CHƯƠNG 4: ĐẠI SỐ BOOL VÀ HÀM BOOL

1/ MỘT SỐ KHÁI NIỆM

Cho tập hợp $S=\{0,1\}$. (S = Set)

Trên S ta có 2 phép toán 2 ngôi: phép cộng (+), phép nhân (**.**), cùng với 1 phép toán 1 ngôi: phép lấy phần bù ($\bar{\ }$), thỏa:

$$\begin{cases} 0+0=0.0=0.1=1.0=0 \\ 1+0=0+1=1.1=1+1=1 \\ \bar{1}=0 \\ \bar{0}=1 \end{cases}$$

Ta gọi cấu trúc đại số $(S,+,\bullet,\bar{\ },0,1)$ là một đại số Bool, và ký hiệu là B=$(S,+,\bullet,\bar{\ },0,1)$.

Một hàm bool n biến là một ánh xạ

$$f: B^n \to B$$
$$(x_1,x_2,...,x_n)\mapsto f(x_1,x_2,...,x_n)$$

Ví dụ:

Ta có hàm bool 3 biến $f:B^3\to B$, với

$$f(x,y,z)=(\overline{x\bar{y}+y\bar{z}}+xy)(\overline{\bar{x}z+y}+yz)+x\bar{y}\bar{z}$$

Ta có hàm bool 4 biến $f:B^4\to B$, với

$$f(x,y,z,t)=\left(\overline{\overline{xy\bar{z}+\bar{x}y}+yz+\bar{z}}+yz\bar{t}\right)(\bar{x}yz+\bar{y}\bar{t})+\overline{z\bar{t}+xyz}+y\bar{z}t$$

Từ công thức ban đầu của hàm bool f ta có thể viết lại f dưới dạng tổng các tích cơ bản của các biến, mà ta thường gọi là dạng chính tắc tuyển (dạng chính tắc nối rời) (disjunctive normal form – d.n.f) của f.

Ví dụ: ta có dạng chính tắc tuyển (chính tắc nối rời – d.n.f) của hàm bool 3 biến là:

$$f(x,y,z)=x\bar{y}z+xy\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}+xyz$$

Ví dụ: ta có dạng chính tắc tuyển (chính tắc nối rời – d.n.f) của hàm bool 4 biến là:

$$f(x,y,z,t)=\bar{x}yzt+xy\bar{z}t+\bar{x}yz\bar{t}+x\bar{y}z\bar{t}+xyz\bar{t}\vee xy\bar{z}\bar{t}\vee\bar{x}\bar{y}zt\vee\bar{x}y\bar{z}t\vee xyzt$$

2/ CÁCH TÌM DẠNG CHÍNH TẮC NỐI RỜI (CHÍNH TẮC TUYỂN – D.N.F) CHO HÀM BOOL

a/ Cách 1: dùng bảng chân trị

+ Ta lập bảng chân trị cho f.

+ Ta xét các dòng làm cho chân trị của f bằng 1.

+ Ta viết công thức cho dạng d.n.f theo quy tắc:

- Các biến có chân trị bằng 0 thì ta ghi biến đó “có gạch đầu”
- Các biến có chân trị bằng 1 thì ta ghi biến đó “không có gạch đầu”

Lưu ý: ta có $\overline{xy} \neq \bar{x}.\bar{y}$ do $\overline{xy} \Leftrightarrow \bar{x}+\bar{y}$

Ví dụ mẫu: Tìm dạng chính tắc nối rời cho hàm bool

$f: B^3 \to B$, với $f(x,y,z)=\underbrace{\left(x\bar{y}+\underbrace{\overline{y\bar{z}+\bar{x}z}}_{A}\right)}_{B}\underbrace{(\underbrace{\overline{\bar{x}y\bar{z}+yz}}_{C}+xz)}_{D}+\bar{x}.\bar{y}$

Giải:

Ta có bảng chân trị của f là:

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x\bar{y}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}z$	A	B	$\bar{x}y\bar{z}$	yz	C	xz	D	$\bar{x}.\bar{y}$	BD	f
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1

Từ bảng chân trị của f ta có dạng d.n.f là:

$f(x,y,z)=\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}+\bar{x}.\bar{y}z+x\bar{y}.\bar{z}+x\bar{y}z+xyz$

Bài tập tương tự: tìm dạng chính tắc tuyển (chính tắc nối rời) cho hàm bool sau:

1/ $f(x,y,z)=(\overline{x\bar{y}+\bar{z}}+xz)(\overline{xy\bar{z}+y}+y\bar{z})+\bar{x}y$

2/ $f(x,y,z)=\left(xy+\overline{\overrightarrow{yz+xz}+\bar{x}}\right)(x\bar{y}+\bar{y}z)+xy$

3/ $f(x,y,z)=\overline{\left(xy\bar{z}+\bar{y}z+\bar{x}y\right)}+xy+\overline{\bar{z}+\bar{x}z}$

4/ $f(x,y,z)=\left(x\bar{y}+y\bar{z}+\overline{x+\bar{z}}\right)(x\bar{y}\bar{z}+\overline{xz+y})+xy$

5/ $f(x,y,z)=\left(x\bar{y}+\overline{y\bar{z}+\bar{x}}\right)(xy+\overline{\bar{z}+\bar{y}z})+xz$

6/ $f(x,y,z,t)=\left(\overline{xy\bar{t}+\overline{yz+\bar{z}t}}+\bar{x}zt\right)(xy\bar{z}+zt+x\bar{y})+\bar{z}\bar{t}+yz$

7/ $f(x,y,z,t)=(x\bar{y}t+\overline{\bar{z}t+xy})(y\bar{t}+xyz)+xz\bar{t}+y\bar{z}+zt$

8/ $f(x,y,z,t)=(\overline{xy\bar{z}+y\bar{t}+yz}+xz)(x\bar{t}+\bar{x}y+zt)+xyt+\bar{z}\bar{t}$

9/ $f(x,y,z,t)=(z\bar{t}+\overline{yz+\bar{x}y\bar{z}}+y\bar{z})(xyt+z\bar{t})+xy+\bar{z}t+yz$

10/ $f(x,y,z,t)=(\overline{xyt+z\bar{t}}+yz)(y\bar{t}+\overline{\bar{x}z+zt})+x\bar{y}t+\bar{z}t+xy\bar{z}$

b/ <u>Cách 2: biến đổi trực tiếp từ công thức</u>

<u>Ví dụ mẫu</u>: Tìm công thức dạng chính tắc nối rời cho hàm bool:

$$f(x,y,z,t)=(xy\bar{t}+\bar{x}z)(y\bar{z}+xt)+\overline{yzt+\bar{z}t}+yzt$$

<u>Giải</u>:

$$f(x,y,z,t)=(xy\bar{t}+\bar{x}z)(y\bar{z}+xt)+\overline{yzt+\bar{z}t}+yzt$$
$$=xy\bar{z}\bar{t}+(\bar{y}+\bar{z}+\bar{t})(z+\bar{t})+yzt$$
$$=xy\bar{z}\bar{t}+\bar{y}z+\bar{y}\bar{t}+\bar{z}\bar{t}+z\bar{t}+\bar{t}+yzt$$
$$=\bar{t}+\bar{y}z+yzt$$
$$=(x+\bar{x})(y+\bar{y})(z+\bar{z})\bar{t}+(x+\bar{x})\bar{y}z(t+\bar{t})+(x+\bar{x})yzt$$
$$=xyz\bar{t}+xy\bar{z}\bar{t}+x\bar{y}z\bar{t}+x\bar{y}.\bar{z}\bar{t}+\bar{x}yz\bar{t}+\bar{x}y\bar{z}\bar{t}\vee\bar{x}.\bar{y}z\bar{t}\vee\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}\bar{t}\vee x\bar{y}zt\vee\bar{x}.\bar{y}zt+xyzt+\bar{x}yzt$$

Đây là dạng d.n.f cần tìm của hàm bool f.

