Probabilités

Loi de Poisson

Nicole MONTENEGRO

septembre 2015

Sommaire

La loi de Poisson est une loi de probabilité théorique qui s'applique aux événements rares : contrôles de qualité (révision comptable, erreurs d'impression, de fabrication), probabilités de défaut de crédit, accidents... ou certains phénomènes de files d'attente.

Ces situations se produisent en moyenne λ dans une population de taille donnée.

Définition

Si λ est un réel strictement positif donné, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de poisson de paramètre λ si pour tout entier k, on a

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^k}{k!}$$

Théoriquement X peut prendre toutes les valeurs possibles de $\mathbb{N}$. On note $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Exemple de distribution avec Géogébra :

Exemple de table avec excel :

On entre dans une cellule

$$= LOI.POISSON(0;2;FAUX)$$

Le premier argument est k, le deuxième est λ et le troisième signifie qu'on ne souhaite pas de cumul.

Exemple :
2 % des dossiers de crédit arrivent au service contentieux un an après leur signature. L'organisme de crédit a traité un lot de 100 dossiers. Quelle est la probabilité qu'aucun dossier ne devienne contentieux à un an ?

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de dossiers en contentieux.
X suit la loi de poisson de paramètre $\lambda = 2$.

Première façon de calculer, avec la formule :

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{e^{-2}2^0}{0!} \\
P(X=0) &= 0,1353 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}
\end{aligned}
$$

Deuxième façon, avec la table obtenu grâce au tableur : ...

...Avec la calculatrice TI 84Plus :
Dans le menu `DISTR` :

`poissonpdf(2,0)`

ou `poissonFdp(2,0)`

suivant le modèle de votre calculatrice.

Exemple 2 :
Une société constate en moyenne trois accidents du travail par an. L'effectif total est relativement élevé, aussi considère-t-on que le nombre d'accidents suit une loi de Poisson. Quelle est la probabilité que plus de quatre accidents surviennent dans l'année ?

On sait que $\lambda = 3$.

On peut s'amuser à additionner les nombres relevés sur la table à partir de x = 5.
On trouve 0,1847.

Avec la calculatrice, qui fournit $p(X \leqslant 4)$:

```
poissoncdf(3,4)
```

ou `poissonFRep(3,4)`

Aisni

$$\begin{aligned} p(X > 4) &= 1 - p(X \leqslant 4) \\ &= 1 - 0,8153 \\ &= 0,1847 \text{à } 10^{-4} \text{ près.} \end{aligned}$$

Propriété

L'espérance (la moyenne) comme la variance de la loi de poisson de paramètre λ est égale à λ.

$$Si\ X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda), \qquad E(X) = \lambda \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Sommaire

On peut présenter cette distribution comme étant une approximation d'une loi binomiale lorsque l'effectif n tend vers l'infini (en pratique, plusieurs dizaines) et la probabilité d'occurrence p tend vers zéro (en pratique, $p < 0,1$). Le produit np tend alors vers λ.

Illustration : voir http ://homeomath2.imingo.net/binopois.htm

Exemple :
Une machine-outil produit 1,2 % de pièces défectueuses. On contrôle quarante pièces prises au hasard (sachant qu'après inspection une pièce est remise avec les autres et peut éventuellement être re-vérifiée).

Quelle est la probabilité de contrôler deux pièces défectueuses ?

Soit X le nombre de pièces défectueuses.

X comptabilise le nombre de succès « obtenir une pièce défectueuse » lorsqu'on réalise 40 épreuves identiques et indépendantes menant à deux issues,

S : « la pièce est défectueuse »de probabilité $p = 0,012$ et $\overline{\text{S}}$.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$, $p = 0,012$.

On cherche $p(X = 2)$.

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \binom{40}{2} 0,012^2 (1-0,012)^{38} \\ &= 0,071 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.} \end{aligned}$$

Sur un lot contrôlé, l'espérance du nombre de pièces défectueuses, est $40 \times 0,012 = 0,48$ pièce.

L'emploi de la loi binomiale n'est pas toujours très aisé ; aussi peut-elle être approximée par d'autres lois de probabilité sous certaines conditions.

L'approximation est réalisable par une loi de Poisson si p est petit (np devient alors le paramètre λ de cette loi). C'est manifestement le cas de l'exemple ci-dessus. Reprenons la formule de la loi de Poisson, où $np = 0,48$:

$$\frac{e^{-0,48} 0,48^2}{2!} = 0,071$$

Au niveau de précision choisi, les résultats sont donc identiques.

Sommaire

Soit deux variables aléatoires (v.a) discrètes et indépendantes X et Y qui suivent chacune une loi de Poisson, respectivement de paramètres λ et μ. Alors la v.a (X + Y) suit une loi de Poisson de paramètre $(\lambda + \mu)$. Cette propriété s'étend à un nombre quelconque de v.a.

Exemple :
La prestigieuse université XXX située sur la planète BZZ forme les extra-terrestres les plus performants de sa galaxie.

Toutefois, on peut observer chez quelques rares étudiants deux types d'incompétence : le défaut A (incapacité à parler plus de 500 langues différentes) et le défaut B (incapacité à inverser une matrice 100×100 mentalement en moins d'une minute).

Ces deux types de dysfonctionnements intellectuels sont indépendants.

Chaque promotion de 100 candidats présente en moyenne 1 étudiant d'incompétence A et 2 étudiants d'incompétence B.

Quelle est la probabilité de connaître deux défaillances exactement au sein d'une promotion ?

La probabilité de connaître une défaillance A est donnée par la loi binomiale, approximée par la loi de Poisson.

En effet, les conditions de taille et de faible probabilité sont réunies pour approximer la loi binomiale $\mathscr{B}(100; 0,01)$ par la loi de Poisson de paramètre $100 \times 0,01 = 1$, soit $\mathscr{P}(1)$.

De même, la probabilité qu'une v.a Y indique une défaillance B suit la loi $\mathscr{P}(2)$.

Première technique : par un calcul membre à membre.
Soit Z la v.a. comptabilisant le total des défaillances.

On cherche à déterminer $P(Z = 2)$.

Il existe trois possibilités pour obtenir deux défaillances exactement :
(X = 0) et (Y = 2), (X = 1) et (Y = 1) ou (X = 2) et (Y = 0).

Ces trois probabilités s'additionnent (probabilités totales).

$$P(Z=2)=\frac{e^{-1}1^0}{0!}\times\frac{e^{-2}2^2}{2!}+\frac{e^{-1}1^1}{1!}\times\frac{e^{-2}2^1}{1!}+\frac{e^{-1}1^2}{2!}\times\frac{e^{-2}2^0}{0!}$$

...Soit une probabilité de 0,224.

Deuxième technique : par un calcul qui utilise la propriété d'additivité.
La variable aléatoire qui compte le nombre total de défaillance suit la loi de probabilité $\mathscr{P}(3)$.

$$
\begin{aligned}
P(Z=2) &= \frac{e^{-3}3^2}{2!} \\
P(Z=2) &= 0,224 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}
\end{aligned}
$$

Sommaire

Si λ est un réel strictement positif donné, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de poisson de paramètre λ si

On note

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$, $\quad E(X) = \qquad$ et $\sigma(X) =$

La loi de Poisson est utilisée pour fournir une approximation de la loi binomiale de paramètres n et p. Dans ce cas $\lambda =$

Soit deux variables aléatoires (v.a) discrètes et indépendantes X et Y sur un espace probabilisé Ω qui suivent chacune une loi de Poisson, respectivement de paramètres λ et μ. Alors la v.a $(X + Y)$ suit …