Master Mathématiques Appliquées pour l'Ingénierie,
l'Industrie et l'Innovation (MApI^3)

RAPPORT DE PROJET : PARTIE THÉORIQUE

UE "Méthodes numériques pour les EDP"

Sujet n°2

Sébastien Roux
Anh Tuan Vũ
Sophie Willemot
Mehdi Zouitine

Année universitaire
2019/2020

Préambule

Notations. Dans toute la suite, nous posons $\Omega =]0, L[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2, L > 0$. Nous noterons :
- — Γ la frontière de Ω,
- — $\Gamma_d = \{0\}\times]0,1[$,
- — $\Gamma_0 =]0, L[\times\{0\}\cup]0, L[\times\{1\}$ et
- — $\Gamma_n = \{L\}\times]0,1[$.

Nous souhaitons étudier le problème aux limites suivant :

$$(\mathcal{P}_{f,g}) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_d, \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_n \end{cases}$$

et son approximation par une famille de problèmes $(\mathcal{P}_{\varepsilon,f,g})$ introduite plus loin. Dans toute la suite, on suppose que

$$f \in L^2(\Omega), \quad g \in H^1_0(0,1) \cap H^2(0,1)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, nous posons

$$\phi_{k,\ell}\left(x_1, x_2\right) = \frac{2}{\sqrt{2L}} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x_1}{2L}\right) \sin\left(\ell\pi x_2\right)$$

Nous rappelons que la famille $\left(\phi_{k,\ell}\left(x_1,x_2\right)\right)_{k\in\mathbb{N},\ell\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.

Dans la suite, pour chaque partie, nous rappellerons d'abord le sujet avec un encadré avant d'y répondre juste en dessous.

Partie 1

> On introduit le problème
>
> $$(\mathcal{Q}_{f,g}) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } v \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta v = f + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} \quad \text{dans} \quad \Omega \\ v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_d, \quad v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_n \end{cases}$$
>
> Montrer que $(\mathcal{Q}_{f,g})$ admet une solution unique (écrire un problème variationnel équivalent).

Commençons par écrire le problème variationnel associé à ce problème :
Prenons $u \in H^1(\Omega)$, alors en multipliant par u les deux côtés de $-\Delta v = f + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}$ on obtient

$$-\Delta v u = \left(f + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}\right) u$$

puis en intégrant il vient que

$$-\int_\Omega \Delta v u = \int_\Omega \left(f + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}\right) u.$$

Une intégration par partie sur le membre de gauche nous donne

$$-\int_\Omega \Delta v u = \int_\Omega \nabla v \nabla u - \int_{\Gamma_n} \frac{\partial v}{\partial n} u = \int_\Omega \nabla v \nabla u$$

car on a supposé dans l'introduction de $(\mathcal{Q}_{f,g})$ que $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ sur Γ_n, d'où notre problème $(\mathcal{Q}_{f,g})$ est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u = \int_\Omega \left(f + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}\right) u \text{ pour tout } u \in H^1(\Omega).$$

Montrons maintenant que ce problème variationnel admet une unique solution. On utilisera le théorème de Lax-Milgram en définissant pour cela :

— $a(u,v) = \int_\Omega \nabla v \nabla u$ une forme bilinéaire ;

— $l(u) = \int_\Omega \left(f + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}\right) u$ une forme linéaire ;

et en vérifiant ensuite les hypothèses suivantes :

1. continuité de a :
   Prenons u et $v \in H^1(\Omega)$, alors
   $$a(u,v) = \int_\Omega \nabla v \nabla u \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$
   ce qui implique que a **est continue** ;

2. coercivité de a :
   Prenons $v \in H^1(\Omega)$, alors $a(v,v) = \int_\Omega (\nabla v)^2 = \|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq c \|v\|_{H^1}^2$ grâce à l'inégalité de Poincaré, impliquant donc que a **est coercive** ;

3. continuité de l :
   Prenons $u \in H^1(\Omega)$, alors
   $$\begin{aligned} l(u) = \int_\Omega \left(f + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}\right) u &\leq \left\| f + \frac{d^2 g}{dy^2} \right\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2} + \left\| \frac{d^2 g}{dy^2} \right\|_{L^2} \right) \|u\|_{H^1} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^2} \right) \|u\|_{H^1} \end{aligned}$$
   ce qui implique que l **est continue**.

