

**Вопросы к экзамену по физике в группах 3530203/90001-2, 3530901/90001-6, 3530903/90001-3  
весенний семестр, 2020 г.**

1. Электрический заряд. Закон Кулона.
2. Электрическое поле: напряженность, принцип суперпозиции, поле распределенных зарядов, геометрическая интерпретация.
3. Поток вектора: определение, физический смысл.
4. Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме: формулировка и доказательство.
5. Применение теоремы Гаусса (сферическая симметрия).
6. Применение теоремы Гаусса (цилиндрическая и плоская симметрия).
7. Теорема Гаусса в локальной форме. Дивергенция. Формула Гаусса - Остроградского.
8. Дивергенция в декартовой системе координат.
9. Потенциал электростатического поля. Потенциальная энергия заряда.
10. Электрическая энергия системы зарядов.
11. Связь между напряженностью и потенциалом. Теорема единственности.
12. Циркуляция электростатического поля. Ротор.
13. Электрический диполь: потенциал, напряженность электрического поля.
14. Электрический диполь во внешнем электрическом поле.
15. Проводники в электрическом поле.
16. Электрическая емкость уединённого проводника.
17. Электрическая емкость систем проводников. Конденсаторы.
18. Энергия электрического поля.
19. Механизмы поляризации диэлектриков.
20. Вектор поляризации. Поверхностная и объемная плотности поляризационных зарядов.
21. Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектриках. Связь между векторами  $\vec{P}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ .
22. Электрический ток. Закон сохранения заряда.
23. Закон Ома (локальная форма).
24. Обобщённый закон Ома. Приближение тонкого провода.
25. Закон Джоуля – Ленца (дифференциальная и интегральная форма).
26. Магнитное поле. Сила Лоренца. Сила Ампера.
27. Магнитное поле движущегося заряда. Свойства сил магнитного взаимодействия.
28. Закон Био – Савара.
29. Контур с током во внешнем магнитном поле.
30. Теорема Гаусса и теорема о циркуляции для магнитного поля в вакууме.
31. Вычисление магнитных полей по теореме о циркуляции (провод, труба с током, безгранична проводящая плоскость).
32. Вычисление магнитных полей по теореме о циркуляции (бесконечно длинный соленоид, тороид).
33. Локальная форма теоремы о циркуляции. Формула Стокса.
34. Магнитное поле в веществе: намагничивание, молекулярные токи, ток намагничивания. Вектор намагниченности.
35. Теорема Гаусса и теорема о циркуляции магнитного поля в веществе. Связь между векторами  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{J}$ .
36. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.
37. Максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции.
38. Индуктивность. Явление самоиндукции.
39. Взаимная индуктивность. Явление взаимной индукции.
40. Энергия магнитного поля контура с током.
41. Энергия магнитного поля системы контуров. Объемная плотность и энергия магнитного поля.
42. Ток смещения.
43. Система уравнений Maxwell'a.
44. Вывод волнового уравнения  $\square \vec{E} = 0$  и  $\square \vec{B} = 0$ .
45. Анализ волнового уравнения и его решения.

**Учебная литература:**

1. Савельев И.В. «Курс общей физики». Т.2 Электричество. Магнетизм. Т.3 Атомная физика.
2. Сивухин Д.В. «Общий курс физики». Т.3 Электричество. Т.4 Оптика.
3. Леденёв А.Н. «Физика». Кн.3 Электромагнетизм. Кн.4. Колебания и волны. Оптика.
  - Иродов И.Е. «Задачи по общей физике».
  - Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы.
  - Иродов И.Е. Волновые процессы. Основные законы.

**Дополнительная литература:**

1. Мордкович Г.А. Алгебра и начало математического анализа 10 – 11 класс.
2. Новодворская Э.М., Дмитриев Э.М. Сборник задач для ВТУЗов с решениями.
3. Орир Джей. Физика. Полный курс. Примеры. Задачи и решения.

# ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Своё знакомство с физикой мы начали с раздела «Механика», где учились описывать движение макроскопических тел и выясняли причины возникновения такого движения. В следующем разделе «Термодинамика и молекулярная физика» мы заглянули внутрь тел при большом увеличении и выяснили как внутреннее (микроскопическое) устройство тела связано с происходящим с ним на макроскопическом уровне. Теперь мы обратимся к кругу явлений, обусловленных тем, что макроскопические тела состоят из заряженных частиц, которые могут взаимодействовать друг с другом.

## Электростатическое поле в вакууме

### §1. Электрический заряд. Закон Кулона. Электрическое поле

Ещё древние греки обнаружили, что при определённых условиях между телами могут возникать силы притяжения или отталкивания. Легенда гласит, что дочь Фалеса из Милета (640 – 545 гг. до н.э.) имела красивые волосы, которые она расчёсывала гребнем из янтаря (под древнегречески янтарь – *электрон*). В результате гребень приобретал способность притягивать различные лёгкие предметы. Наблюдательный Фалес обратил внимание на это явление, положив начало изучению электричества в природе. Силы притяжения или отталкивания, наблюдаемые между телами, древние греки связывали со способностью тел наэлектризоваться. Электризация – способность тел приобретать электрические заряды. Наличие электрических зарядов в составе макроскопических тел и проявляется в том, что тело начинает взаимодействовать с другими заряженными телами.

Электрическое взаимодействие заряженных тел – одно из проявлений электромагнитного взаимодействия, входящего в число фундаментальных взаимодействий в природе (см. §6 «Механика»). Электрический заряд – мера электромагнитного взаимодействия. Так же как инертная масса является мерой инертности макроскопических тел. Единица измерения электрического заряда в СИ:  $[q] = \text{Кл}$  (Кулон).

Элементарный электрический заряд – фундаментальная физическая постоянная, минимальная «порция» электрического заряда, наблюдающегося в природе у свободных долгоживущих частиц, таких как протон ( $\bar{p}$ ) и электрон ( $\bar{e}$ ), например. Согласно изменениям определений основных единиц СИ (с мая 2019 г.) элементарный заряд:

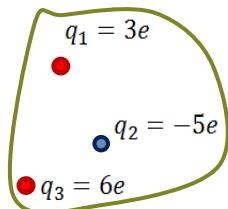
$$e = |\bar{e}| = |\bar{p}| = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ А} \cdot \text{с} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

#### Свойства электрического заряда:

1. Электрический заряд – скалярная величина. Также как масса в механике он не имеет направления.

2. В природе существуют электрические заряды двух типов, которые удобно описывать как заряды *разных знаков*. Электрический заряд может быть как положительным («плюс»), так и отрицательным – («минус»). В обычном состоянии любое тело сохраняет электро-нейтральность, т. к. содержит равное число «плюсов» и «минусов».
3. Экспериментально установлено, что при объединении электрических зарядов в систему, заряд системы оказывается равен алгебраической сумме зарядов, вошедших в неё. Т.е., также как и масса, электрический заряд – *аддитивная величина*.

$$q_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^N q_i.$$



На картинке:  $q_{\text{системы}} = 3e + (-5e) + 6e = 4e$  (алгебраическая сумма вычисляется с учётом знаков зарядов).

4. Электрический заряд *инвариантен* относительно движения (т.е. величина заряда не зависит от того, движется заряд или нет).
5. Все элементарные частицы (за исключением кварков) имеют заряд кратный элементарному заряду. Электрический заряд – *дискретная величина*.

$$q_{\text{элементарной частицы}} = ke, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Исключение составляет заряд кварков:

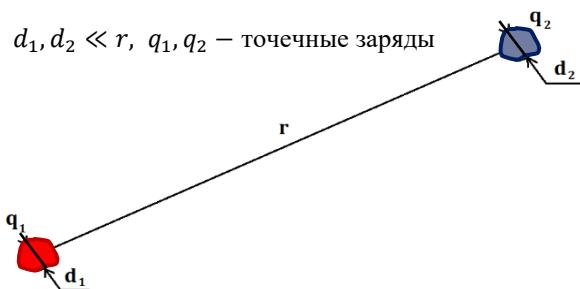
$$q_{\text{кварка}} = -\frac{e}{3}; \quad +\frac{2}{3}e$$

Дискретность заряда практически не заметна на макроскопических тела, так как в них слишком много элементарных частиц – можно считать, что заряд тела может иметь любое значение.

6. В *электрически изолированной системе*, (равносильно замкнутой системе в механике), электрический заряд сохраняется – *закон сохранения электрического заряда*:

$$q_{\text{электрически изолированной системы}} = \text{const.}$$

## Закон Кулона



Электрическое взаимодействие достаточно удалённых друг от друга тел практически не зависит от их форм и размеров, а определяется только зарядами этих тел и расстоянием между ними. В этом случае заряженные тела мы можем рассматривать как *точечные заряды*.

*Точечный заряд – заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием от этого тела до других заряженных тел.* Понятие точечного заряда в электромагнетизме эквивалентно понятию материальной точки в механике. Так же, как и в случае с материальной точкой, применимость понятия точечного заряда к одному и тому же телу может разниться от одной задачи к другой.

Закон, определяющий силу взаимодействия двух неподвижных (статических) точечных зарядов, был экспериментально установлен Шарлем Кулоном в 1785 г (примерно за 11 лет до него закон взаимодействия зарядов (закон обратных квадратов изменения электрической силы) был открыт Генри Кавендишем, однако результат не был опубликован и долгое время оставался неизвестным). К настоящему времени в исследованном диапазоне расстояний от  $(10^{-10} \div 10^9)$  м отклонений от закона Кулона не обнаружено.

Сила  $\vec{F}_{21}$ , с которой неподвижный точечный заряд  $q_1$  действует на неподвижный точечный заряд  $q_2$  равна:

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}},$$

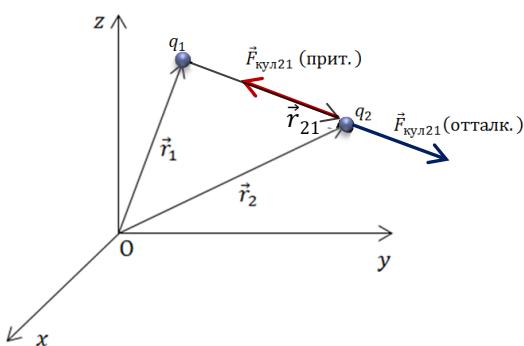
где  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  – радиус-вектор расстояния между зарядами,  $\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$  – единичный вектор, определяющий направление силы  $\vec{F}_{21}$ .

Таким образом, сила взаимодействия двух точечных зарядов прямо пропорциональна

величине каждого из зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль линии, соединяющей заряды.

Если  $q_1 q_2 > 0$  (одноименные заряды), то между зарядами действует сила отталкивания  $\vec{F}_{21} \uparrow\uparrow \vec{r}_{21}$ .

Если  $q_1 q_2 < 0$  (разноименные заряды), то между зарядами действует сила притяжения  $\vec{F}_{21} \uparrow\downarrow \vec{r}_{21}$ .



$$F_{21} = |\vec{F}_{21}| = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r_{21}^2} -$$

величина силы взаимодействия между зарядами.

$k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы физических величин: в СИ

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\Phi},$$

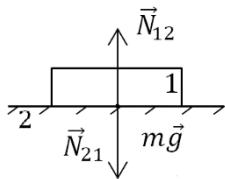
$\epsilon = 1$  (вакуум),  $\epsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{М}}$   $\approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{М}}$  – электрическая постоянная;

в СГС

$$k = 1.$$

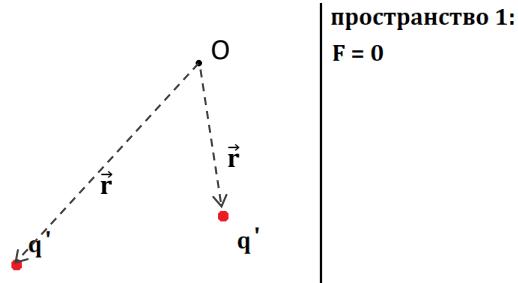
## Электрическое поле

В механике, где взаимодействие тел происходит только при их непосредственном

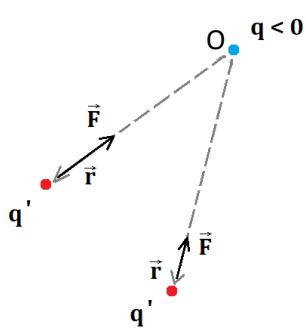


контакте, вопроса о передаче взаимодействия от одного тела к другому не существует. В электростатике же взаимодействие заряженных тел может происходить и тогда, когда тела непосредственно друг с другом не контактируют, т.е. находятся на расстоянии друг от друга. Взаимодействие между ними в этом случае осуществляется материальный посредник (переносчик) – электромагнитное поле.

Всякий заряд  $q$ , помещённый в некоторое пространство, изменяет определённым образом его свойства – создаёт в пространстве электрическое поле. Это поле проявляется себя в том, что на помещённый в какую-либо точку этого пространства другой заряд начнёт действовать



пространство 1:  
 $F = 0$



пространство 2:  
 $\vec{F} = q' \cdot \vec{E}(\vec{r})$   
существует электрическое поле, созданное зарядом  $q$

сила определённого вида.

Пусть  $q'(> 0)$  – пробный заряд, помещённый в пространство 1, в котором нет электрического поля. В этом случае никакая электрическая сила на пробный заряд не действует:  $F = 0$ . В пространстве 2 существует электрическое поле, создаваемое зарядом  $q$ , поэтому в любой точке этого пространства на  $q'$  действует сила:

$$\vec{F} = q' \vec{E}(\vec{r}).$$

$\vec{E}(\vec{r})$  – вектор напряженности электрического поля. Вектор  $\vec{E}$  описывает электрические свойства пространства 2. Он не зависит от величины пробного заряда  $q'$ , но зависит от самого заряда  $q$  и от расстояния между зарядами. В СИ напряжённость электрического поля измеряется в единицах:

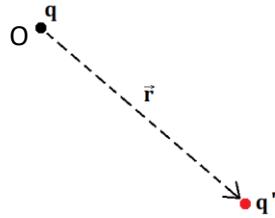
$$[E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

## Электрическое поле точечного заряда

Рассмотрим электрически изолированную систему, состоящую из точечного заряда  $q$  и пробного точечного заряда  $q'$ , с двух разных точек зрения:

- 1)  $q$  и  $q'$  точечные заряды. Тогда взаимодействие между ними подчиняется закону Кулона:

$$\vec{F} = k \frac{q'q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



1) $\vec{F} = k \frac{q' \cdot q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$
2) $\vec{F} = q' \cdot \vec{E}(r)$

- 2) заряд  $q$  создает в пространстве электрическое поле  $\vec{E}$ , а заряд  $q'$  – пробный заряд, внесенный в это пространство. Тогда на него со стороны электрического поля действует сила:

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E}(r)$$

Заряды одни и те же, пространство тоже, следовательно, от точки зрения сила не зависит:

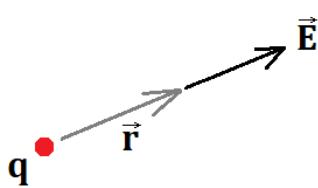
$$q' \vec{E}(r) = k \frac{q'q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

или,

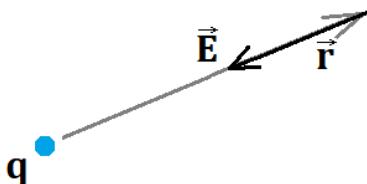
$$\vec{E}(r) = k \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

напряженность электрического поля точечного заряда.

Знак заряда, определяет направление вектора напряженности электрического поля в точке пространства:



Если заряд, создающий поле, положительный ( $q > 0$ ), то вектор напряженности электрического поля в любой точке пространства совпадает с направлением радиус-вектора, проведённым из заряда в эту точку:  $\vec{E} \uparrow\downarrow \vec{r}$ .



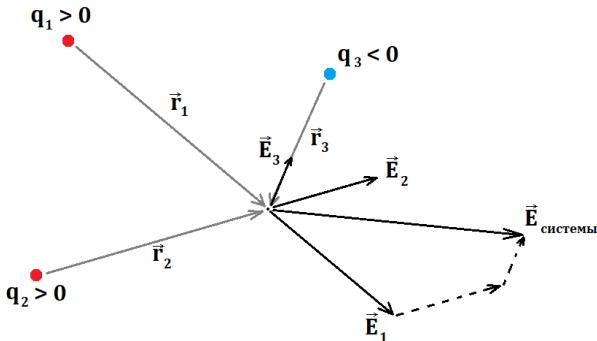
Если заряд, создающий поле, отрицательный ( $q < 0$ ), то вектор напряженности электрического поля в любой точке пространства направлен в сторону противоположную направлению радиус-вектора, проведённому из заряда в эту точку:  $\vec{E} \uparrow\downarrow \vec{r}$ .

Величина напряженности поля точечного заряда не зависит от знака заряда, а определяется только расстоянием до искомой точки:

$$E(r) = |\vec{E}(r)| = \frac{k|q|}{r^2}.$$

## Электрическое поле системы дискретных точечных зарядов

Многочисленные экспериментальные данные показывают, что для электрических полей справедлив *принцип суперпозиции: напряжённость поля системы точечных неподвижных зарядов равна векторной сумме напряжённостей полей, которые создавали бы каждый из зарядов в отдельности:*



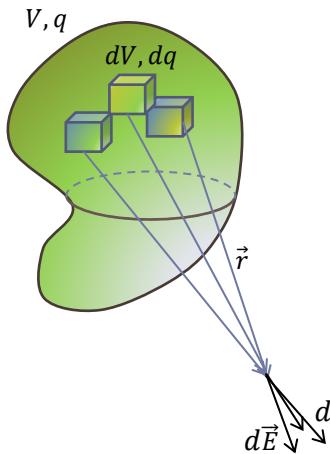
$$\vec{E}_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{k|q_i|}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}.$$

На картинке представлено поле системы трёх неподвижных точечных зарядов:

$$\vec{E}_{\text{системы}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3.$$

## Электрическое поле заряженного тела (поле распределенного заряда)

Для нахождения полей систем, образованных большим числом точечных зарядов (заряженное тело), удобно отвлечься от дискретной структур зарядов (электроны, ядра), и считать, что они «размазаны» по пространству непрерывным образом. Также, как при



рассмотрении макроскопических тел мы отвлекались от их молекулярной структуры и переходили к физически бесконечно малым объёмам, непрерывно переходящим из одного в другой и составляющим тело (см. §14 «Механика»).

Размеры физически бесконечно малого объёма должны быть много меньше расстояния до точки пространства, в которой ищется поле заряженного тела, тогда заряд, попавший внутрь этого объёма, можно будет принять за точечный заряд  $dq$ . По аналогии с полем точечного заряда электрическое поле

физически бесконечно малого объёма можно найти по формуле:

$$\vec{E}_{\text{точ.заряд}} = k \frac{q_{\text{точ.заряд}}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow d\vec{E} = \frac{k dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Электрическое поле всего заряженного тела может быть найдено согласно принципу суперпозиции как сумма полей всех физически бесконечно малых объёмов, составляющих тело. Как всегда в случае, когда складывается большое количество бесконечно малых величин, знак суммы может быть заменён на знак определённого интеграла:

$$\vec{E}_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{k|q_i|}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \int_{\text{по всему заряженному телу}} d\vec{E} = \int_{\text{по всему заряженному телу}} \frac{k dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

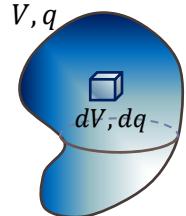
При переходе от дискретного описания заряженного тела к непрерывному, удобно использовать понятие плотности заряда как коэффициента пропорциональности между бесконечно малым объёмом и той частью заряда тела, что попала внутрь него:  $dq \sim dV$ .

Плотности заряженных тел:

 **заряд, распределенный по объему (объемный заряд)**

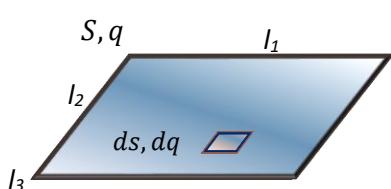
$\rho = \frac{dq}{dV}$  – объёмная плотность заряда ( $\rho = \frac{q}{V}$  – для однородного заряженного тела (однородно распределённого заряда))

$$[\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$$



$dq = \rho dV$  – заряд физически бесконечно малого объёма.

 **заряд, распределенный по поверхности (поверхностный заряд) ( $l_1, l_2 \gg l_3$ )**



$\sigma = \frac{dq}{ds}$  – поверхностная плотность заряда ( $\sigma = \frac{q}{S}$  – для однородно распределённого заряда).

$$[\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$$

 **заряд, распределенный вдоль линии (линейный заряд) ( $l_1 \gg l_2, l_3$ )**

$\lambda = \frac{dq}{dl}$  – линейная плотность заряда ( $\lambda = \frac{q}{L}$  – для однородно распределённого заряда),

$$[\lambda] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}.$$



С учётом понятия плотности заряда электрическое поле заряженного тела (распределённого заряда) может быть найдено следующим образом:

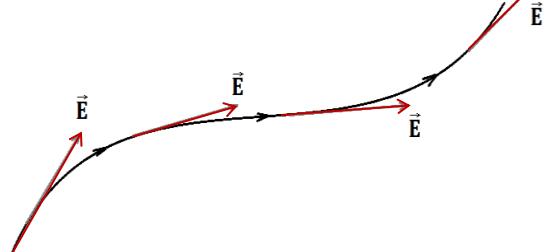
$$\vec{E} = \int \frac{k dq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \int \frac{k \rho dV}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

по всему заряженному телу
по всему объёму, в котором плотность отлична от нуля

## Представление электрического поля с помощью силовых линий

Теперь мы знаем, как найти напряжённость  $\vec{E}$  электрического поля в любой точке пространства, и можем представить электрическое поле наглядно с помощью линий напряжённости (силовых линий), или линий вектора  $\vec{E}$ .

Эти линии проводят так:



→ чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора  $\vec{E}$ , т.е. вектор  $\vec{E}$  должен быть направлен по касательной к силовой линии.

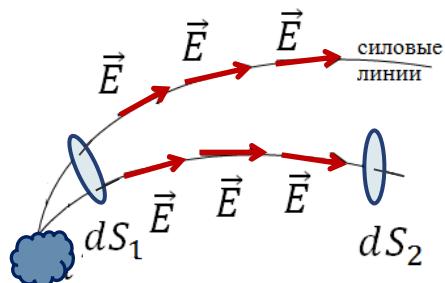
→ густота силовых линий, т.е. число линий, пронизывающих единичную площадку, перпендикулярную линиям в данном месте пространства, была пропорциональна

модулю вектора напряжённости  $\vec{E}$ .

$$\text{густота силовых линий} = \frac{\text{количество силовых линий}}{dS} \sim |\vec{E}|$$

$$E(\vec{r}_1) > E(\vec{r}_2),$$

т.к. (густота силовых линий)<sub>1</sub> > (густота силовых линий)<sub>2</sub>.

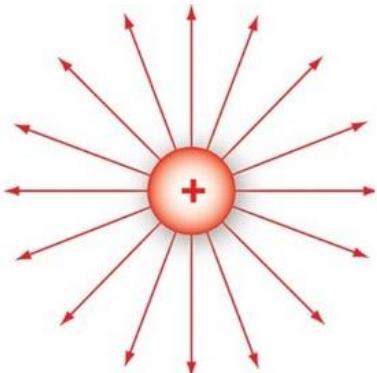


Кроме того, силовым линиям приписываются направление, совпадающее с направлением вектора  $\vec{E}$ , поэтому силовые линии всегда начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.

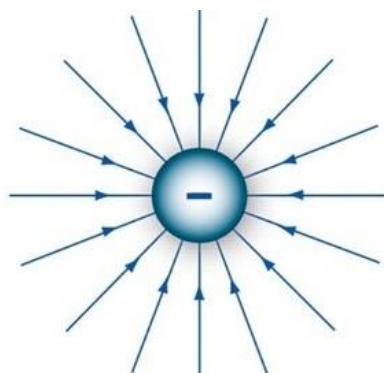
По полученной картине можно легко судить о конфигурации электрического поля данной системы зарядов (или заряженного тела) – о направлении и модуле вектора  $\vec{E}$  в разных точках поля.

Примеры: силовые линии электрического поля точечных зарядов

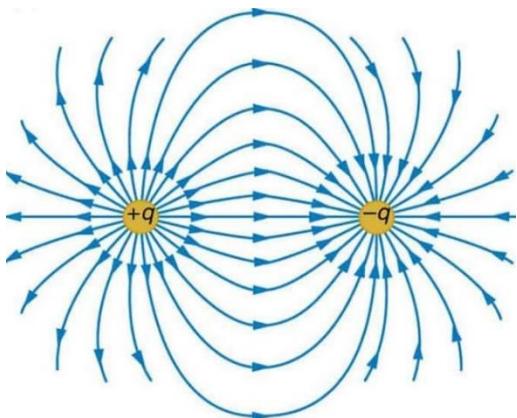
уединённый положительный точечный заряд



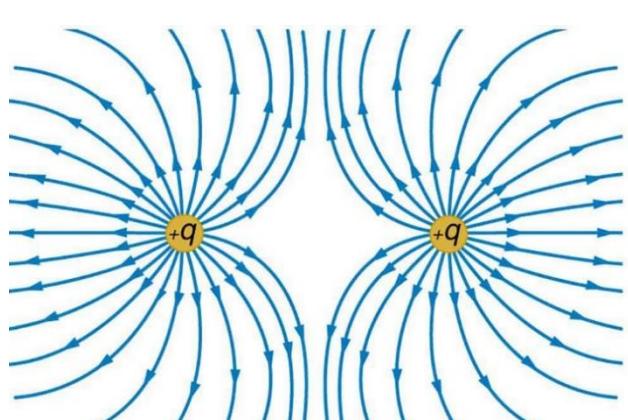
уединённый отрицательный точечный заряд



разноимённые точечные заряды



одноимённые точечные заряды

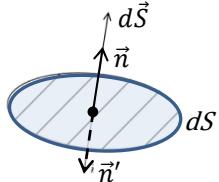


## §2. Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме

Электрическое поле, понятие которого было введено в предыдущем параграфе, обладает двумя чрезвычайно важными свойствами, знание которых позволяет глубже проникнуть в суть самого понятия поля и сформулировать его законы – *теорему Гаусса* и *теорему о циркуляции вектора  $\vec{E}$* . Эти свойства связаны с двумя математическими характеристиками векторных полей: *потоком* и *циркуляцией*. Используя эти понятия, можно описать все законы не только электричества, но и магнетизма.

Для начала введём в рассмотрение новую «старую» величину – вектор площадки. В теории электромагнетизма бесконечно малая (элементарная) площадка  $dS$  перестаёт быть скалярной величиной и становится вектором площадки  $d\vec{S}$ .

Рассмотрим малый элемент поверхности площадью  $dS$  и отложим перпендикулярный ему



вектор нормали  $\vec{n}$  – единичный вектор ( $|\vec{n}| = 1$ ). Тогда, произведение  $dS \cdot \vec{n} = d\vec{S}$  – вектор площади. Величина этого вектора равна площади элемента:  $|d\vec{S}| = dS$ .

За направление вектора малого элемента площади  $d\vec{S}$  может быть выбрано направление и единичного вектора  $\vec{n}$  и противоположное направление вектора  $\vec{n}'$ .

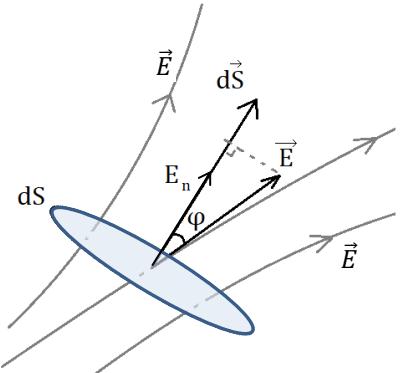
### Поток вектора

Бесконечно малым потоком  $d\Phi$  вектора  $\vec{E}$  через малый элемент площади  $d\vec{S}$  называется скалярное произведение вектора  $\vec{E}$  на вектор  $d\vec{S}$ :

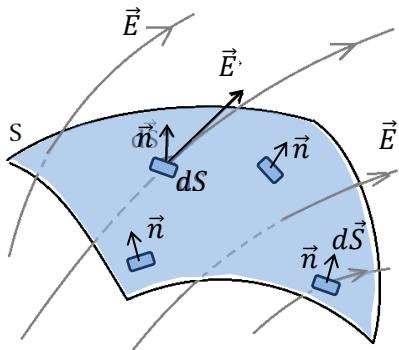
$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}| \cdot \cos(\vec{E}, d\vec{S}) = E_n \cdot dS,$$

где  $E_n = E \cdot \cos \varphi$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на вектор  $\vec{n}$ , направленный перпендикулярно к площади.

Исходя из определения, поток  $d\Phi$  – скалярная величина, зависящая только от величины электрического поля и от ориентации площадки  $d\vec{S}$  относительно силовых линий поля:  $d\Phi \leq 0$ .



В случае, когда силовые линии векторного поля пересекают поверхность конечных размеров  $S$ , в разных точках этой поверхности направления векторов  $\vec{n}$  могут отличаться, значит представить поток через эту поверхность  $\Phi_S$  как  $\vec{E} \cdot \vec{S}$  нельзя. Но можно разбить поверхность  $S$  на бесконечно малые площадки  $d\vec{S}$ , сосчитать  $d\Phi$  – потоки через эти площадки  $d\vec{S}$ . А поток через всю поверхность  $S$  найти как сумму всех малых потоков:



$$\Phi_S = \int d\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}$$

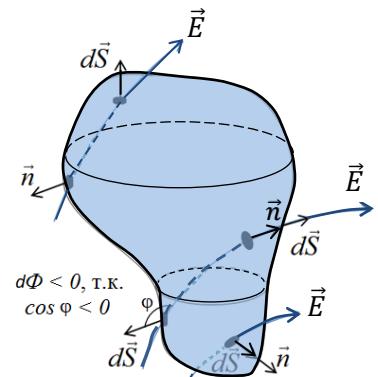
по всей  
поверхности

В теории электричества и магнетизма большое значение имеют потоки через замкнутую поверхность:

$$\Phi_S = \oint_S d\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S}$$

$\oint_S$  – обозначение интеграла по замкнутой поверхности.

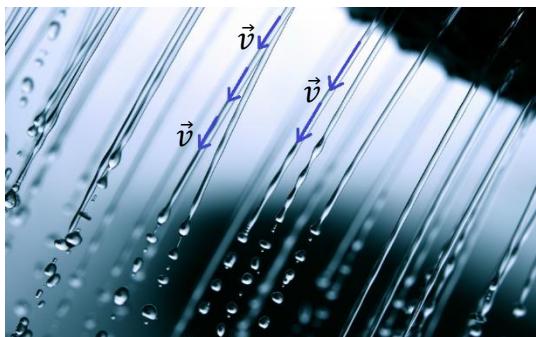
В случае замкнутых поверхностей всегда выбирается направление нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$  смотрящее наружу из замкнутой поверхности во внешнее пространство.



В §1 рассказывалось, что электрическое поле можно наглядно представить с помощью силовых линий. В частности, там говорилось о том, что величина электрического поля  $|\vec{E}| = E$  пропорциональна густоте силовых линий поля в данном месте пространства (для простоты рассуждений можно положить, что величина напряжённости поля равна густоте линий). Значит, поток  $d\Phi$  через площадку  $d\vec{S}$  – полное число силовых линий вектора напряжённости электрического поля, пересекающих площадку:

$$d\Phi \sim E \cdot dS \sim \frac{\text{число силовых линий}}{ds} \cdot dS = \text{число силовых линий, пересекающих площадку } dS.$$

Понятие потока может быть введено для любого векторного поля. Рассмотрим в качестве



примеров случаи из гидродинамики, например, сильный дождь, тогда, линии вектора скорости жидкости  $\vec{v}$  – это просто струи дождя. Ещё один пример –

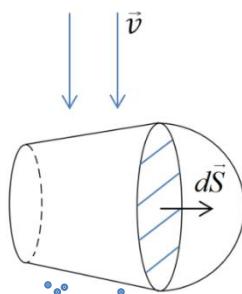
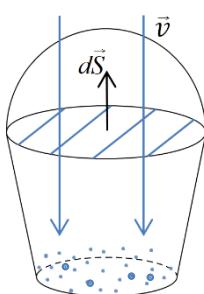


вихревые линии тока жидкости – «воронка».

Покажем, что поток зависит от ориентации площадки

в векторном поле. Рассмотрим ведро с крышкой как замкнутую поверхность, предположим, что крышка проницаема для воды, и струи дождя наполняют ведро.

Ведро будет быстро наполняться, если оно расположено, так что струи дождя параллельны его



стенкам:  $d\vec{S} \parallel \vec{v} \Rightarrow d\Phi = d\Phi_{max}$ , и вода не попадёт в ведро совсем, если оно лежит на боку:  $d\vec{S} \perp \vec{v}, d\Phi = 0$ . Как мы и говорили, поток зависит от ориентации поверхности в пространстве.

Теперь, рассмотрим случай, когда проницаемыми для воды являются и крышка, и дно ведра. Ведро расположено параллельно струям дождя.

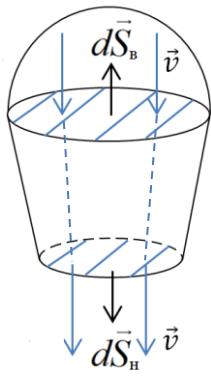
В этом случае вода в ведре не задержится. Всё что будет влияться через крышку, будет выливаться через дно.

$$d\Phi_B = \vec{v} \cdot d\vec{S}_B = v \cdot dS \cdot \cos \pi = -v \cdot dS < 0;$$

$$d\Phi_H = \vec{v} \cdot d\vec{S}_H = v \cdot dS \cdot \cos 0 = v \cdot dS > 0;$$

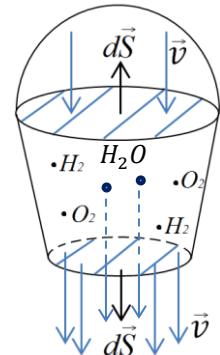
$$d\Phi_{бок} = \vec{v} \cdot d\vec{S}_{бок} = v \cdot dS \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint d\Phi = \int_{\text{по поверхности ведра}} d\Phi_B + \int_{\text{верх}} d\Phi_H + \int_{\text{боковая поверхность}} d\Phi_{бок} = \\ &= -v \int_{\text{верх}} dS + v \int_{\text{низ}} dS + 0 = 0 \end{aligned}$$



Представим, что в ведре ещё находится смесь газов: кислорода и водорода. Следовательно, теперь помимо дождевой воды в ведре будет ещё и вода, образовавшаяся в результате химической реакции:  $2H_2 + O_2 = 2H_2O$ . В этом случае воды вытекать из ведра будет больше, чем втекать  $\Phi > 0$ .

Если же ведро очень холодное, часть воды будет замерзать на его стенках и вытекать из ведра будет меньше воды, чем втекать  $\Phi < 0$ .

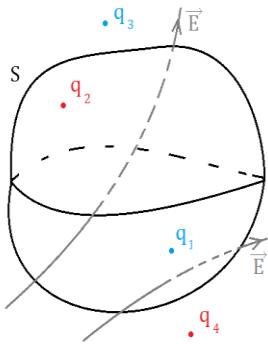


Из приведённого примера сделаем следующие выводы:

- если внутри замкнутой поверхности (ведра) есть источники (воды), то  $\Phi_{замкн.поверхн} > 0$ ;
- если есть стоки, то  $\Phi_{замкн.поверхн} < 0$ ;
- если внутри замкнутой поверхности нет ни источников, ни стоков, то  $\Phi_{замкн.поверхн} = 0$ .

Всё высказанное справедливо для любого векторного поля. Как было выяснено в §1, источниками электрического поля являются положительные заряды (на них начинаются силовые линии), а стоками поля соответственно – отрицательные заряды (на них силовые линии заканчиваются).

## Теорема Гаусса для электрического поля



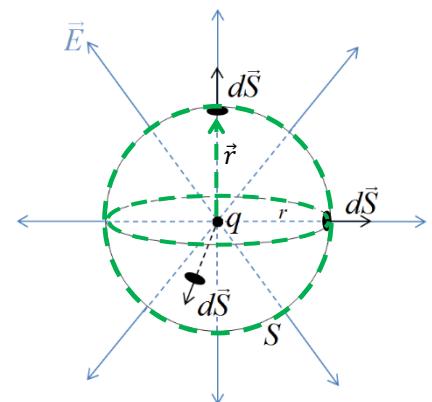
Поток вектора напряжённости электрического поля  $\vec{E}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$  обладает уникальным и замечательным свойством: он зависит только от алгебраической суммы зарядов, попавших внутрь этой поверхности, и никак не связан с зарядами вне её:  $\Phi_S \sim (q_1 + q_2)$  и не зависит от зарядов вне поверхности ( $q_3, q_4$ ).

