

**Tài liệu tham khảo:**

1/ Giáo trình Toán Cao cấp A3.

Tác giả: Đỗ Văn Nhơn.

NXB: ĐHQG-HCM.

2/ Đại số tuyến tính

Tác giả: Nguyễn Ngọc Thanh – Trịnh Thanh Đèo - ...

NXB: ĐHQG-HCM.

3/ Giáo trình Đại số tuyến tính (Toán 2)

Tác giả: Đỗ Công Khanh – Nguyễn Minh Hằng – Ngô Thu Lương.

NXB: ĐHQG-HCM.

4/ Giáo trình Đại số tuyến tính

Tác giả: Cao Thanh Tình – Hà Mạnh Linh – Lê Hoàng Tuấn – Lê Huỳnh Mỹ Vân.

NXB: ĐHQG-HCM.

\* **Phần mềm hỗ trợ:**

+ MATLAB;

+ MAPLE;

+ Microsoft Excel;

+ R;...

---

Email: [tuanlh@uit.edu.vn](mailto:tuanlh@uit.edu.vn)

GVC. ThS. Lê Hoàng Tuấn.

---

\* **Bài học:**

## **CHƯƠNG 1: MA TRẬN – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH**

### **1/ MỘT SỐ KHÁI NIÊM:**

***Ma trận (Matrix – Matrice):***

Gọi  $F =$  trường số hữu tỷ  $\mathbb{Q}$ , trường số thực  $\mathbb{R}$ , hay là trường số phức  $\mathbb{C}$ .



**Fields → VIASM**

Một ma trận có kích thước  $m \times n$  trên  $F$  là một bảng số (chữ nhật) có  $m$  dòng và  $n$  cột, như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Ta viết gọn là  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ , với  $a_{ij} \in F$  là phần tử ở dòng  $i$  và cột  $j$  của ma trận  $A$ .

Khi  $m=n$  thì ta gọi  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$ , và kí hiệu là:

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Ta ký hiệu:

$M_{m \times n}(F)$  = tập hợp tất cả các ma trận có  $m$  dòng và  $n$  cột trên  $F$ .

$M_n(F)$  = tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp  $n$  trên  $F$ .

Ví dụ: ta có các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 & -9 \\ 5 & -8 & 2 & -7 & 10 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & -6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} -7/3 & 6 & 5/9 \\ 4 & 0 & -1/3 \\ 9 & -8/3 & 2/5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$$

$$C = (-8+2i \quad 6-5i \quad 4i+1 \quad 2i) \in M_{1 \times 4}(\mathbb{C})$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$$

\* Ma trận zero:

Là ma trận có tất cả hệ số đều bằng 0, và ta kí hiệu là  $O_{m \times n}$  hay là  $O_n$

Ví dụ:

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\* Ma trận đơn vị (unit matrix – identity matrix):

Ma trận đơn vị cấp  $n$  là ma trận vuông cấp  $n$  có dạng

$$I_n = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad E = \text{Elementary (sơ cấp)}$$

Ví dụ:  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  và  $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

\* **Ma trận đường chéo (diagonal matrix):**

Là ma trận vuông cấp  $n$  có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1 n-1} \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

với  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  tùy ý.

Ví dụ:  $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

\* **Ma trận tam giác trên (upper triangular matrix):**

Là ma trận vuông cấp  $n$  có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1 n-1} \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ:  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

\* **Ma trận tam giác dưới (lower triangular matrix):**

Là ma trận vuông cấp  $n$  có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1 n-1} \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ:  $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

## 2/ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SỐ CẤP TRÊN DÒNG ĐỔI VỚI MA TRẬN (ROW ELEMENTARY OPERATIONS):

a/ Loại 1:

Nhân dòng  $(i)$  cho số  $c \in F$

Ta có:

$$A \xrightarrow{(i) \rightarrow c(i)} A'$$

$\begin{array}{l} (i) \rightarrow c(i) \\ h(i) \rightarrow c.h(i) \\ d(i) \rightarrow c.d(i) \\ do'ng(i) \rightarrow c.do'ng(i) \\ r(i) \rightarrow c.r(i) \end{array}$

Ví dụ 1: Cho  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 9 & 10 & -3 \\ 8 & 15 & -7 & 20 & 49 & -65 \\ 73 & -27 & 41 & 52 & -39 & 15 \\ 6 & 0 & -7 & 6 & 12 & 7 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{(3) \rightarrow -519(3)} A' = \left( \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right)$$

