Buổi 02 – Ngày 02-03-2025 – môn Cấu trúc rời rạc – lớp MA004.E22.LT.CNTT

Ví dụ mẫu: Dùng các luật logic để chứng minh rằng biểu thức sau là hằng đúng

$$[(p \to q) \wedge \neg q] \to (p \to r)$$

Giải:

Biểu thức	Quy luật logic
$[(p \to q) \wedge \neg q] \to (p \to r)$	tiền đề
$\Leftrightarrow [(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \to (\neg p \vee r)$	luật kéo theo
$\Leftrightarrow [\neg q \wedge (\neg p \vee q)] \to (\neg p \vee r)$	luật giao hoán
$\Leftrightarrow [(\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)] \to (\neg p \vee r)$	luật phân bố
$\Leftrightarrow [(\neg q \wedge \neg p) \vee 0] \to (\neg p \vee r)$	luật về phần tử bù
$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \to (\neg p \vee r)$	luật trung hòa
$\Leftrightarrow \neg(\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg p \vee r)$	luật kéo theo
$\Leftrightarrow (q \vee p) \vee (\neg p \vee r)$	luật DeMorgan, luật phủ định của pđ
$\Leftrightarrow q \vee (p \vee \neg p) \vee r$	luật kết hợp
$\Leftrightarrow [q \vee (p \vee \neg p)] \vee r$	luật kết hợp
$\Leftrightarrow [q \vee 1] \vee r$	luật về phần tử bù
$\Leftrightarrow 1 \vee r$	luật thống trị
$\Leftrightarrow 1$	luật thống trị.

Như vậy, biểu thức đã cho là hằng đúng (đpcm).

Lưu ý:

Khi chứng minh hằng đúng hoặc hằng sai, ta có thể gặp các trường hợp sau:

$1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$ luật lũy đẳng/ luật trung hòa

$1 \vee 1 \Leftrightarrow 1$ luật lũy đẳng/ luật thống trị

$[(p \leftrightarrow q) \to r] \to [(p \leftrightarrow q) \to r]$ đặt $A = [(p \leftrightarrow q) \to r]$

Biểu thức đã cho tương đương $A \to A \Leftrightarrow \neg A \vee A$ luật kéo theo

$\Leftrightarrow 1$ luật về phần tử bù

Hoặc là trường hợp biểu thức

$A \leftrightarrow A \Leftrightarrow (A \to A) \wedge (A \to A)$ luật tương đương

$\Leftrightarrow A \to A$ luật lũy đẳng

$\Leftrightarrow \neg A \vee A$ luật kéo theo

$\Leftrightarrow 1$ luật về phần tử bù

Bài tập tương tự:

1/ Làm bài 12 trang 2 (file bài tập CTRR-UIT).

2/ Dùng các luật logic để chứng minh rằng biểu thức sau là hằng đúng

a/ $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

b/ $[(p \to q) \wedge (p \wedge \neg r)] \to (\neg q \to s)$

c/ $[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [\neg r \to \neg(p \vee q)]$

d/ $[(p \to \neg q) \wedge (\neg q \to r) \wedge p] \to (\neg r \to s)$

e/ $[(p \to r) \wedge (\neg q \to p) \wedge (q \to s)] \to (\neg r \to s)$

f/ $[(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u] \to (p \to m)$

g/ $[[(\neg p \vee q) \to (r \wedge s)] \wedge [h \to (r \wedge k)] \wedge h \wedge (k \to s) \wedge (r \to t) \wedge \neg t] \to (\neg p \to u)$

h/ $[(p \to r) \wedge (\neg q \to p) \wedge \neg r] \to (\neg q \to k)$

i/ $[(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [p \to (q \to r)]$

j/ $[p \wedge (p \to q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \to \neg q)] \to (s \vee t)$

k/ $[(p \to q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \vee r)] \to (\neg q \to s)$

l/ $[[(\neg p \vee q) \to r] \wedge [r \to (s \vee t)] \wedge (\neg s \wedge \neg u) \wedge (\neg u \to \neg t)] \to (\neg p \to m)$

