Introduction to
Sheaf Theory and Sheaf Cohomology
층 이론 및 층 코호몰로지 입문

Dyne Kim

November 13, 2023

준층(presheaf)

X가 위상공간이라 하자. X 상에서의 가환군의 **준층(presheaf)** $\mathscr{F}$는 다음 데이터로 구성되며,
(a) 모든 열린 부분집합 $U \subseteq X$에 대하여 가환군 $\mathscr{F}(U)$
(b) X의 열린집합들의 모든 포함 관계 $V \subseteq U$에 대하여 가환군 사상 $\rho_{UV} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$

다음 조건에 종속된다.
(0) $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$는 공집합)
(1) ρ_{UU}는 항등사상 $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$이다.
(2) 만약 $W \subseteq V \subseteq U$가 세 열린 부분집합들이면 $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$

$\mathscr{F}$가 X에서의 준층이면 $\mathscr{F}(U)$의 원소들을 열린집합 U에서 준층 $\mathscr{F}$의 **단면(section)**이라 할 것이다. $\mathscr{F}(U) = \Gamma(U, \mathscr{F})$로도 표기한다.
$\rho_{U,V}$를 **제한(restriction)**함수라 부르며, $s \in \mathscr{F}(U)$인 경우 $\rho_{UV}(s) = s|_V$로 표기할 것이다.

층(sheaf)

층은 대략적으로 말하면 ‘단면이 국소적 정보에 의해 결정되는 준층’이다: 위상공간 X 상에서의 준층 $\mathscr{F}$가 **층(sheaf)**이라는 것은 다음의 추가적인 조건들을 만족시키는 것이다.

(3) 만약 U가 열린집합이며 $\{V_i\}$가 U의 열린 덮개이고 $s \in \mathscr{F}(U)$가 모든 i에 대하여 $s|_{V_i} = 0$을 만족시키는 원소이면 $s = 0$이다.
(4) 만약 U가 열린집합이며 $\{V_i\}$가 U의 열린 덮개이고 각각의 i에 대하여 원소 $s_i \in \mathscr{F}(V_i)$가 존재하여 각각의 i, j에 대하여 $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$를 만족시킨다면 원소 $s \in \mathscr{F}(U)$가 존재하여 각각의 i에 대하여 $s|_{V_i} = s_i$를 만족시킨다.
(조건 (3)이 s의 유일성을 함의함을 기억해 두라.)

층의 예시

Example 1.0.1. X가 체 k 상에서의 대수다양체라 하자. 각각의 열린집합 $U \subseteq X$에 대하여 $\mathcal{O}(U)$가 U에서 k로의 정칙함수환이라 하고 각각의 $V \subseteq U$에 대하여 $\rho_{UV} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$가 통상적인 제한함수라 하자. 그 경우 $\mathcal{O}$는 X 상에서의 환의 층이다. 이것이 환의 준층임은 명백하다. 조건 (3)과 (4)를 검증하기 위해 우리는 국소적으로 0인 함수는 0이며 정칙 함수의 정의(I, §3)에 의해 국소적으로 정칙인 함수가 정칙임을 기억해 두면 된다. 우리는 $\mathcal{O}$를 X에서의 **정칙함수층(sheaf of regular functions)**이라 한다.

Example 1.0.3. X가 위상공간이며 A가 가환군인 경우 X에서의 A에 의한 **상수층(constant sheaf)** $\mathscr{A}$는 다음과 같다: A에 이산위상을 부여하고 임의의 열린집합 $U \subseteq A$에 대하여 $\mathscr{A}(U)$가 U에서 A로의 모든 연속 함수들의 군이라 하자. 통상적인 제한함수를 부여하면 우리는 층 $\mathscr{A}$를 얻는다. 특히 모든 연결 열린집합 U에 대하여 $\mathscr{A}(U) \cong A$이다. 만약 U가 연결성분들이 열린집합인 열린집합이면 $\mathscr{A}(U)$는 U의 연결성분마다 대응된 A의 사본들의 직접곱이다.

줄기(stalk)

만약 $\mathscr{F}$가 X 상에서의 준층이며 P가 X의 점이면 $\mathscr{F}$의 P에서의 **줄기 (stalk)** $\mathscr{F}_P$를 P를 포함하는 모든 열린집합 U에 대한 군 $\mathscr{F}(U)$들의 제한함수 ρ를 통한 직접극한으로 정의한다.

그러므로 $\mathscr{F}_p$의 원소는 P의 열린 근방 U와 $\mathscr{F}(U)$의 원소 s의 쌍 $\langle U, s\rangle$에 의해 표현된다. 이러한 두 쌍 $\langle U, s\rangle$와 $\langle V, t\rangle$가 $\mathscr{F}_P$의 동일한 원소를 정의할 필요충분조건은 P의 열린 근방 W가 존재하여 $W \subseteq U \cap V$이며 $s|_W = t|_W$를 만족시키는 것이다. 그러므로 우리는 줄기 $\mathscr{F}_P$의 원소들을 $\mathscr{F}$의 단면들의 점 P에서의 **싹(germ)**이라 말한다. 대수다양체 X와 그 정칙 함수층 $\mathcal{O}$의 경우 점 P에서의 줄기 $\mathcal{O}_P$는 단지 (I, §3)에서 정의된 P의 X 상에서의 국소환이다.

층 사상(sheaf morphism)

만약 $\mathscr{F}, \mathscr{G}$가 X 상에서의 준층이면 **사상(morphism)** $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$는 각각의 열린집합 U에 대하여 $V \subset U$이면 다음 도표가 가환이도록 하는 가환군의 사상 $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$들로 구성된다.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathscr{G}(V)
\end{tikzcd}$$

여기에서 ρ와 ρ'은 $\mathscr{F}$와 $\mathscr{G}$에서의 제한함수이다. 만약 $\mathscr{F}$와 $\mathscr{G}$가 X 상에서의 층이면 준층 사상과 같은 정의를 사용한다. **동형사상 (isomorphism)**은 양쪽 역사상을 가지는 사상이다.

φ의 **준층핵(presheaf kernel)**, φ의 **준층여핵(presheaf cokernel)**, φ의 **준층상(presheaf image)**을 각각 준층 $U \mapsto \ker(\varphi(U)), U \mapsto \mathrm{coker}(\varphi(U)), U \mapsto \mathrm{im}(\varphi(U))$로 정의한다.

만약 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$가 층 사상이면 φ의 준층핵은 층이지만 φ의 준층여핵과 준층상은 일반적으로 층이 아님을 기억해 두라.

동형사상의 국소성

Proposition 1.1. $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$가 위상공간 X 상에서의 층 사상이라 하자. 그 경우 φ가 동형사상일 필요충분조건은 모든 $P \in X$에 대하여 줄기 상에서의 유도된 함수 $\varphi_P : \mathscr{F}_P \to \mathscr{G}_P$가 동형사상인 것이다.

