Buổi 09 – Ngày 27-04-2025 – môn Cấu trúc rời rạc – lớp MA004.E22.LT.CNTT

CHƯƠNG 5: LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

4/ BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

Cho **G** là đồ thị liên thông, có trọng số và có nhiều hơn 1 đỉnh.

Ở đây, trọng số của mỗi cạnh $e \in E$ là các số thực, không âm và được xem là chiều dài của cạnh tương ứng.

Bài toán đặt ra lúc này là tìm con đường đi ngắn nhất nối giữa 2 đỉnh cho trước của **G**, hay là từ 1 đỉnh đến tất cả các đỉnh còn lại của G.

Ta quy ước: $l(u,v) =$ chiều dài ngắn nhất của đường đi nối liền giữa 2 đỉnh u,v (theo thứ tự).

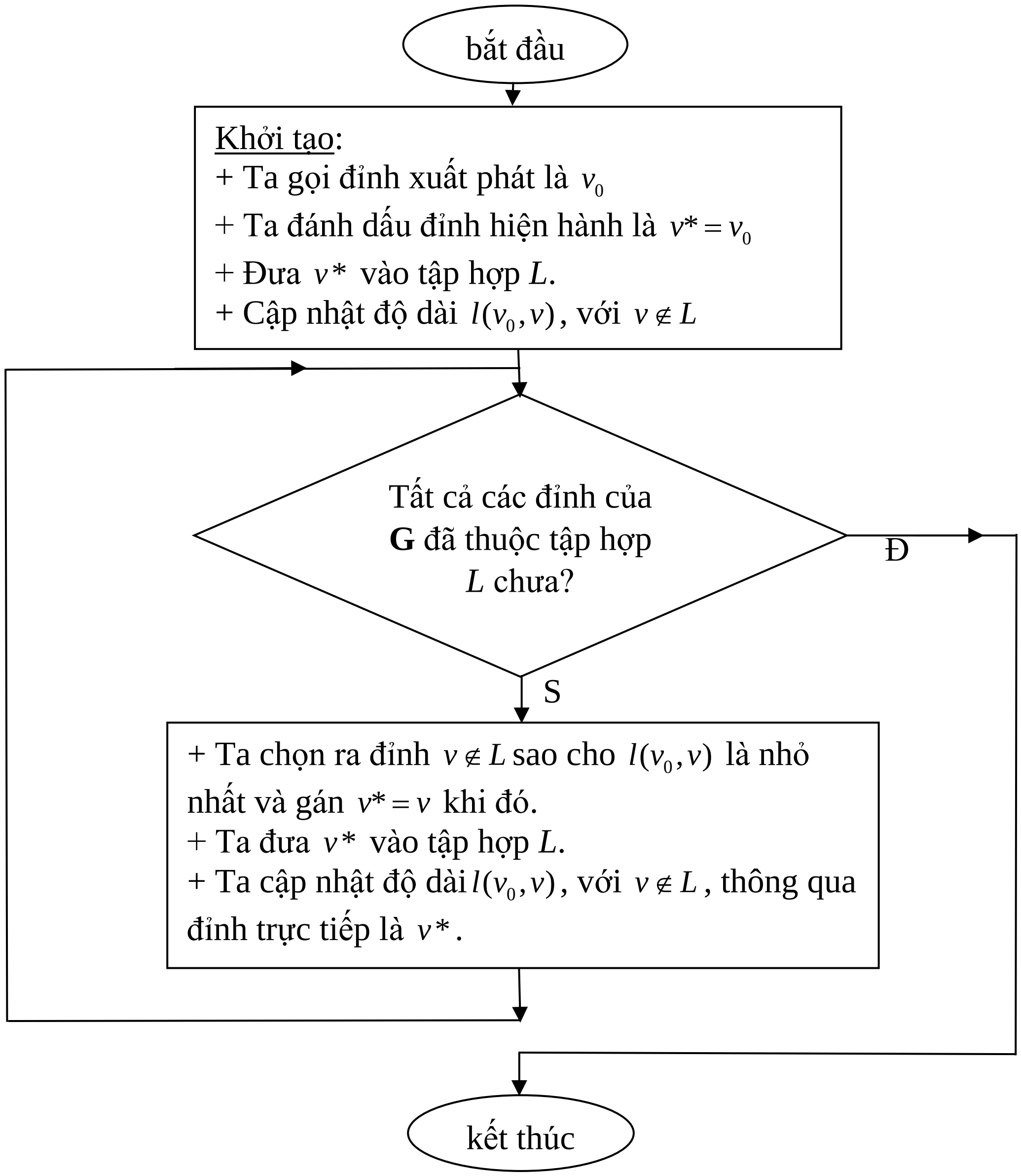
Nếu u,v có cạnh nối trực tiếp, có độ dài ngắn nhất, là e thì ta đặt $l(u,v) = l(e) =$ chiều dài của cạnh e = chiều dài ngắn nhất của một (trong các) đường đi nối liền giữa 2 đỉnh u,v (theo thứ tự) ban đầu.

