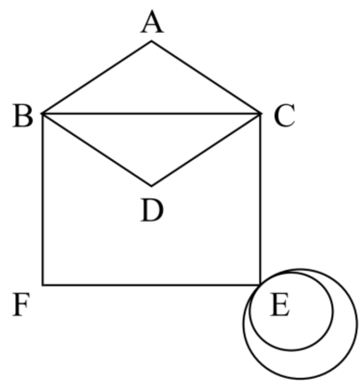
<u>Buổi 08 – Ngày 20-04-2025 – môn Cấu trúc rời rạc – lớp MA004.E22.LT.CNTT</u>

# CHƯƠNG 5: LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

<u>Ví dụ mẫu 1</u>: Cho **G** là đồ thị vô hướng có biểu đồ sau:




Hỏi **G** có chu trình (đường đi) Euler không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm 1 chu trình (đường đi) Euler cho **G**.

<u>Giải</u>:

Ta có ma trận liên kết của **G** là:

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 \\ 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{4} & \cancel{1} \\ 0 & \cancel{1} & 0 & 0 & \cancel{1} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Suy ra $\deg(A) = 2; \deg(B) = 4; \deg(C) = 4; \deg(D) = 2; \deg(E) = 6; \deg(F) = 2$

Do tất cả các đỉnh của **G** đều có bậc chẵn nên **G** có chu trình Euler.

Gọi chu trình Euler cần tìm là $c_E$.

Chọn 1 đỉnh làm đỉnh xuất phát. Ví dụ chọn đỉnh $A$, ta đưa $A$ vào $c_E$.

Suy ra $c_E = A$.

Dựa vào ma trận liên kết của **G** ta tìm được chu trình Euler là:

$c_E = ABCA$

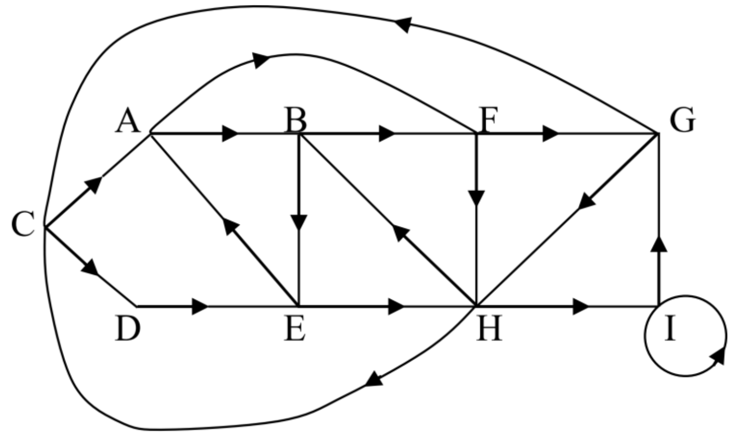
➔ ta xoay đỉnh chu trình $c_E = BCAB$

Ta có: $c_E = BCABDCEEEFB$.

Do tất cả các phần tử khác 0 trên ma trận liên kết đều đã được loại bỏ, nên ta dừng bài toán. Ta có chu trình Euler cần tìm là:

$$\left[ \quad c_E = BCABDCEEEFB \right.$$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Cho **G** là đồ thị liên thông, có hướng, có biểu đồ sau:




Hỏi **G** có chu trình (đường đi) Euler không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm 1 chu trình (đường đi) Euler cho **G**.

<u>Giải</u>:

Ta có ma trận liên kết của **G** là:

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & I \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