<u>*Bài tâp tương tự*</u>: tìm dạng chính tắc nối rời cho hàm bool sau

11/ $f(x,y,z,t)=(\overline{xy\bar{t}+\bar{z}t+\bar{x}z}+yz)(\overline{xt+z\bar{t}}+yz)+xzt+z\bar{t}$

12/ $f(x,y,z,t)=(\overline{x\bar{y}+zt}+y\bar{t})(xz+\overline{\bar{y}t+xy})+x\bar{z}t+yz\bar{t}$

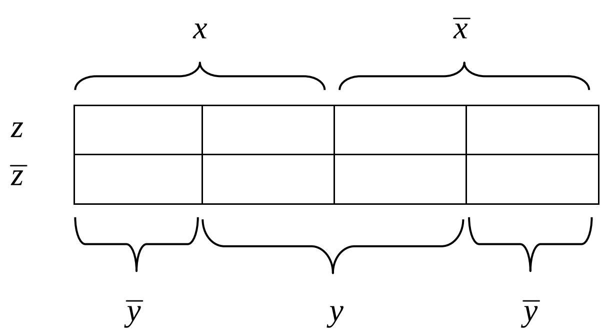
13/ $f(x,y,z,t)=(zt+\overline{x\bar{z}+yz\bar{t}})(xy+y\bar{z})+xyt+\overline{xz+\bar{\bar{z}}t+y}$

14/ $f(x,y,z,t)=(xz+\overline{\bar{y}t+xy\bar{z}}+yt)(z\bar{t}+xy)+xyz+\overline{zt+x\bar{z}}$

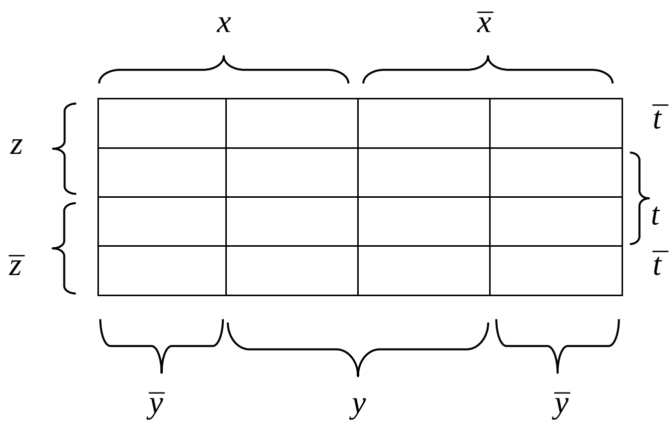
15/ $f(x,y,z,t)=(xz+\overline{y\bar{t}+xyz})(y\bar{z}\bar{t}+xz)+\overline{\bar{x}yt+\overline{y\bar{z}+zt}}+xy+\bar{z}\bar{t}$

c/ <u>Cách 3: dùng phương pháp biểu đồ Karnaugh (bìa Karnaugh) của hàm bool</u>

Ta có biểu đồ Karnaugh (bìa Kar(*f*)) của hàm bool 3 biến là biểu đồ có cấu trúc như sau:

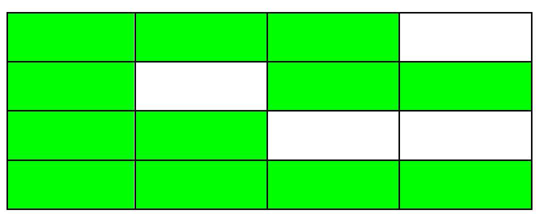


Ta có biểu đồ Karnaugh (bìa Kar(f)) của hàm bool 4 biến là biểu đồ có cấu trúc như sau:



<u>Ví dụ mẫu</u>: Cho hàm bool $f(x,y,z,t) = xy\overline{z} + y\overline{t} + \overline{x}zt + x\overline{y} + \overline{z}\overline{t}$

Ta có biểu đồ Kar(f) của hàm f là



Từ biểu đồ Karnaugh của f ta có dạng d.n.f cần tìm là:

$$f(x,y,z,t) = x\overline{y}z\overline{t} + xyz\overline{t} + \overline{x}yz\overline{t} + x\overline{y}zt + \overline{x}yzt + \overline{x}.\overline{y}zt + x\overline{y}.\overline{z}t + xy\overline{z}t + x\overline{y}.\overline{z}\overline{t} + xy\overline{z}\overline{t} + \overline{x}y\overline{z}\overline{t} + \overline{x}.\overline{y}.\overline{z}\overline{t}$$

