ANÁLISIS MODAL DE VIBRACIONES EN EDIFICIO DE 3 PISOS AUTOVALORES, FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS PROPIOS

Aplicación de Álgebra Lineal en Ingeniería Estructural

Universidad Nacional del Altiplano Puno
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática
ronaldincacutipamunuico@gmail.com

1. INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

1.1 Contexto del Problema

El análisis dinámico de estructuras es fundamental para garantizar la seguridad ante cargas sísmicas, viento y otras excitaciones dinámicas. Los **autovalores** y **autovectores** del sistema matricial (K, M) representan:

- **Frecuencias naturales**: frecuencias propias de vibración libre
- **Modos propios**: formas características de deformación
- Base para análisis sísmico y de resonancia

1.2 Importancia Práctica

¿Por qué es crítico?

- **Resonancia**: Si frecuencia de excitación externa coincide con frecuencia natural ⇒ amplificación catastrófica
- **Código sísmico**: normativas requieren análisis modal
- **Diseño optimizado**: identificar pisos débiles (soft-story)

1.3 Objetivos Específicos

1. Desarrollar modelo matemático de edificio de 3 pisos
2. Calcular frecuencias naturales y periodos de vibración
3. Determinar y visualizar modos propios
4. Interpretar resultados desde perspectiva ingenieril
5. Proporcionar código reproducible en R
6. Establecer recomendaciones de diseño

2. FUNDAMENTO TEÓRICO DETALLADO

2.1 Ecuación de Movimiento

Para un sistema de múltiples grados de libertad sin amortiguamiento:

$$\boxed{M\ddot{u}(t) + Ku(t) = F(t)}$$

donde:

- $u(t) \in \mathbb{R}^n$: vector de desplazamientos
- $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$: matriz de masa (simétrica, definida positiva)
- $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$: matriz de rigidez (simétrica, semidefinida positiva)
- $F(t)$: vector de fuerzas externas

2.2 Vibración Libre (Análisis Modal)

En vibración libre: $F(t) = 0$. Buscamos solución armónica:

$$u(t) = \phi e^{i\omega t}$$

Sustituyendo:

$$-\omega^2 M\phi e^{i\omega t} + K\phi e^{i\omega t} = 0$$

Simplificando:

$$\boxed{K\phi = \omega^2 M\phi}$$

Problema de autovalores generalizado

2.3 Propiedades Matemáticas

Ortogonalidad de modos:

$$\phi_i^T M\phi_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$
$$\phi_i^T K\phi_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Normalización modal:

$$\phi_i^T M\phi_i = 1 \quad \text{(masa modal unitaria)}$$

2.4 Parámetros Modales

Para cada modo i:

- **Pulsación natural**: $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ [rad/s]
- **Frecuencia natural**: $f_i = \dfrac{\omega_i}{2\pi}$ [Hz]
- **Periodo natural**: $T_i = \dfrac{1}{f_i} = \dfrac{2\pi}{\omega_i}$ [s]
- **Forma modal**: ϕ_i (autovector)

3. MODELO ESTRUCTURAL DETALLADO

3.1 Idealización del Sistema

Hipótesis de modelado:

1. Masas concentradas (lumped masses) en cada piso
2. Vigas infinitamente rígidas (toda flexibilidad en columnas)
3. Movimiento horizontal puro (sin rotaciones)
4. Comportamiento lineal elástico
5. Sin amortiguamiento (análisis modal clásico)

3.2 Parámetros del Modelo

Masas por piso:

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1000 \text{ kg}$$

Rigideces de entrepiso:

$$k_1 = 20\,000 \text{ N/m} \quad \text{(piso 1 - más rígido)}$$
$$k_2 = 18\,000 \text{ N/m} \quad \text{(piso 2)}$$
$$k_3 = 15\,000 \text{ N/m} \quad \text{(piso 3 - menos rígido)}$$

Nota: La disminución de rigidez con la altura es realista (menor carga axial en columnas superiores).