Ví dụ 2: Cho  $B = \begin{pmatrix} -51 & 17 & 98 & 23 \\ -18 & -23 & -71 & 25 \\ 19 & 38 & 13 & -173 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{(1) \rightarrow 5312(1)} B' = \left( \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)$$

b/ Loại 2:

Hoán vị (interchange) dòng  $(i)$  với dòng  $(j)$

Ta có:

$$A \xrightarrow{(i) \leftrightarrow (j)} A'$$

$$\text{Ví dụ 3: Cho } C = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -5 & 9 \\ 8 & 10 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 12 & -3 \\ 9 & 6 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2) \leftrightarrow (5)} C' = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

c/ **Loại 3:**

Thay dòng  $(i)$  bằng [dòng  $(i) + c$ .dòng  $(j)$ ]

Ta có:

$$A \xrightarrow{(i) \rightarrow (i) + c(j)} A'$$

$$\text{Ví dụ 4: Cho } D = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 6 & 7 \\ 8 & 15 & 23 & 6 \\ 12 & -38 & 19 & -73 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3) \rightarrow (3) - 8(2)} D' = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\text{Ví dụ 5: Cho } E = \begin{pmatrix} 21 & 35 & -72 & 61 \\ -13 & -29 & 18 & -38 \\ 11 & 43 & 17 & -25 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2) \rightarrow 43(3) - 95(2)} E' = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\text{Ví dụ 6: Cho } F = \begin{pmatrix} -45 & 21 & 15 & -43 \\ 18 & -81 & -26 & 17 \\ 24 & 52 & 15 & 49 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1) \rightarrow 3(2) - 2(1) + (3)} F' = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Ví dụ 7 (dùng  $F$  của ví dụ 6)

$$\xrightarrow{(2) \rightarrow 15(2) - 23(3) + 61(1)} F'' = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Lưu ý: Ta không thể thực hiện được phép gán cho dòng (i) nếu không sử dụng dòng (i) để tính toán.

Ví dụ:  $A_{3 \times 5} \xrightarrow{(2) \rightarrow 4(1) + 5(3)} A'$  không làm được.

$A_{3 \times 5} \xrightarrow{(2) \rightarrow 4(1) + 5(3) - 9(2)} A''$  thì làm được.

### 3/ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (LINEAR EQUATIONS):

Một hệ phương trình tuyến tính gồm  $m$  phương trình và  $n$  ẩn số, trên  $F$ , là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

Trong đó:

$a_{ij}; b_i$  là các hệ số cho trước trên  $F$ .

$x_1, x_2, \dots, x_n$  là các ẩn số cần tìm.

Đặt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Thì hệ pt(\*) có thể được viết thành 1 trong 2 dạng:

- Dạng tích ma trận:  $AX = B$
- Dạng ma trận hóa:  $(A | B)$  (the augmented matrix)

Ví dụ:

Cho hệ pt tuyến tính sau trên  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} 2x_3 - x_4 + 2x_5 + 4x_1 = 2 \\ 3x_6 + 9x_3 - x_1 = -5 \\ 7x_2 - 6x_5 + 3x_6 = 8 - x_1 + 2x_4 \\ 8x_3 + 2x_5 - x_6 = 10 + 2x_2 + x_1 \\ 3x_5 - x_6 + 2x_4 = 3 - x_2 \end{cases}$$

Viết hệ pt trên dưới dạng tích ma trận và dạng ma trận hóa.

Ta có dạng tích ma trận của hệ là:  $AX = B$ , với

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 0 & -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ta có dạng ma trận hóa của hệ là:

$$(A | B) = \left( \begin{array}{cccccc|c} 4 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 9 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 7 & 0 & -2 & -6 & 3 & 8 \end{array} \right)$$

#### **4/ CÁCH GIẢI HỆ PT TUYẾN TÍNH (PHƯƠNG PHÁP GAUSS-JORDAN):**

Xét hệ pt tuyến tính gồm  $m$  phương trình và  $n$  ẩn số, trên  $F$ , viết dưới dạng ma trận hóa  $(A | B)$ .

Ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng tùy ý mà không làm thay đổi tập hợp nghiệm của hệ.

