Buổi 04 – Ngày 16-03-2025 – môn Cấu trúc rời rạc – lớp MA004.E22.LT.CNTT

3/ QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG (EQUIVALENT RELATIONSHIP):

Cho tập hợp $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ và R là một quan hệ 2 ngôi trên *X*.

Ta nói R là quan hệ tương đương khi và chỉ khi R có các tính chất:

$$\begin{cases} \text{+ Tính phản xạ;} \\ \text{+ Tính đối xứng;} \\ \text{+ Tính truyền (tính bắc cầu).} \end{cases}$$

Khi R là một quan hệ tương đương trên *X*, ta định nghĩa:

$\bar{x} = [x]_{\mathbf{R}} = \{y \in X \mid y\mathbf{R}x\}$ = lớp tương đương chứa x trên *X*.

Ta gọi tập hợp bao gồm các lớp tương đương chứa x trên *X* là ***tập hợp thương*** xét theo quan hệ R trên *X* và kí hiệu là:

X/R = $\{[x_1]_{\mathbf{R}}, [x_2]_{\mathbf{R}}, ..., [x_n]_{\mathbf{R}}\}$

Từ đây ta có thể viết lại tập hợp *X* dưới dạng phân hoạch của các lớp tương đương xét theo quan hệ R là:

$$X = [x_1]_{\mathbf{R}} \cup [x_2]_{\mathbf{R}} \cup ... \cup [x_n]_{\mathbf{R}}$$

Ví dụ mẫu 1:

Cho tập hợp $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$, với $x, y \in X$

a/ Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên *X*.

b/ Hãy chỉ ra các lớp tương đương xét theo quan hệ R trên *X*; và tập hợp thương tương ứng. Từ đó, viết lại *X* dưới dạng phân hoạch của các lớp tương đương xét theo R trên *X*.

Giải:

a/ Ta chứng minh R là quan hệ tương đương trên *X* như sau:

* *Tính phản xạ*:

$\forall x \in X$, ta có $x\mathbf{R}x \Leftrightarrow |x| = |x|$ luôn đúng.

Cho nên ta nói R là quan hệ có tính phản xạ (1).

* *Tính đối xứng*:

Giả sử: $x\mathbf{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$, với $x, y \in X$

$\Rightarrow |y| = |x|$, với $x, y \in X$

$\Rightarrow y\mathbf{R}x$, với $x, y \in X$

Cho nên ta nói R có tính đối xứng (2)

* *Tính truyền (tính bắc cầu)*:

Giả sử: $\begin{cases} x\mathbf{R}y \\ y\mathbf{R}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ |y| = |z| \end{cases}$, với $x, y, z \in X$

$\Rightarrow |x| = |y| = |z|$, với $x, y, z \in X$.

$\Rightarrow |x| = |z|$, với $x, y, z \in X$.

$\Rightarrow x\mathbf{R}z$, với $x, y, z \in X$.

Cho nên ta nói R có tính truyền (bắc cầu) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra R là quan hệ tương đương trên *X*.

b/ Các lớp tương đương xét theo quan hệ R trên *X* là:

$\overline{-3} = [-3]_{\mathbf{R}} = \{-3, 3\} = [3]_{\mathbf{R}} = \overline{3}$

$\overline{-2} = [-2]_{\mathbf{R}} = \{-2, 2\} = [2]_{\mathbf{R}} = \overline{2}$

$\overline{-1} = [-1]_{\mathbf{R}} = \{-1, 1\} = [1]_{\mathbf{R}} = \overline{1}$

$\overline{0} = [0]_{\mathbf{R}} = \{0\}$

$\overline{1} = [1]_{\mathbf{R}} = \{-1, 1\}$

$\overline{2} = [2]_{\mathbf{R}} = \{-2, 2\}$

$\overline{3} = [3]_{\mathbf{R}} = \{-3, 3\}$

$\overline{4} = [4]_{\mathbf{R}} = \{4\}$

$\overline{5} = [5]_{\mathbf{R}} = \{5\}$

Từ đây ta có tập hợp thương xét theo quan hệ R trên *X* là:

X/R = $\{ [0]_{\mathbf{R}}, [1]_{\mathbf{R}}, [2]_{\mathbf{R}}, [3]_{\mathbf{R}}, [4]_{\mathbf{R}}, [5]_{\mathbf{R}} \}$

và ta viết lại *X* dưới dạng phân hoạch của các lớp tương đương xét theo quan hệ R trên *X* là

$X = [0]_{\mathbf{R}} \cup [1]_{\mathbf{R}} \cup [2]_{\mathbf{R}} \cup [3]_{\mathbf{R}} \cup [4]_{\mathbf{R}} \cup [5]_{\mathbf{R}}$

<u>Bài tập tương tự</u>:

Yêu cầu như bài ví dụ mẫu 1.

