분리공리와 분리공간 Part IV: 분리공간의 응용

Articles

김다인 (수리과학부)

우리는 지금까지 분리공간들을 정의하고 분류하는 것에 Part I-III을 할애했다. Part IV에서는 분리공간을 응용하여 다른 성질과의 상호작용을 다룰 것이다. 먼저 분리성이 부분공간/곱공간에 유전되는지를 살펴볼 것이고 다음으로 가산성과의 관계를 다룰 것이며 마지막으로 매장 정리와 거리화를 다룰 것이다.

12 분리공간의 유전성

정리 1 분리공간의 유전성

(a) $T_0, T_1, T_2, T_{2\frac{1}{2}}$, 완비 Hausdorff성, 정칙성, 완비 정칙성, 완비 정규성, 완전 정규성, $T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_5, T_6$은 부분공간에 유전된다. 정규성과 T_4는 일반적으로는 유전되지 않지만 닫힌 부분공간에는 유전된다.
(b) $T_0, T_1, T_2, T_{2\frac{1}{2}}$, 완비 Hausdorff성, 정칙성, 완비 정칙성, $T_3, T_{3\frac{1}{2}}$는 해당 성질을 가지는 공간들의 곱공간에 유전된다. 단 정규성, 완비 정규성, 완전 정규성, T_4, T_5, T_6은 유전되지 않는다.

증명 (a) X가 분리공간이고 $Y \subset X$라 하자. 두 점을 분리하는 공간들이 유전된다: $x, y \in Y$를 X에서 분리하는 근방/함수를 Y로 제한한다. 점과 닫힌집합을 분리하는 공간들도 유전된다: $x \in Y$와 닫힌집합 $A \subset Y - \{x\}$에 대하여 닫힌집합 $B \subset X$에 대하여 $A = Y \cap B$이므로 x와 B를 X에서 분리하는 근방/함수를 Y로 제한한다.
완비 정규성과 T_5가 유전됨은 자명하다. Part III, 정리 6에 의해 완전

정규성과 T_6이 유전된다. Part II, 예시 7의 T_4 공간 Tychonoff plank는 비-T_4 부분공간 deleted Tychonoff plank를 가진다.
$Y \subset X$가 닫힌 부분공간이면 서로 소 닫힌집합 $A, B \subset Y$는 X에서도 닫혀 있으므로 정규성과 T_4는 닫힌 부분공간에 유전된다.

(b) X_α ($\alpha \in I$)들이 분리공간이고 $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$이 곱공간이라 하자. π, ι가 각각 사영/포함사상이라 하자. 두 점을 분리하는 공간들이 유전된다: $x, y \in X, x \neq y$에 대하여 $\pi_\beta(x) \neq \pi_\beta(y)$인 β가 존재하며 X_β에서 이들을 분리하는 근방/함수의 π_β 하에서의 역상/ι_β와의 합성을 취한다. 점과 닫힌집합을 분리하는 공간들도 유전된다: $x \in X$와 닫힌집합 $A \subset X - \{x\}$에 대하여 기저 원소 $x \in U = \prod_\alpha U_\alpha \subset X - A$가 존재한다. α_i들이 $U_{\alpha_i} \neq X_{\alpha_i}$이도록 하는 유한 개 첨자라 하자. X_{α_i}에서 $\pi_{\alpha_i}(x)$와 $X_{\alpha_i} - U_{\alpha_i}$를 분리하는 근방 $V_{\alpha_i} \ni x$/함수 f_{α_i}들이 존재하며 ($\alpha \neq \alpha_i$이면 $V_\alpha = X_\alpha$라 한다) $\prod_\alpha V_\alpha / \prod_i f_{\alpha_i}$는 X에서 이들을 분리한다. Sorgenfrey line $\mathbb{R}_l$은 T_6이지만 그 곱공간 $\mathbb{R}_l^2$는 정규가 아니다: 아래 예시를 참조하라. □

보조정리 1

(a) 제2가산 공간의 모든 비가산집합은 극한점을 가진다.
(b) $X \subset \mathbb{R}$의 모든 비가산 부분집합 A는 양쪽 극한점(어떠한 반개구간 $I \ni x$에 $A - \{x\}$의 점이 포함되도록 하는 점 $x \in X$)을 가진다.