Это свойство электрического поля и составляет суть теоремы Гаусса.

Приведём рассуждения, подтверждающие эту теорему (без строгого доказательства).

1) пусть электрическое поле  $\vec{E}$ , создано точечным зарядом  $q$ . В качестве замкнутой поверхности  $S$  рассмотрим сферу радиуса  $r$ , центр, которой совпадает с точкой пространства, в которой находится заряд.

Считаем поток:



$$\Phi_S = \oint_S d\Phi = \oint_{\text{сфера}} \vec{E} d\vec{S} =$$

Т.к. источник нашего поля  $\vec{E}$  точечный заряд, то

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = E \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

и

$$= \oint_{\text{сфера}} E \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{сфера}} E \cdot \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r} =$$

нормаль к поверхности сферы является продолжением радиус-вектора, проведённого в эту точку из центра сферы, т.е.  $\vec{r} \uparrow\downarrow d\vec{S}$ ;

$$= \oint_{\text{сфера}} E dS =$$

во всех точках поверхности сферы модуль напряжённости электрического поля имеет одинаковое значение, т.к. точки равноудалены от центра сферы, где находится заряд, т.е. величина  $E$  не зависит от площадки  $dS$ :

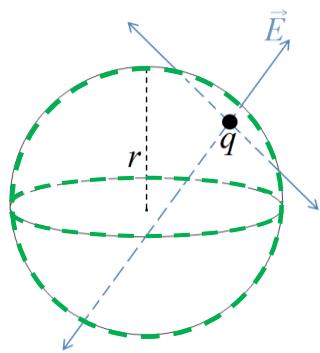
$$= E \oint_{\text{сфера}} dS = E \cdot S_{\text{сфера}} = \frac{kq}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Значит, когда заряд – источник электрического поля находится внутри замкнутой поверхности – сферы, поток через неё зависит только от этого заряда:  $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ .

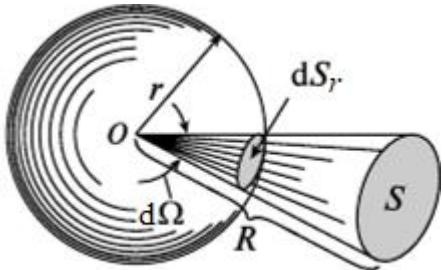
2) усложним задачу, пусть теперь заряд – источник поля будет расположен в произвольной точке внутри сферы. Все силовые линии, источником которых является наш заряд, пересекают поверхность однократно.

Ранее мы показали, что поток вектора равен количеству силовых линий, пересекающих поверхность. Вне зависимости от того, где размещён теперь заряд  $q$  внутри сферы, количество силовых линий, пересекающих её, остаётся таким же, как и в примере 1. Следовательно, поток  $\Phi$  тоже сохраняет свою зависимость от заряда  $q$ .

$$\Phi = \oint_{\text{сфера}} d\Phi \sim q.$$



Это можно доказать и более строго, введя в рассмотрение понятие телесного угла  $d\Omega$ .

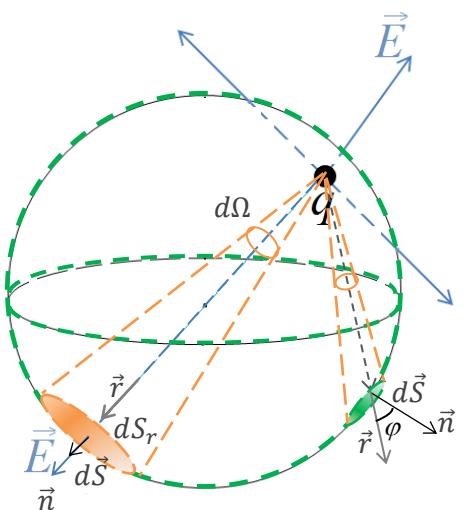
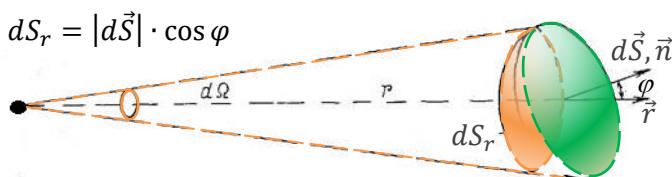


Телесный угол – часть пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей данный телесный угол)  $dS_r$ . Границей телесного угла является некоторая коническая поверхность. Обозначается телесный угол обычно буквой  $\Omega$ . Телесный угол измеряется отношением площади той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса сферы:

$$d\Omega = \frac{dS_r}{r^2}.$$

Единицей измерения телесного угла в системе СИ является стерадиан. Полная сфера образует телесный угол, равный  $4\pi$  стерадиан (*полный телесный угол*), для вершины, расположенной внутри сферы (если мы находимся в центре сферы, то вся её поверхность видна нам под углом

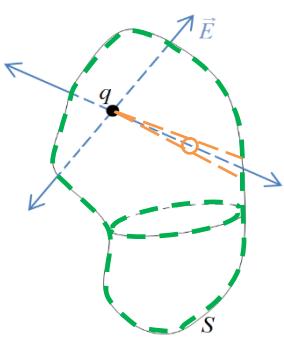
$$\Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi.$$



$$\Phi = \oint_{\text{сфера}} d\Phi = \oint_{\text{сфера}} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{\text{сфера}} \frac{kq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{сфера}} kq \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = kq \oint_{\text{сфера}} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} =$$

$$= kq \oint_{\text{сфера}} \frac{r \cdot dS \cdot \cos \varphi}{r^3} = kq \oint_{\text{сфера}} \frac{dS_r}{r^2} = kq \oint_{\text{сфера}} d\Omega = kq \cdot \Omega_{\text{полн}} =$$

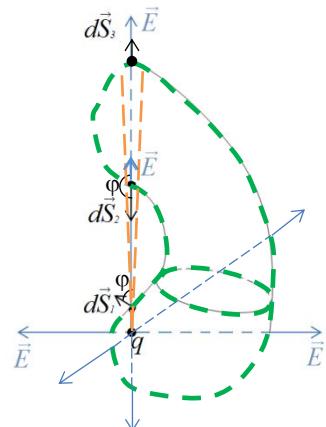
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$



Данный вывод справедлив не только для сферы, но и для любой выпуклой замкнутой поверхности, когда заряд – источник поля, находится внутри.

- 3) представим ситуацию, когда поверхность, окружающая наш заряд имеет сложную выпукло-вогнутую форму. Видно, что в этом случае некоторые силовые линии и окружающие их малые телесные углы пересекают поверхность  $S$  неоднократно. Но число пересечений площадок  $d\vec{S}$  одной силовой линией *нечётно* (линия должна выйти из замкнутой поверхности наружу), на нашей картинке это либо один, либо три раза.

$$\Phi_S = \oint_S d\Phi$$



Выразим подынтегральное выражение  $d\Phi$  как сумму потоков вектора  $\vec{E}$  через площадки  $d\vec{S}_1, d\vec{S}_2, d\vec{S}_3$ , пересекаемые одной и той же силовой линией:

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3 \sim \frac{\vec{r}_1 \cdot d\vec{S}_1}{r_1^3} + \frac{\vec{r}_2 \cdot d\vec{S}_2}{r_2^3} + \frac{\vec{r}_3 \cdot d\vec{S}_3}{r_3^3}.$$

Из-за того, что ориентация рассматриваемых площадок каждый раз изменяется, знаки в скалярных произведениях будут разные, но по величине все дроби равны (все площадки находятся в пределах одного телесного угла):

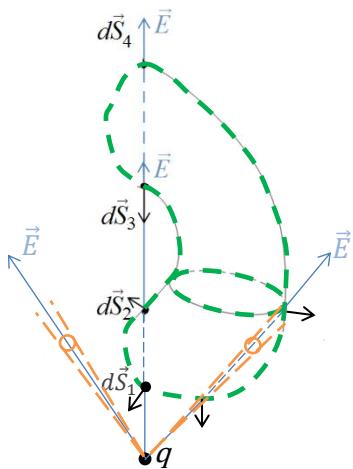
$$\frac{\vec{r}_1 \cdot d\vec{S}_1}{r_1^3} = \left| \frac{\vec{r}_2 \cdot d\vec{S}_2}{r_2^3} \right| = \frac{\vec{r}_3 \cdot d\vec{S}_3}{r_3^3} = d\Omega.$$

Так происходит, потому что с увеличением расстояния площадь  $d\vec{S}_i$  тоже растет. Следовательно, при суммировании все слагаемые попарно сократятся:

$$d\Phi = \underbrace{d\Phi_1}_{\substack{> 0, \text{ т.к.} \\ \cos \varphi > 0}} + \underbrace{d\Phi_2}_{< 0} + \underbrace{d\Phi_3}_{> 0} \sim d\Omega - d\Omega + d\Omega = d\Phi_1.$$

Поток через три площадки будет равен потоку через одну, и ситуация с нечётным числом пересечений эквивалентна примерам, когда силовая линия пересекает замкнутую поверхность

один раз. Значит опять можно говорить, что поток пропорционален заряду внутри замкнутой поверхности



$$\Phi_S = \oint_S d\Phi \sim q.$$

4) рассмотрим пример, когда заряд – источник поля находится вне выпукло-вогнутой замкнутой поверхности. От предыдущего примера ситуация будет отличаться тем, что силовая линия вектора  $\vec{E}$  и малый телесный угол вокруг нее теперь будут пересекать площадки  $d\vec{S}$  чётное число раз или не будут пересекать вовсе. На нашей картинке это либо два, либо четыре раза, либо ни одного.

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3 + d\Phi_4 \sim \frac{\vec{r}_1 \cdot d\vec{S}_1}{r_1^3} + \frac{\vec{r}_2 \cdot d\vec{S}_2}{r_2^3} + \frac{\vec{r}_3 \cdot d\vec{S}_3}{r_3^3} + \frac{\vec{r}_4 \cdot d\vec{S}_4}{r_4^3} =$$

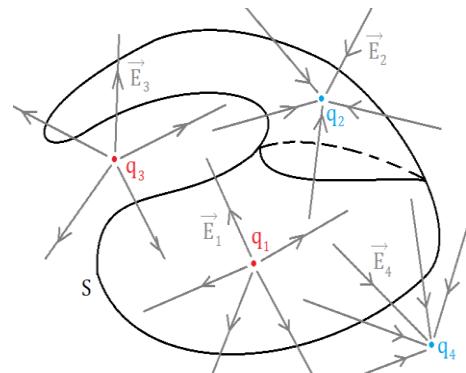
$$\text{аналогично } \left| \frac{\vec{r}_1 \cdot d\vec{S}_1}{r_1^3} \right| = \frac{\vec{r}_2 \cdot d\vec{S}_2}{r_2^3} = \left| \frac{\vec{r}_3 \cdot d\vec{S}_3}{r_3^3} \right| = \frac{\vec{r}_4 \cdot d\vec{S}_4}{r_4^3} = d\Omega$$

$$= \underbrace{d\Phi_1}_{<0} + \underbrace{d\Phi_2}_{>0} + \underbrace{d\Phi_3}_{<0} + \underbrace{d\Phi_4}_{>0} \sim -d\Omega + d\Omega - d\Omega + d\Omega = 0.$$

Если заряд находится вне замкнутой поверхности, то поток, создаваемого им электрического поля, через эту поверхность равен нулю:

$$\Phi_S = \oint_S d\Phi = 0.$$

5) рассмотрим случай, когда электрическое поле создаётся системой точечных зарядов, из которых не все попадают внутрь выпукло-вогнутой замкнутой поверхности.



$$\Phi_S = \oint_S d\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} =$$

согласно принципу суперпозиции  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$

$$\begin{aligned} &= \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4) d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_1 d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2 d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_3 d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_4 d\vec{S} = \\ &= \oint_S d\Phi_1 + \oint_S d\Phi_2 + \oint_S d\Phi_3 + \oint_S d\Phi_4 = \end{aligned}$$

принимая во внимание обсуждённые выше примеры

$$= \Phi_S^{q_1} + \Phi_S^{q_2} + \underbrace{\Phi_S^{q_3}}_{=0} + \underbrace{\Phi_S^{q_4}}_{=0} \sim q_1 + q_2 = \sum_i q_i^{\text{внутр.}} ; \quad \Phi_S \sim \sum_i q_i^{\text{внутр.}}$$

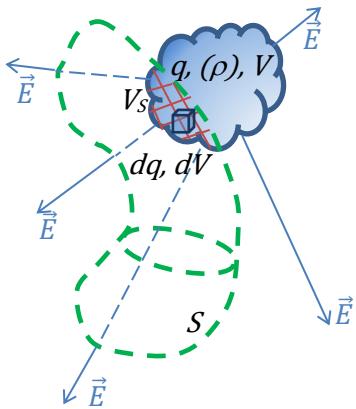
Подводя итоги, окончательно сформулируем теорему Гаусса: поток вектора  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности, делённой на  $\epsilon_0$ .

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{внутр}}}{{\epsilon}_0} -$$

интегральная форма записи теоремы Гаусса.

Физический смысл теоремы Гаусса: источниками электрического поля являются электрические заряды. Линии электрического поля непрерывны и могут начинаться и заканчиваться только на зарядах.

Завершая разговор о теореме, рассмотрим случай, когда электрическое поле в пространстве создаётся заряженным телом (или распределённым зарядом).



В этом случае заряженное тело можно представить как систему физически бесконечно малы объёмов  $dV$  (см. §1), каждый из которых содержит внутри себя точечный заряд  $dq$ . Полный заряд, находящийся внутри поверхности  $S$ , можно будет найти интегрированием по объёму:

$$q_{\text{внутр}} = \int_{V_S} dq = \int_{V_S} \rho dV,$$

где интегрирование будет проводиться только по части объёма заряженного тела (распределённого заряда), попавшей внутрь замкнутой поверхности  $-V_S$ .

Поток вектора  $\vec{E}$  в таком случае будет равен:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{{\epsilon}_0} \int_{V_S} dq \quad \text{или} \quad \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{{\epsilon}_0} \int_{V_S} \rho dV.$$

### §3. Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей

Теорема Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{внутр}} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

как и полученное с помощью принципа суперпозиции (см. §1) выражение для вектора напряжённости:

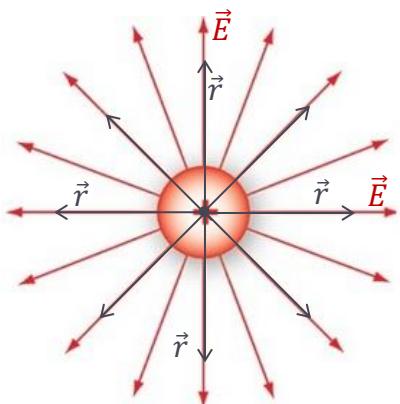
$$\vec{E} = \int_{\substack{\text{по всему} \\ \text{заряженному} \\ \text{телу}}} k \frac{dq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

позволяют при известном распределении зарядов полностью решить задачу о нахождении напряжённости электрического поля. В общем случае такие расчёты сопряжены со значительными трудностями.

Это особенно очевидно для теоремы Гаусса в левую часть которой входит скалярное произведение:  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ . Одного скалярного уравнения недостаточно для определения трёх неизвестных – составляющих  $E_x, E_y, E_z$  вектора  $\vec{E}$ . Необходима известная симметрия задачи, что бы для нахождения вектора  $\vec{E}$  было достаточно одного скалярного уравнения. Симметрия задачи позволяет наложить на напряжённость электрического поля дополнительные условия, которых вместе с теоремой Гаусса хватит для прямого элементарного вычисления. Приведём примеры.

Начнём с электростатических полей, силовые линии которых обладают сферической симметрией.

*Сферически симметричное электростатическое поле.*



При сферически симметричном распределении заряда поле, создаваемое им, также сферически симметрично. Векторные (и скалярные) поля с такой симметрией принято также называть *центральными полями*.

Центрально симметричное поле в общем случае можно записать в виде  $\vec{E} = \vec{E}(r) = E(r) \frac{\vec{r}}{r}$ . Здесь  $\vec{r}$  – радиус-вектор, начинающийся в центре симметрии поля  $r$  его модуль,  $E(r)$  величина напряженности поля, зависящая только от

расстояния  $r$  до его центра симметрии.

Источники сферически симметричного поля: точечный заряд, заряженная сфера, шар.

## ❖ Поле равномерно заряженной сферы

Дано:

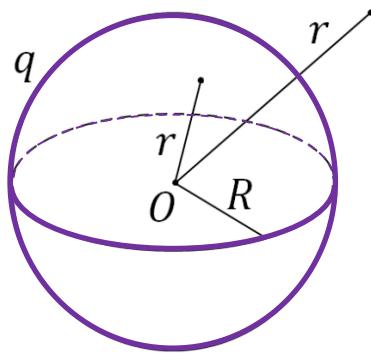
$R$  – радиус заряженной сферы;

$q$  – заряд сферы

Найти:

$E(r), \quad 0 \leq r < R$  (внутри)

$E(r), \quad r > R$  (снаружи)



При решении задачи на нахождение векторного поля с помощью теоремы Гаусса удобно использовать следующий алгоритм.

Шаг 1: выбор вспомогательной замкнутой поверхности  $S$ , поток вектора  $\vec{E}$  через которую будем рассчитывать. Выбор поверхности  $S$  основан на виде симметрии поля. Для центрально симметричного поля в качестве вспомогательной поверхности всегда выбирают сферу.

Шаг 2: расчёт потока вектора  $\vec{E}$  через выбранную вспомогательную поверхность  $S$  – считаем интеграл в левой части теоремы Гаусса.

Шаг 3: расчёт электрического заряда, попавшего *внутрь* выбранной вспомогательной поверхности  $S$ :  $q^{\text{внутр}}$  – считаем правую часть теоремы Гаусса.

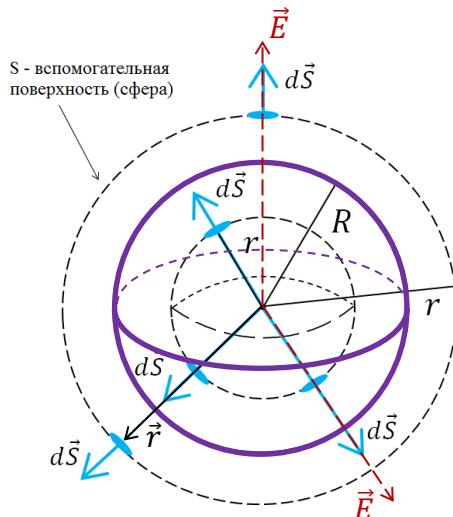
Шаг 4: приравниваем левую и правую части теоремы Гаусса, после чего из получившегося соотношения выводится выражение для величины поля  $\vec{E}$ .

Используем этот алгоритм применительно к нашему примеру.

Шаг 1: в нашем примере заряд равномерно распределён по поверхности сферы, т.е. мы имеем дело со сферически симметрично распределенным зарядом, поле, созданное которым тоже сферически симметрично  $\vec{E} = E(r) \frac{\vec{r}}{r}$ . Как было сказано выше в таком случае в качестве вспомогательной поверхности берётся сфера.  $S$  – сфера радиуса  $r$ .

Для нахождения поля внутри заряженной сферы будем использовать вспомогательную поверхность радиусом  
 a)  $0 \leq r < R$ , вне заряженной сферы  
 b)  $r \geq R$ .

Шаг 2: найдём поток  $\Phi_S$  через вспомогательную сферу



$$\Phi_S = \oint_{\text{сфера}} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{\text{сфера}} E(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{S} =$$

где  $d\vec{S}$  – элемент площади вспомогательной поверхности (сферы), перпендикулярный к поверхности сферы. Следовательно, в любой точке поверхности сферы  $d\vec{S} \uparrow \vec{r}$ . Кроме того, на поверхности сферы в любой её точке  $E = \text{const}$  ( $\Leftarrow r = \text{const}$ ), поэтому величина поля  $E$  не зависит от выбора площадки  $dS$  и её можно вынести из под знака интеграла.

$$= \oint_{\text{сфера}} E(r) \cdot \frac{r \cdot dS \cdot \cos 0}{r} = \oint_{\text{сфера}} E \cdot dS = E \oint_{\text{сфера}} dS = E \cdot S_{\text{сф}} = E \cdot 4\pi r^2.$$

Полученное выражение для потока справедливо  $\Phi_S$  для любого размера вспомогательной сферы: и для вспомогательной поверхности размера  $0 \leq r < R$ , и для вспомогательной поверхности  $r \geq R$ .

Шаг 3: считаем заряд, попавший внутрь вспомогательной сферы  $q^{\text{внутр}}$ .

Теперь размер вспомогательной поверхности имеет значение:

- a) если  $0 \leq r < R$ , то никакая часть заряда нашей заряженной сферы радиусом  $R$  внутрь вспомогательной сферы не попадает. Следовательно,  $q^{\text{внутр}} = 0$ .
- b) если  $r > R$ , то внутри вспомогательной сферы оказывается весь заряд заряженной сферы радиусом  $R$ , и  $q^{\text{внутр}} = q$ .

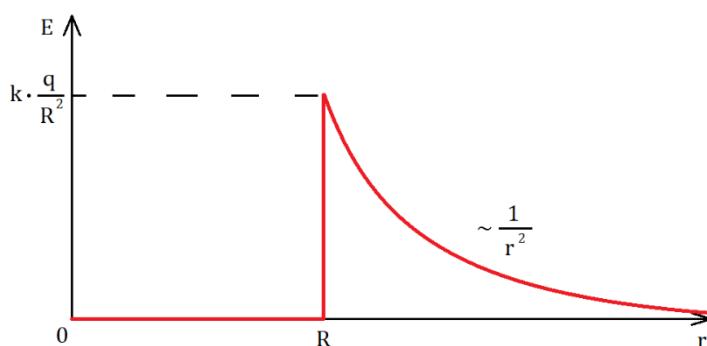
Шаг 4: приравниваем левую и правую части.

a)  $0 \leq r < R$ :  $E \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E = 0$ .

b)  $r > R$ :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Представим график зависимости  $E(r)$ :



Вопрос о том, чему равно поле на поверхности сферы ( $r = R$ ) лишен смысла, так как на поверхности сферы поле имеет разрыв. Дело в том, что бесконечно тонкая поверхность является лишь приближением для очень (но не бесконечно!) тонкого слоя, когда можно

пренебречь его толщиной. Очевидно, что, когда мы находимся внутри этого слоя, пренебрегать его толщиной нельзя.

### ❖ Поле равномерно заряженного шара

Дано:

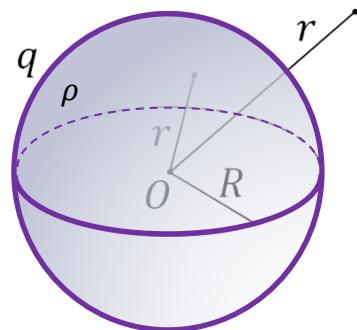
$R$  – радиус заряженного шара;

$q$  – заряд шара или  $\rho = \text{const}$  – плотность заряда

Найти:

$$E(r), \quad 0 \leq r < R \text{ (внутри)}$$

$$E(r), \quad r \geq R \quad (\text{снаружи})$$



В виду того, что поле равномерно заряженного шара также является сферически симметричным (как и сам заряд), то шаги 1<sup>ый</sup> и 2<sup>ой</sup> полностью повторяют шаги из приведённого выше примера о равномерно заряженной сфере.

Шаг 1:  $S$  – сфера радиуса  $r$ ; a)  $0 \leq r < R$ , b)  $r \geq R$ .

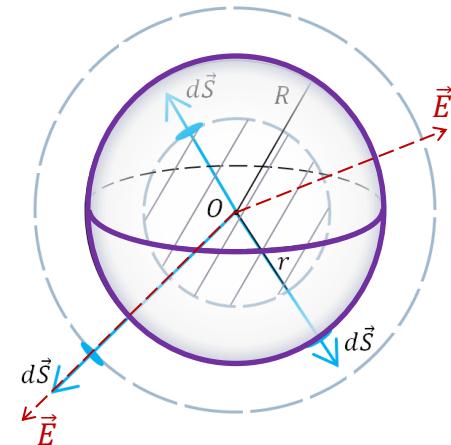
Шаг 2: для a)  $0 \leq r < R$  и для b)  $r \geq R$ :

$$\Phi_S = \oint_{\text{сфера}} \vec{E} d\vec{S} = \dots = E \cdot 4\pi r^2.$$

Шаг 3: считаем заряд, попавший внутрь вспомогательной сферы  $q^{\text{внутр}}$ .

a) сначала рассмотрим ситуацию, когда вспомогательная поверхность находится внутри заряженного шара  $0 \leq r < R$ , заряд, попавший внутрь, можно представить как произведение плотности на объём пространства внутри вспомогательной сферы  $V_s$  (т.к. по условию  $\rho = \text{const}$ )

$$q^{\text{внутр}} = \rho \cdot V_s = \rho \frac{4}{3}\pi r^3.$$



b) заряженный шар находится внутри вспомогательной сферы  $r \geq R$ :

в этом случае весь заряд шара будет находиться внутри вспомогательной сферы

$$q^{\text{внутр}} = q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Шаг 4: приравниваем левые и правые части

a)  $0 \leq r < R$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r;$$

или, если задана величина заряда шара:

$$E = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{r}{3\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}.$$

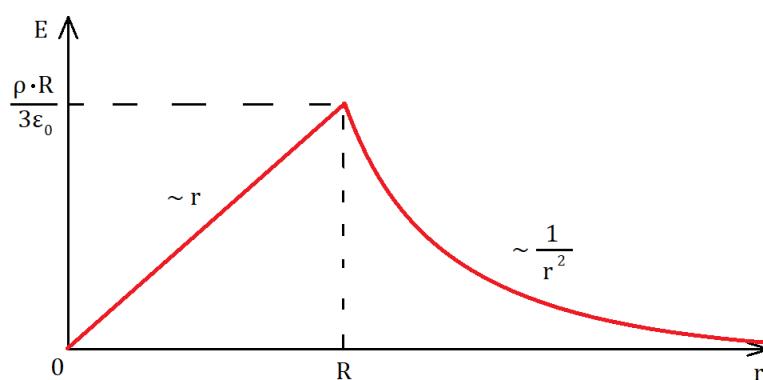
b)  $r \geq R$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2};$$

или, если задана величина заряда шара:

$$E = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k \cdot \frac{q}{r^2}.$$

Представим график зависимости  $E(r)$ :



Хорошо видно, что вне заряженной сферы и шара электрическое поле ведёт себя так же как поле точечного заряда

$$E_{\text{точ.заряд}} = \frac{kq}{r^2}$$

$$E_{\text{зар.сфера}} = \frac{kq}{r^2}, \quad r > R$$

$$E_{\text{зар.шара}} = \frac{kq}{r^2}, \quad r \geq R$$

❖ Поле неравномерно заряженного шара, плотность заряда в котором зависит только от расстояния до центра  $\rho = \rho(r)$

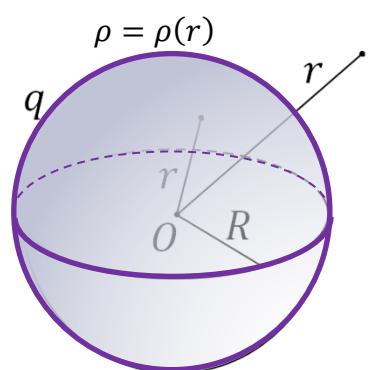
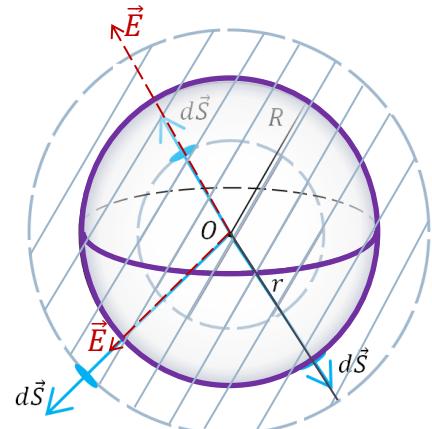
Дано:

$R$  – радиус заряженного шара;  
 $\rho \neq \text{const} = \rho(r)$  – плотность заряда

Найти:

$$E(r), \quad 0 \leq r < R \quad (\text{внутри})$$

$$E(r), \quad r \geq R \quad (\text{снаружи})$$

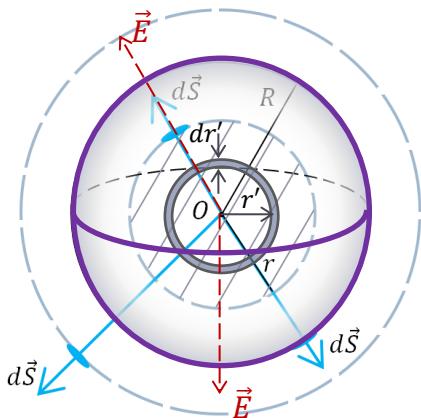


Так же как в двух приведённых выше примерах здесь мы имеем дело со сферически симметричным распределением заряда  $\rho = \rho(r)$ , поэтому электрическое поле по-прежнему сферически симметрично  $\vec{E} = E(r) \frac{\vec{r}}{r}$ , и следовательно шаги 1<sup>ый</sup> и 2<sup>ой</sup> тоже аналогичны приведённым выше.

Шаг 1:  $S$  – сфера радиуса  $r$ ; a)  $0 \leq r < R$ , b)  $r \geq R$ .

Шаг 2: для a)  $0 \leq r < R$  и для b)  $r \geq R$  :

$$\Phi_S = \oint_{\text{сфера}} \vec{E} d\vec{S} = \dots = E \cdot 4\pi r^2.$$



Шаг 3: считаем заряд, попавший внутрь вспомогательной сферы  $q^{\text{внутр}}$ .

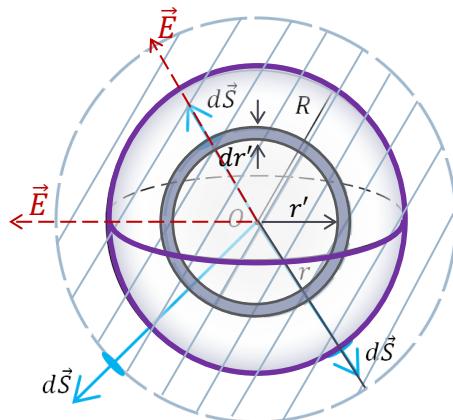
a) сначала рассмотрим ситуацию, когда вспомогательная поверхность находится внутри заряженного шара  $0 \leq r < R$ , заряд, попавший внутрь, представить как произведение плотности на объём пространства внутри вспомогательной сферы  $V_s$  теперь не получится так как плотность не везде одинакова  $\rho \neq \text{const}$ . Помня, что распределением заряда в

примере сферически симметрично, разобъём пространство внутри вспомогательной поверхности на тонкие шаровые слои радиусом  $r'$  и толщиной  $dr'$ : ( $dr' \ll r'$ ), такие что плотность заряда внутри такого слоя можно было бы считать постоянной  $\rho = \rho(r') = \text{const}$ .

Тогда заряд шарового слоя можно будет выразить через произведение плотности заряда на объём слоя:  $dq_{\text{шаров.сл}} = \rho(r') \cdot dV_{\text{шаров.сл}} = \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'$  (см. §18 «Термодинамика»). А заряд, попавший внутрь вспомогательной сферы, найдём как сумму зарядов всех шаровых слоёв внутри неё:

$$q^{\text{внутр}} = \int_{V_s} dq_{\text{шаров.сл}} = \int_{V_s} \rho(r') \cdot dV_{\text{шаров.сл}} = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'.$$

b) заряженный шар находится внутри вспомогательной сферы  $r \geq R$ . В этом случае весь заряд шара будет находиться внутри вспомогательной сферы, заряд шара также будем искать как сумму зарядов тонких шаровых слоёв. В отличие от предыдущей ситуации интегрирование будет проводиться не по всему объёму вспомогательной сферы, а только по объёму самого заряженного шара, где, собственно, и находится заряд:



$$q_{\text{внутр}} = \int_{\text{по объёму шара}} dq_{\text{шаров.сл}} = \\ = \int_{\text{по объёму шара}} \rho(r') \cdot dV_{\text{шаров.сл}} = \int_0^R \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'.$$

Шаг 4: приравниваем левые и правые части

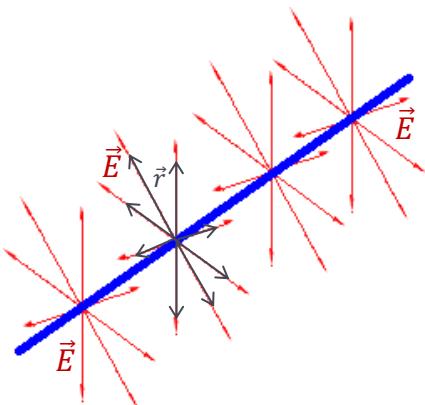
a)  $0 \leq r < R$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi \int_0^r \rho(r') \cdot r'^2 dr'}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\int_0^r q(r') \cdot r'^2 dr'}{\epsilon_0 r^2}.$$

b)  $r \geq R$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi \int_0^R \rho(r') \cdot r'^2 dr'}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\int_0^R \rho(r') \cdot r'^2 dr'}{\epsilon_0 r^2}.$$

*Электростатическое поле при цилиндрической симметрии (радиальное поле).*



Если распределение заряда в пространстве зависит только от расстояния до некоторой оси  $z$  и не зависит от координаты  $z$ , то электрическое поле тоже будет иметь цилиндрическую симметрию: величина напряжённости такого поля в точке будет зависеть только от расстояния до оси симметрии заряженного тела  $E = E(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , а силовые линии такого поля будут перпендикулярны этой оси.

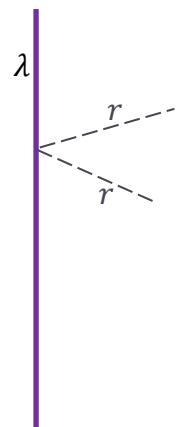
Источники электростатического поля с цилиндрической симметрией: заряженная нить, заряженная цилиндрическая поверхность, заряженный цилиндр.

#### ❖ Поле бесконечно длинной заряженной нити

Дано:

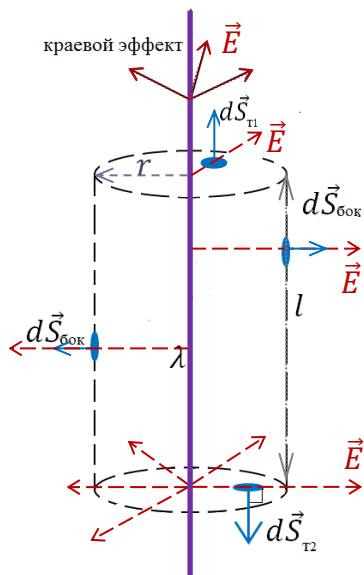
бесконечно длинная заряженная нить  
 $\lambda$  – линейная плотность заряда нити

Найти:  $E(r)$



Шаг 1: в этом примере заряд равномерно нанесён на нить, т.е. мы имеем дело с цилиндрически симметрично распределенным зарядом. Вектор напряжённости электрического поля такого заряда в каждой точке перпендикулярен нити (т.е. направлено радиально), а величина поля зависит только от расстояния до нити  $E = E(r)$ . В качестве замкнутой вспомогательной поверхности в случае, когда поле обладает

цилиндрической симметрией, выбирается цилиндр, ось которого совпадает с осью симметрии.  $S$  – прямой цилиндр радиуса  $r$ . Длина этого цилиндра должна быть намного меньше длины заряженной нити:  $l \ll L_{\text{нити}}$ . В противном случае, у торцов вспомогательного цилиндра на концах нити электрическое поле перестанет быть перпендикулярно нити – краевые эффекты.



Шаг 2: найдём поток  $\Phi_S$  через вспомогательный цилиндр.

Его лучше представить как сумму трёх потоков: потоки через торцы цилиндра  $T_1$  и  $T_2$  и поток через боковую поверхность цилиндра:

$$\begin{aligned}\Phi_S &= \oint_{\text{цилиндр}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{T_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{T_2} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\text{боковая поверхность}} \vec{E} d\vec{S} = \\ &= \int_{T_1} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_{T1}}_{=0, \vec{E} \perp d\vec{S}_T} + \int_{T_2} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_{T2}}_{=0, \vec{E} \perp d\vec{S}_T} + \int_{\text{боковая поверхность}} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{бок}}}_{\vec{E} \parallel d\vec{S}_{\text{бок}}} = \\ &= \int_{\text{боковая поверхность}} E \cdot dS_{\text{бок}} = E \int_{\text{боковая поверхность}} dS_{\text{бок}} = E \cdot S_{\text{бок}} \\ &= E \cdot 2\pi r l.\end{aligned}$$

Также как в случае со сферически симметричным полем величина поля  $E$  в любой точке боковой поверхности цилиндра одинакова ( $r = \text{const}$ ) и значит не зависит от выбора площадки  $dS_{\text{бок}}$ , поэтому её можно вынести из под знака интеграла.