Ces hypothèses étant réunies, le théorème de Lax-Milgram nous garantit qu'il existe une unique solution
$$v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall u \in H^1(\Omega),\ a(u,v) = l(u),$$
donc à notre problème variationnel, d'où $(\mathcal{Q}_{f,g})$ admet une unique solution que nous noterons v.

> Montrer que cette solution v vérifie une estimation de la forme
> $$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(0,1)} \right)$$

Reprenons l'inégalité citée dans l'hypothèse 3, alors en prenant $u = v$ il vient que
$$l(v) \leq \left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^2} \right) \|v\|_{H^1}$$
or $l(v) = a(v,v) = \int_\Omega (\nabla v)^2 \geq c \|v\|_{H^1}^2$ car a est coercive. Finalement, on a que
$$\|v\|_{H^1} \leq C_1 \left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^2} \right).$$

> Montrer que u est solution de $(\mathcal{P}_{f,g})$ si et seulement si $v(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - g(x_2)$ est solution de $(\mathcal{Q}_{f,g})$. En déduire que $(\mathcal{P}_{f,g})$ admet une solution unique u et que cette solution vérifie l'estimation
> $$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(0,1)} \right)$$

S'agissant d'un "si et seulement si", nous allons démontrer les deux implications :

- $\underline{u \text{ est solution de } (\mathcal{P}_{f,g}) \implies v(x_1,x_2) = u(x_1,x_2) - g(x_2) \text{ est solution de } (\mathcal{Q}_{f,g})}$

  Supposons que u est solution de $(\mathcal{P}_{f,g})$, alors dans $(\mathcal{P}_{f,g})$ on peut remplacer $u(x_1,x_2)$ par $v(x_1,x_2)+g(x_2)$ et on obtient alors

$$-\Delta u = f \implies -\Delta\left(v(x_1,x_2)+g(x_2)\right) = f \implies -\Delta v - \frac{d^2g}{dx_2^2} = f \implies -\Delta v = f + \frac{d^2g}{dx_2^2}$$

  ce qui correspond à l'équation de $(\mathcal{Q}_{f,g})$. Du côté des conditions,

$$u = g \text{ sur } \Gamma_d \implies v+g = g \text{ sur } \Gamma_d \implies v = 0 \text{ sur } \Gamma_d$$

$$\begin{gathered} u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \implies v+g = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ or, } g \in H_0^1(0,1)\cap H^2(0,1) \\ \text{d'où } g(0) = g(1) = 0 \text{ donc } v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \end{gathered}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_n \implies \frac{\partial (v+g)}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_n \implies \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

  d'où on retrouve les conditions de $(\mathcal{Q}_{f,g})$. Ainsi l'implication est prouvée.

- $\underline{v(x_1,x_2) = u(x_1,x_2) - g(x_2) \text{ est solution de } (\mathcal{Q}_{f,g}) \implies u \text{ est solution de } (\mathcal{P}_{f,g})}$

  Démonstration identique, on retrouve l'équation de $(\mathcal{P}_{f,g})$ à partir de celle de $(\mathcal{Q}_{f,g})$ et on retrouve les conditions de $(\mathcal{P}_{f,g})$ à partir de celles de $(\mathcal{Q}_{f,g})$.

Comme on avait vu que $(\mathcal{Q}_{f,g})$ admettait une unique solution v, par l'équivalence démontrée on a donc que $(\mathcal{P}_{f,g})$ admet donc une unique solution $u(x_1,x_2) = v(x_1,x_2) + g(x_2)$. De plus,

$$\|u\|_{H^1} = \|v+g\|_{H^1} \leq \|v\|_{H^1} + \left(\|g\|_{L^2} + \|g'\|_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2\left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^2}\right).$$

Partie 2

On souhaite approcher le problème $(\mathcal{P}_{f,g})$ par la famille de problèmes

$$(\mathcal{P}_{\varepsilon,f,g}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \varepsilon\frac{\partial u}{\partial n} + u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_d, \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_n, \end{array} \right.$$

où ε est un paramètre positif. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, le problème $(\mathcal{P}_{\varepsilon,f,g})$ admet une solution unique u_ε (écrire un problème variationnel équivalent).

