Buổi 07 – Ngày 13-04-2025 – môn Cấu trúc rời rạc – lớp MA004.E22.LT.CNTT

# ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ II
# NĂM HỌC 2024-2025 – MÔN MA004

(*SV được phép sử dụng tài liệu khi làm bài*)

Nộp bài trên Assignment của Elearning.
Làm bài và đặt tên file như sau:
*Phương án 1*:

Làm bài vào giấy → chụp hình → dán các hình bài làm vào 1 file word → lưu file theo định dạng .pdf theo quy ước "MSSV_Họ và tên.pdf" → nộp trên Assignment của Elearning.

*Phương án 2*:

Làm bài trên file Word/Excel/hoặc phần mềm soạn thảo văn bản khác → lưu lại theo định dạng .pdf theo quy ước "MSSV_Họ và tên.pdf" → nộp trên Assignment của Elearning. Nhớ gõ công thức Toán bằng Microsoft Equation/ hoặc MathType.

**Chúc lớp mình vui khỏe, thành công** 😊 !

***Câu 1***:

a/ Dùng các luật logic để chứng minh rằng biểu thức sau là hằng đúng

$$[(p \to q) \wedge (p \wedge \neg r)] \to (\neg q \to s)$$

b/ Kiểm tra xem suy luận sau có đúng không?

Nếu Khoa đi làm về muộn thì vợ anh ta sẽ rất giận dữ.
Nếu Hùng thường xuyên vắng nhà thì vợ anh ta sẽ rất giận dữ.
Nếu vợ Khoa hay vợ Hùng giận dữ thì cô Mai bạn họ sẽ nhận được lời than phiền.
Mà Mai đã không nhận được lời than phiền nào.
Vậy Khoa đi làm về sớm và Hùng ít khi vắng nhà.

c/ Viết dạng phủ định cho mệnh đề sau và cho biết chân trị của mệnh đề vừa tìm được.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (6xy < 0) \to [(3x - y) = 0]$$

***Câu 2***:

Một trường Đại học có 20738 sinh viên đang theo học các hệ đào tạo của Nhà trường năm 2025. Hỏi có ít nhất bao nhiêu sinh viên ở trường Đại học này có cùng ngày sinh nhật (cùng ngày sinh, tháng sinh) trong năm 2025?

***<u>Câu 3</u>***:

Trên tập hợp $X = \{-8,-6,-5,-3,-1,0,1,2,3,6,8,9,10\}$, cho quan hệ 2 ngôi R như sau:

$x\text{R}y \Leftrightarrow (2x+5y) \vdots 7$, với $x, y \in X$.

a/ Chứng minh rằng R là quan hệ tương đương trên *X*.

b/ Chỉ ra các lớp tương đương xét theo R trên *X* và tập hợp thương tương ứng. Từ đó viết *X* dưới dạng phân hoạch của các lớp tương đương theo R trên *X*.

***<u>Câu 4</u>***:

Trên tập hợp $X = \{-8,-6,-3,-2,0,1,4,5,7,9,12\}$, cho quan hệ 2 ngôi R như sau:

$x\text{R}y \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$, với $x, y \in X$.

a) Chứng minh rằng R là quan hệ thứ tự.
b) Quan hệ R có toàn phần không? Vì sao?
c) Vẽ biểu đồ Hasse cho (*X*,R).
d) Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của $X$ xét theo quan hệ thứ tự R.

-----HẾT-----

# CHƯƠNG 5: LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ (GRAPH THEORY)

**1/ <u>MỘT SỐ KHÁI NIỆM</u>**:

Một đồ thị (Graph) G = (V, E) là một bộ gồm có 2 tập hợp:

$\begin{cases} \text{+ Tập hợp các đỉnh (Vertises): V} \neq \phi \\ \text{+ Tập hợp các cạnh (Edges): E} \end{cases}$

Trong đó, mỗi cạnh $e \in$ E, nối tương ứng 1 cặp đỉnh $u \in V, v \in V$, được minh họa bằng 1 đoạn nối trực tiếp giữa 2 đỉnh $u, v$, và ta kí hiệu là: $e = \overline{uv}$ hay $u \overset{e}{\text{———}} v$.