<u>Bài 1</u>: Cho tập hợp $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow (x + y)$ là số chẵn, với $x, y \in X$

<u>Bài 2</u>: Cho tập hợp $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow (x^2 + y^2) \vdots 2$, với $x, y \in X$

<u>Bài 3</u>: Cho tập hợp $X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x^4 = y^4$, với $x, y \in X$

<u>Bài 4</u>: Cho tập hợp $X = \{-3, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 7\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x^3 = y^3$, với $x, y \in X$

Bài 5: Cho tập hợp $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X như sau

$$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \equiv y(\bmod 2) \Leftrightarrow (x-y)\vdots 2, \text{ với } x, y \in X$$

Bài 6: Cho tập hợp $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X như sau

$$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \equiv y(\bmod 3) \Leftrightarrow (x-y)\vdots 3, \text{ với } x, y \in X$$

Bài 7: Cho tập hợp $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X như sau

$$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \equiv y(\bmod 4) \Leftrightarrow (x-y)\vdots 4, \text{ với } x, y \in X$$

Bài 8: Cho tập hợp $X = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X như sau

$$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow (2x+3y)\vdots 5, \text{ với } x, y \in X$$

Bài 9: Cho tập hợp $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X như sau

$$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x = y, \text{ với } x, y \in X$$

Bài 10: Cho tập hợp $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X như sau

$$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x^3 - 4x = y^3 - 4y, \text{ với } x, y \in X$$

4/ QUAN HỆ THỨ TỰ (ORDINAL RELATIONSHIP):

Cho tập hợp X và R là một quan hệ 2 ngôi trên X.

Ta nói R là quan hệ thứ tự nếu và chỉ nếu R có các tính chất:

$$\begin{cases} \text{+ Tính phản xạ;} \\ \text{+ Tính phản đối xứng;} \\ \text{+ Tính truyền (tính bắc cầu)} \end{cases}$$

Khi R là quan hệ thứ tự trên X, ta xét

+ R là quan hệ thứ tự toàn phần, khi và chỉ khi $x\mathbf{R}y$ hay $y\mathbf{R}x$, với mọi $x, y \in X$.

+ R là quan hệ thứ tự không toàn phần (bán phần) khi có $x_0 \in X$ và $y_0 \in X$ sao cho

$$\begin{cases} x_0 \overline{\mathbf{R}} y_0 \\ y_0 \overline{\mathbf{R}} x_0 \end{cases}$$

Ở đây ta xét aRb, với R là quan hệ thứ tự, theo nghĩa là a "có xu hướng" nhỏ hơn b.

Ví dụ: Cho X = {1,2,3,4} và quan hệ thứ tự R là $x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \le y$, với $x, y \in X$

+ Quan hệ này là toàn phần, vì với mọi $x, y \in X$ ta luôn xét được quan hệ $x \le y$ hay $y \le x$.

+ Ta xét 2R4 theo nghĩa $2 \le 4$, nghĩa là 2 có xu hướng nhỏ hơn hay bằng 4

Ví dụ khác: Cho X = {1,2,3,4} và quan hệ thứ tự R là $x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \ge y$, với $x, y \in X$

+ Quan hệ này là toàn phần, vì với mọi $x, y \in X$ ta luôn xét được quan hệ $x \ge y$ hay $y \ge x$.

+ Ta xét 4R3 theo nghĩa $4 \geq 3$, nghĩa là 4 có xu hướng nhỏ hơn hay bằng 3.

* ***Biểu đồ Hasse của quan hệ thứ R trên X***:

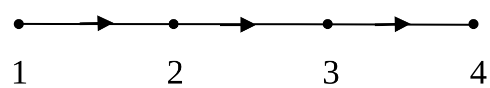
Là một dạng hình học minh họa cho quan hệ thứ tự R trên *X*, theo quy tắc:

+ Mỗi đỉnh: được minh họa bằng 1 chấm điểm trên Oxy hoặc Oxyz, thể hiện cho 1 phần tử trong *X*.

+ Mỗi cạnh (có hướng): được minh họa bằng 1 đoạn nối trực tiếp giữa 2 đỉnh a,b theo thứ tự a hướng mũi tên về b nếu aRb.

<u>Ví dụ</u>: Cho *X* = {1,2,3,4} và quan hệ thứ tự R là $x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \leq y$, với $x, y \in X$

Ta có biểu đồ Hasse như sau:



Ta có 1 là phần tử tối tiểu xét theo R trên *X*.

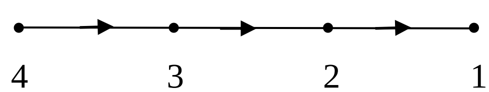
4 là phần tử tối đại xét theo R trên *X*.

Ta có 1 là phần tử cực tiểu xét theo R trên *X*.

4 là phần tử cực đại xét theo R trên *X*.

<u>Ví dụ khác</u>: Cho *X* = {1,2,3,4} và quan hệ thứ tự R là $x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \geq y$, với $x, y \in X$

Ta có biểu đồ Hasse như sau:



Ta có 4 là phần tử tối tiểu xét theo R trên *X*.

1 là phần tử tối đại xét theo R trên *X*.

Ta có 4 là phần tử cực tiểu xét theo R trên *X*.

1 là phần tử cực đại xét theo R trên *X*.