Nếu u,v không có cạnh nối trực tiếp thì ta đặt $l(u,v) = +\infty$ là chiều dài của đường đi nối liền giữa 2 đỉnh u,v (theo thứ tự) ban đầu.

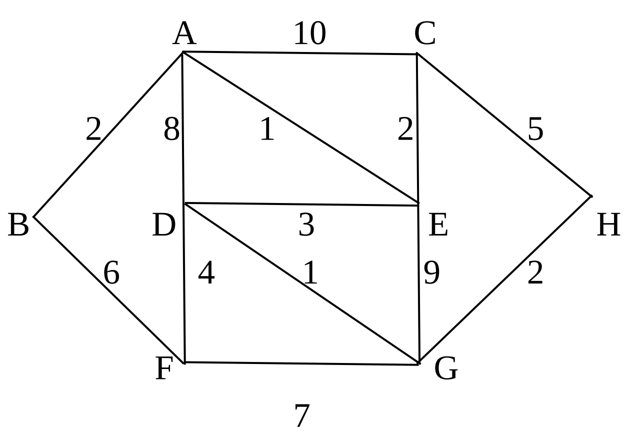
Thuật toán DIJKSTRA:

Ta có lưu đồ giải thuật sau để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh xuất phát v_0 đến các đỉnh còn lại của **G** như sau:

Gọi $L =$ tập hợp các đỉnh đã xét.



<u>Ví dụ mẫu</u>: Cho **G** là đồ thị vô hướng, liên thông, có trọng số, có biểu đồ sau:

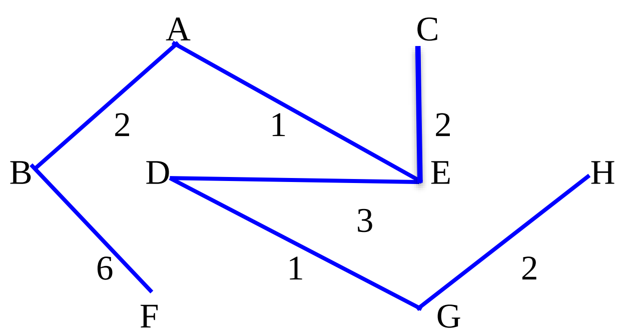


Hãy tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh B đến các đỉnh còn lại của **G** và chỉ ra độ dài của các đường đi tương ứng.