Khi $e = \overline{uv}$ thì ta gọi $e$ là cạnh tới (incident edge) của 2 đỉnh $u, v$, còn $u, v$ là 2 đỉnh kề nhau (adjacency vertises).

Khi $u \equiv v$ thì ta gọi cạnh $e$ là 1 vòng (loop) (khuyên) tại $u$ và ta kí hiệu là $e = \overline{uu}$.

Hai cạnh được gọi là (đgl) song song nhau (parallel edges) nếu chúng cùng nối tương ứng 1 cặp đỉnh.

Hai đỉnh được gọi là kề nhau (liên kết nhau) (adjacency vertises) nếu chúng có cạnh nối trực tiếp với nhau.

Một đồ thị G đgl một đơn đồ thị (simple graph) nếu G không có cạnh song song và cũng không có vòng. Ngược lại, ta gọi là đa đồ thị (multi-graph).

Một đồ thị G đgl đầy đủ (completed graph) nếu như mọi cặp đỉnh của G đều kề nhau, nghĩa là mọi đỉnh đều có cạnh nối trực tiếp đến tất cả các đỉnh còn lại của G.

Một đồ thị G đgl hữu hạn (finite graph) nếu G có số đỉnh hữu hạn và số cạnh hữu hạn. Ngược lại, ta gọi G là đồ thị vô hạn (infinite graph). Trong chương này ta chỉ khảo sát các đồ thị hữu hạn.

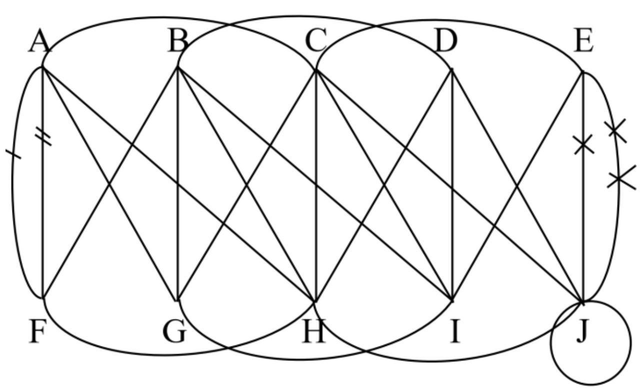
Biểu đồ là 1 dạng hình học minh họa cho đồ thị, trong đó:

+ Các đỉnh: được biểu diễn bằng các chấm điểm trong mặt phẳng $Oxy$ hoặc trong không gian $Oxyz$.

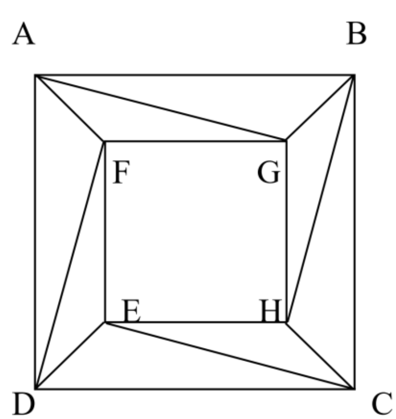
+ Các cạnh: được biểu diễn bằng những đoạn nối trực tiếp giữa các đỉnh $u, v \in V$.

<u>Ví dụ</u>: Ta có biểu đồ minh họa cho các đồ thị sau:

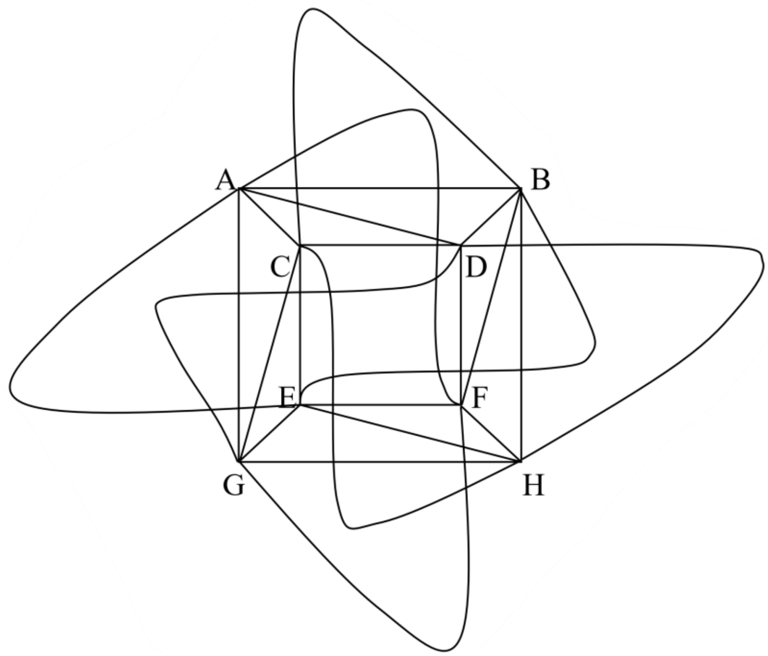
a/



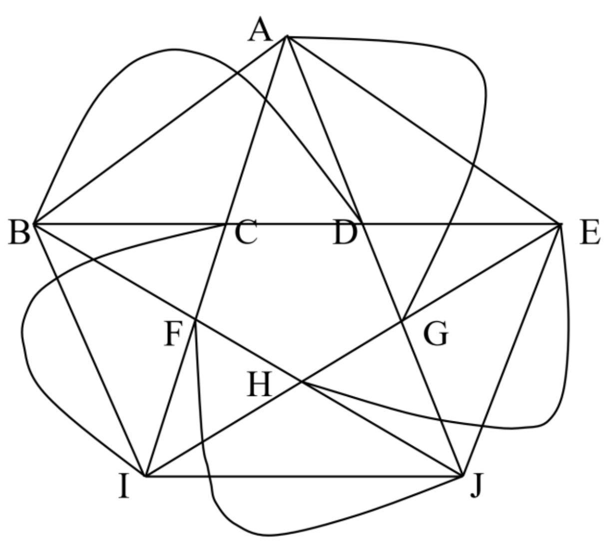

b/



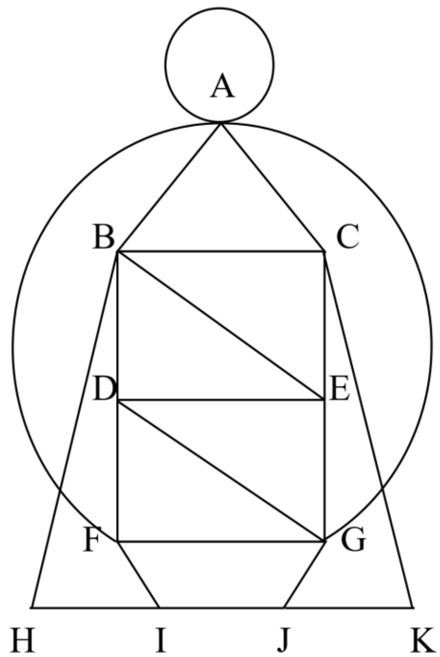
c/



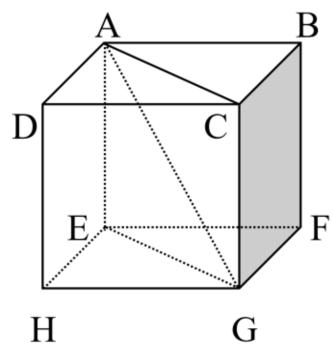

d/



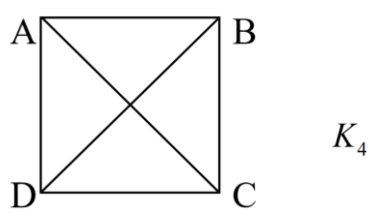

e/



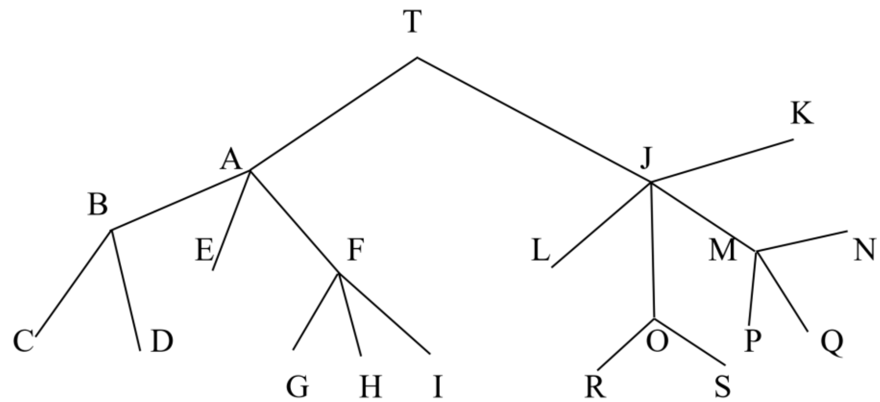

f/



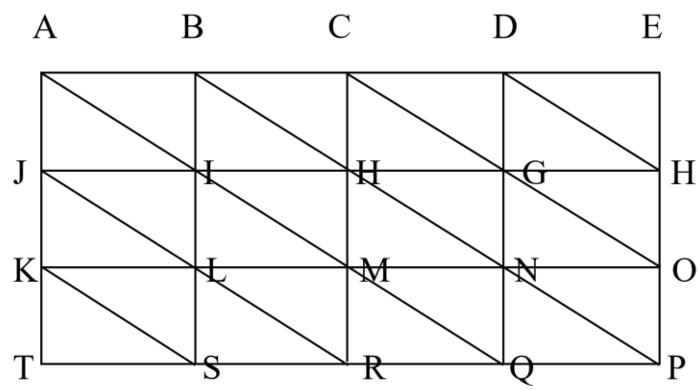

g/



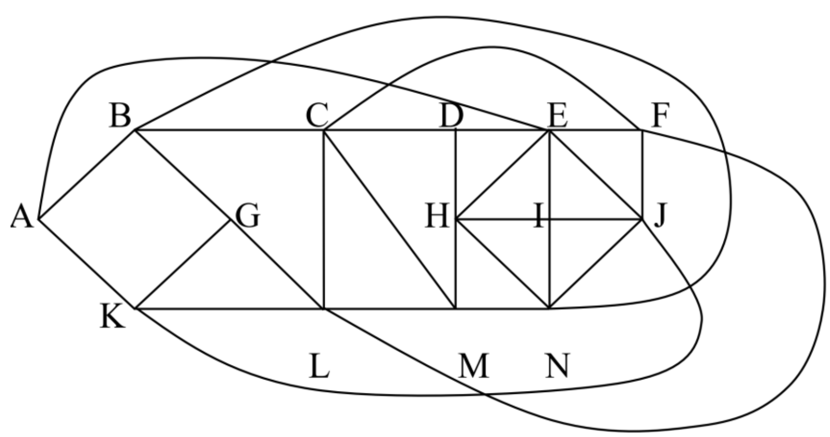

h/




i/




j/




Bậc của 1 đỉnh $u \in V$ là số cạnh nối tới $u$, trong đó mỗi loop (khuyên) (nếu có) sẽ được tính bằng 2, và ta kí hiệu là $d(u)$ hay là $\deg(u)$ (degree of $u$).

*Lưu ý*: mỗi loop (nếu có) tại 1 đỉnh $u$ thì khi đếm số cạnh ta tính bằng 1.

Một đồ thị G' = (V', E') được gọi là đồ thị con (sub-graph) của đồ thị G = (V, E), nếu $V' \subset V$ và $E' \subset E$.

Một đỉnh được gọi là đỉnh treo (pendant vertex) nếu đỉnh đó có bậc là 1.

Cạnh nối tới đỉnh treo thì ta gọi là cạnh treo (pendant edge).

Một đỉnh đgl đỉnh cô lập (isolated vertex) nếu đỉnh có bậc là = 0.

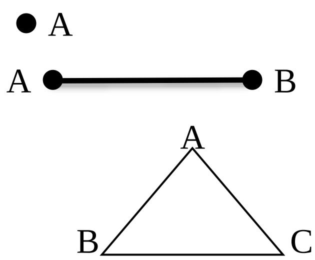
Đồ thị G nếu có mọi đỉnh cô lập thì ta gọi là đồ thị rỗng (null-graph), nghĩa là đồ thị chỉ có đỉnh mà không có cạnh nào.

