Bài tập môn Cấu trúc dữ liệu và giải thuật

12B.

$[(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)] \rightarrow [(\neg r \rightarrow p) \vee \neg r]$

$\Leftrightarrow [(\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)] \rightarrow [(r \vee p) \vee \neg r]$ (L. kéo theo, L. Demorgan)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee p \vee \neg q \vee q) \rightarrow [(r \vee p) \vee \neg r]$ (L. giao hoán, L. Kết hợp)

$\Leftrightarrow (1 \vee 1) \rightarrow [(r \vee p) \vee \neg r]$ (~~L. thống trị~~) (L. bổ sung)

$\Leftrightarrow 1 \rightarrow [(r \vee p) \vee \neg r]$ (L. thống trị)

$\Leftrightarrow 1$ (Luật thống trị)

Bài 3:

Cho tập hợp:

$X=\{-2,-1,0,1,2,3,5\}$

Với quan hệ:

$xRy \Leftrightarrow (2x+3y):5$

(Tức là 2x+3y2x + 3y2x+3y chia hết cho 5.)

a) Viết dạng liệt kê cho R

Ta xét từng cặp (x,y) sao cho 2x+3y chia hết cho 5:

$R=\{(-2,1),(-2,3),(-2,5),(-1,0),(-1,2),(-1,5),(0,-1),(0,3),(0,5),(1,-2),(1,2),(1,5),(2,-1),(2,1),(2,3),(3,-2),(3,0),(3,2),(5,-2),(5,-1),(5,0)\}$

b) Ma trận biểu diễn cho R

Với thứ tự $X=\{-2,-1,0,1,2,3,5\}$:

	-2	-1	0	1	2	3	5
-2	1	0	0	1	0	1	1
-1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1
2	0	1	0	1	1	1	0
3	1	0	1	0	1	1	0
5	1	1	1	1	0	0	1

c)
$\forall x \in X, xRx \Rightarrow 2x+3x$
5x chia hết cho 5, luon đung.

⇒ R có tính chất phản xạ.

Bài 4: a/ Ta chứng minh R là quan hệ tương đương trên *X* như sau:

Tính phản xạ:

$\forall x \in X$, ta có $x^3 = x^3$.

=>xRx đúng $\forall x \in X$

=> R có tính phản xạ. (1)

Tính đối xứng:

Giả sử xRy, tức là $x^3 = y^3$. với x, y $\in$ X.

Vậy $y^3 = x^3$. với x, y $\in$ X.

=> yRx. với x, y $\in$ X.

=> R có tính đối xứng. (2)

Tính bắc cầu:

Giả sử xRy và yRz, tức là $x^3 = y^3$ và $y^3 = z^3$. với x, y, z $\in$ X.

Vậy $x^3 = z^3$. với x, y, z $\in$ X.

=> xRz. với x, y, z $\in$ X.

=> R có tính bắc cầu.(3)

Từ (1), (2), (3) suy ra R là quan hệ tương đương trên *X*

b/ Các lớp tương đương và tập hợp thương

Các lớp tương đương:

Ta nhận thấy rằng xRy khi và chỉ khi $x^3 = y^3$.

Vậy ta có các lớp tương đương:

[-3] = { -3 }

[-1] = { -1 }

[0] = { 0 }

[2] = { 2 }

[3] = { 3 }

[4] = { 4 }

[5] = { 5 }

[7] = { 7 }

Tập hợp thương:

Tập hợp thương X/R là tập hợp các lớp tương đương:

X/R = { [-3], [-1], [0], [2], [3], [4], [5], [7] }

= { { -3 }, { -1 }, { 0 }, { 2 }, { 3 }, { 4 }, { 5 }, { 7 } }

$\forall x,y \in X,\ xRy \Rightarrow yRx$

Ta xét:

$2y+3x=3x+2y=2x+3y$

Do đó, nếu $2x+3y$ chia hết cho 5, thì $2y+3x$ cũng chia hết cho 5.
⇒ **R có tính chất đối xứng**.

$\forall x,y \in X, (xRy \text{ và } yRx) \Rightarrow x=y$

Nhưng ví dụ $(-2,1)$và $(1,-2)$ đều thuộc R, nhưng $-2 \neq 1$, nên **R không phản đối xứng**.