<u>Giải</u>:

Dùng thuật toán Dijkstra, ta có bảng sau:

Bước \ Đỉnh	A	B	C	D	E	F	G	H	Đỉnh đã xét	Cạnh đã xét
Khởi tạo	(2,B)	*	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)	(6,B)	(∞,B)	(∞,B)	B	ϕ
1	*	-	(12,A)	(10,A)	(3,A)	(6,B)	(∞,A)	(∞,A)	A	BA
2	-	-	(5,E)	(6,E)	*	(6,B)	(12,E)	(∞,E)	E	AE
3	-	-	*	(6,E)	-	(6,B)	(12,E)	(10,C)	C	EC
4	-	-	-	*	-	(6,B)	(7,D)	(10,C)	D	ED
5	-	-	-	-	-	*	(7,D)	(10,C)	F	BF
6	-	-	-	-	-	-	*	(9,G)	G	DG
7	-	-	-	-	-	-	-	*	H	GH



Ta có đường đi ngắn nhất từ đỉnh B đến các đỉnh còn lại của **G** là:

Từ B đến A bằng đường BA có độ dài bằng 2.

C ……………BAEC……………5.

D…………….BAED……………6.

E…………….BAE……………..3.

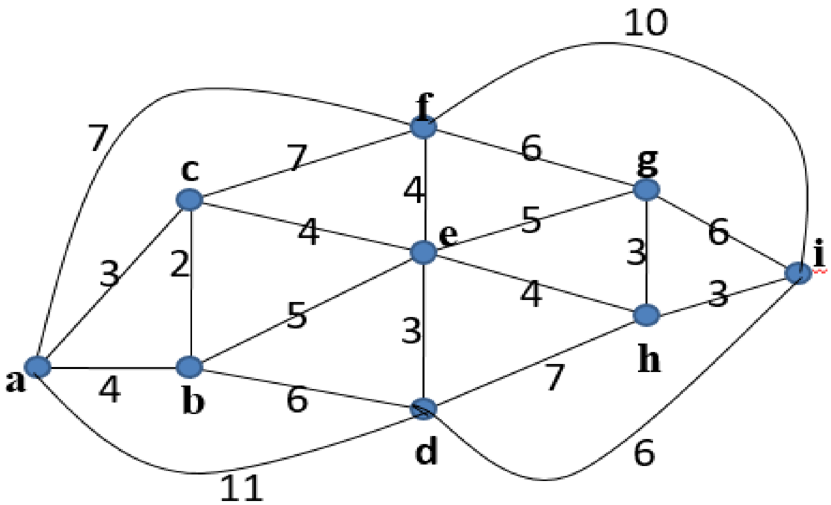
F…………….BF………………..6.

G……………BAEDG…………..7.

H……………BAEDGH………..9.

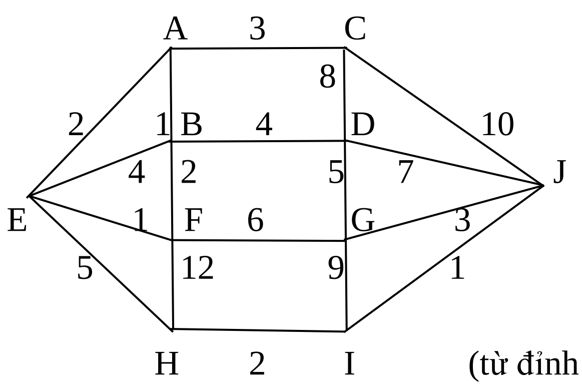
<u>Bài tập tương tự</u>: Tìm đường đi ngắn nhất từ 1 đỉnh đến các đỉnh còn lại của **G** và chỉ ra độ dài của đường đi tương ứng

a/



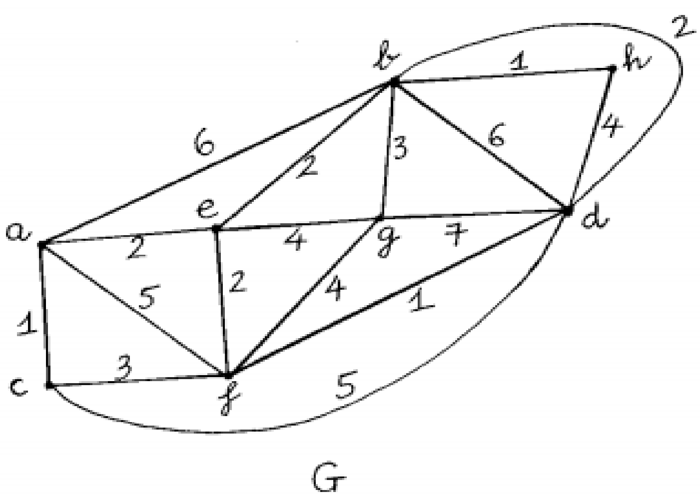
(từ đỉnh **c**)