Comme dans la **Partie 1**, prenons $v \in H^1(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned} &-\Delta u = f \\ \implies &-\Delta u v = f v \\ \implies &-\int_\Omega \Delta u v = \int_\Omega f v \end{aligned}$$

et, en intégrant par partie le membre de gauche, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\Gamma_d} \frac{\partial u}{\partial n} v$$

mais comme on suppose sur Γ_d que $\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n} + u = g$ alors $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon}(g-u)$ d'où

$$\int_{\Gamma_d} \frac{\partial u}{\partial n} v = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_d} (g-u)v.$$

Finalement, notre forme variationnelle est

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_d} uv = \int_\Omega fv + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_d} gv.$$

Encore une fois, on va utiliser le théorème de Lax-Milgram pour prouver l'existence d'une unique solution. Considérons les formes suivantes :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_d} uv \text{ une forme bilinéaire,}$$

$$l(v) = \int_\Omega fv + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_d} gv \text{ une forme linéaire.}$$

Vérifions les hypothèses de Lax-Milgram :

1. continuité de a :
   Prenons u et $v \in H^1(\Omega)$, alors

   $$\begin{aligned} a(u,v) &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|u\|_{L^2(\Gamma_d)} \|v\|_{L^2(\Gamma_d)} \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|u\|_{H^1(\Gamma_d)} \|v\|_{H^1(\Gamma_d)} \\ &\leq C\left(\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}\right) \end{aligned}$$

   ce qui implique que a **est continue** ;

2. coercivité de a :
   Prenons $v \in H^1(\Omega)$, alors (comme souvent avec Lax-Milgram) c'est l'inégalité de Poincaré qui fait aboutir à

   $$a(v,v) \geq \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

   ce qui implique que a **est coercive** ;

3. continuité de l :
   Comme précédemment on trouve que l **est continue** ;

Ces hypothèses étant réunies, le théorème de Lax-Milgram nous garantit qu'il existe une unique solution $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ vérifiant

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ a(u_\varepsilon, v) = l(v)$$

ainsi, le problème $(\mathcal{P}_{\varepsilon,f,g})$ admet une unique solution faible u_ε.

En utilisant la formulation variationnelle de $(\mathcal{P}_{\varepsilon,f,g})$, montrer que

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_d} |u_\varepsilon|\Gamma_d|^2\,dx_2 \leq C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|g\|^2_{L^2(\Gamma_d)}\right).$$

En déduire que

$$\|u_\varepsilon|\Gamma_d\|_{L^2(\Gamma_d)} \leq C_3\left(\varepsilon^{1/2}\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(0,1)}\right)$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$, avec une constante C_3 indépendante de $\varepsilon \in]0,1]$.

On a montré que u_ε est l'unique fonction de $H^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ a(u_\varepsilon, v) = l(v).$$

Ainsi, en particulier, on peut prendre $v = u_\varepsilon$ et on obtient alors

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_d} \left|u_{\varepsilon|\Gamma_d}\right|^2 \text{ et}$$

$$l(u_\varepsilon) = \int_\Omega f u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_d} g u_\varepsilon.$$

Concernant le dernier terme, remarquons que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_d} g u_\varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\|g\|_{L^2}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_d)}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\|g\|_{L^2} + \frac{1}{2}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_d)}\right).$$

Cette dernière équation nous amène à

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\Gamma_d} |u_\varepsilon|^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|g\|_{L^2}^2$$

L'inégalité de Poincaré appliquée à $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ nous donne

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c_\varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$$

d'où notre inéquation initiale devient

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\Gamma_d} |u_\varepsilon|^2 \leq c_\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|g\|_{L^2}^2 \leq \frac{c_\varepsilon^2}{2}\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|g\|_{L^2}^2$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_d} |u_\varepsilon|^2 \leq c_\varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|g\|_{L^2}^2.$$

pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ (noter $\varepsilon \neq 0$) on peut alors dire que

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_d)} \leq C_3\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2}\right)$$

avec C_3 indépendant de ε.

