

Các cột điểm:

- + Cột điểm quá trình: 20%
- + Cột điểm giữa kỳ: 20%, làm bài kiểm tra, nộp trên Elearning, được sử dụng tài liệu, tự luận.
- + Cột điểm cuối kỳ: 60%, thi tập trung, được sử dụng tài liệu, thời gian: 90 phút, tự luận.

Tài liệu tham khảo:

1/ Giáo trình Toán rời rạc.

Tác giả: Đỗ Văn Nhơn.

NXB: ĐHQG.HCM.

2/ Toán rời rạc.

Tác giả: Nguyễn Hữu Anh.

NXB: Giáo dục VN.

3/ Lý thuyết đồ thị.

Tác giả: Nguyễn Cam – Chu Đức Khanh.

NXB: ĐHQG.HCM.

Email: tuanlh@uit.edu.vn (GVC. ThS. Lê Hoàng Tuấn)

Discrete Structures

Chương 1: CƠ SỞ LOGIC

1/ Một số khái niệm:

- + Trong lĩnh vực Toán học, ta chỉ quan tâm đến những khẳng định có giá trị chân lý xác định, nghĩa là khẳng định có giá trị đúng hay là sai, nhưng không thể vừa đúng vừa sai. Ta gọi các khẳng định này là **mệnh đề (clause)**.
- + Các mệnh đề đúng, ta gọi là mệnh đề có chân trị đúng, và ký hiệu là 1 hay T.
- + Các mệnh đề sai thì ta gọi là mệnh đề có chân trị sai, và ký hiệu là 0 hay F.
- + Ta thường ký hiệu mệnh đề là: A, B, C, D, E,...,p, q, r, s,...,1, 2, 3,....

Ví dụ 1: Ta có các khẳng định sau là mệnh đề:

- a/ $1 + 3 > 5$. $\rightarrow 0$
- b/ (2 là số nguyên tố) hay (4 là bội số của 3). $\rightarrow 1$
- c/ (0 là số chẵn) và (0 là bội số của 12). $\rightarrow 1$
- d/ (1 là số chính phương) và ($10 \neq 9$). $\rightarrow 1$
- e/ ($4:2$) hoặc (1 là lũy thừa của 2). $\rightarrow 0$
- f/ Nếu ($3 < 2$) thì ($5 = 1$). $\rightarrow 1$
- g/ Nếu ($1 = 2$) thì (117 là số nguyên tố). $\rightarrow 1$
- h/ Nếu (0 là số chính phương) thì ($5 < 4$). $\rightarrow 0$
- i/ (10 là bội số của 2 và 5) tương đương (3 là số chẵn). $\rightarrow 0$
- j/ ($3 > 7$) tương đương (5 là ước số của 9). $\rightarrow 1$

Ngoài ra, ta có các phát biểu dưới dạng câu hỏi, lời đề nghị/yêu cầu, mệnh lệnh, hay lời nhờ giúp đỡ, lời tán thán, phàn nàn,...hoặc là câu nói truyền đạt cảm xúc chủ quan của người nhận xét, thì không phải là mệnh đề.

Ví dụ 2: các phát biểu sau không phải là mệnh đề.

- a/ Hãy chép bài đi nhé!
- b/ Vui lòng mở giúp tôi cánh cửa!
- c/ Bài toán ấy khó quá!
- d/ Anh ta thông minh thật!
- e/ Cô bé ấy xinh thật!
- f/ Chúng ta đi picnic ở đâu?

Không những thế, những phát biểu dưới dạng khẳng định chứa biến số, thì cũng không phải là mệnh đề. Tuy nhiên, khi thay biến số bằng những giá trị cụ thể, thì ta lại được mệnh đề có chân trị đúng hoặc sai. Ta gọi các phát biểu này là **vị từ**.

Ví dụ 3: ta có các vị từ sau:

- a/ $p(n) = "n$ là số nguyên tố", với $n \in \mathbb{N}$

là vị từ theo 1 biến $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $p(1) = 0$; $p(5)=1$; $p(113)=1$; $p(125)=0$.

b/ $p(x,y) = "x + y \text{ là số chẵn}"$ hoặc $"y \leq 2^x"$ là vị từ theo 2 biến $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $p(0,0) = 0$; $p(3,1) = 0$; $p(2,-1) = 1$.

c/ $p(x,y,z) = \text{nếu } "x < y"$ thì $"z \text{ là bội số của } y"$ là vị từ theo 3 biến $x,y,z \in \mathbb{R}$.

Ta có: $p(1,2,3) = 0$; $p(3,8,0) = 1$; $p(2,-1,-1) = 1$.

* **Phân loại mệnh đề**: mệnh đề được chia thành 2 loại:

a/ **Mệnh đề phức hợp**: là mệnh đề được hình thành từ các mệnh đề khác, thông qua các liên từ liên kết: “và”, “hay”, “hoặc”, “nếu...thì...”, “tương đương”, cùng với trạng từ “không”; và thường ký hiệu là: A, B, C, D, E,...