$\forall x,y,z \in X, (xRy \text{ và } yRz) \Rightarrow xRz$

Tức là nếu $2x+3y \equiv 0 \mod 5$ và $2y+3z \equiv 0 \mod 5$, thì phải có $2x+3z \equiv 0 \mod 5$

Cộng hai phương trình:

$(2x+3y)+(2y+3z) \equiv 0+0 \mod 5$
$2x+5y+3z \equiv 0 \mod 5$

Mà $5y \equiv 0 \mod 5$

$2x+3z \equiv 0 \mod 5$

⇒ **R có tính chất bắc cầu**.

Bài 32

a) $\exists x, \exists y$, xy = 1

Ta chọn x=0, ta chọn y=1 thì 1.1=1 => mệnh đề đúng

Phủ định: $\forall x, \forall y, xy \neq 1$

b) $\exists x, \forall y, (x^2y^2 = 1) \vee (\text{xy} \neq 4)$

Ta chọn x=0, $\forall y$ thì 0y $\neq 4$ => mệnh đề đúng

Phủ định: $\forall x, \exists y, (x^2y^2 \neq 1) \wedge (\text{xy} = 4)$

e) $\exists x, \exists y: (2x - 3y = 7) \vee (5y - 8x \neq 4)$

Ta chọn x=5, y=1 thì

$(2.5 - 3.1 = 7) \vee (5y - 8x \neq 4)$

$\Leftrightarrow 1 \vee (5y - 8x \neq 4)$

=> mệnh đề đúng

Phủ định: $\forall x, \forall y: (2x - 3y \neq 7) \wedge (5y - 8x = 4)$

f) $\exists x, \exists y: (7x - 3y = 6) \wedge (2x - 9y = 11)$

Ta chọn $x = \frac{9}{19}, y = \frac{-51}{19}$ thì

$$\left(7.\frac{9}{19} + 3.\frac{51}{19} = 6\right) \wedge \left(2.\frac{9}{19} + 9.\frac{51}{19} = 11\right)$$

$\Leftrightarrow 1 \vee 1$

=> mệnh đề đúng

Phủ định: $\forall x, \forall y: (7x - 3y \neq 6) \vee (2x - 9y \neq 11)$

g) $\exists x: x + 5 = 12$

Ta chọn x=7 thì 7+5=12 => mệnh đề đúng

Phủ định: $\forall x: x + 5 \neq 12$

i) $\exists x, \exists y: (xy = 4) \vee (x - 3y \neq 9)$

Ta chọn x=2, y=2 thì

$(2.2 = 4) \vee (x - 3y \neq 9)$

$\Leftrightarrow 1 \vee (x - 3y \neq 9)$

=> mệnh đề đúng

Phủ định: $\forall x, \forall y: (xy \neq 4) \wedge (x - 3y = 9)$

1/ $f(x,y,z) = \underbrace{\left(\overline{\underbrace{x\bar{y} + \bar{z}\}}_{A}} + xz\right)}_{B}\underbrace{\left(\overline{\underbrace{xy\bar{z} + y}_{C}} + y\bar{z}\right)}_{D} + \bar{x}y$

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x\bar{y}$	A	xz	B	$xy\bar{z}$	C	$y\bar{z}$	D	$\bar{x}y$	BD	f
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Từ bảng chân trị của f ta có dạng d.n.f là:

$$f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z$$

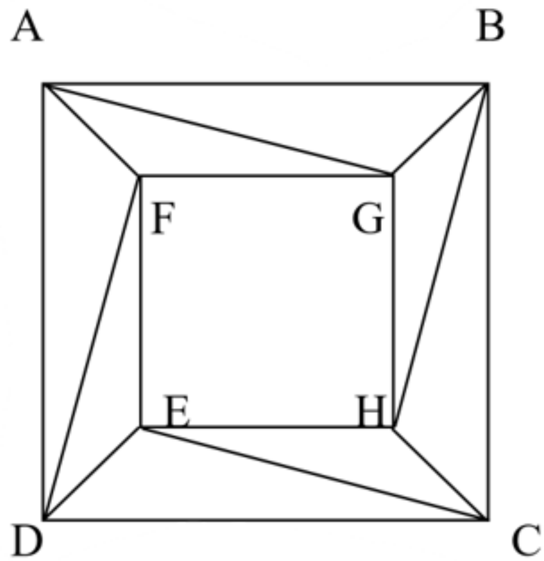
7/ $f(x,y,z,t) = \underbrace{(x\bar{y}t + \underbrace{\overline{\bar{z}t + xy}}_{A})}_{B}\underbrace{(y\bar{t} + xyz)}_{C} + xz\bar{t} + y\bar{z} + zt$