Ngoài ra, ta có:

$$f^{-1}(1) = \{1010, 1110, 0110, 1011, 0111, 0011, 1001, 1101, 1000, 1100, 0100, 0000\} = \overline{f}^{-1}(0)$$

= ảnh ngược của hàm bool f = những ô được tô trong bìa Kar(f) của f.

$$f^{-1}(0) = \{0010, 1111, 0101, 0001\} = \overline{f}^{-1}(1)$$

= ảnh ngược của hàm bool f = những ô bị bỏ trống (không được tô) trong bìa Kar(f) của f.

<u>Bài tập tương tự</u>:

+ Vẽ biểu đồ Karnaugh cho f.
+ Tìm dạng d.n.f cho f.
+ Viết dạng $f^{-1}(1) = \overline{f}^{-1}(0) = ?$ và dạng $f^{-1}(0) = \overline{f}^{-1}(1) = ?$

16/ $f(x,y,z,t) = xz\overline{t} + \overline{x}z + \overline{y}zt + \overline{y}\overline{t} + xyz$

17/ $f(x,y,z,t) = xy + \overline{z}t + \overline{y}z\overline{t} + \overline{x}z + xyt$

18/ $f(x,y,z,t) = xyz + y\overline{z}\overline{t} + \overline{x}t + \overline{y}zt + yt$

19/ $f(x,y,z,t) = xyz + z\overline{t} + \overline{x}y + \overline{y}.\overline{z}t + xz$

20/ $f(x,y,z,t) = xy\overline{t} + y\overline{z}t + xyz + \overline{z}\overline{t} + \overline{y}t$

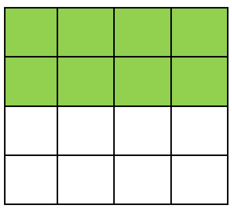
21/ $f(x,y,z,t) = x\overline{y} + yzt + \overline{x}z\overline{t} + zt + x\overline{z}t$

22/ $f(x,y,z,t) = xy + \overline{y}z\overline{t} + \overline{x}z + yt + \overline{z}t$

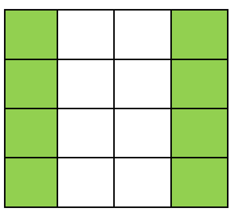
* ***<u>Phân tích các tế bào lớn có trong bìa Kar(f) của hàm bool</u>***:

Từ biểu đồ Kar(*f*) của *f*, ta phân tích thành các tế bào lớn như sau:

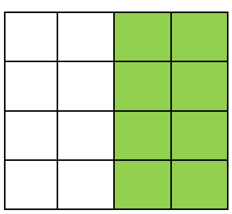
\+ Tế bào 8 ô:



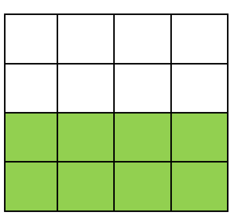
z



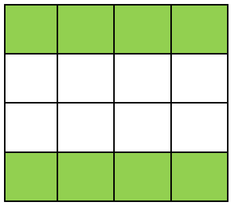
$\overline{y}$



$\overline{x}$

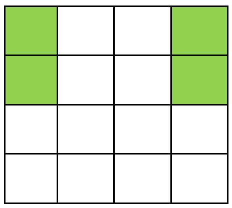


$\overline{z}$

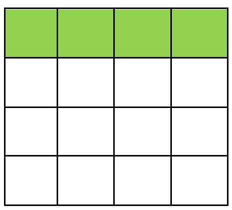


$\overline{t}$

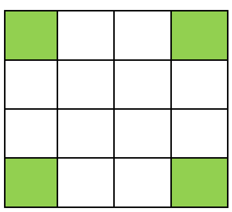
+ Tế bào 4 ô:



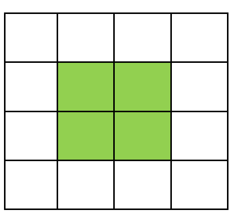
$\overline{y}z$



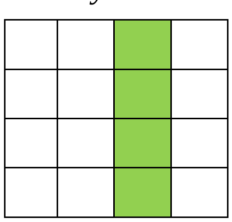
$z\overline{t}$



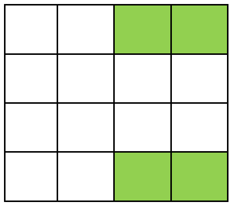
$\overline{y}\overline{t}$



yt

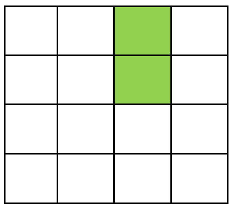


$\overline{x}y$

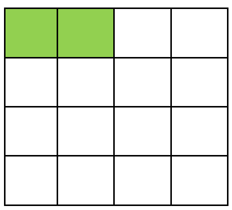


$\overline{x}\overline{t}$

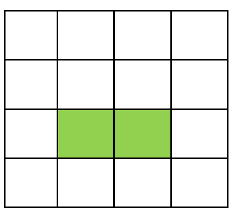
+ Tế bào 2 ô:



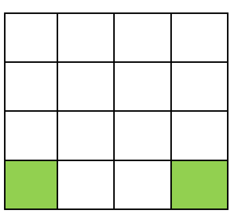
$\overline{x}yz$



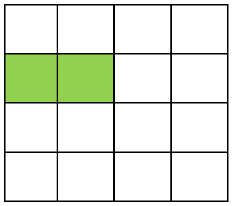
$xz\overline{t}$



$y\overline{z}t$

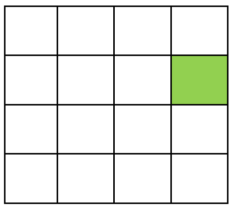


$\overline{y}.\overline{z}\overline{t}$

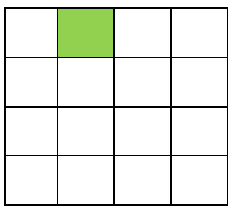


xzt

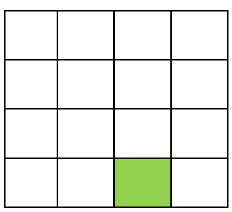
+ Tế bào 1 ô:



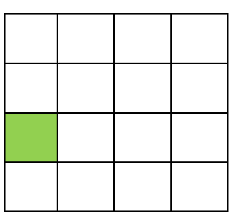
$\overline{x}.\overline{y}zt$



$xyz\overline{t}$



$\overline{x}y\overline{z}\overline{t}$

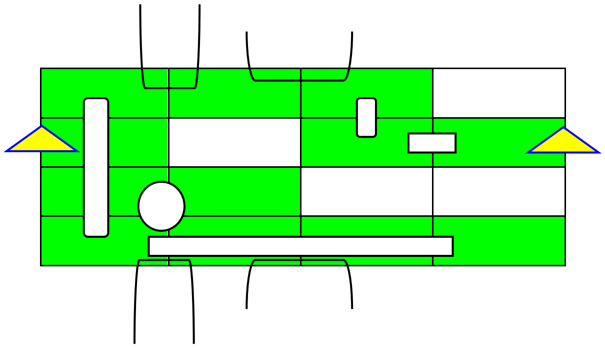


$x\overline{y}.\overline{z}t$

<u>Áp dụng</u>: phân tích tế bào có trong bìa Kar(*f*) của hàm bool *f*.

<u>Ví dụ mẫu</u>: Cho hàm bool $f(x,y,z,t)=xy\overline{z}+y\overline{t}+\overline{x}zt+x\overline{y}+\overline{z}\overline{t}$

Ta có biểu đồ Kar(*f*) của hàm f là



Ta có các tế bào lớn trong bìa Kar(*f*) của *f* là:

+ Tế bào 8 ô: không có;

+ Tế bào 4 ô: $T_1 : x\overline{y}$; $T_2 : \overline{z}\overline{t}$; $T_3 : x\overline{z}$; $T_4 : x\overline{t}$; $T_5 : y\overline{t}$

+ Tế bào 2 ô: $T_{6:} : \overline{x}yz$; $T_{7:} : \overline{x}zt$; $T_{8:} : \overline{y}zt$

+ Tế bào 1 ô: không có.