Шаг 3: считаем заряд, попавший внутрь вспомогательной поверхности – заряд внутри цилиндра:

$$q^{\text{внутр}} = \lambda l.$$

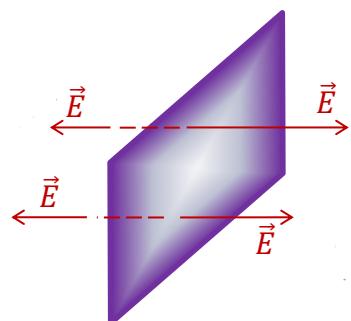
Шаг 4: приравниваем левую и правую части.

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

### Электростатическое поле при плоской симметрии.

В случае, когда положительный заряд равномерно распределен с постоянной поверхностью плотностью по бесконечной плоскости, распределение зарядов и поле тоже обладают плоской симметрией. Линии напряженности поля такого везде направлены по нормали к плоскости и, следовательно, параллельны друг другу, а модуль напряженности одинаков во всех точках, отстоящих от плоскости на одно и то же расстояние.

Источник: заряженная плоскость.



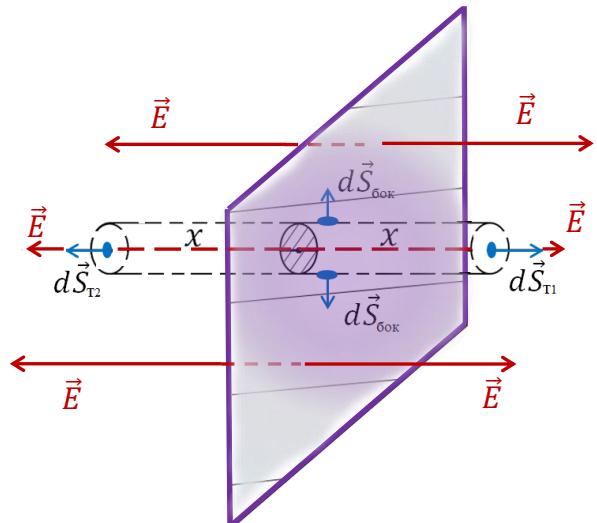
## ❖ Поле безграничной заряженной плоскости

Дано:

безгранична заряженная плоскость  
 $\sigma$  – поверхностная плотность заряда  
 на плоскости

Найти:  $E(x)$

Шаг 1: в качестве вспомогательной поверхности  $S$  в случае векторного поля с плоской симметрии выбирается прямой цилиндр, перпендикулярный плоскости и симметрично расположенный относительно нее, длина которого равна  $2x$ , где  $x$  – расстояние от плоскости до точки, в которой ищем поле.



Шаг 2: найдём поток  $\Phi_S$  через вспомогательный цилиндр. Также как в предыдущем примере его лучше представить как сумму трёх потоков: потоки через торцы цилиндра  $T_1$  и  $T_2$  и поток через боковую поверхность цилиндра:

$$\begin{aligned} \Phi_S = \oint_{\text{цилиндр}} \vec{E} d\vec{S} &= \int_{T_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{T_2} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\substack{\text{боковая} \\ \text{поверхность}}} \vec{E} d\vec{S} = \\ &= \int_{T_1} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_{T1}}_{\vec{E} \parallel d\vec{S}_{T1}} + \int_{T_2} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_{T2}}_{\vec{E} \parallel d\vec{S}_{T2}} + \int_{\substack{\text{боковая} \\ \text{поверхность}}} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{бок}}}_{\substack{=0, \\ \vec{E} \perp d\vec{S}_{\text{бок}}}} = 2 \int_{T1} E dS_T = \end{aligned}$$

т.к. модуль напряженности одинаков во всех точках, отстоящих от плоскости на одно и то же расстояние, то в любой точке на поверхности торца он имеет одинаковое значение, следовательно не зависит от  $dS_T$ :

$$= 2E \int_{T1} dS_T = 2ES_T.$$

Шаг 3: считаем заряд, попавший внутрь вспомогательной поверхности – заряд внутри цилиндра. Он есть только в точках, которые выбранный нами прямой цилиндр вырезает на заряженной плоскости, т.е. в пределах площади сечения  $S_T$ :

$$q^{\text{внутр}} = \sigma S_T.$$

Шаг 4: приравниваем левую и правую части:

$$2ES_T = \frac{\sigma S_T}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Хорошо видно, что напряженность электрического поля не зависит от расстояния от плоскости. Это *однородное поле*, силовые линии которого начинаются на заряженной плоскости и уходят на бесконечность, оставаясь перпендикулярными к заряженной плоскости. Конечно, бесконечных заряженных плоскостей в природе не существует. Однако полученный результат можно использовать для определения напряженности поля вблизи равномерно заряженной пластины, когда расстояние от точки наблюдения до пластины много меньше размеров пластины и, кроме того, точка наблюдения находится достаточно далеко от края пластины.

### ❖ Электрическое поле двух параллельных разноимённо заряженных пластин

Дано:

две безграничные заряженные пластины

$+\sigma$  – поверхностная плотность заряда на одной пластине

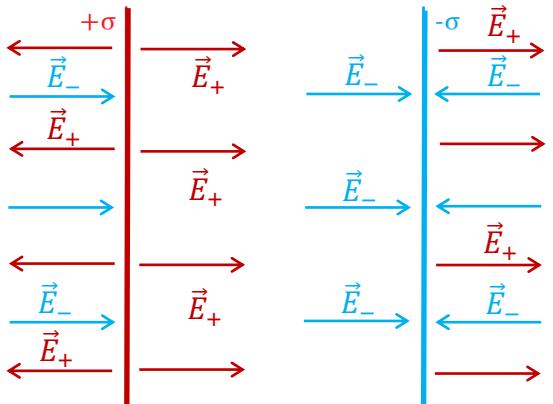
$-\sigma$  – поверхностная плотность заряда на другой пластине

Найти:

$\vec{E}_{\text{между пластинами}}$  – ?

$\vec{E}_{\text{вне пластин}}$  – ?

Напряженности полей, создаваемых каждой плоскостью, найдены в



предыдущем примере. Используем полученные там решения и принцип суперпозиции (см. §1): результирующее электрическое поле найдём как сумму полей положительно и отрицательно заряженных пластин  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ , где величина каждого из слагаемых найдена с помощью теоремы Гаусса

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{и} \quad E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Тот факт, что одна пластина заряжена положительно, а другая отрицательно определяет направление векторов  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$ .

В пространстве между пластинами по построению векторы со направлены  $\vec{E}_+ \uparrow \uparrow \vec{E}_-$ , с учётом равенства их модулей:

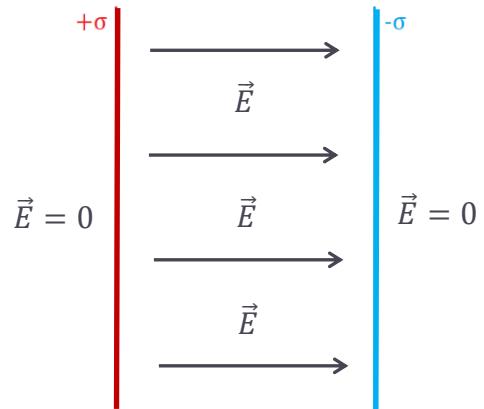
$$\vec{E}_{\text{между пластинами}} = 2\vec{E}_+, \quad E_{\text{между пластинами}} = 2E_+ = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

В пространстве вне пластин векторы направлены в противоположных направлениях  $\vec{E}_+ \downarrow \uparrow \vec{E}_-$ , что с учётом равенства их модулей приводит к взаимному уничтожению векторов:

$$\vec{E}_{\text{вне пластин}} = 0.$$

Таким образом, величина электрического поля двух безграничных параллельных разноимённо заряженных пластин равна

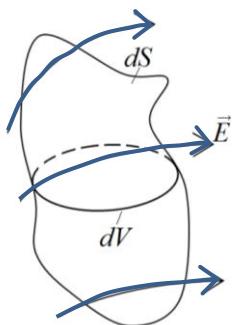
$$E = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0}, & \text{между пластинами} \\ 0, & \text{вне пластин} \end{cases}$$



## §4. Теорема Гаусса в локальной форме. Дивергенция. Формула Гаусса-Остроградского

Полученное в §2 соотношение  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{внутр}} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_S} \rho dV$  выражает теорему Гаусса в интегральной форме. Чтобы расширить возможности применения этой теоремы для исследования и расчёта электрических полей придадим этой теореме другую форму – дифференциальную.

Рассмотрим пространство, в котором создано электрическое поле. Пусть  $dS$  – малая замкнутая поверхность, выделенная в этом пространстве, а  $dV$  – объём, ограниченный этой поверхностью (объём внутри  $dS$ ).



Отношение потока через поверхность к объёму, ограниченному этой поверхностью, называется *дивергенцией*. Единственным требованием этого определения является то, что все размеры поверхности должны стремиться к нулю, чтобы дивергенция была локальной операцией.

$$\frac{d\Phi}{dV} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{V_S \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V_S} = \operatorname{div} \vec{E} - (1)$$

дивергенция векторного поля  $\vec{E}$ .

*Дивергенция* – это линейный дифференциальный оператор на векторном поле, характеризующий поток данного поля через поверхность достаточно малой (в условиях конкретной задачи) окрестности точки области определения поля. Из определения (1) следует, что дивергенция является скалярной функцией координат точки поля. Данное определение не привязано к определённой системе координат.

Линейный дифференциальный оператор:

для любых векторных полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  и для всех вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$

$$\operatorname{div}(\alpha \vec{E} + \beta \vec{B}) = \alpha \operatorname{div} \vec{E} + \beta \operatorname{div} \vec{B}$$

Выясним физический смысл дивергенции.

Вспомним для этого приведённый в §2 пример из гидродинамики: векторное поле вектора скорости жидкости  $\vec{v}$ . Представим озеро, глубина которого постоянна, и значит скорость

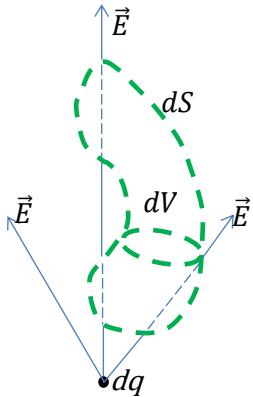
течения воды, будет только зависеть только от координат точки на плоскости и не зависеть от глубины (третьей координаты), давая, таким образом, двумерное векторное поле на двумерном пространстве. В такой модели родники, бьющие из дна озера (источники воды), будут давать положительное значение для потока вектора скорости жидкости  $\vec{v}$ , а следовательно, и дивергенция поля скоростей течения  $(\operatorname{div} \vec{v} = \frac{d\Phi}{dV})$  будет положительна  $(\operatorname{div} \vec{v} = \frac{d\Phi}{dV} > 0)$ , а подводные стоки (пещеры, куда вода утекает) – отрицательную дивергенцию (т.к. поток будет меньше нуля  $\frac{d\Phi}{dV} < 0$ ).



Причём величина потока в обоих случаях будет определяться самими родниками (источниками) и пещерами (стоками) воды: их размерами и силой.

Вернёмся к электростатике: если внутри замкнутой поверхности нет источников поля –

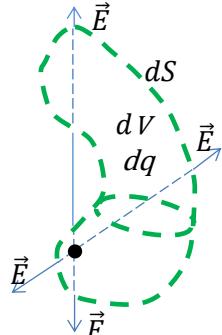
положительных зарядов или стоков поля – отрицательных зарядов, а они есть снаружи, то силовые линии пересекают замкнутую поверхность четное число раз, и  $d\Phi_{as} = 0$  (см. §2).



Если же внутри есть заряд  $dq$ , то по теореме Гаусса

$$d\Phi_{as} = \frac{dq}{\epsilon_0}.$$

Заряд, распределённый по объёму  $dV$ , ограниченному поверхностью  $dS$ , можно выразить через объёмную плотность заряда  $dq = \rho dV$ ,



$$d\Phi = \frac{\rho dV}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d\Phi}{dV} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} -$$

дифференциальная (локальная) форма теоремы Гаусса.

Заметим, что

- $\operatorname{div} \vec{E} > 0$ , если в этой точке пространства есть положительный заряд (источник поля);
- $\operatorname{div} \vec{E} < 0$ , если в этой точке пространства есть отрицательный заряд (сток поля).

- $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ , если в этой точке пространства зарядов нет, либо они компенсируют друг друга.

Таким образом  $\operatorname{div} \vec{E}$  представляет собой *плотность источников (стоков) поля* в данной точке пространства, которыми являются находящиеся там заряды.

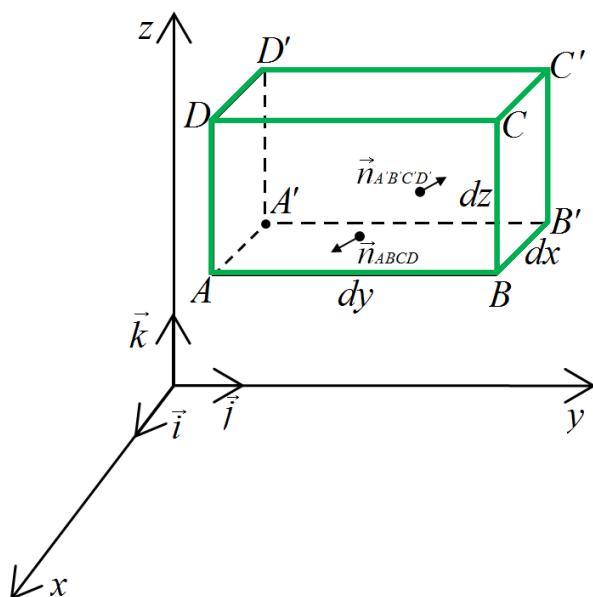
Геометрической интерпретацией дивергенции является интерпретация с использованием для изображения векторного поля его силовых линий (см. §1). Там, где появляются (выходят) новые линии дивергенция поля положительна; где линии заканчиваются (входят) – дивергенция отрицательна. Где количество силовых линий не изменяется, дивергенция поля нулевая.

### Дивергенция в декартовой системе координат

Как было указано выше определение дивергенции (1) не привязано к определённой системе координат, но представим ситуацию, когда для описания точек пространства используется декартова система координат. Тогда напряжённость электрического поля в этом пространстве может быть записана как функция положения точки в пространстве

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z).$$

Построим в некоторой точке этого пространства  $A'(x, y, z)$  малую замкнутую поверхность (параллелепипед) и сосчитаем поток вектора  $\vec{E}$  через неё  $d\Phi_{ABCDA'B'C'D'}$ . Размеры нашего параллелепипеда  $dx, dy$  и  $dz$ .



Вычислим поток через весь параллелепипед как сумму потоков через его грани.

$$\begin{aligned} d\Phi_{ABCD A' B' C' D'} &= d\Phi_{ABCD} + d\Phi_{A' B' C' D'} + d\Phi_{AA' D' D} + d\Phi_{BB' C' C} + d\Phi_{AA' B' B} + d\Phi_{CC' D' D} = \\ &= d\Phi_{(x)} + d\Phi_{(y)} + d\Phi_{(z)}, \end{aligned}$$

где  $d\Phi_{(x)}$ ,  $d\Phi_{(y)}$  и  $d\Phi_{(z)}$  – потоки через грани, перпендикулярные осям  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  соответственно.

Найдём поток  $d\Phi_{(x)}$  (для  $d\Phi_{(y)}$  и  $d\Phi_{(z)}$  рассуждения будут аналогичными):

$$d\Phi_{(x)} = d\Phi_{ABCD} + d\Phi_{A' B' C' D'}.$$

$$d\Phi_{ABCD} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ABCD}.$$

Представим скалярное произведение векторов  $\vec{E}$  и  $d\vec{S}_{ABCD}$  через их компоненты (см. §2 из раздела «Механика»):

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}, \quad d\vec{S}_{ABCD} = dS_{ABCD} \vec{n}_{ABCD} = dS_{ABCD} \vec{i} = dy dz \cdot \vec{i},$$

$$d\Phi_{ABCD} = (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) \cdot (dy dz \vec{i}) = E_x \cdot dy dz.$$

Стоит отметить, что в данном выражении величина  $E_x = E_x(x + dx, y, z)$ , так как все точки грани  $ABCD$  имеют координату  $x + dx$ .

$$d\Phi_{A' B' C' D'} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_{A' B' C' D'}.$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}, \quad d\vec{S}_{A' B' C' D'} = dS_{A' B' C' D'} \cdot \vec{n}_{A' B' C' D'} = dy dz \cdot (-\vec{i}),$$

$$\text{т. к. } \vec{n}_{ABCD} = \vec{i} \uparrow \vec{n}_{A' B' C' D'}.$$

$$d\Phi_{A' B' C' D'} = (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) \cdot dy dz \cdot (-\vec{i}) = -E_x \cdot dy \cdot dz.$$

В этом выражении величина считается уже в самой точке  $A'(x, y, z)$ :  $E_x = E_x(x, y, z)$ .

Таким образом, поток через грани параллелепипеда перпендикулярные оси  $OX$

$$d\Phi_{(x)} = E_x(x + dx, y, z) \cdot dy dz - E_x(x, y, z) \cdot dy dz = (E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z)) \cdot dy dz.$$

Умножим и разделим получившееся выражение на  $dx$ :

$$d\Phi_{(x)} = \frac{E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z)}{dx} \cdot dx dy dz.$$

## Математическое дополнение: частная производная

В математическом анализе *частная производная* – одно из обобщений понятия производной на случай функции нескольких переменных. Частная производная – это предел отношения приращения функции по выбранной переменной к приращению этой переменной, при стремлении этого приращения к нулю. Остальные переменные, от которых зависит функция, в таком приращении не изменяются.

Например, частная производная некоторой функции, зависящей от трёх переменных

$f = f(x, y, z)$ , по координате  $x$  будет иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

аналогичный определению производной от функции одной переменной  $\varphi = \varphi(x)$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Выражение

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

называется полным дифференциалом функции  $f = f(x, y, z)$ .

Пример нахождения частной производной от функции нескольких переменных:

$$f = f(x, y, z) = ax + byzx^2 + c(y - d), \quad a, b, c, d - const$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx} \Big|_{y, z = const} = a + byz \cdot 2x + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dy} \Big|_{x, z = const} = 0 + bz x^2 + c$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz} \Big|_{x, y = const} = 0 + by x^2 + 0$$

Следует обратить внимание, что обозначение  $\frac{\partial f}{\partial x}$  следует понимать как *цельный* символ, в отличие от обычной производной функции одной переменной  $\frac{d\varphi}{dx}$ , которую можно представить, как отношение дифференциалов функции  $d\varphi$  и аргумента  $dx$ .

$$\frac{E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z)}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial E_x}{\partial x} -$$

частная производная  $E_x$  по  $x$ . А произведение  $dxdydz = dV$  – объём нашего параллелепипеда  $ABCDA'B'C'D'$ . Окончательно получаем, что

$$d\Phi_{(x)} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dV.$$

Как было указано выше потоки через грани параллелепипеда перпендикулярные осям  $OY$  и  $OZ$  получаются аналогичным способом:

$$d\Phi_{(y)} = \dots = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV; \quad d\Phi_{(z)} = \dots = \frac{\partial E_z}{\partial z} dV.$$

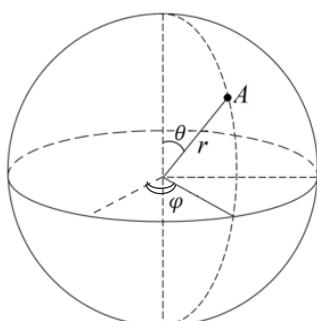
Таким образом, поток через малую замкнутую поверхность, построенную в окрестности точки  $A'(x, y, z)$ , равен

$$d\Phi_{ABCDA'B'C'D'} = d\Phi_{(x)} + d\Phi_{(y)} + d\Phi_{(z)} = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV.$$

Используя определение (1), получим что в декартовой системе координат оператор дивергенции имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

### Дивергенция в сферической системе координат



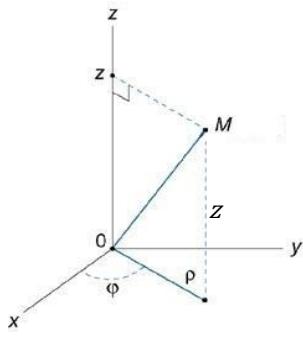
(без вывода)

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \varphi, \theta)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Если  $\vec{E} = \vec{E}(r)$  – сферически симметричное электрическое поле, то

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E_r)}{dr}.$$



### Дивергенция в цилиндрической системе координат

(без вывода)

$$\vec{E} = \vec{E}(\rho, \varphi, z)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

### Применение локальной формы теоремы Гаусса

Используя локальную форму теоремы Гаусса, можно найти плотность зарядов по известному полю и наоборот. Рассмотрим следующий пример:

Дано:

$\vec{E} = \alpha r \vec{r}$  – сферически симметричное электрическое поле;

$r$  – расстояние до центра поля;  $\alpha$  – const.

Найти:

$\rho(r)$ ?

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Перепишем выражение для напряжённости электрического поля, используя форму записи вектора через единичный вектор (см. §2 из раздела «Механика»):

$$\vec{E} = \alpha r \vec{r} = \alpha r^2 \frac{\vec{r}}{r},$$

где  $E = \alpha r^2$  – модуль вектора напряжённости. Так как направление  $\vec{E}$  совпадает с  $\vec{r}$ ,  $E_r = E$

Для сферически симметричного поля будем использовать оператор дивергенции для сферической системы координат (сферически симметричный случай)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E_r)}{dr}.$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E_r)}{dr} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Подставляем величину поля в производную и дифференцируем:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \cdot \alpha r^2)}{dr} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \cdot \alpha r^2)}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{d(\alpha r^4)}{dr} = \frac{1}{r^2} \cdot 4 \alpha r^3 = 4 \alpha r$$

$$4 \alpha r = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rho(r) = 4 \alpha \varepsilon_0 r.$$

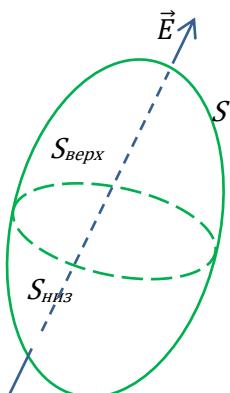
Очевидно, что если задана плотность  $\rho(r)$ , электрическое поле можно найти, решая обратную задачу — вычисляя интеграл

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r) r^2 dr.$$

### Формула Гаусса - Остроградского

В различных вопросах теории электричества и других разделах физики часто применяется математическая формула, с помощью которой поток вектора через произвольную замкнутую

поверхность  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$  выражается через объёмный интеграл по области, ограниченной этой поверхностью.



Рассмотрим замкнутую поверхность  $S$  в электрическом поле  $\vec{E}$ .

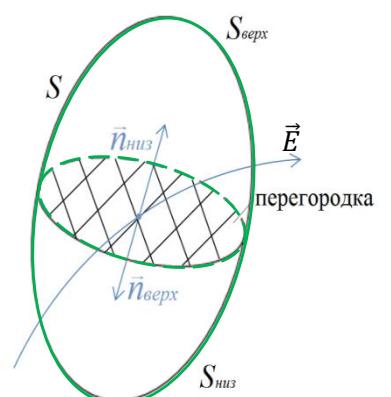
Мысленно разделим её на две части верхнюю и нижнюю:  $S_{\text{верх}}$  и  $S_{\text{низ}}$ .

Очевидно, что поток через всю замкнутую поверхность будет выражаться как сумма потоков через верхнюю и нижнюю части замкнутой поверхности  $\Phi_S = \Phi_{S_{\text{верх}}} + \Phi_{S_{\text{низ}}}$ .

Теперь добавим внутрь замкнутой поверхности  $S$  поверхность-«перегородку» и рассмотрим поток через две получившиеся замкнутые поверхности:

$$\Phi_{S_{\text{верх}}}^{\text{замкн}} = \Phi_{S_{\text{верх}}} + \Phi_{\text{перегор.верх}}$$

$$\Phi_{S_{\text{низ}}}^{\text{замкн}} = \Phi_{S_{\text{низ}}} + \Phi_{\text{перегор.низ}}$$



Тогда

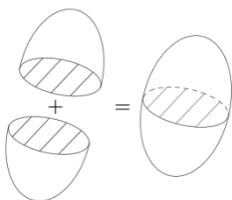
$$\Phi_{S_{\text{верх}}}^{\text{замкн}} + \Phi_{S_{\text{низ}}}^{\text{замкн}} = \Phi_{S_{\text{верх}}} + \Phi_{S_{\text{низ}}} + \Phi_{\text{перегор.верх}} + \Phi_{\text{перегор.низ}}$$

$$\Phi_{\text{перегор.верх}} = \int_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{верх}} = \int_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{верх}} dS$$

$$\Phi_{\text{перегор.низ}} = \int_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{низ}} = \int_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{низ}} dS$$

Индекс «верх» у  $\vec{n}_{\text{верх}}$  выглядит ошибочным, учитывая, что на иллюстрации данный вектор смотрит вниз. Тем не менее, всё верно – суть в том, что вектор смотрит *наружу* замкнутой поверхности, относительно которой считается поток. Та же логика применима и к  $\vec{n}_{\text{низ}}$ .

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{перегор.верх}} + \Phi_{\text{перегор.низ}} &= \int_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{верх}} dS + \int_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{низ}} dS = \\ &= \int_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{верх}} dS - \int_{S_{\text{перегор}}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{верх}} dS = 0; \quad \text{т. к. } \vec{n}_{\text{низ}} = -\vec{n}_{\text{верх}}. \end{aligned}$$



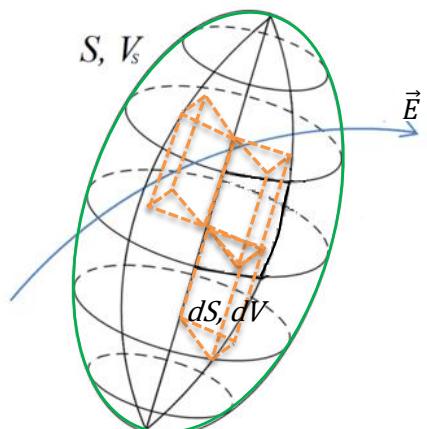
Следовательно,  $\Phi_{S_{\text{верх}}}^{\text{замкн}} + \Phi_{S_{\text{низ}}}^{\text{замкн}} = \Phi_{S_{\text{верх}}} + \Phi_{S_{\text{низ}}} = \Phi_S$  – т.е. каково бы ни было внутреннее устройство замкнутой поверхности (сколько бы перегородок не разбивали её на составляющие), поток определяется только ее внешней поверхностью.

Воспользуемся этим результатом, чтобы получить формулу Гаусса - Остроградского.

Пусть  $S$  – замкнутая поверхность, расположенная в электрическом поле,  $V_S$  – объем, ограниченный ею. Разобьём этот объём множеством перегородок на малые объемы  $dV$ .  $d\Phi$  – потоки через поверхности, их ограничивающие.

Как мы только что показали, можно просуммировать потоки через все малые объемы  $dV$ , так как потоки через все внутренние перегородки взаимно уничтожаются. Как и прежде, складывая большое количество малых величин, знак суммы мы заменим на знак определённого интеграла:

$$\Phi_S = \sum_i^N \Phi_i = \int_{V_S} d\Phi.$$



Поскольку мы разбили объём  $V_S$  на малые объёмы, справедливо определение (1):

$$\frac{d\Phi}{dV} = \operatorname{div} \vec{E} \Rightarrow d\Phi = \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV.$$

Значит:

$$\Phi_S = \int_{V_S} \operatorname{div} \vec{E} dV.$$

С другой стороны, по определению потока через произвольную замкнутую поверхность  $S$  (см. §2):

$$\Phi_S = \oint_S \vec{E} d\vec{S}.$$

Окончательно:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{V_S} \operatorname{div} \vec{E} dV -$$

это и есть формула Гаусса - Остроградского. При ее выводе мы не использовали каких-либо свойств электрического поля, поэтому формула справедлива для любого векторного поля.

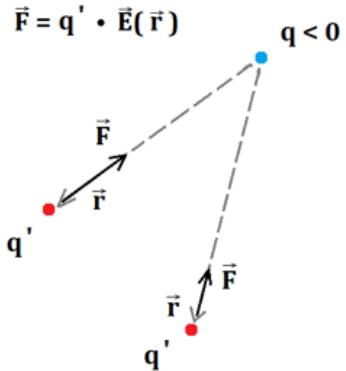
Используя эту формулу, можно переходить от интеграла по замкнутой поверхности, к интегралу, вычисляемому по объему, заключенному внутри этой поверхности.

## §5. Потенциал электрического поля. Энергия взаимодействия зарядов. Энергия заряженного тела

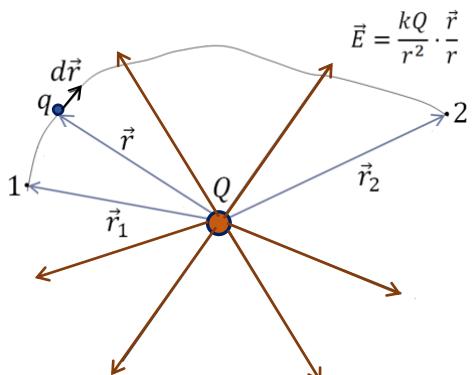
До сих пор мы рассматривали описание электрического поля с помощью вектора напряжённости  $\vec{E}$ . Такой способ описания можно назвать силовым, т.к.  $\vec{E}$  непосредственно связана с силой, действующей на заряд со стороны электрического поля:

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Можно заметить, что  $\vec{E}$  – векторная величина, и это создаёт определённые сложности при работе с ней (необходимо учитывать направление вектора во всех операциях с ним).



Однако, как и в механике существует другой способ описания – с помощью энергетической характеристики, через которую можно будет легко представить энергию заряда, находящегося в электрическом поле. Закон сохранения энергии позволяет существенно упростить решение задач о поведении заряженных частиц в электрическом поле. Дополнительным преимуществом этого способа описания является то, что энергия – величина скалярная, и значит операции с ней будут более простыми.



Итак, рассмотрим ситуацию, когда неподвижный точечный заряд  $Q$ , создаёт в пространстве вокруг себя электрическое поле:

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

А пробный заряд  $q$  перемещается в этом поле из положения с радиус-вектором  $\vec{r}_1$  в положение с радиус-вектором  $\vec{r}_2$ .

Работа  $A_{12}$ , совершаемая силой, действующей на заряд со стороны поля, во время такого перемещения равна:

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q \cdot k \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} =$$

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}(2\vec{r}d\vec{r}) = \frac{1}{2}d(\vec{r}^2) = d\left(\frac{\vec{r}^2}{2}\right) = d\left(\frac{r^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(2rdr) = r \cdot dr$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{r_1}^{r_2} q \cdot k \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{r}{r} \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} q \cdot k \frac{Q}{r^2} \cdot dr = q \cdot k \cdot Q \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \\
 &= q \cdot k \cdot Q \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_{r_1}^{r_2} = q \cdot k \cdot Q \cdot \frac{1}{r} \Big|_{r_2}^{r_1} = q \cdot k \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)
 \end{aligned}$$

Видно, что полученный результат зависит лишь от начального  $r_1$  и конечного  $r_2$  положений заряда  $q$ , но не от траектории его движения, следовательно, можно сделать вывод, что сила  $\vec{F}$ , действующая на заряд со стороны электростатического поля, является *консервативной*. Это, в свою очередь, означает, что мы можем для описания положения заряда  $q$  в этом поле (пространстве) использовать понятие потенциальной энергии: величины  $W_{\text{пот}}$ , для которой справедливо следующее выражение (см. §9 раздел «Механика»):

$$A_{12} = W_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - W_{\text{пот}}(\vec{r}_2) = -\Delta W_{\text{пот}}$$

Причина замены обозначения  $E_{\text{пот}}$  на  $W_{\text{пот}}$  очевидна:  
чтобы обозначение энергии не совпадало с обозначением компонент вектора  $\vec{E}$

Таким образом,

$$W_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - W_{\text{пот}}(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Интеграл, стоящий справа от знака равно, зависит только от электрического поля, созданного в пространстве. Он никак не связан с величиной пробного заряда  $q$ . Поэтому, для описания электрического поля можно ввести скалярную функцию координат  $\varphi(\vec{r})$ :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W_{\text{пот}}(\vec{r})}{q}$$

– *потенциал* электростатического поля;

убыль которого может быть найдена по формуле:

$$\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\Delta\varphi$$

Выражение для работы по перемещению заряда  $q$  в электрическом поле можно теперь переписать как

$$A_{12} = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q(\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)) = -q\Delta\varphi \Rightarrow A_{12} = -q\Delta\varphi.$$

Из приведённых выше определений следует, что *потенциал* можно рассматривать как величину, численно равную *потенциальной энергии единичного положительного заряда* в данной точке.

Единицей измерения потенциала в СИ является Вольт:  $[\varphi] = \text{В}$ .

Потенциальну какой-либо произвольной точки О пространства можно условно приписать любое значение  $\varphi_0$ . Тогда потенциалы всех точек поля, созданного в этом пространстве, будут определяться однозначно

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \varphi_0 + \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

В §9 раздела «Механика», где мы ввели понятие потенциальной энергии, согласно нашему определению, потенциальная энергия в точке О равна 0:  $W_{\text{пот}}(\vec{r}_0) = 0$ , то есть точка О является началом отсчета для потенциальной энергии. Тоже самое можно сказать и про потенциал поля:  $\varphi(\vec{r}_0) = \varphi_0 = 0$ . В зависимости от положения этой точки потенциал будет иметь разное значение:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

Можно заметить, что на практике в качестве начала отсчёта потенциала зачастую выбирается  $r_0 = \infty$ , т.к. на бесконечном удалении друг от друга электрическое взаимодействие между заряженными телами прекращается.

Изменение потенциала  $\Delta\varphi$ , также как и изменение потенциальной энергии  $\Delta W_{\text{пот}}$ , не зависит от выбора начала отсчета – точки О.

Если заряд  $q$  совершаает малое перемещение в пространстве (в электрическом поле), силы поля совершают малую работу, которая может быть выражена через малое изменение потенциала поля:  $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dW_{\text{пот}}$  или  $\delta A = -qd\varphi$ . Соответственно, по аналогии с выражением для конечного изменения потенциала поля между точками  $r_1$  и  $r_2$  пространства:

$$\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = -\Delta\varphi = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r},$$

справедливым является и выражение:  $-d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{r}$  – для малого изменения потенциала поля, если речь идёт о соседних точках поля.

### Потенциал поля точечного заряда.

Воспользуемся формулой, определяющей потенциал в некоторой точке поля  $\vec{r}$ , для нахождения потенциала электрического поля, которое создано неподвижным точечным зарядом  $\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ . В качестве начала отсчёта, как было рекомендовано выше, возьмём  $r_0 = \infty$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ :

$$\varphi(r) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} k \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = \dots = kq \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -k \cdot \frac{q}{r} \Big|_r^{\infty} = 0 - \left( -k \cdot \frac{q}{r} \right) = k \cdot \frac{q}{r}.$$

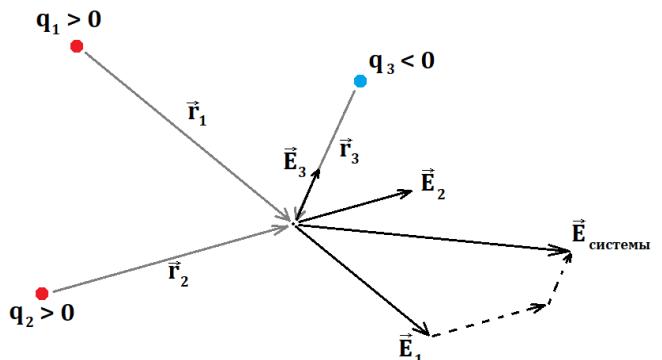
$$\varphi = k \cdot \frac{q}{r}$$

– потенциал поля точечного заряда.