Proof. 만약 φ가 동형사상이면 각각의 φ_P가 동형사상임은 명백하다. 역으로 모든 $P \in X$에 대하여 φ_P가 동형사상이라 하자. φ가 동형사상임을 보이기 위해 모든 U에 대하여 $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$가 동형사상임을 보이면 충분하다. (그 경우 역사상 ψ를 $\psi(U) = \varphi(U)^{-1}$로 정의할 수 있기 때문이다.) 먼저 $\varphi(U)$가 단사임을 보이자. $s \in \mathscr{F}(U)$라 하고 $\varphi(s) \in \mathscr{G}(U)$가 0이라 하자. 그 경우 모든 점 $P \in U$에 대하여 $\varphi(s)$의 줄기 $\mathscr{G}_P$에서의 상 $\varphi(s)_P$가 0이 된다. 각각의 P에 대하여 φ_P가 단사이므로 각각의 $P \in U$에 대하여 $\mathscr{F}_P$에서 $s_P = 0$임을 연역할 수 있다. $s_P = 0$임은 s와 0이 $\mathscr{F}_P$에서 동일한 상을 가짐을 의미하며 이는 P의 열린 근방 W_P가 존재하며 $W_P \subseteq U$이고 $s|_{W_P} = 0$임을 의미한다. 이제 U는 P의 근방 W_P들에 의해 덮이며 따라서 층 성질 (3)에 의해 s는 U 상에서 0이다. 따라서 $\varphi(U)$는 단사이다.

동형사상의 국소성

다음으로 $\varphi(U)$가 전사임을 보이자. 단면 $t \in \mathscr{G}(U)$가 주어졌다 하자. 각각의 $P \in U$에 대하여 $t_P \in \mathscr{G}_P$가 그 P에서의 싹이라 하자. φ_P가 전사이므로 우리는 $\varphi_P(s_P) = t_P$를 만족시키는 $s_P \in \mathscr{F}_P$를 찾을 수 있다. s_P가 P의 근방 V_P 상에서의 단면 $s(P)$에 의해 표현된다 하자. 그 경우 $\varphi(s(P))$와 $t|_{V_P}$는 $\mathscr{G}(V_P)$의 두 원소이며 그 P에서의 싹이 일치한다. 따라서 필요하다면 V_P를 더 작은 P의 근방으로 대체하는 것으로 $\mathscr{G}(V_P)$에서 $\varphi(s(P)) = t|_{V_P}$라 가정할 수 있다. 이제 U는 열린집합 V_P들에 의해 덮이며 각각의 v_P 상에서 단면 $s(P) \in \mathscr{F}(V_P)$이다. 만약 P, Q가 두 점이면 $s(P)|_{V_P \cap V_Q}$와 $s(Q)|_{V_P \cap V_Q}$는 $\mathscr{F}(V_P \cap V_Q)$에 속한 두 단면이고 이들은 모두 φ에 의해 $t|_{V_P \cap V_Q}$로 대응된다. 따라서 위에서 증명된 φ의 단사성에 의해 이들은 같다. 그 경우 층 성질 (4)에 의해 단면 $s \in \mathscr{F}(U)$가 존재하여 각각의 P에 대하여 $s|_{V_P} = s(P)$를 만족시킨다. 마지막으로 우리는 $\varphi(s) = t$임을 확인해야 한다: $\varphi(s), t$는 $\mathscr{G}(U)$에 속한 두 단면이고 각각의 P에 대하여 $\varphi(s)|_{V_P} = t|_{V_P}$이며 따라서 층 성질 (3)을 $\varphi(s) - t$에 적용하면 $\varphi(s) = t$라 결론지을 수 있다. $\square$

연관된 층(associated sheaf)

Proposition-Definition 1.2. 준층 $\mathscr{F}$가 주어진 경우 층 $\mathscr{F}$와 사상 $\theta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$가 존재하여 임의의 층 $\mathscr{G}$와 임의의 사상 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$에 대하여 유일한 사상 $\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$가 존재하여 $\varphi = \psi \circ \theta$를 만족시키는 성질을 가진다. 이에 더해 쌍 $(\mathscr{F}^+, \theta)$는 유일한 동형사상 하에서 유일하다. $\mathscr{F}^+$는 준층 $\mathscr{F}$에 **연관된 층(associated sheaf)**이라 불린다.

Proof. 층 $\mathscr{F}^+$를 다음과 같이 구축할 것이다: 임의의 열린집합 U에 대하여 $\mathscr{F}^+(U)$가 다음을 만족시키는 U에서 $\bigcup_{P \in U} \mathscr{F}_P$($U$의 점 상에서의 $\mathscr{F}$의 줄기들의 합집합)로의 함수 s들의 집합이라 하자.

(1) 각각의 $P \in U$에 대하여 $s(P) \in \mathscr{F}_P$
(2) 각각의 $P \in U$에 대하여 P의 근방 $V \subset U$와 원소 $t \in \mathscr{F}(V)$가 존재하여 모든 $Q \in V$에 대하여 t의 Q에서의 싹 t_Q가 $s(Q)$와 일치한다.

이제 우리는 $\mathscr{F}^+$와 자연스러운 제한함수가 층을 형성하며 자연스러운 사상 $\theta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$가 존재하고 이것이 기술된 보편 성질을 가짐을 즉시 검증할 수 있다. $\mathscr{F}^+$의 유일성은 보편 성질의 형식적 결과이다. 임의의 점 P에 대하여 $\mathscr{F}_P = \mathscr{F}^+_P$임을 기억해 두라. 또한 만약 $\mathscr{F}$ 자신이 층이면 θ에 의해 $\mathscr{F}^+$와 $\mathscr{F}$가 동형임을 기억해 두라.

부분층(subsheaf), 몫층(quotient sheaf)

층 $\mathscr{F}$의 **부분층(subsheaf)**은 모든 열린집합 $U \subseteq X$에 대하여 $\mathscr{F}'(U)$가 $\mathscr{F}(U)$의 부분군이며 $\mathscr{F}'$의 제한함수들이 $\mathscr{F}$의 제한함수들에 의해 유도된 것들인 층 $\mathscr{F}'$이다. (그 경우 $\forall P$에 대하여 $\mathscr{F}'_P$가 $\mathscr{F}_P$의 부분군이다.)
또한 **몫층(quotient sheaf)** $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$를 준층 $U \mapsto \mathscr{F}(U)/\mathscr{F}'(U)$에 연관된 층으로 정의한다. (이 경우 $\forall P$에 대하여 $(\mathscr{F}/\mathscr{F}')_P = \mathscr{F}_P/\mathscr{F}'_P$이다.)
층 사상 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$의 **핵(kernel)** $\ker\varphi$는 φ의 준층핵(이는 $\mathscr{F}$의 부분층이다)이고 이것이 **단사(injective)**임은 $\ker\varphi = 0$인 것이다. (이는 모든 열린집합 U에서 $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$가 단사인 것과 동치이다.)
φ의 **상(image)** $\operatorname{im}\varphi$은 φ의 준층상에 연관된 층이며, 연관된 층의 보편성질에 의해 자연스러운 함수 $\operatorname{im}\varphi \to \mathscr{G}$가 존재한다. (사실 이러한 함수는 단사이고, 따라서 $\operatorname{im}\varphi$는 $\mathscr{G}$의 부분층과 동일시될 수 있다.)
φ가 **전사(surjective)**임을 $\operatorname{im}\varphi = \mathscr{G}$인 것으로 정의한다.
φ의 **여핵(cokernel)** $\operatorname{coker}\varphi$를 φ의 준층여핵에 연관된 층으로 정의한다.