b/



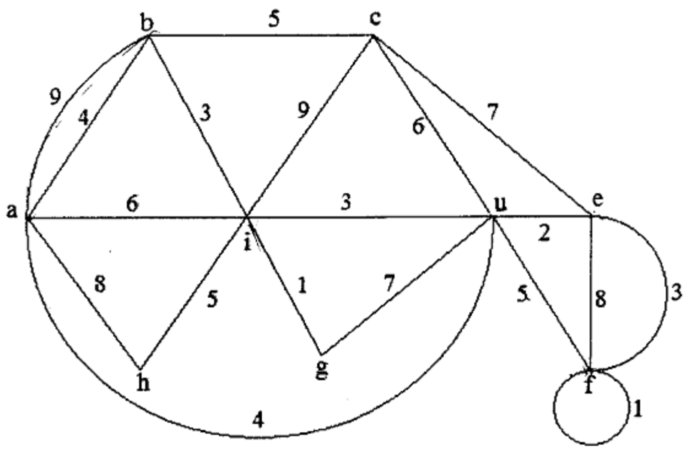
(từ đỉnh I)

c/



(từ đỉnh **e**)

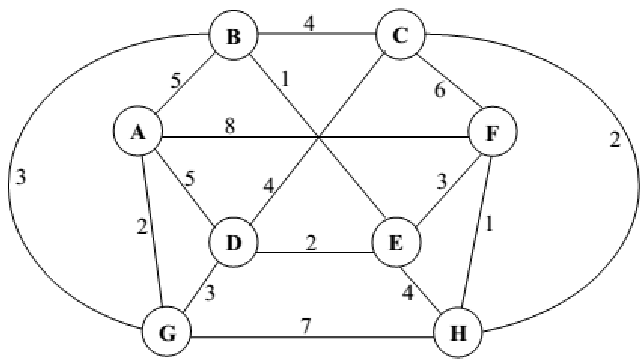
d/



G

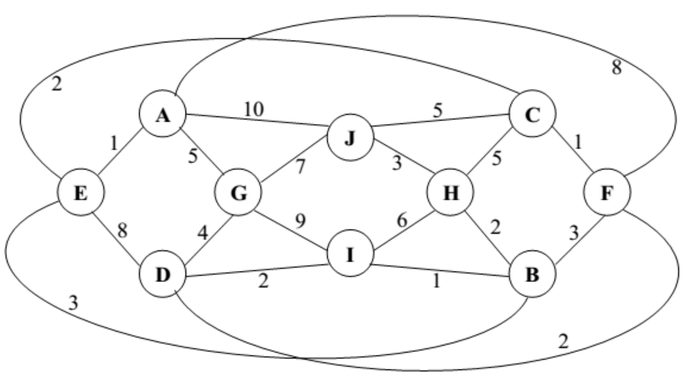
(từ đỉnh a)

e/



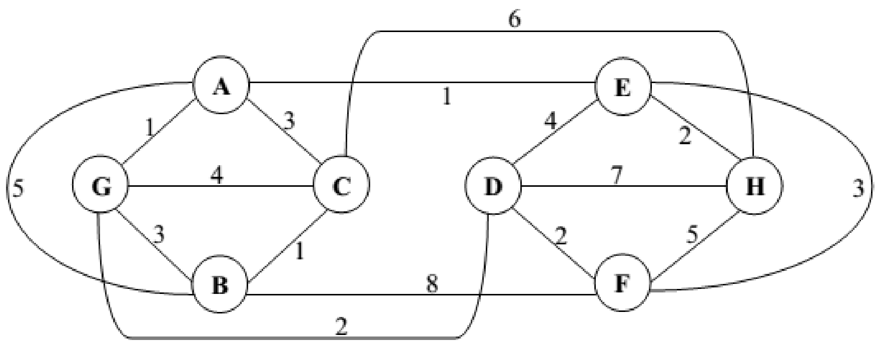
(từ đỉnh H)

