

Chương 3: KHÔNG GIAN VÉCTO

1/ KHÔNG GIAN VÉCTO \mathbb{R}^n VÀ KHÔNG GIAN VÉCTO TỔNG QUÁT

Ta định nghĩa $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ lần}} = \{\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Ví dụ:

$$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\alpha = (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\alpha = (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

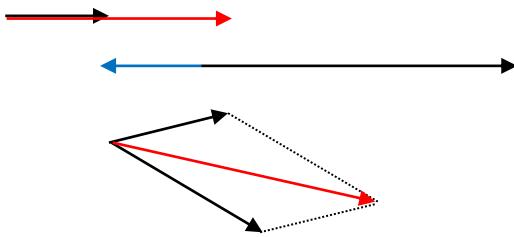
Trên \mathbb{R}^n ta định nghĩa 2 phép toán:

a/ Phép cộng vécto:

$\forall \alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, và $\forall \beta = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Ta cần nhớ quy tắc:



b/ Phép nhân một con số thực với vécto

Với $\forall \alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ và số thực $c \in \mathbb{R}$, ta có:

$$c.\alpha = (cx_1; cx_2; \dots; cx_n) \in \mathbb{R}^n$$

Lưu ý: vécto $c.\alpha$ là vécto có cùng phương (cùng giá đỡ – support) với vécto α .

và $c.\alpha$ có cùng chiều với α nếu $c > 0$ và $c.\alpha$ ngược chiều với α nếu $c < 0$

Khi $c = 0$ thì vécto $c.\alpha$ là vécto zero

Đồng thời, vécto $c\alpha$ có độ dài gấp $|c|$ lần độ dài của vécto α .

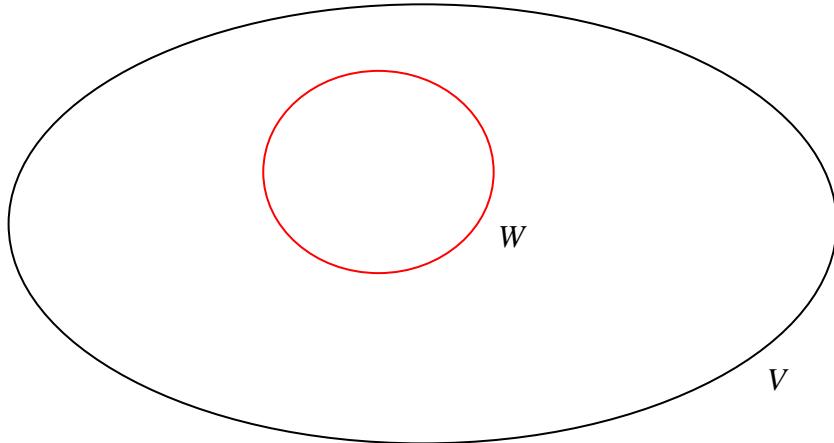
Ta gọi cấu trúc đại số: $(\mathbb{R}^n, +, \bullet)$ là không gian vécto n chiều trên trường số thực \mathbb{R} .

Tổng quát, ta ký hiệu $(V, +, \bullet)$ là không gian vécto tổng quát trên trường số F , với phép cộng và phép nhân được định nghĩa tương tự như trên \mathbb{R}^n .

Ví dụ: Trên \mathbb{R}^6 cho $\begin{cases} \alpha = (-2, 3, 5, -8, -4, 9) \\ \beta = (7, -1, 2, 4, -6, 3) \end{cases}$. Tìm $\begin{cases} 235\alpha - 1479\beta = ? \\ 3572\beta - 5383\alpha = ? \end{cases}$

2/ KHÔNG GIAN VÉCTO CON (SUB-VECTOR SPACE)

Cho không gian véctơ $(V, +, \bullet)$ là không gian véctơ tổng quát trên trường số F ,
Và cho tập hợp $W \neq \emptyset$ trên V .



