Buổi 02 – Ngày 13-10-2024 – môn Đại số tuyến tính – lớp LT.K2024.2

Ví dụ mẫu 2: Giải và biện luận hệ pt tuyến tính sau trên $\mathbb{R}$ theo tham số thực m:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ mx_1 + x_2 + x_3 = m^2 \end{cases}$$

Giải:

Ta có dạng ma trận hóa của hệ là:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & m^2 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)\to(3)-m(1)]{(2)\to(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & m^2-m \end{array}\right) (*)$$

TH1: $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$ thì hệ pt ban đầu $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)\to(3)-(1)]{(2)\to(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Ta thấy do cột 2, cột 3 không chuẩn hóa được nên hệ pt CÓ VÔ SỐ NGHIỆM như sau:

Đặt $\begin{cases} x_2 = a; \\ x_3 = b \end{cases}, \forall a,b \in \mathbb{R}$. Ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1-a-b$

TH2: $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Ta có (*) $\xrightarrow[(3)\to\frac{1}{1-m}(3)]{(2)\to\frac{1}{m-1}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+m & -m \end{array}\right) \xrightarrow[(3)\to(3)-(2)]{(1)\to(1)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 & -m-1 \end{array}\right) (**)$

TH2.1 $m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$

Ta có (**) $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ từ dòng 3 ta thấy

dạng (0 0 0 | 1) nên hệ pt VÔ NGHIỆM

TH2.2 $m+2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

Ta có (**) $\xrightarrow{(3)\to\frac{1}{m+2}(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -{(m+1)}/{(m+2)} \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[(1)\to(1)-(m+1)(3)]{(2)\to(2)+(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (m+1)^2/(m+2) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(m+2) \\ 0 & 0 & 1 & -(m+1)/(m+2) \end{array}\right)$$

Kết luận:

Khi $m=-2$ thì hệ pt VÔ NGHIỆM

Khi $m=1$ hệ pt có vô số nghiệm, với $\begin{cases} x_2 = a; \\ x_3 = b \end{cases}, \forall a,b \in \mathbb{R}$ và $x_1 = 1-a-b$

Khi $m \neq 1$ và $m \neq -2$ thì hệ pt có nghiệm duy nhất:

$$x_1 = \frac{(m+1)^2}{m+2}; x_2 = \frac{1}{m+2}; x_3 = -\frac{(m+1)}{(m+2)}$$

<u>Bài 1</u>: Giải hệ pt tuyến tính sau trên $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_1 = 6 \\ 3x_4 + 2x_3 - 2x_1 + x_2 = -8 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_2 + 2x_4 = 4 \\ 2x_3 + x_4 - 3x_2 + 2x_1 = -8 \end{cases}$$

<u>Bài 2</u>: Giải và biện luận hệ pt tuyến tính sau trên $\mathbb{R}$ theo tham số thực m

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_2 + mx_3 + 2x_1 = 3 \\ 3x_3 + mx_2 + x_1 = 2 \end{cases}$$

* **<u>Các cột bán chuẩn</u>**

Các cột bán chuẩn cấp m là các cột có m thành phần, như sau:

$$E'_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E'_2 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E'_m = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{pmatrix}$$

Trong đó: $a, c, \dots, u_m$ là những số tùy ý khác 0; còn

$b, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$ là những số tùy ý.

<u>Ví dụ</u> Ta có các cột bán chuẩn cấp 5 sau:

$$E'_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E'_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E'_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}, E'_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$$

<u>Áp dụng</u>:

a/ *<u>Tìm hạng của ma trận</u>*:

Cho ma trận $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$.

Từ A $\xrightarrow{\text{bán chuẩn hóa (chuẩn hóa) tối đa các cột}}$ H

Ta gọi ma trận H là ma trận dạng bậc thang (echelon form matrix) của A

Ta đặt $rank(A)=r(A)=$ số dòng khác zero của H

= hạng của ma trận A.

Ví dụ mẫu: Cho $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 3\\ 4 & 5 & -1 & -2\\ -8 & -10 & 2 & 4\end{pmatrix}$. Tìm $r(A)=?$

Giải: Ta có

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 3\\ 4 & 5 & -1 & -2\\ -8 & -10 & 2 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)\to(3)-4(1)]{(2)\to(2)+2(1)}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 7 & -1 & 4\\ 0 & -14 & 2 & -8\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)\to(3)+2(2)}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 7 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=H$$

Do H có 2 dòng khác zero nên $rank(A)=r(A)=2$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & 5\\ -2 & 2 & 1 & 0 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 6 & -7\\ -8 & 0 & 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$. Tìm $r(A)=?$

Bài 2: Cho $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 3\\ 5 & 8 & 1 & 9\\ -7 & 6 & 1 & -5\\ 4 & 0 & 2 & -10\\ -3 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Tìm $r(A)=?$

Bài 3: Cho $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & 1 & m\\ 1 & m & 3\end{pmatrix}$. Tìm và biện luận hạng của ma trận A theo tham số thực m.

