분리공리와 분리공간 Part III: 함수에 의한 분리

김다인 (수리과학부)

이제 우리는 집합을 실 함수에 의해 분리 가능한 공간들을 도입하고 Kolmogorov classificaiton ($i \le j$ iff $T_j \to T_i$, $i \neq j$이면 $T_i \neq T_j$ ($i, j \in \{0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5, 6\}$)) 을 완성하며 Tietze 확장 정리를 증명할 것이다. 명시적으로 부정하지 않는 한 X는 위상공간으로 간주한다.

9 완비 Hausdorff(Completely Hausdorff) 공간

정의 1

$A, B \subset X$가 **실 함수에 의해 분리된다**SEPARATED BY REAL FUNCTION는 것을 연속 함수 $f : X \to [0, 1]$이 존재하여 $f[A] \subset \{0\}, f[B] \subset \{1\}$인 것으로 정의한다. 분리가 **정확하다**PRECISE는 것은 이에 더해 $f^{-1}[\{0\}] = A, f^{-1}[\{1\}] = B$인 것이다. X가 **완비 Hausdorff**COMPLETELY HAUSDORFF라는 것의 정의는 임의의 서로 다른 점 $x, y \in X$가 실 함수에 의해 분리되는 것이다.

예시 1 완비 Hausdorff성 $\not\to T_3$

Part II에서 등장했던 확장 여가산공간($\mathbb{R}$에서 표준 열린집합과 가산집합의 차집합을 열린집합으로 정의)은 T_3가 아니지만 서로 다른 두 점(w.l.o.g $0, 1$)을 항등함수가 분리하므로 완비 Hausdorff이다.

정리 1 완비 Hausdorff성 $\to T_{2\frac{1}{2}}$

완비 Hausdorff 공리는 $T_{2\frac{1}{2}}$ 공리를 함의한다.

증명 완비 Hausdorff 공간 X에서 임의의 서로 다른 점 x, y를 선택하자. 연속 함수 $f : X \to [0,1]$이 존재하여 $f(x) = 0, f(y) = 1$을 만족시킨다. $f^{-1}[[0,1/3]]$과 $f^{-1}[[2/3,1]]$은 각각 x와 y의 X에서의 닫힌 근방이며 서로 소이다. 따라서 X는 $T_{2\frac{1}{2}}$이다. □

예시 2 $T_3 \not\to$ 완비 Hausdorff성

$2|n$에 대하여 $T_n = \{n\} \times (-1,1)$이며 $V_{n,y} = \{(n,y)\} \cup \{(z,y) : n-1 < z < n+1\} \cap (T_{n-1} \cup T_{n+1})$이라 하자. $\{t_k\}_{k\geq 1}$이 $\forall k\ t_k > 0, t_k < t_{k+1}, t_k \uparrow 1$인 수열이며 $2 \nmid n$에 대하여 $T_{n,k} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-n)^2 + y^2 = t_k^2\}, T_n = \bigcup_{k\geq 1} T_{n,k}$라 하자. 다음과 같이 정의하자.

$$X_1 = \bigcup_{2|n} T_n \quad , \quad X_2 = \bigcup_{2\nmid n} T_n \quad , \quad X = \{+\infty, -\infty\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T_n$$

X에 국소기저를 통해 위상을 부여하자: $a \in X$의 국소기저를 $\mathscr{T}_a$로 표기하자. $X_2 - \{(n,t_k) : n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}^*\}$의 점들은 고립점이다. $(n,t_k) \in X_2$ [resp. $(n,y) \in X_1$]의 국소기저는 $T_{n,k}[V_{n,y}]$에서 $(n,t_k)[(n,y)]$ 이외의 유한 개 점을 제외한 집합들의 족이다. $\mathscr{T}_{+\infty} = \{\{+\infty\} \cup \{(x,y) \in X_1 \cup X_2 : x > a\} : a \in \mathbb{R}\}, \mathscr{T}_{-\infty} = \{\{-\infty\} \cup \{(x,y) \in X_1 \cup X_2 : x < a\} : a \in \mathbb{R}\}$이다.