### Потенциал поля системы точечных зарядов

Пусть система состоит из неподвижных точечных зарядов  $q_1, q_2, q_3 \dots$  (дискретная система зарядов). Согласно принципу суперпозиции в любой точке пространства напряжённость электрического поля (см. §1)

$$\vec{E}_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}_i) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$



Тогда для потенциала электрического поля этой системы можно написать следующее выражение:

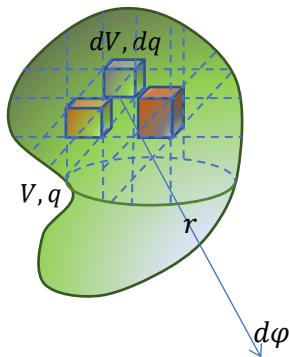
$$\varphi(r) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} + \dots =$$

$$= \varphi_1(r_1) + \varphi_2(r_2) + \varphi_3(r_3) + \dots = \sum_{i=1}^N \varphi_i(r_i),$$

$$\boxed{\varphi_{\text{системы}} = k \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}},$$

т.е. принцип суперпозиции оказывается справедливым и для потенциала электрического поля.

### Потенциал поля заряженного тела (распределенного заряда)



Если заряды, образующие систему, распределены непрерывно (например, по объему заряженного тела), то как и в §1, мы считаем, что каждый физически бесконечно малый объем  $dV$  содержит внутри себя заряд  $dq$ . По аналогии с потенциалом точечного заряда потенциал электрического поля физически бесконечно малого объема можно найти по формуле:

$$\varphi_{\text{точ.заряд}} = k \frac{q_{\text{точ.заряд}}}{r} \Rightarrow d\varphi = \frac{k dq}{r}.$$

Потенциал электрического поля всего заряженного тела может быть найден, согласно принципу суперпозиции, как сумма потенциалов всех физически бесконечно малых объемов, составляющих тело:

$$\varphi_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^N \varphi_i(r_i) = k \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi = \int d\varphi = \int \frac{k dq}{r}.}$$

по всему заряженному телу

по всему заряженному телу

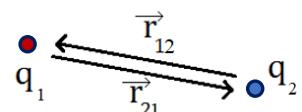
### Электрическая энергия системы зарядов (энергия взаимодействия)

Как было сказано в начале параграфа потенциал – является энергетическим способом описания электрического поля. Подтверждением этому служит полученное нами выражение

$$\boxed{W_{\text{пот}}(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})}$$

– потенциальная энергия заряда в точке электрического поля с потенциалом  $\varphi$ .

Применим эту формулу, чтобы найти энергию системы двух неподвижных точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . Положение первого заряда относительно второго характеризуется вектором  $\vec{r}_{12}$ , а второго



относительно первого - вектором  $\vec{r}_{21}$ . Очевидно, что по величине эти векторы равны:  $|\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_{21}|$ .

Мы можем представить, нашу систему зарядов следующим образом: заряд  $q_2$  – заряд, создавший в окружающем пространстве электрическое поле, тогда заряд  $q_1$  – заряд, помещённый в это электрическое поле. Энергия заряда  $q_1$  соответственно будет равна:

$$W_{\text{пот}} = q_1 \varphi_2(\vec{r}_{12}) = q_1 \cdot k \frac{q_2}{r_{12}} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = W_{12}.$$

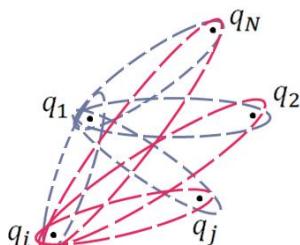
Аналогично, считая, что заряд  $q_1$  создаёт в пространстве электрическое поле, а заряд  $q_2$  помещён в поле заряда  $q_1$ , получаем:

$$W_{\text{пот}} = q_2 \varphi_1(\vec{r}_{21}) = q_2 \cdot k \frac{q_1}{r_{21}} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = W_{21}.$$

Очевидно, что  $W_{12} = W_{21}$ . Поэтому, энергию этой системы – двух неподвижных точечных зарядов можно переписать в следующем виде:

$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{2} (W_{12} + W_{21}) = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_2 + q_2 \varphi_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 q_i \varphi_j(r_{ij}) = W_{\text{взаим}} -$$

энергия взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов.



Теперь используем полученную формулу для нахождения энергии взаимодействия системы  $N$  неподвижных точечных зарядов. Вспоминая про принцип «парности» сил (см. §5 раздел «Механика»), можем представить энергию системы зарядов как сумму энергий пар отдельно взаимодействующих зарядов. Учтём при этом, что энергия взаимодействия зарядов  $i$  и  $j$   $W_{ij}$  равна энергии взаимодействия  $W_{ji}$

$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N q_i \varphi_j(r_{ij}).$$

Появление коэффициента  $\frac{1}{2}$  в двойной сумме было обсуждено в §10 раздела «Механика» на примере турнирной таблицы спортивных игр.

Окончательно, энергия взаимодействия системы  $N$  неподвижных точечных зарядов:

Команда	«Ветер»	«Ураган»	«Тайфун»	«Торнадо»
«Ветер»		2:0	3:1	1:4
«Ураган»	0:2		2:2	3:1
«Тайфун»	1:3	2:2		3:3
«Торнадо»	4:1	1:3	3:3	

$$W_{\text{системы}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N q_i \varphi_j(r_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( q_i \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varphi_j(r_{ij}) \right).$$

величина потенциала  $\varphi_j$ , создаваемого зарядом  $j$  в точке пространства, где находится заряд  $i$ , от самого  $q_i$  не зависит:  $\varphi_j = k \frac{q_j}{r_{ij}}$ , поэтому множитель  $q_i$  для всех слагаемых внутренней суммы одинаков, и его можно вынести за знак этой суммы

Обозначим за  $\varphi_i$  потенциал, создаваемый всеми остальными зарядами на месте  $i$ -го заряда системы

$$\varphi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varphi_j(r_{ij}),$$

тогда энергия взаимодействия системы  $N$  неподвижных точечных зарядов может быть представлена следующей компактной формой:

$$W_{\text{системы}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i.$$

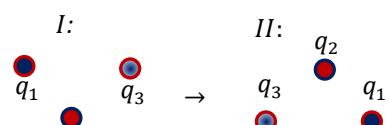
Простой анализ полученной формулы показывает, что из неё исключены слагаемые вида  $\varphi_i(r_{ii})$ , т.к. во внутренней сумме мы рассматриваем только слагаемые, у которых  $j \neq i$ . Что это за слагаемые, и можно ли их исключить?

$$\varphi_i(r_{ii}) = k \frac{q_i}{r_{ii}} \xrightarrow{r_{ii}=0} \infty$$

$r_{ii}$  – расстояние от заряда  $q_i$  до точки пространства, в которой он же и находится, понятно, что для всех точечных зарядов  $r_{ii} = 0$ . Т.е. в выражение для энергии системы мы не включаем слагаемые, значительно превышающие те, которые в неё включены:  $\frac{q_j}{r_{ij}} \ll \frac{q_i}{r_{ii}}$ . Это становится

возможным лишь потому, что при исследовании электрических систем, нас интересует не сама энергия как таковая, а её изменение при переходе электрической системы из одного состояния в другое. Например, при изменении расположения зарядов системы:  $\Delta W_{\text{системы}} =$

$$= \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2 + q_3 \varphi_3)_{II} + k \frac{q_1^2}{r_{11}} + k \frac{q_2^2}{r_{22}} + k \frac{q_3^2}{r_{33}} -$$



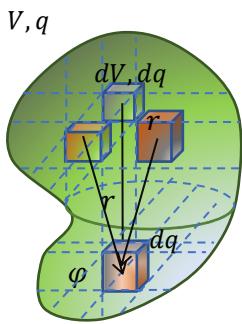
$$- \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2 + q_3 \varphi_3)_I - k \frac{q_1^2}{r_{11}} - k \frac{q_2^2}{r_{22}} - k \frac{q_3^2}{r_{33}} =$$

$$= \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3)_{II} - \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3)_I = W_{\text{сист}_{II}} - W_{\text{сист}_I}.$$

Причина возникновения подобной проблемы связана с условностью модели точечного заряда: в точку пространства (бесконечно малую область пространства) помещается заряд конечной величины.

Чтобы подчеркнуть, что формула для энергии взаимодействия  $W_{\text{сист}}$  не содержит слагаемых вида  $k \frac{q_i^2}{r_{ii}}$ , её чаще называют  $W_{\text{взаим}}$ .

### Энергия заряженного тела



Рассмотрим заряженное тело объёмом  $V$  и зарядом  $q$ , представив его как систему бесконечно малых объемов  $dV$ , считая, что каждый объём содержит в себе бесконечно малый заряд  $dq$ . Энергия такой системы тоже может быть найдена по полученной выше формуле

$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i,$$

надо только от суммирования перейти к интегрированию, учитывая все малые заряды, из которых состоит тело

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi dq -$$

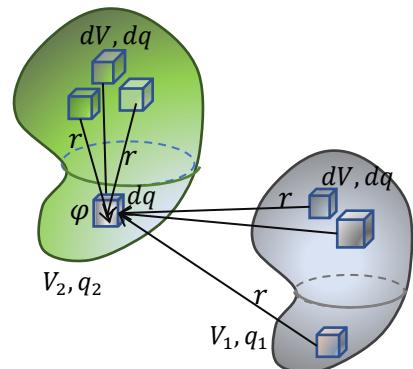
по всему  
заряженному телу

собственная энергия заряженного тела,

$\varphi$  — по-прежнему потенциал, создаваемый всеми зарядами заряженного тела (всеми физически бесконечно малыми объёмами  $dV$ ), в точке, где находится заряд  $dq$ .

Проблемы «выбросывания» из формулы бесконечно больших слагаемых теперь нет, слагаемые  $q_i \cdot k \frac{q_i}{r_{ii}}$  при использовании представления о непрерывном распределении зарядов по телу переходят в величины типа  $dq \cdot k \frac{dq}{r} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} \frac{0}{0}$  — неопределённость, значение которой равно 0.

Если в пространстве имеется несколько заряженных тел, то формула для энергии взаимодействия системы зарядов применима и в таком случае. Надо только понимать, что взаимодействие зарядов происходит не только между зарядами собственного тела, но и с зарядами других тел



системы. Это приводит к необходимости заменить пределы интегрирования в последней формуле с  $\int_{\text{заряженному телу}}^{\text{по всему}}$  на интегрирование  $\int_{\text{пространству}}^{\text{по всему}}$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{пространству}}^{\text{по всему}} \varphi dq$$

Внешне формулы выглядят одинаково, но иные пределы интегрирования, позволяют называть последнюю формулу *полной энергией взаимодействия* или просто *полной энергией* системы заряженных тел. В нашем примере энергия системы двух заряженных тел будет складываться из собственных энергий первого и второго тела, а также энергии взаимодействия между телами:  $W = W_1 + W_2 + W_{12}$ .

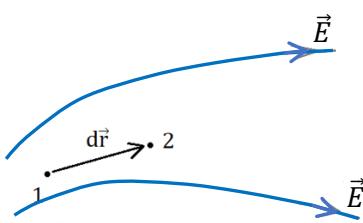
## §6. Связь между напряженностью и потенциалом электрического поля

В прошлом параграфе мы предложили новую функцию для описания электростатического поля – потенциал. Преимуществом этой функции стала её непосредственная связь с энергией. При известном значении напряжённости электрического поля  $\vec{E}$  задача о нахождении потенциала поля в некоторой точке пространства сводится к вычислению определённого интеграла:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} d\vec{r} + \varphi(\vec{r}_0) \quad \text{или} \quad \varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} d\vec{r},$$

если в качестве начала отсчёта выбирать бесконечность.

Но встречаются задачи, в которых необходимо по известной функции потенциала  $\varphi = \varphi(\vec{r})$  определить в пространстве напряжённость электростатического поля  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ :  $\vec{E} \leftarrow ?$   $\varphi$ .



Итак, предположим, что в любой точке пространства нам известен потенциал, т.е. известен явный вид функция  $\varphi = \varphi(\vec{r})$ . Сам факт существования потенциала свидетельствует о том, что рассматриваемое нами электрическое поле – потенциальное (консервативное). Совершив в нашем пространстве малое перемещение  $d\vec{r}$ , перейдём из точки 1 в бесконечно близкую ей точку 2. Вычислим работу, совершаемую силами электрического поля при этом перемещении  $\delta A$ :  $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r}$ .

Та же самая работа, исходя из консервативности нашего поля, (см. §5) равна:  $\delta A = -qd\varphi$ .

Приравняв, получаем выражение  $q\vec{E} \cdot d\vec{r} = -qd\varphi$  или  $\vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\varphi$ .

Предположим, что для описания положения точек поля в нашем пространстве введена декартова система координат. Тогда малое перемещение может быть записано как

$$d\vec{r} = d\vec{r}_x + d\vec{r}_y + d\vec{r}_z = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}.$$

Вектор  $\vec{E}$ , переписанный в покомпонентной форме в декартовой системе координат будет иметь вид:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}.$$

Так как выражение  $\vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\varphi$  справедливо для любого перемещения  $d\vec{r}$ , рассмотрим сначала перемещение, совершающееся вдоль оси  $OX$ :  $d\vec{r}_x = dx \cdot \vec{i}$ .

Приращение функции  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  при таком перемещении связано только с изменением переменной  $x$ , две другие переменные  $y, z$  не изменяются.

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) \cdot dx \vec{i} = E_x dx$$

$$E_x dx = -d\varphi \quad \Rightarrow \quad E_x = -\frac{d\varphi}{dx} \Big|_{\substack{y = \text{const} \\ z = \text{const}}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Аналогичным образом совершая перемещение вдоль оси  $OY$   $d\vec{r}_y = dy \cdot \vec{j}$ : получаем:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = E_y dy; \quad E_y dy = -d\varphi \quad \Rightarrow \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy} \Big|_{\substack{x = \text{const} \\ z = \text{const}}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

вдоль оси  $OZ$   $d\vec{r}_z = dz \cdot \vec{k}$ :

$$E_z dz = -d\varphi \quad \Rightarrow \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz} \Big|_{\substack{x = \text{const} \\ y = \text{const}}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Совершив такие перемещения, мы получили возможность определить проекции вектора  $\vec{E}$ , следовательно, теперь можем найти весь вектор в целом:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = -\left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \\ &= -\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi = -\nabla \varphi \end{aligned}$$

В математике сумма трёх подобных частных производных по координатам, умноженных на соответствующие единичные векторы, называется *оператором набла* (оператором Гамильтона):

$$\nabla^{\text{def}} \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} -$$

*векторный дифференциальный оператор*, оператор набла для трёхмерного евклидова пространства в прямоугольной декартовой системе координат. Соответственно, в других системах координат вид оператора набла отличается от приведённого. В случае, когда оператор набла действует на скалярную функцию, результатом является *вектор градиента*:

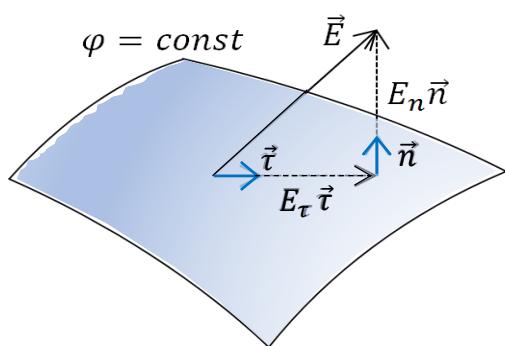
$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi.$$

Таким образом, связь между напряжённостью и потенциалом электростатического поля может быть выражена формулой  $\vec{E} = -\nabla\varphi$  или  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ .

Значит, задача о нахождении напряжённости электрического поля по известной функции потенциала этого поля решается с помощью операции дифференцирования.

Остановимся подробнее на геометрическом смысле полученного выражения

$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ . Для этого нам понадобится новое понятие – понятие эквипотенциальной поверхности. Эквипотенциальная поверхность (поверхность равного потенциала) – это поверхность, на которой потенциал данного потенциального поля (в нашем случае электростатического поля  $\vec{E}$ ) имеет постоянное значение.



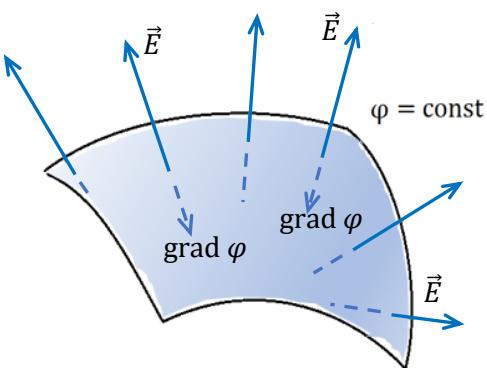
Рассмотрим произвольную эквипотенциальную поверхность в электрическом поле напряжённостью  $\vec{E}$ . Выясним как направлены векторы  $\vec{E}$  и  $\text{grad } \varphi$  по отношению к этой поверхности. Первое предположение – векторы  $\vec{E}$  и  $\text{grad } \varphi$  вблизи эквипотенциальной поверхности

направлены произвольным образом.

Совершим малое перемещение  $d\vec{r}$  по нашей эквипотенциальной поверхности (т.е. вдоль неё):  $d\vec{r} = dr \cdot \vec{\tau}$ , здесь  $\vec{\tau}$  – единичный вектор, направленный по касательной прямой к поверхности в направлении нашего перемещения. Вектор  $\vec{E}$  в этом случае тоже можно представить как две составляющие: параллельную (вдоль вектора  $\vec{\tau}$ ) и перпендикулярную поверхности (вдоль вектора  $\vec{n}$ ):  $\vec{E} = E_n \vec{n} + E_\tau \vec{\tau}$ . Как было показано выше, малая убыль потенциала равна скалярному произведению векторов напряжённости и малого перемещения:  $\vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\varphi$ , значит

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = (\vec{E}_\tau \cdot \vec{\tau} + \vec{E}_n \cdot \vec{n}) \cdot dr \cdot \vec{\tau} = E_\tau \cdot dr \Rightarrow E_\tau \cdot dr = -d\varphi.$$

Т.к. мы перемещаемся вдоль эквипотенциальной поверхности, то по определению функция потенциала будет иметь постоянное значение:  $\varphi = \text{const} \Rightarrow d\varphi = 0$ , значит  $E_\tau \cdot dr = 0$ . Наше перемещение вдоль эквипотенциальной поверхности было ненулевым  $dr \neq 0$ , т.е. обращаться в ноль должна тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}$  (составляющая направленная вдоль поверхности)  $E_\tau = 0$ . Следовательно, наше предположение о произвольном направлении вектора  $\vec{E}$  вблизи эквипотенциальной поверхности неверно.



Вектор  $\vec{E}$  может быть направлен только перпендикулярно такой поверхности  $\vec{E} = E_n \vec{n}$ . Соответственно, вектор  $\text{grad } \varphi = -\vec{E}$ , тоже направлен перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности.

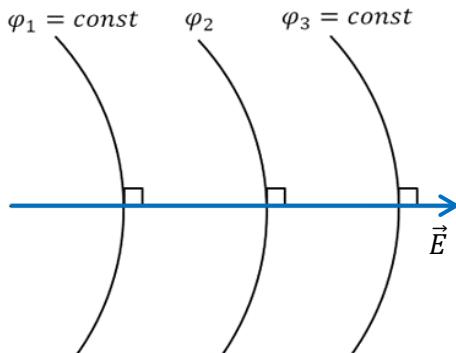
Теперь рассмотрим две близлежащие эквипотенциальные поверхности: первая

поверхность  $\varphi = \text{const}$  и вторая  $-\varphi + d\varphi = \text{const}$ .

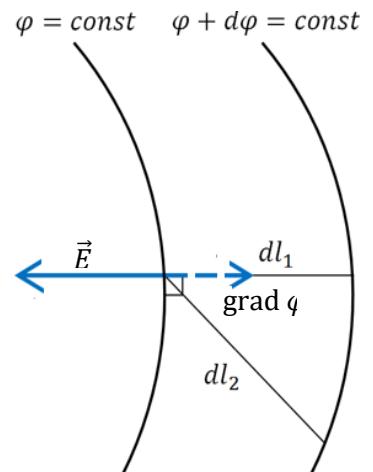
Будем перемещаться в пространстве между поверхностями.

Совершим два перемещения от первой поверхности ко второй: один раз – вдоль перпендикулярной прямой, соединяющей поверхности  $dl_1$ ; второй раз – по произвольной прямой  $dl_2$ , соединяющей те же поверхности. С очевидностью:  $dl_2 > dl_1$ . Отношение изменения потенциала к совершенному перемещению будет противоположным:  $\frac{d\varphi}{dl_1} > \frac{d\varphi}{dl_2}$ . Векторы  $\vec{E}$  и  $\text{grad } \varphi$

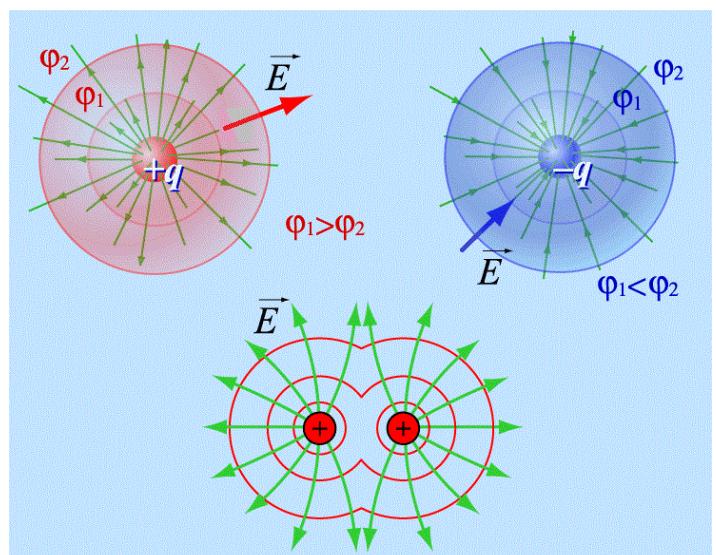
направлены вдоль  $dl_1$ , значит мы можем утверждать, что оба они указывают направление наискорейшего изменения потенциала поля в пространстве: вектор  $\text{grad } \varphi$  указывает на наискорейший рост потенциала, а вектор  $\vec{E}$  задаёт направление



наискорейшего уменьшения (убывания) потенциала. Соответственно, зная значения потенциалов в двух близлежащих точках, мы можем судить о направлении вектора напряжённости поля между ними. На рисунке слева: значения потенциалов  $\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3$ .



На правом рисунке приведены эквипотенциальные поверхности в электрических полях одиночных точечных зарядов и системе двух положительных зарядов.



## ***Математическое дополнение: операторы Гамильтона и Лапласа***

Векторный дифференциальный оператор набла или оператор Гамильтона для трёхмерного евклидова пространства в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\nabla^{\text{def}} \vec{l} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Оператор – это правило, согласно которому одна функция преобразуется в другую. Иными словами, действуя оператором на функцию, мы получаем другую функцию. В качестве примера простейших операторов можно привести умножение на число ( $2 \cdot x \rightarrow 2x$ ) и обыкновенную производную ( $\left(\frac{d}{dx}(x^2)\right) \rightarrow 2x$ ).

Через оператор набла естественным способом выражаются основные операции векторного анализа: grad (градиент), div (дивергенция), rot (ротор). С операцией ротор познакомимся в следующем параграфе, а здесь покажем, что дивергенцию, введённую в §4, тоже можно выразить с помощью оператора набла.

В случае трёхмерного евклидова пространства в прямоугольной декартовой системе координат мы получили для дивергенции следующее выражение:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Стоящие в нём  $E_x, E_y, E_z$  – проекции вектора  $\vec{E}$  на оси декартовой системы координат

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}.$$

Аналогично, частные производные  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  – компоненты оператора набла

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Выражение  $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$  это результат скалярного умножения оператора набла на вектора

$\vec{E}$ :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \text{div } \vec{E}.$$

Иногда, исходя из строения, оператор набла называют векторной производной, т.к. в нём присутствуют элементы обоих математических объектов.

В случае, когда вектор  $\nabla$  умножается на скалярную функцию (например,  $\varphi$ ), то результатом такого действия является вектор, который представляет собой градиент:  $\nabla \varphi = \text{grad } \varphi$ .

В случае, когда вектор  $\nabla$  скалярно умножается на вектор (например,  $\vec{E}$ ), то результатом такого действия является скаляр, т.е. дивергенция:  $\nabla \cdot \vec{E} = (\nabla, \vec{E}) = \text{div } \vec{E}$ .

Примеры операций с оператором набла.

- оператор набла не коммутирует с векторами:  $\nabla \cdot \vec{E} \neq \vec{E} \cdot \nabla$ ;
- $a, b$  – скалярные функции

для удобства, при умножении оператора набла на сложное выражение, обычно дифференцируемое поле обозначают стрелочкой или точечкой

$$\nabla \cdot (\underbrace{ab}_{\text{скаляр}}) = \nabla \cdot (a \vec{b}) + \nabla \cdot (\vec{a} b) = (\underbrace{\nabla a}_{\text{вектор}}) \cdot \vec{b} + a \cdot (\underbrace{\nabla b}_{\text{вектор}}) = b \cdot \nabla a + a \cdot \nabla b$$

$$\operatorname{grad} ab = b \operatorname{grad} a + a \operatorname{grad} b;$$

получается, что вначале работают правила взятия производных от функций, а затем правила действия с векторными величинами.

- $a$  – скалярная функция,  $\vec{b}$  – векторная функция:

$$\nabla \cdot (\underbrace{a \vec{b}}_{\text{вектор}}) = \nabla \cdot (a \vec{b}) + \nabla \cdot (\vec{a} \vec{b}) = (\underbrace{\nabla a}_{\text{вектор}}) \cdot \vec{b} + a \cdot (\underbrace{\nabla \cdot \vec{b}}_{\text{скаляр}}) = \vec{b} \cdot \nabla a + a \cdot (\nabla \cdot \vec{b})$$

$$\operatorname{div} a \vec{b} = \vec{b} \cdot \operatorname{grad} a + a \operatorname{div} \vec{b};$$

- $\varphi$  – скалярная функция, повторное действие оператора набла на уже подействовавший оператор набла:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\underbrace{\nabla \varphi}_{\text{вектор}}) &= \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = \\ &= \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \varphi = (\nabla \cdot \nabla) \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Скалярное произведение  $(\nabla \cdot \nabla) = \nabla^2$  есть скалярный оператор, называемый оператором Лапласа (или просто лапласианом). Последний обозначается также  $\Delta$ . В декартовых координатах оператор Лапласа определяется следующим образом:  $\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ .

в формулах приходится, выяснять, исходя из контекста, что написано:  $\Delta$  – оператор Лапласа или  $\Delta$  – приращение (разность) величины.

(продолжение следует...)

## Уравнение Пуассона и Лапласа. Теорема единственности

Предположим, что в некотором пространстве нам известно распределение электрического заряда  $\rho = \rho(\vec{r})$ . Попробуем найти потенциал  $\varphi(\vec{r})$  этого электрического поля.

Рассмотрим два известных нам соотношения: теорему Гаусса в дифференциальной форме (см. §4)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

и связь между напряжённостью и потенциалом электростатического поля, полученную в начале этого параграфа:  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ . Перепишем оба выражения, используя оператор набла:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad \vec{E} = -\nabla \varphi.$$

Подставим второе соотношение в первое:

$$\nabla \cdot (-\nabla \varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Используя последний пример из математического дополнения  $-\nabla \cdot (\nabla \varphi) = -\nabla^2 \varphi = -\Delta \varphi$ , получим

$$\boxed{\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

– уравнение Пуассона.

Если в изучаемой части пространства нет никаких зарядов ( $\rho = 0$ ), уравнение Пуассона приобретает следующий вид:  $\boxed{\Delta \varphi = 0}$ . В такой форме оно носит название уравнения Лапласа (частный случай уравнения Пуассона). Очевидно, что в левых частях обоих уравнений стоит дифференциальный оператор – оператор Лапласа (или лапласиан).

Строго говоря, уравнение Пуассона является дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных, и в случае использования декартовой системы координат, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Очевидно, что решение подобных уравнений связано с определёнными трудностями. Более того, как и любое дифференциальное уравнение, уравнение Пуассона может иметь несколько решений.

В математической физике доказана так называемая *теорема единственности*, согласно которой задача о нахождении потенциала  $\varphi(\vec{r})$  по известному распределению плотности заряда  $\rho = \rho(\vec{r})$  в некоторой области пространства *имеет единственное решение*, если известны значения потенциала в каждой точке поверхности  $S$ , ограничивающей эту область. Если поверхность  $S$  уходит в бесконечность, то там потенциал должен быть равен нулю.

$$\begin{cases} \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \varphi|_S = \varphi_0 \end{cases} \text{ – имеет единственное решение.}$$

В математике задача, в которой искомая функция подчиняется определенным граничным условиям, т.е. принимает заданные значения на границе некоторой области, называется краевой, или граничной задачей. Итак, *краевая задача для уравнений Пуассона и Лапласа имеет единственное решение* – теорема единственности.

## §7. Теорема о циркуляции электростатического поля. Ротор

Ещё раз вспомним про краевую задачу для уравнения Пуассона:  $\begin{cases} \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \varphi|_S = \varphi_0 \end{cases}$  из

предыдущего параграфа. Она имеет единственное решение. Следовательно, если после нахождения потенциала  $\varphi$  электрического поля, созданного зарядом плотностью  $\rho(\vec{r})$  в этом пространстве, мы станем искать напряжённость  $\vec{E}$  этого поля:  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ , то найденная функция тоже будет единственной.

Представим теперь, что напряжённость этого поля  $\vec{E}$  по известной плотности заряда  $\rho(\vec{r})$  мы ищем напрямую, используя теорему Гаусса в дифференциальной форме  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ .

Пусть некоторое поле  $\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r})$  – решение нашего уравнения, т.е.  $\text{div } \vec{E}_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ . Добавим к этому решению некоторое векторное поле вида  $[\vec{a}, \vec{r}]$ , где  $\vec{a} = \text{const}$  – постоянный вектор, а  $\vec{r}$  – как и прежде радиус-вектор произвольной точки нашего поля. Можно убедиться, что  $\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) + [\vec{a}, \vec{r}]$  тоже в этом случае будет удовлетворять тому же равенству  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ :

считаем

$$\text{div } \vec{E} = \text{div} (\vec{E}_0 + [\vec{a}, \vec{r}]) \quad \text{или}$$

в операторной форме записи

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\vec{E}_0(\vec{r}) + [\vec{a}, \vec{r}]).$$

Как уже упоминалось в §6, дифференциальный оператор набла часто называют векторной производной, поэтому

$$\nabla \cdot (\vec{E}_0 + [\vec{a}, \vec{r}]) = \nabla \cdot \vec{E}_0 + \nabla \cdot [\vec{a}, \vec{r}].$$

$\nabla \cdot [\vec{a}, \vec{r}]$  – операция смешанного произведения (см. §3 из раздела «Механика»), и значит в ней возможна циклическая перестановка множителей  $\nabla \cdot [\vec{a}, \vec{r}] = -\nabla \cdot [\vec{r}, \vec{a}] = -[\nabla, \vec{r}] \cdot \vec{a}$ .

Здесь мы также учли, что  $\nabla$  действует только на  $\vec{r}$  т.к.  $\vec{a} = \text{const}$ . Используем приведённую в том же параграфе покомпонентную запись векторного произведения, чтобы найти векторное произведение  $[\nabla, \vec{r}] = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \vec{k} = 0,$$

Следовательно,  $\nabla \cdot [\vec{a}, \vec{r}] = 0$ .

Получается, что

$$\nabla \cdot (\vec{E}_0 + [\vec{a}, \vec{r}]) = \nabla \cdot \vec{E}_0 = \operatorname{div} \vec{E}_0,$$

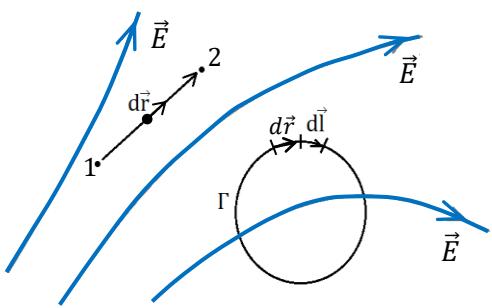
и

поле  $\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) + [\vec{a}, \vec{r}]$ , так же как и поле  $\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r})$ , является решением нашего уравнения  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ .

Вывод: использование только одной теоремы Гаусса не позволяет однозначно определить вектор напряжённости электрического поля. Необходимо ещё какое-то условие. Таким условием может стать вторая важная теорема из теории векторных полей – *теорема о циркуляции*.

В примере на нахождение вектора  $\vec{E}$  по результатам решения краевой задачи дополнительным условием стало условие, что искомое поле  $\vec{E}$  – потенциальное (консервативное) поле. Соответственно, работа сил поля при перемещении заряда из точки

поля 1 в точку 2 не зависит от траектории движения, а определяется только начальным и конечным положением заряда (см. §5):



$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = q(\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)).$$

В разделе «Механика» было приведено ещё одно определение консервативности силового поля (см. §8): *работа консервативных сил по любому замкнутому пути равна нулю*:

$$A_o = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} q\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

в этом выражении малое перемещение  $d\vec{r}$  совпадает с элементом длины контура  $\Gamma$  –  $d\vec{l}$ . Следовательно, для любого потенциального электрического поля (электростатического поля) справедливо выражение:

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.}$$

Интеграл от векторного поля, стоящий в левой части этого выражения, называется *циркуляцией векторного поля* по данному замкнутому контуру  $\Gamma$ . Всё выражение целиком носит название *теоремы о циркуляции электростатического поля* (в интегральной форме записи).

Таким образом, возвращаясь к проблеме поиска электрического поля по теореме Гаусса, можем сказать, что для однозначного определения поля  $\vec{E}$  необходимо будет ещё задать циркуляцию этого поля.

Так же, как и в случае с теоремой Гаусса, для расширения возможностей применения теоремы о циркуляции перепишем её в другую форму – дифференциальную (или локальную). Электростатическое поле  $\vec{E}$  – потенциальное поле, для него существует функция потенциала  $\varphi$ , такая, что  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ . Соответственно, при использовании для описания поля прямоугольной декартовой системы координат будут верны следующие соотношения (см. §6) для компонент вектора  $\vec{E}$ :

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Сосчитаем перекрёстные производные, т.е. продифференцируем проекцию поля  $E_x$  по переменным  $y$  и  $z$  соответственно,  $E_y$  – по  $z$  и  $x$ ,  $E_z$  – по  $x$  и  $y$ :

	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$
$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$	----	$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$	$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$
$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$	$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$	---	$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$
$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$	$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$	$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$	---

Так как порядок взятия частных производных не имеет значения для конечного результата,

Пример  $f = x^2y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2xy \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x;$$

аналогично:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y) = x^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}x^2 = 2x.$$

можно приравнять соответствующие ячейки таблицы между собой:

$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$	$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$	$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$	
$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$	$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$	или	$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$
$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$	$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}$		$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$

Результаты, полученные в последнем столбике, умножим на единичные векторы декартовой системы координат и сложим. С очевидностью, полученное выражение будет равно нулю:

$$\left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k} = 0.$$

Остается разобраться, чем является такая сумма? В начале параграфа у нас уже было выражение похожее на это. Тогда мы с помощью определителя искали результат векторного произведения  $[\nabla, \vec{r}]$  так же в декартовой системе координат.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) = [\nabla, \vec{E}]. \end{aligned}$$

Таким образом, у нас получилось, что для электростатического поля векторное произведение оператора набла и вектора напряженности поля  $\vec{E}$  равно нулю:

$$[\nabla, \vec{E}] = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

– дифференциальная (локальная) форма *теоремы о циркуляции электростатического поля*.

В прошлом параграфе уже говорилось, что в случае, когда вектор  $\nabla$  скалярно умножается на вектор (например,  $\vec{E}$ ), то результатом такого действия является скаляр, т.е. *дивергенция*:

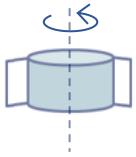
$$\nabla \cdot \vec{E} = (\nabla, \vec{E}) = \operatorname{div} \vec{E}.$$

Когда же вектор  $\nabla$  векторно умножается на вектор (например,  $\vec{E}$ ), то результатом такого действия является вектор, носящий название *ротор*:

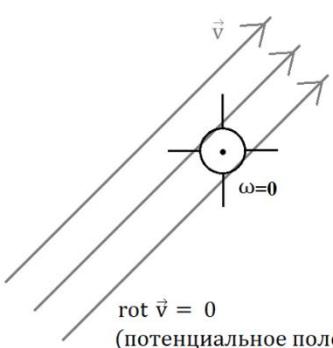
$$\nabla \times \vec{E} = [\nabla, \vec{E}] = \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Выясним физический смысл полученной величины – ротора.