증명 (a) $\mathscr{B}$가 위상공간 X의 가산 기저이며 $A \subset X$라 하자. $x \in A$가 A의 극한점이 아니면 $V_x \cap A = \{x\}$를 만족시키는 $V_x \in \mathscr{B}$가 존재한다. $x \mapsto V_x$가 단사이며 $\mathscr{B}$가 가산집합이므로 극한점이 아닌 $x \in A$들은 가산 개 이하이다. 따라서 극한점인 $x \in A$가 존재한다.
(b) (a)에 의해 A는 끝점이 유리수이며 길이가 양수인 구간들의 족을 기저로 생성된 위상 하에서의 극한점(양쪽 극한점)을 가진다. □

예시 1 Sorgenfrey Plane 2: 정규 공간의 곱공간

Part II, 예시 4의 Sorgenfrey line $\mathbb{R}_l$은 실수선 $\mathbb{R}$에서 $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$을 기저로 하여 생성된 위상공간이다. 이는 정규이지만 곱공간 $\mathbb{R}_l^2$는 정규가 아니다. $W \subset \mathbb{R}_l$이 임의의 열린집합이며 O가 W의 표준-내부라 하자. 만약 $U = W - O$가 비가산이면 위 보조정리에 의해 양쪽 극한점 $p \in W$가 존재한다. W가 열린집합이므로 $\exists a,b\ p \in [a,b) \subset W$이며 p가 양쪽 극한점이므로 (a,b)에 속한 U의 점이 존재한다; (a,b)가 표준-열린집합이므로 이는 모순이며 U는 가산집합이다.
O가 표준-열린집합이므로 표준-F_σ 집합이며 따라서 $\mathbb{R}_l$-F_σ이다. W는 O와 가산집합의 합집합이므로 F_σ 집합이다. 따라서 임의의 닫힌 집합은 G_δ이며 $\mathbb{R}_l$은 T_6이다.

13 분리공리와 가산성

정의 1

가산성COUNTABILITY은 특정 형태의 가산집합의 존재성이다:

(a) **제1가산성**FIRST COUNTABILITY: $\forall x \in X$의 가산 국소기저.
(b) **제2가산성**SECOND COUNTABILITY: 공간의 가산 기저.
(c) **분해가능성**SEPARABILITY: 공간의 가산 조밀 집합.
(d) **Lindelöf**: 공간의 임의의 열린 덮개의 가산 부분덮개.

(b) $\to$ (a) $\land$ (c) $\land$ (d)이며 다른 함의 관계는 존재하지 않는다.
$\mathscr{A} \subset P(X)$가 **국소유한**LOCALLY FINITE임은 $\forall x \in X\ \exists U \in \mathscr{N}(x)\ |\{A \in \mathscr{A} : U \cap A \neq \emptyset\}| < \aleph_0$인 것이다. 가산 개 국소유한 [국소이산] 집합족의 합집합을 σ-**국소유한**σ-LOCALLY FINITE이라 한다.

정리 2

(a) Lindelöf 정칙 $\rightarrow$ 정규
(b) σ-국소유한 기저를 갖는 (e.g. 제2가산) 정칙 공간은 완전 정규이다.

증명 (a) X가 Lindelöf 정칙이며 $A, B \subset X$가 서로 소 닫힌집합이라 하자. 정칙성에 의해 $\mathscr{U} = \{U \in \mathscr{T} : \bar{U} \cap B = \emptyset\}$는 A의 덮개이며 $\mathscr{V} = \{U \in \mathscr{T} : \bar{U} \cap A = \emptyset\}$는 B의 덮개이고 $\mathscr{U} \cup \mathscr{V} \cup \{X - (A \cup B)\}$는 X의 덮개이다. 따라서 어떠한 $\{U_n : n \in \omega\} \subset \mathscr{U}$와 $\{V_n : n \in \omega\} \subset \mathscr{V}$가 각각 A, B를 덮는다. $U'_n = U_n - \bigcup_{p \leq n} \bar{V}_p, V'_n = V_n - \bigcup_{p \leq n} \bar{U}_p$이라 하자. 구축에 의해 $\forall m, n \in \omega\ U'_n \cap V'_m = \emptyset$이다. $\bigcup_{n \in \omega} U'_n, \bigcup_{n \in \omega} V'_n$가 A, B를 분리한다.