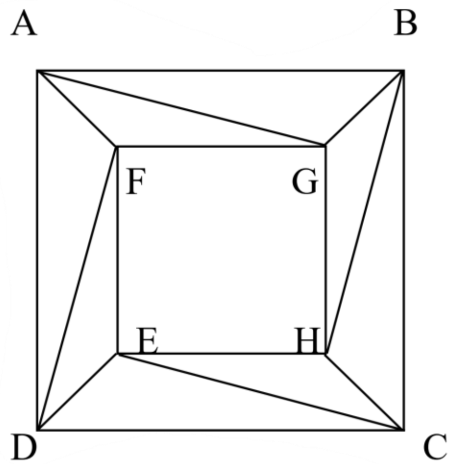
Suy ra

$$\begin{cases} \deg_{out}(A) = ...; \\ \deg_{out}(B) = ...; \\ \deg_{out}(C) = ...; \\ \deg_{out}(D) = ...; \\ \deg_{out}(E) = ...; \\ \deg_{out}(F) = ...; \\ \deg_{out}(G) = ...; \\ \deg_{out}(H) = ...; \\ \deg_{out}(I) = ... \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \deg_{in}(A) = ...; \\ \deg_{in}(B) = ...; \\ \deg_{in}(C) = ...; \\ \deg_{in}(D) = ...; \\ \deg_{in}(E) = ...; \\ \deg_{in}(F) = ...; \\ \deg_{in}(G) = ...; \\ \deg_{in}(H) = ...; \\ \deg_{in}(I) = ... \end{cases}$$

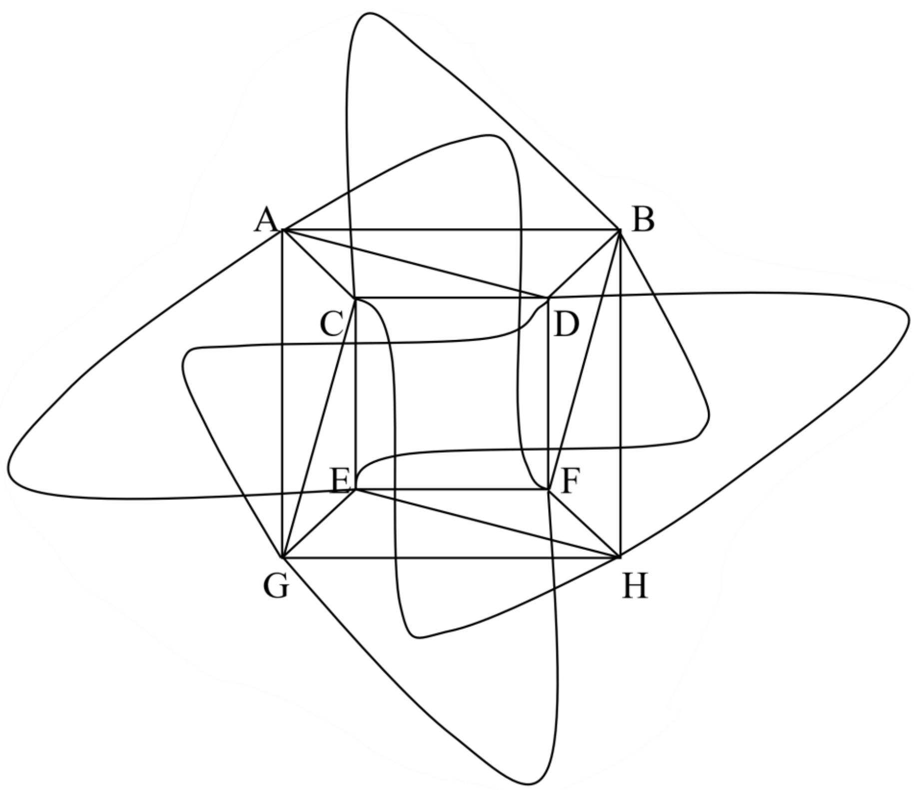
Cho nên:….

<u>Bài tập tương tự</u>: Cho **G** là đồ thị có biểu đồ sau. Hỏi **G** có chu trình (đường đi) Euler không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm một chu trình (đường đi) Euler cho **G**.