Bài 4: Cho $A=\begin{pmatrix}m & 5m & -m\\ 2m & m & 10m\\ -m & -2m & -3m\end{pmatrix}$. Tìm và biện luận hạng của ma trận A theo tham số thực m.

Bài 5: Cho $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 4\\ m & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$. Tìm và biện luận hạng của ma trận A theo tham số thực m.

b/ *Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp bán chuẩn (pp GAUSS)*

Ta giải một hệ pt tuyến tính, dưới dạng ma trận hóa $(A|B)$, gồm m pt và n ẩn số, trên F, bằng cách bán chuẩn hóa các cột (thay vì phải chuẩn hóa các cột như pp GAUSS-JORDAN), và ta gọi là pp GAUSS.

Quá trình bán chuẩn hóa các cột là hoàn toàn tương tự như trường hợp chuẩn hóa các cột. Tuy nhiên, khi giải hệ bằng pp GAUSS thì bộ nghiệm ta không có được trực tiếp như khi giải bằng pp GAUSS-JORDAN, mà ta sẽ ra các ẩn có chỉ số lớn trước, rồi thay dần vào các pt bên trên, ta sẽ ra các ẩn có chỉ số nhỏ hơn.

Ví dụ ta có x_5, rồi tới x_4, và thay vào các pt bên trên, ta có $x_3; x_2$ và x_1

<u>Ví dụ</u>: Giải hệ pt $(A|B) \xrightarrow{ppGAUSS} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$

Ta có: $-2x_5 = 4 \Rightarrow x_5 = -2$

$-3x_4 + 9x_5 = 18 \Rightarrow x_4 = 3x_5 - 6 = 3.(-2) - 6 = -12$

$x_3 = 2a, \forall a \in \mathbb{R}$ là ẩn tự do (do cột thứ 3 không bán chuẩn hóa được)

$2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -12 \Rightarrow x_2 = -6 - \frac{3}{2}(2a) - 12 - 3(-2) = -12 - 3a$

$-x_1 + 2x_2 + 3x_4 - 4x_5 = -5 \Rightarrow x_1 = 5 + 2.(-12 - 3a) + 3.(-12) - 4.(-2) = -47 - 6a$

<u>Ví dụ mẫu 1</u>: giải hệ pt tuyến tính sau trên $\mathbb{R}$ bằng pp GAUSS

$$\begin{cases} 2x_2 - x_1 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - 3x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

<u>Giải</u>: Ta có dạng ma trận hóa của hệ như sau:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -5 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)\to(2)+2(1)]{(3)\to(3)+(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)\to(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -12 \end{array}\right)$$

Do ma trận kết quả có 3 cột bán chuẩn hóa liên tiếp nhau, nên hệ pt có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 5x_3 = 4 \\ -7x_3 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 3x_3 = 2\left(-\frac{32}{7}\right) + 3\left(\frac{12}{7}\right) = -4 \\ x_2 = 4 - 5\left(\frac{12}{7}\right) = -\frac{32}{7} \\ x_3 = \frac{12}{7} \end{cases}$$

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \\ 5 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$. Tìm hạng của ma trận A.

<u>Giải</u>:

Ta có $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \\ 5 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)\to 2(3)+5(1)]{(2)\to(2)+2(1)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 5 & -8 & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)\to(3)-(2)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -15 & 28 \end{pmatrix} = H$

Do ma trận kết quả có 3 dòng khác zero, nên hạng của ma trận A là $r(A)=rank(A)=3$.

