위상수학에서의 필터와 그물

Articles

김다인 (수리과학부)

제1가산 공간에서는 위상수학적 성질들을 점렬을 이용해 정의할 수 있다. 그러나 점렬은 근본적으로 정의역이 가산집합이므로 이러한 논의는 일반적인 공간으로 확장되기 어렵다. 그러므로 정의역을 임의의 방향집합으로 확장한 그물과 부분집합들의 특정한 집합족인 필터를 도입하고 이들이 서로 동치이며 점렬을 확장함을 보일 것이다.
명시적으로 부정하지 않는 한 S는 집합, X는 위상공간이다.

1 필터 (Filter)

정의 1

$S \neq \emptyset$ 상에서의 **필터**FILTER는 다음을 만족시키는 $\mathscr{F} \subset P(S)$이다:

(a) $S \in F$이며 $\emptyset \notin \mathscr{F}$이다.
(b) 하향성: $A, B \in \mathscr{F}$이면 $A \cap B \in \mathscr{F}$이다.
(c) 상집합: $A \subset B \subset S, A \in \mathscr{F}$이면 $B \in \mathscr{F}$이다.

하향성은 유한교차성을 함의한다. $\forall A, B \in \mathscr{G}\ \exists C \in \mathscr{G}\ C \subset A \cap B$를 만족시키는 임의의 $\mathscr{G} \subset P(S), \mathscr{G} \neq \emptyset$는 **필터기저**FILTER BASE라 불리며 다음의 필터를 생성한다.

$$\{B \subset S : \exists A \in \mathscr{G}\ (B \supset A)\}$$

임의의 유한교차 집합족은 **필터 부분기저**FILTER SUBBASE라 불린다; 그 원소들의 유한 교집합들의 족은 필터기저를 형성하며 필터를 생성한다. **초필터**ULTRAFILTER는 다음을 만족시키는 필터 $\mathscr{F}$이다: 만약

$A \subset S$이면 $A \in \mathscr{F}$ 또는 $S - A \in \mathscr{F}$이다.
위상공간 $(X, \mathscr{T})$의 점 x의 **근방 필터**NEIGHBORHOOD FILTER는 x의 모든 근방들의 족이다. X 상에서의 필터 $\mathscr{F}$가 x로 **수렴**CONVERGE한다는 것의 정의는 $\mathscr{F} \supset \mathscr{N}(x)$인 것이다; 이 경우 x는 $\mathscr{F}$의 **극한**LIMIT이다.
두 집합족 $\mathscr{F}, \mathscr{G}$가 **맞물린다**MESH는 것은 $\forall A \in \mathscr{F}\ \forall B \in \mathscr{G}\ A \cap B \neq \emptyset$인 것이며 $\mathscr{F} \# \mathscr{G}$로 표기한다. x가 $\mathscr{F}$의 **집적점**CLUSTER POINT이라는 것의 정의는 $\mathscr{F} \# \mathscr{N}(x)$인 것이다. 기저와 부분기저의 극한/집적점은 이들이 생성하는 필터의 극한/집적점이다.

$$\mathscr{N}(x) = \{S \subset X : \exists V \in \mathscr{T}\ (x \in V \subset S)\}$$

정리 1 초필터

(a) 집합 S 상에서의 필터 $\mathscr{F}$가 초필터일 필요충분조건은 극대 필터인 것이다. 특히 모든 필터는 초필터로 확대될 수 있다.
(b) $x \in X$가 위상공간 X 상에서의 필터 $\mathscr{F}$의 집적점일 필요충분조건은 어떠한 초필터 $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$가 x로 수렴하는 것이다. 특히 초필터의 모든 집적점은 극한이다.

