닫힌집합 $C \subset X$와 $x \in X - C$를 선택하자. 각각의 $y \in C$에 대하여 족 $\mathscr{U}(y) = \{U \in \mathscr{T} : \exists V \in \mathscr{T}\ (x \in V, y \in U, U \cap V = \emptyset)\}$를 고려하자; Hausdorff 성에 의해 이는 공족이 아니다. $\bigcup_{y \in C} \mathscr{U}(y)$는 C의 열린 덮개이므로 그 유한 부분덮개 $\{U_1, \cdots, U_n\}$이 존재한다. 이에 대응하는 x를 분리하는 열린 근방들을 $\{V_1, \cdots, V_n\}$이라 하자. 그 경우 $\bigcup_i U_i$와 $\bigcap_i V_i$는 C와 x를 분리하는 서로 소 열린 근방이다.

다음으로 정규성을 증명하자. 임의의 공집합이 아닌 서로 소 닫힌집합 A, B를 선택하자. A의 임의의 점 x를 고정하고 족 $\mathscr{U}'(x) = \{U \in \mathscr{T} : \exists V \in \mathscr{T}\ (x \in U, B \subset V, U \cap V = \emptyset)\}$를 고려하자; 정칙성에 의해 이는 공족이 아니다. $\bigcup_{x \in A} \mathscr{U}'(x)$는 A의 열린 덮개이므로 그 유한 부분덮개 $\{U'_1, \cdots, U'_m\}$이 존재한다. 이에 대응하는 B를 분리하는 열린 근방들을 $\{V'_1, \cdots, V'_m\}$이라 하자. 그 경우 $\bigcup_i U'_i$과 $\bigcap_i V'_i$는 A와 B를 분리하는 서로 소 열린 근방이다. □

예시 7 Tychonoff Plank: $T_5 \neq T_4$

ω가 최소 초한 서수, Ω가 최소 비가산 서수, $\omega' = \omega + 1 = [0, \omega], \Omega' = \Omega + 1 = [0, \Omega]$라 하고 여기에 순서위상을 부여하자. 곱공간 $\Omega' \times \omega'$은 **Tychonoff 판자**TYCHONOFF PLANK라 불린다. 이것이 정규임을 직접적으로 증명하는 것은 어렵지 않다; 그러나 이 공간은 두 컴팩트

Hausdorff 공간의 곱공간이므로 스스로 컴팩트 Hausdorff이며 따라서 위 정리에 의해 정규임을 간단히 보일 수 있다.
X가 $\Omega' \times \omega' - \{(\Omega, \omega)\}$, 즉 판자에서 가장자리 점을 제거한 부분공간이라 하자. (deleted Tychonoff plank) A가 첫째 좌표가 Ω인 X의 모든 점들의 집합이라 하고 B가 둘째 좌표가 ω인 모든 점들의 집합이라 하자. 그 경우 A와 B의 서로 소 근방이 존재하지 않는다; U가 A의 임의의 근방이라 하자. $x \in \omega$에 대하여 $f(x)$가 만약 $y > f(x)$이면 $(y, x) \in U$를 만족시키는 최소 서수라 하자. $\bigcap_{x\in\omega}\{y : y > \max_{n\leq x} f(n)\}$는 감소 비가산 집합열의 가산 개 교집합이므로 공집합일 수 없으며 따라서 f의 값들의 상한은 Ω 미만이다. 그러므로 B의 임의의 근방은 U와 교차하며 deleted Tychonoff plank는 정규가 아니고 Tychonoff plank는 완비 정규가 아니다.

지금까지 우리는 근방에 의해 어떠한 집합들을 분리할 수 있는 분리공간들을 살펴보았다. Part III에서는 집합들을 실 함수에 의해 분리할 수 있는 분리공간들을 도입하고 Kolmogorov classificaiton을 완성할 것이다. ($i \leq j$ iff $T_j \to T_i$, $i \neq j$이면 $T_i \neq T_j$ $(i, j \in \{0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5, 6\})$)