Embeddings in Projective Space (사영공간으로의 매장)

Dyne Kim

October 25, 2023

층(sheaf)과 선형계(linear system)

가역층 $\mathscr{L}$이 **매우 풍부한(very ample)** 층 iff 사영공간으로의 몰입(immersion)의 $\mathscr{O}_X(1)$이다. **풍부한(ample)** 층 iff 임의의 연접층(coherent sheaf) $\mathscr{F}$에 대하여 $n \gg 0$에서 $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n$이 대역적 단면(global section)들에 의해 생성된다. (이는 $\exists n$ s.t. $\mathscr{L}^n$이 매우 풍부한 층인 것과 동치.)
인자 D가 **풍부한(ample)**[resp. **매우 풍부한(very ample)**] 인자 iff $\mathscr{L}(D)$가 그러한 것이다.
완비선형계(complete linear system) $|D|$는 인자 D와 선형 동치(linearly equivalent)인 모든 유효인자(effective divisor)들로 구성된 공간이다.
선형계(linear system)는 완비선형계의 선형 부분공간이다.
P가 선형계 $\mathfrak{d}$의 **기반점(base point)** iff $\forall D \in \mathfrak{d}$ $P \in \operatorname{Supp} D$.
특히, 완비선형계 $|D|$가 기반점을 갖지 않음 iff $\mathscr{L}(D)$가 대역적 단면(global section)들에 의해 생성된다.

곡선에서의 풍부성 판정법

Proposition 3.1. X가 곡선이며 D가 X에서의 인자라 하자.
(a) $|D|$가 기반점을 갖지 않음 iff $\forall P \in X$ $\dim|D-P| = \dim|D| - 1$
(b) D가 매우 풍부한 인자 iff $\forall P, Q \in X$ $\dim|D-P-Q| = \dim|D| - 2$
(여기에서 $P = Q$인 경우도 배제하지 않는다.)

Proof of (a). 열 $0 \to \mathscr{L}(D-P) \to \mathscr{L}(D) \to k(P) \to 0$에 대역적 단면을 취하면 $0 \to \Gamma(X, \mathscr{L}(D-P)) \to \Gamma(X, \mathscr{L}(D)) \to k$를 얻는다. 그러므로 $\dim|D-P|$는 항상 $\dim|D|$ 또는 $\dim|D| - 1$이다. 단사 선형 사상 $\varphi : |D-P| \to |D|$를 $E \mapsto E + P$로 정의하자. 두 선형계의 차원이 같다 iff φ가 전사 iff P가 $|D|$의 기반점인 것이다. $\square$

곡선에서의 풍부성 판정법

Proof of (b). D가 매우 풍부하면 $|D|$가 기반점을 갖지 않으며, D가 (b)의 조건을 만족시키면 $\forall P \in X \ \dim |D - P| = \dim |D| - 1$도 성립해야 하므로 $|D|$가 기반점을 갖지 않는다.
이 경우 $|D|$가 사상 $X \to \mathbb{P}^n$을 결정한다. 이것이 닫힌 몰입(closed immersion)임을 보이자. $|D|$가 점들을 분리하며 접벡터들을 분리함을 보여야 한다. (cf. Chapter II)
(i) $\forall P, Q \in X, P \neq Q$에 대하여 Q가 $|D - P|$의 기반점이 아님을 보이자. (a)에 의해 이는 $\dim |D - P - Q| = \dim |D| - 2$임과 동치이다.
(ii) $\forall P \in X$에 대하여 인자 $D' \in |D|$가 존재하여 P가 D'에서 중복도 1을 가짐을 보이자. (이는 $\dim T_P(X) = 1$이며 또한 P가 D'에서 중복도 1을 가지는 경우 $T_P(D') = 0$이고 P가 더 높은 중복도를 가지는 경우 $T_P(D') = 1$이기 때문이다.) 이것이 성립 iff P가 $|D - P|$의 기반점이 아니다 iff $\dim |D - 2P| = \dim |D| - 2$. □

곡선에서의 풍부성 판정법

Corollary 3.2. D가 종수(genus) g의 곡선 X에서의 인자라 하자.
(a) 만약 $\deg D \geq 2g$이면 $|D|$는 기반점을 갖지 않는다.
(b) 만약 $\deg D \geq 2g+1$이면 D는 매우 풍부한 인자이다.