3/ TÌM CÔNG THỨC ĐA THỨC TỐI TIỂU CHO HÀM BOOL BẰNG PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

Bước 1:

+ Vẽ biểu đồ Kar(*f*) cho hàm bool f .

+ Phân tích các tế bào lớn có trong bìa Kar(*f*) của f .

Bước 2:

+ Dùng các tế bào lớn (phân tích được trong bước 1) để phủ cho 1 bìa Kar(*f*) còn trống.

+ Ta chỉ ra các ô không bị chồng lắp giữa các tế bào (các ô chỉ thuộc 1 tế bào lớn duy nhất); và gọi tên các tế bào lớn tương ứng chứa những ô này.

+ Dùng các tế bào lớn (chứa các ô không bị chồng lắp) để phủ cho bìa Kar(*f*) còn trống.

Bước 3:

+ Nếu các tế bào lớn dùng ở bước 2 đã phủ kín bìa Kar(*f*) của f thì ta qua thẳng bước 4.

+ Nếu không, nghĩa là còn có các ô chưa được phủ kín. Ta chỉ ra ô này.

+ Ta xác định các tế bào lớn chứa những ô chưa được phủ này (mỗi ô thuộc ít nhất 2 tế bào lớn trở lên).

+ Dùng các tế bào lớn này (tùy ý) để phủ lần lượt cho các ô cho phần còn lại của của biểu đồ Kar(*f*) cho đến khi biểu đồ được phủ kín.

Bước 4:

+ Đến bước này ta đã phủ kín bìa Kar(*f*) của f .

+ Do trong bước 3 thường có nhiều hơn 1 phép phủ nên ta nhận được nhiều công thức của hàm bool f .

+ Trong số các phép phủ nhận được, ta chọn ra phép phủ:

- có ít thành phần nhất
- có ít số biến trong mỗi thành phần nhất.

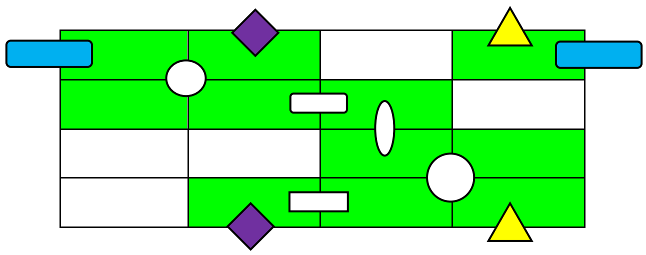
Từ đó sẽ nhận được công thức đa thức tối tiểu cần tìm.

Ví dụ mẫu: tìm công thức đa thức tối tiểu cho hàm bool

$$f(x,y,z,t) = xyz + \bar{y}z\bar{t} + xzt + \bar{x}.\bar{z} + yzt + \bar{x}yt + y\bar{z}\bar{t} \; .$$

Giải:

Ta có biểu đồ Kar(*f*) của hàm f là



Ta có các tế bào lớn trong bìa Kar(*f*) của *f* là:

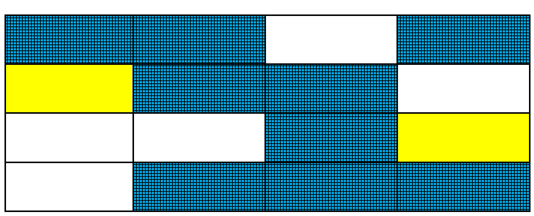
+ Tế bào 8 ô: không có;

+ Tế bào 4 ô: $T_1 : xz$; $T_2 : \bar{x}.\bar{z}$;

+ Tế bào 2 ô: $T_{3:} : yzt$; $T_{4:} : \bar{x}yt$; $T_{5:} : y\bar{z}\bar{t}$; $T_6 : xy\bar{t}$; $T_7 : \bar{y}z\bar{t}$; $T_8 : \bar{x}.\bar{y}\bar{t}$

+ Tế bào 1 ô: không có.

