

## Chương 3: KHÔNG GIAN VÉCTƠ

### 1/ KHÔNG GIAN VÉCTƠ $\mathbb{R}^n$ VÀ KHÔNG GIAN VÉCTƠ TỔNG QUÁT

Ta định nghĩa  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ lần}} = \{\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Ví dụ:

$$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\alpha = (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\alpha = (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

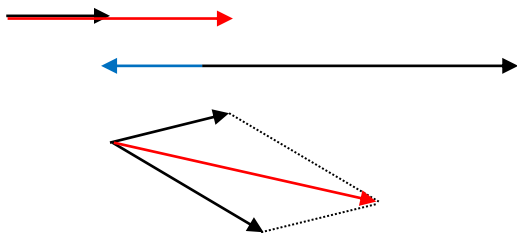
Trên  $\mathbb{R}^n$  ta định nghĩa 2 phép toán:

a/ Phép cộng vectơ:

$\forall \alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , và  $\forall \beta = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , ta có

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Ta cần nhớ quy tắc:



b/ Phép nhân một con số thực với vectơ

Với  $\forall \alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  và số thực  $c \in \mathbb{R}$ , ta có:

$$c \cdot \alpha = (cx_1; cx_2; \dots; cx_n) \in \mathbb{R}^n$$

Lưu ý: vectơ  $c \cdot \alpha$  là vectơ có cùng phương (cùng giá đỡ – support) với vectơ  $\alpha$ .

và  $c \cdot \alpha$  có cùng chiều với  $\alpha$  nếu  $c > 0$  và  $c \cdot \alpha$  ngược chiều với  $\alpha$  nếu  $c < 0$

Khi  $c = 0$  thì vectơ  $c \cdot \alpha$  là vectơ zero

Đồng thời, vectơ  $c \cdot \alpha$  có độ dài gấp  $|c|$  lần độ dài của vectơ  $\alpha$ .

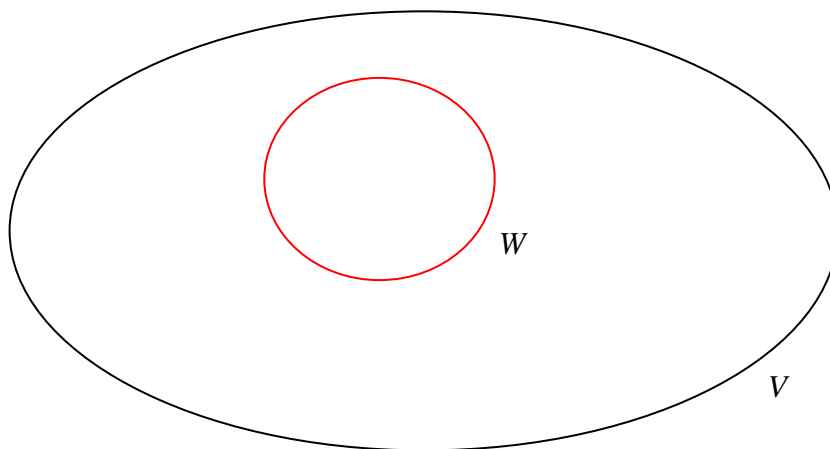
Ta gọi cấu trúc đại số:  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  là không gian vectơ  $n$  chiều trên trường số thực  $\mathbb{R}$ .

Tổng quát, ta ký hiệu  $(V, +, \cdot)$  là không gian vectơ tổng quát trên trường số  $F$ , với phép cộng và phép nhân được định nghĩa tương tự như trên  $\mathbb{R}^n$ .

Ví dụ: Trên  $\mathbb{R}^6$  cho  $\begin{cases} \alpha = (-2, 3, 5, -8, -4, 9) \\ \beta = (7, -1, 2, 4, -6, 3) \end{cases}$ . Tìm  $\begin{cases} 235\alpha - 1479\beta = ? \\ 3572\beta - 5383\alpha = ? \end{cases}$

### 2/ KHÔNG GIAN VÉCTƠ CON (SUB-VECTOR SPACE)

Cho không gian véc tơ  $(V, +, \bullet)$  là không gian véc tơ tổng quát trên trường số  $F$ ,  
 Và cho tập hợp  $W \neq \emptyset$  trên  $V$ .