Proof. (a) D와 $D-P$가 모두 비특수(nonspecial)이며 (1.3.4) 따라서 Riemann-Roch 정리에 의해 $\dim|D-P| = \dim|D| - 1$이다.
(b) D와 $D-P-Q$가 모두 비특수이며 따라서 다시 Riemann-Roch 정리에 의해 $\dim|D-P-Q| = \dim|D| - 2$이다. □

Corollary 3.3. 곡선 X에서의 인자 D가 풍부한 인자일 필요충분조건은 $\deg D > 0$인 것이다.

Proof. 만약 D가 풍부한 인자이면 어떠한 n에 대하여 nD가 매우 풍부한 인자이며 따라서 사영 매장(projective embedding)에 대한 초평면 단면 (hyperplane section) H에 대하여 $nD \sim H$이다. $\deg H > 0$이므로 $\deg D > 0$이다. 역으로 $\deg D > 0$이면 $n \gg 0$에 대하여 $\deg nD \geq 2g(X)+1$이며 따라서 (3.2)에 의해 nD가 매우 풍부한 인자이고 그러므로 D가 풍부한 인자이다. □

곡선에서의 풍부성 판정법

Example 3.3.3. $g = 1$, 즉 타원곡선(elliptic curve)의 경우 차수 3의 임의의 인자 D는 매우 풍부한 인자이다. 이것이 비특수(nonspecial) 이므로 Riemann-Roch에 의해 $\dim |D| = 2$이다. i.e. 임의의 타원곡선을 $\mathbb{P}^2$에 3차곡선으로 매장 가능하다.
특히 $g = 1$이면 D가 매우 풍부한 층 iff $\deg D \geq 3$이다: 만약 $\deg D = 2$ 이면 Riemann-Roch에 의해 $\dim |D| = 1$이고 따라서 $|D|$가 사상 $X \to \mathbb{P}^1$ 을 정의하며 이것이 닫힌 몰입일 수는 없다.

점으로부터의 사영(projection from point)

$P, Q \in X, P \neq Q$이면 P, Q를 통과하는 직선을 **할선(secant line)**이라 한다. $P \in X$이면 $T_P(L) = T_P(X)$이도록 하는 유일한 직선 L을 X의 P에서의 **접선(tangent line)**이라 한다.
$\mathbb{P}^{n-1}$이 $\mathbb{P}^n$에서의 초평면(hyperplane)이며 $O \in \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}$이면 **$O$로부터의 사영(projection from O)** $\varphi : \mathbb{P}^n \setminus \{O\} \to \mathbb{P}^{n-1}$은 $P \in \mathbb{P}^n$을 직선 OP와 초평면 $\mathbb{P}^{n-1}$의 교점으로 대응시키는 사상이다.
X의 **다중할선(multisecant)**은 X와 3개 이상의 점에서 교차하는 $\mathbb{P}^3$에서의 직선이다. **공면접선을 가지는 할선(secant with coplanar tangent lines)**은 할선 PQ 중 접선 L_P, L_Q가 공면선이도록 하는 것이다.

점으로부터의 사영(projection from point)

Theorem 3.4. $X \subseteq \mathbb{P}^n$이 곡선이고 $O \notin X$이며 $\varphi : X \to \mathbb{P}^{n-1}$이 O로부터의 사영이라 하자. 그 경우 φ가 닫힌 몰입(closed immersion) iff O가 X의 어떠한 할선에도 어떠한 접선에도 속하지 않는 것이다.

