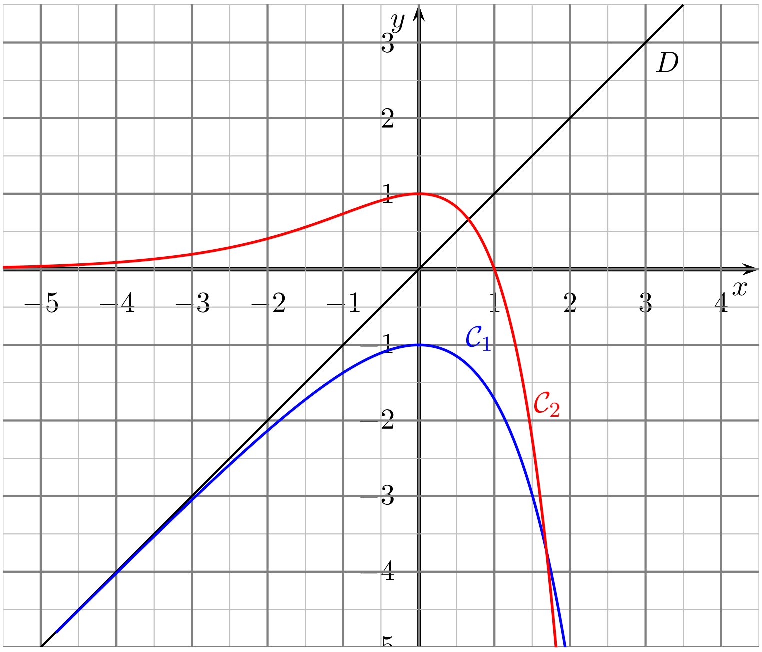
TD N^o 4 : ÉTUDES DE FONCTIONS
LA FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 1

Partie A

On a tracé ci-dessous, dans un même repère orthonormal d'origine O, les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$$



1. Attribuer à chaque fonction sa courbe représentative, en justifiant la réponse.
2. Calculer la limite de $f(x) - x$ quand x tend vers $-\infty$.
   En déduire alors que la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote oblique et en donner une équation.

Partie B : étude de la fonction g.

1. Calculer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g puis établir le tableau de variations de la fonction g.
3. Indiquer si la fonction g admet des extremums sur $\mathbb{R}$.

Partie C : Intersection des courbes représentatives de $f$et g

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Vérifier que pour tout réel x : $h'(x) = 1 - g(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.
2. En utilisant l'étude de la fonction g, déterminer pour tout x réel le signe de $h'(x)$. Donner alors le tableau de variations de la fonction h.

3. Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1\ ;\ 2[$.
   À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
4. Déduire de la question précédente que les deux courbes admettent un unique point d'intersection sur l'intervalle $]1\ ;\ 2[$.

Exercice 2

Partie I

On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = x - 1 + \mathrm{e}^{2x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. On prend comme unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 1$.
   a) Étudier les positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_g$.
2. Soit g' la fonction dérivée de g.
   a) Calculer, pour tout x réel, $g'(x)$ et montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   b) Dresser le tableau de variations de g.
3. Calculer $g(0)$ puis justifier l'affirmation suivante : « si $x < 0$, alors $g(x) < 0$; si $x > 0$, alors $g(x) > 0$ ».
4. Construire dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}_g$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 + \mathrm{e}^{2x}.$$

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrer que, pour tout x réel, $f'(x) = 2g(x)$.
2. En utilisant la partie I, dresser le tableau de variation de la fonction f ;
3. En déduire la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un minimum et déterminer ce minimum.

Partie III - *Application à un problème de distance minimale*

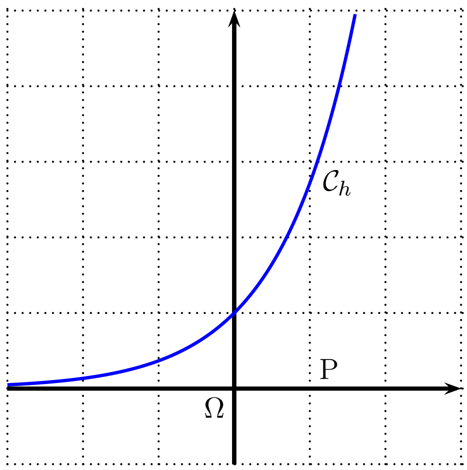
On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \mathrm{e}^{x}.$$

On donne la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h dans un repère orthonormal d'origine Ω. On a également représenté le point P de coordonnées $(1\,;\,0)$.

On rappelle que, dans un repère orthonormal, le carré de la distance entre les points $\mathrm{A}(x_\mathrm{A},\ y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B},\ y_\mathrm{B})$ est donné par : $\mathrm{AB}^2 = (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2$.

