

Chương 4: Vec tơ ngẫu nhiên

4.1 Vec tơ ngẫu nhiên rời rạc

Nguyễn Văn Hời

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Bộ môn Toán - Lý





Nội dung

- Khái niệm.
- Phân phối xác suất (ppxs) đồng thời (the joint probability mass functions).
- Phân phối xác suất thành phần (the marginal mass functions).
- Phân phối xác suất có điều kiện (the conditional mass function).



Nam
Nữ

-

	Y=0	Y=1	Y=2	Tổng
X=0	0,15	0,20	0,20	0,55
X=1	0,10	0,30	0,05	0,45
Tổng	0,25	0,50	0,25	1

$(X, Y) \sim \text{multinomial}$
 BCR^2

Hình: X: giới tính; Y: sở thích.

Chuẩn hóa phát biểu trước bằng ký hiệu toán học:

$$P(\text{nam, cine}) = P(X = 0, Y = 0) = p_{XY}(0, 0). \quad (\text{ppxs đồng thời}). \quad (1)$$

$$P(\text{nam}) = P(X = 0) = \sum_{i=0}^2 p_{XY}(0, i) = p_X(0). \quad (\text{ppxs thành phần theo X}). \quad (2)$$

$$P(\text{nữ}|\text{café}) = \frac{p_{XY}(1, 0)}{p_Y(0)} = p_{X|Y}(1|0).$$



	Y=0	Y=1	Y=2	Tổng
X=0	0,15	0,20	0,20	0,55
X=1	0,10	0,30	0,05	0,45
Tổng	0,25	0,50	0,25	1

$a_2 \neq 0,55 \cdot 0,5$
↓
 X, Y phụ thuộc

Hình: X: giới tính; Y: sở thích.

Chuẩn hóa phát biểu trước bằng ký hiệu toán học:

$$P(\text{nam}, \text{cine}) = P(X = 0, Y = 0) = p_{XY}(0, 0). \quad (\text{ppxs đồng thời}). \quad (1)$$

$$P(\text{nam}) = P(X = 0) = \sum_{i=0}^2 p_{XY}(0, i) = p_X(0). \quad (\text{ppxs thành phần theo X}). \quad (2)$$

$$P(\text{nữ} | \text{café}) = \frac{p_{XY}(1, 0)}{p_Y(0)} = p_{X|Y}(1|0). \quad (\text{ppxs có điều kiện}). \quad (3)$$



□ Nếu X, Y là 2 biến ngẫu nhiên thì (X, Y) được gọi là một vec tơ ngẫu nhiên. Phân phối xác suất có điều kiện được cho bởi:

$$p_{X|Y}(x_i|y_j) = \frac{p_{XY}(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}, \quad p_{Y|X}(y_j|x_i) = \frac{p_{XY}(x_i, y_j)}{p_X(x_i)}. \quad (4)$$

	$Y = y_1$...	$Y = y_n$	Tổng
$X = x_1$	$p_{XY}(x_1, y_1)$...	$p_{XY}(x_1, y_n)$	$p_X(x_1) = \sum_j p_{XY}(x_1, y_j)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$X = x_m$	$p_{XY}(x_1, y_n)$...	$p_{XY}(x_1, y_n)$	$p_X(x_m) = \sum_j p_{XY}(x_m, y_j)$
Tổng	$p_Y(y_1) = \sum_i p_{XY}(x_i, y_1)$		$p_Y(y_n) = \sum_i p_{XY}(x_i, y_n)$	1



	$Y = y_1$...	$Y = y_n$	Tổng
$X = x_1$	$p_{XY}(x_1, y_1)$...	$p_{XY}(x_1, y_n)$	$p_X(x_1) = \sum_j p_{XY}(x_1, y_j)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$X = x_m$	$p_{XY}(x_m, y_1)$...	$p_{XY}(x_m, y_n)$	$p_X(x_m) = \sum_j p_{XY}(x_m, y_j)$
Tổng	$p_Y(y_1) = \sum_i p_{XY}(x_i, y_1)$		$p_Y(y_n) = \sum_i p_{XY}(x_i, y_n)$	1

□ X, Y độc lập với nhau nếu và chỉ nếu

$$p_{XY}(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j), \quad \forall i, j. \quad (5)$$



❑ Ở ví dụ mở đầu, hãy tìm phân phối xác suất có điều kiện? Hai biến ngẫu nhiên X và Y có độc lập với nhau không?

	Y=0	Y=1	Y=2	Tổng
X=0	0,15	0,20	0,20	0,55
X=1	0,10	0,30	0,05	0,45
Tổng	0,25	0,50	0,25	1

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(0|0) &= 0,15/0,25 & p_{X|Y}(0|1) &= 0,2/0,5 & p_{X|Y}(0|2) &= 0,2/0,25 \\ p_{X|Y}(1|0) &= 0,1/0,25 & p_{X|Y}(1|1) &= 0,3/0,5 & p_{X|Y}(1|2) &= 0,05/0,25. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} p_{Y|X}(0|0) &= 0,15/0,55 & p_{Y|X}(1|0) &= 0,2/0,55 & p_{Y|X}(2|0) &= 0,2/0,55 \\ p_{Y|X}(0|1) &= 0,1/0,45 & p_{Y|X}(1|1) &= 0,3/0,45 & p_{Y|X}(2|1) &= 0,05/0,45. \end{aligned} \quad (7)$$

Nhận thấy $p_{XY}(0,1) \neq p_X(0)p_Y(1)$, nên X và Y không độc lập.