(b) 정칙 공간 X의 σ-국소유한 기저를 $\mathscr{B}$라 하자. 국소유한 집합족 $\mathscr{B}_n$ $(n \in \mathbb{N})$들에 대하여 $\mathscr{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{B}_n$이라 하자.
Step I. 임의의 열린집합 V에 대하여 $\mathscr{C}_n = \{A \in \mathscr{B}_n | \bar{A} \subset V\}$ $(n \in \mathbb{N})$들은 국소유한 집합족이다. $U_n = \bigcup \mathscr{C}_n$이라 하면 국소유한성에 의해 $\bar{U}_n = \bigcup_{A \in \mathscr{C}_n} \bar{A}$이고 $\bar{U}_n \subset V$이며 $V \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{U}_n$이다. X의 정칙성에 의해 임의의 $x \in V$에 대하여 $B_x \in \mathscr{B}$가 존재하여 $x \in B_x \subset \bar{B}_x \subset V$를 만족시킨다. 어떠한 n에 대하여 $B_x \in \mathscr{B}_n$이고 $B_x \in \mathscr{C}_n$이며 $B_x \subset U_n$이다. 그러므로 $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{U}_n$이다.
Step II. 임의의 서로 소 닫힌집합 $C_1, C_2 \neq \emptyset$에 대하여 Step I에 의해 다음을 만족시키는 열린집합 U_n, V_n $(n \in \mathbb{N})$들이 존재한다.

$$X - C_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{U}_n, \quad X - C_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_n$$

다음은 C_1, C_2를 분리하는 서로 소 열린 근방이므로 X는 정규이다.

$$V_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[V_n - \bigcup_{i=0}^{n} \bar{U}_n\right], \quad V_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[U_n - \bigcup_{i=0}^{n} \bar{V}_n\right]$$

Step III. 임의의 닫힌집합 $C \subset X$에 대하여 Step I에 의해 $X - C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{V}_n$을 만족시키는 열린집합 V_n $(n \in \mathbb{N})$들이 존재한다. $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X - \bar{V}_n)$는 G_δ 집합이다. □

14 거리위상과 순서위상

정의 2 거리 (Metric)

집합 X에 대하여 실 함수 $d : X \times X \to \mathbb{R}$가 X 상에서의 **[유사] 거리**[PSEUDO]METRIC라는 것의 정의는 다음을 만족시키는 것이다.

(a) $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ (d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y)$ $[\forall x \in X\ d(x, x) = 0]$
(b) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ d(x, y) \geq 0$
(c) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ d(x, y) = d(y, x)$
(d) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ \forall z \in X\ d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

(X, d)를 **[유사]거리공간**[PSEUDO]METRIC SPACE이라 한다. $Y \subset X$이면 $(Y, d \restriction_{Y\times Y})$를 **[유사]거리 부분공간**[PSEUDO]METRIC SUBSPACE이라 한다. $x \in X$에서의 다음 국소기저에 의해 생성된 위상을 d에 대한 **[유사]거리위상**[PSEUDO]METRIC TOPOLOGY이라 한다.

$$\{B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} : r \in \mathbb{R}^+\}$$

위상공간 $(X, \mathscr{T})$가 **[유사]거리화 가능**[PSEUDO]METRIZABLE임은 X 상에서의 어떠한 [유사]거리 d에 대한 [유사]거리위상이 $\mathscr{T}$인 것이다.
[유사]거리공간 (X, d)에서 $x \in X, A, B \subset X$이면 다음과 같다 한다.

