TD N° 7 : VOCABULAIRE ENSEMBLISTE

Exercice 1

1. Soit A et B des parties d'un ensemble E.
   Illustrer graphiquement les ensembles suivants : $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.
2. Soit A, B et C des parties d'un ensemble E.
   Illustrer graphiquement les ensembles suivants : $A \cap B \cap C$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $(\overline{A} \cap B) \cup (B \cap C)$ et $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

Exercice 2

Soit A et B des parties d'un ensemble E.

1. On suppose $A \subset B$. Que peut-on dire de $A \cap B$ et de $A \cup B$?
2. Inversement si on suppose que $A \cap B = A$, que peut on en conclure ?
3. Et si on suppose que $A \cup B = B$, quelle conclusion tirez vous ?

Exercice 3

Soit A et B des parties d'un ensemble E. Simplifier :
$A \cap \varnothing$, $A \cup \varnothing$, $A \cap E$, $A \cup E$, $A \cap (A \cap B)$, $A \cup (A \cup B)$, $A \cap \overline{A}$, $A \cup \overline{A}$, $A \cap (\overline{A} \cap B)$, $A \cup (\overline{A} \cup B)$.

Exercice 4

Soit A, B et C des parties d'un ensemble E. Simplifier :
$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$, $A \cup \overline{A} \cup (A \cap B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$, $(A \cup B \cup \overline{C}) \cap C \cap \overline{B}$.

Exercice 5

Pour A et B des parties d'un ensemble E, on définit la différence positive de A et de B notée $A \backslash B$ par

$$A \backslash B = A \cap \overline{B}$$

1. Illustrer cette notion par une figure ;
2. Déterminer $\overline{A} \backslash \overline{B}$, $A \backslash A$, $A \backslash E$ et $A \backslash \varnothing$.
3. Montrer que si A, B et C sont des parties d'un ensemble E, on a $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.

Exercice 6

Pour A et B des parties d'un ensemble E, on définit la différence symétrique de A et de B notée $A \triangle B$ par la différence de $A \cup B$ et de $A \cap B$, c'est-à-dire

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

1. Illustrer cette notion par une figure.
2. Justifier que $A \triangle B = B \triangle A$.
3. Exprimer $A \triangle B$ uniquement à l'aide des opérateurs de complémentation, d'intersection et de réunion.
4. Déterminer $A \triangle A$, $A \triangle E$, $A \triangle \varnothing$.

Exercice 7

$\mathcal{R}$ est une relation binaire sur un ensemble E. Ecrire ce que signifie :
— $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive ;
— $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique ;
— $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique ;
— $\mathcal{R}$ n'est pas transitive ;

Exercice 8

Dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, la relation $\mathcal{R}$ définie par l'ensemble des couples

$$\Gamma = \{(a, a), (c, c), (c, d), (d, d), (d, f), (f, c), (f, d), (f, f), (c, f), (d, c)\}$$

est elle réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? transitive ?

Exercice 9

Dans chaque cas déterminer si la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.

1. $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x + y$ est pair.
2. $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x + y$ est impair.
3. $x\mathcal{R}y$ si et seulement si xy est pair.

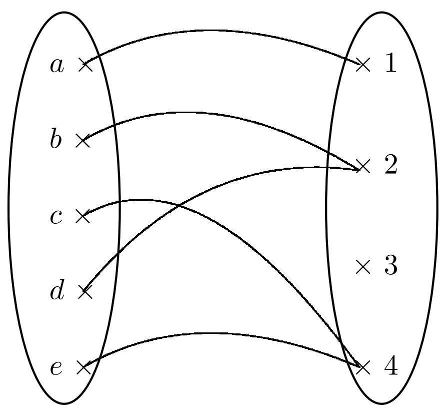
Exercice 10

Soit $E = \{1, 5\}$, $F = \{2, 3\}$ et $G = \{1, 4\}$. Décrire les ensembles :

$$E \times F, \quad E \times \{1\}, \quad E \times \varnothing, \quad F \times (E \cap G), \quad (F \times E) \cap G$$

Exercice 11

Soit f l'application de E dans F définie par le diagramme ci dessous :



1. Soit $A = \{a, b, c\}$ et $A' = \{a, d, e\}$.
   a) Déterminer $f(A)$ et $f(A')$.
   b) Comparer $f(A \cap A')$ et $f(A) \cap f(A')$.
   c) Déterminer $f(A \cup A')$ et $f(A) \cup f(A')$.
2. Soit $B = \{1, 2\}$ et $B' = \{3, 4\}$.
   a) Déterminer $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(B')$.
   b) Comparer $f^{-1}(B \cap B')$ et $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
   c) Déterminer $f^{-1}(B \cup B')$ et $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
3. f est elle injective ?
4. f est elle surjective ?

5. Soit g définie de F dans E par le graphe $\Gamma = \{(1, a), (2, c), (3, c), (4, e)\}$.
Déterminer l'application $g \circ f$.
$g \circ f$ est elle injective ? $g \circ f$ est elle surjective ?