x	y	z	t	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{t}$	$x\bar{y}t$	$\bar{z}t$	xy	A	B	$y\bar{t}$	xyz	C	BC	$xz\bar{t}$	$y\bar{z}$	zt	f
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1

Từ bảng chân trị của f ta có dạng d.n.f là:

$$f(x,y,z) = \bar{x}yz\bar{t} + \bar{x}yz\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + xy\bar{z}t + xyz\bar{t}$$

a/



deg(A) = 4, deg(B) = 4

deg(C) = 4, deg(D) = 4

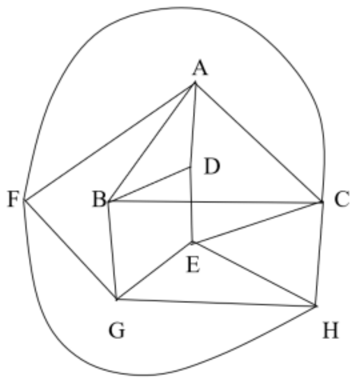
deg(E) = 4, deg(F) = 4

deg(G) = 4, deg(H) = 4

Do tất cả các đỉnh là bậc chẵn nên ta có chu trình Euler

C_E = ABCDAGHEFGBHCEDFA

c/



$\deg(A) = 4$

$\deg(B) = 4$

$\deg(C) = 5$

$\deg(D) = 3$

$\deg(E) = 4$

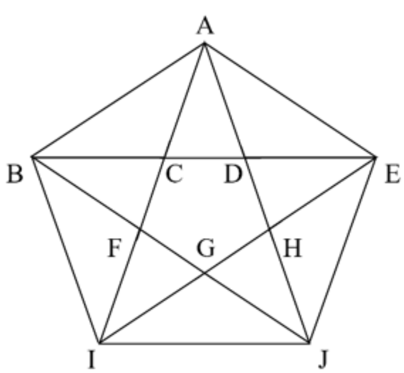
$\deg(F) = 4$

$\deg(G) = 4$

$\deg(H) = 4$

⇨ Do có đúng 2 đỉnh bậc lẻ chu trình Euler

⇨ $C_E = CFACHFGHECBADEGBD$

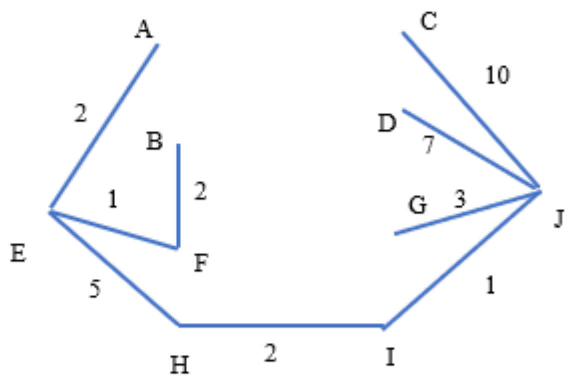


d) deg(A) = 4; deg(B) = 4 ; deg(C) = 4 ; deg(D) = 4 ; deg(E) = 4; deg(F) = 4; deg(G) = 4; deg(H) = 4; deg(I) = 4; deg(J) = 4