완전열(exact sequence)

층과 사상의 열

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathscr{F}^{i} \xrightarrow{\varphi^{i}} \mathscr{F}^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

가 **완전열(exact sequence)**임은 각각의 단계에서 $\ker\varphi^i = \operatorname{im}\varphi^{i-1}$이 성립하는 것이다.

Exercise 1.8. 임의의 열린 부분집합 $U \subseteq X$에 대하여 X 상에서의 층의 범주에서 가환군의 범주로의 함자 $\Gamma(U, \cdot)$는 좌 완전 함자이다.
i.e. 만약 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}''$이 층의 완전열이면
$0 \to \Gamma(U, \mathscr{F}') \to \Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(U, \mathscr{F}'')$이 군의 완전열이다.

Proof. 전제조건의 완전열에 등장하는 층 사상을 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$라 부르자.
전제조건은 $\operatorname{im}(\varphi_1) = 0 = \ker(\varphi_2)$, $\operatorname{im}(\varphi_2) = \ker(\varphi_3)$이며, 따라서
$\operatorname{im}(\varphi_1)(U) = \operatorname{im}(\varphi_1(U)) = 0 = \ker(\varphi_2(U)), \operatorname{im}(\varphi_2)(U) = \ker(\varphi_3(U))$
이다. $\ker(\varphi_2(U)) = 0$이므로 $\operatorname{im}(\varphi_2(U)) \cong \Gamma(U, \mathscr{F}')$이고 φ_2의 준층상이 $\mathscr{F}'$과 동형이며 따라서 층이다. 이는 모든 U에 대하여 $\operatorname{im}(\varphi_2(U))$
$= \operatorname{im}(\varphi_2)(U)$임을 함의한다. 따라서 $\operatorname{im}(\varphi_2(U)) = \ker(\varphi_3(U))$이다.

직접상과 역상(direct and inverse image)

$f : X \to Y$가 위상공간 간의 연속 함수라 하자. X 상에서의 임의의 층 $\mathscr{F}$에 대하여 Y 상에서의 **직접상(direct image)**층 $f_*\mathscr{F}$를 임의의 열린집합 $V \subseteq Y$에 대하여 $(f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V))$로 정의한다. Y 상에서의 임의의 층 $\mathscr{G}$에 대하여 X 상에서의 **역상(inverse image)**층 $f^{-1}\mathscr{G}$를 준층 $U \mapsto \lim_{V \supseteq f(U)} \mathscr{G}(V)$ (U는 X에서의 열린집합, 극한은 $f(U)$를 포함하는 Y의 모든 열린집합에 대하여 취함) 에 연관된 층으로 정의한다. $f^{-1}\mathscr{G}$를 나중에 환 달린 공간 사상에 대하여 정의될 층 $f^*\mathscr{G}$와 혼동하지 말라. (§5)

만약 Z가 X의 부분집합이며 유도 위상을 가지는 위상 부분공간으로 간주되고 $i : Z \to X$가 포함함수이며 $\mathscr{F}$가 X 상에서의 층이면 $i^{-1}\mathscr{F}$를 $\mathscr{F}$의 Z로의 **제한(restriction)**이라 하고 이를 종종 $\mathscr{F}|_Z$로 표기한다. $\mathscr{F}|_Z$의 임의의 점 $P \in Z$에서의 줄기가 $\mathscr{F}_P$임을 기억해 두라.

스펙트럼(spectrum)

우리는 집합으로서 Spec A를 A의 모든 소 아이디얼들의 집합으로 정의할 것이다. 만약 $\mathfrak{a}$가 A의 임의의 아이디얼이면 부분집합 $V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec} A$를 $\mathfrak{a}$를 포함하는 모든 소 아이디얼들의 집합으로 정의할 것이다.

Lemma 2.1. (a) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$가 A의 아이디얼이면 $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$이다.
(b) $\{\mathfrak{a}_i\}$가 A의 아이디얼들의 임의의 집합이면 $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$이다.
(c) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$가 아이디얼이면 $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ iff $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$이다.

Proof. (a) 만약 $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$이며 $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$이면 자명하게 $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$이다. 역으로 만약 $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$이며 일반성을 잃지 않고 $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{b}$라 하면 $b \in \mathfrak{b}$가 존재하여 $b \notin \mathfrak{p}$이다. 이제 임의의 $a \in \mathfrak{a}$에 대하여 $ab \in \mathfrak{p}$이며 따라서 $\mathfrak{p}$가 소 아이디얼이므로 $a \in \mathfrak{p}$가 성립해야 한다. 그러므로 $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$이다.
(b) $\sum \mathfrak{a}_i$는 모든 $\mathfrak{a}_i$들을 포함하는 최소 아이디얼이므로 $\mathfrak{p}$가 $\sum \mathfrak{a}_i$를 포함할 필요충분조건은 $\mathfrak{p}$가 각각의 $\mathfrak{a}_i$를 포함하는 것이다.
(c) $\mathfrak{a}$의 근기는 $\mathfrak{a}$를 포함하는 모든 소 아이디얼들의 집합의 교집합이다. 따라서 $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$ iff $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$이다.

스펙트럼(spectrum)

$V(\mathfrak{a})$ 형태의 부분집합들을 닫힌 부분집합으로 취하는 것으로 $\operatorname{Spec} A$에 위상을 부여할 수 있다. $f \in A$에 대하여 $V((f))$의 여집합을 $D(f)$라 한다.
이제 $\operatorname{Spec} A$에서의 환의 층 $\mathcal{O}$를 정의하자. 각각의 소 아이디얼 $\mathfrak{p} \subseteq A$에 대하여 $A_{\mathfrak{p}}$가 A의 $\mathfrak{p}$에서의 국소화라 하자. 열린집합 $U \subseteq \operatorname{Spec} A$에 대하여 $\mathcal{O}(U)$를 국소적으로 A의 원소들의 몫이며 각각의 $\mathfrak{p}$에 대하여 $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$를 만족시키는 함수 $s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$들의 집합으로 정의하자: 엄밀성을 위해 우리는 각각의 $\mathfrak{p} \in U$에 대하여 $\mathfrak{p}$의 근방 $V \subseteq U$와 원소 $a, f \in A$가 존재하여 각각의 $\mathfrak{q} \in V$에 대하여 $f \notin \mathfrak{q}$이며 $A_{\mathfrak{q}}$에서 $s(\mathfrak{q}) = a/f$를 만족시켜야 한다고 요구할 것이다.
이제 이러한 함수들의 합과 곱이 다시 이러한 함수임은 명백하며 각각의 $A_{\mathfrak{p}}$에서 1을 주는 원소 1은 항등원이다. 따라서 $\mathcal{O}(U)$는 단위 가환환이다.
만약 $V \subseteq U$가 두 열린집합이면 자연스러운 제한함수 $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$는 환 준동형사상이다. 그 경우 $\mathcal{O}$가 준층임은 명백하다. 마지막으로 $\mathcal{O}$의 정의의 국소적 본질에 의해 $\mathcal{O}$는 층이다.
위상공간 $\operatorname{Spec} A$와 층 $\mathcal{O}$의 쌍을 A의 **스펙트럼(spectrum)**이라 한다.