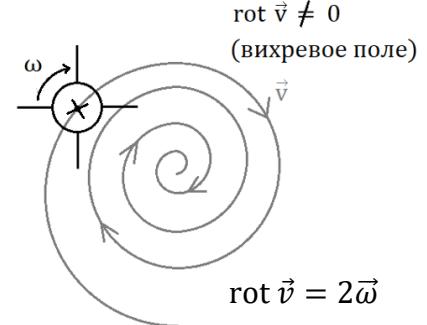
Термин «циркуляция» был первоначально введен в гидродинамике для расчета движения



жидкости по замкнутому каналу. В качестве интуитивного образа для ротора – завихренности поля можно использовать представление о вращении помещённого в поток маленького (без инерции, вращаемого потоком) колеса (вертушки) с прямыми (не винтовыми) лопастями. Помещая такую вертушку в поток жидкости, по её движению можно судить о вращательных свойствах потока в



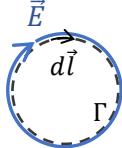
данном месте:  $\operatorname{rot} \vec{v} \neq 0$  в тех точках поля, где жидкость будет вращать вертушку, т.е. в этой точке поля его силовые линии искривлены настолько, что могут образовывать «вихри».



Векторное поле, ротор которого всюду равен нулю ( $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ ), является *потенциальным*, в противном случае ( $\operatorname{rot} \vec{v} \neq 0$ ) – нет.

Электростатическое поле – потенциальное поле. *Силовые линии потенциального поля не могут быть замкнутыми.* В противном случае циркуляция этого поля по замкнутому контуру, совпадающему с силовой линией поля, будет существенно положительной:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} |\vec{E}| \cdot |d\vec{l}| > 0.$$



продолжение **математического дополнения: операторы Гамильтона и Лапласа**

Примеры операций с оператором набла.

- $a$  – скалярная функция, оператор набла повторно действует на вектор  $\nabla a$ , но в отличие от примера из предыдущего параграфа это действие – векторное умножение:

$$\nabla \times \nabla a = [\nabla, \nabla a] = [\nabla, \nabla]a = 0.$$

во-первых, любую скалярную величину можно вынести из-под скобок векторного произведения (см. §3 раздел «Механика»); во-вторых, векторное произведение вектора на самого себя равно нулю, т.к. в этом случае синус угла между векторами обращается в ноль.

$$[\nabla, \nabla a] = [\nabla, \operatorname{grad} a] = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} a) \Rightarrow \operatorname{rot}(\operatorname{grad} a) = 0.$$

- $\vec{b}$  – векторная функция, оператор набла скалярно умножается на вектор  $[\nabla, \vec{b}]$ :

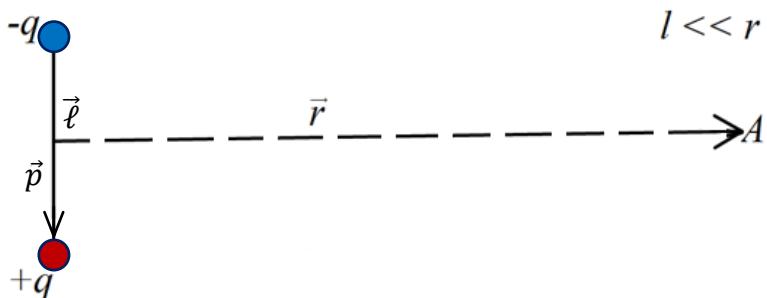
$$\nabla \cdot [\nabla, \vec{b}] = [\nabla, \nabla] \cdot \vec{b} = 0.$$

использована возможность циклической перестановки множителей в смешанных произведениях (см. §3 раздел «Механика»)

$$\nabla \cdot [\nabla, \vec{b}] = \nabla \cdot \operatorname{rot} \vec{b} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{b}) \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{b}) = 0.$$

## §8. Электрический диполь

Электрический диполь – система, состоящая из двух зарядов, равных по величине и противоположных по знаку, расположенных на некотором расстоянии  $\ell$  друг от друга. Когда



$$l \ll r$$

говорят о поле диполя, предполагают сам диполь точечным, т.е. считают расстояния  $r$  от диполя до интересующих нас точек поля значительно больше  $\ell$ :  $r \gg \ell$ . Важной характеристикой

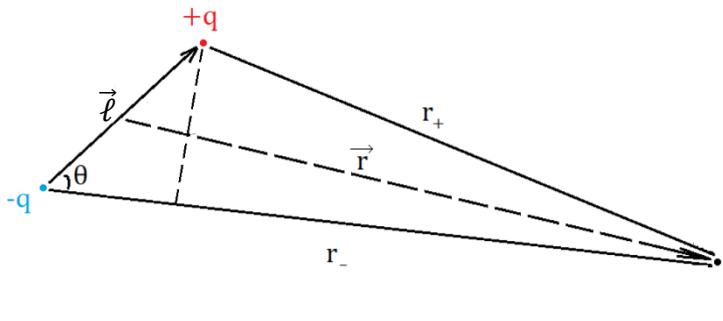
диполя является его дипольный момент:  $\vec{p} = q\vec{\ell}$  – вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному. Величина дипольного момента определяется как произведение абсолютного значения зарядов диполя на расстояние между ними:  $p = q\ell$ , где  $q > 0$ .

### Потенциал электрического поля диполя

Т.к. диполь – система двух точечных зарядов, то его потенциал можно найти, используя

принцип суперпозиции и известную формулу потенциала электрического поля точечного заряда (см. §5):

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \varphi_+(\vec{r}_+) + \varphi_-(\vec{r}_-) = \\ &= \frac{kq}{r_+} + \frac{k(-q)}{r_-} = kq \frac{r_- - r_+}{r_- \cdot r_+} \quad \square\end{aligned}$$



Здесь  $r_+$  и  $r_-$  – расстояния до точки поля от положительного и отрицательного заряда, угол  $\theta$  – угол между векторами  $\vec{\ell}$  (или  $\vec{p}$ ) и  $\vec{r}$  (ввиду малости расстояния  $\ell$  безразлично, из какой именно точки диполя проведён этот радиус-вектор  $\vec{r}$ ). Не забывая, что  $r_+, r_-, r \gg \ell$ , можно приближённо положить:

$$r_+ \cdot r_- \cong r^2, \quad r_- - r_+ \cong \ell \cos \theta.$$

$$\square kq \frac{r_- - r_+}{r_- \cdot r_+} = kq \frac{\ell \cos \theta}{r^2} = k \frac{q\ell \cos \theta}{r^2} = k \frac{p \cos \theta}{r^2} = k \frac{pr \cos(\vec{p}, \vec{r})}{r^3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}}$$

– потенциал электрического поля диполя.

Из последней формулы следует, что потенциал диполя уменьшается с увеличением расстояния быстрее, чем потенциал точечного заряда:

$$\varphi_{\text{дип}} \sim \frac{1}{r^2}, \quad \varphi_{\text{точ.заряд}} \sim \frac{1}{r}.$$

### Напряжённость электрического поля диполя

Зная потенциал поля электрического поля диполя, найдём его напряжённость, используя полученную в §6 формулу  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$  или  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ .

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\nabla\left(k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}\right) = -k\nabla\left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}\right) = -k\nabla\left((\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \frac{1}{r^3}\right) =$$

в такой записи получается, что оператор набла действует на произведение двух скалярных функций  $\vec{p} \cdot \vec{r}$  и  $\frac{1}{r^3}$ ;  
пример, похожий на этот был разобран в математическом приложении из §6

$$= -k\left(\frac{1}{r^3}\nabla(\vec{p} \cdot \vec{r}) + (\vec{p} \cdot \vec{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) \equiv$$

Сосчитаем каждое слагаемое по отдельности, будем использовать для векторных величин их покомпонентные формы для декартовой системы координат.

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = (\vec{i}p_x + \vec{j}p_y + \vec{k}p_z) \cdot (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = p_x x + p_y y + p_z z$$

$$1) \quad \nabla(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(p_x x + p_y y + p_z z) =$$

$$= \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(p_x x + p_y y + p_z z) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(p_x x + p_y y + p_z z) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(p_x x + p_y y + p_z z) =$$

$$\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(p_x x + p_y y + p_z z) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(p_x x) + \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(p_y y) + \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(p_z z) = \vec{i} \cdot p_x \frac{\partial x}{\partial x} + 0 + 0 = \vec{i} \cdot p_x$$

$$= \vec{i} \cdot p_x + \vec{j} \cdot p_y + \vec{k} \cdot p_z = \vec{p}$$

$$2) \quad \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \nabla(r^{-3}) = -3r^{-4}\nabla r = \frac{-3}{r^4}\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \vec{i} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$= \vec{i} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x = \vec{i} \frac{x}{r}$$

$$= \frac{-3}{r^4}\left(\vec{i}\frac{x}{r} + \vec{j}\frac{y}{r} + \vec{k}\frac{z}{r}\right) = \frac{-3}{r^5}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \frac{-3}{r^5}\vec{r}$$

$$\equiv -k\left(\frac{1}{r^3}\nabla(\vec{p} \cdot \vec{r}) + (\vec{p} \cdot \vec{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) = -k\left(\frac{1}{r^3} \cdot \vec{p} + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \frac{-3}{r^5}\vec{r}\right) =$$

$$= -k \left( \frac{r^2}{r^5} \cdot \vec{p} + \frac{-3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} \right) = -k \frac{r^2 \vec{p} - 3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}$$

– вектор напряжённости электрического поля диполя.

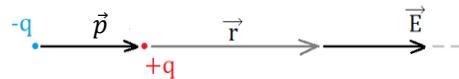
Так же, как и потенциал, напряжённость поля диполя уменьшается при удалении от диполя быстрее, чем напряжённость поля точечного заряда:

$$E_{\text{дип}} \sim \frac{1}{r^3}, \quad E_{\text{точ.заряд}} \sim \frac{1}{r^2}.$$

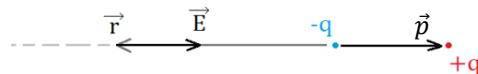
Рассмотрим, что представляют собой силовые линии поля диполя.

- $\vec{r} \parallel \vec{p}$  – начнём с точек поля, лежащих на оси диполя:

$$\vec{E}_{\parallel\parallel} = k \frac{3(pr)\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} = k \frac{3\vec{p}rr - r^2 \vec{p}}{r^5} = k \frac{3r^2 \vec{p} - r^2 \vec{p}}{r^5} = \frac{2k}{r^3} \vec{p}; \quad \vec{p} \uparrow\uparrow \vec{r}$$



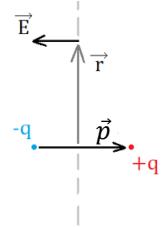
$$\vec{E}_{\uparrow\downarrow} = k \frac{3(-pr)\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} = k \frac{3(pr)(-\vec{r}) - r^2 \vec{p}}{r^5} = k \frac{3r^2 \vec{p} - r^2 \vec{p}}{r^5} = \frac{2k}{r^3} \vec{p}; \quad \vec{p} \uparrow\downarrow \vec{r}$$



Таким образом, во всех точках на оси диполя  $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{p}$ .

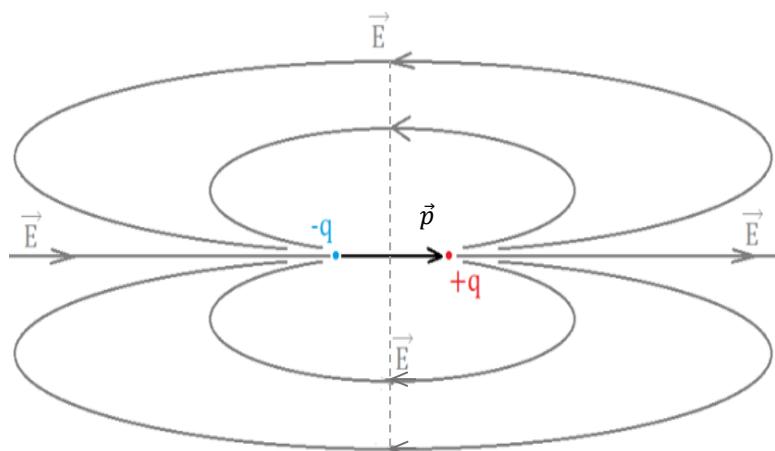
- $\vec{r} \perp \vec{p}$  – рассмотрим точки поля, лежащие на линии перпендикулярной оси диполя и проходящей через его центр:

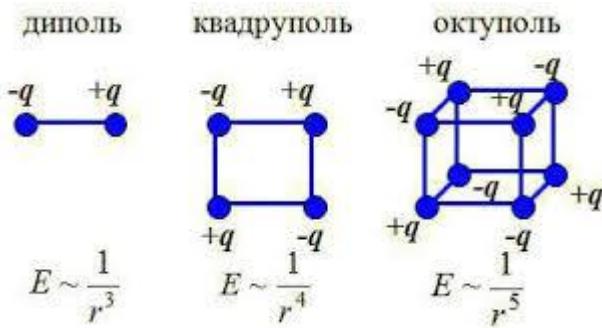
$$\vec{E}_{\perp} = k \frac{0 - r^2 \vec{p}}{r^5} = -\frac{k}{r^3} \vec{p} = -\frac{\vec{E}_{\parallel}}{2}.$$



Таким образом, в этих точках  $\vec{E} \uparrow\downarrow \vec{p}$ .

#### Силовые линии электрического поля диполя:





Помимо диполей электрические поля в пространстве могут создавать и более крупные сообщества точечных зарядов: квадрупулы и октупулы, но, как можно догадаться по аналогии с полем диполя, напряжённости таких полей убывают по мере удаления от такой системы ещё быстрее.

## Диполь во внешнем электрическом поле

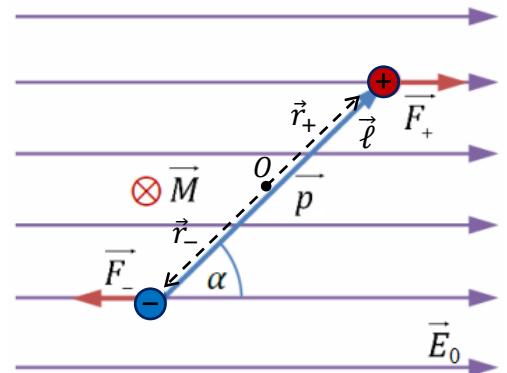
Рассмотрим сначала ситуацию, когда электрическое поле, в которое помещён диполь, является *однородным полем* (силовые линии такого поля параллельны и густота их одинакова во всех точках):

$\vec{E}_0$  – напряжённость нашего внешнего поля. Результирующая сила, действующая на диполь со стороны электрического поля равна:

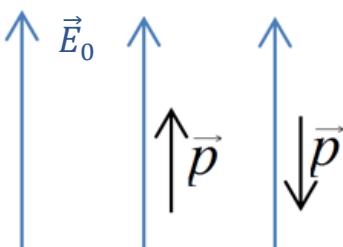
$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E}_0(\vec{r}_+) + (-q)\vec{E}_0(\vec{r}_-) = q(\vec{E}_0 - \vec{E}_0) = 0.$$

Значит со стороны однородного поля никакая сила на диполь не действует, и в таком поле он либо будет покойиться, либо перемещаться равномерно и прямолинейно. С другой стороны, тело на которое действуют силы, может вращаться под действием их моментов. Сосчитаем момент сил, действующих на диполь:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_+ + \vec{M}_- = [\vec{r}_+, \vec{F}_+] + [\vec{r}_-, \vec{F}_-] = ([\vec{r}_+, q\vec{E}_0] + [\vec{r}_-, (-q)\vec{E}_0]) = q([\vec{r}_+, \vec{E}_0] - [\vec{r}_-, \vec{E}_0]) = \\ &= q([(r_+ - r_-), \vec{E}_0]) = [q\vec{\ell}, \vec{E}_0] = [\vec{p}, \vec{E}_0]. \end{aligned}$$

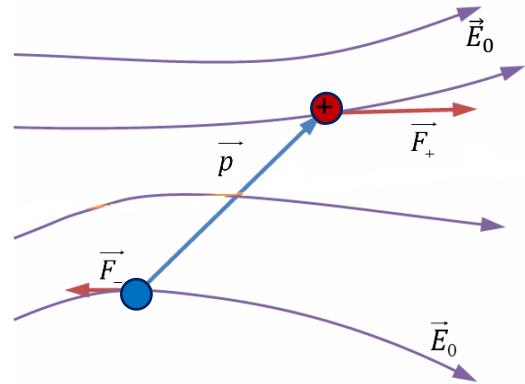


Этот момент сил стремится повернуть диполь так, чтобы его дипольный момент  $\vec{p}$  установился по направлению внешнего поля  $\vec{E}_0$ . Такое положение диполя является устойчивым:  $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{M} = 0$ : в этом положении энергия диполя, равная  $W = -(\vec{p} \cdot \vec{E}_0)$  – минимальна:  $W = W_{min}$ . Положение диполя, когда  $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{E}_0$  тоже приводит к тому, что момент силы обращается в ноль  $\vec{M} = 0$ , но оно является неустойчивым, т.к. в нём энергия диполя максимальна  $W = -(\vec{p} \cdot \vec{E}_0) = W_{max}$ .



В случае, когда диполь оказывается помещённым в неоднородное электрическое поле равнодействующая сила, действующая на диполь со стороны электрического поля, в ноль обращаться не будет:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E}_0(\vec{r}_+) + (-q)\vec{E}_0(\vec{r}_-) = \\ = q(\vec{E}_0(\vec{r}_+) - \vec{E}_0(\vec{r}_-)) \neq 0.$$



У нас на картинке густота силовых линий поля  $\vec{E}_0$  больше в точке, где расположен положительный полюс, следовательно, величина силы  $|\vec{F}_+|$  будет больше величины силы, действующей на отрицательный полюс диполя  $|\vec{F}_-|$ . Диполь станет вдвигаться в область более сильного поля.

Таким образом, во внешнем электрическом поле  $\vec{E}$  на диполь со стороны поля действует сила, заставляющая его вдвигаться в область, где величина напряжённости поля выше:

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{r}_+) - \vec{E}(\vec{r}_-)).$$

Момент этой силы стремится повернуть диполь так, чтобы его дипольный момент стал параллелен полю:

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}].$$

Энергия диполя во внешнем электрическом поле:

$$W = -(\vec{p} \cdot \vec{E}).$$

## Электрическое поле в веществе

Размеры атомных ядер в  $10^4 - 10^5$  раз меньше размеров самих атомов вещества, размер электрона еще на 7 – 8 порядков меньше. На долю заряженных частиц приходится ничтожная ( $10^{-12} - 10^{-15}$ ) часть занимаемого телом пространства, весь остальной объём тела занимает вакуум. Атомные ядра и электроны создают в нём электромагнитные поля. Поле в промежутках между атомами и внутри них необычайно сложно меняется в пространстве и во времени. Такое *поле* называется *микроскопическим*. Столь же сложно меняется внутри вещества плотность распределения электрических зарядов. Такая *плотность* также является *микроскопической*. Микроскопические величины принято обозначать как  $\vec{E}_{\text{микр}}$ ,  $\rho_{\text{микр}}$  и т.п.

Задание микроскопических величин в каждой точке пространства и в каждый момент времени дало бы наиболее детальное описание поля. Однако практически (а может быть, и принципиально) оно неосуществимо. Тут можно вспомнить проблемы, которые возникали при использовании *динамического метода* описания систем многих частиц в молекулярной физике (см. §16 раздел «Молекулярная физика. Термодинамика»). Для многих целей достаточно менее подробное и несравненно более простое описание, которым пользуется макроскопическая электродинамика. Она отвлекается от атомистического строения вещества и связанных с ним изменением поля на атомных расстояниях, и оперирует усредненными электрическими полями и распределениями зарядов, плавно меняющимися во времени и в пространстве (на макроскопических расстояниях). Такие *электрические поля и распределения зарядов* называются *макроскопическими* и обозначаются  $\vec{E}, \rho$ . Если приводить аналогии из раздела «Молекулярная физика. Термодинамика», то макроскопическая электродинамика аналогична *термодинамическому методу* описания систем многих частиц (см. §19 раздел «Молекулярная физика. Термодинамика»).

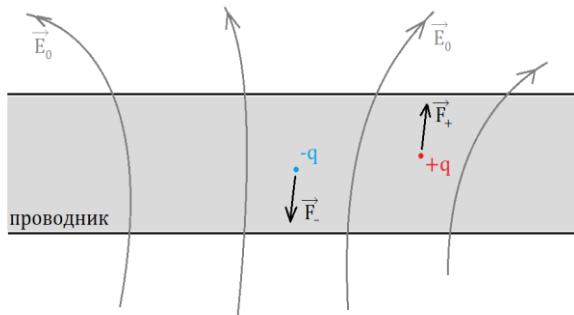
При внесении любого вещества во внешнее электрическое поле происходит частичное разделение положительных и отрицательных зарядов. В отдельных местах вещества появляются нескомпенсированные макроскопические заряды различного знака. Это явление называют *электростатической индукцией*, а появившиеся в результате разделения заряды – *наведенными (индуцированными) зарядами*.

Индуцированные заряды создают в пространстве собственное электрическое поле, которое складывается с исходным (внешним) электрическим полем. Полное поле является суперпозицией кулоновских полей, возбуждаемых в вакууме всеми исходными и индуцированными зарядами.

## §9. Проводники в электрическом поле

*Проводники* – вещества, в которых много свободных зарядов – зарядов способных перемещаться в пределах вещества на значительные расстояния. В металлах такими свободными зарядами являются не связанные с ионами кристаллической решетки электроны, которые в пределах вещества могут перемещаться на какие угодно расстояния. Также проводниками являются электролиты, в них роль свободных зарядов играют положительные и отрицательные ионы.

Поместим металлический проводник во внешнее электростатическое поле  $\vec{E}_0$ . На все



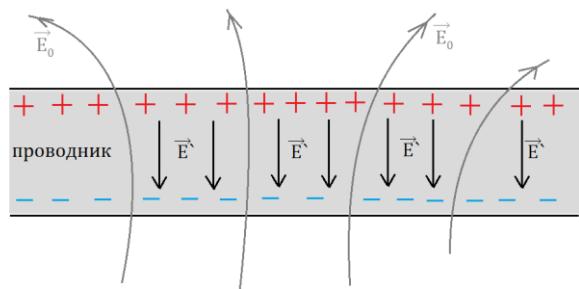
заряды в проводнике (ионы и электроны) будет действовать электрическое поле. В результате отрицательные заряды (электроны) будут смещаться против поля:

$$\vec{F}_- = -e\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{F}_- \downarrow \vec{E}_0,$$

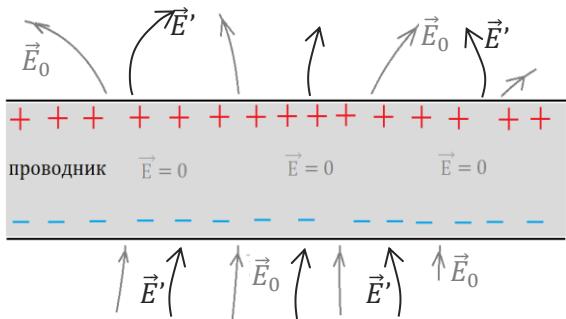
а положительные по полю

$$\vec{F}_+ = e\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{F}_+ \uparrow \vec{E}_0,$$

Такое перемещение зарядов (ток) будет продолжаться до тех пор, пока не установится распределение зарядов, при котором электрическое поле внутри проводника обратится в нуль. При этом одна поверхность проводника зарядится отрицательно, а на другой выступит избыточный (некомпенсированный) положительный заряд.



Эти индуцированные заряды создадут в проводнике своё собственное электрическое поле  $\vec{E}'$  – электрическое поле индуцированных зарядов. Оно будет направлено противоположно  $\vec{E}_0$ . Полное поле  $\vec{E}$ , как было сказано выше, найдётся суперпозицией этих двух полей:



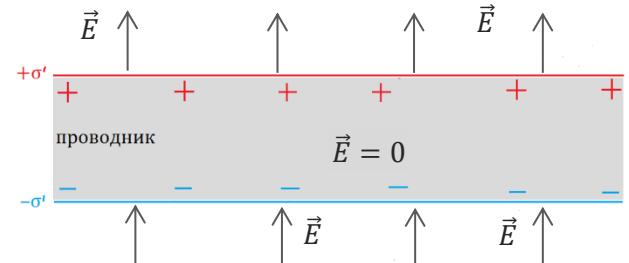
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0, \quad \vec{E}' \uparrow \vec{E}_0 \Rightarrow |\vec{E}'| = |\vec{E}_0|.$$

Получается, что проводник «вытесняет» из себя электрическое поле.

Как мы только что выяснили: в любой точке *внутри проводника поле равно нулю*  $\vec{E} = 0$ . Тогда внутри проводника также в любой его

точке обратится в ноль и дивергенция поля:  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ . По теореме Гаусса дивергенция поля связана с плотностью зарядов в этой точке поля:  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Следовательно, внутри проводника в любой точке:  $\rho = 0$ . Т.е. плотность индуцированных зарядов внутри проводника всюду равна нулю. Это значит, что *внутри проводника индуцированных зарядов нет*.

Индукционные заряды, как мы увидели, появляются лишь на поверхности проводника с некоторой плотностью  $\sigma'$  (*поверхностная плотность индуцированного заряда*), строго говоря различной в разных точках его поверхности. Этот заряд находится в очень тонком поверхностном слое – его толщина около одного - двух межатомных расстояний ( $d \approx (1 \div 5) 10^{-10}$  м).



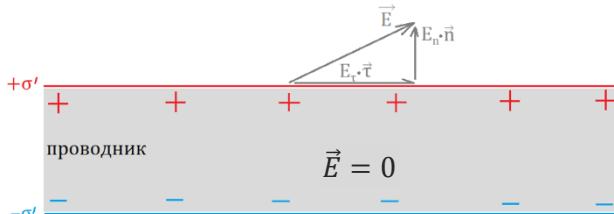
Теперь, рассматривая заряды, создающие электрические поля в пространстве, придётся их разделять на сторонние (первичные) заряды – заряды, являющиеся источниками внешних полей, и индуцированные заряды – заряды, возникающие благодаря этим внешним полям.

Отсутствие поля внутри проводника согласно формуле, связывающей напряжённость и потенциал электростатического поля  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi$  означает, что потенциал  $\varphi$  в проводнике одинаков во всех его точках:  $\varphi = \text{const}$ , т.е. любой проводник в электростатическом поле представляет собой *эквипотенциальную область*, а его поверхность является *эквипотенциальной*. Из этого факта, следует, что поле  $\vec{E}$  *непосредственно у поверхности проводника направлено по нормали к ней в каждой точке*.

Покажем, что такой же вывод о направлении поля непосредственно у поверхности проводника можно сделать на основании теоремы о циркуляции электростатического поля:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Полное поле  $\vec{E}$  – суперпозиция внешнего поля и поля индуцированных зарядов  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$  –



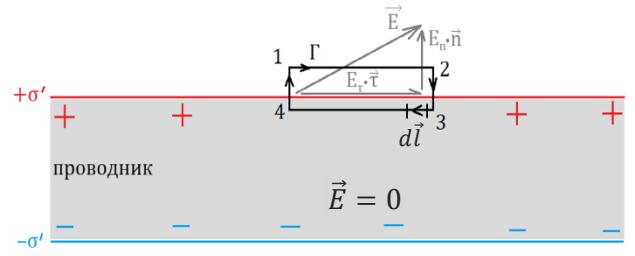
является электростатическим, как и внешнее поле  $\vec{E}_0$ . Предположим, что наше утверждение о направлении поля ошибочно, и оно у поверхности проводника направлено произвольным образом. Представим вектор  $\vec{E}$  как две составляющие  $E_n$  – направленную перпендикулярно поверхности проводника и  $E_\tau$  – направленную вдоль его поверхности:

$$\vec{E} = E_n \cdot \vec{n} + E_\tau \cdot \vec{\tau}.$$

Проводя вычисления по теореме о циркуляции, удобно использовать алгоритм, описанный в §3, где мы приводили примеры расчёта электрических полей с помощью теоремы Гаусса.

Шаг 1: выбор вспомогательного контура  $\Gamma$ ,

циркуляцию вектора  $\vec{E}$  по которому будем рассчитывать. В нашем случае контуром будет прямоугольник 12341, у которого стороны  $\ell_{41} \rightarrow 0$  и  $\ell_{23} \rightarrow 0$  (т.к. мы собираемся искать поле непосредственно у поверхности проводника), а стороны  $\ell_{12}$  и  $\ell_{34}$  таковы, чтобы величина напряжённости  $E$  была бы вдоль них приблизительно постоянной. Обход прямоугольника будем осуществлять по часовой стрелке.



Шаг 2: расчёт циркуляции вектора  $\vec{E}$  по выбранному контуру  $\Gamma$  – считаем интеграл в левой части теоремы о циркуляции.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{12341} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{12} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{23} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{34} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{41} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

– представим циркуляцию по прямоугольному контуру как сумму интегралов, считаемых по сторонам прямоугольника. В нашем случае только один интеграл отличен от нуля:

$$\int_{23} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ и } \int_{41} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad \text{т. к. } \ell_{23}, \ell_{41} \rightarrow 0$$

$$\int_{34} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad \text{т. к. внутри проводника } E = 0.$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{12} \vec{E} \cdot d\vec{l} + 0 + 0 + 0 = \int_{12} \vec{E} \cdot d\vec{l} =$$

$$d\vec{l} = dl \cdot \vec{\tau}, \quad \text{т. к. } d\vec{l} \uparrow \vec{\tau}$$

$$= \int_{12} (E_n \cdot \vec{n} + E_\tau \cdot \vec{\tau}) \cdot dl \cdot \vec{\tau} = \int_{12} (0 + E_\tau) \cdot dl = \int_{12} E_\tau \cdot dl = E_\tau \cdot \int_{12} dl = E_\tau \cdot \ell_{12}.$$

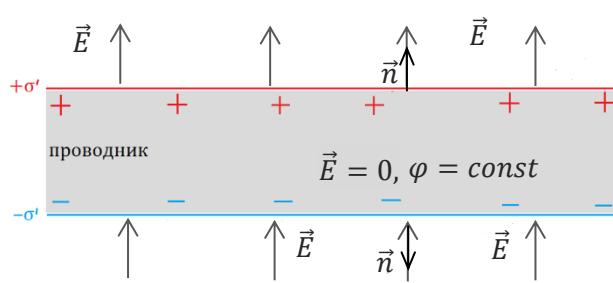
Шаг 3: расчёт правой части теоремы о циркуляции. В правой части теоремы стоит ноль.

Шаг 4: приравниваем левую и правую части теоремы о циркуляции:

$$E_\tau \cdot \ell_{12} = 0.$$

Т.к.  $\ell_{12} \neq 0$ , то получается, что  $E_\tau = 0$ .

Это значит, что вблизи поверхности проводника вектор напряжённости не имеет составляющей, направленной вдоль поверхности, т.е., как это было показано раньше, поле



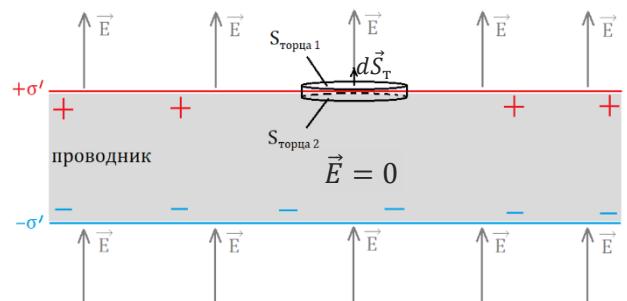
$\vec{E} = E_n \cdot \vec{n}$  – непосредственно у поверхности проводника направлено по нормали к ней в каждой точке.

Связь между напряжённостью электрического поля  $\vec{E}$  вблизи поверхности проводника и поверхностной плотностью

индуцированного заряда легко найти с помощью теоремы Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{внутр}}}{\epsilon_0}.$$

Шаг 1: т.к. поле у поверхности проводника направлено по нормали, то в качестве замкнутой вспомогательной поверхности  $S$  выбираем цилиндр, боковая поверхность которого параллельна полю. Его длина  $\ell \rightarrow 0$  мала, т.к. мы опять собираемся искать поле



непосредственно у поверхности проводника. Площадь торцов цилиндра  $S_{\text{т}}$  тоже невелика, так чтобы величина поля в пределах этой площади сохранялась.

Шаг 2: поток  $\Phi_S$  через вспомогательный цилиндр (см. §3: поле заряженной плоскости)

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_{\text{цилиндр}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{T_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{T_2} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\substack{\text{боковая} \\ \text{поверхность}}} \vec{E} d\vec{S} = \\ &= \int_{T_1} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_{T1}}_{\vec{E} \parallel d\vec{S}_{T1}} + \int_{T_2} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_{T2}}_{E=0 \text{ внутри проводника}} + \int_{\substack{\text{боковая} \\ \text{поверхность}}} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{бок}}}_{\vec{E} \perp d\vec{S}_{\text{бок}}} = \int_{T_1} E \cdot dS_{\text{т}} = \\ &= E \int_{T_1} dS_{\text{т}} = E \cdot S_{\text{т}}. \end{aligned}$$

Шаг 3: считаем заряд, попавший внутрь вспомогательной поверхности – заряд внутри цилиндра. Он есть только в точках, которые выбранный нами прямой цилиндр вырезает на поверхности проводника, т.е. в пределах площади сечения  $S_{\text{т}}$ :

$$q_{\text{внутр}} = \sigma' \cdot S_{\text{т}}.$$

Шаг 4: приравниваем левую и правую части:

$$E \cdot S_{\text{т}} = \frac{\sigma' \cdot S_{\text{т}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

– электрическое поле вблизи поверхности проводника вне его.

Если  $\sigma' > 0$ , то и  $E > 0$ , т.е. вектор  $\vec{E}$  направлен от поверхности проводника – совпадает с нормалью  $\vec{n}$  к этой поверхности; если же  $\sigma' < 0$ , то и  $E < 0$  – вектор  $\vec{E}$  направлен к поверхности проводника:  $\vec{E} \uparrow\downarrow \vec{n}$ .

Экспериментально распределение заряда по поверхности проводника в свое время исследовал английский физик Майкл Фарадей (1791–1867) в опытах с так называемой клеткой Фарадея. Оклеенная листами станиоля (фольга из чистого олова или оловянных сплавов), большая деревянная клетка изолировалась от Земли (была подвешена на шёлковых нитях к потолку) и сильно заряжалась при помощи электрической машины. В клетку с электроскопом помещался сам Фарадей. Электроскоп внутри клетки не показывал никакого отклонения, и никаких особых ощущений Фарадей не испытывал, хотя наружное электрическое поле, судя по искрам, проскакивающим между клеткой и машиной, было достаточно высоким.

Эксперименты Фарадея позволили сформулировать следующую теорему (*теорему Фарадея*): *замкнутая проводящая оболочка разделяет всё пространство на внутреннюю и внешнюю части, в электрическом отношении совершенно не зависящие друг от друга*.