Partie 3

On recherche la solution u_ε de $(\mathcal{P}_{\varepsilon,f,g})$ sous la forme $u_\varepsilon(x_1,x_2) = g(x_2) + v_\varepsilon(x_1,x_2)$. Quel est le problème aux limites vérifié par v_ε ? Montrer que cette solution v_ε vérifie

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(0,1)}\right),$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$, avec une constante C_4 indépendante de ε.

On a $u_\varepsilon(x_1,x_2) = g(x_2) + v_\varepsilon(x_1,x_2)$, avec u_ε solution de $(\mathcal{P}_{\varepsilon,f,g})$. Alors :

— dans Ω :

$$-\Delta u_\varepsilon = f \Longleftrightarrow -\Delta(g + v_\varepsilon) \Longleftrightarrow -\Delta v_\varepsilon = f + g''$$

— sur Γ_0 :

$$u_\varepsilon = 0 \Longleftrightarrow v_\varepsilon + g = 0 \Longleftrightarrow v_\varepsilon = -g$$

or g vaut 0 au bord (car $g \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$), alors nécessairement $v_\varepsilon = 0$.

— sur Γ_n :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} + g'' = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} = 0$$

.

— sur Γ_d :

$$\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} + u_\varepsilon = g \Longleftrightarrow \varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} + g'' + v_\varepsilon + g = g \Longleftrightarrow \varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} + v_\varepsilon = 0$$

Par conséquent v_ε vérifie le problème aux limites suivant :

$$\left(\mathcal{P}'_{\epsilon,f,g}\right) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } v_\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta v_\varepsilon = f + g'' \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} + v_\varepsilon = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_d, \quad v_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_n \end{cases}$$

Comme à notre habitude, nous allons déduire du problème $\left(\mathcal{P}'_{\epsilon,f,g}\right)$ une formulation variationnelle : Soit $\phi \in H^1(\Omega)$,

$$-\Delta v_\varepsilon \phi = (f + g'')\,\phi \Longrightarrow \int_\Omega -\Delta v_\varepsilon \phi \quad = \int_\Omega (f + g'')\,\phi$$

en intégrant par partie on a donc :

$$\int_\Omega \nabla v_\varepsilon \nabla \phi + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_d} v_\varepsilon \phi = \int_\Omega (f + g'')\,\phi$$

Si on pose $\phi = v_\varepsilon$ alors on a :

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_d} |v_\varepsilon|^2 \le \|v\|_{L^2(\Omega)} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g''\|_{L^2(0,1)} \right)$$

Et en se servant des réponses précédentes :

$$\begin{gathered} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C_4 \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g''\|_{L^2(0,1)} \right) \\ \text{or } g'' \in L^2(0,1),\ g' \in L^2(0,1),\ g \in L^2(0,1) \end{gathered}$$

On a donc :

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C_4 \left(\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(0,1)} \right) \right)$$

avec C_4 indépendante de ε.

Partie 4

On note v la solution de $(\mathcal{Q}_{f,g})$. Montrer que

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \le C_5 \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(0,1)} \right).$$

En déduire que

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma_d)} \le C_6 \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(0,1)} \right).$$

On rappelle qu'on a défini dans le **Préambule** la famille $\left(\phi_{k,\ell}(x_1, x_2)\right)_{k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^*}$ qui est une base hermitienne de $L^2(\Omega)$ en posant :

$$\phi_{k,\ell}(x_1, x_2) = \frac{2}{\sqrt{2L}} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x_1}{2L} \right) \sin(\ell \pi x_2).$$

On pose :

$$\begin{aligned} \Phi_{k\in\mathbb{N}}(x_1) &= \tfrac{2}{\sqrt{2L}} \sin\left(\tfrac{(2k+1)\pi x_1}{2L} \right), \\ \text{et } \Phi_{l\in\mathbb{N}^*}(x_2) &= \sin(\ell \pi x_2). \end{aligned}$$

La famille $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hermitienne de $L^2(0,L)$ et $(\Phi_l)_{l\in\mathbb{N}^*})$ est une base hermitienne de $L^2(0,1)$. On exprime f et g'' dans la base $(\phi_{k,l})_{k\in\mathbb{N},\ell\in\mathbb{N}^*}$.