<u>Ví dụ mẫu 3</u>: Tìm và biện luận hạng của ma trận theo tham số thực m, với

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Giải</u>: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)\to(3)-(1)]{(2)\to(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & m-1 & 6 \end{pmatrix} (*)$

TH1: $m=0 \Rightarrow m-1=-1$ và $m+6=6$ nên hệ (*) = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)\to(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H_1$

Do ma trận kết quả có 2 dòng khác zero $\Rightarrow r(A)=2$

TH2: $m \neq 0 \Rightarrow m-1 \neq -1$ ta có hệ (*)

$$(*) \xrightarrow{(3)\to(3)+(m-1)(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & 0 & 6+(m-1)(m+6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & 0 & m^2+5m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & 0 & m(m+5) \end{pmatrix} = H_2$$

TH2.1: $m+5=0 \Leftrightarrow m=-5 \Rightarrow m(m+5)=0$

Ta có $H_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Do ma trận kết quả có 2 dòng khác zero $\Rightarrow r(A)=2$

TH2.2: $m+5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -5 \Rightarrow m(m+5) \neq 0$ (do $m \neq 0$)

Ta có $H_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & 0 & m(m+5) \end{pmatrix}$. Do ma trận kết quả có 3 dòng khác zero $\Rightarrow r(A)=3$

Kết luận:

Khi $m=0$ hoặc $m=-5$ thì $r(A)=2$

Khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -5 \end{cases}$ thì $r(A) = 3$.

5/ CÁC PHÉP TÍNH TRÊN MA TRẬN

a/ ***Phép cộng, trừ 2 ma trận***

Cho 2 ma trận có cùng kích thước $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ và $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

Ta có: $\boxed{A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}}$

b/ ***Phép nhân 1 con số với ma trận***:

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, trên *F*, và cho số $c \in F$. Ta có

$$\boxed{c.A = (c.a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}}$$

Ví dụ: Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 & 3 & 10 & -8 \\ 7 & -1 & 0 & -9 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & -4 & 2 & 8 & 12 \\ -8 & 0 & 5 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 2 & 10 & -6 & 1 \\ -4 & 3 & 7 & 5 & -2 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & -6 & 4 & -9 \\ 2 & -1 & 4 & 12 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tìm: } \begin{cases} 2517A - 3594B \\ 1153B - 675A \\ 2879A + 5495B \\ 1423B + 719A \end{cases}$$

c/ ***Phép nhân giữa 1 dòng với 1 cột***:

Cho dòng $U = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n)$ và cột $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, ta có

$$U.V = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Ví dụ: Cho $U=(-3 \quad 2 \quad 10 \quad 6 \quad -7)$ và $V=\begin{pmatrix}2\\-5\\8\\6\\-1\end{pmatrix}$ thì

$$U.V=(-3).2+2(-5)+10.8+6.6+(-7)(-1)=107$$

d/ *Phép nhân 2 ma trận*:

Cho 2 ma trận $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ và $B=(b_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\1\le k\le p}}$

(số cột của ma trận đứng trước = n = số dòng của ma trận đứng sau)

Tích của 2 ma trận A,B là ma trận kết quả có được khi ta nhân từng dòng của ma trận A (ma trận đứng trước) với từng cột của ma trận B (ma trận đứng sau). Cụ thể như sau:

Ta xét:

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}\begin{matrix}\to \text{Dòng } 1\\ \to \text{Dòng } 2\\ \\ \to \text{Dòng } m\end{matrix}$$

$$B=(B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_p)$$

$$\begin{matrix}\downarrow & \searrow & & \searrow\\ \text{Cột } 1 & \text{Cột } 2 & & \text{Cột } p\end{matrix}$$

Ta có:

$$C_{m\times p}=A_{m\times n}.B_{n\times p}=AB=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}(B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_p)=\begin{pmatrix}A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_p\\A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_p\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_p\end{pmatrix}$$

Ta gọi $C_{m\times p}$ là ma trận tích của A và B (nghĩa là C là ma trận có m dòng và p cột)

Lưu ý: tổng quát thì phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán, nghĩa là $AB\ne BA$

* ***Tính chất của phép nhân ma trận***:

1/ Ta có $(AB)C=A(BC)=ABC$

2/ $O_m.A_{m\times n}=A_{m\times n}.O_n=O_{m\times n}$

3/ $\begin{cases}I_m.A_{m\times n}=A_{m\times n}\\A_{m\times n}.I_n=A_{m\times n}\end{cases}$

4/ $\begin{cases}A(B\pm C)=AB\pm AC;\\(B\pm C)D=BD\pm CD\end{cases}$

5/ $(cA)B = c(AB) = A(cB)$, với $c \in F$.