스펙트럼(spectrum)

Proposition 2.2. A가 환이며 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$가 그 스펙트럼인 경우,
(a) 임의의 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$에 대하여 층 $\mathcal{O}$의 줄기 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$는 국소환 $A_{\mathfrak{p}}$와 동형이다.
(b) 임의의 원소 $f \in A$에 대하여 환 $\mathcal{O}(D(f))$는 국소화 환 A_f와 동형이다.
(c) 특히 $\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}) \cong A$이다.

환 달린 공간(ringed space)

환 달린 공간(ringed space)은 위상공간 X와 X 상에서의 환의 층 $\mathcal{O}_X$로 구성된 쌍 $(X, \mathcal{O}_X)$이다. $(X, \mathcal{O}_X)$에서 $(Y, \mathcal{O}_Y)$로의 환 달린 공간 **사상 (morphism)**은 연속 함수 $f : X \to Y$와 Y 상에서의 환의 층 사상 $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$의 쌍 $(f, f^\#)$이다. 환 달린 공간 $(X, \mathcal{O}_X)$가 **국소환 달린 공간(locally ringed space)**이라는 것의 정의는 각각의 점 $P \in X$에 대하여 줄기 $\mathcal{O}_{X,P}$가 국소환인 것이다. 국소환 달린 공간 **사상 (morphism)**은 각각의 점 $P \in X$에 대하여 국소환들의 유도된 함수 (아래를 참조하라) $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$가 국소환의 **국소준동형사상 (local homomorphism)**이도록 하는 환 달린 공간 사상 $(f, f^\#)$이다. 이러한 마지막 조건을 설명하겠다. 먼저 주어진 점 $P \in X$에 대하여 층 사상 $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$는 Y에서의 모든 열린집합 V에 대하여 환 준동형사상 $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$를 유도한다. V가 $f(P)$의 모든 열린 근방을 범위로 가지는 경우 $f^{-1}(V)$는 P의 모든 근방들의 집합의 부분집합에 속한다.

환 달린 공간(ringed space)

직접극한을 취하면 다음 함수를 얻는다.

$$\mathcal{O}_{Y,f(P)} = \varinjlim_{V} \mathcal{O}_Y(V) \to \varinjlim_{V} \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$$

후자의 극한은 줄기 $\mathcal{O}_{X,P}$로 대응된다. 그러므로 우리는 준동형사상 $f_P^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$를 유도했다. 우리는 이것이 국소준동형사상이어야 한다고 요구한다: 만약 A와 B가 각각 극대 아이디얼 $\mathfrak{m}_A$와 $\mathfrak{m}_B$를 가지는 국소환이면 준동형사상 $\varphi : A \to B$가 **국소준동형사상(local homomorphism)**이라는 것의 정의는 $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$가 성립하는 것이다. 국소환 달린 공간 **동형사상(isomorphism)**은 양쪽 역사상을 가지는 사상이다. 그러므로 사상 $(f, f^{\#})$가 동형사상일 필요충분조건은 f가 기반 위상공간 간의 위상동형사상이며 $f^{\#}$가 층 동형사상인 것이다.

환 달린 공간(ringed space)

Proposition 2.3.
(a) 만약 A가 환이면 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$는 국소환 달린 공간이다.
(b) 만약 $\varphi : A \to B$가 환 준동형사상이면 φ는 다음과 같은 자연스러운 국소환 달린 공간 사상을 유도한다.

$$(f, f^{\#}) : (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$$

(c) 만약 A와 B가 환이면 $\operatorname{Spec} B$에서 $\operatorname{Spec} A$로의 임의의 국소환 달린 공간 사상은 (b)에서와 같이 환 준동형사상 $\varphi : A \to B$에 의해 유도된다.

스킴(scheme)

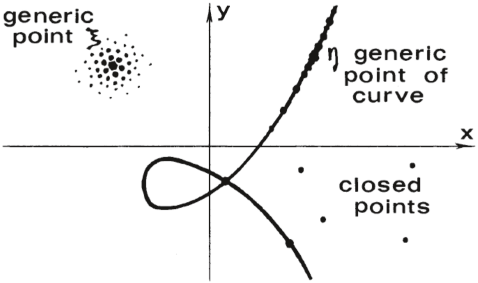
아핀 스킴(affine scheme)은 (국소환 달린 공간으로서) 어떠한 환의 스펙트럼과 동형인 국소환 달린 공간 $(X, \mathcal{O}_X)$이다. **스킴(scheme)**은 모든 점에 대하여 열린 근방 U가 존재하여 위상공간 U와 제한층 $\mathcal{O}_X|_U$의 쌍이 아핀 스킴이도록 하는 국소환 달린 공간 $(X, \mathcal{O}_X)$이다. 우리는 X를 스킴 $(X, \mathcal{O}_X)$의 **기반위상공간(underlying topological space)**이라 할 것이며 $\mathcal{O}_X$를 그 **구조층(structure sheaf)**이라 할 것이다.
스킴 **사상(morphism)**은 국소환 달린 공간으로서의 사상이다. **동형사상 (isomorphism)**은 양쪽 역사상을 가지는 사상이다.
X가 **Noether(Noetherian)** 스킴임은 유한 개 Noether 환 A_i들에 대한 아핀 열린 부분집합 $\operatorname{Spec} A_i$들로 덮일 수 있는 것이다.

아핀 공간(affine space)

Example 2.3.3. 만약 k가 체이면 k 상에서의 **아핀 직선(affine line)** $\mathbb{A}^1_k$을 $\operatorname{Spec} k[x]$로 정의한다. 이는 0 아이디얼에 대응하는 점 ξ를 가지며 그 폐포는 공간 전체이다. 이는 **일반점(generic point)**이라 불린다. $k[x]$의 극대 아이디얼에 대응하는 다른 점들은 모두 닫힌점이다. 이들은 x에 대한 상수가 아닌 모닉 기약다항식들과 일대일 대응한다. 특히 만약 k가 대수적으로 닫혀 있으면 $\mathbb{A}^1_k$의 닫힌점들은 k의 원소들과 일대일 대응한다.

아핀 공간(affine space)

Example 2.3.4. 대수적으로 닫힌 체 k에 대하여 k 상에서의 **아핀 평면 (affine plane)** $\mathbb{A}_k^2 = \mathrm{Spec}[x, y]$를 고려하자. 닫힌점 $(x - a, y - b)$들은 I 장의 대수다양체 $\mathbb{A}^2$의 점 (a, b)와 위상동형적으로 대응된다.
$(0) \subseteq k[x, y]$에 대응하는 **일반점(generic point)** ξ의 폐포는 공간 전체이다. 또한 각각의 기약다항식 $f(x, y)$에 대하여 곡선 $f(x, y) = 0$의 **일반점(generic point)** η가 존재하여 그 폐포가 η 및 $f(a, b) = 0$인 모든 닫힌점 (a, b)들로 구성되도록 한다.