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}, \quad d(A, B) = \inf\{d(x, B) : x \in A\}$$

[유사]거리위상의 부분공간 위상은 [유사]거리 부분공간의 [유사]거리위상과 같다. 특정 위상을 유도하는 [유사]거리는 일반적으로 유일하지 않다; [유사]거리 d와 $\bar{d} = \max\{d, 1\}$는 동일한 위상을 유도한다.

정리 3

(a) 유사거리화 가능 $\leftrightarrow$ Kolmogorov 몫공간이 거리화 가능
(b) [유사]거리위상 하에서 x가 A의 극한점 iff $d(x, A) = 0$
(c) 유사거리화 가능 $\to$ 완비 정칙 $\wedge$ 완전 정규, 거리화 가능 $\to T_6$
(d) 유사거리화 가능 $\to$ 제1가산
(e) 유사거리화 가능 공간에서 제2가산 $\leftrightarrow$ 분해가능 $\leftrightarrow$ Lindelöf
(f) [유사]거리위상은 d가 $X \times X$에서 연속하도록 하는 최소 위상이다.
(g) [유사]거리화 가능 공간들의 가산 곱공간은 [유사]거리화 가능하다.

증명 (a) 자명 (b) 기저 원소가 거리를 통해 정의됨을 이용하라.
(c) (X, d)가 유사거리공간이라 하자. 만약 d가 거리이면 X는 Hausdorff이다; $x, y \in X$이면 $B_{d(x,y)/3}(x)$와 $B_{d(x,y)/3}(y)$가 이들을 분리한다. $C \subset X$가 닫힌집합이고 $x \in X - C$이면 연속 실 함수 $f : y \mapsto \max\{1, d(y, C)/d(x, C)\}$는 $f^{-1}[\{0\}] = C, f(x) = 1$이다.
(d) 반경 $1/n$인 공들의 족은 가산 국소기저이다.
(e) X가 d의 유사거리위상을 가진다 하자. 만약 가산집합 $A \subset X, \bar{A} = X$이면 $\{B_{1/n}(x) : x \in A, n \in \mathbb{N}^*\}$는 가산 기저이다. 만약 $\forall n \in \mathbb{N}^*$에 대하여 $\{B_{1/n}(x) : x \in X\}$의 가산 부분덮개 $\mathscr{B}_n$이 존재 시 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathscr{B}_n$은 가산 기저이다.
(f) d가 연속하면 $[0, r)$의 역상 $\{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < r\}$가 열린집합이며 $x \times X \cong X$와의 교집합 $B_r(x)$가 열린집합이다.
(g) X_n이 d_n의 [유사]거리위상을 가지면 $\prod_{n\in\omega} X_n$의 위상은 $d(x, y) = \sum_{n\in\omega} 2^{-n} d_n(\pi_n(x), \pi_n(y))$의 [유사]거리위상이다. □

정의 3

X가 집합이라 하자. $\leq \subset X \times X$가 다음을 만족시키면 X 상에서의 **원순서**PREORDER이다. ($x \leq y \leftrightarrow (x, y) \in \leq$로 표기한다.)

(a) $\forall x \in X\ x \leq x$
(b) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ \forall z \in X\ (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$

다음을 만족시키는 원순서 $\leq$는 **부분순서**PARTIAL ORDER이다.

(c) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$

다음을 만족시키는 부분순서 $\leq$는 **전순서**TOTAL ORDER이다.