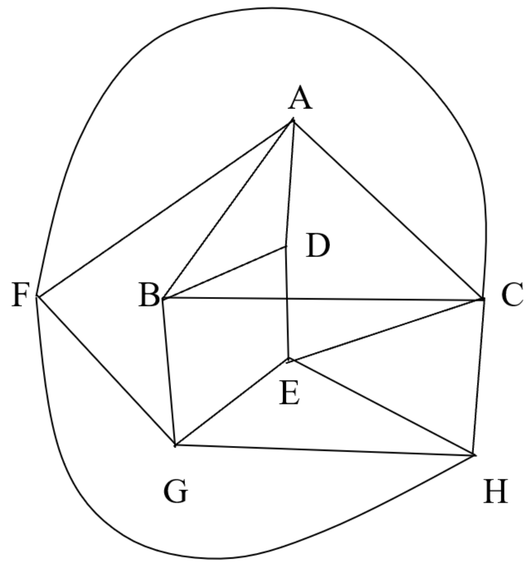
a/



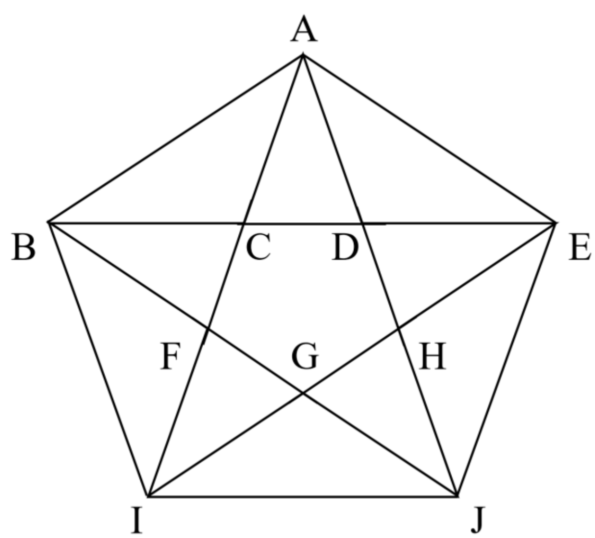

b/



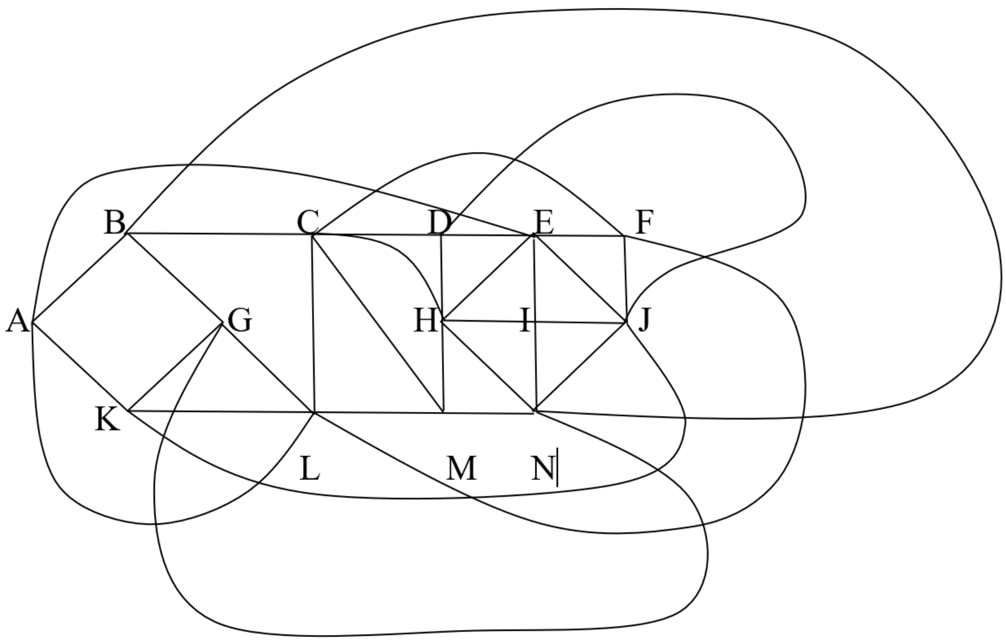
c/




d/




e/




**3/ <u>ĐƯỜNG ĐI HAMILTON VÀ CHU TRÌNH HAMILTON</u>:**

Một đường đi Hamilton của đồ thị **G** là một con đường đi qua tất cả các đỉnh của **G** và mỗi đỉnh chỉ đi qua đúng 1 lần.