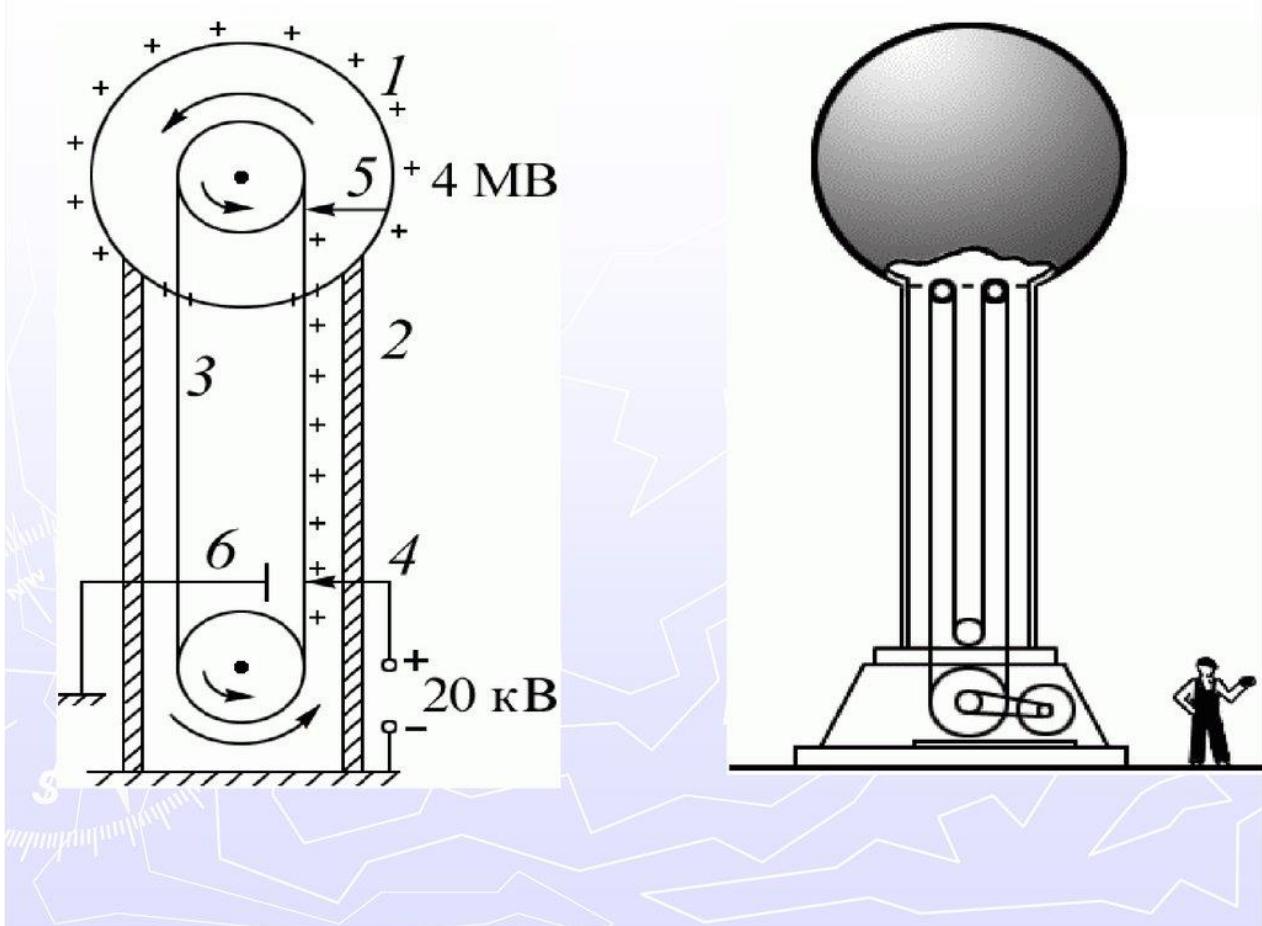
Представим себе проводник, помещенный во внешнее электрическое поле. Внутри проводника электрического поля нет. При изменении внешнего поля индуцированный заряд на поверхности проводника будет изменяться, но внутри проводника поле будет отсутствовать. Вырежем внутри проводника полость. Поскольку внутри проводника плотность заряда равна 0, это никак не повлияет на электрическое поле, которое внутри полости также будет отсутствовать при любых изменениях внешнего поля.



Поместим теперь незаряженное тело внутрь созданной полости. Если перераспределить заряды в нем, то их электрическое поле приведет к появлению индуцированного заряда на стенах полости, но в объеме проводника поле будет по-прежнему отсутствовать. Распределение индуцированного заряда на внешней поверхности проводника будет зависеть только от внешнего поля.

Именно на этом основана *электростатическая защита* – экранирование тел, например измерительных приборов, от влияния внешних электростатических полей. Отсутствие внутри проводника электрического поля позволяет относительно просто решать эту проблему: достаточно поместить прибор в металлический корпус.

Еще Фарадей указал способ полной передачи заряда от одного проводящего тела другому проводящему телу. Для этого во втором проводящем теле надо сделать полость и внести в нее первое тело. При соприкосновении вносимого тела с внутренней поверхностью полости заряд от него полностью переходит ко второму телу. Внесенное тело извлекается из полости,



заряжается снова и операция повторяется многократно. Теоретически полому телу можно передать сколь угодно большой заряд. На этом принципе работает электростатический генератор Ван-де-Граафа.

Зарядное устройство заряжает ленту транспортёра положительными зарядами. Лента переносит их во внутрь верхней сферы, и там происходит съём положительных зарядов. Далее они стекают на внешнюю поверхность сферы. Так можно получить потенциал относительно земли в несколько миллионов вольт – ограничение связано с наличием тока утечки (из-за процесса ионизации воздуха). Такие генераторы существуют и в настоящее время. Например, в Массачусетском технологическом институте (MIT) построен генератор с диаметром сферы 4,5 м, который позволяет получать потенциал  $(3 \div 5) \cdot 10^6$  В. Генератор Ван-де-Граафа ранее использовался в ядерных исследованиях для ускорения различных заряженных частиц.

## §10. Электрическая ёмкость (электроемкость)

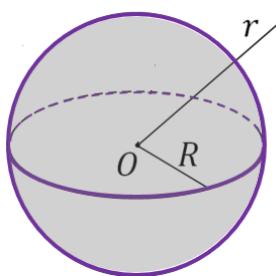
Ещё одной важной особенностью проводников, помимо тех, о которых говорилось в §9, является их способность накапливать электрический заряд.

Рассмотрим *уединённый проводник*, т.е. *проводник, удалённый от других проводников, тел и зарядов*. Поскольку поля внутри проводника нет, он везде имеет одинаковый потенциал, и мы можем говорить о потенциале проводника  $\varphi$ . Опыт показывает, что между зарядом такого проводника  $q$  и его потенциалом  $\varphi$  (потенциал на бесконечности можно принять за ноль (см. §5)) существует линейная зависимость (прямая пропорциональность):  $\varphi \sim q$ . Если удвоить заряд проводника, то его потенциал также удвоится. Такую связь между зарядом и потенциалом можно объяснить уравнением Пуассона:  $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ , в котором лапласиан  $\Delta$  – линейный дифференциальный оператор (§4), т.е. между потенциалом электрического поля и плотностью заряда существует *пропорциональность*:  $\varphi \sim \rho$ . Учитывая, что плотность заряда и заряд тоже *пропорциональны*  $\rho \sim q$ , можем утверждать, что и  $\varphi \sim q$ .

Следовательно, отношение  $q/\varphi$  не зависит от заряда  $q$  и имеет своё значение для каждого уединённого проводника. Величину

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

называют *электроёмкостью* уединённого проводника (или просто *электроёмкостью*). Коэффициент  $C$  зависит только от размеров и форм проводника (а также от диэлектрической проницаемости окружающего диэлектрика  $\epsilon$  и его распределения в пространстве (см. §13)).



Пример: рассчитаем ёмкость уединённого проводника, имеющего форму шара радиуса  $R$ .

Мысленно зарядим наш проводник зарядом  $q$ . Заряженный шар в окружающем пространстве создает электрическое поле  $\vec{E}$ , которое мы уже находили (см. примеры из §3). Поле вне шара в точности повторяет поле точечного заряда:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad r \geq R.$$

Потенциал проводника – шара найдём по определению из §5, использовав в качестве начала отсчёта, как было указано выше, бесконечность  $r_0 = \infty$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ :

$$\varphi(R) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} k \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = \dots = kq \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -k \cdot \frac{q}{r} \Big|_R^{\infty} = 0 - \left( -k \cdot \frac{q}{R} \right) = k \cdot \frac{q}{R}.$$

Поле внутри этого шара равно нулю  $E(r) = 0$ ,  $0 \leq r < R$ , как у равномерно заряженной сферы, т.к. поле внутри проводников всегда равно нулю (см. §9).

Подставим, полученное значение в выражение для электроёмкости:

$$C = \frac{q}{\varphi(R)} = \frac{qR}{k \cdot q} = \frac{R}{k}, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0};$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

— электроёмкость уединённого проводящего шара.

За единицу ёмкости принимают ёмкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл. Этую единицу ёмкости называют фарадом ( $\Phi$ ):  $[C] = \frac{[q]}{[\varphi]} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \Phi$ .

Фарад — очень большая величина:

- ✓ проводящий шар радиусом 1 м обладал бы ёмкостью всего

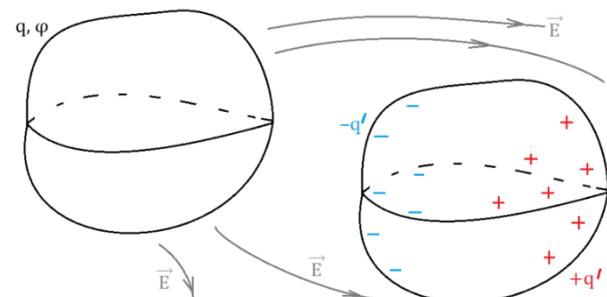
$$C = \frac{R}{k} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{\text{м}}{\text{М/Ф}} \cong 10^{-10} \Phi = 0,1 \text{ нФ};$$

- ✓ Земля — как проводящий шар имеет ёмкость равную:

$$C = \frac{R}{k} = \frac{6,4 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} \frac{\text{м}}{\text{М/Ф}} \cong 0,7 \cdot 10^{-3} \Phi = 0,7 \text{ мФ}.$$

На практике чаще всего приходится встречаться с ёмкостями в интервале от 1 пФ =  $10^{-12} \Phi$  до 1 мкФ =  $10^{-6} \Phi$ .

Если проводник не уединён, то его ёмкость будет существенно увеличиваться при приближении к нему других тел. Это связано с тем, что поле данного проводника вызывает перераспределение зарядов на окружающих телах — появление индуцированных зарядов.



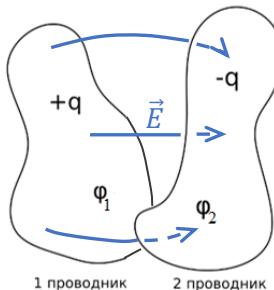
Пусть заряд первого проводника  $q > 0$ . Тогда отрицательные индуцированные заряды, возникшие на поверхности второго проводника, окажутся к нему ближе, чем индуцированные положительные заряды. Значит потенциал первого проводника, являющийся суперпозицией

потенциала собственного заряда и индуцированных зарядов:  $\varphi = \varphi_q + \varphi_{q'}$ , уменьшится при приближении к нему второго проводника. А значит, его ёмкость увеличится.

В случае систем, состоящих из двух проводников, вводится понятие взаимной емкости. Перенесем заряд  $q$  с одного проводника на другой. При этом второй проводник приобретет заряд  $q$ , а первый – заряд  $-q$ . Суммарный же заряд системы остается равным 0. При этом разность потенциалов между проводниками  $\varphi_2 - \varphi_1 = U$ , называемая *напряжением*, будет пропорциональна заряду  $q$ :  $U \sim q$ . Величину

$$C = \frac{q}{U}$$

называют взаимной электрёмкостью двух проводников. Взаимная емкость проводников зависит от их формы, размеров, взаимного расположения и наличия диэлектриков.



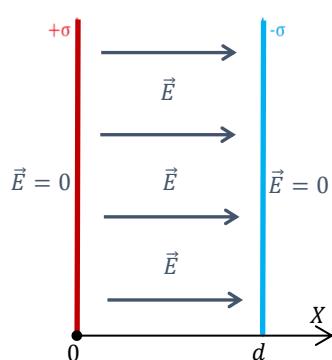
Из множества систем произвольных проводников наибольший интерес представляют системы, на электрическое поле которых внешние тела практически не оказывают никакого влияния. Такие системы проводников называются *конденсаторы*. Простейший конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), расположенных на малом расстоянии друг от друга. Чтобы внешние тела не оказывали влияние на ёмкость конденсатора, его обкладки располагают так относительно друг друга, чтобы поле, создаваемое накапливающимся на обкладках зарядами, было практически полностью сосредоточено между ними. Это возможно, если расстояние между обкладками значительно меньше их размеров. Обкладки конденсатора имеют заряды противоположного знака ( $+q$  и  $-q$ ). Напряжение между обкладками конденсатора:

$$U = \varphi_+ - \varphi_-.$$

Найдём ёмкости некоторых конденсаторов, обкладки которых имеют простую форму, считая, что между обкладками находится вакуум.

### Ёмкость плоского конденсатора.

Такой конденсатор состоит из двух параллельных пластин,

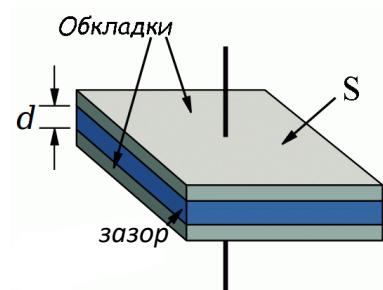


разделённых зазором шириной  $d$ .

Если обкладки конденсатора

мысленно зарядить зарядами  $+q$  и  $-q$  соответственно, то согласно расчётам, приведённым в §3, величина

напряжённости электрического однородного поля между ними будет равна



$$E = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0 S} q, & \text{между пластинами} \\ 0, & \text{вне пластин} \end{cases}$$

Напряжение в пространстве между обкладками конденсатора можно найти по известной формуле для разности потенциалов:

$$U = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^d E \cdot dx = E \cdot \int_0^d dx = E \cdot d.$$

В случае однородных электростатических полей напряжение и напряжённость связаны простым соотношением:  $U = E \cdot d$ . Таким образом, напряжение между обкладками

$$U = E \cdot d = \frac{q}{\epsilon_0 S} \cdot d,$$

и после подстановки этого выражения в формулу электроёмкости конденсатора (систем проводников) получаем:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q \cdot \epsilon_0 S}{q \cdot d} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

При вычислении электроёмкости мы пренебрегли «краевыми эффектами» – нарушением однородности поля вблизи краёв обкладок конденсатора, так можно поступать только тогда, когда расстояние  $d$  между обкладками очень мало по сравнению с их линейными размерами.

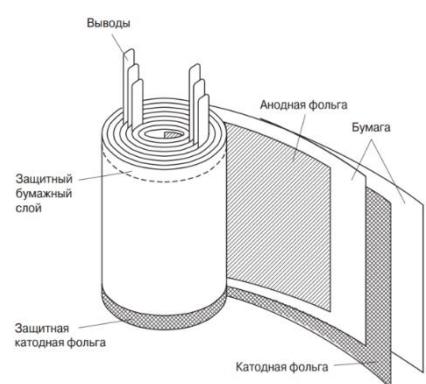
Вид последней формулы позволяет рассмотреть некоторые возможные способы для повышения электроёмкости конденсаторов:

- увеличение площади  $S$  обкладок – ленточные конденсаторы.

Обкладками конденсатора являются тонкие полоски (ленты) фольги, площадь которых может быть огромна. Что бы такой конденсатор не занимал много места ленты свёрнуты в цилиндр. Номинальная электроёмкость ленточных конденсаторов от 100 пФ до 100 мкФ.

- уменьшение расстояния  $d$  между обкладками – электролитические конденсаторы.

Одной из обкладок (анодом) является металл, покрытый слоем оксида, который в этом случае выполняет функции диэлектрика; другой обкладкой (катодом) служит жидкий или

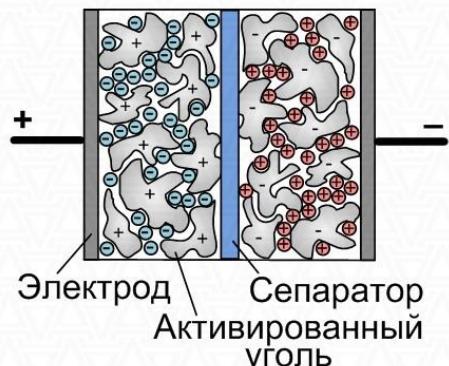




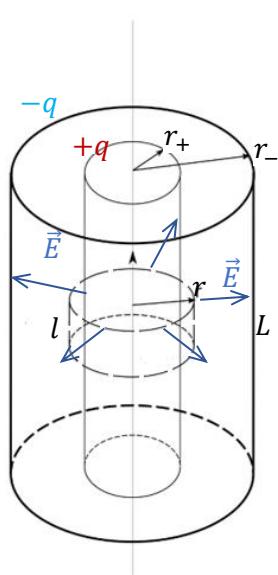
твёрдый электролит, соприкасающийся с оксидным слоем. Оксидный слой на поверхности металла создаётся в результате анодного окисления этого металла. Малая толщина оксидного слоя (50–250 нм) позволяет получать большие ёмкости: от 100 пФ до 70 мкФ.

- ионистор (суперконденсатор, ультраконденсатор, конденсатор) – электрохимическое устройство, конденсатор с органическим или неорганическим электролитом, обкладками в котором служит двойной электрический слой на границе раздела электрода и электролита. В связи с тем, что толщина двойного электрического слоя (то есть расстояния между обкладками конденсатора) крайне мала (1 – 5 нм) за счёт использования электролитов, а площадь пористых материалов обкладок (из вспененного углерода или активированного угля) – колоссальна, запасённая ионистором энергия выше по сравнению с обычными конденсаторами того же размера. К тому же использование двойного электрического слоя вместо обычного диэлектрика позволяет намного увеличить площадь поверхности электрода. Типичная ёмкость ионистора – несколько фарад (max  $3 \cdot 10^3 \Phi$ ).

### Ионистор



### Ёмкость цилиндрического конденсатора.



Цилиндрический конденсатор состоит из коаксиальных (с единой осью симметрии) цилиндрических обкладок длиной  $L$  и радиусами:  $r_+$  – у меньшей,  $r_-$  – у большей, ширина зазора  $d = r_- - r_+ \ll r_+, r_-, L$ .

Используем наш стандартный подход – мысленно зарядим обкладки зарядами  $+q$  и  $-q$  соответственно. Сначала найдём напряжённость поля  $\vec{E}$ , а затем напряжение  $U$  между обкладками.

Напряжённость поля будем искать с помощью теоремы Гаусса (см. §3 электростатическое поле при цилиндрической симметрии).

Шаг 1: в качестве вспомогательной поверхности  $S$  возьмём цилиндр с радиусом  $r$  и высотой  $l$ , такими, что  $r_+ < r < r_-$  и  $l \ll L$ .

Шаг 2: поток  $\Phi_S$  через наш вспомогательный цилиндр равен

$$\begin{aligned}\Phi_S &= \oint_{\text{цилиндр}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{T_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{T_2} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\substack{\text{боковая} \\ \text{поверхность}}} \vec{E} d\vec{S} = \dots = \\ &= \int_{\substack{\text{боковая} \\ \text{поверхность}}} E \cdot dS_{\text{бок}} = E \int_{\substack{\text{боковая} \\ \text{поверхность}}} dS_{\text{бок}} = E \cdot S_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r l.\end{aligned}$$

Шаг 3: заряд внутри цилиндра:

$$q^{\text{внутр}} = +\sigma \cdot S = +\sigma \cdot 2\pi r_+ l = \frac{q}{2\pi r_+ L} \cdot 2\pi r_+ l = q \cdot \frac{l}{L}$$

— тут учтено, что внутрь вспомогательного цилиндра попадает только часть заряда, находящаяся на внутренней (меньшей) цилиндрической обкладке, заряд с внешней обкладки внутрь вспомогательного цилиндра не попадает.

Шаг 4:

$$\begin{aligned}E \cdot 2\pi r l &= \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \frac{l}{L} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r L}. \\ U &= \varphi(r_+) - \varphi(r_-) = \int_{r_+}^{r_-} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_+}^{r_-} E \cdot dr = \int_{r_+}^{r_-} \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r L} \cdot dr = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 L} \int_{r_+}^{r_-} \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{q}{2\pi \epsilon_0 L} (\ln r_- - \ln r_+) = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{r_-}{r_+}.\end{aligned}$$

Электроёмкость цилиндрического конденсатора равна

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q \cdot 2\pi \epsilon_0 L}{q \cdot \ln \frac{r_-}{r_+}} \Rightarrow C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln \frac{r_-}{r_+}}.$$

В случае, когда зазор между обкладками очень мал  $d = r_- - r_+ \ll r_+$  полученное выражение переходит в выражение для электроёмкости плоского конденсатора:

$$\frac{d}{r_-} = \frac{r_- - r_+}{d + r_+} \Rightarrow C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln \frac{r_-}{r_+}} = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln \frac{r_+ + d}{r_+}} = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln \left(1 + \frac{d}{r_+}\right)}$$

$$\boxed{\frac{d}{r_+} \ll 1 \Rightarrow \ln \left(1 + \frac{d}{r_+}\right) \approx \frac{d}{r_+}}$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln \left(1 + \frac{d}{r_+}\right)} \approx \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\frac{d}{r_+}} = \frac{\epsilon_0 (2\pi r_+ \cdot L)}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Ёмкость сферического конденсатора.

Сферический конденсатор представляет собой две проводящие концентрические сферы радиусами  $r_+$  и  $r_-$ , зазор между которыми равен  $d = r_- - r_+$ ,  $d \ll r_-, r_+$ . Зарядим мысленно обкладки зарядами  $+q$  и  $-q$  соответственно.

Найдём напряжённость электрического поля  $\vec{E}$ , а затем напряжение  $U$  между обкладками.

Напряжённость поля будем искать с помощью теоремы Гаусса (см. §3 поле равномерно заряженной сферы).

Шаг 1: вспомогательная замкнутая поверхность  $S$  – сфера, её радиус  $r$ :  $r_+ < r < r_-$ , т.к. в случае любого конденсатора электрическое поле есть только между обкладками.

Шаг 2:

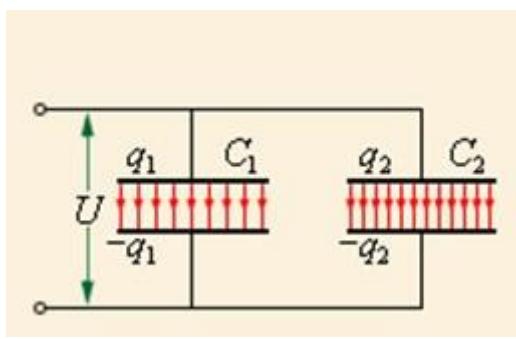
$$\Phi_S = \oint_{\text{сфера}} \vec{E} d\vec{S} = \cdots = E \cdot S_{\text{c}\phi} = E \cdot 4\pi r^2.$$

Шаг 3:  $q^{\text{внутр}} = +q$ , внутрь вспомогательной сферы попал весь заряд внутренней обкладки конденсатора.

Шаг 4:

$$\begin{aligned} E \cdot 4\pi r^2 &= \frac{q}{\epsilon_0} \implies E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \\ U &= \varphi(r_+) - \varphi(r_-) = \int_{r_+}^{r_-} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_+}^{r_-} E \cdot dr = \int_{r_+}^{r_-} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_+}^{r_-} \frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot (-1) \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_- - r_+}{r_+ \cdot r_-}. \\ C &= \frac{q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_+ \cdot r_-}{r_- - r_+}. \end{aligned}$$

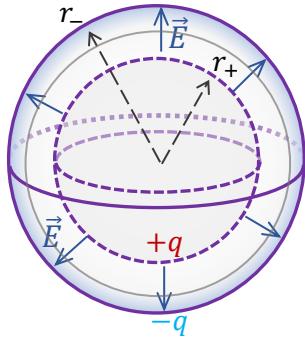
Конденсаторы часто соединяют в батареи. Соединение может быть *параллельным* или *последовательным* (возможно так же комбинированное соединение). Рассмотрим сначала



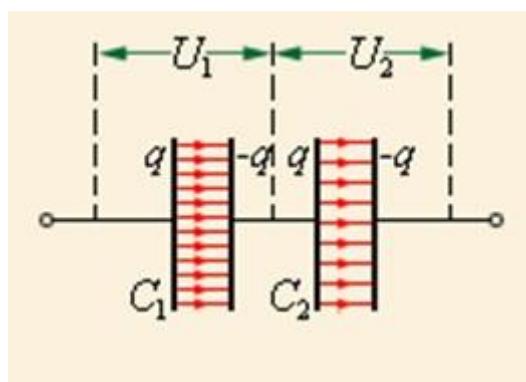
параллельное соединение двух конденсаторов. При таком соединении напряжение между обкладками обоих конденсаторов одинаковы, а заряды обкладок складываются:  $q = q_1 + q_2$ . Разделим эту сумму на общее напряжение между обкладками:

$$\frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U}.$$

Общая ёмкость двух параллельно соединённых конденсаторов:  $C = C_1 + C_2$ .



При последовательном соединении средние пластины, соединённые между собой, электризуются через влияние, а потому их заряды равны и противоположны по знаку. Таким образом заряды обоих конденсаторов одинаковы. Напряжения при последовательном соединении складываются



электризуются через влияние, а потому их заряды равны и противоположны по знаку. Таким образом заряды обоих конденсаторов одинаковы. Напряжения при последовательном соединении складываются

$$U = U_1 + U_2.$$

А поскольку  $U = \frac{q}{C}$ , получаем:

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

## §11. Энергия электрического поля

Если на время вернуться к началу нашего курса, то можно вспомнить, что для описания поведения макроскопических систем помимо силового подхода существует ещё и энергетический, который является весьма плодотворным по своим практическим применениям (позволяет применять закон сохранения энергии для анализа поведения системы) и открывает возможность по-иному взглянуть и на само электрическое поле как физическую реальность.

В настоящий момент нами получены следующие формулы для электрической энергии (см. §5):

$W_{\text{пот}}(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})$  – потенциальная энергия заряда, находящегося в электрическом поле;

$W_{\text{системы}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i$  – энергия взаимодействия системы неподвижных зарядов;

$W = \frac{1}{2} \int \varphi dq = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV$  – полная энергия зарядов, распределенных непрерывно.

по всему  
пространству

Можно заметить, что все эти формулы выражают энергию через потенциал электростатического поля несмотря на то, что для описания поля существует и другая характеристика – напряжённость:  $\vec{E}$ . Кроме того, не ясно как мы будем вычислять энергию электрического поля, если оно не будет потенциальным?

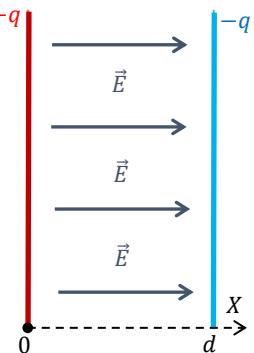
Найдём формулу, выражющую энергию через напряжённость поля. Сначала рассмотрим однородное электрическое поле, например, поле в плоском конденсаторе.

По формуле для энергии электростатического поля:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{по всему пространству}} \varphi dq = \frac{1}{2} \left( \int_{\text{"+" пластина}} \varphi dq + \int_{\text{"-" пластина}} \varphi dq \right) =$$

т.к. заряд распределён не по всему пространству, а только по пластинам конденсатора. Пластины – обкладки конденсатора – проводники, значит потенциал на них во всех точках одинаков, и его можно вынести из-под знака интеграла:

$$= \frac{1}{2} \left( \varphi_+ \int_{\text{"+" пластина}} dq + \varphi_- \int_{\text{"-" пластина}} dq \right) = \frac{1}{2} (q\varphi_+ + (-q)\varphi_-) = \frac{q}{2} (\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{qU}{2},$$



где  $U = \varphi_+ - \varphi_-$  – разность потенциалов на обкладках конденсатора. Используя формулу, определяющую взаимную емкость двух проводников  $C = \frac{q}{U}$ , получим следующие выражения для энергии заряженного конденсатора:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Только будем помнить, что эти формулы были получены из формулы для полной энергии, следовательно, они учитывают не только энергию взаимодействия зарядов одной обкладки с другой, но и собственную энергию обкладок – энергию взаимодействия зарядов внутри каждой обкладки.

Вспомним, что наш конденсатор – плоский, следовательно справедливы следующие формулы для электроёмкости:  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ , и для разности потенциалов однородного электростатического поля:  $U = E \cdot d$ .

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{(E \cdot d)^2}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot V,$$

$V$  – объём пространства между обкладками конденсатора – пространство, занимаемое электрическим полем.

Введём понятие *объёмной плотности*  $w$  энергии поля:

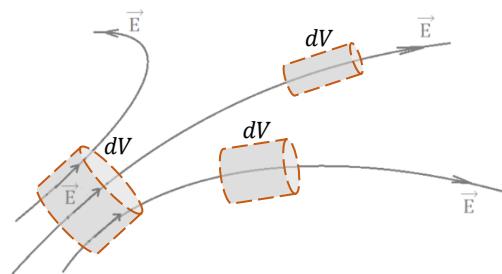
$$w = \frac{\epsilon_0 \cdot E^2}{2} \text{ – объёмная плотность энергии электрического поля.}$$

Окончательно,

$$W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot V = w \cdot V$$

– полная энергия однородного электрического поля, заполняющего объём  $V$ .

Полученную формулу можно обобщить и на случай неоднородных электрических полей.



Представим для этого всё пространство, заполненное электрическим полем, как систему малых объёмов  $dV$ , в пределах каждого из которых электрическое поле можно считать однородным. Полную энергию всего пространства найдём как сумму энергий, заключённых во всех объёмах  $dV$ :

$$W = \int_{\text{по всему пространству}} dW = \int_{\text{по всему пространству}} wdV;$$

$$W = \int_{\text{по всему пространству}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot dV$$

– полная энергия электрического поля.

Подынтегральное выражение в этом уравнении  $dW = wdV$ , как мы сказали, имеет смысл энергии, с некоторой плотностью  $w$  заключённой в объёме  $dV$ . Это наводит нас на мысль, что электрическая энергия, подобно веществу, распределена в пространстве с некоторой плотностью. Т.е. **электрическая энергия локализована в самом поле**. В электростатическом поле, которое неотделимо от зарядов, создавших его, вопрос о локализации электрической энергии решить невозможно. Где сосредоточена энергия конденсатора: на обкладках, где находятся заряды или в пространстве между ними? Но не так обстоит дело в случае переменных полей. *Переменные электромагнитные поля могут существовать самостоятельно, независимо от возбудивших их электрических зарядов и распространяться в пространстве в виде электромагнитных волн.* А многочисленные опыты показывают, что электромагнитные волны переносят энергию – уже это заставляет нас признать, что *носителем энергии является поле*.

В контексте вышесказанного формула, связывающая энергию электрического поля с зарядами и потенциалами тел,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{по всему пространству}} \varphi dq = \frac{1}{2} \int_{\text{по всему пространству}} \varphi \rho dV$$

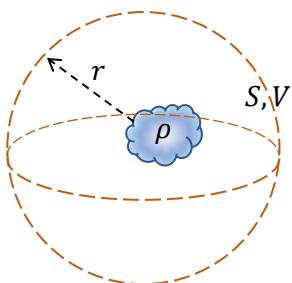
может использоваться только для электростатического поля.

Формула

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{по всему пространству}} \epsilon_0 E^2 \cdot dV$$

работает как в случае статических электрических полей, так и в случае переменных.

В заключение заметим, что с математической точки зрения в случае электростатического поля оба выражения эквивалентны: электрическую энергию можно находить по любой из формул.



Рассмотрим пространство, электрическое поле в котором создаётся зарядом с объёмной плотностью  $\rho$ .  $S$  – замкнутая поверхность (сфера), охватывающая все точки поля,  $V$  – объём пространства внутри неё, т.е. объём, внутри которого заключено электрическое поле.

Сосчитаем дивергенцию от произведения потенциала этого поля на вектор напряжённости его:  $\operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{E}) = \nabla(\varphi \cdot \vec{E}) = \vec{E} \cdot \nabla \varphi + \varphi \cdot \nabla \vec{E} = \vec{E} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{E} =$

в такой записи получается, что оператор набла действует на произведение скалярной функции  $\varphi$  и векторной функции  $\vec{E}$ ;  
пример, похожий на этот был разобран в математическом приложении из §6

$$= \vec{E} \cdot (-\vec{E}) + \varphi \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -E^2 + \frac{\varphi\rho}{\varepsilon_0}.$$

согласно формуле связи между напряжённостью и потенциалом электрического поля  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ ;

$$\text{а также по теореме Гаусса } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Проинтегрируем, полученное выражение по пространству, внутри которого заключено электрическое поле, т.е. по объёму  $V$ :

$$\int_{\substack{\text{по всему} \\ \text{пространству}}} \operatorname{div} (\varphi \cdot \vec{E}) dV = \int_V \left( -E^2 + \frac{\varphi\rho}{\varepsilon_0} \right) dV.$$

Определённый интеграл по объёму, стоящий слева, можно преобразовать в интеграл по поверхности, которая его ограничивает, использовав формулу Гаусса – Остроградского (см. §4):

$$\int_V \operatorname{div} (\varphi \vec{E}) dV = \oint_S (\varphi \vec{E}) d\vec{S},$$

а интеграл по поверхности ограничен сверху следующим выражением:

$$\oint_S (\varphi \vec{E}) d\vec{S} \leq \varphi_{max} \cdot E_{max} \cdot S.$$

по аналогии с формулой Ньютона - Лейбница для функций одной переменной:

$$\int_a^b f(x) dx \leq f_{max} \cdot (b - a).$$

Т.к. радиус  $r$  нашей сферы  $S$  достаточно велик (мы охватываем всё пространство, заключающее в себе поле), а заряд плотностью  $\rho$  конечен, то этот заряд при вычислении поля на поверхности сферы можно считать точечным. Его потенциал на поверхности сферы убывает обратно пропорционально первой степени радиуса сферы:  $\varphi_{max} \sim \frac{1}{r}$ , а напряжённость – пропорционально второй степени:  $E_{max} \sim \frac{1}{r^2}$ . Поверхность же сферы зависит от её радиуса пропорционально второй степени:  $S = 4\pi r^2 \sim r^2$ .

$$\int_V \operatorname{div} (\varphi \vec{E}) dV \leq \varphi_{max} \cdot E_{max} \cdot S \sim \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 = \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

– интеграл по сфере  $S$ , а с ним и интеграл по объёму  $V$  в пределе при  $r \rightarrow \infty$  обращаются в нуль, т.е.

$$\int_V \operatorname{div} (\varphi \vec{E}) dV = 0.$$

Следовательно,

$$0 = \int_V \left( -E^2 + \frac{\varphi\rho}{\varepsilon_0} \right) dV = - \int_V E^2 dV + \int_V \frac{\varphi\rho}{\varepsilon_0} dV \Rightarrow$$

$$\int_{\text{по всему пространству}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \frac{1}{2} \int_{\text{по всему пространству}} \varphi \rho dV$$

– выражения для энергий в случае электростатического поля эквивалентны.

Представим себе систему двух заряженных тел в вакууме. Согласно принципу суперпозиции результирующее электрическое поле в окружающем пространстве будет равно сумме напряжённостей полей обоих тел:  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Его квадрат –  $E^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ . Полная энергия данной системы тел будет равна:

$$W = \int_{\text{по всему пространству}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int_V \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} dV + \int_V \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} dV + \int_V \varepsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV.$$

Как уже об этом говорилось в §5, первые два интеграла представляют собой собственную энергию первого и второго заряженных тел ( $W_1$  и  $W_2$ ), последний интеграл – энергию их взаимодействия ( $W_{12}$ ):

$$W = W_1 + W_2 + W_{12}.$$

Полученные формулы позволяют сделать следующие выводы:

- собственная энергия каждого заряженного тела – величина всегда положительная, так же, как и полная энергия системы заряженных тел ( $W_1, W_2, W > 0$ ); энергия взаимодействия может быть как положительной, так и отрицательной величиной ( $W_{12} \leq 0$ ).
- при всех возможных перемещениях заряженных тел, не изменяющих распределения зарядов на них, собственная энергия тел остаётся постоянной ( $W_1 + W_2 = \text{const}$ ). В этих случаях изменения полной энергии определяются всецело только изменениями энергии взаимодействия ( $\Delta W = \Delta W_{12}$ ). Мы воспользовались этим в §5, когда выбросили из энергии взаимодействия системы неподвижных зарядов очень большие слагаемые ( $W_{\text{сист}} = W_{\text{взаим}}$ ).
- в отличие от вектора напряжённости системы заряженных тел  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  энергия электрического поля – величина неаддитивная  $W \neq W_1 + W_2$  из-за энергии

лекции по физике (II семестр) доц. Т.А.Андреева

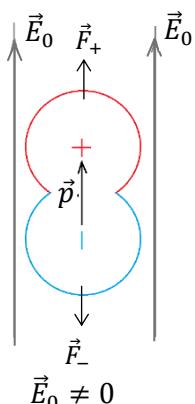
взаимодействия. В частности, при возрастании напряжённости электрического поля в  $n$  раз энергия поля возрастает в  $n^2$  раз.

## §12. Диэлектрики в электрическом поле

Диэлектрики (другое название – изоляторы) – материалы, плохо проводящие электрический ток, т.к. в них в отличие от металлов и электролитов нет зарядов, способных перемещаться на значительные расстояния, создавая электрический ток. Заряды в диэлектрике могут смещаться из своих положений равновесия лишь на малые расстояния, порядка атомных. Примерами диэлектриков являются газы (в том числе воздух), стёкла, пластмассы и смолы. При внесении даже нейтрального диэлектрика во внешнее электрическое поле обнаружаются существенные изменения как в поле, так и в самом диэлектрике.

Поведение диэлектрика во внешнем электрическом поле определяется его строением. Диэлектрики могут состоять либо из нейтральных молекул (газообразные, жидкие и твердые диэлектрики), либо из заряженных ионов, находящихся в узлах кристаллической решётки (ионные кристаллы, такие как NaCl).

Начнём с диэлектриков, состоящих из нейтральных молекул. Молекулы могут быть *полярными* и *неполярными*. У неполярных молекул в отсутствии внешнего электрического поля центры тяжести положительного и отрицательного зарядов совпадают (пример: молекула H<sub>2</sub>). Под действием приложенного электрического поля



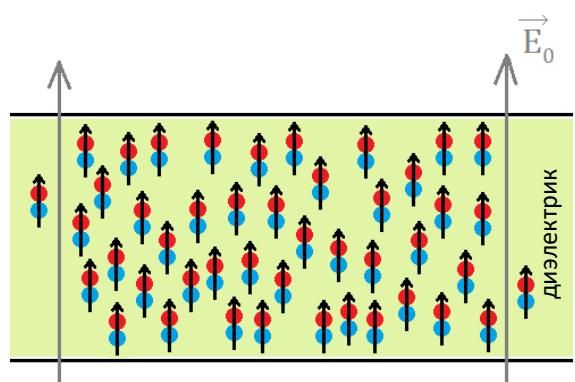
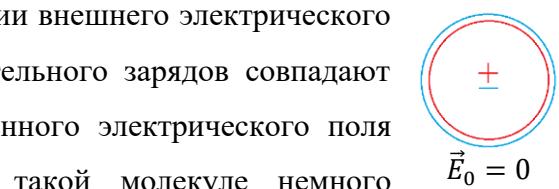
центр тяжести электронов в такой молекуле немного смещается относительно центра тяжести атомных ядер.

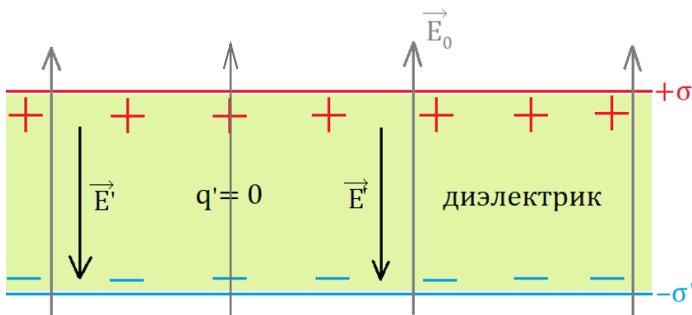
$$\vec{F}_+ = +q\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{F}_+ \uparrow \vec{E}_0$$

$$\vec{F}_- = -q\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{F}_- \downarrow \vec{E}_0$$

Молекулы становятся электрическими диполями (см. §8), ориентированными в направлении внешнего поля. В этом случае говорят, что диэлектрик *поляризован*, а само смещение положительных и отрицательных зарядов называют *электрической поляризацией*. Если

поляризация диэлектрика однородна, т.е. когда все молекулы диэлектрика превратились в одинаково ориентированные диполи, то в объёме диэлектрика происходит компенсация положительных и отрицательных зарядов молекул, и никаких макроскопических индуцированных зарядов не образуется. Нескомпенсированные индуцированные заряды образуются только на внешней поверхности диэлектрика. Они носят название



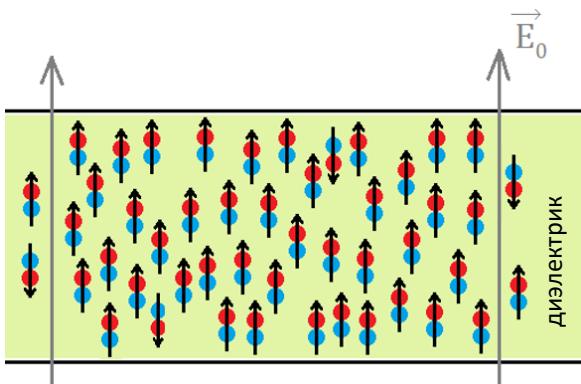
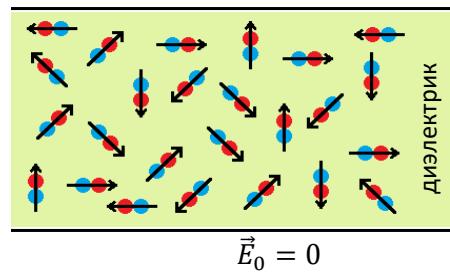


поляризационных или связанных зарядов.

Последний термин подчёркивает, что свобода перемещения связанных зарядов ограничена. Они могут смещаться только внутри нейтральных молекул. Поляризационные (связанные) заряды

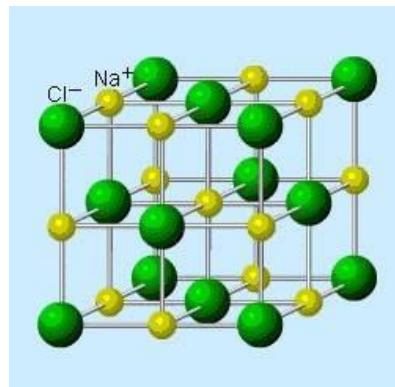
( $q'$ ) подобно зарядам, индуцированным на поверхности проводника (см. §9), создают в диэлектрике собственное электрическое поле  $\vec{E}'$ , которое вместе с исходным (внешним) полем  $\vec{E}_0$  образует полное поле  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ . Если же поляризация неоднородна, то компенсации индуцированных зарядов внутри диэлектрика не происходит. В этом случае поляризационный заряд может появиться и в объёме диэлектрика ( $\rho'$  – объёмная плотность поляризационного заряда). Т.к. поле поляризационного заряда направлено в сторону противоположную внешнему полю  $\vec{E}' \uparrow \downarrow \vec{E}_0$ , то величина полного поля будет меньше внешнего  $|\vec{E}| < |\vec{E}_0|$ . Описанный выше процесс поведения диэлектриков во внешнем электрическом поле, состоящих из неполярных молекул, носит название *электронного механизма поляризации*.

Механизм поляризации диэлектриков может быть и иным. Существуют диэлектрики, молекулы, которые обладают дипольным моментом уже в отсутствии внешнего электрического поля (полярные молекулы – например, молекула  $H_2O$ ). Если поля нет, то полярные молекулы совершают хаотические тепловые движения и ориентированы совершенно беспорядочно.

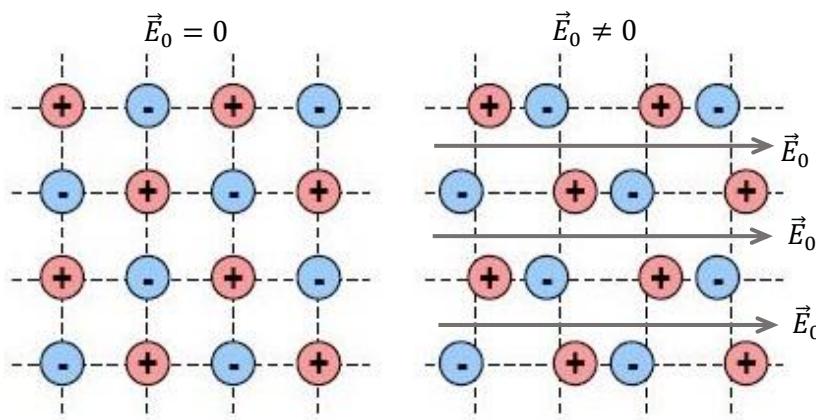


При наложении электрического поля механический момент, действующий на диполи молекул  $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}_0]$  (см. §8), сориентирует их преимущественно в направлении поля  $\vec{E}_0$ . А это значит, что диэлектрик станет поляризованным. Такое поведение диэлектриков носит название *ориентационного механизма поляризации*.

Наконец, существуют диэлектрические кристаллы (например,  $NaCl$ ), построенные из ионов противоположного знака. Такие кристаллы называют *ионными*. Ионный кристалл состоит из двух решёток, вдвинутых одна в другую. Одна решётка построена из положительных, другая – из отрицательных. Весь кристалл в этом случае рассматривается как одна гигантская



неполярная молекула. При наложении электрического поля решётка положительных ионов сдвигается в одну, а отрицательных – в противоположную сторону. В этом и состоит *ионный механизм электрической поляризации* кристаллов. Существуют ионные кристаллы,



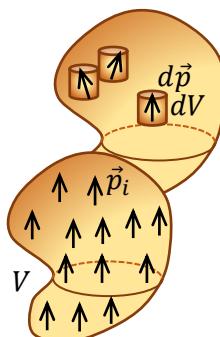
поляризованные даже в отсутствии внешнего электрического поля.

В независимости от строения диэлектрика и механизма его поляризации результат внесения диэлектрика во внешнее электрическое поле всегда один и тот же – появление на нём нескомпенсированных макроскопических зарядов.

Для количественного описания поляризации используют поляризационный заряд  $q'$  или его плотности  $\rho'$  и  $\sigma'$ , а также *вектор поляризации* (*поляризованность диэлектрика*)  $\vec{P}$  – суммарный дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \text{ или}$$

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}$$



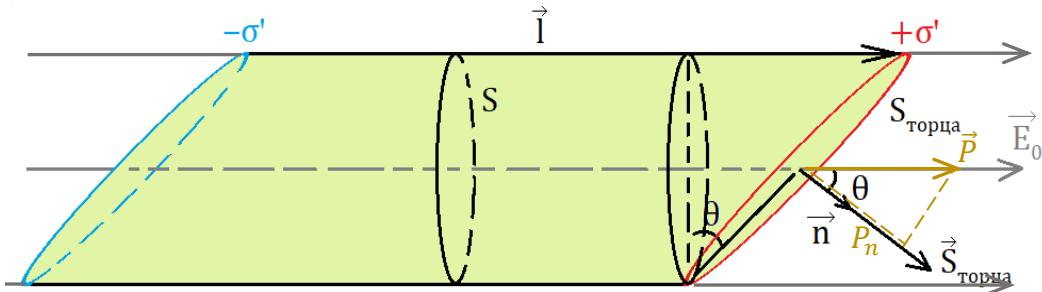
в случае, когда поляризация проходит однородно.

Единицей вектора поляризации (поляризованности)  $\vec{P}$  является

$$[P] = \frac{[p_i]}{[V]} = \frac{[q] \cdot [l]}{[V]} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$$

– кулон на квадратный метр.

Установим связь между этими характеристиками поляризации. Для этого рассмотрим однородный изотропный диэлектрик в форме цилиндра длиной  $l$  со скошенными торцами. Поместим его в однородное электрическое поле, направленное вдоль боковой поверхности этого цилиндра. Поляризацию в таком случае можно считать однородной. Её результатом



будет появление поляризационного заряда на торцах цилиндра с поверхностной плотностью  $\sigma'$ . На боковой поверхности цилиндра поляризационных зарядов не возникает, т.к. смещение зарядов внутри диэлектрика происходит параллельно образующей цилиндра. Наш цилиндр в таком случае превращается в один большой диполь. Если  $S_t$  – площадь торца цилиндра, то его дипольный момент равен  $\vec{p} = q'\vec{l} = \sigma'S_t\vec{l}$ . Вектор поляризации диэлектрика в этом случае будет равен:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V} = \frac{\vec{p}}{V} = \frac{\sigma' S_t \vec{l}}{V} = \frac{\sigma' S_t \vec{l}}{\vec{S}_t \cdot \vec{l}},$$

т.к. объём косого цилиндра можно записать как скалярное произведение векторов  $\vec{S}_t$  и  $\vec{l}$ :

$$V = S \cdot l = S_t \cos \theta \cdot l = S_t l \cos \vec{S}_t \cdot \vec{l} = \vec{S}_t \cdot \vec{l}.$$

Умножим скалярно левую и правую части выражения для вектора  $\vec{P}$  на единичный вектор  $\vec{n}$  внешней нормали к положительно заряженному торцу цилиндра – диэлектрика:

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma' S_t \vec{l}}{\vec{S}_t \cdot \vec{l}} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma' S_t \cdot \vec{n} \cdot \vec{l}}{\vec{S}_t \cdot \vec{l}} = \frac{\sigma' \cdot \vec{S}_t \cdot \vec{l}}{\vec{S}_t \cdot \vec{l}} = \sigma'.$$

$\vec{P} \cdot \vec{n} = P_n$  – нормальная составляющая вектора поляризации, следовательно:

$$P_n = \sigma'. \quad (1)$$

Мы вывели эту формулу применительно к положительно заряженному торцу цилиндра. Но она справедлива и для отрицательно заряженного торца, т.к. внешняя нормаль к нему будет направлена в противоположную сторону вектору  $\vec{n}$  ( $\vec{n}_- = -\vec{n}$ ):

$$\vec{P} \cdot \vec{n}_- = \vec{P} \cdot (-\vec{n}) = -P_n \Rightarrow P_n = -\sigma' = \sigma'_-.$$

Формула (1) справедлива и на боковой поверхности цилиндра, т.к. на ней,  $\sigma' = 0$ :

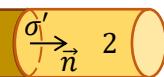
$$\vec{P} \cdot \vec{n}_{\text{бокпов}} = |\vec{P}| \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Формула (1) показывает, что *нормальная составляющая вектора поляризации  $P_n$  численно равна заряду, смещающему при поляризации через единичную площадку в направлении нормали  $\vec{n}$  к ней.*

В нашем примере цилиндр – диэлектрик граничил с вакуумом ( $\vec{P}_{\text{вак}} = 0$ ), если бы справа от него находился ещё один цилиндр из другого диэлектрика, то на границе диэлектриков нормальная составляющая вектора поляризации испытывала бы разрыв, величина которого определялась поверхностью плотностью поляризационных зарядов на этой границе:

$$P_{1n} - P_{2n} = \sigma'.$$

1



2

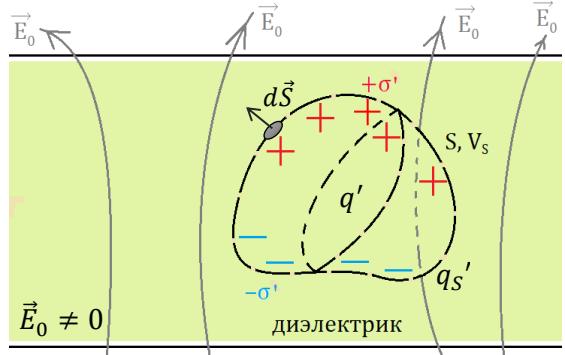
Как было сказано выше, при неоднородной поляризации поляризационные заряды могут появляться не только на поверхности, но и в объёме диэлектрика. Вычислим теперь плотность объёмных поляризационных зарядов, т.е. найдём  $\rho'$  и  $q'$ .



Мысленно выделим внутри диэлектрика объём  $V_s$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ . Пока внешнее электрическое поле отсутствует никакого поляризационного заряда ни в диэлектрике, ни в части его объёма  $V_s$  нет:  $q' = 0$ .

В результате включения электрического поля

диэлектрик поляризуется – отрицательные заряды смещаются относительно положительных, и как следствие, на замкнутой поверхности  $S$  выступит поляризационный заряд  $q'_s$ . Найдем  $q'$  в объёме  $V_s$  как разность зарядов, бывших внутри поверхности  $S$  до поляризации и смещённых через границу  $S$  в результате поляризации:



$$\begin{aligned} q' &= q'_{\text{внутри } S \text{ (до поляризации)}} - q'_{\text{через границы } S \text{ (в результате поляризации)}} = \\ &= q' - q'_s = 0 - q'_s = -q'_s \Rightarrow q' = -q'_s. \end{aligned}$$

Для расчёта заряда, смещённого через границу замкнутой поверхности  $S$ , разобьем её на бесконечно маленькие площадки  $dS$ , распределение заряда в пределах которых можно считать равномерным, и выразим заряд  $dq'$  через поверхностную плотность:  $dq' = \sigma' dS$ :

$$q'_s = \oint_S dq' = \oint_S \sigma' dS =$$

используя формулу (1) и  $P_n = \vec{P} \cdot \vec{n}$ , получим

$$= \oint_S P_n \cdot dS = \oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}.$$

Следовательно, в результате поляризации внутри объема  $V_S$  появляется поляризационный заряд:

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q' \quad (2)$$

– поток вектора  $\vec{P}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен взятому с обратным знаком поляризационному заряду диэлектрика в объеме  $V_S$ , охватываемом этой поверхностью. Данное выражение можно переписать из интегральной формы в локальную (дифференциальную) форму, если преобразовать левую часть, использовав формулу Гаусса - Остроградского (см. §4):

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_{V_S} (\operatorname{div} \vec{P}) dV.$$

Правую часть можно переписать, выразив поляризационный заряд внутри  $V_S$  через его объемную плотность:

$$q' = \int_{V_S} \rho' dV.$$

$$\int_{V_S} \operatorname{div} \vec{P} \cdot dV = - \int_{V_S} \rho' \cdot dV$$

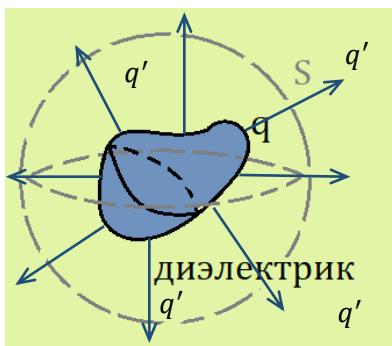
или, если потребовать, что бы полученное выражение было справедливо для любых замкнутых поверхностей и объемов внутри них,

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho' \quad (3)$$

– объемная плотность поляризационного заряда равна дивергенции вектора поляризации, взятой с обратным знаком.

Формулы (1) – (3) выражают связь вектора поляризации  $\vec{P}$  с поляризационным зарядом и позволяют ошибочно считать, что этот вектор зависит только от него. На самом деле, поле вектора  $\vec{P}$  зависит от всех зарядов, как связанных (индуцированных), так и сторонних (это будет показано уже в следующем параграфе). Поляризационные заряды (или их плотности) определяют лишь поток (или дивергенцию) вектора поляризации.

## §13. Теорема Гаусса для диэлектриков. Связь между векторами $\vec{P}$ , $\vec{E}$ и $\vec{D}$



Как было выяснено в предыдущем параграфе, влияние диэлектрика на электрическое поле сводится к появлению поляризационных зарядов. Полное электрическое поле при наличии диэлектрика является суперпозицией исходного (внешнего) поля и собственного поля диэлектрика – поля поляризационных зарядов  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ . В случае, если мы

решим использовать теорему Гаусса для нахождения поля  $\vec{E}$ , то поток вектора напряжённости поля сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$ , выбранную для расчёта, будет зависеть как от сторонних зарядов  $q$ , попавших внутрь этой поверхности, так и от поляризационного заряда внутри неё:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{(q + q')^{\text{внутр}}}{\epsilon_0}.$$

Появление поляризационных зарядов  $q'$  усложняет дело, и теорема Гаусса в таком виде оказывается малополезной для нахождения поля  $\vec{E}$  в диэлектрике даже при наличии симметрии у стороннего заряда. В таком виде неизвестное поле  $\vec{E}$  выражается через поляризационный заряд  $q'$ , распределение которого в диэлектрике в свою очередь определяется неизвестным полем  $\vec{E}$ .

Попробуем обойти это затруднение, использовав полученное в предыдущем параграфе выражение для потока вектора поляризации (формула (2) из §12):

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q'.$$

Умножив левую и правую части теоремы Гаусса на электрическую постоянную  $\epsilon_0$  и заменив поляризационный заряд внутри замкнутой поверхности  $S$ , получим:

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = (q + q')^{\text{внутр}} \Rightarrow \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}.$$

В левой и правой части стоят потки, рассчитываемые через одну и ту же поверхность – можно их объединить:

$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \oint_S (\varepsilon_0 \vec{E}) \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = q_{\text{внутр.}}$$

Величину, стоящую под интегралом в скобках, обозначают буквой  $\vec{D}$ :

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

— вектор электрической индукции, вектор электрического смещения или просто вспомогательный вектор  $\vec{D}$ .

Из определения вектора  $\vec{D}$  следует, что его размерность такая же, как и у вектора  $\vec{P}$ :

$$[D] = [P] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Следовательно, вместо выражения

$$\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = q_{\text{внутр.}}$$

можем теперь писать

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{внутр.}}$$

— поток вектора  $\vec{D}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних (свободных) зарядов, попавших внутрь этой поверхности — теорема Гаусса для электрического поля в диэлектрике (интегральная форма).

Вектор  $\vec{D}$  представляет собой сумму совершенно разных величин  $\varepsilon_0 \vec{E}$  и  $\vec{P}$ , поэтому он действительно вспомогательный вектор, не имеющий какого-нибудь глубокого физического смысла, однако выражение для его потока, которое мы получили, оправдывает введение этого вектора — значительно упрощает изучение поля при наличии в пространстве диэлектрика.

Чтобы расширить возможности применения этой теоремы для исследования и расчёта электрических полей в диэлектриках придадим ей другую форму — дифференциальную. Локальная (дифференциальная) форма для теоремы Гаусса для электрического поля в диэлектрике получается, если применить к полученной интегральной форме формулу Гаусса - Остроградского (см. §4, §12):

$$\left. \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{V_s} (\operatorname{div} \vec{D}) dV \\ q^{\text{внутр}} = \int_{V_s} \rho dV \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{V_s} (\operatorname{div} \vec{D}) dV = \int_{V_s} \rho dV \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

— локальная (дифференциальная) форма теоремы Гаусса для диэлектриков.

### Связь между векторами $\vec{P}$ , $\vec{E}$ и $\vec{D}$

Опыт показывает, что для обширного класса диэлектриков (однородных и изотропных) и широкого круга явлений связь между векторами  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  линейна. Векторы коллинеарны и можно написать:  $\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}$ , где  $\kappa$  («каппа») — безразмерный коэффициент, называемый *поляризуемостью* диэлектрика или *диэлектрической восприимчивостью среды*. Эта величина не зависит от  $\vec{E}$  и характеризует свойства самого диэлектрика (зависит от его плотности и температуры), она всегда положительна  $\kappa > 0$ .

В таких однородных и изотропных диэлектриках вектор  $\vec{D}$  тоже коллинеарен вектору  $\vec{E}$ :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \kappa \vec{E} = \epsilon_0 (\kappa + 1) \vec{E}, \text{ или}$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}},$$

где  $\epsilon = \kappa + 1$  — безразмерная характеристика — *диэлектрическая проницаемость вещества*.

Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  (как и  $\kappa$ ) является основной электрической характеристикой диэлектрика. Для всех веществ она больше единицы  $\epsilon > 1$ , для вакуума  $\epsilon = 1$ . Значения  $\epsilon$  зависят от природы диэлектрика и колеблются от величин, весьма мало отличающихся от единицы ( $\epsilon_{\text{воздух}} = 1,00059$  (при НУ),  $\epsilon_{\text{водяной пар}} = 1,006$  (при  $100^\circ\text{C}$ ),  $\epsilon_{\text{углекислый газ}} = 1,00099$ ) до нескольких тысяч ( $\epsilon_{\text{керамика конденсаторная}} = 300 - 3000$ ). Большие значения  $\epsilon$  имеют лёд и вода ( $\epsilon_{\text{лёд}} = 73$  (при  $-5^\circ\text{C}$ ),  $\epsilon_{\text{вода}} = 81$  (при  $20^\circ\text{C}$ )).

Несмотря на то, что вектор  $\vec{D}$  — вспомогательный вектор, его наглядно можно изображать с помощью силовых линий, направление и густота которых определяется точно так же, как и для линий вектора  $\vec{E}$  (см. §1). Линии вектора  $\vec{E}$  могут начинаться и заканчиваться как на свободных (сторонних), так и на поляризационных (индуцированных) зарядах. Источниками и стоками линий поля  $\vec{E}$  могут быть *любые* заряды. Источниками же и стоками линий вектора  $\vec{D}$  являются только *сторонние* заряды: только на них могут начинаться и заканчиваться силовые линии. Само поле вектора  $\vec{D}$  зависит как от сторонних, так и от поляризационных зарядов (как и поле вектора  $\vec{E}$ ). Об этом свидетельствует линейная зависимость между этими векторами:  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ . Однако в некоторых случаях (при определённой симметрии сторонних

зарядов) поле вектора  $\vec{D}$  определяется только сторонними зарядами. Именно в таких случаях применение вектора  $\vec{D}$  является особенно полезным.

Пример: точечный сторонний заряд  $q$  находится в центре шара радиуса  $R$  из однородного изотропного диэлектрика проницаемостью  $\epsilon$ . Найти напряжённость  $\vec{E}$  поля как функцию расстояния  $r$  от центра шара.

Дано:

$R$  – радиус шара;

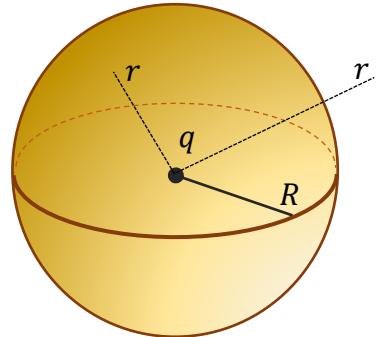
$q$  – сторонний заряд;

$\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость вещества

Найти:

$$E(r), \quad 0 \leq r < R \text{ (внутри)}$$

$$E(r), \quad r > R \quad \text{(снаружи)}$$

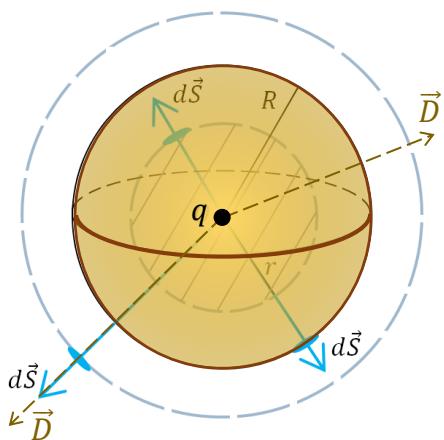


Сферическая симметрия системы позволяет для решения этой задачи использовать теорему Гаусса для вектора  $\vec{D}$  (для диэлектриков):

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{внутр}}$$

(воспользоваться аналогичной теоремой для вектора  $\vec{E}$  нельзя, поскольку нам неизвестен поляризационный заряд, возникший в диэлектрике). Нахождение вектора  $\vec{D}$  по теореме Гаусса построено на том же алгоритме, что был использован в §3, когда мы искали поле вектора  $\vec{E}$  в вакууме.

Шаг 1: поле, создаваемое зарядом  $q$ , расположенным в центре шара, и поляризационным зарядом  $q'$ , возникшим в однородном и изотропном диэлектрике, является сферически симметричным:  $\vec{E} = E(r) \frac{\vec{r}}{r}$ , и следовательно, линии вектора  $\vec{D}$  коллинеарного вектору  $\vec{E}$  тоже буду иметь эту симметрию:  $\vec{D} = D(r) \frac{\vec{r}}{r}$ . Как уже не раз говорилось, в таком случае в качестве вспомогательной поверхности берётся сфера.  $S$  – сфера радиуса  $r$ .



Для нахождения поля внутри шара будем использовать вспомогательную поверхность радиусом  $a)$   $0 \leq r < R$ , вне шара  $b)$   $r > R$ .

Шаг 2: найдём поток  $\Phi_S$  через вспомогательную сферу

$$\Phi_S = \oint_{\text{сфера}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{сфера}} D(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{S} =$$

где  $d\vec{S}$  – элемент площади вспомогательной поверхности (сферы), перпендикулярный к поверхности сферы.

Следовательно, в любой точке поверхности сферы  $d\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{r}$ . Кроме того, на поверхности сферы

в любой её точке  $D = \text{const}$  ( $\Leftarrow r = \text{const}$ ), поэтому величина поля  $D$  не зависит от выбора площадки  $dS$  и её можно вынести из под знака интеграла.

$$= \oint_{\text{сфера}} D(r) \cdot \frac{r \cdot dS \cdot \cos 0}{r} = \oint_{\text{сфера}} D \cdot dS = D \oint_{\text{сфера}} dS = D \cdot S_{\text{сф}} = D \cdot 4\pi r^2.$$

Полученное выражение для потока справедливо  $\Phi_S$  для любого размера вспомогательной сферы: и для вспомогательной поверхности размера  $0 \leq r < R$ , и для вспомогательной поверхности  $r > R$ .

Шаг 3: считаем сторонний заряд, попавший внутрь вспомогательной сферы  $q^{\text{внутр}}$  (т.к. поток вектора  $\vec{D}$  определяется только им). Размер вспомогательной поверхности в этой задаче значения не имеет:

и в случае a)  $0 \leq r < R$ , и в случае b)  $r > R$  внутри вспомогательной сферы оказывается весь сторонний заряд  $q^{\text{внутр}} = q$ .

Шаг 4: приравниваем левую и правую части.

$$\left. \begin{array}{l} a) \quad 0 \leq r < R \\ b) \quad r > R \end{array} \right\} : \quad D \cdot 4\pi r^2 = q \quad \Rightarrow \quad D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Теперь, воспользовавшись связью между векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  для однородных и изотропных диэлектриков  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ , получаем:

$$\begin{aligned} a) \quad 0 \leq r < R \quad E &= \frac{D}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2}; \\ b) \quad r > R \quad E &= \frac{D}{\epsilon \epsilon_0} \Big|_{\epsilon=1} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}. \end{aligned}$$

Вспомним, поле точечного заряда в вакууме:

$$E_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \epsilon E \quad \Rightarrow \quad E = \frac{E_0}{\epsilon}.$$

Итак, если однородный и изотропный диэлектрик заполняет всё пространство, занимаемое полем, то напряжённость  $\vec{E}$  поля будет в  $\epsilon$  раз меньше напряжённости поля  $\vec{E}_0$  тех же сторонних зарядов, но при отсутствии диэлектрика. Отсюда следует, что потенциал  $\varphi$  во всех точках также уменьшается в  $\epsilon$  раз:  $\varphi = \frac{\varphi_0}{\epsilon}$ , где  $\varphi_0$  – потенциал поля в отсутствии диэлектрика. Это же относится и к разности потенциалов – напряжению:  $U = \frac{U_0}{\epsilon}$ , где  $U_0$  – разность потенциалов в вакууме.

В простейшем случае, когда однородный изотропный диэлектрик заполняет *всё пространство между обкладками* конденсатора, напряжение  $U$  между его обкладками будет в  $\epsilon$  раз меньше, чем при отсутствии диэлектрика (разумеется, при том же заряде на обкладках

конденсатора  $q$ ). Следовательно, ёмкость конденсатора (см. §10)  $(C = \frac{q}{U})$  при заполнении его диэлектриком увеличится в  $\epsilon$  раз:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon q}{U_0} = \epsilon C_0,$$

где  $C_0$  – ёмкость конденсатора без диэлектрика. В частности, для плоского конденсатора имеем:

$$C = \epsilon C_0 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}.$$

Тоже самое можно сказать и про энергию электрического поля, когда всё пространство, занимаемое полем, заполняет однородный и изотропный диэлектрик.

В случае однородного электрического поля (см. §11):

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon C_0}{2} (E \cdot d)^2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} \frac{(E \cdot d)^2}{2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} \cdot V = w \cdot V,$$

где

$$w = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E \cdot E}{2} = \frac{D \cdot E}{2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon \epsilon_0}$$

– объёмная плотность энергии электрического поля при наличии диэлектрика. Полная энергия неоднородного электрического поля в пространстве занятом однородным изотропным диэлектриком:

$$W = \int_{\text{по всему пространству}} w dV.$$

$$W = \int_{\text{по всему пространству}} \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} dV = \int_{\text{по всему пространству}} \frac{D^2}{2\epsilon \epsilon_0} dV = \int_{\text{по всему пространству}} \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} dV.$$

В ионных кристаллах и анизотропных диэлектриках (диэлектриках свойства, которых различаются в зависимости от направления, выбранного в веществе) направления векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  не совпадают, соотношение  $\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}$  заменяется более общей линейной однородной зависимостью:

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\kappa_{xx} E_x + \kappa_{xy} E_y + \kappa_{xz} E_z), \\ P_y &= \epsilon_0 (\kappa_{yx} E_x + \kappa_{yy} E_y + \kappa_{yz} E_z), \\ P_z &= \epsilon_0 (\kappa_{zx} E_x + \kappa_{zy} E_y + \kappa_{zz} E_z) \end{aligned}$$

– здесь  $\kappa_{ij}$  – безразмерные коэффициенты, зависящие от выбора координатных осей. Совокупность этих девяти коэффициентов называется *тензором диэлектрической восприимчивости вещества*.

Аналогично, для компонент вектора  $\vec{D}$  имеем:

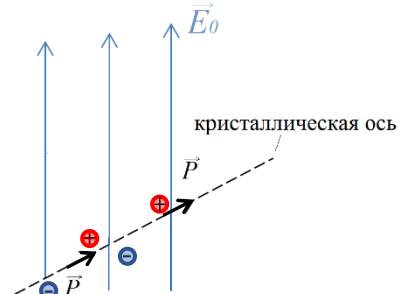
$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_0 E_x + P_x = \varepsilon_0 E_x + \varepsilon_0 (\kappa_{xx} E_x + \kappa_{xy} E_y + \kappa_{xz} E_z) = \varepsilon_0 (\kappa_{xx} + 1) E_x + \kappa_{xy} E_y + \kappa_{xz} E_z \\ D_y &= \varepsilon_0 E_y + P_y = \dots \quad \dots \quad \dots \quad = \kappa_{yx} E_x + \varepsilon_0 (\kappa_{yy} + 1) E_y + \kappa_{yz} E_z \\ D_z &= \varepsilon_0 E_z + P_z = \dots \quad \dots \quad \dots \quad = \kappa_{zx} E_x + \kappa_{zy} E_y + \varepsilon_0 (\kappa_{zz} + 1) E_z \end{aligned}$$

Если вспомнить правила линейной алгебры, то эти зависимости можно переписать в более компактной форме:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \begin{pmatrix} P_x(\vec{E}) \\ P_y(\vec{E}) \\ P_z(\vec{E}) \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \kappa_{xx} E_x + \kappa_{xy} E_y + \kappa_{xz} E_z \\ \kappa_{yx} E_x + \kappa_{yy} E_y + \kappa_{yz} E_z \\ \kappa_{zx} E_x + \kappa_{zy} E_y + \kappa_{zz} E_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \\ \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \\ &= \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \\ &= \varepsilon_0 \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \\ &= \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \kappa_{xx} + 1 & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} + 1 & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}$  – безразмерные постоянные, образующие тензор диэлектрической проницаемости вещества.

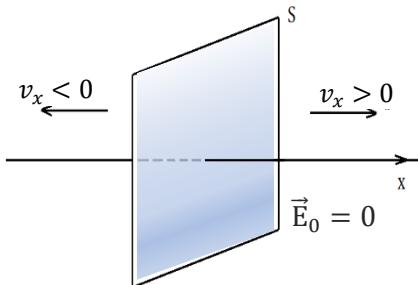
Объяснить такую зависимость между векторами  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  у кристаллов можно наличием у них кристаллических осей, вдоль которых кристаллы обладают разными физическими свойствами, например, слюды – минералы, обладающие слоистой структурой. Соответственно в таких кристаллах поляризация происходит не вдоль направления внешнего электрического поля, а только вдоль кристаллической оси.



## §14. Электрический ток. Закон сохранения заряда

Начиная изучение основных законов постоянного тока, договоримся, что мы ограничимся только рассмотрением тока проводимости в проводящей среде, главным образом в металлах. Электрический ток представляет собой перенос заряда *носителями тока* через ту или иную поверхность (например, через сечение проводника). В металлах носителями тока являются электроны, в полупроводниках – электроны и дырки, в электролитах – положительные и отрицательные ионы, в ионизованных газах и плазме – ионы и электроны.

При отсутствии электрического поля носители тока хаотически движутся в различных

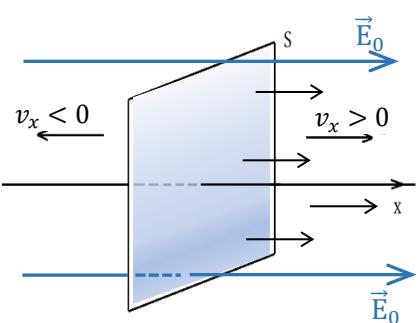


направлениях и электрический ток в среде равен нулю. Например, если рассматриваемая среда – ионизированный газ или электролит, то распределение носителей тока по скоростям выражается максвелловским законом распределения скоростей (см. §17 раздел «Молекулярная физика. Термодинамика»). Разместим в рассматриваемой

среде площадку  $S$ , перпендикулярную оси  $OX$ , через неё в каждую единицу времени слева направо и справа налево будет пролетать одно и то же число частиц. В результате переноса заряда через площадку не будет:  $\langle v_x \rangle = 0$ . Аналогично, можно разместить площадки перпендикулярно двум другим осям  $OY$  и  $OZ$ , для них так же будут справедливы равенства  $\langle v_y \rangle = 0$  и  $\langle v_z \rangle = 0$ .