Ví dụ:

Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & -6 \\ -2 & 10 & -4 & 1 \\ 7 & -8 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -3 \\ 3 & -8 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \\ -9 & 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & -12 \\ 8 & 10 & -6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 3 \\ 4 & 9 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -7 & 4 \\ -1 & 6 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Tìm các ma trận sau:

$$E_{3\times3} = AB; F_{3\times4} = CA; G_{4\times4} = BA; H_{3\times4} = AD; I_{4\times3} = DB$$
$$J_{4\times3} = BC; K_{3\times3} = FI; L_{3\times3} = HJ; M_{4\times4} = IH; N_{4\times4} = JF;$$
$$O_{4\times4} = MN; P_{4\times4} = NM; Q_{4\times4} = GP; R_{4\times4} = OG; S_{4\times4} = QR;$$
$$T_{4\times4} = RS; U_{4\times3} = TJ; V_{3\times4} = HT; W_{4\times4} = UV; X_{4\times4} = WT; Y_{4\times4} = TX; Z_{4\times4} = XY$$

Giải:

Ta có $E_{3\times3} = AB = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & -6 \\ -2 & 10 & -4 & 1 \\ 7 & -8 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 6 & -3 \\ 3 & -8 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \\ -9 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 20 & 11 \\ 27 & -82 & 53 \\ -46 & 96 & -54 \end{pmatrix}$

Nhân ngoài nháp

5.(-5)+(-1).3+3.1+(-6)(-9)	5.6+(-1).(-8)+3.(-2)+(-6).2	5.(-3)+(-1).7+3.5+(-6).(-3)
(-2).(-5)+10.3+(-4).1+1(-9)	(-2).6+10.(-8)+(-4).(-2)+1.2	(-2).(-3)+10.7+(-4).5+1.(-3)
7.(-5)+(-8).3+4.1+(-1).(-9)	7.6+(-8).(-8)+4.(-2)+(-1).2	7.(-3)+(-8).7+4.5+(-1).(-3)

Lũy thừa của ma trận vuông

* Xét A là ma trận vuông cấp n trên F. Ta có lũy thừa nguyên, không âm của A như sau:

$$A^0 = I_n$$
$$A^1 = A;$$
$$A^2 = A.A$$
$$A^3 = A.A.A = A^2.A$$
…..
$$A^k = \underbrace{A.A.....A}_{k \text{ lần}} = (A^{k-1}).A, \quad \forall k \geq 0, k \text{ nguyên}.$$

Ví dụ: cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm $A^k, \forall k \geq 0, k \in \mathbb{N}$

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dự đoán: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, $\forall k \geq 0, k \in \mathbb{N}$ (*)

Ta chứng minh bằng pp quy nạp như sau:

Với $k = 0$ ta có $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, nghĩa là (*) đúng với $k = 0$

Với $k = 1$ ta có $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, nghĩa là (*) đúng với $k = 1$

$k = 2$ ta có $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, nghĩa là (*) đúng với $k = 2$

Giả sử (*) đúng với $k = m$, $\forall m \geq 0, m \in \mathbb{N}$, nghĩa là ta có: $A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$

Ta cần chứng minh (*) đúng $k = m+1$, nghĩa là ta cần chứng tỏ $A^{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+1 & 1 \end{pmatrix}$

Thật vậy, $A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$, nhân 2 vế pt cho A ta được: $A^m.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+1 & 1 \end{pmatrix}$

Như vậy, ta có $A^{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+1 & 1 \end{pmatrix}$, nên theo pp quy nạp, ta có $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, $\forall k \geq 0, k \in \mathbb{N}$ đúng (đpcm).

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm A^2 và A^3

Bài 2: Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Tìm $A^k, \forall k \geq 0, k \in \mathbb{N}$

Bài 3: Cho $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Tìm $A^k, \forall k\ge 0, k\in\mathbb{N}$

Bài 4: Cho $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Tìm $A^k, \forall k\ge 0, k\in\mathbb{N}$

Bài 5: Cho $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Tìm $A^k, \forall k\ge 0, k\in\mathbb{N}$

Bài 6: Cho $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$. Tìm $A^k, \forall k\ge 0, k\in\mathbb{N}$

Bài 7: Cho $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Tìm $A^k, \forall k\ge 0, k\in\mathbb{N}$

Lưu ý: Nếu AB=O thì ta không thể kết luận A = O hay B = O như thông thường.

Ví dụ: Cho $A=\begin{pmatrix}0&-2\\0&3\end{pmatrix}\ne\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\mathrm{O}$ và $B=\begin{pmatrix}3&2\\0&0\end{pmatrix}\ne\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\mathrm{O}$

Mà $AB=\begin{pmatrix}0&-2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\mathrm{O}$