Proof. 사상 φ는 (II, 7.8.1) X를 O를 통과하는 $\mathbb{P}^n$의 초평면(hyperplane) H들에 의해 자른 것들의 완비선형계에 대응한다. φ가 닫힌 몰입(closed immersion) iff 이러한 완비선형계가 점을 분리하며 X에서의 접벡터들을 분리하는 것이다. (II, 7.8.2)
(i) $P, Q \in X, P \neq Q$이면 φ가 이들을 분리 iff
$\exists H$ s.t. $O \in H, P \in H, Q \notin H$ iff O가 직선 PQ에 속하지 않는 것이다.
(ii) $P \in X$이면 φ가 P에서의 접벡터들을 분리 iff $\exists H$ s.t. $O \in H, P \in H$이며 H, X의 P에서의 교차 중복도(intersection multiplicity)가 1 iff O가 P에서의 접선에 속하지 않는 것이다. $\square$

$\mathbb{P}^3$로의 매장(embedding into $\mathbb{P}^3$)

Theorem 3.5. *X가 $\mathbb{P}^n$에서의 곡선이며 $n \geq 4$이면 점 $O \notin X$가 존재하여 O로부터의 사영이 닫힌 몰입 $X \to \mathbb{P}^{n-1}$이도록 한다.*

Proof. X의 **할선 대수다양체(secant variety)** $\operatorname{Sec} X$를 X의 모든 할선들의 합집합으로 정의한다. 이는 (적어도 국소적으로는) $\langle P, Q, t \rangle$를 P와 Q를 통과하는 (적절히 매개화된) 할선의 점 t로 대응시키는 $(X \times X - \Delta) \times \mathbb{P}^1$에서 $\mathbb{P}^n$으로의 사상의 상이므로 $\mathbb{P}^n$의 3차원 이하의 국소 닫힌 부분집합이다.
X의 **접선 대수다양체(tangent variety)** $\operatorname{Tan} X$가 X의 모든 접선들의 합집합이라 하자. 이는 국소적으로 $X \times \mathbb{P}^1$의 상이므로 $\mathbb{P}^n$의 2차원 이하의 닫힌 부분집합이다.
$n \geq 4$이므로 $\operatorname{Sec} X \cup \operatorname{Tan} X \neq \mathbb{P}^n$이며 따라서 X의 임의의 할선과 접선에 속하지 않는 점 O들이 다수 존재한다. 그 경우 (3.4)에 의해 O로부터의 사영은 요구된 것과 같이 닫힌 몰입을 제공한다. □

$\mathbb{P}^3$로의 매장(embedding into $\mathbb{P}^3$)

Corollary 3.6. 임의의 곡선은 $\mathbb{P}^3$에 매장될 수 있다.

Proof. 먼저 X를 임의의 사영공간 $\mathbb{P}^n$에 매장하자. 예를 들어 차수 $d \geq 2g+1$인 인자 D를 취하고 (3.2)를 사용할 수 있다. D가 매우 풍부한 인자이므로 완비선형계 $|D|$는 ($n = \dim |D|$에 대하여) X에서 $\mathbb{P}^n$으로의 매장을 결정한다. 만약 $n \leq 3$이면 $\mathbb{P}^n$을 $\mathbb{P}^3$의 부분공간으로 간주할 수 있으며 따라서 증명할 것이 없다. 만약 $n \geq 4$이면 X가 $\mathbb{P}^3$에 매장될 때까지 점으로부터의 사영(3.5)을 반복 적용한다. □

$\mathbb{P}^2$로의 쌍유리 매장(birational embedding into $\mathbb{P}^2$)

Proposition 3.7. $X \subseteq \mathbb{P}^3$이 곡선이며 $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$가 $O \notin X$로부터의 사영이라 하자. φ가 쌍유리사상(birational morphism) $X \to \varphi(X)$이며 $\varphi(X)$가 결절점(i.e. 서로 다른 접선방향들을 가지는 중복도 2의 특이점) 이외의 특이점을 갖지 않는다 iff 다음이 성립하는 것이다:

(1) O는 X의 유한 개 할선들에만 속한다.
(2) O는 X의 어떠한 접선에도 속하지 않는다.
(3) O는 X의 어떠한 다중할선에도 속하지 않는다.
(4) O는 공면접선을 가지는 X의 어떠한 할선에도 속하지 않는다.

