분리공리와 분리공간 Part I: 근방에 의한 점의 분리

Articles

김다인 (수리과학부)

일반위상수학의 가장 중요한 과제는 적절한 특성을 가진 공간들을 분류하는 것이다. 이런 관점에서, 공간에 속한 점과 집합들이 근방과 함수를 통해 어떻게 분리될 수 있는지는 매우 중요한 분류 기준이 될 수 있다. 따라서 본 아티클에서는 분리공간을 분류하고 분리공리 간의 함의관계를 결정하며 (Kolmogorov classification) 이들의 고유한 특성을 논할 것이다.

1 Kolmogorov(T_0) 공간

공간의 임의의 열린집합에 항상 공통적으로 속하거나 속하지 않는 두 점은 당연히 위상(=열린집합들의 족)을 이용하여 정의된 어떠한 위상수학적 집합에도 공통적으로 속하거나 속하지 않으므로 위상수학적으로 구별 불가능하다. 그러므로 모든 점들이 서로 위상수학적으로 구별 가능한 공간은 가장 약한 형태의 분리공간이 된다.

공리 1 Kolmogorov Axiom

위상공간 X가 **Kolmogorov(T_0)**라는 것의 정의는 임의의 서로 다른 점 $x, y \in X$에 대하여 이들 중 정확히 하나를 포함하는 열린집합이 존재하는 것이다.

또한 두 점이 위상수학적으로 구별 불가능함은 동치 관계이다; 따라서 비-T_0 공간에서 이 동치 관계에 대한 몫공간을 취하면 T_0 공간을 얻는다. 이를 **Kolmogorov 몫공간**KOLMOGOROV QUOTIENT이라 한다.

예시 1

측도 μ를 가지는 측도 공간 X 상에서의 Lebesgue 적분 가능 복소 값 함수 공간 $L^1(X)$는 다음과 같은 L^1-노름에 대하여 $d(f,g) = \|f-g\|_1$로 정의된 유사거리에 의해 생성된 위상 하에서 (측도 0인 집합이 공집합뿐인 특수한 μ의 경우를 제외하면) 비-T_0 공간이다.

$$\|f\|_1 = \int_X f \, d\mu \tag{1}$$

이러한 위상 하에서 두 적분 가능 함수가 위상수학적으로 구별 불가능할 필요충분조건은 거의 어디서나 (=측도 0인 집합의 여집합에서) 같은 값을 가지는 것이며 따라서 함수 공간을 거의 어디서나 같은 함수들의 동치류들로 분할하면 Kolmogorov 몫공간을 얻는다. 그러나 이러한 차이는 해석학에 있어서는 그다지 중요하지 않으므로 관습적으로 함수 공간과 몫공간을 구별하지 않고 모두 $L^1(X)$로 표기한다.

2 Fréchet(T_1) 공간

위상공간에 포함된 두 집합(공집합이나 점집합일 수도 있음) A, B가 특정 종류의 **근방에 의해 분리된다**는 것을 해당 종류의 근방 U, V가 존재하여 $A \subset U - V, B \subset V - U$인 것으로 정의한다.
모든 근방은 열린 근방을 부분집합으로 가지므로 일반적인 근방에 의한 분리와 열린 근방에 의한 분리는 동치이다. (추가적인 조건이 없는) 근방에 의한 분리는 위상수학적으로 구별 가능보다 조금 더 강한 조건이다.

공리 2 Fréchet Axiom

위상공간 X가 **Fréchet(T_1)**라는 것의 정의는 임의의 서로 다른 점 $x, y \in X$가 근방에 의해 분리되는 것이다. X가 **대칭(R_0)**SYMMETRIC이라는 것의 정의는 임의의 위상수학적으로 구별 가능한 점 $x, y \in X$가 근방에 의해 분리되는 것이다.

정리 1

위상공간 X에 대하여 다음 명제들은 동치이다.
(a) X는 T_1 공간이다.
(b) X는 T_0이며 R_0이다.
(c) X에서의 모든 한 점 집합이 닫힌집합이다.
(d) X에서의 모든 유한집합이 닫힌집합이다.
(e) 임의의 $A \subset X$와 $x \in X$에 대하여 x가 A의 극한점일 필요충분조건은 x의 모든 근방이 A의 무한히 많은 점을 포함하는 것이다.

증명 (a) $\leftrightarrow$ (b) 자명. (a) $\to$ (c) 임의의 $x \in X$를 선택하자. $\{x\}$의 폐포 C에 x 이외의 점 y가 존재한다 하자. 열린집합 V가 존재하여 $y \subset V \subset X - \{x\}$이며 닫힌집합 $C \cap (X - V) \subsetneq C$이므로 모순이다.
(c) $\to$ (d) 닫힌집합들의 유한 합집합은 닫힌집합이다.
(d) $\to$ (e) x가 A의 극한점임의 정의는 x의 모든 근방이 x를 제외한 A의 점을 포함하는 것이다. x가 A의 극한점이라 가정하자. 만약 x의 어떠한 근방 V가 존재하여 $(V - \{x\}) \cap A = C$가 유한집합이면 C가 닫힌집합이므로 $V - C$도 x의 근방이다. 이는 x를 제외한 A의 점을 포함하지 않으므로 모순이다. 역은 자명하다.
(e) $\to$ (a) 서로 다른 점 $x, y \in X$가 존재하여 x를 포함하는 모든 열린집합이 y 또한 포함한다 하자. 그 경우 x는 $\{y\}$의 극한점이며 $\{y\}$가 유한집합이므로 (d)에 모순이다. □

예시 2 Sierpinski Space: $T_1 \neq T_0$

두 점 공간 $\{0,1\}$에 위상 $\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$를 부여한 공간은 T_0이지만 R_0가 아니고 T_1이 아니다.

