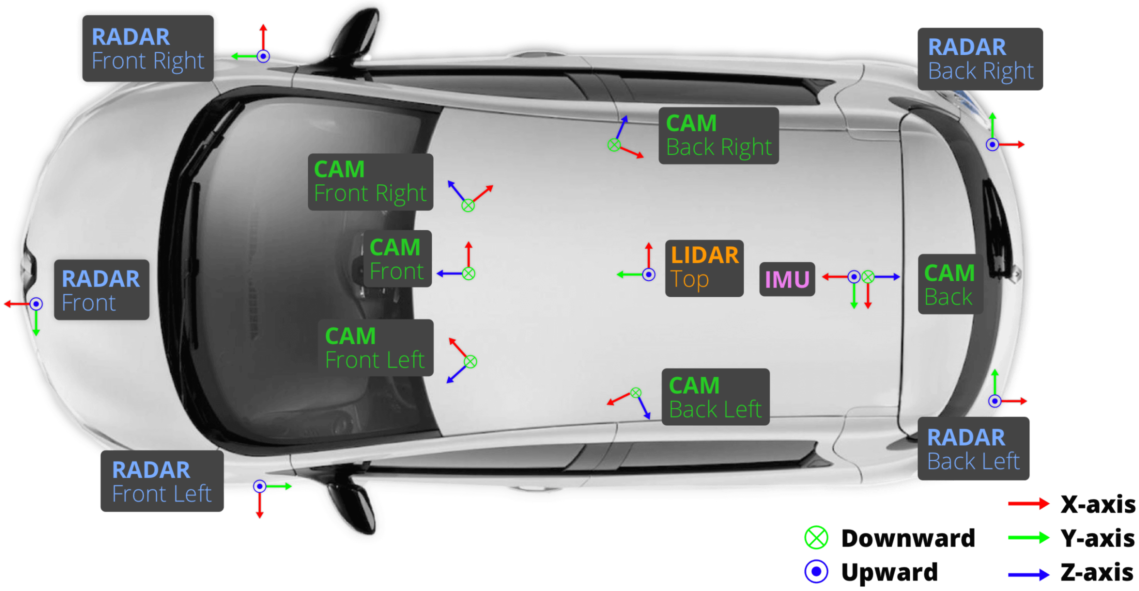
一、坐标系说明
1.1 摄像头相关坐标系
1.2 毫米波雷达相关坐标系
1.3 GPS相关坐标系
1.4 车体相关坐标系
1.5 其他坐标系
1.5.1 左右手坐标系
二、毫米波和摄像机联合标定
2.1 毫米波$OX_rY_rZ_r$坐标系转摄像机$OX_cY_cZ_c$坐标系
附录A： 旋转矩阵的推导
二维旋转
法一
法二
三维旋转
附件B:三角公式

一、坐标系说明

下图为车载**6个摄像头、1个360度激光雷达、5个毫米雷达、1个GPS及1个惯性测量传感器以及车体base坐标系**的坐标系框图。



传感器类型	X轴方向	Y轴方向	Z轴方向	原点
Camera	右	地	前	
Radar	前	左	天	
Lidar	右	前	天	
GPS	东	北	天	
IMU	前	左	天	
车体base坐标系	右	前	天	车辆后轴中心

1.1 摄像头相关坐标系

1.2 毫米波雷达相关坐标系

1.3 GPS相关坐标系

1.4 车体相关坐标系

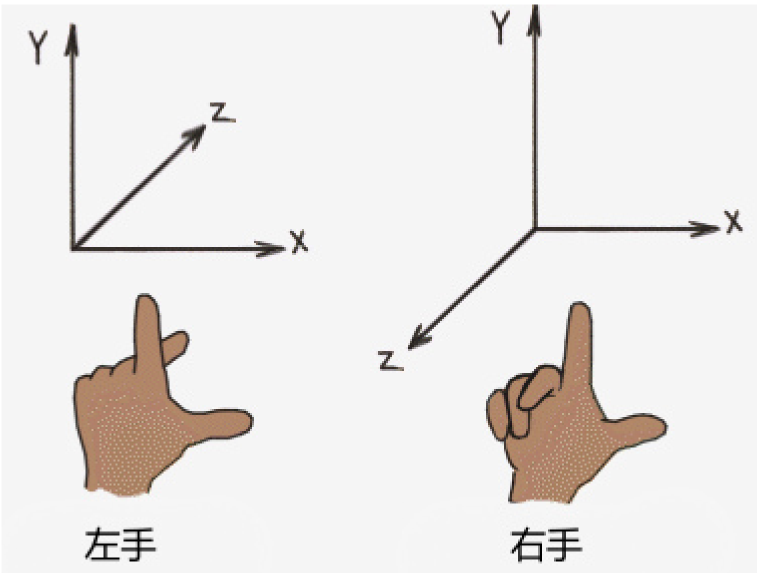
1.5 其他坐标系

1.5.1 左右手坐标系

左手坐标系：伸开我们的左手, 掌心向外, 大拇指与食指成90度, 中指、无名指和小指弯曲, 大拇指指向的方向就是X轴正方向, 食指指向的方向就是Y轴正方向, 中指、无名指和小指指向的方向就是Z轴正方向。用**左手**的大拇指指向轴的正方向，弯曲手指。那么手指所指示的方向即是轴的正旋转方向。

右手坐标系:伸开我们的右手, 掌心向内, 大拇指与食指成90度, 中指、无名指和小指弯曲, 大拇指指向的方向就是X轴正方向, 食指指向的方向就是Y轴正方向, 中指、无名指和小指指向的方向就是Z轴正方向。用**右手**的大拇指指向轴的正方向，弯曲手指。那么手指所指示的方向即是轴的正旋转方向。

左手坐标系和右手坐标系中, X轴和Y轴的方向是相同的, Z轴的方向相反。在计算机中通常使用的是左手坐标系，而数学中则通常使用右手坐标系。



二、毫米波和摄像机联合标定

传感器类型	X轴方向	Y轴方向	Z轴方向	坐标系
Camera	右	地	前	$OX_cY_cZ_c$
Radar	前	左	天	$OX_rY_rZ_r$

2.1 毫米波$OX_rY_rZ_r$坐标系转摄像机$OX_cY_cZ_c$坐标系

假设毫米传感器在摄像机坐标系下的坐标为$X_{offset}Y_{offset}Z_{offset}$；$OX_rY_rZ_r$坐标系在$OX_cY_cZ_c$坐标系下的姿态为$(\alpha,\beta,\gamma)$(俯仰角pitch、航向角yaw、翻滚角roll)；在X_c轴的旋转矩阵为R_x，在Y_c轴的旋转矩阵为R_y，在Z_c轴的旋转矩阵为R_z；则由前左天$OX_rY_rZ_r$坐标系转右地前$OX_cY_cZ_c$坐标系：

$$
\begin{cases}
X_c = R_x(-Y_r) + X_{offset} \\
Y_c = R_y(-Z_r) + Y_{offset} \\
Z_c = R_z(X_r) + Z_{offset}
\end{cases}
$$

写成矩阵的形式:

$$
\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \{R|T\}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix}\right\}
$$

接下来就是相机的标定原理了。

雷达转相机坐标系:

$$
\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \{R|T\}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix}\right\}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix}\right\} + \left\{\begin{bmatrix} X_{offset} \\ Y_{offset} \\ Z_{offset} \end{bmatrix}\right\}
$$

因为毫米波雷达的Z_r为0，也就时相机坐标系的Y_c为0，没有Y_c坐标轴。对上式进行化简可得:

$$
\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \left\{\begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & -sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{bmatrix}\right\}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix}\right\} + \left\{\begin{bmatrix} X_{offset} \\ Y_{offset} \\ Z_{offset} \end{bmatrix}\right\}
$$

相机坐标系转像素坐标系:

$$
z_{c1}\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{d_x} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\left\{\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix}\right\}
$$

详细参考资料

附录A： 旋转矩阵的推导

一般两坐标进行旋转变换时沿逆时针旋转。

二维旋转

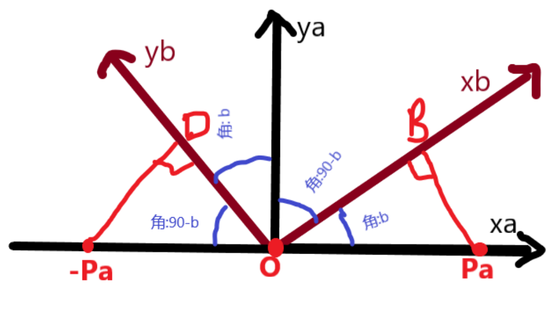
法一

有点**P(Pa,PYa)[(Xa，Ya)]**，当坐标由 x –> y 旋转 **b(θ)** 度后，求该点在新坐标轴的坐标是多少。

$$\overline{OP}_A = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix}$$

$$\overline{OP}_B = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix}_A = ?$$

Ya = 0



$OB = X_a \cos(b)$

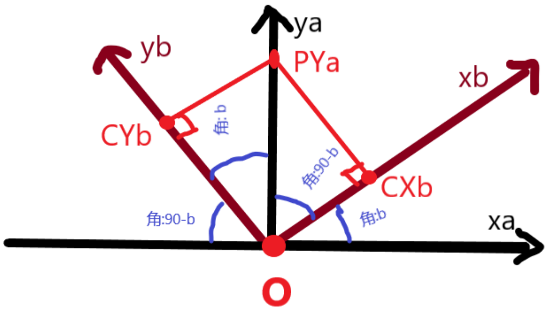
$OD = -X_a \cos[90-b]$

$= -X_a \sin(b)$

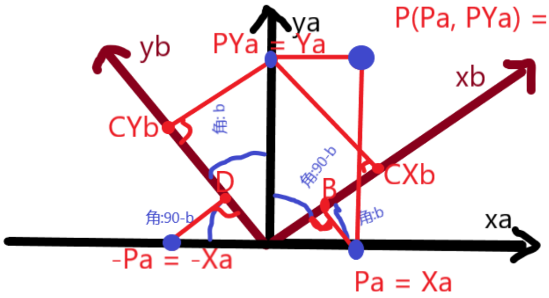
$$\overrightarrow{OP}_A = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP}_B = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix}_A = ?$$

Xa = 0



$$OCX_b = PY_a + \cos[90-b]$$
$$= PY_a \sin(b)$$
$$OCY_b = PY_a \cos(b)$$

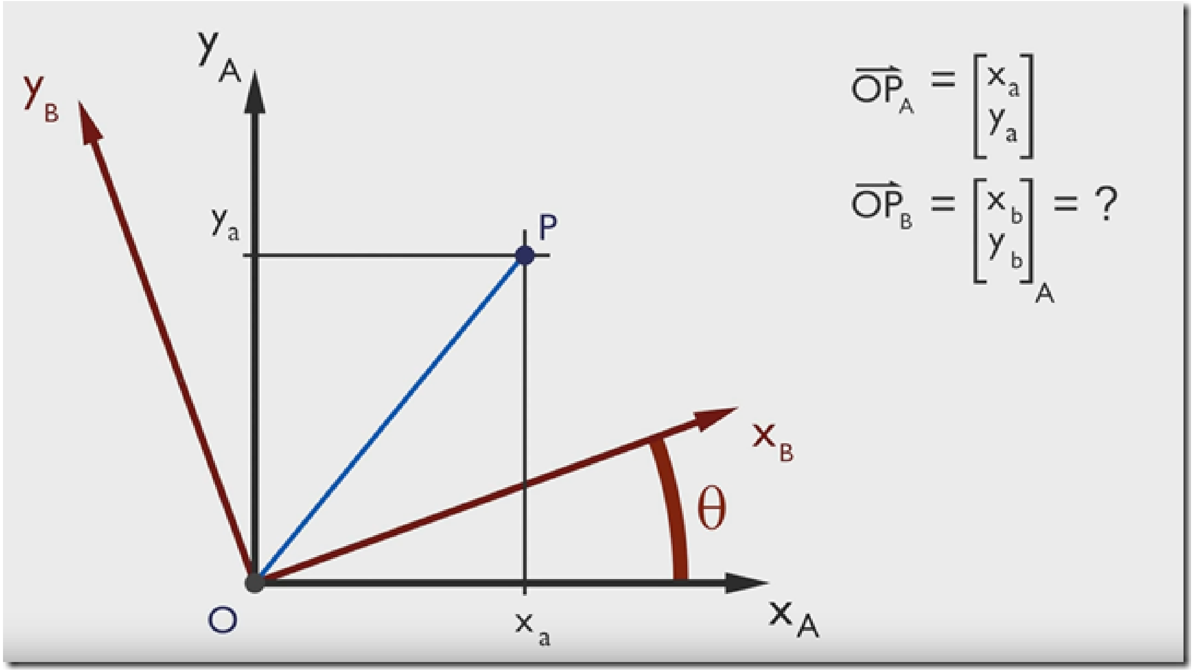


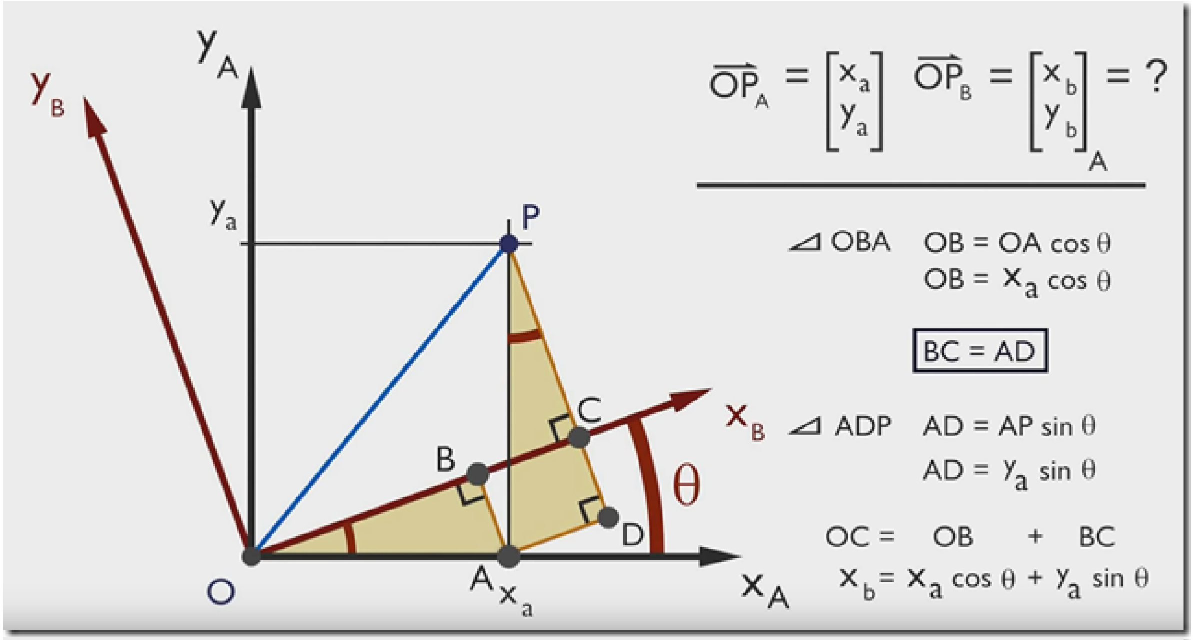
P(Pa, PYa) = (Xa, Ya)

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix}$$

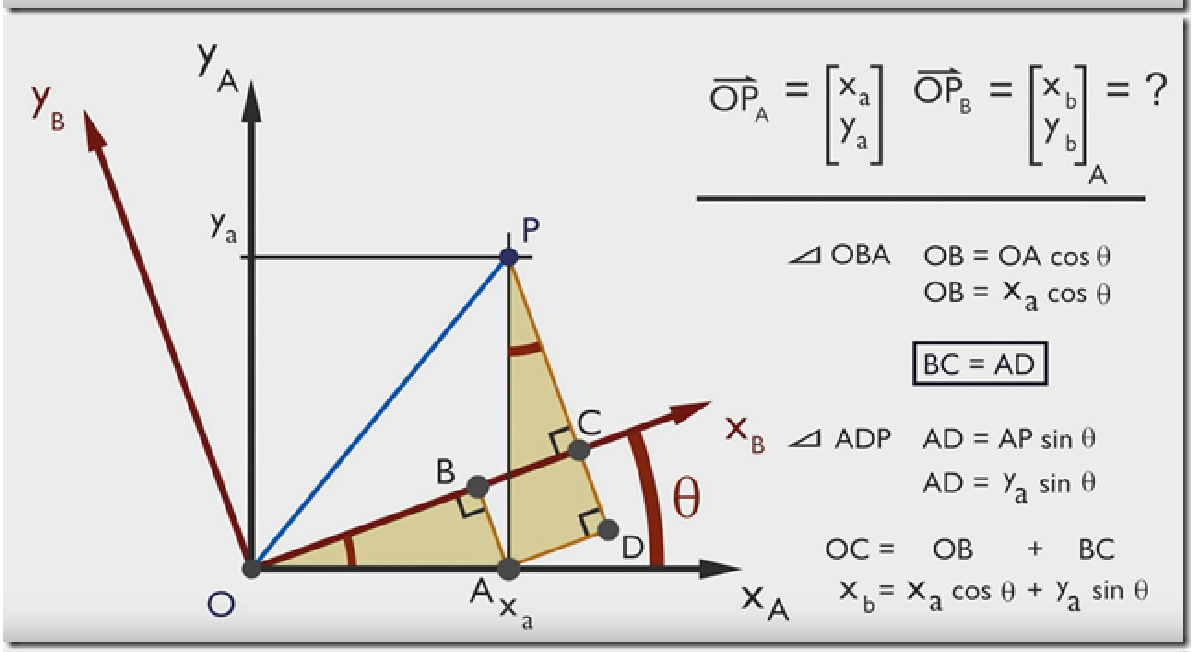
法二

有点P（Xa，Ya），当坐标由 x –> y 旋转 **θ** 度后，求该点在新坐标轴的坐标是多少。

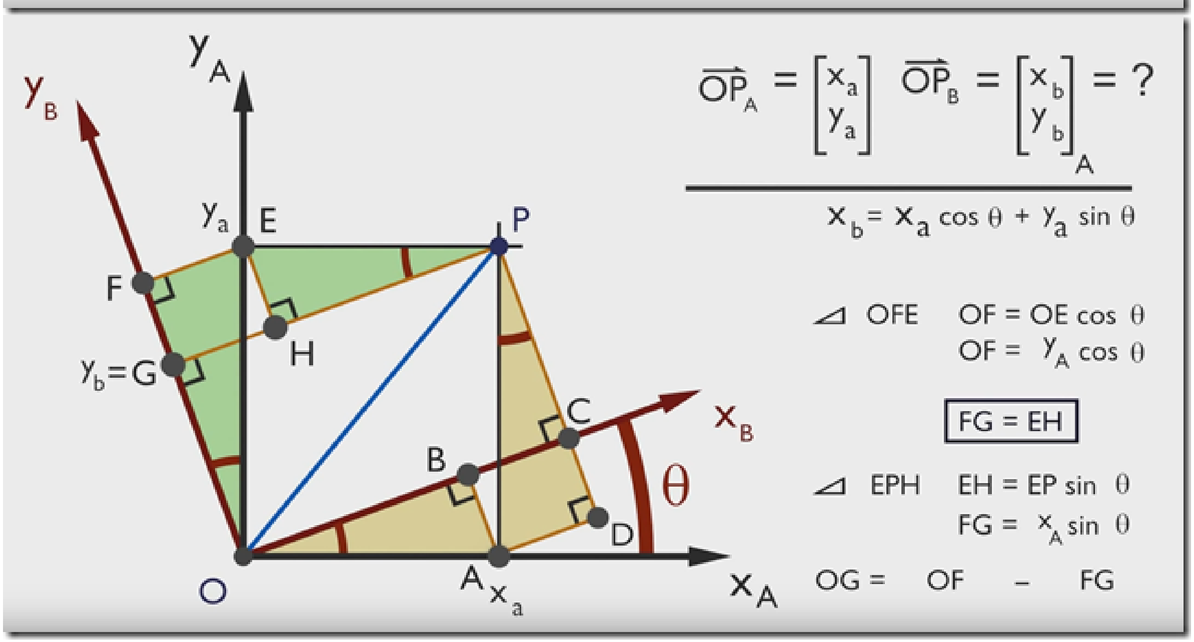




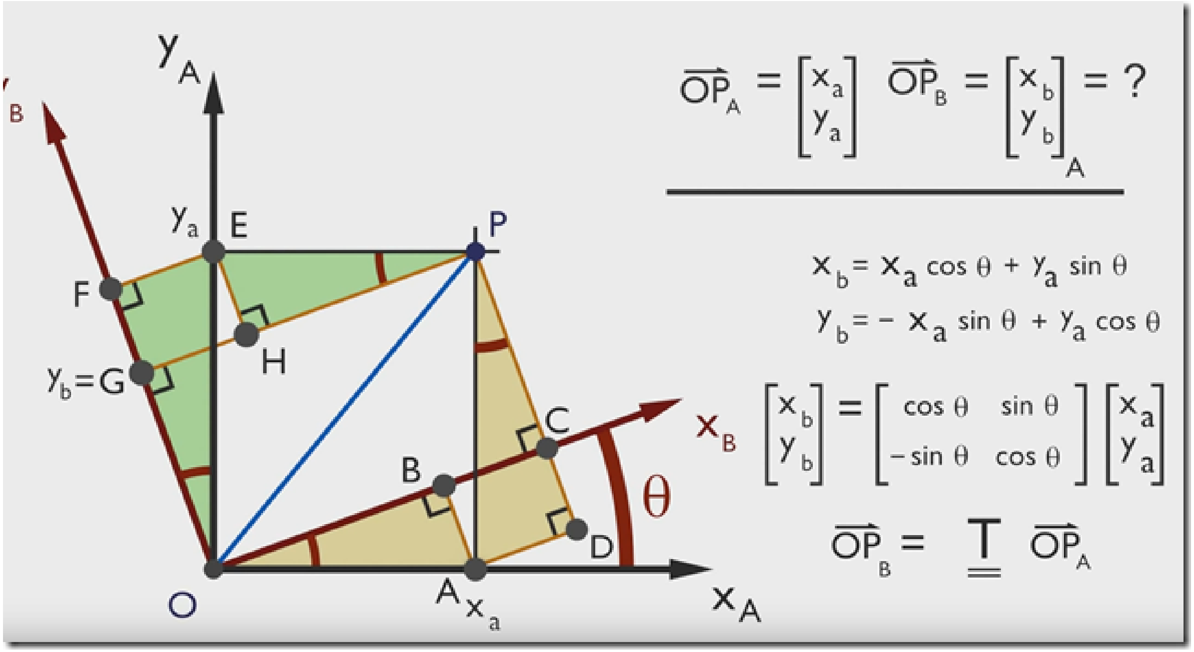
OP_A = [x_a, y_a]   OP_B = [x_b, y_b]_A = ?
⊿ OBA   OB = OA cos θ
OB = x_a cos θ
BC = AD
⊿ ADP   AD = AP sin θ
AD = y_a sin θ
OC = OB + BC
x_b = x_a cos θ + y_a sin θ



OP_A = [x_a, y_a]   OP_B = [x_b, y_b]_A = ?
⊿ OBA   OB = OA cos θ
OB = x_a cos θ
BC = AD
⊿ ADP   AD = AP sin θ
AD = y_a sin θ
OC = OB + BC
x_b = x_a cos θ + y_a sin θ



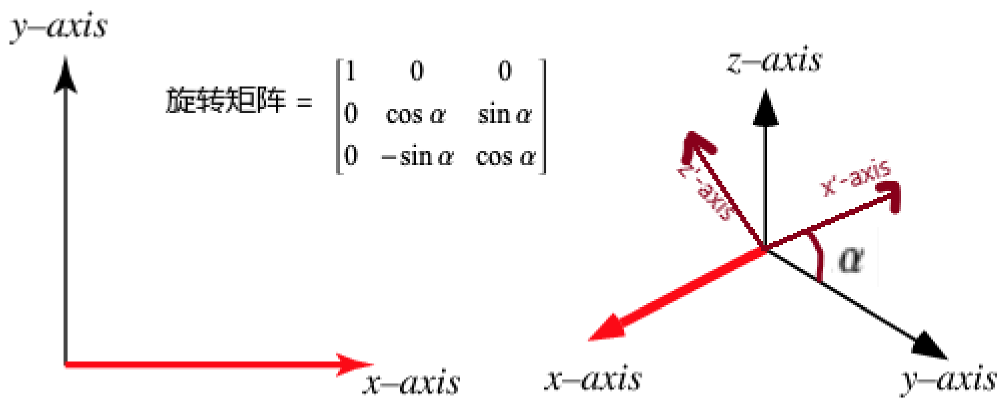
OP_A = [x_a, y_a]   OP_B = [x_b, y_b]_A = ?
x_b = x_a cos θ + y_a sin θ
⊿ OFE   OF = OE cos θ
OF = y_A cos θ
FG = EH
⊿ EPH   EH = EP sin θ
FG = x_A sin θ
OG = OF − FG



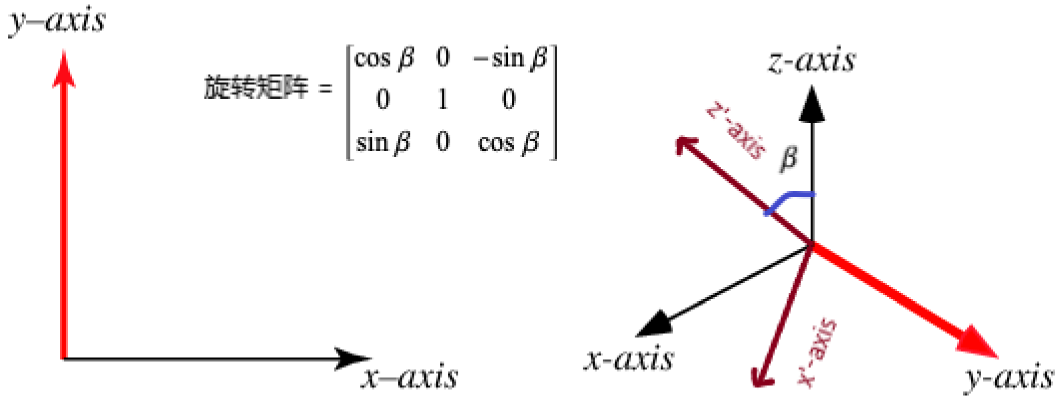
三维旋转

三维旋转，需要先搞清楚正、负方向（使用的是右手法则，在二维平面增加一维z，它的正方向朝向屏幕外）

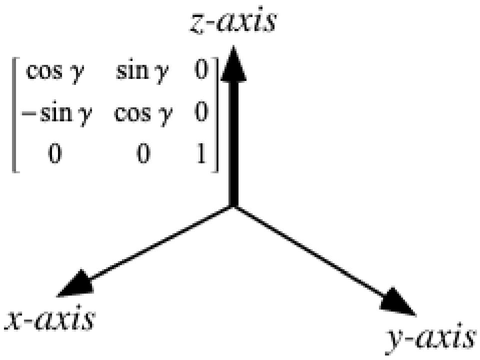
绕x轴进行旋转（在yz平面逆时针旋转）：



绕y轴进行旋转（在zx平面逆时针旋转）：



绕z轴进行旋转（在xy平面逆时针旋转）：



参考:https://mathworld.wolfram.com/RotationMatrix.html

附件B:三角公式

锐角三角函数公式

sin α=∠α的对边 / 斜边

cos α=∠α的邻边 / 斜边

tan α=∠α的对边 / ∠α的邻边

cot α=∠α的邻边 / ∠α的对边

倍角公式

Sin2A=2SinA?CosA

Cos2A=CosA^2-SinA^2=1-2SinA^2=2CosA^2-1

tan2A=（2tanA）/（1-tanA^2）

（注：SinA^2 是sinA的平方 sin2（A））

三倍角公式

sin3α=4sinα·sin(π/3+α)sin(π/3-α)

cos3α=4cosα·cos(π/3+α)cos(π/3-α)

tan3a = tan a · tan(π/3+a)· tan(π/3-a)

三倍角公式推导

sin3a

=sin(2a+a)

=sin2acosa+cos2asina

辅助角公式

Asinα+Bcosα=(A^2+B^2)^(1/2)sin(α+t)，其中

sint=B/(A^2+B^2)^(1/2)

cost=A/(A^2+B^2)^(1/2)

tant=B/A

Asinα+Bcosα=(A^2+B^2)^(1/2)cos(α-t)，tant=A/B

降幂公式

sin^2(α)=(1-cos(2α))/2=versin(2α)/2

cos^2(α)=(1+cos(2α))/2=covers(2α)/2

tan^2(α)=(1-cos(2α))/(1+cos(2α))

半角公式

$\tan(A/2)=(1-\cos A)/\sin A=\sin A/(1+\cos A)$;

$\cot(A/2)=\sin A/(1-\cos A)=(1+\cos A)/\sin A$.

$\sin^2(a/2)=(1-\cos(a))/2$

$\cos^2(a/2)=(1+\cos(a))/2$

$\tan(a/2)=(1-\cos(a))/\sin(a)=\sin(a)/(1+\cos(a))$

三角和

$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$

$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma-\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma$

$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma)/(1-\tan\alpha\cdot\tan\beta-\tan\beta\cdot\tan\gamma-\tan\gamma\cdot\tan\alpha)$

两角和差

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\cdot\tan\beta)$

$\tan(\alpha-\beta)=(\tan\alpha-\tan\beta)/(1+\tan\alpha\cdot\tan\beta)$

和差化积

$\sin\theta+\sin\varphi = 2 \sin[(\theta+\varphi)/2] \cos[(\theta-\varphi)/2]$

$\sin\theta-\sin\varphi = 2 \cos[(\theta+\varphi)/2] \sin[(\theta-\varphi)/2]$

$\cos\theta+\cos\varphi = 2 \cos[(\theta+\varphi)/2] \cos[(\theta-\varphi)/2]$

$\cos\theta-\cos\varphi = -2 \sin[(\theta+\varphi)/2] \sin[(\theta-\varphi)/2]$

$\tan A+\tan B=\sin(A+B)/\cos A\cos B=\tan(A+B)(1-\tan A\tan B)$

$\tan A-\tan B=\sin(A-B)/\cos A\cos B=\tan(A-B)(1+\tan A\tan B)$

积化和差

$\sin\alpha\sin\beta = [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] /2$

$\cos\alpha\cos\beta = [\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]/2$

$\sin\alpha\cos\beta = [\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]/2$

$\cos\alpha\sin\beta = [\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]/2$

诱导公式

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-a) = -\tan\alpha$

$\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi/2-\alpha) = \sin\alpha$

$\sin(\pi/2+\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi/2+\alpha) = -\sin\alpha$

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan A = \sin A/\cos A$

$\tan(\pi/2+\alpha) = -\cot\alpha$

$\tan(\pi/2-\alpha) = \cot\alpha$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$

推导公式

tanα+cotα=2/sin2α

tanα-cotα=-2cot2α

1+cos2α=2cos^2α

1-cos2α=2sin^2α

1+sinα=(sinα/2+cosα/2)^2

=2sina(1-sin²a)+(1-2sin²a)sina

=3sina-4sin³a

cos3a

=cos(2a+a)

=cos2acosa-sin2asina

=(2cos²a-1)cosa-2(1-sin²a)cosa

=4cos³a-3cosa

sin3a=3sina-4sin³a

=4sina(3/4-sin²a)

=4sina[(√3/2)²-sin²a]

=4sina(sin²60°-sin²a)

=4sina(sin60°+sina)(sin60°-sina)

=4sina*2sin[(60+a)/2]cos[(60°-a)/2]*2sin[(60°-a)/2]cos[(60°-a)/2]

=4sinasin(60°+a)sin(60°-a)

cos3a=4cos³a-3cosa

=4cosa(cos²a-3/4)

=4cosa[cos²a-(√3/2)²]

=4cosa(cos²a-cos²30°)

=4cosa(cosa+cos30°)(cosa-cos30°)

=4cosa*2cos[(a+30°)/2]cos[(a-30°)/2]*{-2sin[(a+30°)/2]sin[(a-30°)/2]}

=-4cosasin(a+30°)sin(a-30°)

=-4cosasin[90°-(60°-a)]sin[-90°+(60°+a)]

=-4cosacos(60°-a)[-cos(60°+a)]

=4cosacos(60°-a)cos(60°+a)

上述两式相比可得

tan3a=tanatan(60°-a)tan(60°+a)

诱导公式记背诀窍：奇变偶不变，符号看象限

万能公式

$\sin\alpha=2\tan(\alpha/2)/[1+\tan^{\wedge}(\alpha/2)]$

$\cos\alpha=[1-\tan^{\wedge}(\alpha/2)]/1+\tan^{\wedge}(\alpha/2)]$

$\tan\alpha=2\tan(\alpha/2)/[1-\tan^{\wedge}(\alpha/2)]$

其它公式

(1)$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$

(2)$1+(\tan\alpha)^2=(\sec\alpha)^2$

(3)$1+(\cot\alpha)^2=(\csc\alpha)^2$

证明下面两式,只需将一式,左右同除$(\sin\alpha)^2$,第二个除$(\cos\alpha)^2$即可

(4)对于任意非直角三角形,总有

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

证:

$A+B=\pi-C$

$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$(\tan A+\tan B)/(1-\tan A\tan B)=(\tan\pi-\tan C)/(1+\tan\pi\tan C)$

整理可得

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

得证

同样可以得证,当$x+y+z=n\pi(n\in Z)$时,该关系式也成立

由$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$可得出以下结论

(5)$\cot A\cot B+\cot A\cot C+\cot B\cot C=1$

(6)$\cot(A/2)+\cot(B/2)+\cot(C/2)=\cot(A/2)\cot(B/2)\cot(C/2)$

(7)$(\cos A)^2+(\cos B)^2+(\cos C)^2=1-2\cos A\cos B\cos C$

(8)$(\sin A)^2+(\sin B)^2+(\sin C)^2=2+2\cos A\cos B\cos C$

(9)$\sin\alpha+\sin(\alpha+2\pi/n)+\sin(\alpha+2\pi*2/n)+\sin(\alpha+2\pi*3/n)+\ldots\ldots+\sin[\alpha+2\pi*(n-1)/n]=0$

$\cos\alpha+\cos(\alpha+2\pi/n)+\cos(\alpha+2\pi*2/n)+\cos(\alpha+2\pi*3/n)+\ldots\ldots+\cos[\alpha+2\pi*(n-1)/n]=0$ 以及

$\sin^2(\alpha)+\sin^2(\alpha-2\pi/3)+\sin^2(\alpha+2\pi/3)=3/2$

$\tan A\tan B\tan(A+B)+\tan A+\tan B-\tan(A+B)=0$