Ejercicios

Alumno: Ronald Wilder Incacutipa Muñuico
Docente: Ing. Torres Cruz Fred

Programación Numérica – FINESI
Universidad Nacional del Altiplano

Ejercicio 8.1: Análisis de Crecimiento de Usuarios

Enunciado:
Una startup de tecnología registra el número acumulado de usuarios activos mensuales:

Mes	1	2	3	4	5	6	7
Usuarios (miles)	10	15	23	34	48	65	85

Tareas:

1. Calcular la tasa de crecimiento de usuarios (usuarios nuevos por mes) en el mes 4 usando diferencia centrada.
2. Calcular la tasa de crecimiento en el mes 1 usando diferencia hacia adelante.
3. Calcular la tasa de crecimiento en el mes 7 usando diferencia hacia atrás.
4. Calcular la segunda derivada (aceleración del crecimiento) y determinar en qué mes fue mayor.
5. Interpretar el comportamiento del crecimiento de la startup.

1. Tasa de crecimiento en el mes 4 (diferencia centrada)

Usamos la fórmula:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Con $h = 1$:

$$f'(4) = \frac{f(5) - f(3)}{2} = \frac{48 - 23}{2} = 12{,}5$$

Resultado: La tasa de crecimiento en el mes 4 es de **12.5 mil usuarios/mes**.

2. Tasa de crecimiento en el mes 1 (diferencia hacia adelante)

$$f'(1) \approx \frac{f(2) - f(1)}{h} = 15 - 10 = 5$$

Resultado: La tasa de crecimiento inicial es de **5 mil usuarios/mes**.

3. Tasa de crecimiento en el mes 7 (diferencia hacia atrás)

$$f'(7) \approx \frac{f(7) - f(6)}{h} = 85 - 65 = 20$$

Resultado: La tasa de crecimiento en el último mes es de **20 mil usuarios/mes**.

4. Aceleración del crecimiento (segunda derivada)

Usamos:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)}{h^2}$$

con $h = 1$.

Mes	$f(x-1)$	$f(x)$	$f(x+1)$	$f''(x)$
2	10	15	23	3
3	15	23	34	3
4	23	34	48	3
5	34	48	65	3
6	48	65	85	5

Resultado: La mayor aceleración se presenta en el **mes 6**.

5. Interpretación

El crecimiento de usuarios es cada vez mayor:

- Al inicio crece lentamente (5 mil/mes).
- En el mes 4 crece más rápido (12.5 mil/mes).
- En el mes 7 el crecimiento alcanza 20 mil/mes.

Además, la segunda derivada es positiva y creciente, lo que indica que la startup está en una etapa de **crecimiento acelerado**.

Código en R

```r
# Ejercicio 8.1 - Analisis de Crecimiento de Usuarios

# Datos
mes <- 1:7
usuarios <- c(10, 15, 23, 34, 48, 65, 85)
h <- 1

# 1. Diferencia centrada en mes 4
fprima_4 <- (usuarios[5] - usuarios[3]) / (2 * h)

# 2. Diferencia hacia adelante en mes 1
fprima_1 <- (usuarios[2] - usuarios[1]) / h

# 3. Diferencia hacia atrás en mes 7
fprima_7 <- (usuarios[7] - usuarios[6]) / h

# 4. Segunda derivada (aceleración)
f2 <- numeric(length(usuarios))
for (i in 2:(length(usuarios)-1)) {
  f2[i] <- (usuarios[i+1] - 2*usuarios[i] + usuarios[i-1]) / (h^2)
}

# Resultados
cat("1) f'(4) =", fprima_4, "mil usuarios/mes\n")
cat("2) f'(1) =", fprima_1, "mil usuarios/mes\n")
cat("3) f'(7) =", fprima_7, "mil usuarios/mes\n")
cat("4) Aceleración (segunda derivada):\n")
print(data.frame(Mes = mes, Aceleracion = f2))
cat("Mayor aceleración en el mes", mes[which.max(f2)], "\n")

# Gráfico
plot(mes, usuarios, type="o", col="blue", pch=16,
     main="Crecimiento de Usuarios",
     xlab="Mes", ylab="Usuarios (miles)")
lines(mes, usuarios, col="blue", lwd=2)
```

Ejercicio 8.2: Optimización de Función de Pérdida

Enunciado:
Durante el entrenamiento de un modelo de Machine Learning, se registra la función de pérdida (loss) en cada época:

Época	0	10	20	30	40	50
Loss	2.45	1.82	1.35	1.08	0.95	0.89

Tareas:

1. Calcular la tasa de cambio del loss en la época 20 usando diferencia centrada con $h = 10$.
2. Calcular la segunda derivada en la época 30. ¿Qué indica sobre la convergencia?
3. Si la tasa de cambio del loss es menor que 0,01 por época, el entrenamiento puede detenerse. ¿En qué época se alcanza este criterio?
4. Estimar el loss en la época 25 usando interpolación lineal basada en las derivadas.

1. Tasa de cambio en la época 20 (diferencia centrada, $h = 10$)

Usamos la diferencia centrada:

$$f'(20) \approx \frac{f(20+10) - f(20-10)}{2h} = \frac{f(30) - f(10)}{20}.$$

Sustituyendo:

$$f'(20) \approx \frac{1{,}08 - 1{,}82}{20} = \frac{-0{,}74}{20} = -0{,}037.$$

Resultado: $-0{,}037$ (unidad: pérdida por época). Es decir, el loss disminuye en 0.037 por época alrededor de la época 20.