<u>Ví dụ khác nữa</u>:

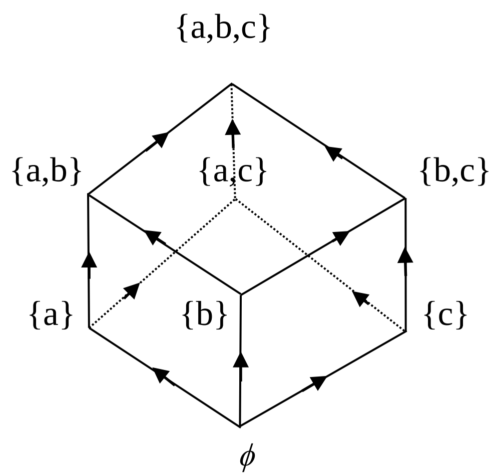
Cho $X = \{a, b, c\}$ và E = tập hợp chứa tất cả các tập hợp con của *X*, nghĩa là

E = { $\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$ }

Và R là quan hệ thứ tự trên E như sau:

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \subseteq y$, với x, y là các tập hợp trên E.

Ta có biểu đồ Hasse của R như sau:



Ta có ϕ là phần tử tối tiểu xét theo R trên E.

{a,b,c} là phần tử tối đại xét theo R trên E.

Ta có ϕ là phần tử cực tiểu xét theo R trên E.

{a,b,c} là phần tử cực đại xét theo R trên E.

* ***<u>Phần tử tối đại, tối tiểu, cực đại, cực tiểu, xét theo quan hệ thứ tự R trên X</u>***.

Cho tập hợp *X* và R là quan hệ thứ tự trên *X*.

Ta nói a là phần tử ***tối tiểu (minimal element)*** của *X* xét theo R nếu và chỉ nếu

$\forall x \in X, x\overline{\mathbf{R}}\,\mathrm{a}$

Ta nói b là phần tử ***tối đại (maximal element)*** của *X* xét theo R nếu và chỉ nếu

$\forall x \in X, \mathrm{b}\,\overline{\mathbf{R}}x$

Ta nói c là phần tử ***cực tiểu (minimum element)*** của *X* xét theo R nếu và chỉ nếu

c là phần tử ***tối tiểu*** và c là ***duy nhất***

Nếu có nhiều tối tiểu thì ta không có cực tiểu.

Ta nói d là phần tử ***cực đại (maximum element)*** của *X* xét theo R nếu và chỉ nếu

d là phần tử ***tối đại*** và d là ***duy nhất***

Nếu có nhiều tối đại thì ta không có cực đại.

* Ta gọi cấu trúc (*X*,R), với R là quan hệ thứ tự trên *X*, là cấu trúc được sắp tốt (có thứ tự tốt) nếu *X* có phần tử cực tiểu xét theo R trên *X*.

<u>Ví dụ</u>:

Cấu trúc $(\mathbb{N}, \leq)$ là cấu trúc được sắp tốt do có phần tử cực tiểu là min = 0

Cấu trúc $(\mathbb{N}, \geq)$ là cấu trúc không được sắp tốt do không có phần tử cực tiểu.

Cấu trúc $(\mathbb{Z}^{+}, \leq)$ là cấu trúc được sắp tốt do có phần tử cực tiểu là min = 1

Cấu trúc $(\mathbb{Z}^+, \geq)$ là cấu trúc không được sắp tốt do không có phần tử cực tiểu.

Cấu trúc $(\mathbb{Z}^-, \leq)$ là cấu trúc không được sắp tốt do không có phần tử cực tiểu.

Cấu trúc $(\mathbb{Z}^-, \geq)$ là cấu trúc được sắp tốt do có phần tử cực tiểu là min = -1.

Ví dụ mẫu 2:

Cho tập hợp $X = \{2,3,5,7,8,14,16,20,24,27,30,32,40,42,48\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X

$$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \vdots y \Leftrightarrow x \text{ là bội số của } y \text{, với } x, y \in X .$$

a/ Chứng minh rằng R là quan hệ thứ tự trên *X*.

b/ Hỏi R có toàn phần không? Vì sao?

c/ Vẽ biểu đồ Hasse cho quan hệ R trên *X*.

d/ Tìm phần tử tối đại, tối tiểu, cực đại, cực tiểu, xét theo R trên *X* (nếu có)

e/ Hỏi cấu trúc (*X*,R) có được sắp tốt không? Vì sao?

Giải:

a/ Ta chứng minh R là quan hệ thứ tự trên *X* như sau:

* *Tính phản xạ*:

$\forall x \in X$ ta có $x\mathbf{R}x \Leftrightarrow x \vdots x$ luôn đúng

Cho nên ta nói R có tính phản xạ (1)

* *Tính phản đối xứng*:

Giả sử: $\begin{cases} x\mathbf{R}y \\ y\mathbf{R}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \vdots y \\ y \vdots x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my \\ y = nx \end{cases}$, với $x, y \in X$.

$\Rightarrow x = m(nx) = (mn)x \Rightarrow mn = 1$, với $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$ (nhận) hay $\begin{cases} m = -1 \\ n = -1 \end{cases}$ (loại)

$\Rightarrow x = my = 1y = y \Rightarrow x = y$

Cho nên ta nói R có tính phản đối xứng (2)

* *Tính truyền (bắc cầu)*:

Giả sử: $\begin{cases} x\mathbf{R}y \\ y\mathbf{R}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \vdots y \\ y \vdots z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my \\ y = nz \end{cases}$, với $x, y, z \in X$.