Proof. (1)은 φ가 거의 모든 곳에서 일대일대응이며 따라서 쌍유리임을 의미한다. (cf. (II, 7.3)) O가 할선에 속할 경우 조건 (2), (3), (4)는 이러한 할선이 X와 정확히 두 점 P, Q에서 교차하며 두 점 중 어떤 곳에서도 X와 접하지 않고 P, Q에서의 접선들이 $\mathbb{P}^2$에서의 서로 다른 직선으로 대응됨을 의미한다. i.e. 상 $\varphi(X)$가 이곳에서 결절점을 가진다. $\square$

$\mathbb{P}^2$로의 쌍유리 매장(birational embedding into $\mathbb{P}^2$)

Proposition 3.8. X가 $\mathbb{P}^3$에서의 곡선이며 어떠한 평면에도 포함되지 않는다 하자. 다음 중 하나가 성립한다 가정하자.
(a) X의 모든 할선이 다중할선이다.
(b) 임의의 두 점 $P, Q \in X$에 대하여 접선 L_P, L_Q가 공면이다.
그 경우 점 $A \in \mathbb{P}^3$이 존재하여 X의 모든 접선에 속한다.

Proof of (a) $\Rightarrow$ (b). $R \in X$를 고정하고 R로부터의 사영을 $\psi : X - R \to \mathbb{P}^2$라 하자. 모든 할선이 다중할선이므로 ψ는 다대일 사상이다. 만약 ψ가 불가분(inseparable)이면 $\forall P \in X$에 대하여 X의 접선 L_P가 R을 통과한다. 이 경우 (b)와 결론이 자명하게 성립한다. 그러므로 각각의 ψ가 가분(separable)인 경우에 대하여 보이자. 이 경우 T가 ψ의 분기점이 아닌 $\psi(X)$의 비특이점(nonsingular point)이라 하자. 만약 $P, Q \in \psi^{-1}(T)$이면 X의 접선 L_P, L_Q는 $\psi(X)$의 T에서의 접선 L_T로 사영된다. 즉 L_P와 L_Q는 모두 R과 L_T에 의해 선형생성된 평면에 속하는 공면선이다. i.e. $\forall R$와 거의 모든 P, Q에 대하여 P, Q, R이 공선이며 L_P, L_Q가 공면이다. 따라서 $X \times X$에서의 $\langle P, Q \rangle$들의 열린집합이 존재하여 L_P, L_Q가 공면이도록 한다. 그러나 L_P와 L_Q가 공면이라는 조건은 닫힌 조건이므로 $\forall P, Q \in X$에 대하여 L_P와 L_Q가 공면이다.

$\mathbb{P}^2$로의 쌍유리 매장(birational embedding into $\mathbb{P}^2$)

Proof of (b) $\Rightarrow$ Conclusion. $\forall P, Q \in X$ s.t. $L_P \neq L_Q$에 대하여 $A = L_P \cap L_Q$라 하자. X는 평면곡선이 아니므로 π가 L_P, L_Q에 의해 선형생성된 평면이면 $X \cap \pi$가 유한집합이다. $\forall R \in X - X \cap \pi$에 대하여 접선 L_R은 L_P, L_Q 모두와 교차한다. 그러나 $L_R \subsetneq \pi$이므로 이는 A를 통과한다. 이것이 닫힌 조건이므로 $\forall R \in X$ $A \in L_R$이다. □

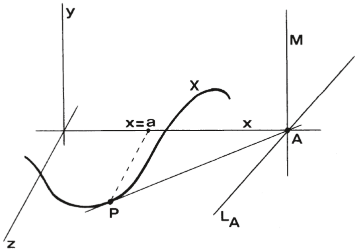
X가 **이상(strange)**곡선임을 X의 모든 접선에 속한 점 A가 존재하는 것이라 하자. $\mathbb{P}^1$의 임의의 점에서의 접선이 $\mathbb{P}^1$ 자신이므로 $\forall A \in \mathbb{P}^1$이 모든 접선에 속하며 $\mathbb{P}^1$이 이상곡선이다. 또한 char $k = 2$이면 $\mathbb{P}^2_k$에서의 원뿔곡선이 이상 곡선이다. e.g. $y = x^2$의 경우 $dy/dx \equiv 0$이므로 모든 접선이 수직선이며 이들은 모두 x축 상의 무한원점을 통과한다.