고립점 a와 $b \neq a$에 대하여 $V \in \mathscr{T}_b$이면 $\{a\}$와 $V - \{a\}$가 이들을 분리한다. $a = +\infty, b \neq a$이면 $\mathscr{T}_{+\infty}$의 하계가 충분히 큰 원소가 존재하며 $\mathscr{T}_b$의 원소들은 위로 유계이므로 서로 소 근방으로 분리 가능하다. $-\infty$도 이와 같다. a, b가 $(n,t_k) \in X_2$ 또는 $(n,y) \in X_1$ 형

태이면 임의의 $U \in \mathscr{T}_a$와 $V \in \mathscr{T}_b$에 대하여 $U \cap V$가 유한집합이므로 $U - V$와 $V - U$가 열린집합이다. 따라서 X는 Hausdorff이다.
$a \in X, C \subset X - \{a\}$라 하자. $a = \pm\infty$인 경우 C는 위[아래]로 유계가 아니면 C와 $\mathscr{T}_{\pm\infty}$의 모든 원소가 교차하므로 C의 극한점이 되어 모순이다. 따라서 $\bigcup\{V \in \mathscr{T}_c : c \in C\}$는 위[아래]로 유계 열린집합이다. a가 고립점이면 $\bigcup\{V \in \mathscr{T}_c : c \in C, a \notin V\}$는 C의 열린 근방이다. $a = (n, t_k)$ 또는 (n, y)이면 임의의 $U \in \mathscr{T}_a$와 $\bigcup\{V \in \mathscr{T}_c : c \in C, U \cap V = \emptyset\}$가 이들을 분리한다. 즉 X는 정칙이다.
$T_{n,k}$ 상에서의 임의의 연속 실 함수 h에 대하여 다음은 가산집합이다.

$$\begin{aligned}&\{(x,y) \in T_{n,k} : h(x,y) \neq h(n,t_k)\}\\ &= \{(x,y) \in T_{n,k} : h(x,y) \notin \textstyle\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}(h(n,t_k) - 1/m, h(n,t_k) + 1/m)\}\\ &= \textstyle\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \left[T_{n,k} - h^{-1}[(h(n,t_k) - 1/m, h(n,t_k) + 1/m)]\right]\end{aligned}$$

$f : X \to \mathbb{R}$이 임의의 연속 실 함수라 하자. $B_{n,k} = \{(x,y) \in T_{n,k} : f(x,y) \neq f(n,t_k)\}$라 하고 D_n이 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B_n$의 원소들의 y좌표들의 집합이며 $D = \bigcup_{2\nmid n} D_n$이라 하면 이는 $(-1,1)$의 가산 부분집합이다. 짝수 n에 대하여 $p = (n,y) \in T_n$이며 $y \notin D$라 하자. $(z,y) \in V_{n,y} \cap T_{n-1,k}$에 대하여 $f(z,y) = f(n-1,t_k)$이며 $(z,y) \in V_{n,y} \cap T_{n+1,k}$에 대하여 $f(z,y) = f(n+1,t_k)$이다. $\mathscr{T}_p$의 구조에 의해 $f(p) = \lim_{k\to\infty} f(n-1,t_k) = \lim_{k\to\infty} f(n+1,t_k)$이다. $q = (n+2, y') \in T_{n+2}$에 대하여 $y' \notin D$이면 마찬가지로 $f(q) = \lim_{k\to\infty} f(n+3,t_k) = \lim_{k\to\infty} f(n+1,t_k) = f(p)$이다. 이를 반복하면 x좌표가 임의로 큰/작은 점 어떤 점도 같은 함숫값을 가짐을 알 수 있으며 f의 연속성에 의해 $f(+\infty) = f(-\infty) = f(p)$이다. 그러므로 X에서 $+\infty$와 $-\infty$는 연속 실 함수에 의해 분리될 수 없고 X는 완비 Hausdorff가 아니다.