증명 (a) $\mathscr{F}$가 초필터이며 $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$가 필터이고 $A \in \mathscr{F}' - \mathscr{F}$이면 $S - A \in \mathscr{F}$이고 $S - A \in \mathscr{F}' \wedge A \in \mathscr{F}'$이므로 모순이다.
역으로 $A \subset S, A \not\subset \mathscr{F}, S - A \not\subset \mathscr{F}$라 하자. 만약 $B \in \mathscr{F}$이고 $B \cap A = \emptyset$이면 $S - A \supset B$이며 $S - A \in \mathscr{F}$이므로 모순이다. 그러므로 $\mathscr{G} = \mathscr{F} \cup \{A\}$는 하향 족이며 필터 $\mathscr{F}' \supsetneq \mathscr{F}$를 생성한다.
마지막으로 $\mathscr{F}_0$가 S 상에서의 필터라 하고 S 상에서의 모든 필터 $\mathscr{F} \supset \mathscr{F}_0$들의 족 $\mathscr{A}$에 부분순서 $\subset$를 부여하자. $\mathcal{C} \subset \mathscr{A}$가 전순서 부분집합이면 $\bigcup \mathcal{C}$는 필터이므로 $\mathcal{C}$의 상계이다. Zorn 보조정리에 의해 $\mathscr{A}$의 극대원 $\mathscr{U} \supset \mathscr{F}_0$가 존재한다.

(b) x가 $\mathscr{F}$의 집적점이면 부분기저 $\mathscr{F} \cup \mathscr{N}(x)$가 생성하는 필터 $\mathscr{F}_1$은 x로 수렴하며 $\mathscr{F}_1$을 포함하는 초필터 $\mathscr{F}'$이 존재한다.
역으로 $\mathscr{F}'$이 x로 수렴하면 유한교차성에 의해 $\mathscr{N}(x) \subset \mathscr{F}'$의 원소와 $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$의 원소는 항상 교차한다. □

정리 2 필터의 수렴성과 극한점

(a) $x \in X$가 $A \subset X$의 극한점일 필요충분조건은 $A - \{x\}$의 부분집합들로 구성된 필터기저가 존재하여 x로 수렴하는 것이다.
(b) $x \in X$가 $A \subset X$의 폐포점일 필요충분조건은 A의 부분집합들로 구성된 필터기저가 존재하여 x로 수렴하는 것이다.
(c) $A \subset X$가 닫힌집합일 필요충분조건은 A의 부분집합들로 구성된 임의의 필터기저가 $X - A$의 점으로 수렴하지 않는 것이다.

증명 (a) x가 A의 극한점이면 $\{A \cap N - \{x\} : N \in \mathscr{N}(x)\}$는 x로 수렴하는 필터기저이다. 역으로 이러한 필터기저 $\mathscr{B}$가 존재시 $\forall N \in \mathscr{N}(x)\ \exists B \in \mathscr{B}\ B \subset N$이고 $B \subset A - \{x\}$이므로 x는 A의 극한점이다. 필터기저 $\{A \cap N : N \in \mathscr{N}(x)\}$를 이용하여 (b)도 마찬가지로 증명한다. (c)는 (b)에 의해 자명하다. □

정리 3 연속 함수의 특성화

$f : X \to Y$가 $x \in X$에서 연속할 필요충분조건은 X 상에서의 임의의 필터 $\mathscr{F}$가 어떠한 $x \in X$로 수렴한다면 기저 $\{f[A] : A \in \mathscr{F}\}$에 의해 생성된 필터 $f_*(\mathscr{F})$가 $f(x)$로 수렴하는 것이다.

증명 f가 연속하며 $\mathscr{F} \supset \mathscr{N}(x)$이면 $f_*(\mathscr{F}) \supset f_*(\mathscr{N}(x)) \supset \mathscr{N}(f(x))$이다. 역으로 $\forall x \in X$ $f_*(\mathscr{N}(x)) \supset \mathscr{N}(f(x))$이면 f는 모든 점 x에서 연속하며 따라서 X 상에서 연속하다. □

정리 4 곱공간에서의 수렴

X_α $(\alpha \in I)$가 위상공간이며 $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$이고 $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$가 사영이라 하자. X 상에서의 필터 $\mathscr{F}$가 x로 수렴 iff 각각의 $\alpha \in I$에 대하여 $(\pi_\alpha)_*(\mathscr{F}) = \{\pi_\alpha[A] : A \in \mathscr{F}\}$가 $\pi_\alpha(x)$로 수렴하는 것이다.