$\mathbb{P}^2$로의 쌍유리 매장(birational embedding into $\mathbb{P}^2$)

Theorem 3.9. 임의의 $\mathbb{P}^n$에서의 이상 곡선은 직선과 char $k = 2$에서의 원뿔곡선뿐이다.

Proof. $X \subseteq \mathbb{P}^3$이라 하자. (3.5) $\mathbb{P}^3$에서의 (아핀 좌표계 x, y, z를 가지는) $\mathbb{A}^3$을 다음을 만족시키도록 선택하자.

(1) A가 x축에서의 무한원점이다.
(2) 만약 $A \in X$이면 그 접선 L_A는 xz평면에 포함되지 않는다.
(3) z축이 X와 교차하지 않는다.
(4) X는 xz평면의 무한원선과 (A를 제외한 곳에서) 교차하지 않는다.



$\mathbb{P}^2$로의 쌍유리 매장(birational embedding into $\mathbb{P}^2$)

먼저 A로부터 yz평면으로 사영하자. A가 X의 모든 접선에 속하므로 대응하는 사상 $X \to \mathbb{P}^2$는 모든 곳에서 분기이다. 그러므로 상이 점이거나 (이 경우 X가 직선이다) 또는 사상이 불가분이다. (2.2) 따라서 함수 y, z를 X로 제한하면 $K(X)^p$에 속한다. (여기에서 $\operatorname{char} k = p > 0$이다.)
다음으로 z축으로부터 xy평면의 무한원선 M으로 사영하자. i.e. $P \in X$이면 $\varphi(P)$는 P와 z축에 의해 선형생성된 평면과 직선 M의 교점이다. 이러한 $\varphi : X \to M$은 차수 $d = \deg X$의 사상이다. (φ는 xz평면의 유한한 부분에 속한 X의 점들에서 분기이며 A에서 비분기이다.)
Hurwitz 정리(2.4)를 사상 φ에 적용하자. 임의의 점 $P \in X \cap xz$평면에 대하여 $u = x - a$ ($a \in k, a \neq 0$)를 국소좌표로 선택하자. $t = y/x$를 M의 A에서의 국소좌표로 선택하자. 그 경우 (2.2)에 의해 우리는 $v_P(dt/du)$를 계산해야 한다. $x = u + a$로 표현하면 $t = y(u+a)^{-1}$이다. $k \in K(X)^p$이므로 $dy/du = 0$이며 $dt/du = -y(u+a)^{-2}$이다. 그러나 $u + a$는 국소환 $\mathcal{O}_P$에서의 가역원이므로 $v_P(dt/du) = v_P(y)$이다. 만약 $X \cap xz$ 평면의 유한 좌표 점들을 $P_1, \ldots, P_r$이라 하면 Hurwitz 정리에 의해 다음이 성립한다.

$$2g - 2 = -2d + \sum_{i=1}^{r} v_{P_i}(y)$$

$\mathbb{P}^2$로의 쌍유리 매장(birational embedding into $\mathbb{P}^2$)

이제 두 가지 경우를 고려하자.
Case 1. 만약 $A \notin X$이면 xz평면은 X와 점 P_i들에서만 교차한다. xz 평면이 방정식 $y = 0$에 의해 정의되므로 X의 차수를 이러한 평면과의 교점의 개수로서 계산할 수 있고 따라서 다음이 성립한다.

