TD N° 5 : CALCUL MATRICIEL

Exercice n° 1 *Manipulation de coefficients*

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 22 & 17 & 0,1 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & \dots & 7 \\ \dots & 9 & \dots \\ 8 & \dots & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Donner la taille de A ;
2. Donner la valeur de chacun des éléments $a_{14},\ a_{23},\ a_{33}$ et a_{32} ;
3. Compléter l'écriture de B de taille 4×3 avec : $b_{32} = 5,\ b_{23} = -4,\ b_{21} = 8$ et $b_{12} = 11$.
4. Donnez la matrice C telle que pour tout indice i et j avec, $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$, le terme c_{ij} soit donné par la formule $c_{ij} = 2i - j$

Exercice n° 2 *Somme de matrices, systèmes*

On donne $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$

1. Trouver x et y pour que $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$
2. Trouver x et y pour que $2A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$

Exercice n° 3 *Produit de matrices*

1. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer $A \times B$, $B \times A$, $A \times u$, $v \times B$ et $u \times v$.
2. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
   a) Calculer A^2 et montrer qu'il existe un réel α tel que $A^2 = \alpha A$.
   b) En déduire la valeur de A^3, A^4 et plus généralement A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$
3. Soit B la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
   a) Calculer B^2, B^3, B^4.
   b) On admet l'existence, pour tout entier naturel non nul n, d'un réel a_n tel que $C^n = a_n\ C$.
   Trouver une expression de a_{n+1} en fonction de a_n, et en déduire la valeur de C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Existe-t-il des matrices égales à leur carré ?

   a) Que peut-on dire des dimensions d'une matrice A égale à son carré $A \times A$?

   b) Savez-vous répondre à la question posée pour des matrices carrées d'ordre 1 ?

   c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

   Calculer M^2. Y a-t-il des valeurs de a et b pour lesquelles $M^2 = M$?

   d) Un brillant élève propose le raisonnement suivant à son professeur (où I est la matrice identité et où O est la matrice nulle) :

$$M^2 = M \Leftrightarrow M^2 - M = O \Leftrightarrow M(M - I) = O \Leftrightarrow M = O \text{ ou } M = I$$

   Le professeur lui fait remarquer qu'on a trouvé d'autres solutions que les deux solutions évidantes O et I ! Où l'élève s'est-il trompé ?

Exercice n° 4 *Application économique*

Sur un chantier de batiment, trois entreprises cohabitent : Pouygues, Tumez et Sogea. Elles ont besoin par jour, pour le bon déroulement du chantier de :

	Ciment en tonnes	Sable en m^3	Gravillon en m^3
Pouygues	10	5	5
Tumez	8	3	2
Sogea	7	3	2

Ces renseignements sont présentés sous forme d'une matrice 3×3, appelée matrice des achats, notée A.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 8 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ces matériaux sont vendus par trois fournisseurs aux prix unitaires, en euros, indiqués dans le tableau suivant.

	Fournisseur 1	Fournisseur 2	Fournisseur 3
Ciment	60	55	63
Sable	15	17	13
Gravillon	17	16	15

Ces renseignements seront présentés sous forme d'une matrice 3×3, appelée matrice des prix, notée P. Effectuer le produit $A \times P$. Que représentent les nombres obtenus dans chacune des colonnes de la matrice $A \times P$.

Exercice n° 5 *Résolution de systèmes*

1. Résoudre par substitution : $(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 3x & - & 5y & = & -21 \end{array}\right.$ $\qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcr} 7x & - & 3y & = & -48 \\ x & + & 11y & = & 16 \end{array}\right.$

2. Résoudre par combinaison linéaire : $(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcr} 7x & - & 3y & = & 5 \\ 4x & + & 11y & = & -6 \end{array}\right.$ $\qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcr} 15x & - & 14y & = & -3 \\ 12x & + & 7y & = & 5 \end{array}\right.$

3. Un système admet-t-il toujours un couple solution ?
   Étudier les systèmes :
   $(S_5)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & 5 \\ -4x & + & 12y & = & -6 \end{array}\right.$ $\qquad (S_6)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 4y & = & -3 \\ -2x & + & 8y & = & 6 \end{array}\right.$

   On appelle déterminant du système (S) : $\left\{\begin{array}{ll} ax+by & =c \\ a'x+b'y & =c' \end{array}\right.$ le réel $\delta = ab' - a'b$.
   Si δ est nul le système admet
   — soit, une infinité de couples solutions ; (Exemple $S = \{(4y-3, y), y \in \mathbb{R}\}$)
   — soit, aucune solution : $S = \oslash$.
   Si le déterminant du système est non nul, le système admet un unique couple solution.

4. Résoudre selon la méthode de votre choix :
   $(S_7)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 5y & + & 8 & = & 0 \\ x & - & 7y & - & 15 & = & 0 \end{array}\right.$ $\qquad (S_8)\left\{\begin{array}{rcrcr} \dfrac{2}{3}x & - & \dfrac{3}{2}y & = & 6 \\ \dfrac{1}{9}x & - & \dfrac{1}{4}y & = & -1 \end{array}\right.$

Exercice n° 6 *Matrices et systèmes*

1. Mettre en évidence dans les systèmes suivants la matrice A telle que $A \times X = B$ où $X = (x, y, z)$ et B est un vecteur colonne (une matrice n lignes, 1 colonne).
   $(S_9)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \\ -x & - & 4y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$ $\qquad (S_{10})\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 3z & = & 6 \\ x & + & 4y & + & 3y & = & -1 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 5 \end{array}\right.$
2. Effectuer les produits suivants :
   $\begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. En déduire les éventuelles matrices inverses des matrices A mises en évidence à la première question.
4. Résoudre les systèmes proposés.

Exercice n° 7 *Matrices et systèmes*

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$