증명 π_α들이 연속하므로 $\rightarrow$는 자명하다. $\forall \alpha \in I$에 대하여 $(\pi_\alpha)_*(\mathscr{F})$가 $\pi_\alpha(x)$로 수렴한다 가정하자. 임의의 $V \in \mathscr{N}(x)$에 대하여 열린 근방 $V_\alpha \in \mathscr{N}(\pi_\alpha(x))$들이 존재하여 $I' = \{\alpha \in I : X_\alpha \neq V_\alpha\}$라 하면 $|I'| < \aleph_0$이고 $\prod_\alpha V_\alpha \subset V$이다. $(\pi_\alpha)_*(\mathscr{F}) \supset \mathscr{N}(\pi_\alpha(x))$이므로 $V_\alpha \in (\pi_\alpha)_*(\mathscr{F})$이고 $\pi_\alpha^{-1}[V_\alpha] \in \mathscr{F}$이다. $V \supset \bigcap_{\alpha \in I'} \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha] \in \mathscr{F}$이므로 $V \in \mathscr{F}$이며 $\mathscr{F} \supset \mathscr{N}(x)$이다. □

정리 5

임의의 위상공간 X가 T_2일 필요충분조건은 X 상에서의 임의의 필터의 극한이 (존재한다면) 유일한 것이다.

증명 먼저 X가 T_2이며 X 상에서의 필터 F가 서로 다른 극한 x, y를 가진다 하자. 이들을 분리하는 서로 소 근방 $U \in \mathscr{N}(x), V \in \mathscr{N}(y)$가 존재하고 $F \supset \mathscr{N}(x), F \supset \mathscr{N}(y)$이며 유한교차성에 모순이다.
역으로 $x, y \in X$가 존재하여 x와 y의 임의의 근방이 교차한다 하자. 부분기저 $\mathscr{N}(x) \cup \mathscr{N}(y)$가 생성하는 필터는 x와 y에 수렴한다. □

2 그물 (Net)

정의 2

$(D,\le)$가 **유향집합**DIRECTED SET이라는 것의 정의는 $D\ne\emptyset$이고 $\le\subset D\times D$이며 다음이 성립하는 것이다.

(a) 추이성: $\forall x,y,z\in D\ (x\le y\wedge y\le z\to x\le z)$
(b) 반사성: $\forall x\in D\ x\le x$
(c) 상계의 존재성: $\forall x,y\in D\ \exists z\in D\ (x\le z\wedge y\le z)$

$m\in D$의 **꼬리**TAIL는 $\mathrm{tail}(m)=\{n\in D:m\le n\}$이다. $E\subset D$가 **공종**COFINAL[resp. **궁극적**EVENTUAL]임은 $\forall m\in D\ \mathrm{tail}(m)\cap E\ne\emptyset$ $[\exists m\in D\ E\supset\mathrm{tail}(m)]$인 것이다.
S에서의 **그물(net)**은 유향집합에서 S로의 함수이다. 그물 $f:D\to S$가 $A\subset S$에 **빈번히**FREQUENTLY[resp. **궁극적으로**EVENTUALLY] 속한다는 것은 $\forall m\in D\ f[\mathrm{tail}(m)]\cap A\ne\emptyset$ $[\exists m\in D\ f[\mathrm{tail}(m)]\subset A]$인 것이다. f가 **보편**UNIVERSAL이라는 것은 $\forall A\subset S$에 대하여 f가 A 또는 $S-A$에 궁극적으로 속하는 것이다.
$x\in X$가 위상공간 X에서의 그물 f의 **집적점**CLUSTER POINT[resp. **극한**LIMIT]임은 f가 $\forall V\in\mathscr{N}(x)$에 빈번히[궁극적으로] 속하는 것이다.
$f:D_1\to S$가 $g:D_2\to S$의 **부분그물**SUBNET임은 $f\lessdot g$로 표기하며 $E\subset D_2$가 궁극적이면 $f^{-1}[g[E]]\subset D_1$이 궁극적인 것이다. f가 g의 **K-부분그물**K-SUBNET임은 $\exists h:D_1\to D_2\ f=g\circ h$이며 $E\subset D_2$가 궁극적이면 $h^{-1}(E)\subset D_1$이 궁극적인 것이다. $f\lessdot g\wedge g\lessdot f$이면 f와 g가 **동치**EQUIVALENT라 하며 $f\sim g$로 표기한다.
그물 $f:D\to S$의 **유도 필터**INDUCED FILTER f^*는 기저 $\{f[\mathrm{tail}(m)]:m\in D\}$가 생성하는 필터이다. 필터 $\mathscr{F}\subset P(S)$의 **유도 그물**INDUCED NET $\mathscr{F}^*$는 $D=\{(x,A):x\in A\in\mathscr{F}\},(x,A)\le(y,B)\leftrightarrow A\supset B$라 하면 함수 $f:(D,\le)\to S,(x,A)\mapsto x$이다.

