Eigenvalores y Eigenvectores

Programación Numérica – UNA Puno

2025

Ejercicio 1

Encuentra los eigenvalores y eigenvectores de:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Como la matriz es diagonal, los eigenvalores son los elementos de la diagonal:

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 7$$

Eigenvectores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Calcula eigenvalores y eigenvectores de:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 1: Determinante

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = -1$$

Eigenvector para $\lambda_1 = 3$

Resolver:

$$(B - 3I)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación: $-2x + 2y = 0 \Rightarrow y = x$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvector para $\lambda_2 = -1$

$$(B + I)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación: $2x + 2y = 0 \Rightarrow y = -x$.

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

Para la función:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

a) Hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Eigenvalores

$$\det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(4-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$$

Ambos positivos.

c) Clasificación

Como $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$:

$$(0, 0) \text{ es un } \textbf{mínimo local}.$$

Ejercicio 4

Determinar si $(0, 0)$ es máximo o mínimo para:

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2$$

Hessiana

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Eigenvalores:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -4$$

Ambos negativos.

$$\Rightarrow (0, 0) \text{ es un } \textbf{máximo local}.$$

Ejercicio 5

Verifica que

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es eigenvector de

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Cv = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Buscamos λ tal que:

$$Cv = \lambda v$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Comparando:

$$\lambda = 4, \qquad \lambda = 6$$

Como deben coincidir, tomamos:

$$\lambda = 4$$

Entonces:

$$Cv = 4v$$

$$\Rightarrow v \text{ es un eigenvector con eigenvalor } 4.$$