모듈의 층(sheaf of modules)

$(X, \mathscr{O}_X)$가 환 달린 공간이라 하자. (§2를 참조하라.) $\mathscr{O}_X$-**모듈의 층(sheaf of $\mathscr{O}_X$-modules)** (또는 간단히 $\mathscr{O}_X$-**모듈($\mathscr{O}_X$-module)**)은 X에서의 층 $\mathscr{F}$ 중 각각의 열린집합 $U \subseteq X$에 대하여 군 $\mathscr{F}(U)$가 $\mathscr{O}_X(U)$-모듈이고 열린집합들의 각각의 포함 관계 $V \subseteq U$에 대하여 제한 준동형사상 $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$가 환 준동형사상 $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(V)$를 통해 모듈 구조와 호환되는 것이다. $\mathscr{O}_X$-모듈의 층의 **사상(morphism)** $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$는 층의 사상 중 각각의 열린집합 $U \subseteq X$에 대하여 사상 $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$가 $\mathscr{O}_X(U)$-모듈 준동형사상이도록 하는 것들이다.
$\mathscr{O}_X$-모듈 사상의 핵, 여핵, 상이 다시 $\mathscr{O}_X$-모듈임을 기억해 두라. 만약 $\mathscr{F}'$이 $\mathscr{O}_X$-모듈 $\mathscr{F}$의 $\mathscr{O}_X$-모듈의 부분층이면 몫층 $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$이 $\mathscr{O}_X$-모듈이다. $\mathscr{O}_X$-모듈들의 임의의 직접합, 직접곱, 직접극한, 역극한이 $\mathscr{O}_X$-모듈이다. 만약 $\mathscr{F}$와 $\mathscr{G}$가 두 $\mathscr{O}_X$-모듈이면 $\mathscr{F}$에서 $\mathscr{G}$로의 사상들의 군을 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, 또는 혼동의 여지가 없다면 $\mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ 또는 $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$로 표기한다. $\mathscr{O}_X$-모듈과 사상들의 열이 **완전(exact)**열임은 가환군의 층의 열로서 완전열인 것이다.

모듈의 층(sheaf of modules)

만약 U가 X의 열린 부분집합이며 $\mathscr{F}$가 $\mathcal{O}_X$-모듈이면 $\mathscr{F}|_U$가 $\mathcal{O}_X|_U$-모듈이다. 만약 $\mathscr{F}$와 $\mathscr{G}$가 두 $\mathcal{O}_X$-모듈이면 다음의 준층

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$$

가 층이며 이를 **층 $\mathscr{H}$om(sheaf $\mathscr{H}$om)**(Ex. 1.15)이라 하고 $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$로 표기한다. 이는 또한 $\mathcal{O}_X$-모듈이다.
두 $\mathcal{O}_X$-모듈의 **텐서곱(tensor product)** $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G}$를 준층 $U \mapsto \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathscr{G}(U)$에 연관된 층으로 정의한다. 우리는 종종 $\mathcal{O}_X$가 있는 것으로 간주하고 이를 간단히 $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$로 표기할 것이다.
$\mathcal{O}_X$-모듈 $\mathscr{F}$가 **자유(free)**라는 것의 정의는 $\mathcal{O}_X$의 사본들의 직접합과 동형인 것이다. $\mathscr{F}$가 **국소자유(locally free)**라는 것의 정의는 $\mathscr{F}|_U$가 자유 $\mathcal{O}_X|_U$-모듈이도록 하는 열린집합 U들로 X를 덮을 수 있는 것이다. 이 경우 이러한 열린집합 상에서 $\mathscr{F}$의 **계수(rank)**는 필요한 구조층의 사본의 (유한 또는 무한할 수 있는) 개수이다. 만약 X가 연결이면 국소자유층의 계수는 어디서나 동일하다. 계수 1의 국소자유층은 **가역층 (invertible sheaf)**이라고도 불린다.

모듈의 층(sheaf of modules)

아이디얼의 층(sheaf of ideals)은 $\mathscr{O}_X$의 부분층인 모듈의 층이다.
$f:(X,\mathscr{O}_X)\to(Y,\mathscr{O}_Y)$가 환 달린 공간 사상이라 하자. (§2를 참조하라.)
만약 $\mathscr{F}$가 $\mathscr{O}_X$-모듈이면 $f_*\mathscr{F}$는 $f_*\mathscr{O}_X$-모듈이다. Y에서의 환의 층 사상 $f^\#:\mathscr{O}_Y\to f_*\mathscr{O}_X$가 존재하므로 이는 $f_*\mathscr{F}$에 자연스러운 $\mathscr{O}_Y$-모듈 구조를 준다. 이를 $\mathscr{F}$의 사상 f 하에서의 **직접상(direct image)**이라 부른다.
이제 $\mathscr{G}$가 $\mathscr{O}_Y$-모듈의 층이라 하자. 그 경우 $f^{-1}\mathscr{G}$는 $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-모듈이다.
f^{-1}의 수반 성질에 의해 X에서의 환의 층 사상 $f^{-1}\mathscr{O}_Y\to\mathscr{O}_X$가 존재한다. 따라서 $\mathscr{G}$의 f 하에서의 **역상(inverse image)**을 다음과 같이 $\mathscr{O}_X$-모듈 $f^*\mathscr{G}=f^{-1}\mathscr{G}\otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y}\mathscr{O}_X$로 정의할 수 있다. 특히 임의의 $\mathscr{O}_X$-모듈 $\mathscr{F}$와 임의의 $\mathscr{O}_Y$-모듈 $\mathscr{G}$에 대하여 다음과 같은 자연스러운 군 동형사상이 존재한다.

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G},\mathscr{F})\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G},f_*\mathscr{F})$$

모듈에 연관된 층(sheaf associated to a module)

A가 환이며 M이 A-모듈이라 하자. $\operatorname{Spec} A$ 상에서의 **M에 연관된 층 (sheaf associated to M)** $\tilde{M}$을 다음과 같이 정의한다:
각각의 소 아이디얼 $\mathfrak{p} \subseteq A$에 대하여 $M_{\mathfrak{p}}$가 M의 $\mathfrak{p}$에서의 국소화라 하자.
임의의 열린집합 $U \subseteq \operatorname{Spec} A$에 대하여 군 $\tilde{M}(U)$를 함수 $s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}}$들 중 각각의 $\mathfrak{p} \in U$에 대하여 $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$를 만족시키며 국소적으로 $m \in M$과 $f \in A$의 비 m/f로 표현 가능한 것들의 집합으로 정의하자. 엄밀하게 표현하면 각각의 $\mathfrak{p} \in U$에 대하여 $\mathfrak{p}$의 U에서의 근방 V와 원소 $m \in M, f \in A$가 존재하여 각각의 $\mathfrak{q} \in V$에 대하여 $f \notin \mathfrak{q}$이며 $M_{\mathfrak{q}}$에서 $s(\mathfrak{q}) = m/f$가 성립한다는 것이다. 자명한 제한함수들을 부여하면 $\tilde{M}$이 층이 된다.

