Fonctions

Calcul intégral

Nicole MONTENEGRO

Décembre 2017

Le programme :

- Primitives de fonctions de référence, opérations algébriques ;
- Calcul intégral ; Propriétés de l'intégrale : relation de Chasles, linéarité et positivité.
- Calcul d'aires ;
- Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle : définition, interprétation géométrique.

Capacités attendues :

- Déterminer des primitives d'une fonction :
  - à la main dans les cas simples ;
  - à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas ;
- Déterminer les primitives d'une fonction de la forme $u'u^n$ (n entier relatif, différent de 1), $\dfrac{u'}{u}$ pour $u > 0$ et $u'e^u$;

- Déterminer une intégrale :
  - à la main dans les cas simples ;
  - à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas ;
- Déterminer l'aire du domaine défini par :

$$\{M(x, y), a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

  où f et g sont deux fonctions telles que pour tout réel x de $[a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$;
- Déterminer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.

Sommaire

Primitive d'une fonction f sur $[a; b]$

Intégrale d'une fonction f sur $[a; b]$

A retenir

Primitive d'une fonction f sur $[a; b]$

Intégrale d'une fonction f sur $[a; b]$

A retenir

Définition

Une fonction f est continue sur un intervalle $[a; b]$ si on peut la tracer sans lever le crayon.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.
La fonction F dérivable sur $[a; b]$ est une primitive de f sur $[a; b]$ si et seulement si $F' = f$ sur l'intervalle $[a; b]$.

Exemple :

- $f : x \mapsto 3x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  $F : x \mapsto x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

- $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  $F : x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

- $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$
  $F : x \mapsto \ln x$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Exemple :

- $F : x \mapsto \ln x$ est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$;
- $F : x \mapsto \ln x + 1$ est une autre primitive de f sur $]0;+\infty[$;
- $F : x \mapsto \ln x - 2$ est la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en $x = e^2$;
- L'ensemble des primitives de f sur $]0;+\infty[$ sont de la forme $F : x \mapsto \ln x + k, k \in \mathbb{R}$;

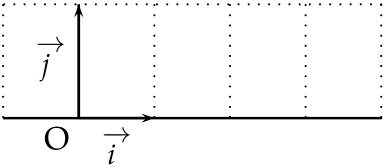
Sommaire

Primitive d'une fonction f sur $[a; b]$

Intégrale d'une fonction f sur $[a; b]$
- Définition
- Valeur moyenne
- Propriétés

A retenir

Dans tout ce paragraphe, on considère un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Le plan étant muni de ce repère, l'unité d'aire (en abrégé u.a.) est égale à $||\overrightarrow{i}|| \times ||\overrightarrow{j}||$.



Si en cm, $||\overrightarrow{i}|| = 2$ et $||\overrightarrow{j}|| = 3$,
l'unité d'aire en cm^2 est $||\overrightarrow{i}|| \times ||\overrightarrow{j}|| = 6$.

DÉFINITION

Primitive d'une fonction f sur $[a; b]$

Intégrale d'une fonction f sur $[a; b]$

Définition

Valeur moyenne

Propriétés

A retenir

Définition

Soit f une fonction définie et continue sur $[a; b]$, et (C) sa courbe représentative. Soit F une primitive de f sur $[a; b]$. On appelle intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$, le réel $F(b) - F(a)$ et on note

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Primitive d'une fonction f sur $[a;b]$

Intégrale d'une fonction f sur $[a;b]$

Définition

Valeur moyenne

Propriétés

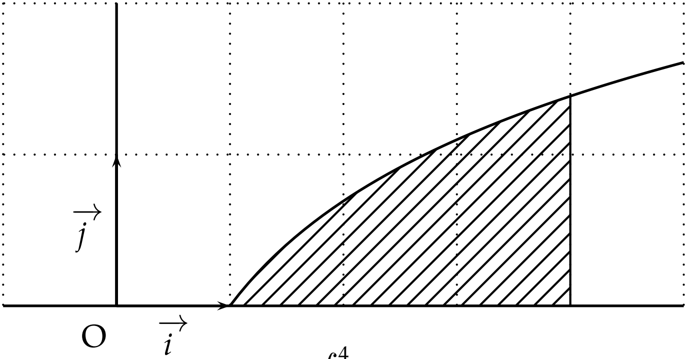
A retenir

Propriété

Si f est une fonction positive sur $[a;b]$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ représente l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x;y)$ tel que

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

c'est à dire l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (C), l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



$$I = \int_1^4 f(t)\mathrm{d}t$$

Soit $f : x \mapsto \ln x$.
Montrer que $F : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$ et déterminer $I = \displaystyle\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t$.
Que représente graphiquement cette intégrale ?

$$\text{Pour tout } x > 0, \quad \begin{aligned} F'(x) &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$, $F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 f(t)\mathrm{d}t \\ &= F(4) - F(1) \\ &= 4\ln 4 - 4 - (\ln 1 - 1) \\ &= 4\ln 4 - 3 \end{aligned}$$

f est positive sur [1 ;4] donc l'intégrale représente l'aire comprise entre la courbe, l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = 4$.