(d) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ (x \leq y \vee y \leq x)$

$a \leq b \wedge a \neq b \leftrightarrow a < b, a \leq b \leftrightarrow b \geq a, a < b \leftrightarrow b > a$로 정의한다. $(X, \leq)$를 **원[부분, 전]순서집합**PRE[PARTIALLY, TOTALLY]ORDERED SET이라 한다. $Y \subset X$이면 $(Y, \leq \cap (Y \times Y))$를 **순서 부분집합**ORDER SUBSET이라 한다. $\leq$가 전순서이면 다음 부분기저에 의해 생성된 위상을 $\leq$에 대한 **순서위상**ORDER TOPOLOGY이라 한다.

$$\{(x, \infty) = \{y : x < y\} : x \in X\} \cup \{(-\infty, x) = \{y : y < x\} : x \in X\}$$

그러므로 양 끝점이 X의 점 또는 $\pm\infty$인 개구간들의 족이 기저이다. 위상공간 $(X, \mathscr{T})$가 **순서화 가능**ORDERABLE TOPOLOGY임은 X 상에서의 어떠한 전순서 $\leq$에 대한 순서위상이 $\mathscr{T}$인 것이다.

순서위상공간의 위상 부분공간과 순서 부분집합의 순서위상공간은 서로 다를 수 있다; $X = \{-1\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$에서 $\mathbb{R}$의 부분공간으로서는 -1이 고립점이지만 스스로의 순서위상 하에서는 -1의 임의의 근방은 유한 개를 제외한 모든 $1/n$을 포함한다.

정리 4

순서화 가능 $\to T_5$이다.

증명 X가 전순서 $\leq$의 순서위상을 가진다 하자. $p, q \in X, p < q$ 이면 $(-\infty, q)$와 (p, ∞)가 p와 q를 분리하므로 X는 T_1이다.
$A, B \subset X$가 분리집합이라 하자. $\forall x \in A$ $[\forall x \in B]$에 대하여 개구간 V_x가 존재하여 $x \in V_x \subset X - B$ $[x \in V_x \subset X - A]$를 만족시킨다. $V_A = \bigcup\{V_x : x \in A\}, V_B = \bigcup\{V_x : x \in B\}$라 하자. $V = V_A \cap V_B \subset X - (A \cup B)$이다. $V = \emptyset$이면 자명하므로 그렇지 않다 하자. V 상에서의 동치 관계 $\sim$을 $x \sim y \leftrightarrow [\min\{p, q\}, \max\{p, q\}] \subset V$로 정의하자. $\sim$의 동치류 대표원들의 집합을 T라 하자. $x \in A$를 고정하고 $p, q \in V_x \cap T, p < q$라 하자. $x < p$라 가정하자: $p \in T \subset V$이므로 $\exists y \in B$ $p \in V_y$이며 $[x, q] \subset V_x \subset H - B, y \notin [x, q]$이다. 만약 $y < x$ 이면 $x \in [y, p] \subset V_y \cap A = \emptyset$이며 모순이다. 만약 $x < p < q < y$ 이면 $[p, q] \subset V_x \cap V_y \subset V$이므로 $p \sim q$이고 T의 정의에 모순이다. isw. $q < x$도 모순이다; 따라서 $p < x < q, |V_x \cap T| \leq 2$이다.
$p \in T$를 고정하자. $A_p = \{x \in A : p \in V_x\}, B_p = \{x \in B : p \in V_x\}$ 라 하자. $p \in V$이므로 $A_p \neq \emptyset, B_p \neq \emptyset$이다. w.l.o.g. 어떠한 $x \in A_p$ 에 대하여 $x < p$라 하자. $x < y \vee y < x$이므로 $y \in B_p \wedge y < p$ 이면 V_x와 V_y의 구축에 의해 모순이다. 그러므로 $\forall y \in B_p$ $p < y$ 이다. isw. $\forall x \in A_p$ $x < p \wedge A_p < p < B_p$이다. 반대로 $p < x$였다면 $B_p < p < A_p$를 얻는다. $\forall x \in H \cup K$에 대하여 다음과 같다 하자:

$$W_x = \begin{cases} V_x & (V_x \cap T = \emptyset) \\ V_x \cap (p, \infty) & (V_x \cap T = \{p\} \wedge p < x) \\ V_x \cap (-\infty, p) & (V_x \cap T = \{p\} \wedge x < p) \\ V_x \cap (p, q) & (V_x \cap T = \{p, q\} \wedge p < x < q) \end{cases}$$