Giải bài 2a/

Biểu thức	Quy luật logic
$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	tiền đề
$\Leftrightarrow [(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \to (\neg p \vee r)$	luật kéo theo
$\Leftrightarrow [[(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \vee [(\neg p \vee q) \wedge r]] \to (\neg p \vee r)$	luật phân bố
$\Leftrightarrow [[\neg q \wedge (\neg p \vee q)] \vee [(\neg p \vee q) \wedge r]] \to (\neg p \vee r)$	luật giao hoán
$\Leftrightarrow [[(\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)] \vee [(\neg p \vee q) \wedge r]] \to (\neg p \vee r)$	luật phân bố
$\Leftrightarrow [[(\neg q \wedge \neg p) \vee 0] \vee [(\neg p \vee q) \wedge r]] \to (\neg p \vee r)$	luật về phần tử bù
$\Leftrightarrow [(\neg q \wedge \neg p) \vee [(\neg p \vee q) \wedge r]] \to (\neg p \vee r)$	luật trung hòa
$\Leftrightarrow \neg[(\neg q \wedge \neg p) \vee [(\neg p \vee q) \wedge r]] \vee (\neg p \vee r)$	luật kéo theo
$\Leftrightarrow [(q \vee p) \wedge [(p \wedge \neg q) \vee \neg r]] \vee (\neg p \vee r)$	luật DeMorgan, luật pđ của pđ
$\Leftrightarrow [[(q \vee p) \wedge [(p \wedge \neg q) \vee \neg r]] \vee r] \vee \neg p$	luật giao hoán, kết hợp
$\Leftrightarrow [[(q \vee p) \vee r] \wedge [[(p \wedge \neg q) \vee \neg r] \vee r]] \vee \neg p$	luật phân bố
$\Leftrightarrow [[(q \vee p) \vee r] \wedge [(p \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee r)]] \vee \neg p$	luật kết hợp
$\Leftrightarrow [[(q \vee p) \vee r] \wedge [(p \wedge \neg q) \vee 1]] \vee \neg p$	luật về phần tử bù
$\Leftrightarrow [[(q \vee p) \vee r] \wedge 1] \vee \neg p$	luật thống trị
$\Leftrightarrow [(q \vee p) \vee r] \vee \neg p$	luật trung hòa
$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee (q \vee r)$	luật giao hoán, luật kết hợp

$\Leftrightarrow 1 \vee (q \vee r)$ luật về phần tử bù

$\Leftrightarrow 1$ luật thống trị.

Vậy biểu thức đã cho là hằng đúng.

* **<u>QUY TẮC SUY DIỄN</u>**

Trong quá trình chứng minh một biểu thức, hay chứng tỏ một mệnh đề là hằng đúng hoặc hằng sai, ta có thể dùng nhiều cách lập luận khác nhau. Ở đây ta xét những lập luận có dạng:

Nếu có p_1, có p_2, có p_3, và có … p_n

Thì có q

Ta gọi đây là dạng lập luận đúng (hay là dạng chứng minh hợp lệ), nếu ta chứng tỏ được rằng biểu thức sau là hằng đúng

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

Khi đó, ta gọi đây là một quy tắc suy diễn. Như vậy, quy tắc suy diễn là một hằng đúng, dưới dạng phép kéo theo.

<u>Các cách biểu diễn của quy tắc suy diễn</u>:

<u>Cách 1</u>: Dùng biểu thức hằng đúng

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 1$$

<u>Cách 2</u>: Dùng dòng suy diễn

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow h \Rightarrow \ldots \Rightarrow k \Rightarrow \ldots \Rightarrow m \Rightarrow n \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$$

<u>Cách 3</u>: Dùng mô hình suy diễn (phổ biến nhất)

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

đọc là "có q" hay là "tồn tại q"

a/ ***<u>Phương pháp khẳng định (luật Modus Ponens)</u>***

được thể hiện bởi hằng đúng

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

Hay dưới dạng mô hình

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

b/ ***<u>Phương pháp tam đoạn luận (Syllogism) (pp bắc cầu)</u>***

được thể hiện bởi hằng đúng

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

Hay dưới dạng mô hình

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore (p \to r) \end{array}$$

c/ ***Phương pháp phủ định (luật Modus Tollens)***

được thể hiện bởi hằng đúng

$$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$$

Hay dưới dạng mô hình

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

d/ ***Phương pháp tam đoạn luận rời***:

được thể hiện bởi hằng đúng

$[(p \vee q) \wedge \neg q] \to p$ (TH1) hay

$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$ (TH2)

Hay dưới dạng mô hình

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array} \qquad \text{hay} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