Cụ thể như sau:

Ta có thể sử dụng tùy ý các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để xây dựng trong  $A$  các cột chuẩn

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \text{theo thứ tự từ trái} \rightarrow \text{phải}$$

Quá trình xây dựng các cột chuẩn phải luôn đảm bảo 2 nguyên tắc:

+ Khi đang xây dựng cột chuẩn  $E_k$  thì ta phải giữ được các cột chuẩn  $E_1, E_2, \dots, E_{k-1}$  đã có trước đó.

+ Nếu tại cột đang xét ta không xây dựng được thành  $E_k$  thì ta phải chuyển sang cột kế cận bên tay phải.

\* Quá trình chuẩn hóa các cột kết thúc khi ta xét xong cột cuối cùng của  $A$ .

\* Có đúng 3 trường hợp sau xảy ra:

TH1:

Khi đang chuẩn hóa các cột, ta nhận thấy có 1 dòng của hệ xuất hiện dạng

$$(0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 | a), \text{ với } a \neq 0$$

Ta kết luận hệ pt VÔ NGHIỆM

TH2:

Ta thu được  $n$  cột chuẩn liên tiếp nhau, có dạng

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l} n \text{ cột} \\ \text{chuẩn} \\ \text{liên} \\ \text{tiếp} \\ \text{nhau} \end{array} \right\} \left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_n \end{array} \right) \\
 \hline
 \left. \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\} \text{các dòng zero, có thể có hoặc không}
 \end{array}$$

Ta kết luận hệ pt CÓ NGHIỆM DUY NHẤT là:

$$x_1 = c_1; x_2 = c_2; \dots; x_n = c_n$$

TH3:

Khi chuẩn hóa xong, ta chỉ thu được  $r$  cột chuẩn (với  $r < n$ ), xen kẽ với  $(n-r)$  cột không chuẩn hóa được, ta kết luận hệ pt CÓ VÔ SỐ NGHIỆM như sau:

- + Các ẩn ứng với các cột không chuẩn hóa được  $\rightarrow$  ta gọi là **ẩn tự do**, lấy giá trị tùy ý trên  $F$ .
- + Các ẩn còn lại (ứng với các cột chuẩn hóa được)  $\rightarrow$  ta gọi là **ẩn phụ thuộc**, được tính theo các ẩn tự do, nhờ vào những pt *không tầm thường* ở hệ sau cùng.

Ví dụ: Khi giải hệ  $(A | B) \xrightarrow{\text{GAUSS-JORDAN}} \left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$

Ta thấy hệ sau cùng có cột 4, cột 6 không chuẩn hóa được, nên hệ có VÔ SỐ NGHIỆM như sau:

$$\text{Đặt } \begin{cases} x_4 = a; \\ x_6 = b; \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ta có } \begin{cases} x_1 - 2x_4 + 3x_6 = 5 \Rightarrow x_1 = 5 + 2a - 3b \\ x_2 + x_4 - x_6 = -3 \Rightarrow x_2 = -3 - a + b \\ x_3 - x_4 = 7 \Rightarrow x_3 = 7 + a \\ x_5 + 2x_6 = 4 \Rightarrow x_5 = 4 - 2b \end{cases}
 \end{array}$$

\* Dấu hiệu nhận biết 1 cột có chuẩn hóa được hay không?

Ta muốn chuẩn hóa cột

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{thao nh}} E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

vị trí thứ  $k$

TH1: Nếu  $u_k = u_{k+1} = \dots = u_m = 0$  thì ta không thể chuẩn hóa  $U$  thành  $E_k$

TH2: Nếu có (ít nhất) một hệ số khác 0, trong các số  $u_k, u_{k+1}, \dots, u_m$  thì ta có thể chuẩn hóa  $U$  thành  $E_k$ .

Ví dụ:

a/ Ta muốn chuẩn hóa cột  $U = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  thành  $E_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  được không?

Ta thấy  $u_6 = u_7 = u_8 = 0$  nên ta không thể chuẩn hóa  $U$  thành  $E_6$

b/ Ta muốn chuẩn hóa cột  $V = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  thành  $E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  được không?