f/



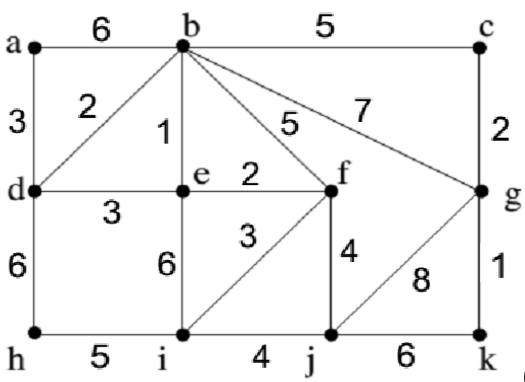
(từ đỉnh F)

g/



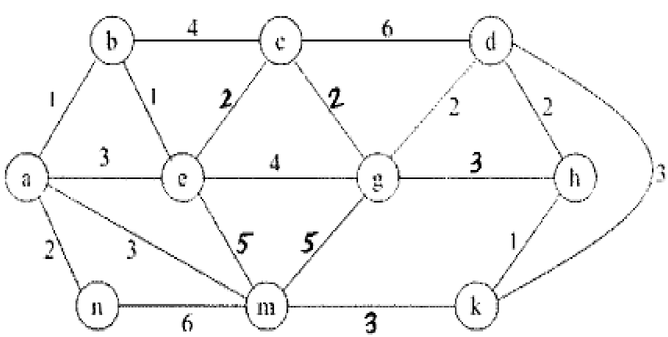
(từ đỉnh C)

h/



(từ đỉnh **g**)

i/



(từ đỉnh n)

5/ <u>CÂY VÀ CÂY BAO TRÙM</u>

Cây (Tree) hay còn gọi là cây tự do (Free Tree) là một đồ thị liên thông, không có chu trình con, và ta thường kí hiệu là T.

Xét một cây T.

Với 2 đỉnh u, v thuộc cây T thì ta luôn có 1 và chỉ 1 con đường đi nối giữa 2 đỉnh u, v.

Ta gọi $l(u,v) =$ chiều dài của con đường (duy nhất) nối giữa 2 đỉnh u, v, và gọi là khoảng cách giữa 2 đỉnh u, v, và kí hiệu là $\delta(u,v) = l(u,v)$.

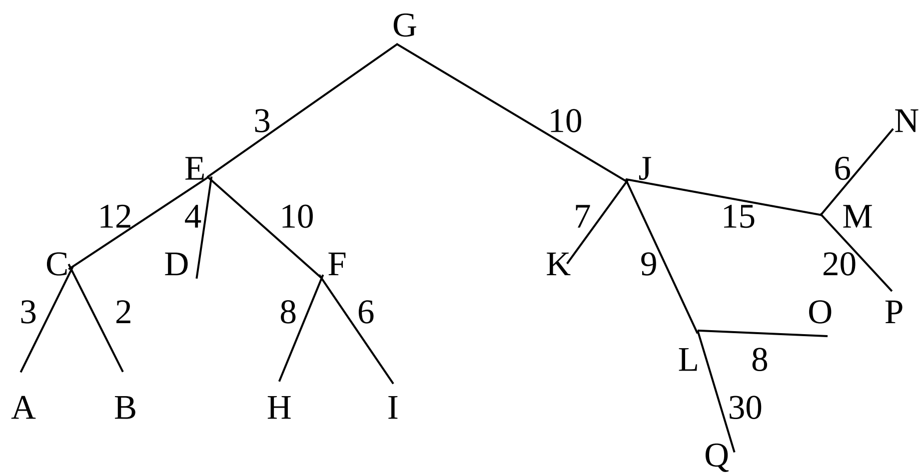
* *Cây có gốc (rooted tree)*:

Là một dạng cây định hướng, theo nghĩa từ gốc đến các đỉnh còn lại của cây ta luôn có con đường định hướng từ gốc đến đỉnh tương ứng.

