Biến ngẫn nhiên liên tục

BNN RR $X \in \{x_1, x_2, \cdots\}$	BNN LT $X \in R$
Hàm mật độ khối	Hàm mật độ xác suất
$0 \le p(x_i) \le 1$ $\sum_i p(x_i) = 1$	$f(x) \ge 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
Hàm phân phối tích lũy $F(y) = P(X \le y)$	
$F(y) = \sum_{x \le y} p(x_i)$	$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)dx = 1$
	$< \sim \le; \ > \sim \ge$
	$F'(x) = f(x)$

Ví dụ 2.21 Thời gian sử dụng của một thiết bị điện tử (tính bằng năm) là một biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^3}, & x \ge 1 \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

a. Tìm k.

b. Tìm hàm phân phối của X.

c. Tính xác suất thiết bị đó sử dụng được hơn 5 năm.

a) Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{k}{x^3}dx = k\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx = \frac{k}{2} = 1 \to k = 2$$

Nhận thấy $k = 2$ thỏa yêu cầu.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & x \ge 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

b) Hàm phân phối tích lũy

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Note: f bao nhiêu trường hợp, thì F cũng định nghĩa theo bấy nhiêu trường hợp.

Với $x < 1$, ta có

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

Với $x \ge 1$, ta có

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{x} \frac{2}{t^3} dt = -\frac{1}{t^2} |_1^x = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Vậy

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

c) Xác suất thiết bị điện sử dụng hơn 5 năm

$$P(X > 5) = \int_{5}^{+\infty} f(x)dx = \int_{5}^{+\infty} \frac{2}{x^3} dx = \frac{1}{25}$$

Cách 2: $F(x) = P(X \leq x)$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \ \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - \frac{1}{5^2})$$

Câu 2.(3 điểm) Thời gian sống X (tính bằng năm) của một loại máy tính là một đại lương ngẫu nhiên liên tục với mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} K - x/50 & \text{nếu } \ 0 < x \leq 10, \\ 0 & \text{nếu } \ x \notin (0, 10]. \end{cases}$$

a) Tìm K. Tìm hàm phân phối F(x) của X.

a) Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{10} \left(k - \frac{x}{50}\right) dx = 10k - 1 = 1 \rightarrow k = \frac{1}{10}$$

Nhận thấy $k = \frac{1}{10}$ thỏa yêu cầu.

b) Xác suất để máy tính sử dụng được từ 2 đến 5 năm

$$P(2 \leq X \leq 5) = \int_{2}^{5} f(x)dx =? = \int_{2}^{5} \left(\frac{1}{10} - \frac{x}{50}\right) dx =?$$

c) Giả sử thiết bị này sử dụng hơn 2 năm thì xác suất mà nó được sử dụng ít nhất 5 năm?

$$P(X \geq 5 | X > 2) = \frac{P(X \geq 5 \cap X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(X \geq 5)}{P(X > 2)} =?$$

$$P(X > 2) = \int_{2}^{10} \left(k - \frac{x}{50}\right) dx =?$$

$$P(X \geq \ 2) = \int_{5}^{10} \left(k - \frac{x}{50}\right) dx =?$$

d) Tính hàm phân phối tích lũy

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt =?$$

Với $x \notin (0{,}10]$, ta được

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0?$$

Với $x \in (0,10]$, ta được

$$F(x) = \int_{0}^{x} \left(\frac{1}{10} - \frac{t}{50}\right) dt = ?$$

Các tham số của BNN

Trung bình/ Kỳ vọng $E(X)$, μ	
$E(X) = \sum_i x_i \, p(x_i)$	$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
Phương sai (Bình phương sai số so với trung bình) \$Var(X)$, σ^2	
$Var(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i)$	$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$

Ví dụ 2.25 Giả sử biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{1} x3x^3 dx = \frac{3}{4}$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 f(x)dx = \int_{0}^{1} \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 3x^3 dx = ?$$

Ví dụ 2.23 Trong hộp có 99 quả bóng đen và 1 quả bóng đỏ. Người chơi bỏ 10 000 đồng cho mỗi lần lấy một quả bóng trong hộp. Nếu lấy được bóng đỏ, người chơi được 100 000 đồng. Nếu lấy được bóng đen thì người chơi xem như mất 10 000 đồng. Trung bình một lần lấy bóng, người chơi được/mất bao nhiêu tiền?

Đặt X: số tiền được/mất trong mỗi lần chơi

X	-10000	90000
P(X=xi)	99/100	1/100

$$E(X) = \sum_i x_i \, p(x_i) = -10000 * 99/100 + 90000 * 1/100 = -9000$$

$$Var(X) = \sum_i (x_i - 9000) \, p(x_i)$$
$$= (-10000 + 9000)^2 * 99/100 + (90000 - 9000)^2 * 1/100$$

Ví dụ 2.27 Một trung tâm bảo hành laptop thấy rằng số laptop hiệu T cần sửa trong năm tối đa là 3 máy. Cho X là số laptop T cần sửa trong một năm. Dựa trên các số liệu đã có, bảng phân phối xác suất của X như sau

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

a. Trong một năm, trung bình có bao nhiêu laptop T được sửa tại trung tâm?

b. Một cửa hàng Z có hợp đồng với trung tâm bảo hành đối với việc sửa laptop T như sau: Phí dịch vụ hàng năm là 200$ và 50$ cho mỗi laptop được sửa. Tìm trung bình số tiền mà cửa hàng Z trả cho trung tâm bảo hành mỗi năm.

24410202, 24410162, 24410139, 24410192, 24410191, 24410140, 24410212, 24410139, 24410152, 24410169, 24410246, 24410231, 24410258, 24410197, 24410157, 24410131, 24410218, 24410221, 24410251, 24410216, 24410227, 24410178

$$Y = 200 + 50X$$

X	0	1	2	3
Y	200	200+50	200+2*50	200+3*50
	0.2	0.3	0.4	0.1

$$E(Y) = \sum_i (200 + 50 * x_i)\, p(x_i)$$

Nếu $Y = h(X) \rightarrow$

$$E(Y) = \sum_i h(x_i)p(x_i) \;\; rr, \qquad lt \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx$$

Nếu

$$Y = aX + b \rightarrow E(Y) = aE(X) + b$$

Note:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

BTQT:

Ví dụ 2.34 Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$$

Cho biến ngẫu nhiên $Y = 3X - 2$. Tính $E(Y)$ và $\mathrm{Var}(Y)$.