Ta dùng kí hiệu $K_n$ dùng để chỉ 1 đơn đồ thị, đầy đủ, có $n$ đỉnh.

Ta có: $K_1$

$K_2$

$K_3$




* ***<u>Ma trận liên kết (adjacency matrix) (ma trận kề)</u>***:

Cho G = (V, E) là một đồ thị vô hướng (undirected graph), với V = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Ma trận liên kết thể hiện cho G là ma trận vuông cấp $n$ như sau:

$M = (a_{ij})_{1\le i, j\le n}$, với $a_{ij} =$ số cạnh nối trực tiếp đỉnh $v_i$ với đỉnh $v_j$, trong đó mỗi loop nếu có tại 1 đỉnh sẽ được tính bằng 2.

Ma trận liên kết của đồ thị G vô hướng là ma trận đối xứng.

Tổng các phần tử theo dòng $v_i$ = tổng các phần tử theo cột = là bậc của đỉnh $v_i$ và ta kí hiệu là $\deg(v_i)$.

***<u>Lưu ý 1</u>***:

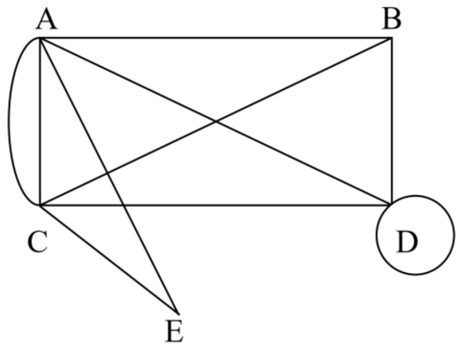
Trong đồ thị G = (V, E), ta luôn có: tổng số bậc của mọi đỉnh trong G luôn gấp đôi số cạnh của G, và kí hiệu là $\sum_{u\in V}\deg(u) = 2|E|$, với $|E| =$ số cạnh của G.

***<u>Lưu ý 2</u>***: Trong đồ thị G vô hướng, ta luôn có tổng số bậc của các đỉnh bậc lẻ luôn là số chẵn.

***<u>Lưu ý 3</u>***: Trong đồ thị G vô hướng, ta luôn có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ.

***<u>Lưu ý 4</u>***: Trong đồ thị $K_n$, ta luôn có số cạnh là $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ví dụ mẫu: Cho G là đồ thị vô hướng, có biểu đồ sau:




Lập ma trận liên kết cho G và xác định bậc của các đỉnh trong G, từ đó suy ra số cạnh của G.

Giải:

Ta có ma trận liên kết của G như sau:

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ta có: deg($A$) = 5; deg($B$) = 3; deg($C$) = 5; deg($D$) = 5; deg ($E$) = 2;

Suy ra $\sum_{u \in V} \deg(u) = 5+3+5+5+2 = 20 = 2|\mathrm{E}| \Rightarrow |\mathrm{E}| = 10$ cạnh.

* ***Đồ thị có hướng (directed graph)***:

Các đồ thị ta đề cập bên trên đều là đồ thị vô hướng (undirected graph).

Bây giờ nếu mỗi cạnh $e$ nối từ đỉnh $u$ đến đỉnh $v$ theo đúng thứ tự $u$ là đỉnh bắt đầu và $v$ là đỉnh kết thúc thì ta gọi $e$ là cạnh có hướng và kí hiệu là $e = \overrightarrow{uv}$ hay là $u \xrightarrow{e} v$.

Đồ thị G khi đó đgl đồ thị có hướng.

Xét cạnh $e = \overrightarrow{uv}$ thì ta gọi $e$ là cạnh tới ngoài (incident-out) của đỉnh $u$ và
là cạnh tới trong (incident-in) của đỉnh $v$.

và $u$ là đỉnh bắt đầu (initial vertex) của $e$,
$v$ là đỉnh kết thúc (ended vertex – finished vertex) của $e$.

Tổng số cạnh tới ngoài của đỉnh $u$ thì ta gọi là bậc ngoài (out-degree) của $u$ và kí hiệu là $d_{out}(u)$ hay là $\deg_{out}(u)$.

Tổng số cạnh tới trong của đỉnh $v$ thì ta gọi là bậc trong (in-degree) của $v$ và kí hiệu là $d_{in}(v)$ hay là $\deg_{in}(v)$.