10 Tychonoff($T_{3\frac{1}{2}}$) 공간

정의 2

X가 **완비 정칙**COMPLETELY REGULAR이라는 것의 정의는 임의의 닫힌 집합 $C \subset X$와 점 $x \in X - C$가 연속 실 함수에 의해 분리되는 것이다. 또한 X가 $T_{3\frac{1}{2}}$라는 것의 정의는 완비 정칙 Hausdorff인 것이다.

정리 2 완비 정칙성 → 정칙성, 완비 정칙 $T_0 \leftrightarrow T_{3\frac{1}{2}} \to T_3$

(a) 완비 정칙성은 정칙성을 함의한다; 특히 $T_{3\frac{1}{2}}$는 T_3을 함의한다.
(b) 완비 정칙 공간 X가 $T_{3\frac{1}{2}}$일 필요충분조건은 T_0인 것이다.

증명 (a) 완비 정칙 공간 X에서 닫힌집합 C와 $x \in X - C$를 선택하면 연속한 $f : X \to [0,1]$이 존재하여 $f(x) = 0, f[C] \subset 1$이므로 $f^{-1}[[0,1/3)]$과 $f^{-1}[(2/3,1]]$은 이들을 분리하는 서로 소 근방이다.
(b) X가 완비 정칙 T_0라 하자. $x, y \in X$를 선택하면 이들 중 하나만을 (w.l.o.g. x) 포함하는 열린집합 U가 존재한다. 닫힌집합 $X - U$와 점 x를 분리하는 연속 함수 $f : X \to [0,1]$이 존재하므로 $f^{-1}[[0,1/3)]$과 $f^{-1}[(2/3,1]]$은 y와 x를 분리하는 서로 소 근방이다. □

$T_{3\frac{1}{2}}$이면 완비 Hausdorff이므로 예시 2에 의해 $T_{3\frac{1}{2}} \neq T_3$이다. 이 공간의 모든 점을 2개로 분할하면 완비 정칙 $\neq$ 정칙임이 따라온다.

예시 3 Tychonoff Corkscrew: $T_{3\frac{1}{2}} \neq$ 완비 Hausdorff T_3

삭제 Tychonoff 판자(Part II, 예시 7) P에 대하여 $P \times \mathbb{Z}$의 다음 동치 관계 하에서의 몫공간을 취하자.

- $\forall k \in \mathbb{Z}$와 $\alpha \in [0, \Omega)$에 대하여 $(\alpha, \omega, 4k) \sim (\alpha, \omega, 4k-1)$
- $\forall k \in \mathbb{Z}$와 $n \in [0, \omega)$에 대하여 $(\Omega, n, 4k+1) \sim (\Omega, n, 4k)$
- $\forall k \in \mathbb{Z}$와 $\alpha \in [0, \Omega)$에 대하여 $(\alpha, \omega, 4k+2) \sim (\alpha, \omega, 4k+1)$
- $\forall k \in \mathbb{Z}$와 $n \in [0, \omega)$에 대하여 $(\Omega, n, 4k+3) \sim (\Omega, n, 4k+2)$