Ta thấy  $\begin{cases} v_5 = 7 \neq 0 \\ v_8 = 3 \neq 0 \end{cases}$  nên ta có thể chuẩn hóa  $V$  thành  $E_4$

Ví dụ mẫu 1: Giải hệ pt tuyến tính sau trên  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x_2 - x_1 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -8 \end{cases}$$

Ví dụ mẫu 2: Giải và biện luận hệ pt tuyến tính sau trên  $\mathbb{R}$  theo tham số thực  $m$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ mx_1 + x_2 + x_3 = m^2 \end{cases}$$

Giải:

Ví dụ mẫu 1: Ta có dạng ma trận hóa của hệ như sau:

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (3) \rightarrow (3)+(1) \\ (2) \rightarrow (2)+2(1) \\ (1) \rightarrow -1(1) \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (3) \rightarrow (3)-(2) \\ (1) \rightarrow (1)+2(2) \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} (1) \rightarrow (1)+(3) \\ (2) \rightarrow (2)+2(3) \\ (3) \rightarrow -1(3) \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Do ma trận kết quả có 3 cột chuẩn liên tiếp nhau, nên hệ pt có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x_1 = -10; \\ x_2 = -14; \\ x_3 = 6 \end{cases}$$

Ví dụ mẫu 2: Ta có dạng ma trận hóa của hệ là:

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & m^2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (2) \rightarrow (2)-(1) \\ (3) \rightarrow (3)-m(1) \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & m^2-m \end{array} \right) (*)$$

$$TH1: m-1=0 \Leftrightarrow m=1 \text{ thì hệ pt (*)} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (2) \rightarrow (2)-(1) \\ (3) \rightarrow (3)-(1) \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ta thấy do cột 2, cột 3 không chuẩn hóa được nên hệ pt CÓ VÔ SỐ NGHIỆM như sau:

$$\text{Đặt } \begin{cases} x_2 = a; \\ x_3 = b \end{cases}, \forall a, b \in \mathbb{R}. \text{ Ta có } x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - a - b$$

TH2:  $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

$$\text{Ta có (*)} \xrightarrow{\begin{array}{l} (2) \rightarrow \frac{1}{m-1}(2) \\ (3) \rightarrow \frac{1}{1-m}(3) \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+m & -m \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1) \rightarrow (1)-(2) \\ (3) \rightarrow (3)-(2) \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 & -m-1 \end{array} \right) (**)$$

$$TH2.1 \ m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$$

Ta có  $(**)$   $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$  từ dòng 3 ta thấy

dạng  $(0 \quad 0 \quad 0 \mid 1)$  nên hệ pt VÔ NGHIỆM

TH2.2  $m+2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

$$\text{Ta có } (**) \xrightarrow{(3) \rightarrow \frac{1}{m+2}(3)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -(m+1)/(m+2) \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(2) \rightarrow (2)+(3) \\ (1) \rightarrow (1)-(m+1)(3)}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (m+1)^2 / (m+2) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(m+2) \\ 0 & 0 & 1 & -(m+1)/(m+2) \end{array} \right)$$

Kết luận:

Khi  $m = -2$  thì hệ pt VÔ NGHIỆM

Khi  $m = 1$  hệ pt có vô số nghiệm, với  $\begin{cases} x_2 = a; \\ x_3 = b \end{cases}, \forall a, b \in \mathbb{R}$  và  $x_1 = 1 - a - b$

Khi  $m \neq 1$  và  $m \neq -2$  thì hệ pt có nghiệm duy nhất:

$$x_1 = \frac{(m+1)^2}{m+2}; x_2 = \frac{1}{m+2}; x_3 = -\frac{(m+1)}{(m+2)}$$

Bài 1: Giải hệ pt tuyến tính sau trên  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_1 = 6 \\ 3x_4 + 2x_3 - 2x_1 + x_2 = -8 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_2 + 2x_4 = 4 \\ 2x_3 + x_4 - 3x_2 + 2x_1 = -8 \end{cases}$$

Bài 2: Giải và biện luận hệ pt tuyến tính sau trên  $\mathbb{R}$  theo tham số thực  $m$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_2 + mx_3 + 2x_1 = 3 \\ 3x_3 + mx_2 + x_1 = 2 \end{cases}$$

### \* Các cột bán chuẩn

Các cột bán chuẩn cấp  $m$  là các cột có  $m$  thành phần, như sau:

$$E'_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E'_2 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E'_m = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{pmatrix}$$

Trong đó:  $a, c, \dots, u_m$  là những số tùy ý khác 0; còn

$b, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$  là những số tùy ý.