Mỗi loop (khuyên) (nếu có) tại 1 đỉnh của đồ thị G có hướng thì ta tính $d_{out} = d_{in} = 1$.

Một đỉnh $u$ đgl đỉnh cân bằng (balanced vertex) nếu ta có $d_{out}(u) = d_{in}(u)$.

Đồ thị G có hướng đgl đồ thị cân bằng (balanced graph) nếu mọi đỉnh của G đều là đỉnh cân bằng.

Ma trận liên kết của đồ thị có hướng G, gồm $n$ đỉnh V = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, là ma trận có dạng

$M = (a_{ij})_{1\le i, j\le n}$, với $a_{ij} =$ số cạnh nối trực tiếp từ đỉnh $v_i$ đến đỉnh $v_j$ theo thứ tự.

Mỗi loop nếu có tại 1 đỉnh thì ta tính = 1.

Ma trận liên kết của đồ thị G có hướng thường là không đối xứng.

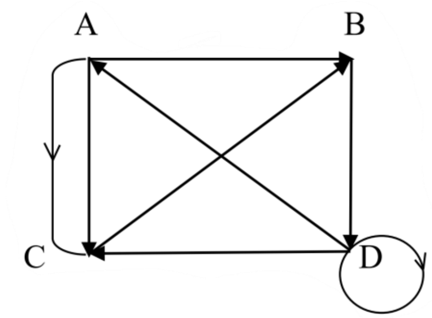
Tổng các phần tử theo dòng $v_i$ = bậc ngoài của đỉnh $v_i$ và ta viết là $\deg_{out}(v_i)$.

Tổng các phần tử theo cột $v_j$ = bậc trong của đỉnh $v_j$ và ta viết là $\deg_{in}(v_j)$.

Đối với đồ thị G có hướng thì ta luôn có: tổng bậc trong = tổng bậc ngoài (của tất cả các đỉnh) = số cạnh của G, nghĩa là:

$$\sum_{u\in V} \deg_{out}(u) = \sum_{u\in V} \deg_{in}(u) = |\mathrm{E}|$$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Cho G là đồ thị có hướng, có biểu đồ sau




(strongly connected)

Ta có ma trận liên kết của G là

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ta có:

$$\begin{cases} \deg_{out}(A) = 3; \\ \deg_{out}(B) = 1; \\ \deg_{out}(C) = 1; \\ \deg_{out}(D) = 3 \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} \deg_{in}(A) = 1; \\ \deg_{in}(B) = 2; \\ \deg_{in}(C) = 3; \\ \deg_{in}(D) = 2 \end{cases}$$

Suy ra

$$\sum_{u \in V} \deg_{out}(u) = 3 + 1 + 1 + 3 = 8$$

và

$$\sum_{u \in V} \deg_{in}(u) = 1 + 2 + 3 + 2 = 8$$

Cho nên

$$\sum_{u \in V} \deg_{out}(u) = \sum_{u \in V} \deg_{in}(u) = |\mathrm{E}| = 8$$

Suy ra, G có 8 cạnh.

* <u>*Lưu ý*</u>: Đối với G là một đơn đồ thị, có $n$ đỉnh, vô hướng thì luôn tồn tại ít nhất 2 đỉnh có cùng số bậc.

***<u>Bài tập</u>***:

1/ Hãy vẽ biểu đồ minh họa cho đồ thị G vô hướng, trong các trường hợp sau (nếu được)

a/ Có 6 đỉnh, và bậc các đỉnh là: 1,2,3,3,4,5.

b/ Có 6 đỉnh và bậc các đỉnh là: 2,4,6,8,7,7.

c/ Có 6 đỉnh và bậc các đỉnh là: 2,4,6,6,8,10.