Lúc này do  $W \subset V$  nên các véc tơ trên  $W$  được thừa hưởng phép cộng (+) và nhân ( $\bullet$ ) có sẵn trên  $V$ .

Ta nói  $(W, +, \bullet)$  là không gian véc tơ con của  $(V, +, \bullet)$

và ký hiệu là  $(W, +, \bullet) \leq (V, +, \bullet)$ , và viết gọn là  $W \leq V$ , nếu ta chứng minh được 2 tính chất sau:

$$1/ \forall \alpha \in W, \forall \beta \in W \text{ ta có } (\alpha + \beta) \in W$$

$$2/ \forall \alpha \in W; \forall c \in F; \text{ ta chứng tỏ } (c \cdot \alpha) \in W$$

Ngược lại, nếu 1 trong 2 tính chất này (hay cả 2 tính chất) bị vi phạm thì  $W$  không phải là không gian véc tơ con của  $V$ , và ta kí hiệu là  $W \not\leq V$

---

Ví dụ mẫu 1: Trên  $V = \mathbb{R}^3$  cho tập hợp  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$ .

Hỏi  $W \leq V$  không? Vì sao?

Ví dụ mẫu 2: Trên  $V = \mathbb{R}^3$  cho tập hợp  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 5y + 8z = 1\}$ .

Hỏi  $W \leq V$  không? Vì sao?

Ví dụ mẫu 3: Trên  $V = M_2(\mathbb{R})$  = không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ 2b & 4a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Hỏi  $W \leq V$  không? Vì sao?

Ví dụ mẫu 4: Trên  $V = M_2(\mathbb{R})$  = không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a^2 & b \\ ab & -2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Hỏi  $W \leq V$  không? Vì sao?

Giải:

Ví dụ mẫu 1:  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$

Ta chứng tỏ  $W \leq V$  như sau:

Ta có  $\gamma = (1, -1, -1) \in W$  do  $2 \cdot 1 - (-1) + 3 \cdot (-1) = 0$

$\Rightarrow W \neq \emptyset$  (\*)

Mặt khác:

$$\forall \alpha = (x_1, y_1, z_1) \in W \text{ ta có } 2x_1 - y_1 + 3z_1 = 0 \quad (1)$$

$$\forall \beta = (x_2, y_2, z_2) \in W \text{ ta có } 2x_2 - y_2 + 3z_2 = 0 \quad (2)$$

Cộng (1), (2) theo vế ta được:

$$(2x_1 - y_1 + 3z_1) + (2x_2 - y_2 + 3z_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\underbrace{x_1 + x_2}) - (\underbrace{y_1 + y_2}) + 3(\underbrace{z_1 + z_2}) = 0$$

Mà  $\alpha + \beta = (\underbrace{x_1 + x_2}; \underbrace{y_1 + y_2}; \underbrace{z_1 + z_2}) \Rightarrow (\alpha + \beta) \in W$  (\*\*)

Ngoài ra,  $\forall c \in \mathbb{R}$  ta nhân 2 vế pt (1) cho  $c$  thì được:

$$c(2x_1 - y_1 + 3z_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow c(2x_1) - (cy_1) + c(3z_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\underbrace{cx_1}) - (\underbrace{cy_1}) + 3(\underbrace{cz_1}) = 0$$

Ta nhân  $c$  với  $\forall \alpha = (x_1, y_1, z_1) \in W$  thì có  $c\alpha = c(x_1, y_1, z_1) = (\underbrace{cx_1}, \underbrace{cy_1}, \underbrace{cz_1})$

$$\Rightarrow (c\alpha) \in W \quad (***)$$

Từ (\*), (\*\*), (\*\*\*)  $\Rightarrow W \leq V$ .