2. Segunda derivada en la época 30

Usamos la fórmula de segunda derivada con $h = 10$:

$$f''(30) \approx \frac{f(30+10) - 2f(30) + f(30-10)}{h^2} = \frac{f(40) - 2f(30) + f(20)}{100}.$$

Sustituyendo:

$$f''(30) = \frac{0{,}95 - 2(1{,}08) + 1{,}35}{100} = \frac{0{,}95 - 2{,}16 + 1{,}35}{100} = \frac{0{,}14}{100} = 0{,}0014.$$

Resultado: $f''(30) \approx 0{,}0014$.

Interpretación: como la segunda derivada es *positiva y pequeña*, la curvatura es cóncava hacia arriba; dado que la primera derivada es negativa (el loss está disminuyendo), una segunda derivada positiva indica que la magnitud de la pendiente negativa está *disminuyendo* — es decir, la reducción del loss se está **ralentizando** (convergencia que se desacelera hacia un mínimo).

3. ¿Cuándo se alcanza el criterio $|f'| < 0{,}01$?

Calculamos derivadas aproximadas (paso $h = 10$). Para extremos usamos adelante/atrás y para puntos interiores usamos centrada:

$$\begin{aligned}
f'(0) &\approx \frac{f(10) - f(0)}{10} = \frac{1{,}82 - 2{,}45}{10} = -0{,}063,\\
f'(10) &\approx \frac{f(20) - f(0)}{20} = \frac{1{,}35 - 2{,}45}{20} = -0{,}055,\\
f'(20) &\approx -0{,}037 \quad \text{(ya calculado)},\\
f'(30) &\approx \frac{f(40) - f(20)}{20} = \frac{0{,}95 - 1{,}35}{20} = -0{,}02,\\
f'(40) &\approx \frac{f(50) - f(30)}{20} = \frac{0{,}89 - 1{,}08}{20} = -0{,}0095,\\
f'(50) &\approx \frac{f(50) - f(40)}{10} = \frac{0{,}89 - 0{,}95}{10} = -0{,}006.
\end{aligned}$$

El primer momento en que $|f'| < 0{,}01$ ocurre en la **época 40** (valor aproximado $-0{,}0095$). **Conclusión:** según el criterio dado, el entrenamiento puede detenerse a partir de la **época 40**.

4. Estimación del loss en la época 25 (interpolación lineal basada en la derivada)

Usando linealización alrededor de la época 20 (Taylor de primer orden):

$$f(25) \approx f(20) + f'(20) \cdot (25 - 20).$$

Sustituyendo $f(20) = 1{,}35$ y $f'(20) = -0{,}037$:

$$f(25) \approx 1{,}35 + (-0{,}037) \cdot 5 = 1{,}35 - 0{,}185 = 1{,}165.$$

Para comparación, la interpolación lineal directa entre los valores en 20 y 30 (sin usar derivadas) daría:

$$f(25) \approx \frac{f(20) + f(30)}{2} = \frac{1{,}35 + 1{,}08}{2} = 1{,}215.$$

Ambas estimaciones son razonables; la *linealización por derivada* refleja la pendiente local en 20 y produce $\approx 1{,}165$, mientras que la interpolación directa entre puntos adyacentes (20–30) da $\approx 1{,}215$.

Código en R

```
# Ejercicio 8.2 - Optimizacion de Loss
```

```r
epoca <- c(0,10,20,30,40,50)
loss  <- c(2.45, 1.82, 1.35, 1.08, 0.95, 0.89)
h <- 10

# 1) Derivada centrada en 20
fprime_20 <- (loss[which(epoca==30)] - loss[which(epoca==10)]) / (2*h)
# 2) Segunda derivada en 30
f2_30 <- (loss[which(epoca==40)] - 2*loss[which(epoca==30)] + loss[which(epoca==20)]) / (h^2)

# 3) Derivadas en todos los puntos (adelante/centrada/atras)
fprime <- numeric(length(loss))
# adelante para epoca 0
fprime[1] <- (loss[2] - loss[1]) / h
# centradas para interiores
for(i in 2:(length(loss)-1)) {
  fprime[i] <- (loss[i+1] - loss[i-1]) / (2*h)
}
# atras para epoca final
fprime[length(loss)] <- (loss[length(loss)] - loss[length(loss)-1]) / h

# Encontrar primera epoca con |f'| < 0.01
ep_stop <- epoca[which(abs(fprime) < 0.01)[1]]

# 4) Estimacion en epoca 25 por linealizacion en 20
f25_via_deriv <- loss[which(epoca==20)] + fprime_20 * (25 - 20)
# Interpolacion simple entre 20 y 30
f25_linear <- (loss[which(epoca==20)] + loss[which(epoca==30)]) / 2

# Resultados
cat("f'(20) =", fprime_20, "loss/época\n")
cat("f''(30) =", f2_30, "\n")
cat("Derivadas por época:\n"); print(data.frame(Epoca=epoca, dLoss=fprime))
cat("Primera época con |f'|<0.01:", ep_stop, "\n")
cat("Estimación f(25) via derivada:", f25_via_deriv, "\n")
cat("Estimación f(25) lineal entre 20 y 30:", f25_linear, "\n")
```

Observaciones finales: la pérdida disminuye pero con pendiente cada vez menor; la segunda derivada positiva en 30 sugiere que la disminución del loss se está desacelerando, y el criterio de parada propuesto se cumple en la época 40.