$$d = \sum_{i=1}^{r} v_{P_i}(y)$$

위 식에 대입하면 $2g - 2 = -d$를 얻는다. 이는 $g = 0$이며 $d = 2$인 경우에만 가능하다. 그러므로 $X \cong \mathbb{P}^1$이며 인자 D에 의한 X의 매장은 차수 2이다. Riemann-Roch에 의해 $\dim |D| = 2$이고 X는 평면 $\mathbb{P}^2$에서의 원뿔곡선이다. 원뿔곡선이 이상 곡선이기 위해서는 char $k = 2$여야 한다.
Case 2. 만약 $A \in X$이면 조건 (2)에 의해 xz평면은 A에서 X와 횡단교차 (meet transversally)하며 따라서 마찬가지로 다음이 성립한다.

$$d = \sum_{i=1}^{r} v_{P_i}(y) + 1$$

즉 $2g - 2 = -d - 1$이므로 $g = 0, d = 1$, i.e. 직선이다. □

Exercise II.3.7. Y가 기약인 경우 사상 $f : X \to Y$가 **일반유한 (generically finite)**이라는 것의 정의는 Y의 일반점 η에 대하여 $f^{-1}(\eta)$가 유한집합인 것이다. 사상 $f : X \to Y$가 **우세(dominant)**라는 것의 정의는 $f(X)$가 Y에서 조밀한 것이다. 이제 $f : X \to Y$가 정수적 스킴 간의 우세 일반유한 유한형 사상이라 하자. 조밀 열린 부분집합 $U \subseteq Y$가 존재하여 유도된 사상 $f^{-1}(U) \to U$가 유한이도록 함을 보여라.

Proof. Step I. $k(X)$가 $k(Y)$의 유한 확대체임을 보이자.
아핀 열린집합 $\operatorname{Spec} B = V \subseteq Y$와 A가 유한생성 B-대수이도록 하는 그 역상에서의 아핀 열린집합 $\operatorname{Spec} A = U \subseteq f^{-1}(V)$를 선택하자. ($f$가 유한형이므로 가능하다.) X가 정수적(integral)이므로 A가 정역이다. A가 유한생성 B-대수이므로 $k(B) \otimes_B A \cong B^{-1}A$이다. Noether 정규화 보조정리에 의해 적당한 n과 대수적 독립 원소 $y_1, \ldots, y_n \in A$가 존재하여 $B^{-1}A$가 $k(B)[y_1, \ldots, y_n]$의 유한 확대(따라서 정수적 확대)이도록 한다. 이는 상승 정리(going up theorem)에 의해 스펙트럼 간의 전사 사상 $\operatorname{Spec} B^{-1}A \to \mathbb{A}^n_{k(B)}$에 대응한다. $\operatorname{Spec} B^{-1}A$의 원소들은 A의 아이디얼 중 $B - \{0\}$과 교차하지 않는 것, i.e. $f^{-1}(\eta) \cap \operatorname{Spec} A$의 원소와 1-1 대응한다. 이는 일반유한성에 의해 유한집합이므로 $n = 0$이어야 한다. 따라서 $k(A)/k(B)$가 유한 확대이고 $k(B^{-1}A) = k(A) = k(X)$가 $k(B) = k(Y)$의 유한 확대이다.

Step II. $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$인 경우에 대하여 증명하자. $\{a_i\}$가 A의 B 상에서의 유한 생성집합이라 하자. 각각의 a_i들은 $k(A)$의 원소로서 $k(B)$-계수 다항식의 근으로 표현 가능하다. 분모를 소거하면 B-계수 다항식들을 얻는다. b가 이러한 다항식들의 최고차 계수들의 곱이라 하자. B와 A를 B_b와 A_b로 대체하면 a_i들을 B-계수 모닉 다항식의 근으로 표현 가능하다. 즉 A_b가 B_b 상에서 정수적이며 따라서 A_b가 유한생성 B_b-모듈이다. $\operatorname{Spec} B_b = U$라 하면 요구된 유한 사상을 얻는다.

