

Bài tập quá trình

BTQT Buỗi 2:

Words: 50%. Latex: 30%, HTML: 20%, 40% tài liệu viết bởi words nhiều 10 trang, 20% viết bởi Latex hơn 10 trang, 30% viết bởi HTML hơn 10 trang. Giả sử chọn ngẫu nhiên 1 tài liệu biết rằng nó dài hơn 10 trang thì xác suất tài liệu đó viết bởi words

Áp dụng đtl. Bayes.

$$P(W|D) = \frac{P(D|W) P(W)}{P(D)}$$

$$P(W) = 0,4, P(L) = 0,2, P(H) = 0,3 \\ P(D|W) = 0,1, P(D|L) = 0,2, P(D|H) = 0,3$$

$$P(D) = P(D|W) P(W) + P(D|L) P(L) + P(D|H) P(H) \\ = 0,1 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,3 = 0,17$$

$$P(W|D) = \frac{0,1 \cdot 0,4}{0,17} \approx 0,235$$

BTQT Buổi 3:

Ví dụ 2.34 Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$$

Cho biến ngẫu nhiên $Y = 3X - 2$. Tính $E(Y)$ và $\text{Var}(Y)$.

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = 3 \int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{4}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx = 3 \int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{5}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$$

Cho $Y = aX + b = 3X - 2$.

$$E(Y) = a \cdot E(X) + b = 3 \cdot \frac{3}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Var}(Y) = a^2 \cdot \text{Var}(X) = 9 \cdot \frac{3}{80} = \frac{27}{80}$$

$$\Rightarrow E(Y) = \frac{1}{4}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{27}{80}$$

BTQT Buổi 5:

Gieo đồng thời 3 con xúc xắc 1000 lần độc lập với nhau. Đặt X_i là số số nguyên tố xuất hiện ở mặt trên của 3 con xúc xắc khi gieo lần thứ i với $1 \leq i \leq 1000$. Tính $P(X_1 + X_2 + \dots + X_{1000} > 1550)$.

B1. Có 3 nòi nguyên tố (2, 3, 5) trên 6 mặt $\Rightarrow p = \frac{3}{6} = 0,5$

Đặt X_i là số lượng nguyên tố trong 3 kết quả.

$\Rightarrow X_i \sim \text{Binomial}(n=3, p=0,5)$.

$$E(X_i) = n \cdot p = 1,5.$$

$$\text{Var}(X_i) = n \cdot p(1-p) = 0,75.$$

B2. TÍC: $S = \sum_{i=1}^{1000} X_i$

$$E(S) = 1000 \cdot 1,5 = 1500$$

$$\text{Var}(S) = 1000 \cdot 0,75 = 750.$$

$$S = \sqrt{750} \approx 27,3861.$$

B3.

$$P(S > 1550) = P\left(\frac{S - 1500}{\sqrt{750}} > \frac{1550 - 1500}{\sqrt{750}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{50}{\sqrt{750}}\right) = P(Z > 1,826)$$

$$\approx 1 - \Phi(1,826)$$

$$\approx 1 - 0,9661$$

$$= 0,0339.$$

Một hộp chứa 10000 viên bi trong đó có 500 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 10 bi (không thay thế). Xác suất trong 10 bi lấy ra có nhiều nhất 1 bi đỏ là bao nhiêu?

$$\text{Tổng bi } N = 10000$$

$$\text{Bi đỏ } K = 500$$

$$\text{Bi }\neq \text{đỏ} : N - K = 9500$$

$$n = 10$$

Xác suất có nhiều bi đỏ: $P(X=0) + P(X=1)$

$P(X=0)$: có viên nào đỏ.

$$P(X=0) = \frac{\binom{500}{0} \binom{9500}{10}}{\binom{10000}{10}} = \frac{1 \cdot \frac{9500}{10}}{\frac{10000}{10}}$$

$P(X=1)$: có đúng 1 viên đỏ;

$$P(X=1) = \frac{\binom{500}{1} \cdot \binom{9500}{9}}{\binom{10000}{10}} = \frac{500 \cdot \frac{9500}{9}}{\frac{10000}{10}}$$

$$\text{Gọi } p = \frac{500}{10000} = 0,05$$

$$P(X=0) = \left(\frac{10}{10}\right) p^0 (1-p)^{10} = (0,95)^{10} \approx 0,5987$$

$$P(X=1) = \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95^9 \approx 0,3151.$$

\Rightarrow Tổng xác suất có nhiều 1 viên bi đỏ:

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) \approx 0,9138 \\ \approx 91,38\%$$

Người ta thấy rằng xác suất những người sống đến 65 tuổi ở một thị trấn nọ là 0,8. Chọn ngẫu nhiên 500 người. Dùng xấp xỉ phân phối chuẩn, tính xác suất có từ 375 đến 425 người sống đến 65 tuổi.

$$P(375 \leq X \leq 425) = P(374,5 \leq X \leq 425,5)$$

$$P(X \leq 425,5) \Rightarrow Z_1 = \frac{425,5 - 400}{8,944} \approx 2,85$$

$$P(X \geq 374,5) \Rightarrow Z_2 = \frac{374,5 - 400}{8,944} \approx -2,85$$

Tính xác suất trong khoảng $-2,85 \leq Z \leq 2,85$. Tính bằng bảng phân phối chuẩn.

$$P(Z \leq 2,85) \approx 0,9978$$

$$P(Z \leq -2,85) \approx 0,0022$$

$$\Rightarrow P(375 \leq X \leq 425) = P(Z \leq 2,85) - P(Z \leq -2,85) \\ = 0,9956$$