Ví dụ mẫu 2:  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 5y + 8z = 1\}$

Ta chứng tỏ  $W \not\leq V$  như sau:

Cách 1:

Ta chọn  $\alpha = (4, 3, 0) \in W$  do  $4^2 - 5 \cdot 3 + 8 \cdot 0 = 1$

Và chọn  $\beta = (-4, 3, 0) \in W$  do  $(-4)^2 - 5 \cdot 3 + 8 \cdot 0 = 1$

Mà  $\alpha + \beta = (0, 6, 0)$  có  $0^2 - 5 \cdot 6 + 8 \cdot 0 = -30 \neq 1$  nên  $(\alpha + \beta) \notin W$

Cho nên do  $W \not\leq V$

Cách 2:

Ta chọn  $\alpha = (3, 0, -1) \in W$  do  $3^2 - 5 \cdot 0 + 8 \cdot (-1) = 1$

Và chọn  $c = 2 \Rightarrow c\alpha = (6, 0, -2)$  có  $6^2 - 5 \cdot 0 + 8 \cdot (-2) = 36 - 16 = 20 \neq 1$

nên  $(c\alpha) \notin W$ . Cho nên do  $W \not\leq V$

Ví dụ mẫu 3: Trên  $V = M_2(\mathbb{R})$  = không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ 2b & 4a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Ta chứng tỏ  $W \leq V$  như sau:

Ta chọn  $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2.3 & 4.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \in W$ , ứng với  $a=1, b=3$

$\Rightarrow W \neq \emptyset$  (\*)

Mặt khác:

$$\forall \alpha = A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ 2b_1 & 4a_1 \end{pmatrix} \in W \text{ ứng với } a=a_1, b=b_1$$

$$\forall \beta = A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ 2b_2 & 4a_2 \end{pmatrix} \in W \text{ ứng với } a=a_2, b=b_2$$

Suy ra  $\alpha + \beta = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ 2b_1 + 2b_2 & 4a_1 + 4a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ 2(b_1 + b_2) & 4(a_1 + a_2) \end{pmatrix}$  ứng với

$$a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$$

Cho nên  $(\alpha + \beta) \in W$  (\*\*)

Ngoài ra  $\forall c \in \mathbb{R}$  ta có  $c\alpha = cA_1 = c \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ 2b_1 & 4a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 & -cb_1 \\ c(2b_1) & c(4a_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 & -(cb_1) \\ 2(cb_1) & 4(ca_1) \end{pmatrix}$

ứng với

$$a = ca_1, b = cb_1$$

Cho nên  $(c\alpha) \in W$  (\*\*\*)

Từ (\*), (\*\*), (\*\*\*)  $\Rightarrow W \leq V$ .

Ví dụ mẫu 4: Trên  $V = M_2(\mathbb{R})$  = không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a^2 & b \\ ab & -2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Ta chọn  $a=2, b=1$  suy ra  $\alpha = A_1 = \begin{pmatrix} 2^2 & 1 \\ 2.1 & -2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in W$

Và chọn  $a=-2, b=1$  suy ra  $\beta = A_2 = \begin{pmatrix} (-2)^2 & 1 \\ -2.1 & -2(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in W$

Mà  $\alpha + \beta = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$  do không còn thỏa điều kiện của  $W$ .

$$\begin{cases} a^2 = 8 \\ -2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2\sqrt{2} \\ a = 0 \end{cases} \text{ (vô lí).}$$

Cho nên  $W \not\leq V$

Bài tập:

Kiểm chứng  $W$  có phải là không gian con của  $V$  hay không? Vì sao?

a/  $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) \mid 3x + 5z = 0\}$

b/  $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) \mid y = 0\}$

c/  $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) \mid 4x = 2y - z\}$

d/  $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) \mid 6x - 2yz = 0\}$

e/  $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) \mid xyz = 0\}$

f/  $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) \mid 7x - z = 2\}$

g/  $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) \mid 2x - 5z^2 = 0\}$

h/  $V = \mathbb{R}^3, W = \left\{ (x, y, z) \left| \begin{array}{l} x + 5z = 0 \\ 4y - z = 0 \end{array} \right. \right\}$

i/  $V = \mathbb{R}^4, W = \{(x, y, z, t) \mid 2x - 4y + z - 6t = 0\}$

j/  $V = \mathbb{R}^4, W = \left\{ (x, y, z, t) \left| \begin{array}{l} x + y - 2z + 3t = 0 \\ x = 4z - t \end{array} \right. \right\}$

k/  $V = M_2(\mathbb{R}) =$  không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} 3a & 5b \\ -b & a+b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

l/  $V = M_2(\mathbb{R}) =$  không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} ab & 2b \\ b^3 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

### **3/ SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH (LINEARLY INDEPENDENCE) VÀ SỰ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH (LINEARLY DEPENDENCE)**

Cho  $(V, +, \bullet)$  là không gian tuyến tính (không gian vectơ) tổng quát trên trường số  $F$ .

và cho tập hợp  $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$  trên  $V$ .