Lúc này do $W \subset V$ nên các véctơ trên W được thừa hưởng phép cộng (+) và nhân (\bullet) có sẵn trên V .

Ta nói $(W, +, \bullet)$ là không gian véctơ con của $(V, +, \bullet)$

và ký hiệu là $(W, +, \bullet) \leq (V, +, \bullet)$, và viết gọn là $W \leq V$, nếu ta chứng minh được 2 tính chất sau:

$$1/ \forall \alpha \in W, \forall \beta \in W \text{ ta có } (\alpha + \beta) \in W$$

$$2/ \forall \alpha \in W; \forall c \in F; \text{ ta chứng tỏ } (c.\alpha) \in W$$

Ngược lại, nếu 1 trong 2 tính chất này (hay cả 2 tính chất) bị vi phạm thì W không phải là không gian véctơ con của V , và ta kí hiệu là $W \not\leq V$

Ví dụ mẫu 1: Trên $V = \mathbb{R}^3$ cho tập hợp $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$.

Hỏi $W \leq V$ không? Vì sao?

Ví dụ mẫu 2: Trên $V = \mathbb{R}^3$ cho tập hợp $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 5y + 8z = 1\}$.

Hỏi $W \leq V$ không? Vì sao?

Ví dụ mẫu 3: Trên $V = M_2(\mathbb{R})$ = không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ 2b & 4a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Hỏi $W \leq V$ không? Vì sao?

Ví dụ mẫu 4: Trên $V = M_2(\mathbb{R})$ = không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a^2 & b \\ ab & -2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Hỏi $W \leq V$ không? Vì sao?

Giải:

Ví dụ mẫu 1: $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$

Ta chứng tỏ $W \leq V$ như sau:

Ta có $\gamma = (1, -1, -1) \in W$ do $2 \cdot 1 - (-1) + 3 \cdot (-1) = 0$

$$\Rightarrow W \neq \emptyset \quad (*)$$

Mặt khác:

$$\forall \alpha = (x_1, y_1, z_1) \in W \text{ ta có } 2x_1 - y_1 + 3z_1 = 0 \quad (1)$$

$$\forall \beta = (x_2, y_2, z_2) \in W \text{ ta có } 2x_2 - y_2 + 3z_2 = 0 \quad (2)$$

Cộng (1), (2) theo vế ta được:

$$(2x_1 - y_1 + 3z_1) + (2x_2 - y_2 + 3z_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\underbrace{x_1 + x_2}) - (\overbrace{y_1 + y_2}) + 3(\underbrace{z_1 + z_2}) = 0$$

Mà $\alpha + \beta = (\underbrace{x_1 + x_2}; \overbrace{y_1 + y_2}; \underbrace{z_1 + z_2}) \Rightarrow (\alpha + \beta) \in W \quad (**)$

Ngoài ra, $\forall c \in \mathbb{R}$ ta nhân 2 vế pt (1) cho c thì được:

$$c(2x_1 - y_1 + 3z_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow c(2x_1) - (cy_1) + c(3z_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(cx_1) - (\overbrace{cy_1}) + 3(\underbrace{cz_1}) = 0$$

Ta nhân c với $\forall \alpha = (x_1, y_1, z_1) \in W$ thì có $c\alpha = c(x_1, y_1, z_1) = (\underbrace{cx_1}, \overbrace{cy_1}, \underbrace{cz_1}) \Rightarrow (c\alpha) \in W \quad (***)$

Từ (*), (**), (***), $\Rightarrow W \leq V$.