Ejercicio 8.3: Análisis de Series Temporales de Ventas

Enunciado:
Una empresa de e-commerce registra sus ventas diarias (en miles de dólares) durante una semana de campaña:

Día	Lun	Mar	Mié	Jue	Vie	Sáb	Dom
Ventas ($k)	45	52	61	58	73	89	95

Tareas:

1. Calcula la velocidad de crecimiento de ventas (derivada) para cada día usando diferencias finitas apropiadas.
2. Identifica el día con mayor aceleración de ventas (segunda derivada positiva máxima).
3. El jueves hubo una caída en la tendencia. Calcula la magnitud de esta desaceleración.
4. Si la tendencia del domingo se mantiene, ¿cuántas ventas esperarías el lunes siguiente? (usa extrapolación lineal con la derivada).

1. Derivadas (velocidad de crecimiento) por día

Usamos $h = 1$ día. Para el primer día (lunes) usamos diferencia hacia adelante; para los interiores usamos diferencia centrada; para el último día (domingo) usamos diferencia hacia atrás.

$$\begin{aligned}
f'(Lun) &\approx f(2) - f(1) = 52 - 45 = 7 \text{ (\$k/día)} \\
f'(Mar) &\approx \frac{f(3) - f(1)}{2} = \frac{61 - 45}{2} = 8 \\
f'(Mi) &\approx \frac{f(4) - f(2)}{2} = \frac{58 - 52}{2} = 3 \\
f'(Jue) &\approx \frac{f(5) - f(3)}{2} = \frac{73 - 61}{2} = 6 \\
f'(Vie) &\approx \frac{f(6) - f(4)}{2} = \frac{89 - 58}{2} = 15{,}5 \\
f'(Sb) &\approx \frac{f(7) - f(5)}{2} = \frac{95 - 73}{2} = 11 \\
f'(Dom) &\approx f(7) - f(6) = 95 - 89 = 6
\end{aligned}$$

Tabla resumida:

Día	Lun	Mar	Mié	Jue	Vie	Sáb	Dom
f' ($k/día)	7	8	3	6	15.5	11	6

2. Segunda derivada (aceleración) y día de mayor aceleración

La segunda derivada en los puntos interiores (Mar a Sáb) se aproxima por:

$$f''(x) \approx f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$$

Cálculos:

$$\begin{aligned}
f''(Mar) &= 61 - 2(52) + 45 = 2 \\
f''(Mi) &= 58 - 2(61) + 52 = -12 \\
f''(Jue) &= 73 - 2(58) + 61 = 18 \\
f''(Vie) &= 89 - 2(73) + 58 = 1 \\
f''(Sb) &= 95 - 2(89) + 73 = -10
\end{aligned}$$

Tabla resumida:

Día	Mar	Mié	Jue	Vie	Sáb
f'' (\$k/día^2)	2	-12	18	1	-10

Conclusión: La mayor aceleración positiva ocurre el **jueves** (valor $f''(Jue) = 18$), es decir, la subida desde el jueves hacia el viernes es la que muestra el mayor aumento en la pendiente.

3. Magnitud de la caída (desaceleración) detectada el jueves

- Caída directa en el valor: de miércoles a jueves hubo una disminución de

$$f(Jue) - f(Mi) = 58 - 61 = -3 \quad \text{(es decir, una caída de 3 \$k).}$$

- En términos de desaceleración local, la segunda derivada negativa en el miércoles $f''(Mi) = -12$ refleja una *desaceleración* (curvatura hacia abajo) alrededor del miércoles–jueves. La magnitud absoluta de esa desaceleración es **12** (\$k/día^2).

Por tanto, se puede reportar la caída como:

- **Cambio directo (valor):** -3 \$k entre Mié y Jue.
- **Magnitud de desaceleración (según f''):** 12 \$k/día^2 (valor absoluto de $f''(Mi)$).

4. Extrapolación lineal para el lunes siguiente

Usamos la derivada en el domingo para la extrapolación lineal:

$$f(\text{Lun}_{\text{siguiente}}) \approx f(Dom) + f'(Dom) \cdot 1 = 95 + 6 = 101 \ (\$k)$$

Estimación: esperaríamos aproximadamente **101** ($k) de ventas el lunes siguiente si la tendencia local del domingo se mantiene.