1. a) Placer, dans le repère les points $\mathrm{A}\left(-1\ ;\ \mathrm{e}^{-1}\right)$ et $\mathrm{B}(1\ ;\ \mathrm{e})$
   b) Calculer PA^2 et PB^2.
2. On considère, pour un réel x, le point M de $\mathcal{C}_h$ d'abscisse x, c'est-à-dire le point $M\,(x\ ;\ \mathrm{e}^x)$.
   a) Montrer que $\mathrm{P}M^2 = f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la partie II.
   b) En déduire les coordonnées du point de la courbe $\mathcal{C}_h$ le plus proche du point P.



Exercice 3

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

La courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en O et au point A de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 0\right)$.

On admet que les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses $\dfrac{1}{2}$ et 3 sont parallèles à l'axe des abscisses.

La droite Δ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point O et passe par le point B de coordonnées $(-1\ ;\ 3)$.

Partie I Exploitation graphique de la courbe $\mathcal{C}$

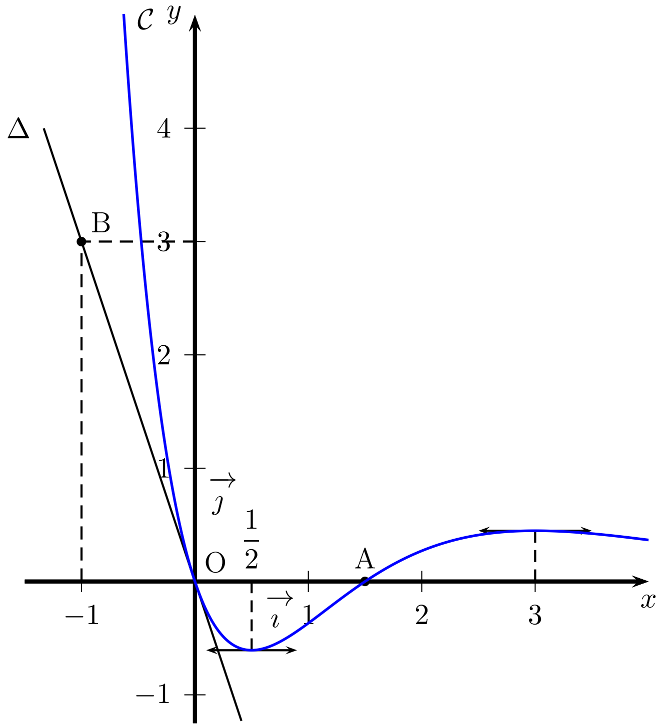
1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{7}{2}\right]$.
2. Donner le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{7}{2}\right]$.
3. Donner les valeurs $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f'(3)$.
4. Donner une équation de la tangente Δ. En déduire $f'(0)$.
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{7}{2}\right]$.

Partie II étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \left(2x^2 - 3x\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que pour tout nombre réel x, $f(x) = \dfrac{2x^2}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{3x}{\mathrm{e}^x}$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 7x - 3\right)\mathrm{e}^{-x}$.
3. étudier le signe de $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.



Exercice 4

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 4 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées).

1. a) Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 5\right) + 4$.
2. a) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$.
   Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 5\right)$.
   b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation $2\mathrm{e}^{x} - 5 = 0$.
   Résoudre ensuite dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2\mathrm{e}^{x} - 5 > 0$.
   c) En déduire les variations de la fonction f. Indiquer la valeur exacte de $f\left(\ln\frac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.
4. a) Montrer que le point O appartient à la courbe $\mathcal{C}$.
   b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe $\mathcal{C}$ au point O.
5. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ l'asymptote D la droite Δ et, sur l'intervalle $[-2,5\ ;\ 2]$, la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 5

On note f la fonction dfinie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres rels par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-2x}.$$

On dsigne par $\mathcal{C}$ sa courbe reprsentative dans un repre orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'units 4 cm en abscisses et 10 cm en ordonnes.

1. tude des variations de la fonction f
   a) Dterminer l'expression de la drive f' de la fonction fá
   b) Rsoudre l'inquation $\mathrm{e}^{-2x} \leqslant \frac{1}{4}$ et en dduire le tableau des variations de la fonction f.
   c) Dterminer l'quation de la tangente $\mathcal{T}$ la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
   d) Montrer que l'quation $f(x) = \frac{1}{2}$ possde une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. Justifier avec prcision et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.
2. Tracer, dans le repre $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$, puis tracer la courbe $\mathcal{C}$

Exercice 6

On considre la fonction dfinie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres rels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 4\mathrm{e}^{-x} + 6x + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe reprsentative de la fonction f dans un repre orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'units graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnes.

Partie A

1. Dmontrer que $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-x} + 4 + 6x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}\right)$.
2. On note h la fonction dfinie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres rels par $h(x) = f(x) - (6x + 1)$.
   Dterminer le signe de $h(x)$ pour tout nombre rel x et en dduire les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'quation $y = 6x + 1$.

Partie B : tude des variations de la fonction *f*

1. Dmontrer que la fonction drive f' de f est dfinie pour tout nombre rel x par :

$$f'(x) = -2\left(\mathrm{e}^{-x} + 3\right)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right).$$

2. Rsoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres rels, l'inquation $\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0$; en dduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Construire la droite $\mathcal{D}$ puis la courbe $\mathcal{C}$ dans le repre $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.