$\Rightarrow x = m(nz) = (mn)z = kz$, với $k = mn, k \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow x = kz \Rightarrow x \vdots z \Rightarrow x\mathbf{R}z$

Cho nên ta nói R có tính truyền (3)

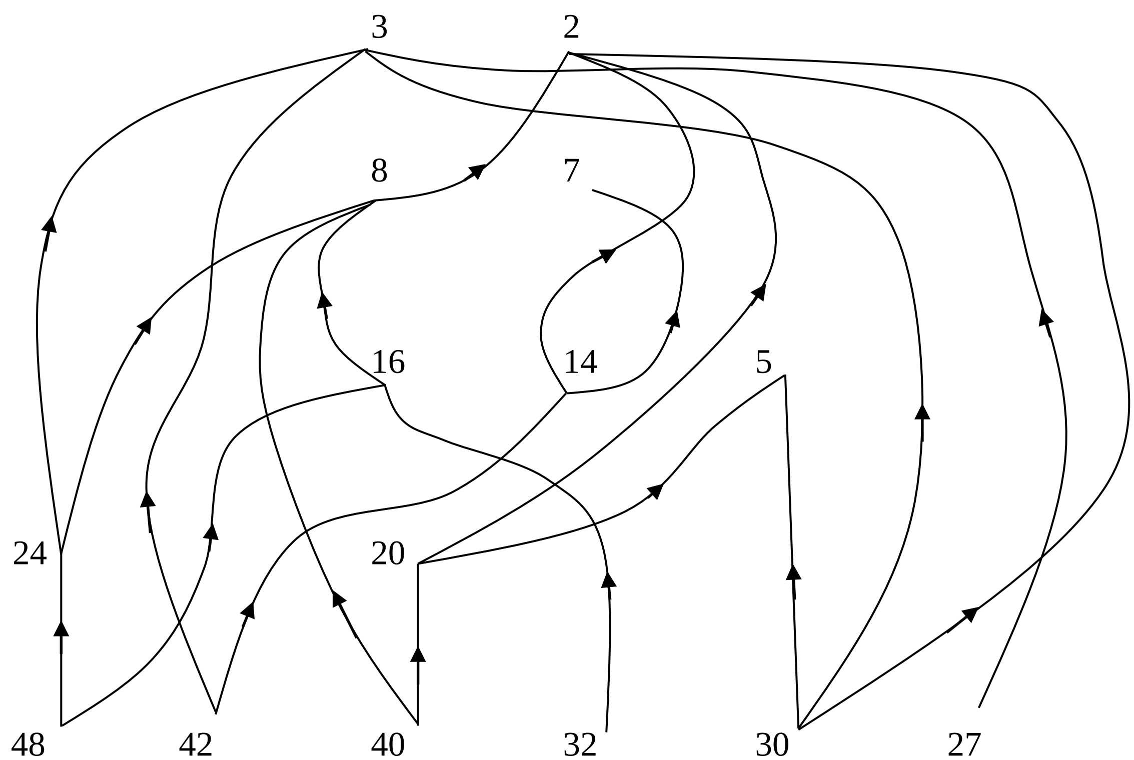
Từ (1), (2), (3) suy ra R là quan hệ thứ tự trên *X*.

b/ Hỏi R có toàn phần không? Vì sao?

Ta chọn $\begin{cases} x_0 = 3 \in X \\ y_0 = 5 \in X \end{cases}$ mà 3 không là bội của 5 và 5 cũng không là bội của 3, nghĩa là

$\begin{cases} x_0 \bar{\mathbf{R}} y_0 \\ y_0 \bar{\mathbf{R}} x_0 \end{cases}$ nên ta nói R là quan hệ thứ tự không toàn phần trên *X*.

c/ Vẽ biểu đồ Hasse:



d/ Từ biểu đồ Hasse ta có:

+ Phần tử tối đại: 3, 2, 7, 5

+ Phần tử tối tiểu: 48, 42, 40, 32, 30, 27

+ Phần tử cực đại: không có (do có nhiều tối đại)

+ Phần tử cực tiểu: không có (do có nhiều tối tiểu).

e/ Cấu trúc (*X*,R) là không được sắp tốt, do không có phần tử cực tiểu.

<u>*Bài tập tương tự*</u>.

Yêu cầu như ví dụ mẫu 2.

<u>Bài 11</u>: Cho $X = \{2,3,8,9,10,15,17,18,20,30,34,36,40\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau:

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \mid y \Leftrightarrow x$ là ước số của y, với $x, y \in X$.

Bài 12: Cho $X = \{2,3,8,9,10,15,17,18,20,30,34,36,40\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau:

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x = y$, với $x, y \in X$.

Bài 13: Cho $X = \{-3,-2,-1,0,3,5,7,9\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau:

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \le y$, với $x, y \in X$.

Bài 14: Cho $X = \{-3,-2,-1,0,3,5,7,9\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau:

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \ge y$, với $x, y \in X$.

Bài 15: Cho $X = \{a,b,c\}$ và E = tập hợp chứa tất cả các tập hợp con của *X*, nghĩa là

E = $\{ \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$

Và R là quan hệ thứ tự trên E như sau:

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \subseteq y$, với x, y là các tập hợp trên E.