Do tất cả các đỉnh của G đều là bậc chẵn nên G có chu trình Euler. Gọi chu trình Euler cần tìm là c_E

c_E = BAEJIBCADEHJGIFCDHGFB

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Đỉnh đã xét	Cạnh đã xét
Khởi tạo	(∞, I)	(∞, I)	(∞, I)	(∞, I)	(∞, I)	(∞, I)	(9,I)	(2,I)	*	(1,I)	I	ø
1	(∞, I)	(∞, I)	(11,J)	(8,J)	(∞, I)	(∞, I)	(4,J)	(2,I)	-	*	J	IJ
2	(∞, I)	(∞, I)	(11,J)	(8,J)	(7,H)	(14,H)	(4,J)	*	-	-	H	IH
3	(∞, I)	(∞, I)	(11,J)	(8,J)	(7,H)	(10,G)	*	-	-	-	G	JG
4	(9,E)	(11,E)	(11,J)	(8,J)	*	(8,E)	-	-	-	-	E	HE
5	(9,E)	(11,E)	(11,J)	*	-	(8,E)	-	-	-	-	D	JD
6	(9,E)	(10,F)	(11,J)	-	-	*	-	-	-	-	F	EF
7	*	(10,F)	(11,J)	-	-	-	-	-	-	-	A	EA
8	-	*	(11,J)	-	-	-	-	-	-	-	B	FB
9	-	-	*	-	-	-	-	-	-	-	C	JC



Từ A đến J bằng đường Ạ có độ dài bằng 1.

A..................................IHEA.......................9

B ....IHEFB.....................10

C ....IJC..........................11

D..................................IJD..........................8

E ....IHE..........................7

F...................................IHEF........................8

G..................................IJG..........................4

H..................................IH 2

2B.

$[(p \to q) \land (p \land \neg r)] \to (\neg q \to s)$

$\Leftrightarrow [\neg(p \to q) \lor \neg(p \land \neg r)] \lor (\neg q \to s)$ (L. kéo theo, L. DeMorgan).

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \lor q) \lor \neg(p \land \neg r) \lor (q \lor s)$ (L. kéo theo)

$\Leftrightarrow (p \land \neg q) \lor (\neg p \lor r) \lor (q \lor s).$ (L. DeMorgan)

$\Leftrightarrow (p \land \neg q) \lor \neg p \lor r \lor q \lor s$ (L. giao hoán)

$\cancel{\Leftrightarrow (p \land \neg q) \lor \neg p \lor r \lor q \lor s}$

$\Leftrightarrow \cancel{(p \land \neg q)}\ (p \lor \neg q) \land (\neg q \lor \neg p) \lor q \lor r \lor s$ (L. phân bố)

$\Leftrightarrow (\neg q \lor \neg p) \lor q \lor r \lor s$ (L. phủ bù, L. trung hòa)

$\Leftrightarrow (\neg q \lor q) \lor \neg p \lor r \lor s$ (L. kết hợp)

$\Leftrightarrow 1 \lor \neg p \lor r \lor s$ (L. phủ bù)

$\Leftrightarrow 1.$ (L. thống trị)

Bài 1. $X = \{-2, -1, 0, 3, 4, 5, 7\}$.

$xRy \Leftrightarrow (x-y) \vdots 4$ với $x, y \in X$

a/ $R = \{(-2,-2), (-1,3), (0,4), (3,-1), (3,7), (4,0), (7,3)\}$.

b/

M	-2	-1	0	3	4	5	7
-2	1	0	0	0	0	0	0
-1	0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	0	0	1
4	0	0	1	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0
7	0	1	0	1	0	0	1

c/

$xRX \Leftrightarrow (x - X) = 0 \vdots 4 \; \forall x \in X$ nên R có tính phản xạ

Xét $xRy \Leftrightarrow (x-y) \vdots 4$ với $x, y \in X$, đặt $x - y = 4k \Leftrightarrow x = 4k + y$

Ta thấy $y - x = y - 4k - y = -4k \vdots 4$

Nên R có tính đối xứng

Xét $(-1,3)$ thỏa xRy và yRx nhưng $x \neq y$ nên R $\underline{0}$ có tính phản đối xứng.