Step III. 일반적인 경우에 대하여 증명하자. 임의의 아핀 열린집합 $V = \operatorname{Spec} B \subseteq Y$와 $f^{-1}(V)$의 유한 아핀 열린 덮개 $U_i = \operatorname{Spec} A_i$들을 선택하자. Step II에 의해 각각의 i에 대하여 조밀 열린 부분집합 V_i들이 존재하여 $f^{-1}(V_i) \cap U_i \to V_i$가 유한 사상이도록 한다. $V' = \bigcap_i V_i$라 하면 $f^{-1}(V') \cap U_i \to V'$들이 유한 사상이다. 필요하다면 V'을 축소하는 것으로 $f^{-1}(V')$이 아핀이도록 할 수 있다. V를 V'으로, U를 $f^{-1}(V')$으로, U_i를 $f^{-1}(V') \cap U_i$로 대체하자.

U_i들이 U의 열린 덮개를 형성한다. $U' \subseteq \bigcap U_i$가 각각의 U_i에서 아핀인 열린집합이라 하자. 즉 $U' = \operatorname{Spec}(A_i)_{a_i}$를 만족시키는 a_i들이 존재한다. 각각의 A_i가 B 상에서 유한이므로 각각의 a_i가 어떠한 B-계수 모닉 다항식 g_i의 근이다. 가능한 최소 차수의 g_i들을 선택하자. g_i의 상수항들의 곱을 b라 하자. (이는 0이 아니다.) $\operatorname{Spec}((A_i)_{a_i})_b$이며 $((A_i)_{a_i})_b$가 유한생성 B_b-모듈이다. 이는 요구된 유한 사상을 준다.

$\mathbb{P}^2$로의 쌍유리 매장(birational embedding into $\mathbb{P}^2$)

Theorem 3.10. $X \subseteq \mathbb{P}^3$가 곡선이라 하자. 점 $O \notin X$가 존재하여 O로부터의 사영 φ가 쌍유리사상 $X \to \varphi(X) \subseteq \mathbb{P}^2$이며 $\varphi(X)$의 특이점은 결절점뿐이다.

Proof. 만약 X가 이미 평면곡선이면 평면 밖의 O가 조건을 만족시킨다. 그러므로 X가 평면곡선이 아니라 하자. 그 경우 X는 직선도 타원곡선도 아니므로 (3.9)에 의해 X가 이상 곡선이 아니다. 그러므로 (3.8)에 의해 X는 다중할선이 아닌 할선을 가지며 공면접선을 갖지 않는 할선을 가진다. 이러한 성질이 주위의 할선에 대해서도 성립해야 하므로 할선 PQ가 다중할선이 아니며 공면접선을 갖지 않도록 하는 쌍 $\langle P, Q \rangle$들은 $X \times X$의 열린 부분집합을 형성한다. 그렇지 않은 쌍 $\langle P, Q \rangle$들로 구성된 $X \times X$의 부분집합은 진부분집합이므로 1차원 이하이며 따라서 $\mathbb{P}^3$에서의 대응하는 할선들의 합집합이 2차원 이하이다. $\dim \operatorname{Tan} X \leq 2$이므로 (3.7)의 (2), (3), (4)를 만족시키는 점들은 열린집합을 형성한다.

$\mathbb{P}^2$로의 쌍유리 매장(birational embedding into $\mathbb{P}^2$)

O가 X의 유한 개 할선에만 속하도록 선택 가능함을 보이자. $\langle P, Q, t \rangle$를 할선 PQ 상의 점 t로 대응시키는 (적어도 국소적으로는 정의된) 사상 $(X \times X - \Delta) \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$를 고려하자. 만약 그 상이 3차원 미만이면 어떠한 할선에도 속하지 않는 O를 선택할 수 있다. 만약 그 상이 3 차원이면 이는 동일한 차원의 대수다양체 간의 사상이므로 (II, Ex. 3.7)을 적용 가능하며 따라서 해당 점 상에서의 올이 유한집합이도록 하는 $\mathbb{P}^3$의 점들의 열린집합을 찾을 수 있다. 이러한 점들은 유한 개 할선에만 속하므로 (3.7)에 의해 증명이 완료된다. □

Corollary 3.11. 임의의 곡선은 특이점이 결절점뿐인 평면 곡선과 쌍유리동치이다. □