모듈에 연관된 층(sheaf associated to a module)

Proposition 5.1. A가 환이고 M이 A-모듈이며 $\tilde{M}$이 M에 연관된 $X = \operatorname{Spec} A$ 상에서의 층이라 하자. 그 경우 다음이 성립한다:

(a) $\tilde{M}$은 $\mathcal{O}_X$-모듈이다.
(b) $\forall \mathfrak{p} \in X$에 대하여 층 $\tilde{M}$의 줄기 $(\tilde{M})_{\mathfrak{p}}$는 국소화 $M_{\mathfrak{p}}$와 동형이다.
(c) $\forall f \in A$에 대하여 A_f-모듈 $\tilde{M}(D(f))$는 국소화 M_f와 동형이다.
(d) 특히 $\Gamma(X, \tilde{M}) = M$이다.

Proposition 5.2. A가 환이며 $X = \operatorname{Spec} A$라 하자. 또한 $A \to B$가 환 준동형사상이며 $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$가 스펙트럼 간의 대응하는 사상이라 하자. 그 경우 다음이 성립한다:

(a) 함수 $M \mapsto \tilde{M}$은 A-모듈의 범주에서 $\mathcal{O}_X$-모듈의 범주로의 완전 충실충만한 함자를 제공한다.
(b) 만약 M과 N이 두 A-모듈이면 $(M \otimes_A N)^{\sim} \cong \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}$이다.
(c) 만약 $\{M_i\}$가 A-모듈들의 임의의 족이면 $(\bigoplus M_i)^{\sim} \cong \bigoplus \tilde{M}_i$이다.
(d) 임의의 B-모듈 N에 대하여 $f_*(\tilde{N}) \cong ({}_A N)^{\sim}$이다.
(여기에서 ${}_A N$은 N이 A-모듈로 간주됨을 의미한다.)
(e) 임의의 A-모듈 M에 대하여 $f^*(\tilde{M}) \cong (M \otimes_A B)^{\sim}$이다.

연접층(coherent sheaf)

$(X, \mathscr{O}_X)$가 스킴이라 하자. $\mathscr{O}_X$-모듈의 층 $\mathscr{F}$가 **준연접층(quasi-coherent sheaf)**이라는 것의 정의는 X가 다음을 만족시키는 아핀 열린집합 $U_i = \operatorname{Spec} A_i$들로 덮일 수 있는 것이다: 각각의 i에 대하여 A_i-모듈 M_i가 존재하여 $\mathscr{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$를 만족시킨다. $\mathscr{F}$가 **연접(coherent)**층이라는 것을 추가적으로 각각의 M_i가 유한생성 A_i-모듈이도록 선택될 수 있는 것으로 정의한다.

Proposition 5.4. X가 스킴이라 하자. 그 경우 $\mathscr{O}_X$-모듈 $\mathscr{F}$가 준연접일 필요충분조건은 X의 모든 아핀 열린 부분집합 $U = \operatorname{Spec} A$에 대하여 A-모듈 M이 존재하여 $\mathscr{F}|_U = \tilde{M}$을 만족시키는 것이다. 만약 X가 Noether이면 $\mathscr{F}$가 연접층일 필요충분조건은 유한생성 A-모듈 M에 대한 동일한 것이 성립하는 것이다.

Corollary 5.5. A가 환이며 $X = \operatorname{Spec} A$라 하자. 함자 $M \mapsto \tilde{M}$은 A-모듈의 범주와 준연접 $\mathscr{O}_X$-모듈의 범주 간의 동치를 제공한다. 그 역은 함자 $\mathscr{F} \mapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$이다. 만약 A가 Noether이면 동일한 함자가 유한생성 A-모듈의 범주와 연접 $\mathscr{O}_X$-모듈의 범주 간의 동치를 제공한다.

복합체(complex)

Abel 범주 $\mathfrak{A}$에서의 **복합체(complex)** $A^\bullet$은 $i \in \mathbb{Z}$에 대한 대상 A^i들과 $\forall i$ $d^{i+1} \circ d^i = 0$을 만족시키는 사상 $d^i : A^i \to A^{i+1}$들의 족이다.
복합체 사상(complex morphism) $f : A^\bullet \to B^\bullet$은 쌍대경계사상 d^i들과 교환 가능한 각각의 i에 대한 사상 $f^i : A^i \to B^i$들로 구성된다.
복합체 $A^\bullet$의 i번째 **코호몰로지 대상(cohomology object)** $h^i(A^\bullet)$은 $\ker d^i / \operatorname{im} d^{i-1}$로 정의된다. 만약 $f : A^\bullet \to B^\bullet$가 복합체 사상이면 f는 자연스러운 사상 $h^i(f) : h^i(A^\bullet) \to h^i(B^\bullet)$를 유도한다. 만약 $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$이 복합체의 짧은 완전열이면 자연스러운 사상 $\delta^i : h^i(C^\bullet) \to h^{i+1}(A^\bullet)$이 존재하여 다음의 긴 완전열을 제공한다.

$$\cdots \to h^i(A^\bullet) \to h^i(B^\bullet) \to h^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\bullet) \to \cdots$$

사상 $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$가 **호모토픽(homotopic)**함은 $f \sim g$로 표기하며 $\forall i$에 대하여 $k^i : A^i \to B^{i-1}$들의 족이 존재하여 $f - g = dk + kd$를 만족시키는 것이다. 이 경우 f, g는 $\forall i$에 대하여 코호몰로지 대상에서 *동일한* 사상 $h^i(A^\bullet) \to h^i(B^\bullet)$을 유도한다.

좌/우 완전 함자(left/right exact functor)

Abel 범주 간의 공변 함자 $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$가 **덧셈적(additive)**이라는 것의 정의는 $\mathfrak{A}$에서의 임의의 두 대상 A, A'에 대하여 유도된 함수 $\mathrm{Hom}(A, A') \to \mathrm{Hom}(FA, FA')$이 가환군의 준동형사상인 것이다. F가 **좌 완전(left exact)**임은 덧셈적이며 $\mathfrak{A}$에서의 모든 짧은 완전열

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

에 대하여 다음 열이 $\mathfrak{B}$에서의 완전열인 것이다.

$$0 \to FA' \to FA \to FA''$$

좌측 대신 우측에 0을 쓸 수 있다면 F가 **우 완전(right exact)**이라 한다. 만약 좌우 양쪽에서 완전하면 **완전(exact)**이라 한다. 반변 함자에 대해서도 마찬가지로 정의할 수 있다.