3.3 Construcción de Matrices

Matriz de masa (diagonal):

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez (ensamblada):

Relación fuerza-desplazamiento:

$$F_i = k_i(u_i - u_{i-1}) - k_{i+1}(u_{i+1} - u_i)$$

Matriz resultante:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo valores:

$$K = \begin{pmatrix} 38\,000 & -18\,000 & 0 \\ -18\,000 & 33\,000 & -15\,000 \\ 0 & -15\,000 & 15\,000 \end{pmatrix}$$

3.4 Verificaciones Preliminares

Determinante de K:

$$\det(K) = 0$$

⇒ Matriz singular (modo de cuerpo rígido teórico, pero aquí restringido)

Simetría:

$$K = K^T, \quad M = M^T$$

4. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA PROPIO

4.1 Formulación Estándar

Convertir problema generalizado a estándar:

$$K\phi = \omega^2 M\phi \quad \Rightarrow \quad M^{-1}K\phi = \omega^2\phi$$

Como M es diagonal:

$$M^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}\right)$$

$$A = M^{-1}K = \begin{pmatrix} 38{,}0 & -18{,}0 & 0 \\ -18{,}0 & 33{,}0 & -15{,}0 \\ 0 & -15{,}0 & 15{,}0 \end{pmatrix}$$

4.2 Método de Solución

Algoritmo QR o descomposición de Schur

1. Calcular $\det(A - \lambda I) = 0$ ⇒ polinomio característico
2. Resolver para $\lambda_i = \omega_i^2$
3. Para cada λ_i: $(A - \lambda_i I)\phi_i = 0$
4. Normalizar autovectores

4.3 Código R Completo y Comentado

```r
# ============================================
# Anlisis Modal - Edificio 3 Pisos
# ============================================

# --- 1. DEFINICIN DE PARMETROS ---
m <- c(1000, 1000, 1000) # Masas (kg)
k1 <- 20000; k2 <- 18000; k3 <- 15000 # Rigideces (N/m)

# --- 2. CONSTRUCCIN DE MATRICES ---
M <- diag(m) # Matriz de masa diagonal

# Matriz de rigidez (ensamblaje por entrepiso)
K <- matrix(c(
  k1+k2, -k2, 0,
  -k2, k2+k3, -k3,
  0, -k3, k3
), nrow=3, byrow=TRUE)

cat("Matriz de Masa M:\n")
print(M)
cat("\nMatriz de Rigidez K:\n")
print(K)

# --- 3. PROBLEMA DE AUTOVALORES ---
A <- solve(M) %*% K # M^(-1) * K
eigen_result <- eigen(A)

omega2 <- eigen_result$values # Autovalores = omega^2
phi_raw <- eigen_result$vectors # Autovectores (modos)

# --- 4. ORDENAR POR FRECUENCIA CRECIENTE ---
idx <- order(omega2)
omega2 <- omega2[idx]
phi_raw <- phi_raw[, idx]

# --- 5. CALCULAR PARMETROS MODALES ---
omega <- sqrt(omega2) # Pulsacin (rad/s)
freq <- omega / (2*pi) # Frecuencia (Hz)
periodo <- 1 / freq # Periodo (s)

# --- 6. NORMALIZACIN DE MODOS ---
# Normalizar: mximo valor absoluto = 1
# Forzar primer componente positivo
phi_norm <- phi_raw
for(i in 1:ncol(phi_raw)) {
  col <- phi_raw[,i]
  col <- col / max(abs(col)) # Normalizar
  if(col[1] < 0) col <- -col # Forzar signo
  phi_norm[,i] <- col
}

# --- 7. PRESENTACIN DE RESULTADOS ---
cat("\n=== PARMETROS MODALES ===\n")
resultados <- data.frame(
  Modo = 1:3,
  Omega2 = round(omega2, 4),
  Omega = round(omega, 4),
  Freq_Hz = round(freq, 4),
  Periodo_s = round(periodo, 4)
)
print(resultados)

cat("\n=== MODOS PROPIOS NORMALIZADOS ===\n")
colnames(phi_norm) <- paste0("Modo_", 1:3)
rownames(phi_norm) <- paste0("Piso_", 1:3)
print(round(phi_norm, 3))

# --- 8. VERIFICACIN DE ORTOGONALIDAD ---
cat("\n=== VERIFICACIN: phi^T * M * phi ===\n")
ortog_M <- t(phi_norm) %*% M %*% phi_norm
print(round(ortog_M, 2))

cat("\n=== VERIFICACIN: phi^T * K * phi ===\n")
ortog_K <- t(phi_norm) %*% K %*% phi_norm
print(round(ortog_K, 2))

# --- 9. GRFICA DE MODOS (opcional) ---
# Requiere library(ggplot2) o base plot
# plot(phi_norm[,1], type="o", main="Modo 1")
```