d/ Có 6 đỉnh, là đơn đồ thị, và bậc các đỉnh là: 1,2,3,5,3,2

e/ Có 6 đỉnh, là đa đồ thị, và bậc các đỉnh là: 2,4,4,4,6,8

f/ Có 6 đỉnh, là đa đồ thị có vòng và bậc các đỉnh là: 4,4,4,4,2,2

g/ Có 6 đỉnh, là đa đồ thị có cạnh bội (có cạnh song song), và bậc là: 4,4,6,6,2,2

h/ Có 6 đỉnh, là đa đồ thị có cạnh bội và có vòng, và bậc các đỉnh là: 4,4,4,8,8,8

i/ Có 8 đỉnh và bậc các đỉnh là số nguyên tố nhỏ hơn 10

j/ Có 8 đỉnh và bậc các đỉnh là: 1,1,2,2,3,3,5,5

k/ Có 10 đỉnh và bậc các đỉnh là: 2,3,4,5,6,7,8,1,2,2

l/ Có 10 đỉnh, là đa đồ thị và bậc các đỉnh là: 2,2,4,4,6,6,5,5,1,1

2/ Hãy xác định số đỉnh cho đồ thị G vô hướng trong các trường hợp sau:

a/ Có tổng số bậc là 28, trong đó có 2 đỉnh bậc 5, có đỉnh bậc 7, và còn lại là đỉnh có bậc >=2.

b/ Có tổng số bậc là 54, có ít nhất 6 đỉnh bậc 7, còn lại là đỉnh có bậc >=2.

c/ Có tổng số bậc là 12 và các đỉnh đều có bậc bằng nhau.

d/ Có tổng số bậc là 20, có ít nhất 2 đỉnh bậc 5, còn lại là đỉnh bậc lẻ.

e/ Có tổng số bậc là 24, có đỉnh bậc 7 và có đỉnh bậc 5, còn lại là các đỉnh có bậc >=2.

f/ Có tổng số bậc là 30, có ít nhất 2 đỉnh bậc 7, có đỉnh bậc 8 và các đỉnh còn lại có bậc >=2.

g/ Có 20 cạnh, có ít nhất 2 đỉnh bậc 7, có đỉnh bậc 8, và các đỉnh còn lại có bậc >=3.

h/ Có 18 cạnh, có ít nhất 2 đỉnh bậc 9, còn lại là đỉnh có bậc >=2.

* <u>***Đường đi và chu trình***</u>:

Một đường đi (Path) P của một đồ thị G là một tập hợp liên tiếp các đỉnh, và các cạnh của G sao cho ta có thể đi từ đỉnh bắt đầu $v_0$ đến đỉnh kết thúc là $v_k$ và ta kí hiệu là

P = $v_0 \overset{e_1}{\_\_\_\_\_} v_1 \overset{e_2}{\_\_\_\_\_} v_2 \ldots \overset{e_k}{\_\_\_\_\_} v_k$ hay là P = $v_0 v_1 v_2 \ldots v_k$.

Số lượng cạnh nằm trên đường đi thì ta gọi là chiều dài của đường đi P, và kí hiệu là: $l(P) = k$.

Ta gọi $v_0$ là đỉnh bắt đầu và $v_k$ là đỉnh kết thúc của đường đi P (và ngược lại).

Một đường đi đgl đơn giản (simple path) nếu ta không đi qua đỉnh nào quá 1 lần.

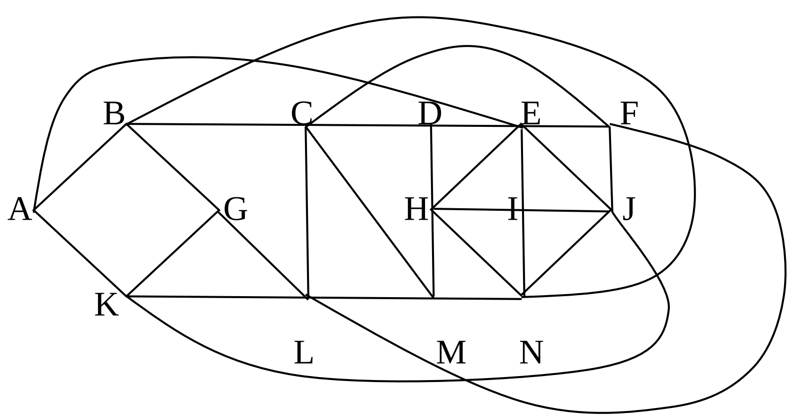
Một chu trình (circle/circuit) là một đường đi P có đỉnh đầu trùng với đỉnh kết thúc, và ta kí hiệu là:

$c = v_0 v_1 v_2 \ldots v_k v_0$, với $l(c) \geq 1$.