단사 분해(injective resolution)

$\mathfrak{A}$의 대상 I가 **단사(injective)**임은 함자 $\mathrm{Hom}(\cdot, I)$가 완전 함자인 것이다. $\mathfrak{A}$의 대상 A의 **단사 분해(injective resolution)**는 차수 $i \geq 0$에서 정의된 복합체 $I^\bullet$와 사상 $A \to I^0$로 다음을 만족시키는 것이다: 각각의 i에 대하여 I^i가 $\mathfrak{A}$에서의 단사 대상이며 다음의 열이 완전열이다.

$$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \to I^1 \to \cdots$$

만약 $\mathfrak{A}$의 모든 대상이 $\mathfrak{A}$의 단사 대상의 부분대상과 동형이면 $\mathfrak{A}$가 **충분한 단사 대상을 가졌다(has enough injectives)**고 한다. (e.g. 환의 범주, $\mathcal{O}_X$-모듈의 범주 등) 이 경우 모든 대상이 단사 분해를 가진다.
$\mathfrak{A}$가 충분한 단사 대상을 가지는 Abel 범주이며 $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$가 공변 좌완전 함자인 경우 F의 **우 유도 함자(right derived functor)** $R^i F, F \geq 0$을 다음과 같이 구축한다: $\mathfrak{A}$의 각각의 대상 A에 대하여 A의 단사 분해 $I^\bullet$를 하나씩 선택하자. 그 경우 $R^i F(A) = h^i(F(I^\bullet))$로 정의한다.

유도 함자(derived functor)

Theorem 1.1A.
(a) $\forall i \geq 0$에 대하여 R^iF는 덧셈적 함자 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$이며 단사 분해의 선택에 (자연동형 하에서) 독립적이다.
(b) 자연동형사상 $F \cong R^0F$가 존재한다.
(c) $\forall$ 완전열 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$과 $\forall i \geq 0$에 대하여 자연스러운 사상 $\delta^i : R^iF(A'') \to R^{i+1}F(A')$이 존재하여 다음이 완전열이다:

$$\cdots \to R^iF(A') \to R^iF(A) \to R^iF(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(A') \to R^{i+1}F(A) \to \cdots$$

(d) (c)의 완전열에서 다른 완전열 $0 \to B' \to B \to B''$로의 사상이 주어진 경우 δ들은 다음의 가환 도표를 만족시킨다.

$$\begin{array}{ccc} R^iF(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^iF(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(B') \end{array}$$

(e) $\mathfrak{A}$의 각각의 단사 대상 I와 각각의 $i > 0$에 대하여 $R^iF(I) = 0$이다.

위와 같은 $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$에 대하여 $\mathfrak{A}$의 대상 J가 F에 대하여 **비순환 (acyclic)**이라는 것의 정의는 모든 $i > 0$에 대하여 $R^i F(J) = 0$인 것이다.

Proposition 1.2A. 다음과 같은 완전열이 존재한다 하자.

$$0 \to A \to J^0 \to J^1 \to \cdots$$

여기에서 각각의 J^i가 F에 대하여 비순환이라 하자. (이 경우 $J^\bullet$가 A의 F-**비순환 분해(**F**-acyclic resolution)**라 한다.) 그 경우 각각의 $i \geq 0$에 대하여 자연동형사상 $R^i F(A) \cong h^i(F(J^\bullet))$가 존재한다.

δ-함자(δ-functor)

$\mathfrak{A}$와 $\mathfrak{B}$가 Abel 범주라 하자. $\mathfrak{A}$에서 $\mathfrak{B}$로의 **(공변)** δ**-함자((covariant)** δ**-functor)**는 함자들의 족 $T = (T^i)_{i\geq 0}$에 각각의 짧은 완전열 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$에 대한 사상 $\delta^i : T^i(A'') \to T^{i+1}(A')$들의 족을 부여한 것으로 다음을 만족시키는 것이다:

(1) 위와 같은 $\forall$ 짧은 완전열에 대하여 다음의 긴 완전열이 존재한다.

$$0 \to T^0(A') \to T^0(A) \to T^0(A'') \xrightarrow{\delta^0} T^1(A') \to \cdots$$

$$\cdots \to T^i(A) \to T^i(A'') \xrightarrow{\delta^i} T^{i+1}(A') \to T^{i+1}(A) \to \cdots$$

(2) 위와 같은 짧은 완전열에서 다른 $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$으로의 임의의 사상에 대하여 δ들은 다음의 가환 도표를 만족시킨다.

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(B') \end{array}$$

δ-함자(δ-functor)

δ-함자 $T = (T^i) : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$가 **보편(universal)**이라는 것의 정의는 임의의 다른 δ-함자 $T' = (T'^i) : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$와 함자 간의 임의의 사상 $f^0 : T^0 \to T'^0$가 주어진 경우 (주어진 f^0로 시작하는) 각각의 $i \geq 0$에 대한 유일한 사상들의 열 $f^i : T^i \to T'^i$가 존재하여 각각의 짧은 완전열에 대하여 δ^i와 교환 가능한 것이다.
덧셈적 함자 $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$가 **삭제 가능(effaceable)**이라는 것의 정의는 $\mathfrak{A}$의 각각의 대상 A에 대하여 단사 사상 $u : A \to M$이 존재하여 어떠한 M에 대하여 $F(u) = 0$을 만족시키는 것이다. 이것이 **쌍대 삭제 가능 (coeffaceable)**이라는 것의 정의는 각각의 A에 대하여 전사 사상 $u : P \to A$가 존재하여 $F(u) = 0$을 만족시키는 것이다.

Theorem 1.3A. $T = (T^i)_{i \geq 0}$이 $\mathfrak{A}$에서 $\mathfrak{B}$로의 공변 δ-함자라 하자. 만약 각각의 $i > 0$에 대하여 T^i가 삭제 가능하면 T는 보편이다.

유도 함자의 보편성

Corollary 1.4. $\mathfrak{A}$가 충분한 단사 대상을 가진다 하자. 그 경우 임의의 좌 완전 함자 $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$에 대하여 유도 함자 $(R^i F)_{i \geq 0}$은 $F \cong R^0 F$인 보편 δ-함자를 형성한다. 역으로 만약 $T = (T^i)_{i \geq 0}$이 임의의 보편 δ-함자이면 T^0가 좌 완전이며 각각의 $i \geq 0$에 대하여 T^i가 $R^i T^0$와 동형이다.

Proof. 만약 F가 좌 완전 함자이면 (1.1A)에 의해 $(R^i F)_{i \geq 0}$은 δ-함자를 형성한다. 이에 더해 임의의 대상 A에 대하여 $u : A \to I$가 A에서 단사 대상으로의 단사 사상이라 하자. 그 경우 (1.1A)에 의해 각각의 $i > 0$에 대하여 $R^i F(I) = 0$이며 따라서 $R^i F(u) = 0$이다. 그러므로 각각의 $i > 0$에 대하여 $R^i F$가 삭제 가능하다. $(R^i F)$가 보편임이 정리에서 따라온다. 반면에 보편 δ-함자 T가 주어진 경우 δ-함자의 정의에 의해 T^0가 좌 완전 함자이다. $\mathfrak{A}$가 충분한 단사 대상을 가지므로 유도 함자 $R^i T^0$가 존재한다. 우리는 위에서 $(R^i T^0)$가 다른 보편 δ-함자임을 보였다. $R^0 T^0 = T^0$가 성립하며, 정의에 의해 임의의 F에 대하여 $T^0 = F$를 만족시키는 보편 δ-함자 T는 (동형 하에서) 많아야 하나 존재할 수 있으므로 $R^i T^0 \cong T^i$이다. □