Ta nói  $S$  là tập hợp độc lập tuyến tính (ĐLTT), nghĩa là các véc tơ trong  $S$  không có mối liên hệ gì với nhau, không phụ thuộc nhau, và một véc tơ trong  $S$  không thể biểu diễn theo các véc tơ còn lại trong  $S$ , nếu hệ pt sau:

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m = 0$$

(với  $c_1, c_2, \dots, c_m$  là các ẩn số cần tìm)

chỉ có bộ nghiệm tầm thường duy nhất là  $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_m = 0$ .

Ngược lại, nếu hệ pt này có vô số nghiệm (bên cạnh bộ nghiệm tầm thường  $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_m = 0$ ) thì ta nói tập hợp  $S$  là phụ thuộc tuyến tính (PTTT), nghĩa là các véc tơ trong  $S$  có thể biểu diễn lẫn nhau, ví dụ  $\alpha_3 = 5\alpha_2 - 4\alpha_1 - 6\alpha_4$  hay  $\alpha_2 = 2\alpha_1 - \alpha_4 + 5\alpha_5$ .

Ví dụ mẫu 5:

Trên  $V = \mathbb{R}^3$ , cho tập hợp  $S = \{\alpha_1 = (1, -2, 1), \alpha_2 = (-1, 3, 2), \alpha_3 = (2, 0, 1), \alpha_4 = (-2, 1, 2)\}$ .

Hỏi  $S$  là ĐLTT hay PTTT, vì sao?

Giải:

Để kiểm tra xem  $S$  là ĐLTT hay PTTT, ta giải hệ pt

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = O$$

(ở đây ẩn số là  $c_1, c_2, c_3, c_4$ )

$$\Leftrightarrow c_1(1, -2, 1) + c_2(-1, 3, 2) + c_3(2, 0, 1) + c_4(-2, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 + 2c_3 - 2c_4 = 0 \\ -2c_1 + 3c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 + 2c_4 = 0 \end{cases}$$

Viết lại hệ pt dưới dạng ma trận hóa ta có:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (3) \rightarrow (3) - (1) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (2) \rightarrow (2) + 2(1) \\ (3) \rightarrow (3) - (1) \end{smallmatrix}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(3) \rightarrow (3) - 3(2)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 13 & 0 \end{array} \right)$$

Do cột 4 không bán chuẩn hóa được nên hệ pt có vô số nghiệm như sau:

$$\text{Đặt } c_4 = t, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} c_1 - c_2 + 2c_3 - 2c_4 = 0 \\ c_2 + 4c_3 - 3c_4 = 0 \\ -13c_3 + 13c_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 - 2c_3 + 2c_4 = -t \\ c_2 = 3c_4 - 4c_3 = -t \\ c_3 = c_4 = t \end{cases}$$

Cho nên ta nói  $S$  là tập hợp PTTT.

Ví dụ mẫu 6: Trên  $V = \mathbb{R}^4$ , cho tập hợp  $S = \{a_1 = (1, 0, 1, 0), a_2 = (-1, 1, 0, 1), a_3 = (0, 2, 1, -3)\}$ .

Hỏi  $S$  là tập hợp ĐLTT hay PTTT, vì sao?

Giải:

Để kiểm tra  $S$  là tập hợp ĐLTT hay PTTT, ta giải hệ pt

$$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = O$$

(ở đây ẩn số là  $c_1, c_2, c_3$ )

$$\Leftrightarrow c_1(1, 0, 1, 0) + c_2(-1, 1, 0, 1) + c_3(0, 2, 1, -3) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 - 3c_3 = 0 \end{cases}$$

Ta viết lại hệ pt dưới dạng ma trận hóa như sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3) \rightarrow (3) - (1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (3) \rightarrow (3) - (2) \\ (4) \rightarrow (4) - (2) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4) \rightarrow (4) - 5(3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Do hệ sau cùng có 3 cột bán chuẩn liên tiếp nhau, nên ta kết luận hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \\ -c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ là nghiệm tầm thường.}$$

Nên ta nói  $S$  là tập hợp ĐLTT.