Ví dụ mẫu 2: $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 5y + 8z = 1\}$

Ta chứng tỏ $W \nleq V$ như sau:

Cách 1:

Ta chọn $\alpha = (4, 3, 0) \in W$ do $4^2 - 5 \cdot 3 + 8 \cdot 0 = 1$

Và chọn $\beta = (-4, 3, 0) \in W$ do $(-4)^2 - 5 \cdot 3 + 8 \cdot 0 = 1$

Mà $\alpha + \beta = (0, 6, 0)$ có $0^2 - 5 \cdot 6 + 8 \cdot 0 = -30 \neq 1$ nên $(\alpha + \beta) \notin W$

Cho nên do $W \nleq V$

Cách 2:

Ta chọn $\alpha = (3, 0, -1) \in W$ do $3^2 - 5 \cdot 0 + 8 \cdot (-1) = 1$

Và chọn $c = 2 \Rightarrow c\alpha = (6, 0, -2)$ có $6^2 - 5 \cdot 0 + 8 \cdot (-2) = 36 - 16 = 20 \neq 1$

nên $(c\alpha) \notin W$. Cho nên do $W \nleq V$

Ví dụ mẫu 3: Trên $V = M_2(\mathbb{R})$ = không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ 2b & 4a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Ta chứng tỏ $W \leq V$ như sau:

$$\text{Ta chọn } C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2.3 & 4.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \in W, \text{ ứng với } a=1, b=3$$

$$\Rightarrow W \neq \emptyset (*)$$

Mặt khác:

$$\forall \alpha = A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ 2b_1 & 4a_1 \end{pmatrix} \in W \text{ ứng với } a=a_1, b=b_1$$

$$\forall \beta = A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ 2b_2 & 4a_2 \end{pmatrix} \in W \text{ ứng với } a=a_2, b=b_2$$

$$\text{Suy ra } \alpha + \beta = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ 2b_1 + 2b_2 & 4a_1 + 4a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ 2(b_1 + b_2) & 4(a_1 + a_2) \end{pmatrix} \text{ ứng với}$$

$$a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$$

Cho nên $(\alpha + \beta) \in W$ (**)

$$\text{Ngoài ra } \forall c \in \mathbb{R} \text{ ta có } c\alpha = cA_1 = c \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ 2b_1 & 4a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 & -cb_1 \\ c(2b_1) & c(4a_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 & -(cb_1) \\ 2(cb_1) & 4(ca_1) \end{pmatrix}$$

ứng với

$$a = ca_1, b = cb_1$$

Cho nên $(c\alpha) \in W$ (***)

Từ (*), (**), (****) $\Rightarrow W \leq V$.

Ví dụ mẫu 4: Trên $V = M_2(\mathbb{R})$ = không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a^2 & b \\ ab & -2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Ta chọn } a=2, b=1 \text{ suy ra } \alpha = A_1 = \begin{pmatrix} 2^2 & 1 \\ 2.1 & -2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in W$$

$$\text{Và chọn } a=-2, b=1 \text{ suy ra } \beta = A_2 = \begin{pmatrix} (-2)^2 & 1 \\ -2.1 & -2(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in W$$

Mà $\alpha + \beta = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$ do không còn thỏa điều kiện của W .

$$\begin{cases} a^2 = 8 \\ -2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2\sqrt{2} \\ a = 0 \end{cases} \text{ (vô lí)}.$$

Cho nên $W \nsubseteq V$

Bài tập:

Kiểm chứng W có phải là không gian con của V hay không? Vì sao?

- a/ $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) | 3x + 5z = 0\}$
- b/ $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) | y = 0\}$
- c/ $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) | 4x = 2y - z\}$
- d/ $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) | 6x - 2yz = 0\}$
- e/ $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) | xyz = 0\}$
- f/ $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) | 7x - z = 2\}$
- g/ $V = \mathbb{R}^3, W = \{(x, y, z) | 2x - 5z^2 = 0\}$
- h/ $V = \mathbb{R}^3, W = \left\{ (x, y, z) \middle| \begin{array}{l} x + 5z = 0 \\ 4y - z = 0 \end{array} \right\}$
- i/ $V = \mathbb{R}^4, W = \{(x, y, z, t) | 2x - 4y + z - 6t = 0\}$
- j/ $V = \mathbb{R}^4, W = \left\{ (x, y, z, t) \middle| \begin{array}{l} x + y - 2z + 3t = 0 \\ x = 4z - t \end{array} \right\}$

k/ $V = M_2(\mathbb{R})$ = không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} 3a & 5b \\ -b & a+b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

l/ $V = M_2(\mathbb{R})$ = không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} ab & 2b \\ b^3 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

