TD N° 6 : CONGRUENCES

Exercice n° 1 *Définition*

Déterminer les affirmations exactes dans la liste suivante :

$17 \equiv 42[5]$	$17 \equiv -18[5]$	$175 \equiv 2[7]$	$15 \equiv 3[7]$
$544 \equiv 4[10]$	$151 \equiv 1[2]$	$32\,464 \equiv 1[2]$	$25 \equiv 43[17]$
$100 \equiv 1[11]$	$1000 \equiv 10[11]$	$1000 \equiv -1[11]$	$7\,852 \equiv 1[4]$

Exercice n° 2 *Définition*

1. Compléter les congruences suivantes par un entier convenable :
   $33 \equiv \ldots\ [7]$ $\quad 27 \equiv \ldots\ [6]$ $\quad 138 \equiv \ldots\ [25]$ $\quad -23 \equiv \ldots\ [8]$
2. Compléter les congruences suivantes par un entier positif ou nul le plus petit possible :
   $63 \equiv \ldots\ [7]$ $\quad 39 \equiv \ldots\ [6]$ $\quad 114\,538 \equiv \ldots\ [10]$ $\quad -23 \equiv \ldots\ [8]$
3. Compléter les congruences suivantes par un entier négatif le plus grand possible :
   $33 \equiv \ldots\ [7]$ $\quad 27 \equiv \ldots\ [6]$ $\quad 138 \equiv \ldots\ [25]$ $\quad 23 \equiv \ldots\ [8]$
   $-247 \equiv \ldots\ [2]$ $\quad -247 \equiv \ldots\ [12]$ $\quad 247 \equiv \ldots\ [2]$

Exercice n° 3 *Application aux billets de banque*

Sur les billets de banque en euros figure un nombre de 11 chiffres décimaux précédé d'une lettre. En remplaçant cette lettre par son rang dans l'alphabet (de 1 à 26), on obtient ainsi un nombre de 12 ou 13 chiffres. Le billet ne peut être authentique que si le reste de ce nombre dans la division par 9 vaut 8.

1. Les billets portant les numéros U57794585675 et S00212913867 peuvent-ils être authentiques ?
2. Un billet authentique porte le numéro T2303557409x (il y a une tache sur le dernier chiffre).
   Que vaut x ?
3. Le nombre figurant sur un billet authentique est 16122340243 mais la lettre est effacée. Quelle peut-être cette lettre ?

Exercice n° 4 *Application à la division par 9*

1. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $10^n \equiv 1[9]$.
2. En déduire qu'en base 10, le reste de la division par 9 d'un entier est le même que celui de la division par 9 de la somme de ses chiffres.
3. Quel est le reste de la division par 9 de $47\,215$? et de $53\,748\,459\,527\,899$?

Exercice n° 5 *Questions de multiples*

1. Sachant que $n \equiv 3[5]$, montrer que $2n^2 - n$ est un multiple de 5.
2. Suivant les valeurs de $n, n \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division par 17 de 200^n ? En déduire le reste la division de 200^{2013} par 17.
3. En analysant toutes les possibilités de congruence de l'entier n modulo 6, montrer que $5n^3 + n$ est toujours un multiple de 6.
4. Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors $n^6 - 1$ est un multiple de 7.
5. Résoudre l'équation $3x \equiv 7[9]$.
6. Résoudre l'équation $4x \equiv 2[5]$.
7. Résoudre l'équation $2x \equiv 6[8]$.

Exercice n° 6 *PGCD*

Soit a, b, c des entiers naturels non nuls, tels que $a \equiv b\ [c]$.

1. Soit d un diviseur commun à a et à c. Montrer que d est un diviseur commun à b et à c.
2. Soit d un diviseur commun à b et à c. Montrer que d est un diviseur commun à a et à c.
3. En déduire que PGCD(a, c) =PGCD(b, c).
4. Trouver un exemple qui montre que la réciproque est fausse.

Exercice n° 7 *Jeu de Nim*

Une version de base du jeu de Nim requiert deux joueurs A et B et utilise un tas de N objets. Chaque joueur à tour de rôle enlève 1, 2 ou 3 objets. Le perdant est celui qui joue en dernier (c'est-à-dire qui ramasse le dernier objet). On suppose que A joue en premier, et on cherche une stratégie gagnante pour A.

1. Quel est doit être le nombre d'objets restants après son dernier coup pour que A gagne ?
2. Quel doit alors être le nombre d'objets restants après son avant-dernier coup ?
3. Quel doit alors être le nombre d'objets restants après son antépénultième coup ?
4. En déduire, de façon générale, une caractérisation du nombre d'objets laissés par A à chaque coup.
5. Déterminer pour quelles valeurs de N la stratégie gagnante du joueur A peut échouer.

Exercice n° 8 *Divisibilité par 11*

1. Justifier que, pour tout entier naturel k, on a $10^k \equiv (-1)^k[11]$.
2. Soit x un entier qui s'écrit (en base 10) avec les chiffres successifs (de droite à gauche) a_0 , $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, c'est-à-dire $x = (a_n a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0)_{10}$, ce qui signifie que

$$x = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + \ldots + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_n \times 10^n.$$

   Montrer que $x \equiv a_0 - a_1 + a_2 - ... + (-1)^n a_n[11]$ et en déduire que x est divisible par 11 si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11.
3. Appliquer le critère précédent à $x = 82\,456$, $x = 193\,919$ et $x = 181\,907$.