Ví dụ: Một chương trình bao gồm hai mô-đun. Đặt X là biến ngẫu nhiên số lỗi trong mô-đun 1 và Y là biến ngẫu nhiên chỉ số lỗi trong mô-đun 2 có xác suất đồng thời như sau $p_{XY}(0,0) = p_{XY}(0,1) = p_{XY}(1,0) = 0,2$;

$p_{XY}(1,1) = p_{XY}(1,2) = p_{XY}(1,3) = 0,1$; $p_{XY}(0,2) = p_{XY}(0,3) = 0,05$.

a. Tìm phân phối xác suất thành phần của X và Y . Các lỗi trong hai mô-đun có xảy ra độc lập hay không?

Giải: Lập bảng phân phối xác suất

	Y=0	Y=1	Y=2	Y=3	Tổng
X=0	0,2	0,2	0,05	0,05	0,5
X=1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,5
Tổng	0,4	0,3	0,15	0,15	1

$P_X(0)$

$P_X(1)$

$P_X(0)$ $P_Y(1)$ $P_Y(2)$ $P_Y(3)$



	Y=0	Y=1	Y=2	Y=3	Tổng
X=0	0,2	0,2	0,05	0,05	0,5
X=1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,5
Tổng	0,4	0,3	0,15	0,15	1

Dựa vào bảng trên ta được: Phân phối xác suất thành phần theo X được cho bởi

$$p_X(0) = 0,5, \quad p_X(1) = 0,5.$$

Phân phối xác suất thành phần theo Y được cho bởi

$$P_Y(0) = 0,4, \quad p_Y(1) = 0,3, \quad p_Y(2) = 0,15, \quad p_Y(3) = 0,15.$$

Ngoài ra, vì

$$p_{XY}(0,1) = 0,2 \neq 0,15 = p_X(0)p_Y(1)$$

nên hai biến ngẫu nhiên X và Y không độc lập.



b. Tìm phân phối của tổng số lỗi trong chương trình.

$$Z = X + Y.$$

0, 1, 2, 3, 4

Các giá trị mà Z có thể nhận được và xác suất của nó:

- $P(Z = 0) = P(X = 0, Y = 0) = 0,2.$
- $P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) = 0,2 + 0,2 = 0,4.$
- $P(Z = 2) = P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1) = 0,05 + 0,1 = 0,15.$
- $P(Z = 3) = P(X = 0, Y = 3) + P(X = 1, Y = 2) = 0,05 + 0,1 = 0,15.$
- $P(Z = 4) = P(X = 1, Y = 3) = 0,1.$



c. Giả sử chương trình có lỗi. Tính xác suất mô-đun 1 có lỗi.

$$P(\underline{X \geq 1} | Z \geq 1) = \overset{A}{P(\underline{X = 1} | Z \geq 1)} = \frac{P(\overset{B}{X = 1 \cap Z \geq 1})}{P(Z \geq 1)} = \frac{P(X = 1)}{P(Z \geq 1)} = \frac{0,5}{0,8}.$$

d. Giả sử mô-đun 1 có lỗi. Tính xác suất mô-đun 2 có lỗi.

$$P(\underline{Y \geq 1} | \underline{X \geq 1}) = \frac{P(\overset{A}{X = 1 \cap} \overset{B}{Y \geq 1})}{P(\overset{C}{X = 1})} = \frac{p_{XY}(\overset{D}{1,1}) + p_{XY}(\overset{E}{1,2}) + p_{XY}(\overset{F}{1,3})}{p_X(\overset{G}{1})} = \frac{0,3}{0,5}.$$

$$(X=1) \cap (Y \geq 1)$$

/



Bài tập

Câu 1: Một hộp có 7 bi đỏ, 2 bi vàng và 3 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 5 bi từ hộp. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số bi đỏ và Y là biến ngẫu nhiên chỉ số bi vàng trong 5 bi lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất đồng thời của X và Y .
- Tính $P(X + Y \leq 1)$ và $P(1 \leq X \leq 4)$.
- Tìm các phân phối xác suất thành phần của X và Y .
- Tìm phân phối xác suất có điều kiện. Hai biến ngẫu nhiên X, Y có độc lập với nhau không?

Câu 2: Hoàn thành bảng sau biết $P(Y = 1|X = 0) = 0,5$, $P(Y = 1|X = 1) = 0,25$ và $P(Y = 0) = 0,2$.

	X=0	X=1	Tổng
Y=0			
Y=1			
Y=2		30	
Tổng	120	80	200