유도 함자 코호몰로지(derived functor cohomology)

X가 위상공간이라 하자. $\Gamma(X, \cdot)$가 $\mathfrak{Ab}(X)$에서 $\mathfrak{Ab}$로의 대역적 단면 함자라 하자. **코호몰로지 함자(cohomology functor)** $H^i(X, \cdot)$들을 $\Gamma(X, \cdot)$의 우 유도 함자들로 정의한다. 임의의 층 $\mathscr{F}$에 대하여 군 $H^i(X, \mathscr{F})$들은 $\mathscr{F}$의 **코호몰로지 군(cohomology group)**들이다. X와 $\mathscr{F}$가 추가적인 구조를 가지더라도 (e.g. X가 스킴이며 $\mathscr{F}$가 준연접층) 항상 $\mathscr{F}$를 단순히 기반 위상공간 X에서의 가환군의 층으로 간주하여 코호몰로지를 이러한 관점에서 취한다.

위상공간 X에서의 층 $\mathscr{F}$가 **연성(flasque)**이라는 것의 정의는 열린집합의 임의의 포함 관계 $V \subseteq U$에 대하여 제한함수 $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$가 전사인 것이다. 특히 모든 단사 $\mathscr{O}_X$-모듈이 연성층이며 (Lemma 2.4) 연성층의 모든 차수의 코호몰로지가 0이다. (Proposition 2.5) i.e. 연성층은 함자 Γ에 대하여 비순환적이며, 우리는 연성 분해를 통해 코호몰로지를 계산할 수 있다.

연성 분해(flasque resolution)

Proposition 2.6. $(X, \mathcal{O}_X)$가 환 달린 공간이라 하자. 그 경우 함자 $\Gamma(X, \cdot) : \mathfrak{Mod}(X) \to \mathfrak{Ab}(X)$의 유도 함자는 코호몰로지 함자 $H^i(X, \cdot)$와 일치한다.

Proof. $\Gamma(X, \cdot)$를 $\mathfrak{Mod}(X)$에서 $\mathfrak{Ab}$로의 함자로 간주하고 범주 $\mathfrak{Mod}(X)$에서의 단사 분해를 취하는 것으로 그 유도 함자를 계산한다. 그러나 (2.4)에 의해 임의의 단사층은 연성층이며 (2.4) 연성층이 비순환이므로 이러한 분해는 통상적인 코호몰로지 함자를 준다. (1.2A) □

Remark 2.6.1. $(X, \mathcal{O}_X)$가 환 달린 공간이고 $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$라 하자. 그 경우 임의의 $\mathcal{O}_X$-모듈의 층 $\mathscr{F}$에 대하여 $\Gamma(X, \mathscr{F})$는 자연스러운 A-모듈 구조를 가진다. 특히 범주 $\mathfrak{Mod}(X)$에서의 분해를 이용하여 코호몰로지를 계산할 수 있으므로 $\mathscr{F}$의 모든 코호몰로지 군은 자연스러운 A-모듈 구조를 가진다; 연관된 완전열은 A-모듈의 열이다; 이와 유사한 다른 것들도 성립한다. 그러므로 예를 들어 만약 X가 어떠한 환 B에 대한 $\operatorname{Spec} B$ 상에서의 스킴이면 임의의 $\mathcal{O}_X$-모듈 $\mathscr{F}$의 코호몰로지 군은 자연스러운 B-모듈 구조를 가진다.

Riemann-Roch

곡선의 종수 $g = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$로 정의한다.
곡선 X에서의 **인자(divisor)**는 $D = \sum n_i P_i$ $(n_i \in \mathbb{Z})$이며, $\deg D = \sum n_i$이다. 두 인자가 **선형 동치(linearly equivalent)**임은 이들의 차가 유리함수의 인자인 것이다. 인자 D의 선형 동치류는 가역층 $\mathscr{L}(D)$와 1-1 대응한다.
X에서의 인자 $D = \sum n_i P_i$가 **유효(effective)**인자임은 모든 $n_i \geq 0$인 것이다. 주어진 인자 D와 선형 동치인 모든 유효인자들의 집합은 **완비선형계(complete linear system)**라 불리며 $|D|$로 표기된다. $|D|$의 원소들은 다음 공간과 일대일 대응한다.

$$(H^0(X, \mathscr{L}(D)) - \{0\})/k^*$$

그러므로 $|D|$는 사영공간의 닫힌점들의 집합의 구조를 가진다. (II, 7.7)
$\dim_k H^0(X, \mathscr{L}(D))$를 $l(D)$로 표기한다.
이제 다음이 성립한다:

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

Riemann-Roch

Proof. 인자 $K - D$는 가역층 $\omega_X \otimes \mathscr{L}\check{(}D)$에 대응한다. X가 사영적이므로 (II, 6.7) Serre 쌍대성(III, 7.12.1)을 적용하여 벡터 공간 $H^0(X, \omega_X \otimes \mathscr{L}\check{(}D))$가 $H^1(X, \mathscr{L}(D))$의 쌍대라 결론지을 수 있다. 그러므로 임의의 D에 대하여 다음이 성립함을 보여야 한다.

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \deg D + 1 - g$$

여기에서 연접층 $\mathscr{F}$의 Euler 지표 $\chi(\mathscr{F})$는 다음과 같다.

$$\chi(\mathscr{F}) = \dim H^0(X, \mathscr{F}) - \dim H^1(X, \mathscr{F})$$

먼저 $D = 0$인 경우를 고려하자. 그 경우 위 공식은 다음과 같아진다.

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0 + 1 - g$$

임의의 사영 대수다양체에 대하여 $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$(I, 3.4)이며 (1.1)에 의해 $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = g$이므로 이것이 실제로 참이다.

Riemann-Roch

D가 인자, P가 점이면. 공식이 D에 대하여 성립 iff $D+P$에 대하여 성립하는 것임을 보이자. 이는 귀납적으로 모든 D에 대하여 결과가 성립함을 보여줄 것이다. P를 X의 닫힌 부분스킴으로 간주하자. 그 구조층은 점 P에서의 마천루층 k이며 이를 $k(P)$로 표기하겠다. 그 아이디얼 층은 $\mathscr{L}(-P)$이다. 그러므로 다음의 완전열이 성립한다.

$$0 \to \mathscr{L}(-P) \to \mathscr{O}_X \to k(P) \to 0$$

$\mathscr{L}(D+P)$와 텐서곱하면 다음을 얻는다.

$$0 \to \mathscr{L}(D) \to \mathscr{L}(D+P) \to k(P) \to 0$$

이제 χ가 짧은 완전열에서 덧셈적이며 $\chi(k(P)) = 1$이므로,

$$\chi(\mathscr{L}(D+P)) = \chi(\mathscr{L}(D)) + 1$$

또한 $\deg(D+P) = \deg D + 1$이므로 요구된 것과 같이 위 공식이 D에 대하여 성립할 필요충분조건은 $D+P$에 대하여 성립하는 것이다. $\square$