Código en R

```r
# Ejercicio 8.3 - Analisis de Ventas Semanales

dias <- c("Lun","Mar","Mie","Jue","Vie","Sab","Dom")
ventas <- c(45, 52, 61, 58, 73, 89, 95)
h <- 1

# Derivadas (velocidades)
fprime <- numeric(length(ventas))
# Adelante para Lunes
fprime[1] <- ventas[2] - ventas[1]
# Centradas para interiores
for(i in 2:(length(ventas)-1)) {
  fprime[i] <- (ventas[i+1] - ventas[i-1]) / (2*h)
}
# Atras para Domingo
fprime[length(ventas)] <- ventas[length(ventas)] - ventas[length(ventas)-1]

# Segunda derivada (interiores)
f2 <- rep(NA, length(ventas))
for(i in 2:(length(ventas)-1)) {
  f2[i] <- ventas[i+1] - 2*ventas[i] + ventas[i-1]
}

# Resultados
print(data.frame(Dia = dias, Ventas = ventas, Derivada = fprime, Aceleracion = f2))

# Caida Mié->Jue
caida_valor <- ventas[4] - ventas[3]  # Jue - Mie
caida_abs <- abs(caida_valor)

# Extrapolacion Lun siguiente (usando derivada en Domingo)
f_lun_sig <- ventas[7] + fprime[7]

cat("Caida valor Mie->Jue:", caida_valor, " (", caida_abs, "k$ )\n")
cat("Magnitud desaceleracion (|f''(Mie)|):", abs(f2[3]), "\n")
cat("Estimacion Lun siguiente:", f_lun_sig, "k$\n")
```

Observaciones: los resultados muestran que aunque hubo una disminución puntual en el valor entre miércoles y jueves (3 $k), la mayor aceleración positiva aparece en el jueves al comparar la pendiente hacia el viernes (fuerte subida el viernes). La extrapolación lineal usada para predecir el lunes siguiente asume que la tasa de cambio observada el domingo se mantiene.

Ejercicio 8.4: Gradiente de Función de Activación

Enunciado:
En redes neuronales, se requiere calcular el gradiente de la función sigmoide

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

en varios puntos para backpropagation. No se dispone de la derivada analítica programada, pero se proporcionan valores evaluados:

x	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
$\sigma(x)$	0.0474	0.1192	0.2689	0.5000	0.7311	0.8808	0.9526

Tareas:

1. Calcula $\sigma'(0)$ usando diferencia centrada con $h = 1$.
2. Calcula $\sigma'(-2)$ y $\sigma'(2)$ usando diferencias centradas.
3. Compara los resultados numéricos con la derivada analítica $\sigma'(x) = \sigma(x)(1 - \sigma(x))$.
4. ¿Qué tamaño de h recomendarías para este cálculo? Justifica.
5. ¿Por qué la derivada es simétrica alrededor de $x = 0$?

1. Derivada en $x = 0$ (centrada, $h = 1$)

Fórmula centrada:

$$\sigma'(0) \approx \frac{\sigma(0+1) - \sigma(0-1)}{2h} = \frac{\sigma(1) - \sigma(-1)}{2}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\sigma'(0) \approx \frac{0{,}7311 - 0{,}2689}{2} = \frac{0{,}4622}{2} = 0{,}2311.$$

Derivada analítica en 0:

$$\sigma'(0) = \sigma(0)\big(1 - \sigma(0)\big) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Error numérico: $0{,}2311 - 0{,}25 = -0{,}0189$ (aprox. $-0{,}0189$, el valor numérico es ligeramente menor).

2. Derivadas en $x = -2$ y $x = 2$ (centradas, $h = 1$)

Cálculo centrado (mismo $h = 1$):

$$\sigma'(-2) \approx \frac{\sigma(-1) - \sigma(-3)}{2} = \frac{0{,}2689 - 0{,}0474}{2} = \frac{0{,}2215}{2} = 0{,}11075,$$
$$\sigma'(2) \approx \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{2} = \frac{0{,}9526 - 0{,}7311}{2} = \frac{0{,}2215}{2} = 0{,}11075.$$

Derivadas analíticas:

$$\sigma'(-2)_{\text{ana}} = \sigma(-2)\big(1 - \sigma(-2)\big) = 0{,}1192 \cdot 0{,}8808 \approx 0{,}10499,$$
$$\sigma'(2)_{\text{ana}} = \sigma(2)\big(1 - \sigma(2)\big) = 0{,}8808 \cdot 0{,}1192 \approx 0{,}10499.$$

Errores numéricos: para ambos puntos

$$0{,}11075 - 0{,}10499 \approx 0{,}00576.$$

3. Comparación y comentarios

- La aproximación centrada con $h = 1$ produce valores razonablemente cercanos a la derivada analítica, pero con errores del orden de 10^{-2} a 10^{-3} en estos puntos.
- La diferencia centrada suele ser **más precisa** que adelante/atrás para el mismo tamaño de h, dado que cancela términos impares del error de truncamiento.
- Si se dispone de la fórmula $\sigma(x)$ (aunque no se tenga la derivada programada), es preferible evaluar $\sigma(x \pm h)$ con h pequeño y usar la fórmula centrada para mejorar la precisión.

4. Recomendación sobre el tamaño de h

- Si puedes evaluar $\sigma(x)$ arbitrariamente (es decir, no estás limitado a la tabla), recomiendo usar *diferencia centrada* con un h pequeño en el rango típico para centradas: $h \approx 10^{-5}$ a 10^{-8}. Esto reduce el error de truncamiento (de orden $O(h^2)$) manteniendo control sobre el error de redondeo.
- Si solo tienes valores tabulados en incrementos de 1 (como en la tabla dada), no puedes elegir $h < 1$ sin interpolar o evaluar la función; en ese caso $h = 1$ es la opción natural pero menos precisa.
- Practicamente: prueba varios h (por ejemplo $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$) y observa el comportamiento del error; elige el h que minimice el error total (truncamiento + redondeo).

5. Simetría de la derivada alrededor de $x = 0$

La sigmoide satisface $\sigma(-x) = 1 - \sigma(x)$. Usando esto:

$$\sigma'(-x) = \sigma(-x)\big(1 - \sigma(-x)\big) = (1 - \sigma(x))\big(1 - (1 - \sigma(x))\big) = \sigma(x)\big(1 - \sigma(x)\big) = \sigma'(x).$$

Por tanto $\sigma'(x)$ es una función *par* (par), es decir, **simétrica** alrededor de $x = 0$. Esto explica por qué las derivadas en -2 y 2 son iguales y por qué la pendiente absoluta máxima se alcanza en $x = 0$.

Código en R

```r
# Ejercicio 8.4 - Gradiente de la sigmoide (valores tabulados)

x_vals <- c(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)
sigma <- c(0.0474, 0.1192, 0.2689, 0.5, 0.7311, 0.8808, 0.9526)
h <- 1

# índice auxiliar
idx <- function(x) which(x_vals == x)

# 1) derivada centrada en x=0
sigma_p_0 <- (sigma[idx(1)] - sigma[idx(-1)]) / (2*h)

# 2) derivadas centradas en x=-2 y x=2
sigma_p_m2 <- (sigma[idx(-1)] - sigma[idx(-3)]) / (2*h)
sigma_p_2  <- (sigma[idx(3)]  - sigma[idx(1)])  / (2*h)

# 3) derivada analítica sigma*(1-sigma)
sigma_p_ana <- sigma * (1 - sigma)

# Mostrar resultados
res <- data.frame(x = x_vals,
                  sigma = sigma,
                  deriv_num = c(NA, sigma_p_m2, NA, sigma_p_0, NA, sigma_p_2, NA),
                  deriv_ana = sigma_p_ana)
print(res)

cat(sprintf("sigma'(0) num = %.5f, ana = %.5f, error = %.5f\n",
            sigma_p_0, sigma_p_ana[idx(0)], sigma_p_0 - sigma_p_ana[idx(0)]))
cat(sprintf("sigma'(-2) num = %.5f, ana = %.5f, error = %.5f\n",
            sigma_p_m2, sigma_p_ana[idx(-2)], sigma_p_m2 - sigma_p_ana[idx(-2)]))
cat(sprintf("sigma'(2)  num = %.5f, ana = %.5f, error = %.5f\n",
            sigma_p_2, sigma_p_ana[idx(2)], sigma_p_2 - sigma_p_ana[idx(2)]))
```

Observación final: si necesitas una precisión mayor y puedes evaluar la función sigmoide (no solo leer la tabla), te preparo las mismas comparaciones con varios h (por ejemplo

$10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$) y un gráfico del error vs. h para elegir el mejor valor en la práctica. ¿Quieres que haga eso y te añada el bloque de resultados en LaTeX también?

Ejercicio 8.5: Detección de Anomalías en Métricas de Sistema

Enunciado:
Un sistema de monitoreo registra el tiempo de respuesta (en milisegundos) de una API cada hora durante un incidente:

Hora	0	1	2	3	4	5	6	7
Latencia (ms)	120	125	128	135	280	290	275	155

Tareas:

1. Calcula la primera derivada (tasa de cambio) para cada hora usando diferencias finitas apropiadas.
2. Identifica el momento del "pico de anomalía", calculando dónde la segunda derivada cambia de signo (de positiva a negativa).
3. Entre las horas 3 y 4 hay un salto brusco. Calcula la magnitud de este cambio.
4. A partir de la hora 6, el sistema comienza a recuperarse. Calcula la tasa de recuperación (derivada negativa).
5. Si defines una "anomalía" como un cambio mayor a 50 ms/hora, ¿en qué momentos se detectarían anomalías?

1. Cálculo de la primera derivada (tasa de cambio)

Usamos diferencias finitas:

$$f'(x_i) \approx \begin{cases} \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h}, & \text{adelante (inicio)} \\ \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, & \text{centrada (interior)} \\ \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h}, & \text{atrás (final)} \end{cases}$$

con $h = 1$ hora.

$$\begin{aligned}
f'(0) &= (125 - 120)/1 = 5, \\
f'(1) &= (128 - 120)/2 = 4, \\
f'(2) &= (135 - 125)/2 = 5, \\
f'(3) &= (280 - 128)/2 = 76, \\
f'(4) &= (290 - 135)/2 = 77{,}5, \\
f'(5) &= (275 - 280)/2 = -2{,}5, \\
f'(6) &= (155 - 290)/2 = -67{,}5, \\
f'(7) &= (155 - 275)/1 = -120.
\end{aligned}$$

2. Segundo derivado y pico de anomalía

Segunda derivada (aceleración de la latencia):

$$f''(x_i) \approx f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}.$$

$$\begin{aligned}
f''(2) &= 135 - 2(128) + 125 = 4, \\
f''(3) &= 280 - 2(135) + 128 = 138, \\
f''(4) &= 290 - 2(280) + 135 = -135, \\
f''(5) &= 275 - 2(290) + 280 = -25, \\
f''(6) &= 155 - 2(275) + 290 = -105.
\end{aligned}$$

El cambio de signo de $+$ a $-$ ocurre entre las horas **3 y 4**, indicando el **pico de anomalía** en la hora 4.

3. Magnitud del salto entre horas 3 y 4

$$\Delta f = f(4) - f(3) = 280 - 135 = 145 \text{ ms}.$$

El salto abrupto de **145 ms** representa una anomalía severa en la latencia.

4. Tasa de recuperación a partir de hora 6

$$f'(6) = -67{,}5 \text{ ms/hora}, \quad f'(7) = -120 \text{ ms/hora}.$$

Ambas derivadas son negativas: el sistema se está recuperando a una tasa promedio de **entre 70 y 120 ms/hora**.

5. Detección de anomalías (cambio > 50 ms/hora)

$$|f'(3)| = 76 > 50 \quad \text{(anomalía)}$$
$$|f'(4)| = 77{,}5 > 50 \quad \text{(anomalía)}$$
$$|f'(6)| = 67{,}5 > 50 \quad \text{(anomalía)}$$
$$|f'(7)| = 120 > 50 \quad \text{(anomalía fuerte)}.$$

Conclusión: anomalías detectadas en las horas 3, 4, 6 y 7. El pico principal de latencia ocurre alrededor de la hora 4, seguido de una rápida recuperación posterior.

Código en R

```r
# Ejercicio 8.5 - Detección de anomalías en métricas de sistema

hora <- 0:7
latencia <- c(120, 125, 128, 135, 280, 290, 275, 155)
h <- 1

# Derivadas primera (centrada donde posible)
n <- length(latencia)
deriv1 <- numeric(n)
for (i in 1:n) {
  if (i == 1) {
    deriv1[i] <- (latencia[i+1] - latencia[i]) / h
  } else if (i == n) {
    deriv1[i] <- (latencia[i] - latencia[i-1]) / h
  } else {
    deriv1[i] <- (latencia[i+1] - latencia[i-1]) / (2*h)
  }
}

# Segunda derivada
deriv2 <- c(NA, diff(latencia, differences=2), NA)

# Detección de anomalías (>50 ms/h)
anomal <- abs(deriv1) > 50

# Resultados
res <- data.frame(hora, latencia, deriv1, deriv2, anomal)
print(res)

# Gráfico de la latencia y sus derivadas
plot(hora, latencia, type="b", pch=19, col="blue",
     main="Latencia del sistema y detección de anomalías",
     xlab="Hora", ylab="Latencia (ms)")
abline(v=hora[anomal], col="red", lty=2)
legend("topleft", legend=c("Latencia", "Anomalías"),
```

```r
    col=c("blue", "red"), lty=c(1,2))
```

Interpretación final: la anomalía principal se identifica por un gran salto positivo seguido de una aceleración negativa. Este patrón es típico de un fallo temporal del sistema seguido por una recuperación rápida, lo que puede representar una congestión o error puntual en el servidor.

Ejercicio 8.6: Análisis de Tasa de Conversión

Enunciado:
Una campaña de marketing muestra la siguiente tasa de conversión (porcentaje) en función del gasto en publicidad (en miles de dólares):

Gasto ($k)	0	5	10	15	20	25
Conversión (%)	2.1	3.8	5.2	6.1	6.7	7.0

Tareas:

1. Calcula el ROI marginal (derivada de conversión respecto al gasto) en cada punto usando diferencias centradas.
2. ¿En qué rango de gasto el ROI marginal es mayor que 0.2 % por cada $1000 invertido?
3. La segunda derivada indica rendimientos decrecientes. Calcula la segunda derivada en $15k.
4. Con base en las derivadas, ¿recomendarías aumentar el gasto más allá de $25k? Justifica matemáticamente.

Notas sobre el método

Los puntos están igualmente espaciados con paso $h = 5$ (miles de dólares). Usaremos:

$$\text{Adelante: } f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

$$\text{Atrás: } f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_n-h)}{h},$$

$$\text{Centrada (interiores): } f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

$$\text{Segunda derivada (centrada): } f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

1. ROI marginal (derivadas)

Datos: $f(0) = 2{,}1,\ f(5) = 3{,}8,\ f(10) = 5{,}2,\ f(15) = 6{,}1,\ f(20) = 6{,}7,\ f(25) = 7{,}0;$ $h = 5$ (\$k).

$$
\begin{aligned}
f'(0) &\approx \frac{f(5) - f(0)}{5} = \frac{3{,}8 - 2{,}1}{5} = \frac{1{,}7}{5} = 0{,}34\,\%/\$k \\
f'(5) &\approx \frac{f(10) - f(0)}{2 \cdot 5} = \frac{5{,}2 - 2{,}1}{10} = 0{,}31\,\%/\$k \\
f'(10) &\approx \frac{f(15) - f(5)}{10} = \frac{6{,}1 - 3{,}8}{10} = 0{,}23\,\%/\$k \\
f'(15) &\approx \frac{f(20) - f(10)}{10} = \frac{6{,}7 - 5{,}2}{10} = 0{,}15\,\%/\$k \\
f'(20) &\approx \frac{f(25) - f(15)}{10} = \frac{7{,}0 - 6{,}1}{10} = 0{,}09\,\%/\$k \\
f'(25) &\approx \frac{f(25) - f(20)}{5} = \frac{7{,}0 - 6{,}7}{5} = \frac{0{,}3}{5} = 0{,}06\,\%/\$k
\end{aligned}
$$

(Nota: las unidades $\%/\$k$ equivalen a porcentaje de conversión ganado por cada \$1,000 invertido.)

2. Rango con ROI marginal $> 0{,}2\,\%$ por \$1,000

De los valores calculados:

$$
f'(0) = 0{,}34,\ f'(5) = 0{,}31,\ f'(10) = 0{,}23,\ f'(15) = 0{,}15,\ f'(20) = 0{,}09,\ f'(25) = 0{,}06.
$$

Por tanto el ROI marginal es mayor que $0{,}2\,\%/\$k$ para gastos en el rango **0 k\$** a **10 k\$** (incluye los puntos 0, 5 y 10).

3. Segunda derivada en \$15k

Usando la fórmula centrada con $h = 5$:

$$
f''(15) \approx \frac{f(20) - 2f(15) + f(10)}{h^2} = \frac{6{,}7 - 2(6{,}1) + 5{,}2}{25} = \frac{-0{,}3}{25} = -0{,}012\ (\,\%/\$k^2).
$$

Interpretación: $f''(15) \approx -0{,}012$ (negativo), lo que indica **rendimientos decrecientes** — la pendiente está disminuyendo al aumentar el gasto alrededor de 15k.

4. Recomendación sobre aumentar gasto más allá de \$25k

Matemáticamente:

- Las derivadas primeras muestran que el ROI marginal decrece con el gasto: de 0.34 (%/$k) en 0k a 0.06 (%/$k) en 25k.
- La segunda derivada en 15k es negativa; en general el patrón sugiere $f''(x) < 0$ en la zona alta: **rendimientos decrecientes**.
- A nivel práctico, el incremento esperado en conversión al añadir $1,000 en la zona de 25k es aproximadamente $f'(25) = 0{,}06\,\%$. Para un incremento adicional de $5k (pasar a 30k) la ganancia esperada sería $\approx 0{,}06\,\% \times 5 = 0{,}30\,\%$ de conversión, que es muy pequeño comparado al coste.

Conclusión: No se recomienda incrementar el gasto más allá de $25k *si el objetivo es maximizar conversión por dólar* (ROI marginal muy bajo y decreciente). Solo se justificaría un aumento si existen razones externas (p. ej. objetivos de cuota de mercado, saturación de audiencia, o beneficios no medidos por la tasa de conversión directa).

Código en R (para incluir en el documento)

```
# Ejercicio 8.6 - Analisis de ROI marginal

gasto <- c(0, 5, 10, 15, 20, 25)      # en miles $
conv  <- c(2.1, 3.8, 5.2, 6.1, 6.7, 7.0) # conversión en %

h <- 5  # paso (en miles $)

# Derivada primera (adelante/centrada/atras)
n <- length(gasto)
fprime <- numeric(n)
fprime[1] <- (conv[2] - conv[1]) / h          # adelante en 0
for(i in 2:(n-1)) {
  fprime[i] <- (conv[i+1] - conv[i-1]) / (2*h) # centradas
}
fprime[n] <- (conv[n] - conv[n-1]) / h        # atrás en 25

# Segunda derivada centrada (interiores)
f2 <- rep(NA, n)
for(i in 2:(n-1)) {
  f2[i] <- (conv[i+1] - 2*conv[i] + conv[i-1]) / (h^2)
}

# Imprimir tabla
print(data.frame(Gasto_k = gasto, Conversion_pct = conv,
                 ROI_marginal_pct_per_1k = round(fprime, 4),
                 SecondDeriv = round(f2, 5)))

# Rango con ROI marginal > 0.2% por 1k
gastos_buenos <- gasto[which(fprime > 0.2)]
cat("Rango con ROI marginal > 0.2%/1k: ", min(gastos_buenos), "k$ a ", max(gastos_buenos), "k
```

```r
# Segunda derivada en 15k
cat("f''(15k) ", f2[which(gasto==15)], " (% per (1k$)^2 )\n")
```

Ejercicio 8.7: Feature Engineering con Derivadas

Enunciado:
Se dispone de una señal de un sensor de temperatura medida cada segundo en un proceso industrial:

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7
Temperatura (°C)	20.1	20.3	20.8	21.5	22.6	24.2	26.1	28.5

Tareas:

1. Crear una nueva feature: velocidad de cambio de temperatura (primera derivada) en cada punto.
2. Crear otra feature: aceleración del cambio (segunda derivada).
3. Detectar momentos donde $\Delta T > 0{,}8\,°\mathrm{C}/\mathrm{s}$ (alerta de problema).
4. Normalizar las features derivadas usando min-max scaling.
5. Explicar la utilidad de estas features para un modelo de clasificación de anomalías.

Datos

$$T(t) = [20{,}1,\ 20{,}3,\ 20{,}8,\ 21{,}5,\ 22{,}6,\ 24{,}2,\ 26{,}1,\ 28{,}5], \quad \Delta t = 1\,s$$

1. Primera derivada (velocidad de cambio)

Usando diferencias centradas (y hacia adelante/atrás en los extremos):

$$T'(t_i) = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2}, \quad T'(0) = T(1) - T(0), \quad T'(7) = T(7) - T(6)$$

$$
\begin{aligned}
T'(0) &= 20{,}3 - 20{,}1 = 0{,}2 \\
T'(1) &= \frac{20{,}8 - 20{,}1}{2} = 0{,}35 \\
T'(2) &= \frac{21{,}5 - 20{,}3}{2} = 0{,}6 \\
T'(3) &= \frac{22{,}6 - 20{,}8}{2} = 0{,}9 \\
T'(4) &= \frac{24{,}2 - 21{,}5}{2} = 1{,}35 \\
T'(5) &= \frac{26{,}1 - 22{,}6}{2} = 1{,}75 \\
T'(6) &= \frac{28{,}5 - 24{,}2}{2} = 2{,}15 \\
T'(7) &= 28{,}5 - 26{,}1 = 2{,}4
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ **Velocidad:** [0,20, 0,35, 0,60, 0,90, 1,35, 1,75, 2,15, 2,40] ($°C/s$)

2. Segunda derivada (aceleración del cambio)

Usando diferencias centradas:

$$T''(t_i) = T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}$$

$$
\begin{aligned}
T''(1) &= 20{,}8 - 2(20{,}3) + 20{,}1 = 0{,}3 \\
T''(2) &= 21{,}5 - 2(20{,}8) + 20{,}3 = 0{,}2 \\
T''(3) &= 22{,}6 - 2(21{,}5) + 20{,}8 = 0{,}4 \\
T''(4) &= 24{,}2 - 2(22{,}6) + 21{,}5 = 0{,}5 \\
T''(5) &= 26{,}1 - 2(24{,}2) + 22{,}6 = 0{,}3 \\
T''(6) &= 28{,}5 - 2(26{,}1) + 24{,}2 = 0{,}5
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ **Aceleración:** [–, 0,3, 0,2, 0,4, 0,5, 0,3, 0,5, –] ($°C/s^2$)

3. Momentos de alerta (velocidad $> 0{,}8$ °C/s)

$$T'(t) > 0{,}8 \Rightarrow t = 3, 4, 5, 6, 7$$

Alerta entre 3 s y 7 s.

4. Normalización (Min-Max Scaling)

$$X_{norm} = \frac{X - X_{min}}{X_{max} - X_{min}}$$

Velocidad: $X_{min} = 0{,}20$, $X_{max} = 2{,}40$

$$T'_{norm} = \frac{T' - 0{,}2}{2{,}4 - 0{,}2} = [0{,}00,\ 0{,}07,\ 0{,}18,\ 0{,}32,\ 0{,}52,\ 0{,}70,\ 0{,}88,\ 1{,}00]$$

Aceleración: $X_{min} = 0{,}2$, $X_{max} = 0{,}5$

$$T''_{norm} = \frac{T'' - 0{,}2}{0{,}3} = [-,\ 0{,}33,\ 0{,}00,\ 0{,}67,\ 1{,}00,\ 0{,}33,\ 1{,}00,\ -]$$

5. Utilidad de las features derivadas

Las derivadas ofrecen información dinámica del proceso:

- La **primera derivada** (velocidad) captura cambios rápidos en la temperatura, reflejando aumentos o caídas súbitas que pueden indicar fallas, sobrecalentamiento o intervenciones externas.
- La **segunda derivada** (aceleración) mide cómo cambia la velocidad, detectando puntos donde el sistema empieza a descontrolarse antes de que la temperatura alcance niveles críticos.
- En un modelo de clasificación (por ejemplo, detección de anomalías), estas features permiten distinguir comportamientos normales (variaciones suaves) de anómalos (cambios abruptos o aceleraciones inusuales), mejorando la capacidad predictiva del modelo.

Código en Python

```python
import numpy as np
import pandas as pd

# Datos
t = np.arange(0, 8)
temp = np.array([20.1, 20.3, 20.8, 21.5, 22.6, 24.2, 26.1, 28.5])

# Primera derivada (diferencias centradas)
vel = np.zeros_like(temp)
vel[0] = temp[1] - temp[0]
vel[-1] = temp[-1] - temp[-2]
vel[1:-1] = (temp[2:] - temp[:-2]) / 2
```

```python
# Segunda derivada
acc = np.zeros_like(temp)
acc[1:-1] = temp[2:] - 2*temp[1:-1] + temp[:-2]

# Normalización Min-Max
vel_norm = (vel - vel.min()) / (vel.max() - vel.min())
acc_nonzero = acc[1:-1]
acc_norm = (acc_nonzero - acc_nonzero.min()) / (acc_nonzero.max() - acc_nonzero.min())

# Crear DataFrame
df = pd.DataFrame({
    'Tiempo (s)': t,
    'Temp (°C)': temp,
    'Velocidad (°C/s)': vel,
    'Aceleracion (°C/s²)': np.round(acc,2),
    'Vel_norm': np.round(vel_norm,2)
})

print(df)
print("Alerta (>0.8 °C/s):", t[vel > 0.8])
```