**\* CÁCH NHẬN DIỆN NHANH TẬP HỢP  $S$  LÀ ĐLTT HAY PTTT:**

Cho  $(V, +, \bullet)$  là không gian tuyến tính tổng quát trên trường số  $F$ .

và cho tập hợp  $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$  trên  $V$ .

Để kiểm tra xem  $S$  là ĐLTT hay PTTT, ta làm như sau:

+ Lập ma trận  $A_S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{dòng 1} \\ \rightarrow \text{dòng 2} \\ \\ \rightarrow \text{dòng } m \end{matrix}$

+ Trường hợp 1:

$A_S$  tạo thành một ma trận vuông cấp  $m$

Nếu  $\det(A_S) \neq 0$  thì ta nói  $S$  là tập hợp ĐLTT.

Nếu  $\det(A_S) = 0$  thì ta nói  $S$  là tập hợp PTTT.

+ Trường hợp 2:

$A_S$  tạo thành một ma trận tùy ý (có thể là ma trận vuông hay không vuông đều được).

Từ  $A_S$  bán chuẩn hóa (chuẩn hóa) tối đa các cột  $\rightarrow H$

Ta xác định  $r(A_S) = \text{rank}(A_S) = \text{số dòng khác zero của } H$ .

Nếu  $r(A_S) = m = \text{số lượng véc tơ trong } S \Rightarrow S$  là tập hợp ĐLTT.

Nếu  $r(A_S) < m = \text{số lượng véc tơ trong } S \Rightarrow S$  là tập hợp PTTT.

Ví dụ mẫu 7: Trên không gian tuyến tính  $V = \mathbb{R}^3$ , cho các véc tơ

$$a_1 = (-2, 1, 1), a_2 = (1, -2, 1), a_3 = (1, 1, 2)$$

Chứng minh rằng hệ  $S = \{a_1, a_2, a_3\}$  là hệ ĐLTT.

Giải:

$$\text{Lập ma trận } A_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cách 1: Ta có  $\det(A_S) = (-2) \cdot (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - [1 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot 1] = 12 \neq 0$

Suy ra hệ  $\{a_1, a_2, a_3\}$  là hệ ĐLTT.

$$\text{Cách 2: Ta có } A_S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3) \rightarrow 2(3)+(1)}]{\substack{(2) \rightarrow (2)-(3) \\ (3) \rightarrow 2(3)+(1)}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3) \rightarrow (3)+(2)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = H$$

Do ma trận  $H$  có 3 dòng khác zero nên  $r(A_S) = \text{rank}(A_S) = 3 = \text{số véc tơ trong } S$ .

Suy ra hệ  $\{a_1, a_2, a_3\}$  là hệ ĐLTT.

Ví dụ mẫu 8: Trên không gian tuyến tính  $V = \mathbb{R}^3$ , cho các véc tơ

$$a_1 = (1, -1, -1), a_2 = (1, 2, 3), a_3 = (2, 1, \lambda)$$

Tìm các giá trị của  $\lambda$  để hệ  $\{a_1, a_2, a_3\}$  là hệ ĐLTT.

Giải:

$$\text{Ta lập ma trận } A_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3)' \rightarrow (3)' + (1)'}]{\substack{(2)' \rightarrow (2)' + (1)' \\ (3)' \rightarrow (3)' + (1)'}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A_S) = 1 \cdot c_{11}^{A'_S} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 3(\lambda + 2) - 12 = 3\lambda + 6 - 12 = 3\lambda - 6$$

Để  $\{a_1, a_2, a_3\}$  là hệ ĐLTT thì ta có  $\det(A_S) \neq 0 \Leftrightarrow 3\lambda - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$ .

Đáp số:  $\lambda \neq 2$  thì hệ  $\{a_1, a_2, a_3\}$  là hệ ĐLTT.