P가 T_3이므로 이러한 몫공간 S도 T_3임을 직접 보일 수 있다. $x \in S$의 마지막 좌표가 $4k + a, 0 \leq a < 4$이면 k를 x의 **층**LEVEL이라 한다. S에 $\pm\infty$를 추가하고 각각의 국소기저를 어떠한 층 초과/미만인 모든 원소들의 집합들의 족이라 하자. 이렇게 얻어진 공간 $X = S \cup \{+\infty, -\infty\}$를 **Tychonoff corkscrew**라 하며 부분공간 $Y = X - \{-\infty\}$를 **deleted Tychonoff corkscrew**라 한다. 이들은 자명하게 Hausdorff이다. $x = \pm\infty$와 $C \subset X - \{x\}$에 대하여 (w.l.o.g. $x = +\infty$) $\mathscr{T}_{+\infty}$의 구축에 의해 충분히 큰 N층 이상의 모든 원소들은 C에 속하지 않으며 따라서 $N+1$층 초과/이하 원소들의 집합은 $+\infty$와 C를 분리한다. 그러므로 X와 Y는 T_3이다.
X 상에서의 연속 실 함수 f를 고려하자. f를 어떠한 사분면 P로 제한하자. 임의의 $n \in \omega$에 대하여 점 (Ω, n)에서 함수가 연속이며 임의의 $m \in \mathbb{N}^*$에 대하여 $f(\Omega, n)$과 함숫값이 $1/m$ 초과로 차이나는 점 (α, n)들의 개수가 가산이므로 가산 개를 제외한 모든 $\alpha < \Omega$에 대하여 $f(\alpha, n) = f(\Omega, n)$이다. 즉 어떠한 근방 $(\alpha(n), \Omega] \times \{n\}$에서 f가 상수여야 한다. $\alpha(\omega) = \sup_{n<\omega} \alpha(n) < \Omega$가 존재하므로 f의 함숫값은 첫째 좌표가 $\alpha(\omega)$ 초과이면 첫째 좌표에 무관하다. 따라서 $f(\alpha(\omega)+1, \omega) = f(\Omega, \omega)$라 하여 f를 공간 전체로 확장할 수 있다.
이제 이를 붙여진 다른 사분면에도 적용하면 역시 f가 동일한 상수값을 가지도록 하는 (Ω, ω)의 근방을 얻으며 따라서 이를 반복하여 위쪽/아래쪽 층에 적용하면 $f(a_i)$가 동일하도록 하며 a_i가 i층에 속하도록 하는 점렬 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$를 얻는다. $\lim_{i\to\infty} a_i = +\infty, \lim_{i\to-\infty} a_i = -\infty$이므로 임의의 연속 실 함수 f에 대하여 항상 $f(+\infty) = f(-\infty)$

이며 따라서 X는 완비 Hausdorff가 아니고 완비 정칙이 아니다.
$y \neq \pm\infty$는 $+\infty$와 실 함수에 의해 분리 가능하므로 Y는 완비 Hausdorff이다. 그러나 임의의 f에 대하여 임의의 층에 $f(+\infty)$와 같은 함숫값을 가지는 점이 존재하므로 $V \in \mathscr{T}_{+\infty}$의 여집합과 $+\infty$를 함수로 분리할 수 없다. 따라서 Y는 완비 정칙이 아니며 T_3가 아니다.

점과 점, 점과 닫힌집합의 경우 함수에 의한 분리는 근방에 의한 분리보다 더 강했지만 닫힌집합과 닫힌집합의 경우에는 이들이 동치이다.

정리 3 Urysohn 보조정리 (Urysohn's Lemma)

정규 iff 두 서로 소 닫힌집합이 연속 실 함수에 의해 분리된다.

증명 X에서의 임의의 서로 소 닫힌집합 C_1, C_2를 선택하자. 이들을 분리하는 연속 함수 $f : X \to [0,1]$이 존재한다 하자. 그 경우 $f^{-1}[[0,1/3)]$과 $f^{-1}[(2/3,1]]$은 이들을 분리하는 서로 소 근방이다.

역으로 X가 정규라 하자. $(0,1)\cap\mathbb{Q}$는 가산집합이므로 $r_0 = 0, r_1 = 1$이라 하고 $(0,1)\cap\mathbb{Q}$의 원소들을 $r_2, r_3, \cdots$로 나열할 수 있다. X의 정규성에 의해 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 열린집합 U_i를 정의하여 $r_i < r_j$이면 $\bar{U}_i \subset U_j$이도록 할 수 있다. ($C_1 \subset U_0 \subset \bar{U}_0 \subset U_1 = X - C_2$라 하고 Part II, 정리 3을 반복적용한다.) $f : X \to [0,1]$을 다음과 같이 정의하면 $f[C_1] = \{0\}$이며 $f[C_2] = \{1\}$이다.