$$W_A = \bigcup\{W_x : x \in A\} \quad , \quad W_B = \bigcup\{W_y : y \in B\}$$

$\exists x \in A\ \exists y \in B\ W_x \cap W_y \neq \emptyset$이며 w.l.o.g. $x < y$라 하자. $q \in W_x \cap W_y$를 고정하면 $x < q < y$이며 $q \in V$이므로 유일한 $p \in T$가 존재하여 $p \sim q$이다. $I = [\min\{p,q\}, \max\{p,q\}]$라 하면 $I \subset V \subset X - (A \cup B)$이며 $x, y \notin I$이고 $x < p < y$이다. w.l.o.g. $p \leq q$라 하자. 그 경우 $p \in W_x \cap T \subset V_x \cap T$이며 $W_x \subset (-\infty, p), p \notin W_x$이므로 모순이다. 따라서 $W_A \cap W_B = \emptyset$이며 이들은 A, B를 분리한다. □

15 매장 정리와 거리화 정리

정리 5 매장 정리 (Embedding Theorem)

X와 $Y_\alpha\,(\alpha \in I)$들이 위상공간이며 연속 함수 $f_\alpha : X \to Y_\alpha$들의 함수족 $\{f_\alpha | \alpha \in I\}$가 존재하여 다음을 만족시킨다 하자.

(a) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ (x \neq y \to \exists \alpha \in I\ (f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)))$
(b) $\forall$ 닫힌집합 $C \subset X\ \forall x \in X - C\ \exists \alpha \in I\ (f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha[C]})$

그 경우 $F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$로 정의된 함수 $F : X \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$는 X에서 $Y = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$로의 매장사상이다.
특히 완비 정칙 공간 X는 유사거리화 가능 공간들의 곱공간에 매장가능하며 $T_{3\frac{1}{2}}$ 공간 X는 단위 폐구간의 곱공간 $[0,1]^I$에 매장가능하다.

증명 $F : X \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$를 $(F(x))(\alpha) = f_\alpha(x)$로 정의하고 $\pi_\alpha : Y = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha \to Y_\alpha$가 사영사상이라 하자. F의 모든 성분함수 $\pi_\alpha \circ F = f_\alpha$가 연속이므로 F는 연속이다. X에서의 임의의 열린집합 V에 대하여 임의의 $z \in F[V]$를 선택하면 $F(x) = z$인 $x \in V$가 존재한다. 가정에 의해 $\exists \alpha \in I\ f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha[X - V]}$이다. π_α의 연속성에 의해 $\pi_\alpha^{-1}(Y_\alpha - \overline{f_\alpha[X - V]})$는 Y에서의 열린집합이므로 $U = F[X] \cap$

$\pi_\alpha^{-1}(Y_\alpha - \overline{f_\alpha[X-V]})$는 $F[X]$에서의 열린집합이다. 또한 $\pi_\alpha(z) = \pi_\alpha(F(x)) = f_\alpha(x)$이므로 $z \in U$이다. U의 원소는 $F[X-V]$에 포함될 수 없으므로 $U \subset F[V]$이고 $U \subset F[V]$는 $F[X]$에서의 z의 열린 근방이다. 따라서 $F[V]$는 열린집합이고 F가 열린 사상이다. 그러므로 $F: X \to F[X]$는 위상동형사상이고 $F: X \to Y$는 매장사상이다.
X가 $T_{3\frac{1}{2}}$이며 $\mathscr{F}$가 모든 연속 함수 $X \to [0,1]$들의 족이면 X는 $[0,1]^{\mathscr{F}}$에 매장 가능하다. X가 완비 정칙이면 연속 함수 $f: X \to [0,1]$에 함수 $f': X \to [0,1] \times X, x \mapsto (f(x), x)$를 대응시키고 집합 $[0,1] \times X$에서 동일한 첫째 좌표를 가진 점들을 위상수학적으로 구별하지 않는 유사거리화 가능 위상을 부여하며 모든 f'들의 족을 $\mathscr{F}$라 하면 X는 $([0,1] \times X)^{\mathscr{F}}$에 매장 가능하다. □

따름정리 1

위상공간 X에 대하여 다음은 모두 동치이다:
(a) X는 $T_{3\frac{1}{2}}$이다.
(b) X는 컴팩트 Hausdorff 공간의 부분공간과 위상동형이다.
(c) X는 T_4 공간의 부분공간과 위상동형이다.
(d) X는 거리화 가능 공간들의 곱공간의 부분공간과 위상동형이다.