Ví dụ: “Nếu trời nắng thì tôi đi uống café” là một mệnh đề phức hợp, được hình thành từ 2 mệnh đề “trời nắng”, “tôi đi uống café”, thông qua cặp liên từ “nếu...thì...”.

Ví dụ khác: “2 không là số lẻ” là một mệnh đề phức hợp, được hình thành từ mệnh đề “2 là số lẻ” cùng với trạng từ “không”.

b/ **Mệnh đề sơ cấp (mệnh đề nguyên thủy) (original clause/ elementary clause)**: là mệnh đề không được hình thành từ các mệnh đề khác thông qua liên từ liên kết, cũng như không có trạng từ “không”. Nói cách khác, đây là những mệnh đề nhỏ nhất, đơn giản nhất, mà ta không thể tách ra nhỏ hơn được nữa.

Ví dụ: “ $10 > 5$ ”; “3 là bội số của 12”,...

Ta thường ký hiệu mệnh đề sơ cấp là: p, q, r, s, t,....

2/ **Các phép tính mệnh đề**:

Là các phép hợp nối mệnh đề, nhằm giúp cho ta nghiên cứu chân trị của các mệnh đề phức hợp, dựa trên chân trị của những mệnh đề đơn giản hơn, thông qua các liên từ liên kết, cùng với trạng từ “không”.

a/ **Phép phủ định**:

Mệnh đề phủ định của mệnh đề p được ký hiệu là \bar{p} hay là $\neg p$ (đọc là “không p ” hay “not p ”).

Là mệnh đề có chân trị ngược với chân trị của p .

Ta có bảng chân trị:

p	\bar{p}
0	1
1	0

b/ Phép nối liền (phép hôi) (phép tích):

Mệnh đề nối liền của hai mệnh đề p, q được ký hiệu là: $p \wedge q$ (đọc là “ p và q ”).

Là mệnh đề có chân trị đúng khi cả hai cùng đúng.

Ta có bảng chân trị:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(hay ta có: $\boxed{0} \wedge 0 \Leftrightarrow 0$).

c/ Phép nối rời (phép tuyển) (phép tổng):

Mệnh đề nối rời của hai mệnh đề p, q được ký hiệu là: $p \vee q$ (đọc là “ p hay q ”).

Là mệnh đề có chân trị sai khi cả hai cùng sai.

Ta có bảng chân trị:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(hay ta có: $\boxed{\text{TRUE}}$ $\vee 1 \Leftrightarrow 1$).

Tuy nhiên, trong ngôn ngữ hàng ngày, ta có thể hiểu p hay q theo nghĩa loại trừ nhau, nghĩa là chỉ có p đúng hay q đúng, nhưng không thể cùng đúng (có sự lựa chọn 1 trong 2) thì ta dùng phép tuyển chắt.

d/ Phép nối rời chắt (phép tuyển chắt):

Mệnh đề nối rời chắt của hai mệnh đề p, q được ký hiệu là: $p \underline{\vee} q$ (đọc là “ p hoặc q ”).

Là mệnh đề có chân trị đúng khi chân trị của cả hai là khác nhau.

Ta có bảng chân trị:

p	q	$p \underline{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

e/ Phép kéo theo:

Mệnh đề “nếu p thì q ” được ký hiệu là: $p \rightarrow q$ (đọc là “ p kéo theo q ”).

Để khảo sát chân trị của mệnh đề này, ta xét ví dụ:

Có tác giả phát biểu rằng: “nếu trời không mưa thì tôi đi xem phim”

Sau khi tác giả phát biểu xong, có các trường hợp sau xảy ra:

TH1: **trời mưa** và tác giả (của phát biểu) ở nhà (không đi xem phim). $\rightarrow 1$

TH2: **trời mưa** và tác giả đi xem phim. $\rightarrow 1$

TH3: **trời không mưa** và tác giả ở nhà. $\rightarrow 0$

TH4: **trời không mưa** và tác giả đi xem phim $\rightarrow 1$

Từ đó ta có bảng chân trị sau:

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0

1	1	1
---	---	---

(hay ta có: $0 \rightarrow \text{TRUE} \Leftrightarrow 1$ hay là $1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow 0$).

f/ Phép kéo theo 2 chiều (phép tương đương):

Mệnh đề “nếu p thì q ” và “nếu q thì p ” được ký hiệu là: $p \leftrightarrow q$ (đọc là “ p tương đương q ”).

Là mệnh đề chỉ sai khi chân trị của p, q là khác nhau.

Từ đó ta có bảng chân trị sau:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Thứ tự ưu tiên của các phép toán logic:

Ưu tiên 1: \neg

Ưu tiên 2: $\wedge, \vee, \underline{\wedge}$

Ưu tiên 3: $\rightarrow, \leftrightarrow$.