Dùng các tế bào lớn này để phủ cho 1 bìa Kar(*f*) còn trống, ta được

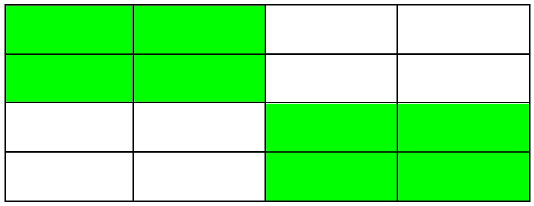


Ta thấy có 2 ô không bị trùng lắp (chồng lắp) giữa các tế bào lớn là: ô (2,1) và ô (3,4)

Mà ô (2,1) chỉ thuộc duy nhất trong tế bào lớn $T_1 : xz$

và ô (3,4) chỉ thuộc duy nhất trong tế bào lớn $T_2 : \bar{x}.\bar{z}$

Dùng 2 tế bào lớn $T_1: xz$, $T_2: \overline{x}.\overline{z}$ để phủ cho 1 bìa Kar(f) còn trống ta được



Đến đây, ta thấy bìa Kar(f) chưa được phủ kín, nghĩa là còn trống các ô: ô (1,4), ô (2,3), ô (4,2).

Mà ô (1,4) thuộc các tế bào: $T_7: \overline{y}z\overline{t}$, $T_8: \overline{x}.\overline{y}\overline{t}$

ô (2,3) thuộc các tế bào: $T_{3:}: yzt$, $T_{4:}: \overline{x}yt$

ô (4,2) thuộc các tế bào: $T_{5:}: y\overline{z}\overline{t}$, $T_6: xy\overline{t}$

Dùng các tế bào lớn này để phủ tiếp cho các ô còn trống của bìa Kar(f) ta được các công thức của f là:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) &= T_1 + T_2 + T_7 + T_3 + T_5 \\ &= T_1 + T_2 + T_7 + T_3 + T_6 \\ &= T_1 + T_2 + T_7 + T_4 + T_5 \\ &= T_1 + T_2 + T_7 + T_4 + T_6 \\ &= T_1 + T_2 + T_8 + T_3 + T_5 \\ &= T_1 + T_2 + T_8 + T_3 + T_6 \\ &= T_1 + T_2 + T_8 + T_4 + T_5 \\ &= T_1 + T_2 + T_8 + T_4 + T_6 \end{aligned}$$

Trong số các công thức nhận được, ta thấy các công thức đều có 5 thành phần và số biến trong mỗi thành phần là như nhau (có 2 thành phần 2 biến và 3 thành phần 3 biến), nên f có 8 công thức đa thức tối tiểu là:

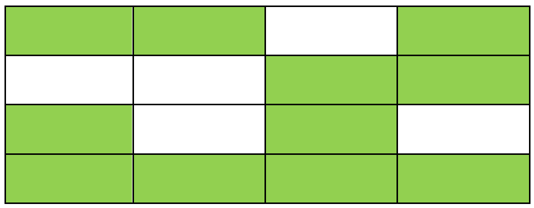
$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) &= xz + \overline{x}.\overline{z} + \overline{y}z\overline{t} + yzt + y\overline{z}\overline{t} \quad (1) \\ &= xz + \overline{x}.\overline{z} + \overline{y}z\overline{t} + yzt + xy\overline{t} \quad (2) \\ &= xz + \overline{x}.\overline{z} + \overline{y}z\overline{t} + \overline{x}yt + y\overline{z}\overline{t} \quad (3) \\ &= xz + \overline{x}.\overline{z} + \overline{y}z\overline{t} + \overline{x}yt + xy\overline{t} \quad (4) \\ &= xz + \overline{x}.\overline{z} + \overline{x}.\overline{y}\overline{t} + yzt + y\overline{z}\overline{t} \quad (5) \end{aligned}$$

$$= xz + \bar{x}.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}\bar{t} + yzt + xy\bar{t} \quad (6)$$

$$= xz + \bar{x}.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}\bar{t} + \bar{x}yt + y\bar{z}\bar{t} \quad (7)$$

$$= xz + \bar{x}.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}\bar{t} + \bar{x}yt + xy\bar{t} \quad (8)$$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Cho hàm bool có biểu đồ Karnaugh như sau:



Tìm công thức đa thức tối tiểu cho *f*.

<u>Giải</u>: