UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - PUNO

FACULTAD DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

Aplicación de las ecuaciones diferenciales en la evaporacion del agua

CURSO: Calculo integral y ecuaciones diferenciales

DOCENTE: Ccama Alejo Roger

INTEGRANTES:

- Incacutipa Muñuico Ronald Wilder

SEMESTRE: Tercero

GRUPO: “A”

PUNO – PERÚ

2025

Fundamentos Teóricos

1. Mecanismos Físicos de Evaporación

La evaporación es un proceso físico mediante el cual las moléculas de una sustancia líquida, en este caso agua, adquieren suficiente energía cinética para superar la fuerza nuclear fuerte , escapando así hacia la fase gaseosa. Este suceso ocurre generalmemte en la superficie del agua y está influenciado por las condiciones termodinámicas del entorno.

Entre los principales factores que regulan la evaporación se encuentran:

- La tasa de cambio de la presión de vapor entre la superficie del agua y la masa de aire que la recubre, lo cual genera un impulso difusivo.
- El intercambio de calor con el ambiente, principalmente mediante radiación solar, conducción y convección.
- La difusión molecular del vapor de agua a través de la capa límite atmosférica.
- La turbulencia del viento, que remueve el aire húmedo cerca de la superficie y facilita el escape del vapor.

Esto es mas notorio en lagos, rios, etc. Donde las condiciones climaticas son muy variadas y agresivas.

2. Ley de Dalton y Transferencia de Masa

La ley de John Dalton formulada en 1802 describe que la velocidad de evaporación, E (expresada en masa por unidad de área y tiempo), es proporcional a la diferencia entre la presión de vapor de saturación del agua y la presión parcial del vapor en el aire. Se expresa matemáticamente como:

$$E = K\left(p_s(T) - p_v\right)$$

donde:

- $p_s(T)$: Presión de vapor de saturación a una temperatura T dada.
- p_v: Presión parcial del vapor de agua en el aire circundante.
- K: Coeficiente global de transferencia de masa, dependiente de factores como el tipo de superficie, temperatura y turbulencia del aire ($\mathrm{kg/(m^2 \cdot s \cdot Pa)}$).

Esta relación permite modelar el proceso de evaporación como un flujo impulsado por un gradiente termodinámico. Cuanto mayor es la diferencia entre p_s y p_v, mayor será la tasa de evaporación.

3. Conexión con la Primera Ley de Fick

Desde el punto de vista de la física del transporte, la Primera Ley de Fick para la difusión unidimensional establece que el flujo de masa J es proporcional al gradiente de concentración:

$$J = -D\frac{\partial c}{\partial x}$$

donde:

- D: Coeficiente de difusión ($\mathrm{m^2/s}$),

- c: Concentración del vapor de agua,
- x: Dirección espacial del flujo.

Al relacionar la concentración con la presión parcial del vapor usando la Ley de Fick, se obtiene una forma equivalente a la Ley de Dalton. Entonces la evaporación puede ser tratada como un proceso difusivo, donde el gradiente de presión parcial actúa como el motor que impulsa el flujo de vapor.

4. Derivación de la Ecuación Diferencial para una Gota Esférica

Para estudiar la evaporación en sistemas simples, se analiza una gota esférica de agua de radio $r(t)$ que se evapora de manera uniforme en todas direcciones. Se asumen condiciones isotrópicas y que la densidad del agua ρ es constante.

- **Masa de la gota:**
$$m(t) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r(t)^3$$

- **El flujo de masa debido a la evaporación:**
$$\frac{dm}{dt} = -E \cdot A = -K(p_s - p_v) \cdot 4\pi r^2$$

- **Relación entre masa y radio:**
$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

Igualando ambas expresiones:

$$\rho \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = -K(p_s - p_v) \cdot 4\pi r^2$$

Cancelando términos comunes:

$$\rho \cdot \frac{dr}{dt} = -K(p_s - p_v)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{K(p_s - p_v)}{\rho} = -C$$

donde C es una constante positiva que agrupa todos los factores físicos involucrados en el proceso. Esta ecuación diferencial indica que el radio de la gota disminuye linealmente con el tiempo, una predicción que ha sido verificada experimentalmente para gotas pequeñas en condiciones ambientales estables.

Bibliografia

- Fick, A. (1855). *On liquid diffusion.*
- Dalton, J. (1802). *Experimental Essays on the Constitution of Mixed Gases.*
- Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N. (2007). *Transport Phenomena.*

Ejercicio

Se tiene una gota esférica de agua pura, con una densidad constante $\rho = 1000$ kg/m^3 y un radio inicial de $r_0 = 2.0$ mm. Esta gota se encuentra en un ambiente con condiciones constantes de evaporación, donde se ha determinado que la razón de cambio del radio está dada por:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{K\Delta p}{\rho} = -0.15 \text{ mm/min}$$

Se pide:

1. Determinar la expresión del radio $r(t)$ en función del tiempo.
2. Calcular el tiempo total necesario para que la gota se evapore completamente ($r = 0$).
3. Calcular el radio de la gota transcurridos 5 minutos.
4. Determinar la velocidad de cambio del volumen de la gota cuando su radio es de 1.0 mm.

Planteamiento de la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{dt} = -C$$

Dado que $C = 0.15$ mm/min, se tiene:

$$\frac{dr}{dt} = -0.15$$

Integración de la ecuación

$$\int dr = \int -0.15\, dt \Rightarrow r(t) = -0.15t + C_1$$

Usando la condición inicial $r(0) = r_0 = 2.0$ mm:

$$2.0 = -0.15 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 2.0$$

$$\boxed{r(t) = 2.0 - 0.15t} \quad \text{(en mm, con } t \text{ en minutos)}$$

Tiempo hasta la evaporación completa

$$0 = 2.0 - 0.15t \Rightarrow t = \frac{2.0}{0.15} = 13.33 \text{ min}$$

$$\boxed{t_{\text{evaporación}} = 13.33 \text{ min}}$$

Radio de la gota después de 5 minutos

$$r(5) = 2.0 - 0.15 \cdot 5 = 2.0 - 0.75 = 1.25 \text{ mm}$$

$$\boxed{r(5) = 1.25 \text{ mm}}$$

Esto significa que después de 5 minutos la gota conserva un radio de 1.25mm.

Tasa de cambio del volumen cuando $r = 1.0$ mm

La fórmula del volumen de una esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Derivamos con respecto al tiempo utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$r = 1.0$ mm, $\frac{dr}{dt} = -0.15$ mm/min:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(1.0)^2(-0.15) = -0.60\pi \text{ mm}^3/\text{min}$$

Aproximando:

$$\boxed{\frac{dV}{dt} \approx -1.885 \text{ mm}^3/\text{min}}$$

Esto indica que en ese instante, el volumen de la gota está disminuyendo a razón de aproximadamente 1.885 mm^3 por minuto.

Evaporación en un lago

Fundamento teórico

La evaporación en cuerpos de agua como lagos es un proceso físico que depende de factores meteorológicos y características del agua. De acuerdo con Thomann y Mueller (1987), la tasa de evaporación está relacionada principalmente con la energía solar disponible, el viento y la humedad relativa del aire.

Según Henderson-Sellers (1986), la evaporación puede ser modelada, en su forma más simple, como una tasa constante por unidad de área:

$$\frac{dV}{dt} = -kA$$

Donde:

- $V(t)$ es el volumen del lago en el tiempo t, medido en m^3,
- A es el área superficial del lago en m^2 (suponiendo constante),
- k es el coeficiente de evaporación promedio, en m/h o mm/h,
- $\frac{dV}{dt}$ representa la velocidad de pérdida de volumen por evaporación.

Este modelo es una aproximación de primer orden. Se basa en la ley de Dalton (1802), que establece que la evaporación depende de la diferencia de presión de vapor en la superficie del agua y en el aire, así como de la velocidad del viento.

Ejemplo

Consideremos un lago con las siguientes condiciones:

- Área superficial constante: $A = 20{,}000\ \mathrm{m}^2$,
- Coeficiente de evaporación promedio: $k = 0.004$ m/h,
- Volumen inicial: $V_0 = 100{,}000\ \mathrm{m}^3$.

(a) Ecuación diferencial que modela la evaporación

Usamos el modelo:

$$\frac{dV}{dt} = -kA = -0.004 \cdot 20000 = -80$$

La ecuación diferencial es:

$$\frac{dV}{dt} = -80$$

Resolviendo por integración directa:

$$\int dV = \int -80\,dt \quad \Rightarrow \quad V(t) = -80t + C$$

Aplicando la condición inicial $V(0) = 100{,}000$:

$$V(t) = -80t + 100{,}000$$

(b) ¿Cuánto disminuyó el lago en 12 horas?

$$V(12) = -80(12) + 100{,}000 = 99{,}040 \text{ m}^3$$

Por lo tanto, el volumen de agua evaporado es:

$$\Delta V = 100{,}000 - 99{,}040 = \boxed{960 \text{ m}^3}$$

Si no tenemos un k dado podemos calcularlo con la siguiente formula:

$$k = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$