On admet l'inégalité :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C_5\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(0,1)}\right)$$

Grâce à un théorème de trace, on a :

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial n}\right\|_{L^2(\Gamma_d)} \leq C\|v\|_{H^2(\Omega)}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité précédente :

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial n}\right\|_{L^2(\Gamma_d)} \leq C_6\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(0,1)}\right)$$

Partie 5

On pose

$$w_\varepsilon = v_\varepsilon - v$$

où v_ε est la fonction introduite en **Partie 3** et v est la solution de $\left(\mathcal{Q}_{f,g}\right)$. Montrer que w_ε est la solution du problème $\left(\mathcal{P}_{\varepsilon,\tilde{f},\tilde{g}}\right)$, avec $\tilde{f}=0$ et $\tilde{g}=-\varepsilon\frac{\partial v}{\partial n}$. Montrer que la famille $(w_\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Montrer que $w_\varepsilon|\Gamma_d$ tend vers 0 dans $L^2\left(\Gamma_d\right)$ quand ε tend vers 0. Vérifier que

$$\int_\Omega \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla\phi dx = 0$$

pour tout $\phi\in H^1(\Omega)$ tel que $\phi|_{\Gamma_d}=0$ et $\phi|_{\Gamma_0}=0$. En déduire que v_ε converge vers v (et que u_ε converge vers u) faiblement dans $H^1(\Omega)$ quand ε tend vers 0.

On a montré dans la **Partie 3** que v_ε est solution du problème $\left(\mathcal{P}'_{\varepsilon,\bar{f},\bar{g}}\right)$ et on a v solution de $(\mathcal{Q}_{f,g})$. Maintenant, on pose $w_\varepsilon = v_\varepsilon - v$. Ainsi,

— dans Ω :

$$-\Delta w_\varepsilon = -\Delta(v_\varepsilon - v) = -\Delta v_\varepsilon + \Delta v = f + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} - f - \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} = 0 = \tilde{f}$$

— sur Γ_d :

$$\varepsilon\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} + w_\varepsilon = \varepsilon\frac{\partial(v_\varepsilon - v)}{\partial n} + (v_\varepsilon - v) = \varepsilon\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} + v_\varepsilon - \varepsilon\frac{\partial v}{\partial n} - v = -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial n} = \tilde{g}$$

— sur Γ_0 :

$$w_\varepsilon = v_\varepsilon - v = 0$$

— sur Γ_n :

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} = \frac{\partial(v_\varepsilon - v)}{\partial n} = 0$$

Ainsi, w_ε est solution du problème $\left(\mathcal{P}_{\varepsilon,\tilde{f},\tilde{g}}\right)$, avec $\tilde{f}=0$ et $\tilde{g}=-\varepsilon\frac{\partial v}{\partial n}$.
D'après la **Partie 2**, on a donc

$$\int_\Omega |\nabla w_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_d}|w_\varepsilon|^2 \leq C\frac{1}{\varepsilon}\left\|\varepsilon\frac{\partial v}{\partial n}\right\|^2_{\mathcal{L}^2(\Gamma_d)} = C\varepsilon\left\|\varepsilon\frac{\partial v}{\partial n}\right\|_{L^2(\Gamma_d)}$$

On utilise l'inégalité de Poincaré, qui est possible car $w_\varepsilon = 0$ sur Γ_0. On obtient alors une borne sur $\|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$

$$\int_\Omega\left(|\nabla w_\varepsilon|^2 + |u_\varepsilon|^2\right) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_d}|w_\varepsilon|^2 \leq C\varepsilon\left\|\varepsilon\frac{\partial v}{\partial n}\right\|_{L^2(\Gamma_d)}$$

On en déduit que (w_ε) tend vers zéro dans $H^1(\Omega)$ quand ε tend vers zéro. En particulier w_ε tend vers zéro dans $H^{1/2}\left(\Gamma_d\right)$ quand ε tend vers zéro.