Hay nói cách khác chu trình là đường đi khép kín mà ta có cạnh nối trực tiếp giữa đỉnh kết thúc $v_k$ với đỉnh bắt đầu $v_0$.

Đối với một chu trình $c$ thì ta có thể xoay đỉnh chu trình, nghĩa là đỉnh nào bắt đầu thì đỉnh đó sẽ kết thúc chu trình $c$.

<u>Ví dụ</u>: xét đồ thị G vô hướng, có biểu đồ sau:



Ta có một số đường đi:

$P_1 = ABCMNHEJINBG$ → không đơn giản, có độ dài là $l(P_1) = 11$.

$P_2 = KGLFEIHMCB$ → đơn giản, có độ dài là $l(P_2) = 9$.

$P_3 = GKJEHDCMLG$ → đơn giản, có độ dài là $l(P_3) = 9$.

Ta gọi đường đi $P_3$ là 1 chu trình, do có cạnh nối trực tiếp từ đỉnh cuối là $L$ đến đỉnh đầu là $G$, và ta kí hiệu là $c = GKJEHDCMLG$.

Ta có thể xoay đỉnh chu trình này như sau:

$c = JEHDCMLGKJ$

$c = HDCMLGKJEH$

$c = MLGKJEHDCM$

Một chu trình được gọi là đơn giản nếu chu trình đó không đi qua đỉnh nào quá 1 lần.

Ví dụ ta chu trình sau: $c_2 = GLMHEIJNMCFLKG$ → chu trình không đơn giản.

* ***Sự liên thông của đồ thị***:

Một đồ thị vô hướng G được gọi là liên thông (connected graph) nếu như mọi cặp đỉnh đều tồn tại (ít nhất) 1 đường đi (Path) nối chúng.

Đồ thị G vô hướng không liên thông nếu G có đỉnh cô lập.

Một đồ thị có hướng G đgl liên thông nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông.

Một đồ thị có hướng được gọi là liên thông mạnh (strongly connected) nếu mọi cặp đỉnh của G ta đều tìm được ít nhất 1 đường đi nối chúng.

Một đồ thị có hướng được gọi là liên thông yếu (weakly connected) nếu có 1 cặp đỉnh $u, v$ sao cho ta không thể tìm ra con đường để đi từ $u$ đến $v$.

Một đồ thị có hướng G đgl đồ thị đầy đủ nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là đầy đủ.

## 2/ **ĐƯỜNG ĐI EULER VÀ CHU TRÌNH EULER**:

Một đường đi Euler của đồ thị G là một con đường đi qua tất cả các cạnh của G và mỗi cạnh đi qua đúng 1 lần.

Một chu trình Euler là một đường đi Euler có cạnh nối trực tiếp giữa đỉnh kết thúc với đỉnh bắt đầu.

***Lưu ý 1***: (dành cho đồ thị vô hướng).

Cho G là một đồ thị vô hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Ta nói G có chu trình Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

***<u>Lưu ý 2</u>***: (dành cho đồ thị vô hướng).

Cho G là một đồ thị vô hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Ta nói G có đường đi Euler khi và chỉ khi trong G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.

(2 đỉnh bậc lẻ này là đỉnh bắt đầu/kết thúc của đường đi Euler, ta thường chọn đỉnh có bậc cao hơn làm đỉnh xuất phát).

***<u>Lưu ý 3</u>***: (dành cho đồ thị có hướng)

Cho G là một đồ thị có hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Ta nói G có chu trình Euler khi và chỉ khi G cân bằng.

***<u>Lưu ý 4</u>***: (dành cho đồ thị có hướng)

Cho G là một đồ thị có hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Ta nói G có đường đi Euler khi và chỉ khi trong G có đúng 2 đỉnh $u, v$ thỏa

$$\begin{cases} \deg_{out}(u) = \deg_{in}(u) + 1 \\ \deg_{in}(v) = \deg_{out}(v) + 1 \end{cases}$$

và mọi đỉnh còn lại đều cân bằng.

(trong đó $u$ là đỉnh xuất phát và $v$ là đỉnh kết thúc của đường đi Euler).