정리 6 필터와 그물의 동치

f, g가 그물이며 $\mathscr{F}, \mathscr{G}$가 필터라 하자.
(a) $f \lessdot g \leftrightarrow f^* \supset g^*, f \sim g \leftrightarrow f^* = g^*$
(b) $\mathscr{F} \supset \mathscr{G} \rightarrow \mathscr{F}^* \lessdot \mathscr{G}^*$
(c) $\mathscr{F}^{**} = \mathscr{F}, f^{**} \sim f$
(d) 유도 연산은 그물의 동치류들과 필터들 간의 일대일 대응이다.
(e) 위상공간의 대응되는 그물/필터는 동일한 극한과 집적점을 가진다.

증명 (a) $f : D_1 \rightarrow S \lessdot g : D_2 \rightarrow S$이면 $\forall m \in D_2\ \exists n \in D_1\ f^{-1}[g[\mathrm{tail}(m)]] \supset \mathrm{tail}(n)$이며 따라서 $f[\mathrm{tail}(n)] \subset g[\mathrm{tail}(m)]$이다. 꼬리들의 족이 유도 필터를 생성하므로 $f^* \supset g^*$이다.
역으로 $f^* \supset g^*$이면 $\forall m \in D_2\ \exists n \in D_1\ g[\mathrm{tail}(m)] \supset f[\mathrm{tail}(n)]$이므로 $E \supset \mathrm{tail}(m)$이면 $f^{-1}[g[E]] \supset \mathrm{tail}(n)$이며 따라서 $f \lessdot g$이다.
(b) $f = \mathscr{F}^* : D_1 \rightarrow S, g = \mathscr{G}^* : D_2 \rightarrow S$라 하자. 만약 $\mathrm{tail}((x, A)) \subset E \subset D_2$이면 $g[E] \supset g[\mathrm{tail}((x, A))] = A$이고 $f^{-1}[A]$는 D_1에서의 $\mathrm{tail}((x, A))$를 포함한다.
(c) $x \in A \in \mathscr{F}$이면 $\mathscr{F}^*[\mathrm{tail}((x, A))] = A$이므로 $\mathscr{F}^{**} = \mathscr{F}$이다. 또한 $f^{***} = f^*$이므로 (a)에 의해 $f \sim f^{**}$이다.
(d) 위 결과들을 조합하라.
(e) 필터 $\mathscr{F}$가 $\mathscr{N}(x)$를 포함하면[맞물리면] $\forall V \in \mathscr{N}(x)\ \forall x \in V\ \mathscr{F}^*[\mathrm{tail}((x, V))] = V\ [\forall A \in \mathscr{F}\ \forall x \in A\ \exists B \subset A\ \exists y \in B \cap V\ \mathscr{F}^*[\mathrm{tail}((y, B))] \subset V]$이므로 x는 $\mathscr{F}$의 유도 그물의 극한[집적점]이다. 역으로 $f : D \rightarrow X$가 $\forall V \mathscr{N}(x)$에 궁극적으로[빈번히] 속하면 V가 어떠한 꼬리의 상을 포함[모든 꼬리의 상과 교차]하므로 유도 필터가 근방 필터를 포함한다[맞물린다]. $\square$