4.4 Resultados Numéricos

Autovalores y frecuencias:

Modo	ω^2	ω	f (Hz)
1	3.6810	1.9186	**0.3054**
2	26.0889	5.1077	0.8129
3	56.2300	7.4987	1.1935

Periodos naturales:

- $T_1 = 3{,}274$ s (modo fundamental)
- $T_2 = 1{,}230$ s
- $T_3 = 0{,}838$ s

4.5 Matriz de Modos Normalizados

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0{,}396 & 1{,}000 & 0{,}987 \\ 0{,}755 & 0{,}662 & -1{,}000 \\ 1{,}000 & -0{,}895 & 0{,}364 \end{pmatrix}$$

Cada columna = modo; cada fila = piso

5. INTERPRETACIÓN DE MODOS

5.1 Modo 1 (Fundamental) - $f_1 = 0{,}305$ Hz

Características:

- Todos pisos en fase (mismo sentido)
- Amplitud crece hacia arriba: $0{,}396 < 0{,}755 < 1{,}000$
- Mayor energía cinética
- **Modo más importante para sismo**

Interpretación física: El edificio completo se balancea como péndulo invertido. Piso superior tiene máxima amplitud.

5.2 Modo 2 - $f_2 = 0{,}813$ Hz

Características:

- Piso 1: movimiento positivo (1.000)
- Piso 2: movimiento positivo reducido (0.662)
- Piso 3: movimiento negativo (-0.895)
- **Cambio de fase entre pisos 2 y 3**

Punto de inflexión: Entre pisos 2 y 3

5.3 Modo 3 - $f_3 = 1{,}194$ Hz

Características:

- Patrón: (+) → (-) → (+)
- **Dos cambios de fase**
- Mayor frecuencia = más "local"
- Menor participación en respuesta sísmica

5.4 Forma Modal y Desplazamientos

Para el modo i, el desplazamiento del piso j:

$$u_j(t) = \phi_{ji} \cdot q_i(t)$$

donde $q_i(t)$ es la coordenada modal generalizada.

6. ANÁLISIS DINÁMICO AVANZADO

6.1 Participación Modal

Factor de participación modal:

$$\Gamma_i = \frac{\phi_i^T M\mathbf{r}}{\phi_i^T M\phi_i}$$

donde $\mathbf{r} = [1, 1, 1]^T$ (vector de influencia sísmica).

Masa modal efectiva:

$$M_i^{eff} = \frac{(\phi_i^T M\mathbf{r})^2}{\phi_i^T M\phi_i}$$

Normalmente: $M_1^{eff} > M_2^{eff} > M_3^{eff}$

6.2 Respuesta Sísmica

Aceleración espectral: Si terremoto tiene aceleración $\ddot{u}_g(t)$, respuesta modal:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = -\Gamma_i\ddot{u}_g(t)$$

Desplazamiento máximo (combinación CQC):

$$u_{max} \approx \sqrt{\sum_i\sum_j \rho_{ij} u_i^{max} u_j^{max}}$$

donde ρ_{ij} es coeficiente de correlación modal.

6.3 Análisis de Sensibilidad

¿Qué pasa si k_1 disminuye 30 %?

- f_1 disminuye $\sim 10 - 15\,\%$
- Periodo T_1 aumenta
- Mayor riesgo de resonancia con sismos de periodo largo
- Piso blando (soft-story)

¿Qué pasa si se añade masa al piso 3?

- f_i disminuyen (masa efectiva mayor)
- Forma modal cambia: piso 3 menos amplitud relativa

7. COMPARACIÓN CON CÓDIGOS SÍSMICOS

7.1 Código E.030 (Perú)

Periodo empírico para edificios:

$$T \approx C_t \cdot h_n^{0{,}75}$$

donde h_n = altura total.

Para edificio de concreto de ∼9-10 m:

$$T_{\text{empírico}\approx 0{,}35\text{ s}}$$

Nuestro $T_1 = 3{,}27$ s es muy alto ⇒ estructura muy flexible.

7.2 Espectro de Diseño

Zona sísmica 3 (Lima, Puno):

- Periodo de esquina: $T_C \approx 0{,}6$ s
- Periodo largo: $T_L \approx 2{,}0$ s

Si $T_1 = 3{,}27$ s $> T_L$ ⇒ zona de desplazamientos constantes.

Aceleración espectral reducida pero **desplazamientos grandes**.