Giả sử $\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4a \\ y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4a + y \\ z = y - 4b \end{cases}$

$x - z = 4a + y - y + 4b = 4(a+b) \vdots 4$

Vậy R có tính truyền

$\Rightarrow$ R là quan hệ tương đương

Câu 1.

a) $[(p \to q) \land (p \land \neg R)] \to (\neg q \to s)$

$\Rightarrow [(\neg p \lor q) \land (p \land \neg R)] \to (\neg q \to s)$

$\Rightarrow [(\neg p \land p) \lor (q \land p)] \land \neg R \to (\neg q \to s)$

$\Rightarrow [0 \lor (q \land p)] \land \neg R \to (\neg p \to s)$

$\Rightarrow (q \land p) \land \neg R \to (\neg q \to s)$

$\Rightarrow (q \land p \land \neg R) \to (\neg q \to s)$

$\Rightarrow (q \land p \land \neg R) \to (q \lor s)$

$\Rightarrow \neg(q \land p \land \neg R) \lor (q \lor s)$

$\Rightarrow (\neg q \lor \neg p \lor R) \lor (q \lor s)$

$\Rightarrow \neg p \lor \neg q \lor q \lor R \lor s$

$\Rightarrow 1 \lor \neg p \lor R \lor S$

$\Rightarrow 1$

b)

p: Khoa đi làm về muộn

q: Hùng thường xuyên vắng nhà

R: Vợ Khoa giận

S: Vợ Hùng giận

t: Mai nhận lời than phiền

Giả thiết:

1. $p \to R$ 2. $q \to S$ 3. $R \lor S \to t$ 4. $\neg t$

$\Rightarrow$ Từ (3, 4): $\neg t \to \neg(R \lor S) \to -R \land \neg S$

$\Rightarrow \neg R \Rightarrow -p$ (từ 1)

$\Rightarrow \neg S \Rightarrow \neg q$ (từ 2).

$\Rightarrow$ Suy luận đúng vì ta clm được $\neg p \land \neg q$

c).

$\forall x \in R, \exists y \in R, (6xy < 0) \to (3x - y^3 = 0)$

Phủ định. $\exists x \in R, \forall y \in R, (6xy < 0) \land (3x - y \neq 0)$

Tức tồn tại: x sao cho với mọi y, nếu $6xy < 0$ thì $3x \neq y$

$\Rightarrow$ Không tồn tại giá trị nào thỏa mãn mệnh đề phủ định

$\Rightarrow$ Mệnh đề gốc đúng.

Câu 2.

Số lượng tổ hợp ngày sinh trong năm (nếu ko tính năm nhuận) là 365 ngày

Gọi n = 20738 là số sinh viên.

Áp dụng

$\left[\frac{20738}{365}\right] = 56,8 \approx 57$.

=> Có ít nhất 57 sv có cùng ngày tháng sinh năm 2025

Câu 3.

a) Với ~~∀~~ $x \in X$, Ta có:

$2x + 5x = 7x \equiv 0 \mod 7 \Rightarrow xRx \Rightarrow$ đúng.

Giả sử $xRy \Rightarrow 2x + 5y \equiv 0 \mod 7$

$\Rightarrow 5y \equiv -2x \mod 7 \Rightarrow y \equiv -2x . 5^{-1} \mod 7$ tương đương tồn tại hoán vị $\neq 0$.

=> yRx cũng đúng => đối xứng.

Giả sử xRy và yRz

$\Rightarrow 2x + 5y \equiv 0 \mod 7$

$\Rightarrow 2y + 5z \equiv 0 \mod 7$.

=> Nhân vế thứ 1 với thứ 2, vế thứ 2 với 5.

$$\begin{cases} 4x + 10y \equiv 0 \mod 7 \\ 10y + 25z \equiv 0 \mod 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow 4x + 25z \equiv 0 \mod 7 \Rightarrow 2x + 5z \equiv 0 \mod 7 \Rightarrow xRz$

=> Q/hệ có tính bắc cầu

=> R là quan hệ tương đương X

OURSTORYBEGINS

b) Xét $x \in X$, tính $2x \mod 7$

Tìm các y sao cho $2x + 5y = 0 \mod 7$

$\Rightarrow 5y = -2x \mod 7$

Tìm các lớp tương đương

* Với $x = -8 \Rightarrow 2x = -16 \equiv -2 \mod 7$

$\Rightarrow 5y \equiv 2 \mod 7 \Rightarrow y \equiv 3 \mod 7$

$\rightarrow$ Lớp $[-8]_R = \{-8, -1, 6\}$

* Với $x = -6 \Rightarrow 2x = -12 \equiv 2 \mod 7$

$\Rightarrow 5y \equiv -2 \mod 7 \Rightarrow y \equiv 1 \mod 7.$

$\rightarrow$ Lớp $[-6]R = \{-6, 1, 8\}$.