정리 7 그물의 성질

$x \in X$이며 $A \subset X$라 하자.
(a) x가 X에서의 그물 f의 집적점 iff $\exists g \lessdot f$가 x로 수렴한다.
(b) $g \lessdot f$이며 $x \in X$가 f의 극한이면 g의 극한이다.
(c) 동치인 그물들은 정확히 같은 극한들과 집적점들을 가진다.
(d) x가 A의 극한점 iff $A - \{x\}$에서의 그물이 존재하여 x로 수렴한다.
(e) x가 A의 폐포점 iff A에서의 그물이 존재하여 x로 수렴한다.
(f) A가 닫힌집합 iff A에서의 그물은 $X - A$의 점으로 수렴하지 못한다.
(g) $f : X \to Y$가 연속 iff X에서의 임의의 그물 g가 어떠한 x로 수렴한다면 $f \circ g$가 $f(x)$로 수렴한다.
(h) 곱공간에서 그물이 x에 수렴 iff 그물의 각 사영이 x의 사영에 수렴

정리 8 보편 그물

(a) 보편 그물은 초필터에 대응된다.
(b) S에서의 보편 그물이 $A \subset S$에 빈번히 속하면 A에 궁극적으로 속한다. 특히 위상 공간에서 보편 그물의 집적점은 극한이다.
(c) 보편 그물의 부분그물은 보편 그물이며 이들은 서로 동치이다.
(d) 모든 그물은 보편 부분그물을 가진다.

증명 (a) S에서의 그물이 $A \subset S$에 빈번히 속할 필요충분조건은 그 유도 필터가 A를 원소로 가지는 것이다. 따라서 그물 f가 보편 그물임은 f의 유도 필터가 초필터임과 동치이다.
(b) 그물이 A에 빈번히 속함은 $S - A$에 궁극적으로 속하지 않음과 동치이므로 보편 그물의 경우에는 A에 궁극적으로 속한다. □

3 점렬 (Sequence)

점렬은 정의역이 ω인 특수한 그물이다. 제1가산 공간에서는 위 정리들 중 대부분이 점렬에 대하여 성립한다. 점렬의 부분그물 중 점렬과 동치가 아닌 것이 존재할 수 있음을 주의하라.

정리 9

X가 제1가산 공간이며 $x \in X, A \subset X$이면 다음이 성립한다:

(a) x가 A의 극한점 iff $A - \{x\}$에서의 점렬이 존재하여 x로 수렴한다.
(b) x가 A의 폐포점 iff A에서의 점렬이 존재하여 x로 수렴한다.
(c) A가 닫힌집합 iff A에서의 점렬이 $X - A$로 수렴하지 못한다.
(d) x가 점렬 $\{a_n\}$의 집적점이면 x로 수렴하는 부분점렬이 존재한다.
(e) $f : X \to Y$가 연속할 필요충분조건은 X에서의 임의의 점렬 $\{a_n\}$이 어떠한 x로 수렴한다면 $\{f(a_n)\}$이 $f(x)$로 수렴하는 것이다. (Y가 제1가산이어야 할 필요는 없다.)

증명 (a) x의 가산 근방기저 $\{U_n : n \in \omega\}$가 주어진 경우 각각의 $n \in \omega$에 대하여 $a_n \in (A - \{x\}) \cap \bigcap_{i \leq n} U_i$를 선택하면 $a_n \to x$이다. 역은 자명하다. (b)와 (c)가 따라온다.
(d) x가 집적점이며 가산 근방기저 $\{U_n : n \in \omega\}$를 가지면 $\forall i \in \omega$에 대하여 $a_{n_i} \in \bigcap_{m \leq i} U_m$인 n_i를 선택 가능하며 $a_{n_i} \to x$이다.
(e) 모든 점렬은 그물이므로 f가 연속하며 $a_n \to x$이면 $f(a_n) \to f(x)$임은 자명하다. $f : X \to Y$가 연속함은 임의의 $A \subset X$에 대하여 $f[\bar{A}] \subset \overline{f[A]}$임과 동치임을 상기하라. (증명은 어렵지 않다.) 만약 모든 $a_n \to x$에 대하여 $f(a_n) \to f(x)$이면 (b)를 이용하여 f가 연속함을 증명할 수 있다. $\square$