Gốc của cây là duy nhất.

Mức (level) của 1 đỉnh $u \in T$ là chiều dài của con đường từ gốc đến đỉnh u, và ta kí hiệu là $le(u) = \delta(\text{gốc}, u)$.

Chiều cao (height) của cây là mức cao nhất trong số các mức thu được của các đỉnh $u \in T$, và ta kí hiệu là: $h(T) = \max\limits_{u \in T}\{le(u)\}$



Xét cây có gốc G.

Với cây tự do T thì ta có thể chọn tùy ý 1 đỉnh làm gốc thì ta có cây có gốc.

* *Xét cây tự do T*:

Ta gọi độ lệch tâm (eccentricity) của 1 đỉnh $u \in T$ là khoảng cách lớn nhất từ đỉnh u đến 1 đỉnh $v \in T$, và ta kí hiệu là $E(u) = \max\limits_{v \in T}\{\delta(u, v)\}$.

Ta gọi đỉnh có độ lệch tâm nhỏ nhất là tâm (center) của cây T, và độ lệch tâm của tâm khi đó chính là bán kính (radius) của cây T.

Một cây tự do T có nhiều nhất là 2 tâm.

* ***Cây bao trùm (cây khung) (spanning tree)***: là cây chứa hết mọi đỉnh của đồ thị **G**.

Vấn đề đặt ra là ta đi tìm cây bao trùm có tổng trọng số trên cây là nhỏ nhất (minimal spanning tree – MST) hay là cây bao trùm có tổng trọng số trên cây là lớn nhất (maximal spanning tree – MST2).

a/ **Thuật toán PRIM**: Ta xây dựng cây bao trùm T cho **G** như sau:

Bước 1:

Chọn bất kì 1 đỉnh của G đưa vào T.

Bước 2:

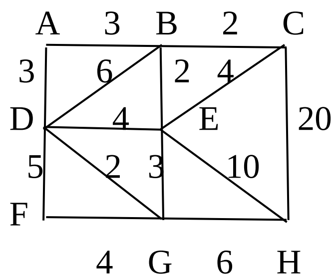
Chọn 1 đỉnh tùy ý ngoài T mà có cạnh nối trực tiếp với 1 trong các đỉnh hiện hành trong T mà có độ dài nhỏ nhất / lớn nhất, rồi đưa đỉnh và cạnh tương ứng vào T.

Bước 3:

Nếu như tất cả các đỉnh của G đã thuộc T thì ta dừng bài toán.

Nếu không, nghĩa là còn có đỉnh ngoài T, thì lặp lại Bước 2.

Ví dụ mẫu: Cho **G** là đồ thị vô hướng liên thông, có trọng số, có biểu đồ sau:



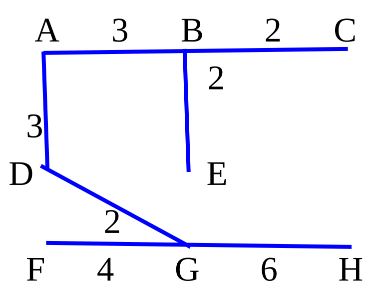
Hãy tìm cây khung (cây bao trùm) có tổng trọng số nhỏ nhất của **G** và chỉ ra trọng số của cây khi đó.

