TD N° 3 : VARIABLES ALÉATOIRES LOI BINOMIALE

Exercice 1

On lance deux deux bien équilibrés : un dé à six faces et un dé à huit faces.
Soit X la variable aléatoire qui à un lancer associe le dernier chiffre du produit des nombres apparus.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Donner la loi de probabilité de X. On pourra s'aider d'un script en `Python`.

Exercice 2

Une entreprise s'intéresse à la durée de vie des machines qu'elle construit. Elle possède un parc de 1000 ordinateurs. Une étude sur 100 machines mises en service au 1er janvier 2006 donne le nombre de machines encore en service à la date indiquée dans le tableau. Si la machine s'arrête de fonctionner durant l'année 2006, on dira que sa durée de vie a été de 1 an.

janvier 2006	janvier 2007	janvier 2008	janvier 2009	janvier 2010	janvier 2011
100	96	44	40	20	0

1. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie des machines. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
2. On admet que la part des machines tombées en panne chaque année, dans la centaine étudiée, fournit un modèle satisfaisant pour la loi de probabilité de X.
   Donner cette loi.
3. Calculer : $p(X < 3)$, $p(X \geqslant 1)$, $p(3 \leqslant X < 5)$
4. Calculer la durée de vie moyenne des machines.

Exercice 3

Mathys déjeune cinq jours sur sept dans un fastfood. Trois fois sur cinq il choisit le menu B (hamburger, frites) et deux fois sur cinq il choisit le menu S (salade complète).
On rencontre par hasard Mathys au fastfood quatre fois, dans quatre semaines différentes, si bien que les quatre repas de Mathys sont assimilables à quatre expériences identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de menus S parmi ces quatre repas.

1. Calculer la probabilité que Mathys ait mangé exactement un menu « salade ».
2. Calculer la probabilité que Mathys ait pris au moins un menu « salade ».
3. Déterminer la loi de probabilités de X et calculer son espérance.
4. Le menu B est à 800 calories et le S à 275 calories. Soit C la variable aléatoire égale au nombre de calories apportées par ces trois repas. Déterminer la loi de probabilités de C et calculer E(C).

Exercice 4

Planche de Galton et triangle de Pascal

Exercice 5

Mathéo et Elora visitent une usine de chocolat en Suisse. A la sortie de la visite, ils peuvent manger des truffes. Les trois quart des truffes offertes sont au chocolat noir, à forte teneur en cacao, les autres sont au praliné. Il y en a suffisamment pour que la probabilité de prendre une truffe au chocolat noir reste toujours égale à 0,75.

1. Un visiteur choisit cinq truffes et les mange une à une.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de truffes au chocolat noir choisies.
   a) Reconnaitre la loi suivie par X et donner ses paramètres.
      Préciser l'ensemble des valeurs prises par X.
   b) Dresser le tableau de la loi de probabilité suivie par X et utiliser la calculatrice pour calculer les probabilités à 10^{-4} près.
   c) Calculer $p(X \geqslant 3)$. En donner une interprétation.
2. a) Mathéo préfère les truffes au praliné. Il prend (et mange !) 10 truffes et se plaint « toutes les truffes sont au chocolat noir ! ». Quelle est la probabilité que cet évènement se réalise ?
   b) Sa petite soeur Élora choisit six truffes, mais elle est malade le lendemain si elle en mange plus de trois au praliné. Quelle est la probabilité qu'Élora tombe malade ?

Exercice 6

Une compagnie de transport désire renforcer les contrôles sur ses lignes, afin d'éviter toute tentative de fraude. Cette compagnie effectue une étude sur 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être controlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de 5 € et en cas de fraude l'amende est de 50€.

On suppose que Maurice, usager de la ligne, fraude systématiquement.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où Maurice est contrôlé et Z la variable aléatoire égale au gain algébrique réalisé par le fraudeur.

1. Déterminer la loi suivie par X. Calculer son espérance en fonction de p.
2. Justifier l'égalité $\mathrm{Z} = 200 - 50\mathrm{X}$. Calculer E(Z) en fonction de p.
   Pour quelles valeurs de p, $\mathrm{E(Z)} \leqslant 0$?
3. Lors de cette étude la compagnie constate que Maurice est controlé une fois sur dix. La compagnie doit elle augmenter ses contrôles pour dissuader les fraudes éventuelles ?
4. La compagnie décide d'augmenter de manière importante les effectifs de ses contrôleurs. On admet que $p = 0,2$. Calculer E(X) puis E(Z).
5. Calculer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités des événements $(\mathrm{X} = 0)$, $(\mathrm{X} = 1)$ et $(\mathrm{X} = 2)$.
6. Calculer la probabilité que Maurice soit contrôlé au moins trois fois.

Exercice 7

Dans un club de sport, Jules et Thomas joue au basket. La probabilité de marquer un panier pour Jules est de 0,65 et pour Thomas de 0,78 quel que soit leur lancer et s'ils ont marqué ou non lors des précédents lancers.

On note X et Y les variables aléatoires égales aux nombres de paniers marqués respectivement pour Jules et Thomas au cours de n lancers successifs.

1. Jules lance le ballon cinq fois de suite.
   a) Quelle est la probabilité que Jules marque trois paniers ? aucun panier ? au moins un panier ?
   b) Calculer et interpréter l'espérance de X.
   c) Thomas tente lui aussi cinq paniers. Calculer E(Y). Comparer V(X) et V(Y).
2. Lors d'un match, Jules, Thomas et Arthur sont les joueurs ayant marqués. La probabilité de marquer pour Arthur est de 0,54. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de paniers marqués lors du match. Combien de paniers peuvent ils espérer marquer ?
3. À l'aide d'un programme ou de la calculatrice déterminer le nombre minimal de lancers que doit réaliser Jules pour que la probabilité de marquer au moins un panier soit supérieure à 0,9999.