Một chu trình Hamilton của **G** là một đường đi Hamilton khép kín, có đỉnh nối trực tiếp từ đỉnh kết thúc đến đỉnh bắt đầu.

* ***<u>Quy tắc xây dựng chu trình Hamilton</u>***:

i/ Nếu đồ thị **G** có (ít nhất) 1 đỉnh có bậc $\leq 1$ thì **G** không có chu trình Hamilton.

ii/ Nếu 1 đỉnh $u$ có bậc là 2 thì 2 cạnh tới của $u$ ta phải đưa vào chu trình Hamilton

iii/ Chu trình Hamilton không chứa chu trình con thực sự nào.

iv/ Nếu một đỉnh $u$ có bậc > 2 mà ta đã đưa 2 cạnh nối tới $u$ vào trong chu trình Hamilton thì ta không thể quay về $u$ được nữa nên ta có thể xóa bỏ những cạnh dư thừa ra khỏi đỉnh $u$.

Ngoài ra, ta có một số lưu ý sau:

***<u>Lưu ý 1</u>***: (dành cho đồ thị vô hướng)

Cho **G** là một đồ thị vô hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Nếu **G** là một đồ thị đầy đủ thì **G** có chu trình Hamilton.

***<u>Lưu ý 2</u>***: (dành cho đồ thị vô hướng)

Cho **G** là một đồ thị vô hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

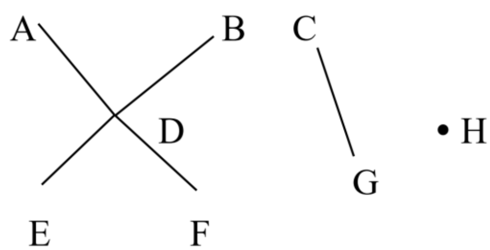
Nếu trong **G** có một nhóm gồm $k$ đỉnh sao cho khi ta xóa $k$ đỉnh này ra khỏi **G** cùng với các cạnh liên quan đến $k$ đỉnh, mà số thành phần còn lại của đồ thị là nhiều hơn $( > )$ $k$ thành phần thì **G** không có chu trình Hamilton.

Ta thường chọn $k \le \frac{n}{2}$, và nên chọn những đỉnh có bậc cao nhất để xóa.

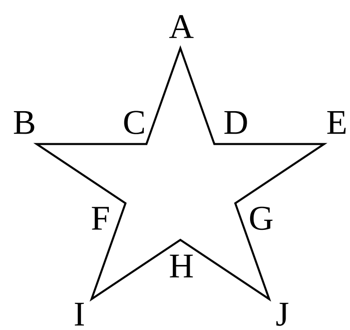
Trong đó: các thành phần của đồ thị được hiểu theo nghĩa:

+ Các cạnh rời nhau.
+ Các đỉnh cô lập.
+ Nhiều cạnh có chung 1 đỉnh → ta xem là 1 thành phần

<u>Ví dụ</u>:

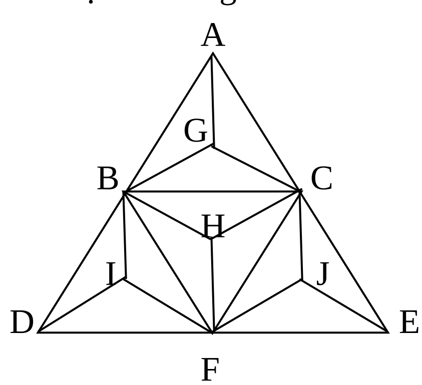



Đây là đồ thị có 3 thành phần



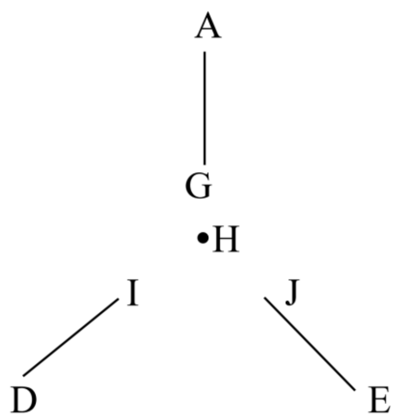

Đây là đồ thị có 1 thành phần.