3/ SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH (LINEARLY INDEPENDENCE) VÀ SỰ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH (LINEARLY DEPENDENCE)

Cho $(V, +, \bullet)$ là không gian tuyến tính (không gian vectơ) tổng quát trên trường số F .

và cho tập hợp $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ trên V .

Ta nói S là tập hợp độc lập tuyến tính (ĐLTT), nghĩa là các vec tơ trong S không có mối liên hệ gì với nhau, không phụ thuộc nhau, và một vec tơ trong S không thể biểu diễn theo các vec tơ còn lại trong S , nếu hệ pt sau:

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

(với c_1, c_2, \dots, c_m là các ẩn số cần tìm)

chỉ có bộ nghiệm tầm thường duy nhất là $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_m = 0$.

Ngược lại, nếu hệ pt này có vô số nghiệm (bên cạnh bộ nghiệm tầm thường $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_m = 0$) thì ta nói tập hợp S là phụ thuộc tuyến tính (PTTT), nghĩa là các vec tơ trong S có thể biểu diễn lẫn nhau, ví dụ $\alpha_3 = 5\alpha_2 - 4\alpha_1 - 6\alpha_4$ hay $\alpha_2 = 2\alpha_1 - \alpha_4 + 5\alpha_5$.

Ví dụ mẫu 5:

Trên $V = \mathbb{R}^3$, cho tập hợp $S = \{\alpha_1 = (1, -2, 1), \alpha_2 = (-1, 3, 2), \alpha_3 = (2, 0, 1), \alpha_4 = (-2, 1, 2)\}$.

Hỏi S là ĐLTT hay PTTT, vì sao?

Giải:

Để kiểm tra xem S là ĐLTT hay PTTT, ta giải hệ pt

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = \mathbf{0}$$

(ở đây ẩn số là c_1, c_2, c_3, c_4)

$$\Leftrightarrow c_1(1, -2, 1) + c_2(-1, 3, 2) + c_3(2, 0, 1) + c_4(-2, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 + 2c_3 - 2c_4 = 0 \\ -2c_1 + 3c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 + 2c_4 = 0 \end{cases}$$

Viết lại hệ pt dưới dạng ma trận hóa ta có:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(2) \rightarrow (2)+2(1) \\ (3) \rightarrow (3)-(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(3) \rightarrow (3)-3(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 13 & 0 \end{array} \right)$$

Do cột 4 không bán chuẩn hóa được nên hệ pt có vô số nghiệm như sau:

Đặt $c_4 = t, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} c_1 - c_2 + 2c_3 - 2c_4 = 0 \\ c_2 + 4c_3 - 3c_4 = 0 \\ -13c_3 + 13c_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 - 2c_3 + 2c_4 = -t \\ c_2 = 3c_4 - 4c_3 = -t \\ c_3 = c_4 = t \end{cases}$$

Cho nên ta nói S là tập hợp PTTT.

Ví dụ mẫu 6: Trên $V = \mathbb{R}^4$, cho tập hợp $S = \{a_1 = (1, 0, 1, 0), a_2 = (-1, 1, 0, 1), a_3 = (0, 2, 1, -3)\}$.

Hỏi S là tập hợp ĐLTT hay PTTT, vì sao?

