TD N° 6 : LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Exercice 1

Préliminaires

On admet les éléments du tableau de signes ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\dfrac{6}{x} - 6x^2$	‖	$+$	0	$-$	

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 6\ln x - 2x^3 - 3.$$

On désigne par g' la fonction dérivée de g.

1. Calculer $g'(x)$.
2. En utilisant 1., déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire que $g(x) < 0$ pour tout $x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{3\ln x}{2x^2}$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{2x^3}$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

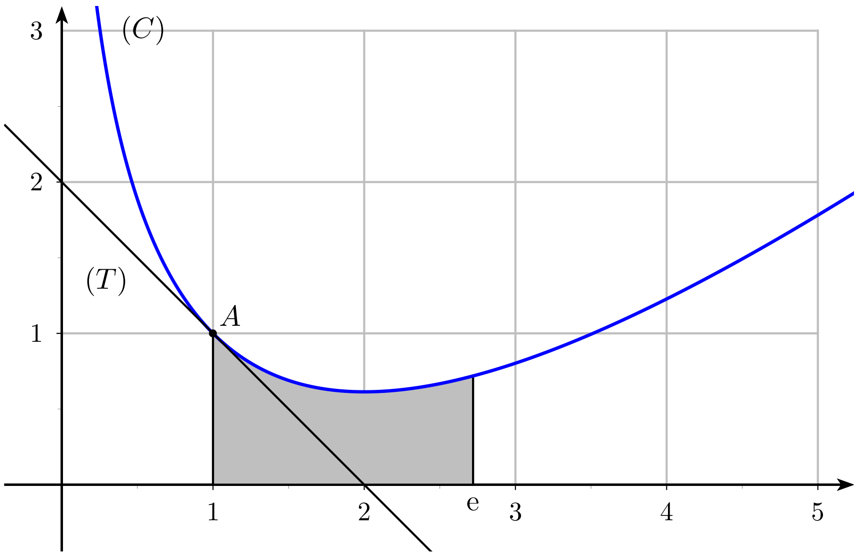
On définit la fonction F sur I'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \times \frac{1 + \ln x}{x}.$$

Déterminer la dérivée de la fonction F. Que remarque-t-on ?

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ dont on donne la représentation graphique (C) dans le repère ci-dessous.



On admet que :
— le point A de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ appartient à la courbe (C) ;
— la tangente (T) en A à la courbe (C) passe par le point de coordonnées $(2\ ;\ 0)$;
— la courbe (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2 ;
— l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de la fonction f.

1. Donner, par lecture graphique ou en utilisant les données de l'énoncé, les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$, et $f'(2)$, où f' est la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. On admet que l'expression de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ est :

$$f(x) = ax + b + c\ln x$$

où a ; b et c sont des nombres réels.

a) Calculer $f'(x)$ en fonction de x et de a, b et c.

b) Démontrer que les réels a, b et c vérifient le système $\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ a+c & = & -1 \\ a+\dfrac{c}{2} & = & 0 \end{array}\right.$

c) Déduire de la question précédente les valeurs de a, b et c puis l'expression de $f(x)$.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 2x(1 - \ln x).$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

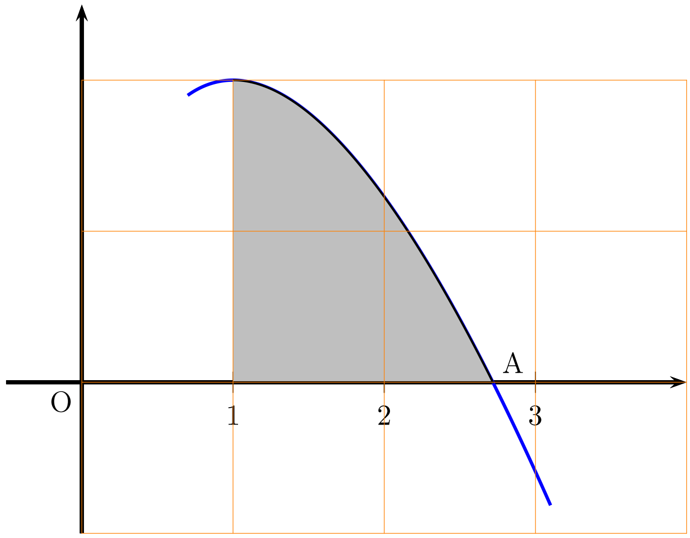
1. a) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0~;~+\infty[$ (où f' est la fonction dérivée de f).

   b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0~;~+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Résoudre sur $]0~;~+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses et donner les coordonnées du point A.

3. Résoudre, par un calcul, l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

4. Montrer que la fonction F définie sur $]0~;~+\infty[$ par $F(x) = x^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right)$ vérifie $F' = f$.



Exercice 4

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

   Dresser le tableau de variation de la fonction f.

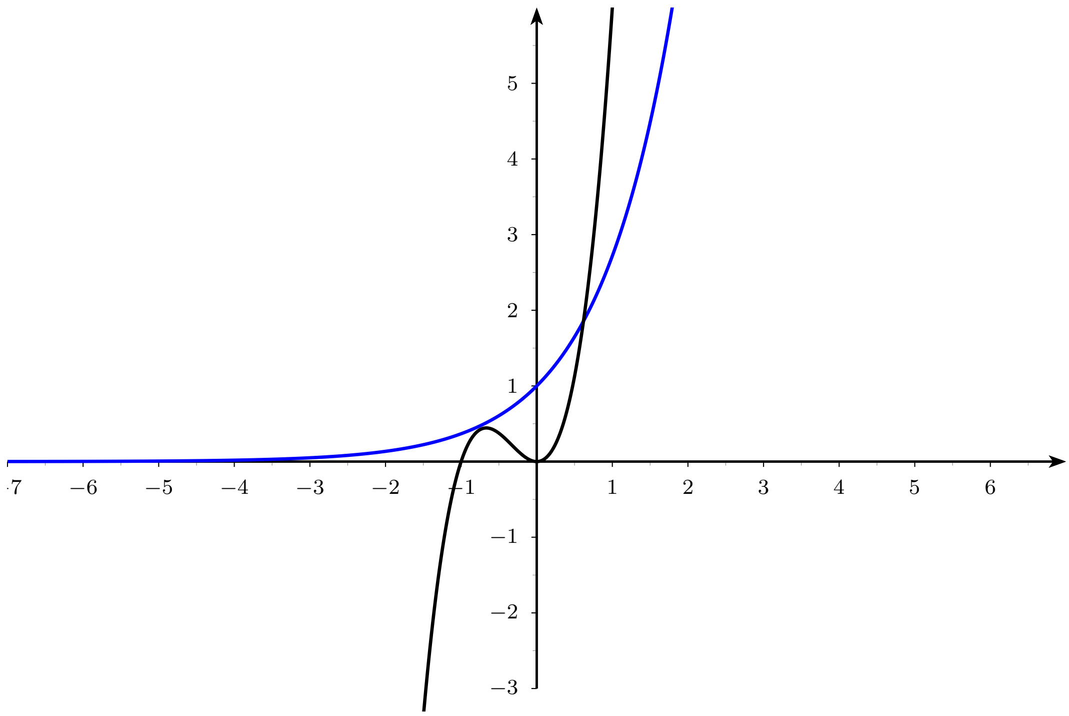
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

Exercice 5

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. a) Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.
   b) En déduire que l'équation (E)n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.
   c) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel de $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x.$$

   Montrer que, sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.
3. a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

   b) Déterminer les variations de la fonction h.
   c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
   d) Conclure quant à la conjecture de la partie A.