(TH1) (TH2)

e/ ***Quy tắc mâu thuẫn (phương pháp chứng minh bằng phản chứng)*** *

được thể hiện bởi hằng đúng

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge \neg q] \to 0$$

Hay dưới dạng mô hình

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \neg q \\ \hline \therefore 0 \end{array}$$

f/ ***Phép chứng minh theo trường hợp***:

được thể hiện bởi hằng đúng

$$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r]$$

Hay dưới dạng mô hình

$$\begin{array}{l} p \to r \\ q \to r \\ \hline \therefore (p \vee q) \to r \end{array}$$

g/ ***<u>Phép đơn giản nối liền</u>***:

được thể hiện bởi 1 trong các hằng đúng sau:

$(p \wedge q) \to p$ (TH1) hay

$(p \wedge q) \to q$ (TH2) hay

$p \to (p \vee q)$ (TH3) hay

$q \to (p \vee q)$ (TH4)

Hay dưới dạng mô hình

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array} \text{ hay } \begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore q \end{array} \text{ hay } \begin{array}{l} p \\ \hline \therefore (p \vee q) \end{array} \text{ hay } \begin{array}{l} q \\ \hline \therefore (p \vee q) \end{array}$$

(TH1) (TH2) (TH3) (TH4)

<u>Ví dụ mẫu 2</u>: Dùng các luật logic, các quy tắc suy diễn để kiểm tra tính đúng đắn của mô hình suy diễn sau:

$$\begin{array}{l} (p \vee \neg q) \to (r \vee \neg s) \\ h \wedge \neg m \\ h \to \neg r \\ m \vee s \\ \hline \therefore (p \to t) \end{array}$$

<u>Giải</u>:

Biểu thức	Quy tắc suy diễn
Ta có $h \wedge \neg m$ (1)	tiền đề
Nên $\therefore h$	phép đơn giản nối liền
Mà $h \to \neg r$	tiền đề
Nên $\therefore \neg r$ (2)	pp khẳng định
Từ (1) $\therefore \neg m$	phép đơn giản nối liền
Ngoài ra $m \vee s$	tiền đề
Nên $\therefore s$	phép tam đoạn luận rời
Hay $\neg(\neg s)$ (3)	phủ định của phủ định
Từ (2),(3): $\neg r \wedge \neg(\neg s)$	
Hay $\neg(r \vee \neg s)$	luật DeMorgan
Ngoài ra $(p \vee \neg q) \to (r \vee \neg s)$	tiền đề
Nên $\therefore \neg(p \vee \neg q)$	phương pháp phủ định

Hay $\therefore \neg p \wedge q$	luật DeMorgan, luật pđ của pđịnh
Hay $\therefore \neg p$	phép đơn giản nối liền
Hay $\therefore \neg p \vee t$	phép đơn giản nối liền
Hay $\therefore (p \to t)$	luật kéo theo

Vậy mô hình suy diễn là đúng.

<u>Bài tập tương tự</u>:

1/ Làm bài 19 trang 4-5 (file Bài tập CTRR-UIT).

2/ Dùng các luật logic, luật suy diễn để kiểm tra tính đúng đắn của suy luận sau:

a/
$$\begin{array}{l} (p \to q) \to r \\ s \wedge \neg t \\ s \to (h \vee \neg k) \\ \neg t \to \neg h \\ k \vee \neg r \\ \hline \therefore (\neg p \to u) \end{array}$$

b/
$$\begin{array}{l} (p \vee q) \to \neg r \\ s \wedge h \\ \neg s \vee k \\ k \to r \\ \hline \therefore (q \to \neg u) \end{array}$$

c/
$$\begin{array}{l} p \to r \\ \neg p \to q \\ q \to s \\ \hline \therefore (\neg r \to s) \end{array}$$

d/
$$\begin{array}{l} (\neg p \vee q) \to (r \wedge s) \\ h \wedge \neg t \\ \neg h \vee r \\ \neg t \to s \\ (r \wedge s) \to u \\ \neg u \wedge k \\ \hline \therefore (\neg p \to n) \end{array}$$

e/
$$\begin{array}{l} (p \wedge \neg q) \to r \\ h \wedge \neg s \\ h \to p \\ s \vee \neg q \\ \hline \therefore (\neg r \to t) \end{array}$$

* **<u>VỊ TỪ VÀ LƯỢNG TỪ</u>**:

Vị từ là phát biểu dưới dạng khẳng định chứa biến số. Bản thân phát biểu này không phải là mệnh đề. Tuy nhiên, khi thay biến số bằng những giá trị cụ thể thì ta thu được mệnh đề đúng hoặc sai.