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r_i : x \in U_i\} & (x \in U_1) \\ 1 & (x \notin U_1) \end{cases}$$

f가 연속임을 보이기 위해 $\forall a, b \in [0,1]$에 대하여 $f^{-1}[(a,1]]$과 $f^{-1}[[0,b)]$가 열린집합임을 보이면 충분하다. $f^{-1}[[0,b)] = \bigcup_{r_i<b} U_i$이므로 자명하게 열린집합이다.

$x \in f^{-1}[(a,1]]$이라 가정하면 $a < f(x)$이며 $i, j \in \mathbb{N}^*$가 존재하여 $a < r_i < r_j < f(x)$이다. 그 경우 $x \in X - U_j \subset X - \bar{U}_i \subset f^{-1}[(a,1]]$이며 $X - \bar{U}_i$가 열린집합이므로 $f^{-1}[(a,1]]$은 열린집합이다. $\square$

따라서 T_4는 $T_{3\frac{1}{2}}$를, 정규 R_0는 완비 정칙을 함의한다. (그러나 정규 $\not\Rightarrow$ 완비 정칙이다.)

예시 4 $T_4 \neq T_{3\frac{1}{2}}$

Example 7.5의 Sorgenfrey line $\mathbb{R}_l$은 T_4이지만 그 곱공간인 Sorgenfrey plane $\mathbb{R}_l^2$는 T_4가 아니다. $\mathbb{R}_l$은 $T_{3\frac{1}{2}}$이며 완비 정칙 공간들의 곱공간이 완비 정칙이므로 (Part IV에서 보일 것이다; 곱공간의 정의를 사용하면 증명은 어렵지 않다.) $\mathbb{R}_l^2$도 $T_{3\frac{1}{2}}$이다.

정리 4 Tietze 확장 정리 (Tietze Extension Theorem)

$A \subset X$가 닫힌 부분공간이면 다음 세 조건이 모두 동치이다.

(a) X가 정규 공간이다.
(b) 임의의 연속 함수 $f_0 : A \to [-1,1]$은 연속 함수 $X \to [-1,1]$로 확장 가능하다.
(c) 임의의 연속 함수 $f_0 : A \to \mathbb{R}$은 연속 함수 $X \to \mathbb{R}$로 확장 가능하다.

증명 **Step I.** $f : A \to [-r,r]$가 연속 함수이면 다음을 만족시키는 연속 함수 $g : X \to [-r/3, r/3]$이 존재함을 증명하자.

$$|f(x) - g(x)| \leq \tfrac{2}{3}r \qquad (x \in A) \tag{1}$$

$f^{-1}[[-r,-r/3]]$과 $f^{-1}[[r/3,r]]$은 A에서의 닫힌집합이며 A가 닫힌 부분공간이므로 X에서 닫혀 있다. 따라서 Urysohn 보조정리에 의해

이들을 분리하는 연속 실 함수 $g : X \to [-r/3, r/3]$가 존재한다.

$$g[f^{-1}[[-r, -r/3]]] = \{-r/3\} \quad , \quad g[f^{-1}[[r/3, r]]] = \{r/3\} \tag{2}$$

이러한 g에 대하여 (1)이 성립한다.