3/ Biểu thức logic:

Là một tên gọi khác của mệnh đề phức hợp. Là biểu thức được hình thành từ:

+ Các hằng mệnh đề: 1, 0;

+ Các biến mệnh đề: $p, q, r, s, t, u, v, \dots$

+ Cùng với các phép tính mệnh đề: $\neg, \wedge, \vee, \underline{\wedge}, \rightarrow, \leftrightarrow$ và các dấu ngoặc (), [] để xác định thứ tự thực hiện các phép toán.

Ta thường ký hiệu biểu thức logic là: A, B, C, D, E, ...

Ví dụ: $A = [(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \vee t)] \vee [p \rightarrow (\neg s \vee u)] \leftrightarrow \neg t$

$$B = [(q \rightarrow 0) \wedge (\neg r \leftrightarrow 1)] \vee (p \wedge \neg q)$$

Ta có thể lập bảng chân trị cho biểu thức logic, để kiểm soát chân trị của chúng.

Ví dụ: lập bảng chân trị cho biểu thức logic sau

$$C = \underbrace{[(\neg p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow 0)] \wedge (\neg q \leftrightarrow \neg r)}_{D}$$

Giải: Ta có bảng chân trị sau:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \rightarrow q$	$r \rightarrow 0$	D	$\neg q \leftrightarrow \neg r$	C
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1

Bài tập tương tự:

Lập bảng chân trị cho các biểu thức sau

a/ $B = [(p \leftrightarrow \neg q) \vee (r \rightarrow \neg p)] \wedge (1 \leftrightarrow \neg r)] \rightarrow [(r \wedge \neg p) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg r)]$

b/

$$C = [(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow r)] \rightarrow [(\neg q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)] \wedge [[(\neg p \leftrightarrow 0) \rightarrow (1 \rightarrow \neg r)] \vee [(p \wedge q) \rightarrow \neg r]]$$

c/ $D = [(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \leftrightarrow \neg p)] \wedge [(\neg r \leftrightarrow 1) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)] \leftrightarrow [(p \wedge \neg r) \rightarrow q]$

d/

$$E = [(p \leftrightarrow \neg r) \leftrightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \leftrightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow 0)] \leftrightarrow [(\neg r \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow p)] \rightarrow (r \leftrightarrow \neg p)$$

e/

$$F = [(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \vee q)] \vee [(\neg p \wedge r) \leftrightarrow (r \leftrightarrow q)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r)] \rightarrow [(r \wedge \neg q) \leftrightarrow p]$$

* Sự tương đương logic

Hai biểu thức logic E và F được gọi là tương đương nhau, và kí hiệu là $E \Leftrightarrow F$, nếu chúng có bảng chân trị giống nhau

Ví dụ 1: Cho $\begin{cases} E = p \rightarrow q \\ F = \neg p \vee q \end{cases}$. Chứng minh rằng $E \Leftrightarrow F$

Gợi ý: Ta có bảng chân trị của E là:

p	q	$E = p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ta có bảng chân trị của F là:

p	q	$\neg p$	$F = \neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Ta có bảng chân trị của E và bảng chân trị của F là như nhau nên ta kết luận $E \Leftrightarrow F$ (đpcm)

Ví dụ 2: Cho $\begin{cases} E = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ F = p \wedge (q \vee r) \end{cases}$. Chứng minh rằng $E \Leftrightarrow F$

Ví dụ 3: Cho $\begin{cases} E = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ F = p \vee (q \wedge r) \end{cases}$. Chứng minh rằng $E \Leftrightarrow F$

* Các luật logic

Gọi p, q, r là các biến mệnh đề;

1 là hằng đúng;

0 là hằng sai.

Ta có các luật logic sau:

i/ Luật phủ định của phủ định:

$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ hay $\neg(\neg \square) \Leftrightarrow \square$

ii/ Luật DeMorgan: *

$$\begin{cases} \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \end{cases}$$

iii/ Luật giao hoán:

$$\begin{cases} p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \\ p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \end{cases}$$

iv/ Luật kết hợp:

$$\begin{cases} p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \end{cases}$$

v/ Luật phân bố: *

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

vi/ Luật lũy đẳng:

$$\begin{cases} p \wedge p \Leftrightarrow p \\ p \vee p \Leftrightarrow p \end{cases}$$

vii/ Luật trung hòa:

$$\begin{cases} p \wedge 1 \Leftrightarrow p \\ p \vee 0 \Leftrightarrow p \end{cases}$$

viii/ Luật thống trị:

$$\begin{cases} p \vee 1 \Leftrightarrow 1 \\ p \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \end{cases}$$

ix/ Luật về phân tử bù:

$$\begin{cases} p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0 \\ p \vee \neg p \Leftrightarrow 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \Box \wedge \neg \Box \Leftrightarrow 0 \\ \Box \vee \neg \Box \Leftrightarrow 1 \end{cases}$$

x/ Luật hấp thu:

$$\begin{cases} p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \\ p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \end{cases}$$

xi/ Luật kéo theo: *

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

xii/ Luật tương đương:

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \end{aligned}$$

xiii/ Luật phản đảo:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