Bài 16:

Cho $X = \{a,b,c\}$ và E = tập hợp chứa tất cả các tập hợp con của *X*, nghĩa là

E = $\{ \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$

Và R là quan hệ thứ tự trên E như sau:

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x \supseteq y$, với x, y là các tập hợp trên E.

Bài 17: Cho $X = \{-3,-2,0,1,5,7,8,10\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau:

$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow x^2 \ge y^2$, với $x, y \in X$.

CHƯƠNG 4: ĐẠI SỐ BOOL VÀ HÀM BOOL

1/ MỘT SỐ KHÁI NIỆM

Cho tập hợp $S = \{0,1\}$. (S = Set)

Trên S ta có 2 phép toán 2 ngôi: phép cộng (+), phép nhân (**.**), cùng với 1 phép toán 1 ngôi: phép lấy phần bù ($\bar{\ }$), thỏa:

$$\begin{cases} 0+0 = 0.0 = 0.1 = 1.0 = 0 \\ 1+0 = 0+1 = 1.1 = 1+1 = 1 \\ \bar{1} = 0 \\ \bar{0} = 1 \end{cases}$$

Ta gọi cấu trúc đại số $(S, +, \bullet, \bar{\ }, 0, 1)$ là một đại số Bool, và ký hiệu là B= $(S, +, \bullet, \bar{\ }, 0, 1)$.

Một hàm bool n biến là một ánh xạ

$$f : B^n \to B$$
$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Ví dụ:

Ta có hàm bool 3 biến $f:B^3\to B$, với

$$f(x,y,z)=(\overline{x\bar{y}+y\bar{z}}+xy)(\overline{\bar{x}z+y}+yz)+x\bar{y}\bar{z}$$

Ta có hàm bool 4 biến $f:B^4\to B$, với

$$f(x,y,z,t)=\left(\overline{\overline{xy\bar{z}+\bar{x}y}+yz+\bar{z}}+yz\bar{t}\right)(\bar{x}yz+\bar{y}\overline{t})+\overline{z\bar{t}+xyz}+y\bar{z}t$$

Từ công thức ban đầu của hàm bool f ta có thể viết lại f dưới dạng tổng các tích cơ bản của các biến, mà ta thường gọi là dạng chính tắc tuyển (dạng chính tắc nối rời) (disjunctive normal form – d.n.f) của f.

Ví dụ: ta có dạng chính tắc tuyển (chính tắc nối rời – d.n.f) của hàm bool 3 biến là:

$$f(x,y,z)=x\bar{y}z+xy\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}+xyz$$

Ví dụ: ta có dạng chính tắc tuyển (chính tắc nối rời – d.n.f) của hàm bool 4 biến là:

$$f(x,y,z,t)=\bar{x}yzt+xy\bar{z}t+\bar{x}yz\bar{t}+x\bar{y}z\bar{t}+xyz\bar{t}\vee xy\bar{z}\bar{t}\vee\bar{x}\bar{y}zt\vee\bar{x}\bar{y}\bar{z}t\vee xyzt$$

2/ CÁCH TÌM DẠNG CHÍNH TẮC NỐI RỜI (CHÍNH TẮC TUYỂN – D.N.F) CHO HÀM BOOL

a/ Cách 1: dùng bảng chân trị

+ Ta lập bảng chân trị cho f.

+ Ta xét các dòng làm cho chân trị của f bằng 1.

+ Ta viết công thức cho dạng d.n.f theo quy tắc:

- Các biến có chân trị bằng 0 thì ta ghi biến đó “có gạch đầu”
- Các biến có chân trị bằng 1 thì ta ghi biến đó “không có gạch đầu”

Lưu ý: ta có $\overline{xy}\neq\bar{x}.\bar{y}$ do $\overline{xy}\Leftrightarrow\bar{x}+\bar{y}$

Ví dụ mẫu: Tìm dạng chính tắc nối rời cho hàm bool

$$f:B^3\to B,\ \text{với}\ f(x,y,z)=\Big(\underbrace{x\bar{y}+\underbrace{\overline{y\bar{z}+\bar{x}z}}_{A}}_{B}\Big)\underbrace{(\underbrace{\overline{\bar{x}y\bar{z}+yz}}_{C}+xz)}_{D}+\bar{x}.\bar{y}$$

Giải:

Ta có bảng chân trị của f là:

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x\bar{y}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}z$	A	B	$\bar{x}y\bar{z}$	yz	C	xz	D	$\bar{x}.\bar{y}$	BD	f
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1

Từ bảng chân trị của f ta có dạng d.n.f là:

$$f(x,y,z)=\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}+\bar{x}.\bar{y}z+x\bar{y}.\bar{z}+x\bar{y}z+xyz$$

<u>Bài tập tương tự</u>: tìm dạng chính tắc tuyển (chính tắc nối rời) cho hàm bool sau:

1/ $f(x,y,z)=(\overline{x\bar{y}+\bar{z}}+xz)(\overline{xy\bar{z}+y}+y\bar{z})+\bar{x}y$

2/ $f(x,y,z)=\left(xy+\overline{\overrightarrow{yz+xz}+\bar{x}}\right)(x\bar{y}+\bar{y}z)+xy$

3/ $f(x,y,z)=\overline{\left(xy\bar{z}+\bar{y}z+\bar{x}y\right)}+xy+\overline{\bar{z}+\bar{x}z}$