3 Hausdorff(T_2) 공간

Hausdorff 공간은 두 점을 서로 소 (열린) 근방으로 분리할 수 있는 공간이다. 이는 매우 간단하면서도 그 간결함에 비해 상당히 강력한 조건이 될 수 있기에 일부 기형적인 공간을 제외하면 수학의 여러 분야에서 사용되는 유의미한 위상공간들은 대부분 Hausdorff 공간이다; 사실 T_2 공리는 Hausdorff가 최초로 위상공간을 정의할 때 위상공간을 정의하는 공리에 포함되어 있었으나 이후 수학자들에 의해 별개의 공리로 분리되었다.

공리 3 Hausdorff Axiom

위상공간 X가 **Hausdorff(T_2)**라는 것의 정의는 임의의 서로 다른 점 $x, y \in X$가 서로 소 근방에 의해 분리되는 것이다. X가 **전정칙(R_1)**PREREGULAR이라는 것의 정의는 임의의 위상수학적으로 구별 가능한 점 $x,\, y \in X$가 서로 소 근방에 의해 분리되는 것이다.

자명하게 $T_2 \to T_1$이며 $T_2 \leftrightarrow T_0 \wedge R_1$이고 $R_1 \to R_0$이다.

정리 2

위상공간 X가 T_2일 필요충분조건은 곱공간 $X \times X$의 대각 $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$가 닫힌집합인 것이다.

증명 $\Delta \subset X \times X$가 닫힌집합이라 하자. 곱위상의 정의에 의해 $\forall x, y \in X, x \neq y$에 대하여 열린집합 $U, V \subset X$가 존재하여 $(x, y) \in U \times V \subset X \times X - \Delta$이다. (x, x)와 (y, y)가 $U \times V$에 속하지 않으므로 U와 V는 x와 y를 분리하는 서로 소 열린 근방이다.

다음으로 X가 T_2라 하자. 임의의 $(x, y) \in X \times X - D$에 대하여 X에서 x와 y를 분리하는 서로 소 열린 근방 U, V가 존재하며 $U \times V$

가 $X \times X$에서의 (x, y)의 근방이므로 $X \times X - D$는 열린집합이고 따라서 D가 닫힌집합이다. □

예시 3 Cofinite Topology: $T_2 \neq T_1$

임의의 무한집합 X에 대하여 공집합과 X에서의 모든 여유한집합(유한집합의 여집합)들을 열린집합으로 정의하자. 이러한 위상공간은 T_1이지만 T_2가 아니다; 임의의 서로 다른 두 점 $x, y \in X$를 선택하면 이들을 분리하는 열린 근방 $X - \{y\}, X - \{x\}$가 존재하지만 X에서의 임의의 두 공집합이 아닌 열린집합은 항상 교집합이 무한집합이므로 이들을 분리하는 서로 소 근방은 존재할 수 없다.

임의의 $T_1[T_2]$ 공간의 모든 점을 복사하여 위상수학적으로 구별 불가능한 2개의 점으로 만들면 $R_0[R_1]$이지만 T_0가 아닌 공간을 얻을 수 있다.

4 필터 (Filter)

위상수학의 발전의 기반에는 점렬을 기반으로 하는 해석학이 있었다. 실제로 거리공간에서는 많은 위상수학적 개념들을 점렬을 이용하여 정의할 수 있으므로 이러한 접근 방식이 일부 공간에 대해서는 매우 효과적임을 알 수 있다. 그러나 점렬은 근본적으로 정의역이 가산집합이므로 일종의 '비가산성'을 가진 제1가산이 아닌 공간에 대해서는 점렬을 사용하기 어렵다는 것이다. 따라서 점렬을 일반화할 필요성이 존재한다.

정의 1

공집합이 아닌 집합 S 상에서의 **필터**FILTER는 다음을 만족시키는 S의 부분집합들의 족 F이다:

(a) $S \in F$이며 $\emptyset \notin F$이다.

(b) 만약 $X \in F$이며 $Y \in F$이면 $X \cap Y \in F$이다.
(c) 만약 $X, Y \subset S, X \in F, X \subset Y$이면 $Y \in F$이다.

(a)는 자명한 경우를 배제하며 (b)는 F가 $\subset$ 하에서 하향 원순서 집합임을, (c)는 F가 $\subset$ 하에서 상집합임을 의미한다.