Remarque :

- L'intégrale ne dépend pas de la variable choisie. $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;
- a et b sont appelés bornes de l'intégrale ; comme on parle de l'intervalle, on a $a < b$.

Valeur moyenne

Mathématiques approfondies en SIO

Nicole MONTENEGRO

Primitive d'une fonction f sur $[a; b]$

Intégrale d'une fonction f sur $[a; b]$

Définition

Valeur moyenne

Propriétés

A retenir

Définition

Soit f une fonction continue positive sur $[a, b]$, $a < b$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
x
$\mathscr{C}_f$

Cette fonction modélise les ventes, en milliers, d'un nouveau jouet x jours après le lancement de la campagne publicitaire.

Le nombre de jouets vendus sur la période des 10 premiers jours est l'aire comprise entre l'axe (Ox), la courbe, et la droite d'équation $x = 10$.
Il s'agit donc de

$$\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x$$

f est définie par $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-0,2x}$ et
$F : x \mapsto (-25x - 125)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $[0\,;18]$.

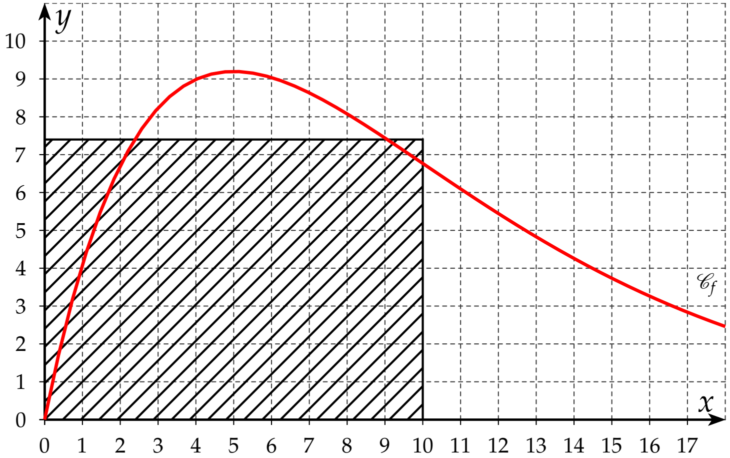
$$\begin{aligned} \int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x &= F(10) - F(0) \\ &= -375\mathrm{e}^{-2} + 125 \end{aligned}$$

Sur les 10 premiers jours, la marque s'attend à vendre 74 249 jouets, et donc en moyenne 7 425 par jours.
Ce qui correspond bien à

$$\frac{1}{10}\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x$$

Propriété

Si f est continue positive sur $[a; b]$, l'intégrale de f de a à b est l'aire du rectangle dont les côtés ont pour longueur $b - a$ et μ.


y
x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
$\mathscr{C}_f$

Primitive d'une fonction f sur $[a; b]$

Intégrale d'une fonction f sur $[a; b]$

Définition

Valeur moyenne

Propriétés

A retenir

Propriété

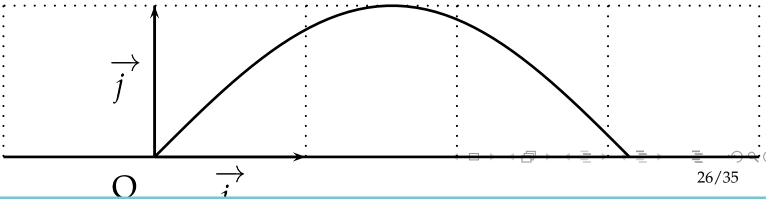
Si f est une fonction continue sur un intervalle I, et a un réel de cet intervalle, on a $\displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$

En effet, $\displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a) - F(a) = 0$

Propriété (Relation de Chasles)

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$, $a < b$ et si $c \in [a; b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$



En effet,

$$\begin{aligned}\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Propriété (Conséquence)

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^a f(t)\mathrm{d}t = 0$$

d'où

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$$

Propriété (Linéarité)

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, et si α et β sont deux réels , on a :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Sommaire

Primitive d'une fonction f sur $[a; b]$

Intégrale d'une fonction f sur $[a; b]$

A retenir

La primitive d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ est ...

Une primitive de $x \mapsto a$ sur $\mathbb{R}$ est ...
Une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est ...
Une primitive de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est ...
Une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$ est ...
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}$ est ...

L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ est ...

Que représente-t-elle ?

La valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a; b]$ est ...

Que sont les propriétés de positivité, de linéarité de l'intégrale ?

Qu'est ce que la relation de Chasles ?