4/ $f(x,y,z)=\left(x\bar{y}+y\bar{z}+\overline{x+\bar{z}}\right)(x\bar{y}\bar{z}+\overline{xz+y})+xy$

5/ $f(x,y,z)=\left(x\bar{y}+\overline{y\bar{z}+\bar{x}}\right)(xy+\overline{\bar{z}+\bar{y}z})+xz$

6/ $f(x,y,z,t)=\left(\overline{xy\bar{t}+\overline{yz+\bar{z}t}}+\bar{x}zt\right)(xy\bar{z}+zt+x\bar{y})+\bar{z}\bar{t}+yz$

7/ $f(x,y,z,t)=(x\bar{y}t+\overline{\bar{z}t+xy})(y\bar{t}+xyz)+xz\bar{t}+y\bar{z}+zt$

8/ $f(x,y,z,t)=(\overline{xy\bar{z}+y\bar{t}+yz}+xz)(x\bar{t}+\bar{x}y+zt)+xyt+\bar{z}\bar{t}$

9/ $f(x,y,z,t)=(z\bar{t}+\overline{yz+\bar{x}y\bar{z}}+y\bar{z})(xyt+z\bar{t})+xy+\bar{z}t+yz$

10/ $f(x,y,z,t)=(\overline{xyt+z\bar{t}}+yz)(y\bar{t}+\overline{\bar{x}z+zt})+x\bar{y}t+\bar{z}t+xy\bar{z}$

----

b/ *<u>Cách 2: biến đổi trực tiếp từ công thức</u>*

<u>Ví dụ mẫu</u>: Tìm công thức dạng chính tắc nối rời cho hàm bool:

$$f(x,y,z,t)=(xy\bar{t}+\bar{x}z)(y\bar{z}+xt)+\overline{yzt+\bar{z}t}+yzt$$

<u>Giải</u>:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,t)&=(xy\bar{t}+\bar{x}z)(y\bar{z}+xt)+\overline{yzt+\bar{z}t}+yzt\\
&=xy\bar{z}\bar{t}+(\bar{y}+\bar{z}+\bar{t})(z+\bar{t})+yzt\\
&=xy\bar{z}\bar{t}+\bar{y}z+\bar{y}\bar{t}+\bar{z}\bar{t}+z\bar{t}+\bar{t}+yzt\\
&=\bar{t}+\bar{y}z+yzt\\
&=(x+\bar{x})(y+\bar{y})(z+\bar{z})\bar{t}+(x+\bar{x})\bar{y}z(t+\bar{t})+(x+\bar{x})yzt\\
&=xyz\bar{t}+xy\bar{z}\bar{t}+x\bar{y}z\bar{t}+x\bar{y}.\bar{z}\bar{t}+\bar{x}yz\bar{t}+\bar{x}y\bar{z}\bar{t}\vee\bar{x}.\bar{y}z\bar{t}\vee\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}\bar{t}\vee x\bar{y}zt\vee\bar{x}.\bar{y}zt+xyzt+\bar{x}yzt
\end{aligned}$$

Đây là dạng d.n.f cần tìm của hàm bool f.

<u>Bài tập tương tự</u>: tìm dạng chính tắc nối rời cho hàm bool sau

11/ $f(x,y,z,t)=(\overline{xy\bar{t}+\bar{z}t+\bar{x}z}+yz)(\overline{xt+z\bar{t}}+yz)+xzt+z\bar{t}$

12/ $f(x,y,z,t)=(\overline{x\bar{y}+zt}+y\bar{t})(xz+\overline{\bar{y}t+xy})+x\bar{z}t+yz\bar{t}$

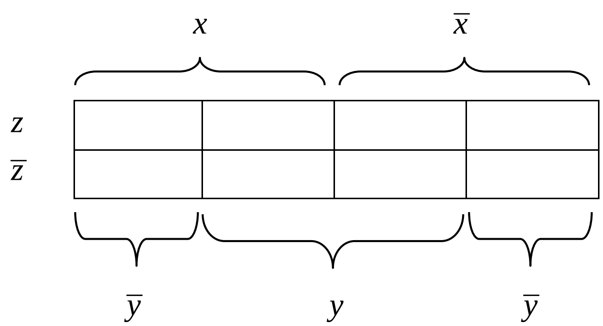
13/ $f(x,y,z,t)=(zt+\overline{x\bar{z}+yz\bar{t}})(xy+y\bar{z})+xyt+\overline{xz+\bar{z}t+y}$

14/ $f(x,y,z,t)=(xz+\overline{\bar{y}t+xy\bar{z}}+yt)(z\bar{t}+xy)+xyz+\overline{zt+x\bar{z}}$