Giải:

Để kiểm tra S là tập hợp ĐLTT hay PTTT, ta giải hệ pt

$$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = \mathbf{0}$$

(ở đây ẩn số là c_1, c_2, c_3)

$$\Leftrightarrow c_1(1, 0, 1, 0) + c_2(-1, 1, 0, 1) + c_3(0, 2, 1, -3) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 - 3c_3 = 0 \end{cases}$$

Ta viết lại hệ pt dưới dạng ma trận hóa như sau:

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(3) \rightarrow (3)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(3) \rightarrow (3)-(2) \\ (4) \rightarrow (4)-(2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(4) \rightarrow (4)-5(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Do hệ sau cùng có 3 cột bán chuẩn liên tiếp nhau, nên ta kết luận hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \\ -c_3 = 0 \end{cases} \text{ là nghiệm tầm thường.}$$

Nên ta nói S là tập hợp ĐLTT.

* CÁCH NHẬN DIỆN NHANH TẬP HỢP S LÀ ĐLTT HAY PTTT:

Cho $(V, +, \bullet)$ là không gian tuyến tính tổng quát trên trường số F .

và cho tập hợp $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ trên V .

Để kiểm tra xem S là ĐLTT hay PTTT, ta làm như sau:

$$+ \text{ Lập ma trận } A_S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{dòng 1} \\ \Rightarrow \text{dòng 2} \\ \vdots \\ \Rightarrow \text{dòng } m \end{array}$$

+ Trường hợp 1:

A_S tạo thành một ma trận vuông cấp m

Nếu $\det(A_S) \neq 0$ thì ta nói S là tập hợp ĐLTT.

Nếu $\det(A_S) = 0$ thì ta nói S là tập hợp PTTT.

+ Trường hợp 2:

A_S tạo thành một ma trận tùy ý (có thể là ma trận vuông hay không vuông đều được).

Từ A_S bán chuẩn hóa (chuẩn hóa) tối đa các cột H

Ta xác định $r(A_S) = \text{rank}(A_S) =$ số dòng khác zero của H .

Nếu $r(A_S) = m =$ số lượng véc tơ trong $S \Rightarrow S$ là tập hợp ĐLTT.

Nếu $r(A_S) < m =$ số lượng véc tơ trong $S \Rightarrow S$ là tập hợp PTTT.

Ví dụ mẫu 7: Trên không gian tuyến tính $V = \mathbb{R}^3$, cho các véc tơ

$$a_1 = (-2, 1, 1), a_2 = (1, -2, 1), a_3 = (1, 1, 2)$$

Chứng minh rằng hệ $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ ĐLTT.

Giải:

$$\text{Lập ma trận } A_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cách 1: Ta có $\det(A_S) = (-2)(-2).2 + 1.1.1 + 1.1.1 - [1.(-2).1 + 1.1.2 + (-2).1.1] = 12 \neq 0$

Suy ra hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ ĐLTT.

$$\text{Cách 2: Ta có } A_S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2) \rightarrow (2)-(3)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3) \rightarrow (3)+(2)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = H$$

Do ma trận H có 3 dòng khác zero nên $r(A_S) = \text{rank}(A_S) = 3 = \text{số véc tơ trong } S$.

Suy ra hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ ĐLTT.

Ví dụ mẫu 8: Trên không gian tuyến tính $V = \mathbb{R}^3$, cho các véc tơ

$$a_1 = (1, -1, -1), a_2 = (1, 2, 3), a_3 = (2, 1, \lambda)$$

Tìm các giá trị của λ để hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ ĐLTT.

Giải:

$$\text{Ta lập ma trận } A_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{(2) \rightarrow (2)+(1), (3) \rightarrow (3)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A_S) = 1 \cdot c_{11}^{A'_S} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 3(\lambda+2) - 12 = 3\lambda + 6 - 12 = 3\lambda - 6$$

Để $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ ĐLTT thì ta có $\det(A_S) \neq 0 \Leftrightarrow 3\lambda - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$.

Đáp số: $\lambda \neq 2$ thì hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ ĐLTT.