정의 2

위상공간 $(X, \mathscr{T})$에 속한 점 x에 대하여 x의 **근방 필터**NEIGHBORHOOD FILTER는 x의 모든 근방들의 족이다.

$$\mathscr{N}(x) = \{S \subset X : \exists V \in \mathscr{T}\ (x \in V \subset S)\}$$

또한 $(X, \mathscr{T})$ 상에서의 필터 F가 x로 **수렴**CONVERGE한다는 것의 정의는 $F \supset \mathscr{N}(x)$인 것이다. 이 경우 x를 F의 **극한**LIMIT이라 한다.

정의 3

집합 X에서의 점렬 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$에 대응하는 **유도 필터**INDUCED FILTER를 다음과 같이 정의한다.

$$\{S \subset X : \exists n \in \mathbb{N}\ (\{x_m : m \geq n\} \subset S)\}$$

점렬의 수렴성/극한은 점렬의 유도 필터의 수렴성/극한과 일치한다. 따라서 필터는 점렬의 일반화로서 기능할 수 있다.

다음 정리는 위상수학에서의 필터의 유용성과 함께 어째서 T_2 공간이 여러 가지 분리 공간 중 가장 근본적인 것인지를 알려준다.

정리 3

임의의 위상공간 X가 T_2일 필요충분조건은 X 상에서의 임의의 필터의 극한이 (존재한다면) 유일한 것이다.

증명 먼저 X가 T_2이며 X 상에서의 필터 F가 서로 다른 극한 x, y를 가진다 하자. 그 경우 x와 y를 분리하는 서로 소 열린 근방 $U \in \mathscr{N}(x), V \in \mathscr{N}(y)$가 존재하며 극한의 정의에 의해 $F \supset \mathscr{N}(x), F \supset \mathscr{N}(y)$이고 따라서 F의 하향성에 의해 $\emptyset = U \cap V \in F$이다. 이는 모순이다.

다음으로 X 상에서의 임의의 필터의 극한이 존재한다면 유일하다 가정하자. 어떤 $x, y \in X$에 대하여 x와 y를 각각 포함하는 모든 근방의 쌍이 서로 소이지 않다 하자. 그 경우 $B = \mathscr{N}(x) \cup \mathscr{N}(y)$를 포함하는 모든 필터들의 교집합 필터 F는 x와 y에 모두 수렴하므로 모순이다. (이러한 교집합 F는 실제로 필터이다; B의 원소들의 유한 교집합이 다시 B에 속하기 때문이다.) □

5 Urysohn($T_{2\frac{1}{2}}$) 공간

정의 4

위상공간 X가 **Urysohn($T_{2\frac{1}{2}}$)**이라는 것의 정의는 임의의 서로 다른 점 $x, y \in X$가 서로 소 닫힌 근방에 의해 분리되는 것이다.

이는 자명하게 T_2 공리를 함의한다.

예시 4 $T_{2\frac{1}{2}} \neq T_2$

양의 정수 집합 $\mathbb{N}^*$에 다음 기저에 의해 생성되는 위상을 부여하자:

$\{\emptyset\} \cup \{B(a,b) = \{n \in \mathbb{N}^* : n \equiv a(\mathrm{mod} b)\} : a, b \in \mathbb{N}^*, \gcd(a,b) = 1\}$

임의의 x, $y \in \mathbb{N}^*$에 대하여 x, y보다 모두 큰 소수 p를 선택하면 $B(x,p)$와 $B(y,p)$는 x와 y를 분리하는 서로 소 근방이다. 따라서 이러한 위상공간은 T_2이다.
고정된 a, b에 대하여 $n \in \mathbb{N}^*$라 하면 nb는 $B(a,b)$의 극한점이다. (왜냐하면 nb의 모든 근방은 $\gcd(b,d) = 1$을 만족시키는 어떠한 기저 원소 $B(c,d)$를 포함해야 하기 때문이다; 따라서 중국인의 나머지 정리에 의해 nb의 임의의 근방은 $B(a,b)$의 원소를 포함한다.)
임의의 $x, y \in \mathbb{N}^*$에 대하여 x, y를 분리하는 임의의 서로 소 근방 U, V를 선택하자. 그 부분근방인 기저의 원소 $B(a,b) \subset U$와 $B(c,d) \subset V$가 존재한다. $B(a,b)$의 폐포에는 b의 배수들이, $B(c,d)$의 폐포에는 d의 배수들이 포함되므로 $bd \in \overline{U} \cap \overline{V}$이며 따라서 x, y를 분리하는 어떠한 두 닫힌 근방의 쌍도 서로 소일 수 없다. 그러므로 이러한 위상공간은 $T_{2\frac{1}{2}}$가 아니다.

Part I에서는 두 점을 특정한 형태의 근방에 의해 분리할 수 있는 공간을 다루었다. Part II에서는 이 조건을 더 강화하여 서로 소인 점과 닫힌집합(정칙)/닫힌집합과 닫힌집합(정규)/분리집합의 쌍(완비 정규)을 근방에 의해 분리할 수 있는 공간들을 도입하고 이들의 특성과 위계 질서를 논할 것이다.