Step II. (a) $\to$ (b). 귀납적으로 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 연속 함수 $f_n : A \to [-(2/3)^n, (2/3)^n]$을 구축했다면 Step I에 의해 다음을 얻는다.

$$g_{n+1} : X \to [-\tfrac{2^n}{3^{n+1}}, \tfrac{2^n}{3^{n+1}}], \quad |f_n(x) - g_{n+1}(x)| \leq (\tfrac{2}{3})^{n+1} \quad (x \in A)$$

이제 $f_{n+1} = f_n - g_{n+1} = f_0 - g_1 - \cdots - g_{n+1}$이라 하자. 이를 통해 연속 함수열 $\{g_n\}$을 얻는다. $h_n = g_1 + \cdots + g_n$이라 하면 h_n은 어떠한 연속 함수 f에 균등수렴한다. 또한 $x \in A$에서 $|f_0(x) - h_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$이므로 $h_n(x) \to f_0(x)$이며 $f \restriction_A = f_0$이다.

Step III. (a) $\wedge$ (b) $\to$ (c). $\mathbb{R}$은 $(-1, 1)$과 위상동형이므로 $f_0 : A \to (-1, 1)$에 대하여 증명하면 충분하다. $(-1, 1) \subset [-1, 1]$이므로 (b)에 의해 f_0는 $g : X \to [-1, 1]$로 확장 가능하다. $D = g^{-1}[\{-1, 1\}]$는 X에서의 닫힌집합이며 $g[A] = f[A] \subset (-1, 1)$이므로 $A \cap D = \emptyset$이다. Urysohn 보조정리에 의해 $h : X \to [0, 1]$이 존재하여 $h[D] = \{0\}, h[A] = \{1\}$이다. $f(x) = g(x)h(x)$라 하면 $f : X \to (-1, 1)$이고 연속이며 $\forall x \in A$에 대하여 $f(x) = f_0(x)$이다.

Step IV. (b) $\vee$ (c) $\to$ (a). 임의의 서로 소 닫힌집합 $C_1, C_2 \subset X$에 대하여 $C_1 \cup C_2$는 X의 닫힌 부분공간이다. $f_0 : C_1 \cup C_2 \to [0, 1] \subset \mathbb{R}$을 $f_0[C_1] \subset \{0\}, f_0[C_2] \subset \{1\}$인 연속 함수로 정의하자. f_0는 (b) 또는 (c)에 의해 X 상에서의 연속 실 함수 f_1로 확장 가능하다. $f : X \to [0, 1]$을 $f(x) = \min\{1, \max\{0, f_1(x)\}\}$로 정의하면 C_1과 C_2를 분리하며 따라서 (a)가 성립한다. □

11 완전 정규 Hausdorff(T_6, Perfectly Normal Hausdorff) 공간

정의 3

X가 **완전 정규**PERFECTLY NORMAL라는 것의 정의는 서로 소 닫힌집합 $A, B \subset X$가 연속 실 함수에 의해 정확히 분리되는 것이다. 또한 X가 T_6라는 것의 정의는 완전 정규 Hausdorff인 것이다.

Urysohn 보조정리에 의해 완전 정규 → 정규, $T_6 \to T_4$임은 명백하다.

정리 5 완전 정규성의 동치 조건

다음은 모두 동치이다:

(a) X가 완전 정규이다.
(b) 임의의 닫힌집합 $A \subset X$는 연속 실 함수 하에서의 $\{0\}$의 역상이다.
(c) X가 정규이며 모든 닫힌집합이 G_δ이다.

증명 (a) → (b) 임의의 닫힌집합 $A \subset X$에 대하여 A와 $\emptyset$를 정확히 분리하는 연속 실 함수 f가 존재하며 $A = f^{-1}[\{0\}]$이다.
(b) → (a) 공집합의 경우는 자명하다. 임의의 닫힌집합 $A, B \neq \emptyset$에 대하여 $f^{-1}[\{0\}] = A, g^{-1}[\{0\}] = B$를 만족시키는 연속 실 함수 f, g가 존재한다. $f[B], g[A]$는 컴팩트하며 0을 포함하지 않으므로 그 원소들의 절댓값의 최솟값 $a, b \neq 0$이 각각 존재한다. 다음 함수

$$\alpha(x) = \begin{cases} x/a & x < a \\ 1 & (x \geq a) \end{cases}, \quad \beta(x) = \begin{cases} x/b & x < b \\ 1 & (x \geq b) \end{cases}$$