Để khảo sát vị từ ở dạng tổng quát, ta xét $p(x)$ là vị từ theo một biến $x \in X$.

Ta có các trường hợp sau:

<u>TH1</u>: Khi thay $x = a \in X$, với a tùy ý, ta có $p(a)$ là mệnh đề đúng, thì khi đó ta viết

$\boxed{\forall x \in X, p(x)}$ → là mệnh đề

đọc là "với mọi"

<u>Ví dụ</u>: Ta xét $p(x) = 2x^4 + 3 > 0$ là vị từ theo một biến $x \in \mathbb{R}$

Ta có $p(-2) = 1$

$p(0) = 1$

$p(3) = 1$

Nên ta viết $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 2x^4 + 3 > 0}$ → mệnh đề

<u>TH2</u>: Khi thay $x = a \in X$, ta có $p(a)$ là mệnh đề đúng, nhưng khi thay $x = b \in X$ ta có $p(b)$ là mệnh đề sai; khi đó ta viết

$\boxed{\exists x \in X, p(x)}$ → là mệnh đề

đọc là "tồn tại"

<u>Ví dụ</u>: Ta xét $p(x) = "x \geq 5"$ là vị từ theo một biến $x \in \mathbb{R}$

Ta có: $p(-3) = 0$

$p(1) = 0$

$p(8) = 1$

$p(20) = 1$

Nên ta viết $\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 5}$ → mệnh đề

<u>TH3</u>: Khi thay $x = a \in X$, với a tùy ý, ta có $p(a)$ là mệnh đề sai, thì khi đó ta viết

$\boxed{\forall x \in X, \neg p(x)}$ → là mệnh đề

<u>Ví dụ</u>: Ta xét $p(x) = -x^2 - 1 \geq 0$ là vị từ theo một biến $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $p(-3) = 0$

$p(0) = 0$

$p(5) = 0$

Nên ta viết $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 - 1 < 0}$ → mệnh đề.

Ta gọi các mệnh đề $\boxed{\forall x \in X, p(x)}$, $\boxed{\exists x \in X, p(x)}$, $\boxed{\forall x \in X, \neg p(x)}$ là dạng lượng từ hóa của vị từ $p(x)$ thông qua các lượng từ phổ dụng $(\forall)$ hay lượng từ tồn tại $(\exists)$.

<u>Lưu ý</u>:

1/ Ta có $\begin{cases} \neg(\forall) \Leftrightarrow \exists \\ \neg(\exists) \Leftrightarrow \forall \end{cases}$

2/ Ta có dạng lượng từ hóa của vị từ theo 2 biến $x \in X, y \in Y$ là:

$$\begin{cases} \forall x \in X, \forall y \in Y, p(x,y) \\ \forall x \in X, \exists y \in Y, p(x,y) \\ \exists x \in X, \forall y \in Y, p(x,y) \\ \exists x \in X, \exists y \in Y, p(x,y) \end{cases}$$

<u>Ví dụ mẫu 1</u>: Viết dạng phủ định cho biểu thức

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x$ thỏa

$(|x - x_0| < \delta) \rightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)$

Ví dụ mẫu 2: Cho biết chân trị của mệnh đề sau và viết dạng phủ định cho mệnh đề

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy \neq 4$

Giải:

Ví dụ mẫu 1: Ta có dạng phủ định của biểu thức là:

$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0,$ sao cho $\exists x$ thỏa $(|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - L| \geq \varepsilon)$

(ta dùng tính chất $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$)

(nếu xét phủ định của luật tương đương, ta xét: $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

$\Leftrightarrow \neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)] \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)]$)

Ví dụ mẫu 2:

Ta chứng tỏ đây là mệnh đề đúng, như sau:

Cách 1: $x = 0$, ta chọn $y = 2$ thì $xy = 0.2 = 0 \neq 4$ (đây là mệnh đề đúng)

$x \neq 0$, ta chọn $y = \frac{8}{x}$ thì $xy = x.\frac{8}{x} = 8 \neq 4$ (đây là mệnh đề đúng)

Vậy biểu thức đã cho là đúng.

Cách 2: $\forall x \in \mathbb{R}$, ta chọn $y = 0$ thì $xy = x.0 = 0 \neq 4$ nên mệnh đề luôn đúng.

Vậy biểu thức đã cho là đúng.

Ta có dạng phủ định của biểu thức là: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy = 4$