* Với $x = -5 \Rightarrow 2x = -10 \equiv 4 \mod 7$

$\Rightarrow 5y \equiv -4 \Rightarrow y \equiv 5 \mod 7$

$\rightarrow$ Lớp $[-5]R = \{-5, 2, 9\}$.

* Với $x = -3 \Rightarrow 2x = -6 \equiv 1 \Rightarrow 5y = -1 \Rightarrow y \equiv 6 \mod 7$.

$\rightarrow$ Lớp $[-3]R = \{-3, 3, 10\}$

* Với $x = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow 5y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 0 \mod 7$

$\rightarrow$ Lớp $[0]_R = \{0, 7\}$ nhưng $7 \notin X \Rightarrow$ chỉ có $\{0\}$

$\rightarrow$ k có phần tử nào còn chỉ lại trong X chưa $\in$ lớp nào

$X/R = \{\{-8, -1, 6\}, \{-6, 1, 8\}, \{-5, 2, 9\}, \{-3, 3, 10\}, \{0\}\}$.

Câu 4.

a) Phản xạ. $\forall x \in X \Rightarrow x^2 \geq x^2 \Rightarrow$ đúng.

* Phản đối xứng: Nếu xRy và yRx

$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow |x| = |y| \Rightarrow x = y$ hoặc $x = -y$. Nhưng vì ta xét $x, y \in X$, nên nếu $x \neq y$ mà $|x| = |y|$, thì k phản đối xứng $\Rightarrow$ k phải qhệ thứ tự toàn phần, nhưng vẫn là quan hệ thứ tự bán phần.

* Bắc cầu. Nếu xRy và yRz.

$\Rightarrow x^2 \geq y^2$ và $y^2 \geq z^2 \Rightarrow x^2 \geq z^2 = xRz$

$\rightarrow$ R là quan hệ thứ tự bán phần.

b).

Q/hệ R ϱ phải vì tồn tại $x=-3, y=2$.

sao cho $x^2=9, y^2=4 \Rightarrow xRy$ đúng, nhưng có trường hợp như $x=-2$, ~~y=1~~

$y=1: 4 \not\leq 1, 1 \not\leq 4 \Rightarrow$ ϱ thể so sánh được mọi cặp $x, y \in X$

$\Rightarrow$ R ϱ phải toàn phần

c).

Biến đổi qhệ thay vì so sánh $x \geq y$, ta so sánh theo $x^2 \geq y^2$

Tính bình phương các phần tử

$-8^2=64, -6^2=36, -3^2=9, -2^2=4, 0^2=0, 1^2=1, 4^2=16, 5^2=25, 7^2=49$

$9^2=81, 12^2=144$

Sắp xếp theo giá trị bình phương giảm dần để vẽ Hasse

* 12(144) * ±9 (81) * ±8 (64)
* ±7 (49) * ±6 (36) * ±5 (25)
* ±4 (16) * ±3 (9) * ±2 (4)
* ±1 (1) * 0 (0)

Chỉ giữ lại những phần tử có trong X, từ đó ta nối các cạnh trong Hasse

nếu tồn tại xRy và ϱ có phần tử trung gian z nào cho xRz và zRy

d).

+ Phần tử lớn nhất là phần tử có bình phương lớn nhất $\to 12 \Rightarrow 144$

+ Pt nhỏ nhất là pt có bình phương nhỏ nhất $\to 0 \Rightarrow 0$.

+ Pt tối đại 12 là lớn nhất nên cũng là tối đại $\Rightarrow 12$.

+ ~~Pt~~ tối thiểu 0 là nhỏ nhất

$\Rightarrow$ Lớn nhất: 12
Nhỏ nhất: 0
Tối đại: 12
Tối thiểu: 0