<u>Ví dụ mẫu</u>: Cho **G** là đồ thị vô hướng có biểu đồ sau




Ta chọn 1 nhóm 3 đỉnh B, C, F để xóa khỏi G (do đây là 3 đỉnh có bậc 7, là bậc cao nhất của các đỉnh trong G), cùng với các cạnh liên quan.

Đồ thị lúc này còn lại là:




Đồ thị lúc này còn lại 4 thành phần là 3 cạnh: AG, DI, EJ, cùng với 1 đỉnh H cô lập, nên số thành phần còn lại = 4 > 3 là số đỉnh đã xóa → **G** không có chu trình Hamilton.

***<u>Lưu ý 3</u>***: (định lý **Dirac**) (dành cho đồ thị vô hướng)

Cho **G** là một đồ thị vô hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Nếu mọi đỉnh của **G** đều có bậc $\geq \frac{n}{2}$ thì **G** có chu trình Hamilton (với $n \geq 3$ là số đỉnh của đồ thị).

***<u>Lưu ý 4</u>***: (định lý **Ore**) (dành cho đồ thị vô hướng)

Cho **G** là một đồ thị vô hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

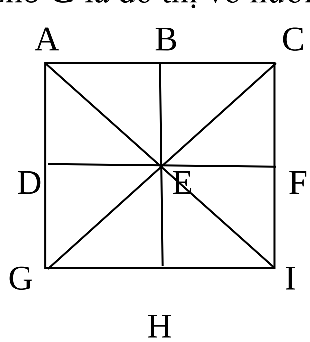
Nếu mọi cặp đỉnh $u, v$ *không kề nhau* của **G** đều thỏa $\deg(u) + \deg(v) \leq n$ thì **G** có chu trình Hamilton (với $n \geq 3$ là số đỉnh của đồ thị).

***<u>Lưu ý 5</u>***: (dành cho đồ thị có hướng) (định lý **König**)

Cho **G** là đồ thị có hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Nếu **G** là đồ thị đầy đủ thì G có đường đi Hamilton.

<u>Ví dụ mẫu 1</u>: Cho **G** là đồ thị vô hướng, có biểu đồ sau




Hỏi **G** có chu trình (đường đi) Hamilton? Vì sao? Nếu có, hãy tìm 1 chu trình (đường đi) Hamilton cho **G**.

Giải:

Ta thấy mọi cặp đỉnh $u, v$ bất kỳ, không kề nhau, của **G** đều có bậc 3, nên

$$\deg(u) + \deg(v) = 6 < 9 = n \text{ là số đỉnh của } \mathbf{G},$$

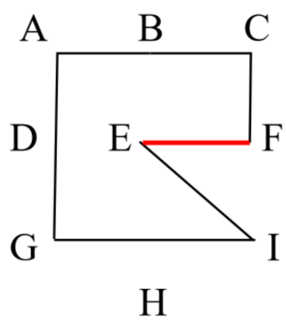
Nên theo định lý **Ore** thì **G** có chu trình Hamilton.

Gọi $c_H$ là chu trình Hamilton cần tìm.

Chọn đỉnh E làm đỉnh xuất phát (do E là đỉnh có bậc 8 là bậc lớn nhất trong số các bậc của các đỉnh).

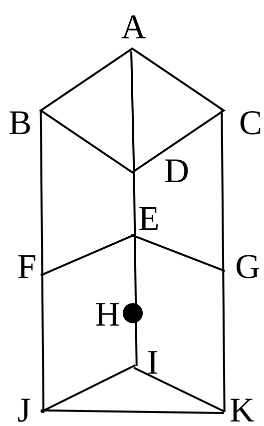
$c_H = E$ .