7.3 Recomendaciones Normativas

1. **Combinar al menos 3 modos** (o hasta 90 % masa participante)
2. Verificar **derivas de entrepiso**: $\Delta_i/h_i < 0{,}007$
3. Evitar **irregularidades en rigidez** (factor $< 0{,}7$)
4. Considerar efectos P-Δ si estructura muy flexible

8. MEDIDAS DE MITIGACIÓN

8.1 Incremento de Rigidez

Opciones:

- Añadir muros de corte (shear walls)
- Reforzar columnas con encamisado
- Arriostramientos diagonales (bracings)

Efecto esperado:

$$k_i \uparrow \;\Rightarrow\; \omega_i \uparrow \;\Rightarrow\; T_i \downarrow$$

8.2 Amortiguamiento

Sistemas pasivos:

- Amortiguadores viscosos
- Amortiguadores de fluido viscoso (FVD)
- Disipadores metálicos (ADAS, TADAS)

Factor de amortiguamiento típico:

- Sin control: $\xi = 2 - 5\%$
- Con disipadores: $\xi = 10 - 20\%$

8.3 Control Activo

Sistemas avanzados:

- Aisladores de base (base isolation)
- Amortiguadores de masa sintonizada (TMD)
- Control activo con actuadores

Ventaja: Reducción de aceleración y desplazamiento simultánea.

9. VALIDACIÓN Y VERIFICACIÓN

9.1 Chequeos Matemáticos

1. Ortogonalidad respecto a M:

$$\Phi^T M \Phi = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

2. Ortogonalidad respecto a K:

$$\Phi^T K \Phi = \text{diag}(\omega_1^2\mu_1, \omega_2^2\mu_2, \omega_3^2\mu_3)$$

3. Suma de masas modales:

$$\sum_{i=1}^{3} M_i^{eff} = M_{total} = 3000 \text{ kg}$$

9.2 Comparación con Software

Programas de verificación:

- SAP2000, ETABS (CSI)
- ANSYS, ABAQUS (FEM)
- OpenSees (código abierto)

Tolerancia aceptable: $< 1\%$ en frecuencias

9.3 Pruebas Experimentales

Medición en laboratorio:

- Prueba de vibración ambiental (AVT)
- Excitador de masas (shaker test)
- Acelerómetros en cada piso

Identificación de parámetros:

- Técnica FFT (transformada de Fourier)
- Método de decremento logarítmico
- Análisis de funciones de transferencia

10. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

10.1 Conclusiones Principales

1. El edificio presenta **periodo fundamental muy largo** ($T_1 = 3{,}27$ s), indicando estructura muy flexible.
2. La frecuencia fundamental baja (0.305 Hz) implica riesgo de resonancia con excitaciones de baja frecuencia.
3. Los modos superiores muestran deformaciones locales importantes para diseño detallado.
4. Se requiere **reforzamiento estructural** para cumplir códigos sísmicos.
5. El método de autovalores es **eficiente y preciso** para análisis preliminar.

10.2 Recomendaciones de Diseño

Corto plazo:

- Evaluación estructural detallada
- Modelado 3D con masa distribuida
- Inclusión de amortiguamiento ($\xi = 5\%$)

Mediano plazo:

- Reforzar columnas de piso 1 (eliminar soft-story)
- Instalar disipadores de energía
- Verificar derivas de entrepiso

Largo plazo:

- Monitoreo sísmico continuo
- Actualización de modelo con datos reales
- Plan de mantenimiento preventivo

10.3 Extensiones Futuras

- Incluir **acoplamiento torsional** (excentricidades)
- Modelar **no-linealidad** (plasticidad de materiales)
- Análisis **tiempo-historia** con acelerogramas reales
- Optimización de **ubicación de disipadores**
- Análisis de **confiabilidad estructural**

11. REFERENCIAS Y RECURSOS

11.1 Bibliografía Fundamental

1. **Chopra, A. K.** (2017). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. 5th Ed. Pearson.
2. **Clough, R. W. & Penzien, J.** (2003). *Dynamics of Structures*. 3rd Ed. Computers & Structures, Inc.
3. **Paz, M. & Kim, Y. H.** (2019). *Structural Dynamics: Theory and Computation*. 6th Ed. Springer.
4. **Craig, R. R.** (2011). *Mechanics of Materials*. 3rd Ed. Wiley.
5. **Reglamento Nacional de Edificaciones E.030** (2018). Diseño Sismorresistente. SENCICO, Perú.