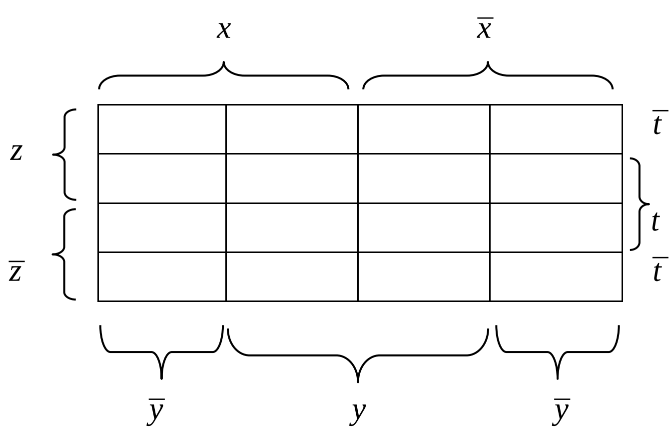
15/ $f(x,y,z,t)=(xz+\overline{y\bar{t}+xyz})(y\bar{z}\bar{t}+xz)+\overline{\bar{x}yt+\overline{y\bar{z}+zt}}+xy+\bar{z}\bar{t}$

c/ ***<u>Cách 3: dùng phương pháp biểu đồ Karnaugh (bìa Karnaugh) của hàm bool</u>***

Ta có biểu đồ Karnaugh (bìa Kar(f)) của hàm bool 3 biến là biểu đồ có cấu trúc như sau:

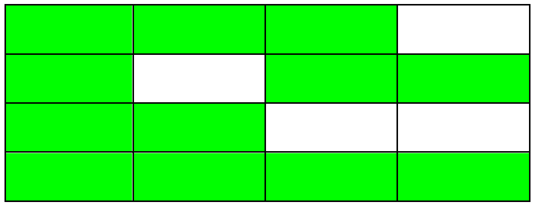


Ta có biểu đồ Karnaugh (bìa Kar(f)) của hàm bool 4 biến là biểu đồ có cấu trúc như sau:



<u>Ví dụ mẫu</u>: Cho hàm bool $f(x,y,z,t)=xy\bar{z}+y\bar{t}+\bar{x}zt+x\bar{y}+\bar{z}\bar{t}$

Ta có biểu đồ Kar(f) của hàm f là



Từ biểu đồ Karnaugh của f ta có dạng d.n.f cần tìm là:

$$f(x,y,z,t) = x\bar{y}z\bar{t} + xyz\bar{t} + \bar{x}yz\bar{t} + x\bar{y}zt + \bar{x}yzt + \bar{x}.\bar{y}zt + x\bar{y}.\bar{z}t + xy\bar{z}t + x\bar{y}.\bar{z}\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}\bar{t}$$

Ngoài ra, ta có:

$$f^{-1}(1) = \{1010, 1110, 0110, 1011, 0111, 0011, 1001, 1101, 1000, 1100, 0100, 0000\} = \bar{f}^{-1}(0)$$

= ảnh ngược của hàm bool f = những ô được tô trong bìa Kar(*f*) của *f*.

$$f^{-1}(0) = \{0010, 1111, 0101, 0001\} = \bar{f}^{-1}(1)$$

= ảnh ngược của hàm bool *f* = những ô bị bỏ trống (không được tô) trong bìa Kar(*f*) của *f*.

<u>Bài tập tương tự</u>:

+ Vẽ biểu đồ Karnaugh cho *f*.

+ Tìm dạng d.n.f cho *f*.

+ Viết dạng $f^{-1}(1) = \bar{f}^{-1}(0) = ?$ và dạng $f^{-1}(0) = \bar{f}^{-1}(1) = ?$

16/ $f(x,y,z,t) = xz\bar{t} + \bar{x}z + \bar{y}zt + \bar{y}\bar{t} + xyz$

17/ $f(x,y,z,t) = xy + \bar{z}t + \bar{y}z\bar{t} + \bar{x}z + xyt$

18/ $f(x,y,z,t) = xyz + y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}t + \bar{y}zt + yt$

19/ $f(x,y,z,t) = xyz + z\bar{t} + \bar{x}y + \bar{y}.\bar{z}t + xz$

20/ $f(x,y,z,t) = xy\bar{t} + y\bar{z}t + xyz + \bar{z}\bar{t} + \bar{y}t$

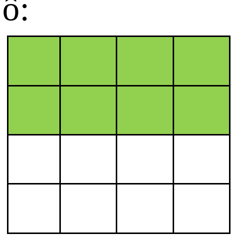
21/ $f(x,y,z,t) = x\bar{y} + yzt + \bar{x}z\bar{t} + zt + x\bar{z}t$

22/ $f(x,y,z,t) = xy + \bar{y}z\bar{t} + \bar{x}z + yt + \bar{z}t$

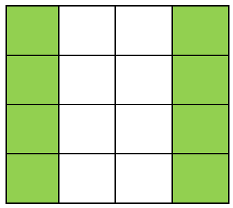
* ***<u>Phân tích các tế bào lớn có trong bìa Kar(f) của hàm bool</u>***:

Từ biểu đồ Kar(*f*) của *f*, ta phân tích thành các tế bào lớn như sau:

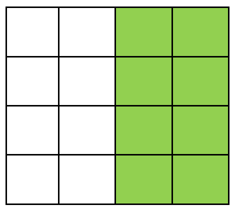
+ Tế bào 8 ô:



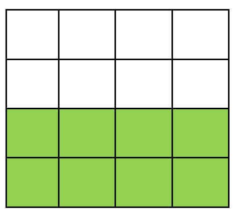
z



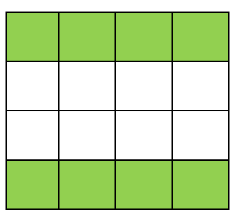
$\overline{y}$



$\overline{x}$

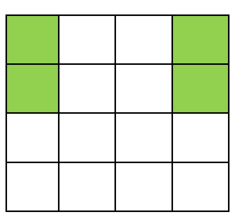


$\overline{z}$

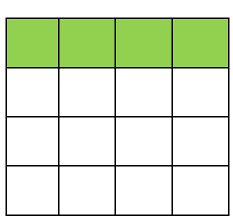


$\overline{t}$

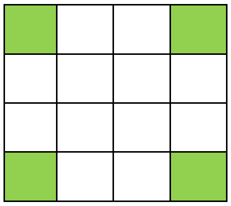
+ Tế bào 4 ô:



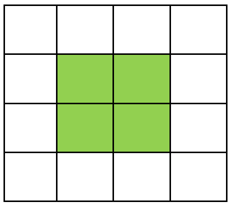
$\overline{y}z$



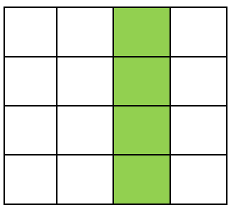
$z\bar{t}$



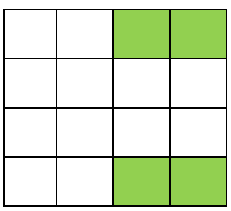
$\bar{y}\bar{t}$



yt

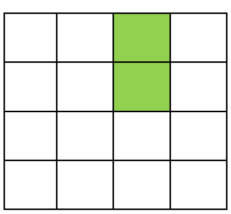


$\bar{x}y$

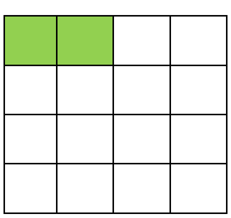


$\bar{x}\bar{t}$

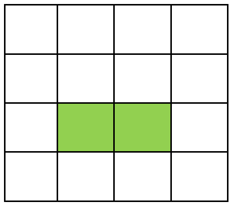
+ Tế bào 2 ô:



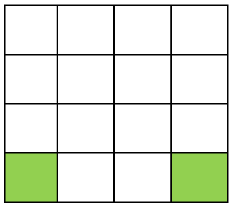
$\bar{x}yz$



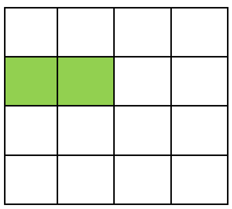
$xz\overline{t}$



$y\overline{z}t$

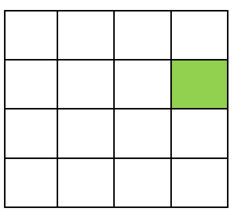


$\overline{y}.z\overline{t}$

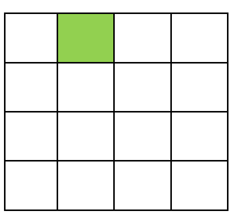


xzt

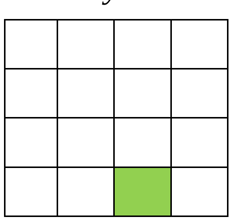
+ Tế bào 1 ô:



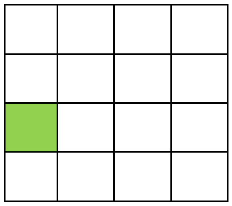
$\overline{x}.\overline{y}zt$



$xyz\overline{t}$



$\overline{x}y\overline{z}\overline{t}$

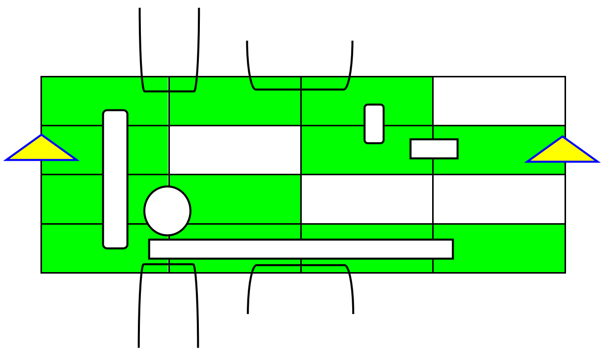


$x\bar{y}.\bar{z}t$

<u>Áp dụng</u>: phân tích tế bào có trong bìa Kar(*f*) của hàm bool *f*.

<u>Ví dụ mẫu</u>: Cho hàm bool $f(x,y,z,t) = xy\bar{z} + y\bar{t} + \bar{x}zt + x\bar{y} + \bar{z}\bar{t}$

Ta có biểu đồ Kar(*f*) của hàm f là



Ta có các tế bào lớn trong bìa Kar(*f*) của *f* là:

+ Tế bào 8 ô: không có;

+ Tế bào 4 ô: $T_1 : x\bar{y}$; $T_2 : \bar{z}\bar{t}$; $T_3 : x\bar{z}$; $T_4 : x\bar{t}$; $T_5 : y\bar{t}$

+ Tế bào 2 ô: $T_{6:} : \bar{x}yz$; $T_{7:} : \bar{x}zt$; $T_{8:} : \bar{y}zt$

+ Tế bào 1 ô: không có.