Ta có:




Vậy chu trình Hamilton cần tìm là $c_H = EIHGDABCFE$ .

Ví dụ mẫu 2: Cho **G** là đồ thị vô hướng, có biểu đồ sau:




Hỏi **G** có chu trình (đường đi) Hamilton? Vì sao? Nếu có, hãy tìm 1 chu trình (đường đi) Hamilton cho **G**.

Giải:

Ta thấy mọi cặp đỉnh $u, v$ bất kỳ, không kề nhau, của **G** đều có bậc tối đa là 4, nên

$$\deg(u) + \deg(v) \le 7 < 11 = n \text{ là số đỉnh của } \mathbf{G},$$

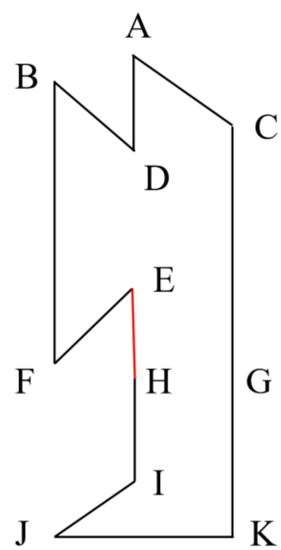
Nên theo định lý **Ore** thì **G** có chu trình Hamilton.

Gọi $c_H$ là chu trình Hamilton cần tìm.

Chọn đỉnh E làm đỉnh xuất phát (do E là đỉnh có bậc 4 là bậc lớn nhất trong số các bậc của các đỉnh).

$c_H = E$.

Ta có




Vậy chu trình Hamilton cần tìm là

$$c_H = EFBDACGKJIHE.$$

Bài tập tương tự:

1/ Hỏi đồ thị **G** trong ví dụ mẫu 1, ví dụ mẫu 2 (của phần đường đi và chu trình Euler), cùng với 5 bài tập của phần đường đi và chu trình Euler (bài a/ đến e/) có chu trình (đường đi) Hamilton hay không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm một chu trình (đường đi) Hamilton cho **G**.

2/ Hãy vẽ biểu đồ minh họa cho đồ thị **G** vô hướng (nếu có) trong các trường hợp sau:

a/ Có chu trình Euler và không có chu trình Hamilton (giải thích vì sao không có).

b/ Không có chu trình Euler và có chu trình Hamilton (giải thích vì sao không có).

c/ Không có chu trình Euler và không có chu trình Hamilton (giải thích vì sao không có).

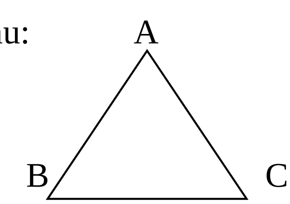
d/ Có chu trình Euler và có chu trình Hamilton trong 2 trường hợp:

d1/ Hai chu trình trùng nhau.

d2/ Hai chu trình khác nhau.

Ví dụ:

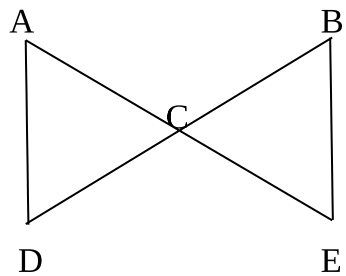
Hai chu trình trùng nhau:



Ta có chu trình Euler: $c_E = ABCA$.

Ta có chu trình Hamilton là: $c_H = ABCA \equiv ACBA$, nên 2 chu trình là trùng nhau.

<u>Ví dụ khác</u>:




Ta có chu trình Euler do mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn, ví dụ: $c_E = CADCBEC$

Ta chọn l đỉnh là C và xóa C khỏi đồ thị cùng các cạnh liên quan, thì đồ thị còn lại là:


Nghĩa là đồ thị còn lại 2 thành phần (là 2 cạnh AD, BE) nhiều hơn 1 đỉnh đã xóa, nên G không có chu trình Hamilton.