11.2 Software Recomendado

Código abierto:

- R (análisis estadístico y matricial)
- Python + NumPy/SciPy
- Octave/MATLAB
- OpenSees (análisis estructural)

Software comercial:

- SAP2000, ETABS (CSI)
- ANSYS Mechanical
- ABAQUS
- STAAD.Pro

11.3 Recursos en Línea

- `earthquake.usgs.gov` – Base de datos sísmicos
- `opensees.berkeley.edu` – OpenSees
- `peer.berkeley.edu` – Ground motion database
- `cran.r-project.org` – Repositorio R

12. ANEXOS TÉCNICOS

12.1 Derivación Detallada

Paso 1: Ecuación de equilibrio dinámico

Aplicando segunda ley de Newton al piso i:

$$m_i \ddot{u}_i = F_i^{ext} + F_i^{resorte}$$

Paso 2: Fuerzas de resorte

Del resorte inferior: $+k_i(u_{i-1} - u_i)$

Del resorte superior: $-k_{i+1}(u_i - u_{i+1})$

Paso 3: Sistema matricial

Ensamblando para todos los pisos:

$$M\ddot{u} + Ku = F$$

12.2 Ejemplo Numérico Paso a Paso

Calcular $M^{-1}K$:

$$M^{-1} = \frac{1}{1000}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}K = \frac{1}{1000}\begin{pmatrix} 38000 & -18000 & 0 \\ -18000 & 33000 & -15000 \\ 0 & -15000 & 15000 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico:

$$\det(M^{-1}K - \lambda I) = 0$$

Expandiendo:

$$\lambda^3 - 86\lambda^2 + 1863\lambda - 9990 = 0$$

Raíces (autovalores):

$$\lambda_1 = 3{,}681, \quad \lambda_2 = 26{,}089, \quad \lambda_3 = 56{,}230$$

12.3 Tabla Comparativa de Métodos

Método	Precisión	Costo
Analítico	Exacto	Bajo
Elementos Finitos	Alta	Alto
Diferencias Finitas	Media	Medio
Rayleigh-Ritz	Alta	Medio

13. GLOSARIO TÉCNICO

- **Amortiguamiento**: Disipación de energía en vibración
- **Autovalor**: Escalar λ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$
- **Autovector**: Vector propio asociado a autovalor
- **CQC**: Complete Quadratic Combination
- **Deriva**: Desplazamiento relativo entre pisos
- **Modo propio**: Forma característica de vibración
- **Pulsación**: Frecuencia angular ($\omega = 2\pi f$)
- **Resonancia**: Amplificación por coincidencia de frecuencias
- **Rigidez**: Resistencia a la deformación (k)
- **Soft-story**: Piso con rigidez menor que otros
- **SRSS**: Square Root of Sum of Squares

14. PREGUNTAS FRECUENTES

14.1 ¿Por qué 3 modos para 3 pisos?

Un sistema de n grados de libertad tiene exactamente n modos propios (autovalores). Cada piso = 1 GDL.

14.2 ¿Qué pasa si hay amortiguamiento?

El problema se vuelve **complejo**:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$$

Frecuencias amortiguadas:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

14.3 ¿Cuántos modos considerar en diseño?

Según normativa: suficientes para capturar $\geq 90\%$ de masa participante. Usualmente 3-4 modos.

14.4 ¿Cómo verificar el modelo?

1. Ortogonalidad: $\Phi^T M \Phi$ debe ser diagonal
2. Suma de masas modales = masa total
3. Comparar con fórmulas empíricas
4. Validar con mediciones experimentales

15. CONTACTO Y COLABORACIÓN

15.1 Autor

Ronald Wilder Incacutipa Muñuico

Email: `ronaldincacutipamunuico@gmail.com`

Institución: Universidad Nacional del Altiplano Puno

Facultad: Ingeniería Estadística e Informática

15.2 Agradecimientos

Se agradece a:

- Facultad de Ingeniería Estadística e Informática - UNAP
- ING Torres Cruz Fred
- Comunidad R y código abierto

15.3 Licencia y Uso

15.4 Citar este Trabajo

Incacutipa Muñuico, R. W. (2024). Análisis Modal de Vibraciones en Edificio de 3 Pisos: Autovalores, Frecuencias Naturales y Modos Propios. Universidad Nacional del Altiplano Puno.