증명 Tychonoff 정리에 의해 $[0,1]^I$는 컴팩트 Hausdorff이므로 (a) $\to$ (b)이다. 컴팩트 Hausdorff $\to T_4$이므로 (b) $\to$ (c)이다. $T_{3\frac{1}{2}}$는 부분공간에 유전되며 $T_4 \to T_{3\frac{1}{2}}$이므로 (c) $\to$ (a)이다.
유사거리화[resp. 거리화] 가능 공간들의 곱공간의 부분공간은 (완비 정칙성이 유전되므로) 완비 정칙[T_3]이다. 위 정리에 의해 모든 완비 정칙[T_3] 공간은 이러한 공간과 위상동형이므로 (a) $\leftrightarrow$ (d)이다. □

정리 6 Nagata-Smirnov 거리화 정리

[유사]거리화 가능 $\leftrightarrow T_3$[정칙]이며 σ-국소유한 기저를 가진다

증명 $\leftarrow$를 증명하자. $(X, \mathscr{T})$가 정칙이며 σ-국소유한 기저를 가지면 정리 2에 의해 정규이다. $\mathscr{B}$가 X의 σ-국소유한 기저이며 국소유한 집합족 $\mathscr{B}_n$ $(n \in \mathbb{N})$들에 대하여 $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n$이라 하자. 자연수의 순서쌍 (m, n)과 $\mathscr{B}_m$의 원소 U를 고정하고 $V = \bigcup\{B \in \mathscr{B}_n : \bar{B} \subset U\}$라 하자. $\mathscr{B}_n$이 국소유한이므로 $\bar{V} \subset U$이다. Urysohn 보조정리에 의해 연속 함수 $f_U : X \to [0,1]$이 존재하여 $f[\bar{V}] \subset \{0\}, f[X-U] \subset \{1\}$이다. X 상에서의 유사거리를 $d_{m,n}(x,y) = \sum_{U\in\mathscr{B}_m} |f_U(x) - f_U(y)|$로 정의하자; $\mathscr{B}_m$의 국소유한성에 의해 이는 정의되며 $X \times X$ 상에서 연속하다. $d_{m,n}$의 유사거리위상을 $\mathscr{T}_{m,n}$이라 하면 항등함수 $\mathrm{id}_X : (X, \mathscr{T}) \to (X, \mathscr{T}_{m,n})$ 하에서 $d_{m,n}$-열린 공의 역상이 $\mathscr{T}$-열린집합이므로 id_X가 연속하다. 임의의 $\mathscr{T}$-닫힌집합 $C \neq \emptyset$와 $x \in X - C$에 대하여 $\exists n\ \exists U \in \mathscr{B}_n\ U \subset X - A$이며 $\exists m\ \exists V \in \mathscr{B}_m\ x \in V \subset \bar{V} \subset U$이다. 즉 $d_{m,n}(x, A) \geq 1$이다. 따라서 C의 $\mathscr{T}_{m,n}$-폐포는 x를 포함하지 않는다. 매장 정리에 의해 $(X, \mathscr{T})$가 $(X, \mathscr{T}_{m,n})$들의 곱공간으로 매장 가능하므로 유사거리화 가능하다.

$\rightarrow$를 증명하기 위해서는 파라컴팩트성 논의가 필요하다. 이는 컴팩트성 아티클에서 다뤄질 것이다. $\square$

이것으로 분리공리 연재 아티클이 완결되었다. 이후 '위상공간에서의 필터와 그물' 아티클과 '컴팩트성' 연재 아티클 등이 수록될 것이다.