Giải:

Dùng thuật toán PRIM ta có bảng sau:

Đỉnh / Bước	A	B	C	D	E	F	G	H	Đỉnh đã xét	Cạnh đã xét
Khởi tạo	(∞,E)	(2,E)	(4,E)	(4,E)	*	(∞,E)	(3,E)	(10,E)	E	ϕ
1	(3,B)	*	(2,B)	(4,E)	-	(∞,B)	(3,E)	(10,E)	B	EB
2	(3,B)	-	*	(4,E)	-	(∞,C)	(3,E)	(10,E)	C	BC
3	*	-	-	(3,A)	-	(∞,A)	(3,E)	(10,E)	A	BA
4	-	-	-	*	-	(5,D)	(2,D)	(10,E)	D	AD
5	-	-	-	-	-	(4,G)	*	(6,G)	G	DG
6	-	-	-	-	-	*	-	(6,G)	F	GF
7	-	-	-	-	-	-	-	*	H	GH

Ta có cây bao trùm nhỏ nhất cần tìm là:



Tổng trọng số trên cây là: 3+2+2+3+2+4+6 = 22

b/ *<u>Thuật toán KRUSKAL</u>*:

<u>Bước 1</u>:

Gọi cây bao trùm cần tìm là T, và ta đặt $T = (V, \phi)$

(với V = tập hợp các đỉnh của **G**)

<u>Bước 2</u>:

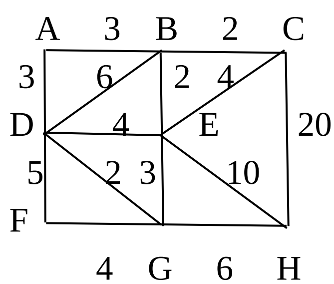
Chọn các cạnh có trọng số nhỏ nhất/ lớn nhất sao cho khi gắn cạnh vào cây T thì ta không tạo thành chu trình con → ta đưa cạnh tương ứng vào T.

<u>Bước 3</u>:

Nếu T đã liên thông thì ta dừng bài toán.

Nếu không, thì ta lặp lại Bước 2.

<u>Ví dụ mẫu</u>: Cho **G** là đồ thị vô hướng liên thông, có trọng số, có biểu đồ sau:



Hãy tìm cây khung (cây bao trùm) có tổng trọng số nhỏ nhất của **G** và chỉ ra trọng số của cây khi đó.

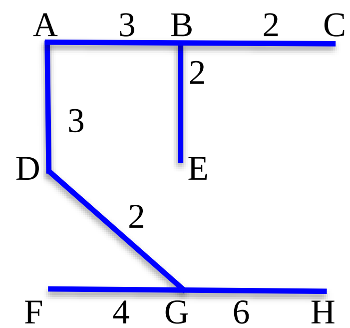
<u>Giải</u>:

Dùng KRUSKAL, ta có bảng sau:

Trọng số	Cạnh	Quyết định
2	BC	Chọn
2	BE	Chọn
2	DG	Chọn
3	AB	Chọn
3	AD	Chọn
3	EG	Không chọn (do tạo thành chu trình ABEGDA)
4	CE	Không chọn (do tạo thành chu trình BCEB)
4	DE	Không chọn (do tạo thành chu trình ABEDA)
4	GF	Chọn
5	DF	Không chọn (do tạo thành chu trình DGFD)
6	DB	Không chọn (do tạo thành chu trình ABDA)
6	GH	Chọn

10	EH	Dừng
20	CH	

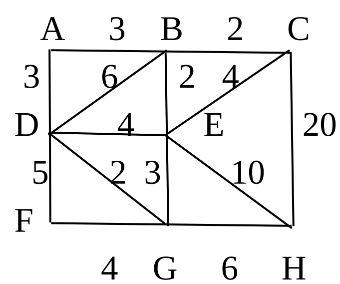
Ta có cây bao trùm có trọng số nhỏ nhất cần tìm là



Tổng trọng số trên cây là: 3+2+2+3+2+4+6 = 22

Bài tập tương tự:

1/ Tìm cây khung (cây bao trùm) có tổng trọng số lớn nhất cho đồ thị có biểu đồ:



2/ Dùng 9 ví dụ bên trên (phần tìm đường đi ngắn nhất) để tìm cây khung tối tiểu (MST1) và cây khung tối đại (MST2) cho đồ thị G, và chỉ ra trọng số tương ứng của cây khi đó.