를 합성하면 $f' = \alpha \circ f, g' = \beta \circ g$는 $f'[B] = \{1\}, g'[A] = \{1\}$을 만족시킨다. $h = f'(1 - g')$은 $h^{-1}[A] = \{0\}, h^{-1}[B] = \{1\}$을 만족시키는

연속 실 함수이며 따라서 X는 완전 정규이다.
(b) → (c) 임의의 닫힌집합 A에 대하여 연속 실 함수 f가 존재하여 $f^{-1}[A] = \{0\}$을 만족시킨다. $f^{-1}[[0, 1/n)] = V_n$은 열린집합이며 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n = f^{-1}[\{0\} = A$는 G_δ 집합이다.
(c) → (b) 임의의 닫힌집합 A는 열린집합 U_i들의 교집합 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} U_i = A$이다. $U_i' = \bigcap_{j=1}^{i} U_j$라 하면 $\{U_i'\}_{i\in\mathbb{N}^*}$는 교집합이 A인 감소 집합열이다. X가 정규이므로 함수 $f_i : X \to [0, 1]$들이 존재하여 $f_i[A] = 0, f_i[X - U_i'] = 1$을 만족시킨다. f를 다음과 같이 정의하자:

$$f : X \to [0, 1] \quad , \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{2^k}$$

이는 균등수렴하므로 f가 연속이다. $f(x) = 0$ iff 모든 k에 대하여 $f_k(x) = 0$ iff $x \in A$이므로 $A = f^{-1}[\{0\}]$이다. □

정리 6 $T_6 \to T_5$

완전 정규 공간의 모든 부분공간은 완전 정규이다; 따라서 완전 정규성은 완비 정규성을 함의하고 T_6은 T_5를 함의한다.

증명 완전 정규 공간 X의 임의의 부분공간 Y에서의 임의의 닫힌집합 A에 대하여 X에서의 닫힌집합 B가 존재하여 $A = Y \cap B$를 만족시킨다. 완전 정규성에 의해 $f : X \to [0, 1]$이 존재하여 $f^{-1}[\{0\}] = B$를 만족시킨다. f의 Y로의 제한을 $g = f \restriction_Y$라 하면 $g^{-1}[\{0\}] = Y \cap B = A$이며 따라서 Y도 완전 정규이다. 완비 정규 iff 모든 부분공간이 정규인 것이므로 완전 정규 → 완비 정규이다. □

예시 5 Fort Space: $T_6 \neq T_5$

요새 공간FORT SPACE X는 무한 이산공간의 한 점 컴팩트화이다. (특정한 $p \in X$가 존재하며 $V \subset X$가 열린집합 iff $p \notin V \vee X - V$가 유한집합) 이는 컴팩트 Hausdorff이므로 T_4이다. (한 점 컴팩트화의 성질이지만 직접 증명도 가능하다.) X의 무한 부분공간은 다른 요새 공간이고 유한 부분공간은 유한 이산공간이므로 모든 부분공간이 정규이고 따라서 X는 완비 정규이며 T_5이다. 그러나 비가산 요새 공간은 완전 정규가 아니다; $\{p\}$의 열린 근방은 여유한집합들이고 이들의 가산 교집합도 여전히 비가산집합이므로 $\{p\}$는 G_δ가 아니다.

우리는 Kolmogorov Classification의 모든 분리공간들을 정의하고 분류를 완성했다. Part IV에서는 분리공간들의 부분공간/곱공간에 대한 분리성의 유전성과 분리공리와 다른 위상수학적 성질, 즉 가산성, 국소컴팩트성 및 파라컴팩트성 간의 관계를 탐구할 것이다.