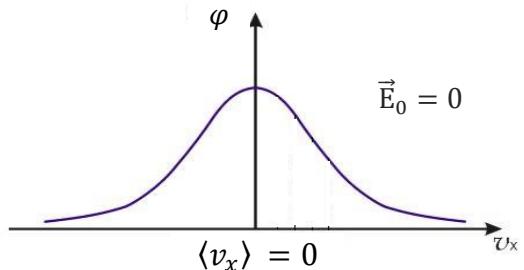
Следовательно, среднее значение вектора скорости носителей тока при отсутствии внешнего электрического поля равное средней скорости теплового движения носителей равно нулю:

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_T \rangle = \langle v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \rangle = \langle v_x \rangle \vec{i} + \langle v_y \rangle \vec{j} + \langle v_z \rangle \vec{k} = 0.$$



Переноса заряда через поверхность  $S$  не происходит.

Теперь представим ситуацию, когда в проводящей среде присутствует электрическое поле напряжённостью  $\vec{E}_0$  параллельное оси  $OX$ . Носители тока будут ускоряться и приобретать дополнительную скорость в направлении поля. Число носителей, пересекающих площадку, слева направо



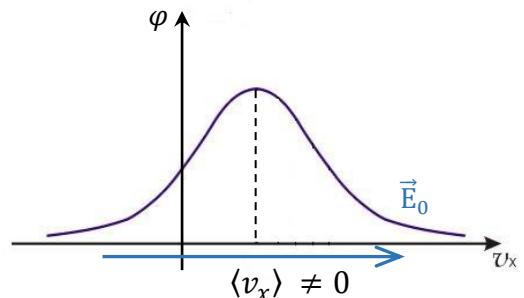
## лекции по физике (II семестр) доц. Т.А.Андреева

будет больше числа носителей, перемещающихся справа налево, средняя скорость движения вдоль  $OX$  будет отлична от 0  $\langle v_x \rangle = u_x \neq 0$ . Можно сказать, что на хаотическое движение носителей в таком случае накладывается упорядоченное движение с некоторой средней скоростью  $\vec{u} = u_x \vec{i}$ , направленной вдоль силовой линии поля. Средние значения других компонент скорости не изменятся:  $\langle v_y \rangle = 0$  и  $\langle v_z \rangle = 0$ . Следовательно, среднее значение вектора скорости носителей тока при наличии внешнего электрического поля станет определяться скоростью упорядоченного движения:

$$\begin{aligned}\langle \vec{v} \rangle &= \langle v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \rangle = \langle \vec{v}_t + \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}_t \rangle + \langle \vec{u} \rangle \\ \Rightarrow \quad \langle \vec{v} \rangle &= \vec{u},\end{aligned}$$

мы принимаем, что все носители тока в проводящей

среде одинаковы, и электрическое поле сообщает им одинаковую скорость, сонаправленную с вектором напряжённости  $\vec{E}_0$ .



В металлах, как было сказано выше, носителями тока являются электроны – заряженные частицы с полуцелым спином. Поведение таких частиц подчиняется статистике Ферми – Дирака, отличающейся от распределения Максвелла - Больцмана, но формула для среднего значения вектора скорости справедлива и для них.

Таким образом в проводнике возникает *электрический ток – упорядоченный перенос электрических зарядов*.

Количественной мерой электрического тока служит *сила тока I*, которая численно равна заряду, переносимому сквозь некоторую поверхность  $S$  внутри проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

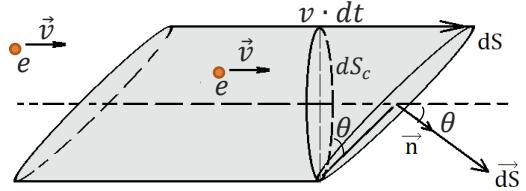
Единицей измерения силы тока является ампер (A):  $[I] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А}$ .

Рассмотрим простейший случай, когда все носители тока в проводящей среде одинаковы (например, электроны в металлах). Поскольку направление переноса заряда совпадает с направлением движения носителей тока, для простоты будем полагать, что носители тока имеют положительный заряд. Представим, что наша среда обладает следующими известными нам характеристиками:  $e$  – заряд носителя тока,  $n$  – концентрация носителей тока,  $\vec{u}$  – скорость упорядоченного движения носителей. Выделим в среде бесконечно малую площадку  $d\vec{S}$  и постараемся определить, какой заряд  $dq$  пересечёт эту площадку за время  $dt$ . Мы можем сосчитать суммарный заряд  $dq$  как произведение заряда одного носителя на число носителей

## лекции по физике (II семестр) доц. Т.А.Андреева

тока, прошедших через нее. При этом мы должны учесть, что все носители обладают разными скоростями  $\vec{v}$  и поэтому, за отведённый промежуток времени  $dt$  некоторые из носителей не пересекут площадку  $d\vec{S}$ , а только приближаются к ней. Придётся сгруппировать носители по значениям скорости  $\vec{v}$ , и сначала найти  $dq(\vec{v})$  – заряд, перенесённый через выделенную площадку носителями, скорости которых  $\vec{v}$ .

За время наблюдения выделенную площадку успеют пересечь только носители тока со скоростью  $\vec{v}$ , находящиеся внутри некоторого косого цилиндра, площадь основания которого равна  $d\vec{S}$ , образующая направлена вдоль вектора скорости, а ее длина равна  $v \cdot dt$ . Носители тока, имеющие скорость  $\vec{v}$ , но находящиеся вне этого цилиндра, не успевают долететь до площадки или пролетают мимо. Соответственно, число носителей в этом мысленно выделенном цилиндре и будет равно  $dN(\vec{v})$  – числу носителей, скорость которых лежит в интервале  $(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$ , за время наблюдения  $dt$ , пересекающих площадку  $d\vec{S}$ . Эти носители тока перенесут заряд  $dq(\vec{v}) = e \cdot dN(\vec{v})$ .



Полный заряд, переносимый носителями тока через площадку  $d\vec{S}$ , можно найти, сложив  $dq(\vec{v})$  для всех возможных значений скорости носителей  $\vec{v}$ . Для цилиндра, приведённого на картинке

$$dq = \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} dq(\vec{v}) = \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} e \cdot dN(\vec{v}).$$

Число носителей тока в цилиндре выражим через концентрацию носителей, имеющих данную скорость  $dn(\vec{v})$  и объём цилиндра  $V = dt \cdot v \cdot dS \cdot \cos \theta = dt \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S}$  (см. §9):

$$dq = \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} e \cdot dn(\vec{v}) \cdot dt \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} = e \cdot dt \cdot d\vec{S} \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} \vec{v} \cdot dn(\vec{v}) =$$

Умножив и разделив выражение на  $n$  – концентрацию носителей тока, получим под интегралом относительную концентрацию носителей  $\frac{dn(\vec{v})}{n}$ , движущихся со скоростью  $\vec{v}$ .

Поскольку концентрация есть величина пропорциональная числу частиц  $n = \frac{N}{V}$ , то относительная концентрация равна относительному числу, имеющим скорость  $\vec{v}$ :

$$\frac{dn(\vec{v})}{n} = \frac{dN(\vec{v})}{N}.$$

Тогда

$$= n \cdot e \cdot dt \cdot d\vec{S} \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} \vec{v} \cdot \frac{dN(\vec{v})}{N} = n \cdot e \cdot dt \cdot d\vec{S} \cdot \langle \vec{v} \rangle = n \cdot e \cdot dt \cdot d\vec{S} \cdot \vec{u}.$$

См. §17 раздел «Молекулярная физика. Термодинамика»:

$$\langle \vec{v} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int \vec{v} \cdot \frac{dN(\vec{v})}{N}$$

по всему диапазону значений  $\vec{v}$

Таким образом, через площадку  $d\vec{S}$  за время наблюдения  $dt$  переносится заряд, равный

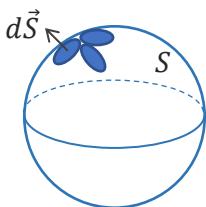
$$dq = n \cdot e \cdot \vec{u} \cdot dt \cdot d\vec{S}.$$

Следовательно, величина силы тока, протекающего через выбранную нами площадку в проводящей среде, равна:

$$dI = \frac{dq}{dt} = n \cdot e \cdot \vec{u} \cdot d\vec{S},$$

мы учли, что выбранная площадка  $d\vec{S}$  является малой, и сила тока, протекающего через неё, тоже будет малой величиной. Первые три множителя в последнем выражении являются характеристиками среды, по которой протекает электрический ток, их можно объединить в одну величину – *вектор плотности тока*:

$$\vec{j} = n \cdot e \cdot \vec{u}.$$



Электрический ток может быть распределён по поверхности, через которую он протекает, неравномерно. Зная вектор плотности тока в каждой точке интересующей нас поверхности  $S$ , можно найти и силу тока через эту поверхность как поток вектора плотности тока  $\vec{j}$ :

$$I = \int_S dI = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S},$$

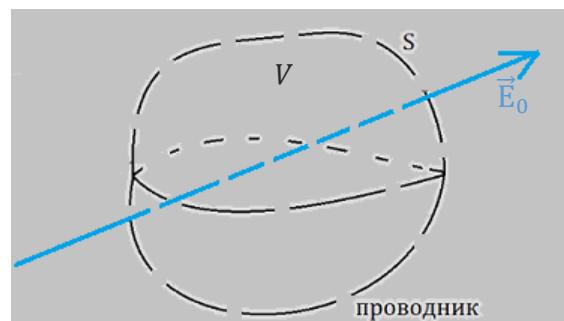
для замкнутых поверхностей соответственно:

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

### Закон сохранения электрического заряда.

Одним из фундаментальных физических законов является закон сохранения заряда.

Выразим его математически через макроскопические величины плотность заряда  $\rho$  и плотность электрического тока  $\vec{j}$ . Выберем в проводящей среде произвольную замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую объём  $V$ .



## лекции по физике (II семестр) доц. Т.А.Андреева

Рассмотрим, как с течением времени будет меняться заряд внутри объёма. Под действием электрического поля часть заряда пересечёт поверхность  $S$  и покинет объём  $V$ . При этом в силу закона сохранения заряда:

$$q = q_{\text{остался внутри } V} + q_{\text{вышедший через границу } S} = \text{const};$$

$$d(\text{const}) = dq + dq_S = 0 \Rightarrow dq = -dq_S.$$

У Вас есть пять яблок, три из них Вы отдали другу. Следовательно, у Вашего друга стало на три яблока больше, а у Вас – на три меньше. Изменение яблок у друга равно плюс трём, изменение яблок у Вас равно минус трём 😞.

Заряд, вышедший через границы поверхности  $S$ , можно выразить, использовав величину силы тока, прошедшего через поверхность:

$$dq_S = I \cdot dt = \left( \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \right) dt.$$

Заряд за единицу времени, вытекающий из объёма  $V$  будет равен:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{dq_S}{dt} = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

*Поток вектора плотности тока через произвольную замкнутую поверхность, выбранную в проводящей среде, равен убыли зарядов в единицу времени внутри объёма, ограниченного этой поверхностью – закон сохранения электрического заряда (уравнение непрерывности):*

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}.$$

Для расширения возможностей применения этого закона придадим ему другую форму – дифференциальную (локальную), применив к левой части выражения формулу Гаусса - Остроградского (см. §4, §12). Правую часть перепишем, выразив заряд внутри  $V$  через объёмную плотность  $\rho$ .

$$\left. \begin{aligned} \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} &= \int_V (\text{div } \vec{j}) dV \\ q &= \int_V \rho dV \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_V (\text{div } \vec{j}) dV = -\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho dV \right) = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Интеграл может изменяться во времени, если изменяется область интегрирования или подынтегральное выражение. В нашем случае область интегрирования не изменяется, поэтому все изменение связано с подынтегральным выражением и производной по времени можно

## лекции по физике (II семестр) доц. Т.А.Андреева

пронести под знак интеграла. Замена полной производной  $\frac{d}{dt}$  на частную  $\frac{\partial}{\partial t}$  связана с тем, что плотность зависит не только от времени, но и от координат.

Вообще говоря, из равенства интегралов не следует равенства подынтегральных выражений, но наше равенство справедливо для любой области интегрирования, а это кардинально меняет ситуацию. Допустим, что в некоторой области подынтегральные выражения не равны, тогда мы можем перенести область интегрирования туда и равенство интегралов нарушится – мы приходим к противоречию. Следовательно, подынтегральные выражения равны:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

дивергенция вектора плотности тока в некоторой точке равна убыли заряда в единицу времени в этой же точке.

В случае стационарного (постоянного) тока распределение зарядов в пространстве остаётся неизменным (на место переместившегося носителя тока тут же приходит другой такой же носитель), т.е.

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Следовательно, для постоянного тока:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

а значит, линии вектора плотности тока  $\vec{j}$  в этом случае нигде не начинаются и нигде не заканчиваются – замкнутые линии (см. §2, 4) и поле вектора  $\vec{j}$  не имеет источников.

## §15. Закон Ома и закон Джоуля - Ленца (локальная форма)

Одним из главных способов возбуждения электрического тока в средах является создание и поддержание в них электрического поля. Как показывает опыт, существуют среды (например, металлы), для которых в широких пределах плотность электрического тока пропорциональна напряжённости электрического поля:  $\vec{j} \sim \vec{E}$ . Это один из важнейших, хотя и не фундаментальных, законов электродинамики. Он называется *закон Ома*.

### Вывод закона Ома.

Будем полагать, что электрическое поле, возбуждающее электрический ток в проводящей среде, может меняться со временем. В качестве проводящей среды рассмотрим металлы, хотя последующие рассуждения могут быть справедливы и в случае других проводящих сред (электролитов, ионизованных газов и пр.). Пусть наша среда обладает следующими характеристиками:  $m$  – масса носителя тока (электрона),  $e$  – заряд носителя тока (положительный, см. §14),  $n$  – концентрация носителей тока,  $\vec{u}$  – средняя скорость упорядоченного движения носителей тока,  $\vec{E}$  – напряжённость внешнего электрического поля.

Как было выяснено в предыдущем параграфе, в отсутствии электрического поля, все направления движения электронов равновероятны, движение носителей является беспорядочным (как тепловое движение частиц газа). Перенос заряда через поверхности (электрического тока) отсутствует. При включении поля на беспорядочное движение электронов накладывается упорядоченное – *дрейфовое* – движение в направлении силовых линий поля. Если внешнее электрическое поле однородно, то все носители тока движутся с одной и той же дрейфовой скоростью  $\vec{u}$ . Полная скорость электрона складывается из беспорядочной (тепловой) скорости  $\vec{v}_t$  и упорядоченной скорости  $\vec{u}$ :  $\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{u}$ . Движение электрона в классической механике описывается уравнением (II – закон Ньютона):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{ct},$$

где  $\vec{F} = e\vec{E}$  – сила, действующая на носитель со стороны электрического поля,  $\vec{F}_{ct}$  – сила, которую он испытывает при столкновениях с ионами кристаллической решётки (сила сопротивления). Усредним полученное выражение по всем носителям проводящей среды:

$$\langle m \frac{d\vec{v}}{dt} \rangle = \langle e\vec{E} + \vec{F}_{ct} \rangle.$$

Масса всех носителей одинакова –  $m$ , время наблюдения тоже, поэтому усреднение касается только скорости носителей, кроме того,  $\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_t + \vec{u} \rangle = \vec{u}$  (см. §14):

$$\langle m \frac{d\vec{v}}{dt} \rangle = m \frac{d\langle \vec{v} \rangle}{dt} = m \frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Усреднение правой части даёт следующее:  $\langle e\vec{E} + \vec{F}_{ct} \rangle = \langle e\vec{E} \rangle + \langle \vec{F}_{ct} \rangle = e\vec{E} + \langle \vec{F}_{ct} \rangle$ , т.к. электрическое поле, действует на все носители тока одинаково. Для того, чтобы определить усреднённое значение силы, которую носители тока испытывают в результате столкновений  $\langle \vec{F}_{ct} \rangle$ , разложим ее в ряд Тейлора по степеням  $\vec{u}$ , ограничившись первыми членами ряда

$$\langle \vec{F}_{ct} \rangle = 0 - \alpha \cdot \vec{u} + O(u^2).$$

Ряд Тейлора для  $f(x)$  – это разложение по степеням  $x$ , например, в окрестности 0:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \dots$$

Очевидно, что при  $\vec{u} = 0$  средняя сила сопротивления движению носителей тока должна быть равна 0, в противном случае под действием этой силы носители начнут дрейфовать даже при отсутствии внешнего поля. Поэтому первый член тейлоровского разложения должен быть равен 0. Столкновения электронов препятствуют их движению, значит  $\langle \vec{F}_{ct} \rangle$  должна быть направлена против их скорости; этот факт мы учли в явном виде, записав второй член разложения со знаком минус. Если мы предположим, что **скорость упорядоченного движения электронов  $\vec{u}$  мала**, всеми последующими членами ряда можно пренебречь:

$$\langle \vec{F}_{ct} \rangle = -\alpha \cdot \vec{u}.$$

Говоря о малости скорости  $\vec{u}$ , важно понимать с чем мы должны ее сравнивать. Так как интенсивность взаимодействия носителя тока с кристаллической решеткой определяется скоростью теплового движения, должно выполняться соотношение  $u \ll v_T$ .

Коэффициент пропорциональности  $\alpha$  попробуем записать, исходя из размерности величин, входящих в выражение для силы:

$$[\alpha] = \frac{[F_{ct}]}{[u]} = \frac{\text{Н}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}} = \frac{[m]}{[t]} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{m}{\tau},$$

т.е. наш коэффициент можно представить, как отношение некой массы к некоему времени. Поскольку выбор этих параметров произволен, будем считать, что  $m$  – это масса носителя тока, а  $\tau$  – некоторое характерное время, физический смысл которого мы попытаемся выяснить позже. Окончательно:

$$\langle \vec{F}_{ct} \rangle = -\frac{m}{\tau} \cdot \vec{u}.$$

Таким образом, после усреднения уравнение движения носителя принимает следующий вид:

$$m \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = e \cdot \vec{E} - \frac{m}{\tau} \cdot \vec{u}$$

или

$$\tau \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u} = \frac{e \cdot \tau}{m} \vec{E}.$$

Исследуем решение этого уравнения. Учтем, что скорость упорядоченного движения направлена вдоль электрического поля  $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{E}$ , поэтому от векторов мы можем перейти к проекциям на направление поля:

$$\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = \frac{e \cdot \tau}{m} E.$$

Чтобы выяснить физический смысл  $\tau$ , рассмотрим две простые ситуации.

- Допустим, что до момента  $t = 0$  носители тока под действием поля двигались с постоянной скоростью  $u = u_0$ . А в момент  $t = 0$  поле выключили ( $E = 0$ ). Тогда наше уравнение приобретает следующий вид

$$\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = 0.$$

$$u|_{t=0} = u_0$$

— скорость носителей в начальный момент времени.

Как обычно, такое дифференциальное уравнение решается разделением переменных и последующим интегрированием

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = -\frac{u}{\tau} &\Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau}; \\ \int_{u_0}^u \frac{du}{u} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau} &\Rightarrow \ln u \Big|_{u_0}^u = -\frac{1}{\tau} t \Big|_0^t; \\ \ln u - \ln u_0 = -\frac{t}{\tau} &\Rightarrow \ln \frac{u}{u_0} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \frac{u}{u_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \\ u &= u_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned}$$

— решение дифференциального уравнения в первой ситуации.

Чтобы избежать путаницы с зарядом носителя тока, мы использовали функцию  $\exp(x) = e^x$ , где  $e$  — постоянная Эйлера (2.718 ...).

Видно, что дрейфовая скорость после выключения поля спадает до 0, при этом за время  $\tau$  она уменьшается в  $e$  раз, а за время  $5\tau$  почти в 150 раз. Поскольку  $\tau$  характеризует время перехода из одного стационарного состояния в другое, оно называется *временем релаксации*.

- Пусть теперь до момента  $t = 0$  поле отсутствовало, тогда направленное движение носителей также отсутствовало ( $u = 0$ ), а потом его включили, и оно больше не изменялось ( $E = \text{const}$ ):

$$\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = \frac{e \cdot \tau}{m} E,$$

$$u|_{t=0} = 0$$

— скорость носителей в начальный момент времени во второй ситуации.

Будем искать решение этого уравнения как сумму двух слагаемых  $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$  и  $\frac{e\tau}{m}E = const$ :

$$u = \tilde{u} + \frac{e\tau}{m} E.$$

Тогда после подстановки  $u$  в наше уравнение имеем

$$\begin{aligned} \tau \cdot \frac{d}{dt} \left( \tilde{u} + \frac{e\tau}{m} E \right) + \left( \tilde{u} + \frac{e\tau}{m} E \right) &= \frac{e \cdot \tau}{m} E; \\ \tau \cdot \frac{d\tilde{u}}{dt} + \tau \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{e\tau}{m} E \right)}_{=0} + \tilde{u} &= \frac{e \cdot \tau}{m} E - \frac{e \cdot \tau}{m} E \\ \tau \cdot \frac{d\tilde{u}}{dt} + \tilde{u} &= 0. \end{aligned}$$

Вспомнив решение аналогичного уравнения из первой ситуации, можем написать, что решение для  $\tilde{u}$  имеет вид:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right),$$

тогда окончательно для самого решения  $u$  получается:

$$u = \frac{e\tau}{m} E + \tilde{u}_0 \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right).$$

Воспользуемся начальным условием  $u|_{t=0} = 0$  и найдём неизвестную константу  $\tilde{u}_0$ :

$$0 = \frac{e\tau}{m} E + \tilde{u}_0 \exp \left( -\frac{0}{\tau} \right) = \frac{e\tau}{m} E + \tilde{u}_0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_0 = -\frac{e\tau}{m} E.$$

Следовательно решение уравнения для второй ситуации, когда поля сначала не было, а затем его включили имеет вид:

$$u = \frac{e\tau}{m} E - \frac{e\tau}{m} E \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) = \frac{e\tau}{m} E \left( 1 - \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \right).$$

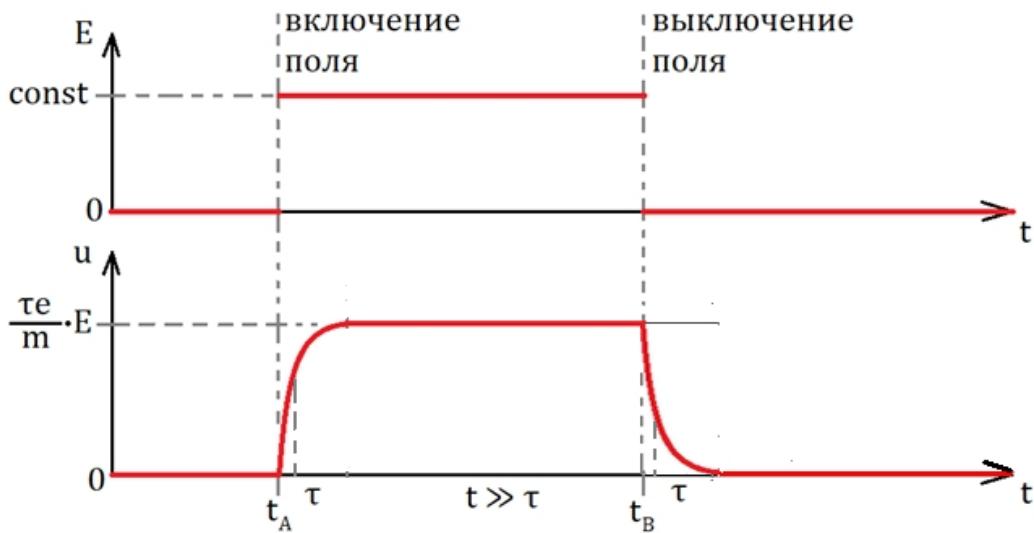
Снова мы видим, что  $\tau$  — это характерное время перехода из одного стационарного состояния в другое. Экспонента в правой части быстро затухает и при  $t \gg \tau$  скорость направленного движения становится равной

$$u = \frac{e\tau}{m} E \quad (*).$$

В действительности, уже при  $t = 10\tau$  скорость отличается от указанного значения на 0,005%.

Рассмотрим полученные решения на графиках:

Видно, что за исключением коротких переходных процессов, справедливо соотношение (\*).



На самом деле мгновенно включить и выключить поле невозможно, и если переключение происходит за время  $t \gg \tau$ , то скорость направленного движения будет «успевать» следовать за изменением поля. Покажем это и рассмотрим теперь случай переменного поля. Допустим, что оно меняется с частотой  $\omega$ :  $E = E_0 \sin \omega t$ .

Тогда уравнение для скорости  $u$  примет вид

$$\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = \frac{e \cdot \tau}{m} E_0 \sin \omega t.$$

Очевидно, что левая часть уравнения также должна изменяться с частотой  $\omega$ . Если предположить, что наше решение тоже изменяется по гармоническому закону:

$$u = u_0 \sin \omega t + u_1 \cos \omega t,$$

то сосчитав производную по времени от нашего решения  $u$ :

$$\begin{aligned} \tau \cdot \frac{du}{dt} &= \tau \cdot \frac{d}{dt} (u_0 \sin \omega t + u_1 \cos \omega t) = \tau \cdot \frac{d}{dt} (u_0 \sin \omega t) + \tau \cdot \frac{d}{dt} (u_1 \cos \omega t) = \\ &= \tau u_0 \omega \cos \omega t - \tau u_1 \omega \sin \omega t = \tau \omega (u_0 \cos \omega t - u_1 \sin \omega t), \end{aligned}$$

получаем вместо дифференциального уравнения следующее выражение:

$$\tau \omega (u_0 \cos \omega t - u_1 \sin \omega t) + (u_0 \sin \omega t + u_1 \cos \omega t) = \frac{e \cdot \tau}{m} E_0 \sin \omega t.$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, имеем

$$(\omega \tau \cdot u_0 + u_1) \cos \omega t + (u_0 - \omega \tau \cdot u_1) \sin \omega t = \frac{e \cdot \tau}{m} E_0 \sin \omega t.$$

Очевидно, что для выполнения равенства необходимо, чтобы коэффициент при косинусе в левой части был равен 0:

$$\omega \tau \cdot u_0 + u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\omega \tau \cdot u_0.$$

Если предположить, что  $\omega \tau \ll 1$ , то  $|u_1| \ll |u_0|$  и слагаемым с  $u_1$  в решении можно пренебречь по сравнению с  $u_0$ :  $u = u_0 \sin \omega t$ . Окончательно:

$$u_0 \sin \omega t = \frac{e \cdot \tau}{m} E_0 \sin \omega t.$$

лекции по физике (II семестр) доц. Т.А.Андреева

Вспомнив, что  $E = E_0 \sin \omega t$  и  $u = u_0 \sin \omega t + u_{\perp} \cos \omega t = u_0 \sin \omega t$ , так  $u_1 \ll u_0$  мы снова получаем

$$u = \frac{e \cdot \tau}{m} E,$$

а вектор скорости упорядоченного движения равен:

$$\vec{u} = \frac{e \cdot \tau}{m} \vec{E},$$

так как  $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{E}$ .

Вспомним теперь определение плотности тока:  $\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{u}$ . Подставляя только что полученное выражение для скорости упорядоченного движения носителей тока, получаем:

$$\vec{j} = e \cdot n \cdot \frac{\tau e}{m} \cdot \vec{E} = \frac{\tau e^2 n}{m} \cdot \vec{E}.$$

Коэффициент пропорциональности  $\frac{\tau e^2 n}{m}$  зависит только от свойств проводящей среды и называется *удельной проводимостью*. Часто используется также обратная величина, называемая *удельным сопротивлением*:

$$\sigma = \frac{\tau e^2 n}{m} \text{ — удельная проводимость,}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{\tau e^2 n} \text{ — удельное сопротивление.}$$

Единицей удельного сопротивления служит

$$[\rho] = \Omega \cdot m \text{ (ом на метр),}$$

единицей удельной проводимости -

$$[\sigma] = \frac{1}{[\rho]} = \frac{1}{\Omega \cdot m} = \frac{C_m}{m} \text{ (сименс на метр).}$$

В результате получаем

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho}$$

— закон Ома в локальной форме.

### Проверка допущений, сделанных при выводе закона Ома.

В процессе вывода локальной формы закона Ома мы сделали два предположения, которые нужно количественно уточнить и верность которых, строго говоря, нужно подтвердить:

- скорость упорядоченного движения  $u$  мала ( $u \ll v_t$ );
- внешнее электрическое поле  $E$  изменяется медленно ( $\omega t \ll 1$ ).

Рассматривать эти два допущения мы будем для широко используемой в электротехнике проводящей среды – меди, используемой для изготовления проводов и соединений на печатных платах. Для расчетов нам понадобятся следующие параметры меди:

$$\text{молярная масса } \mu = 63,5 \frac{\text{г}}{\text{моль}};$$

$$\text{плотность } \rho = 8900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\text{удельное сопротивление } \rho_{Cu} = 16 \cdot 10^{-9} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Для оценок нам также нужна концентрация носителей тока (электронов). Ее мы найдем исходя из того, что каждый атом меди отдает один электрон «в общее пользование», то есть концентрация носителей равна концентрации атомов

$$n = \frac{N_A}{V_1 \text{ моля}} = \frac{N_A}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{\rho \cdot N_A}{\mu} = \frac{8900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}}{63,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

**Начнём с первого предположения.** Вычислим  $u$  и сравним ее со скоростью теплового движения носителей, которая для электронов в металле по порядку величины равна  $v_t \approx 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

Воспользуемся выражением для плотности тока  $\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{u}$ . Допустимая плотность тока в бытовой электропроводке примерно равна  $j_{max} = 10 \frac{\text{А}}{\text{мм}^2} = 10^7 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$ . (На самом деле она зависит от площади сечения провода и вида проводки, но для нашей оценки это несущественно)

$$u_{max} = \frac{j_{max}}{en} = \frac{10^7 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{Кл} \cdot 8,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}} \approx 7,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 0,74 \text{ мм/с} \lllll 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Таким образом, предположение, что  $u \ll v_t$  выполняется с огромным запасом и справедливо не только для меди, но для всех металлов и большинства электролитов.

**Проверим теперь второе предположение.** Вычислим время релаксации  $\tau$ :

$$\rho_{Cu} = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{\tau e^2 n},$$

$$\tau = \frac{m}{\rho_{Cu} \cdot e^2 n} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}}{16 \cdot 10^{-9} \text{ Ом} \cdot \text{м} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл})^2 \cdot 8,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}} \approx 2,6 \cdot 10^{-14} \text{ с}$$

Наибольшей из используемых в быту частот, наверное, обладает Wi-Fi 5 (IEEE 802.11ac), который работает на частоте  $f = 5 \text{ ГГц}$ . Для этой частоты

$$\omega \tau = 2\pi f \tau = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 10^9 \text{ Гц} \cdot 2,6 \cdot 10^{-14} \text{ с} \approx 8,2 \cdot 10^{-4} \ll 1.$$

Таким образом и второе предположение оказывается справедливым для широкого диапазона частот.

Тем не менее, стоит понимать, что данные оценки справедливы лишь для большинства возможных ситуаций, но не для всех. Примером исключения из закона Ома могут служить ионизированные газы (плазма), которым посвящена одна из лабораторных работ курса.

## Локальная форма закона Джоуля-Ленца

Рассмотрим малое перемещение  $d\vec{r}$  одного носителя тока, которое он совершает за время  $dt$ . На этом перемещении электрическое поле совершают над ним работу:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = e\vec{E} \cdot d\vec{r} = e\vec{E} \cdot \vec{v} \cdot dt.$$

Усредним полученное выражение по всем носителям среды:

$$\langle \delta A \rangle = \langle e\vec{E} \cdot \vec{v} \cdot dt \rangle = e\vec{E} \cdot \langle \vec{v} \rangle \cdot dt = e\vec{E} \cdot \vec{u} \cdot dt.$$

На что идет эта работа? Если  $\vec{E}$  и  $\vec{u}$  постоянны, то получается, что работа все время совершается, а ничего не меняется... Ответ на этот вопрос можно найти в самом начале этого параграфа. Если бы кулоновская сила была единственной силой, действующей на носители тока, то их скорость и, следовательно, кинетическая энергия непрерывно увеличивались. Однако взаимодействие с кристаллической решеткой тормозит носители, заставляя их отдавать избыток кинетической энергии решетке. В результате возрастаёт энергия колебаний атомов решетки (внутренняя энергия) – повышается температура среды.

Можно сказать, что при протекании электрического тока выделяющаяся в среде мощность идет на увеличение ее внутренней энергии.

Найдём мощность, выделяющуюся в малом объёма среды  $dV$ , содержащем  $dN$  носителей тока:

$$dP = \frac{\langle \delta A \rangle \cdot dN}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{u} \cdot n \cdot dV = ne \cdot \vec{u} \cdot \vec{E} \cdot dV = \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV.$$

И, наконец, найдём мощность, выделяющуюся в единице объёма среды:

$$\frac{dP}{dV} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

С учетом закона Ома это выражение можно записать несколькими способами

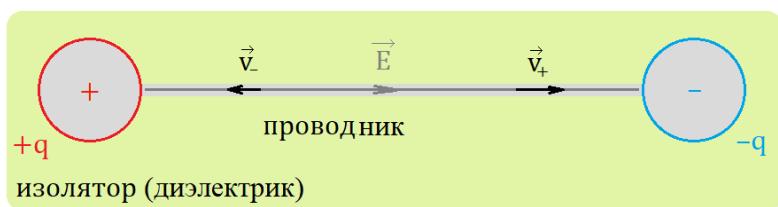
$$\boxed{\frac{dP}{dV} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma \cdot E^2 = \frac{E^2}{\rho} = \frac{j^2}{\sigma} = \rho \cdot j^2}$$

– закон Джоуля-Ленца в локальной форме.

## §16. Обобщённый закон Ома

В предыдущем параграфе было показано, что для возбуждения электрического тока в проводящей среде необходимо создать и поддерживать в ней электрическое поле. Однако, под действием сил поля положительные носители перемещались бы из мест с большим потенциалом к местам с меньшим потенциалом, а отрицательные носители двигались бы в обратном направлении. Это приводило бы к выравниванию потенциалов, и в результате все точки проводящей среды приобретали бы одинаковый потенциал – электрический ток в среде заканчивался.

Рассмотрим следующий пример. Поместим два металлических шарика в изолирующую среду. Сообщив им одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды, мы создадим в пространстве электрическое поле  $\vec{E}$ , направленное от положительно заряженного шарика к отрицательно заряженному. Между шариками возникнет разность потенциалов:  $\varphi_{+q} - \varphi_{-q}$ . Т.к. окружающая среда изолятор ничего с зарядами шариков в этом случае



происходить не будет. Теперь соединим шарики проводником. Кулоновские силы  $\vec{F} = e\vec{E}$ , начнут перемещать положительные носители от левого шарика к правому, а отрицательные – от правого к левому. По проводнику потечёт электрический ток. Как итог, через некоторое время шарики разрядятся, поле  $\vec{E}$  исчезнет и ток прекратится.



Для того чтобы напряжённость поля  $\vec{E}$ , а с ней и электрический ток оставались неизменными, необходимы какие-то дополнительные (*сторонние*) силы, непрерывно возвращающие заряды обратно и совершающие работу по переносу зарядов в направлении, противоположном действию электрического поля.



Физическая природа *сторонних сил* может быть весьма различной. В гальванических элементах и аккумуляторах сторонние силы возникают в результате химических реакций, которые преобразуют химическую энергию в электрическую. В электрогенераторах в качестве сторонней силы выступает магнитная сила Лоренца, а работа совершается за счет *механической* энергии вращения ротора. Сторонние

силы электромагнитной природы порождаются меняющимися во времени магнитными полями. Фотоэлементы преобразуют *световую* энергию в электрическую, используя фотоэффект. Разделение зарядов может также происходить *при наличии разности температур* (термопары, термоэлектрические генераторы) и даже чисто *механически* (электрофорная машина, генератор Ван-де-Граафа).



По аналогии с кулоновскими силами  $\vec{F} = e\vec{E}$  сторонние силы принято выражать через *напряжённость поля сторонних сил*  $\vec{E}_{\text{стор}}$ :  $\vec{F}_{\text{стор}} = e\vec{E}_{\text{стор}}$ .

Запишем уравнение движения для одного носителя тока в проводящей среде как в §15, предположив, что теперь в этой среде ещё действуют и сторонние силы:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ст}} + \vec{F}_{\text{стор}},$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) + \vec{F}_{\text{ст}}.$$

После усреднения по всем носителям получаем уравнение аналогичное дифференциальному уравнению из §15:

$$\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = \frac{e \cdot \tau}{m} (E + E_{\text{стор}}),$$

приближенным решением которого в предположении малости скорости упорядоченного движения ( $u \ll v_t$ ) и медленности изменения внешнего поля  $\vec{E}$  ( $\omega\tau \ll 1$ ), будет выражение:

$$u = \frac{e \cdot \tau}{m} (E + E_{\text{стор}})$$

или соответствующее ему векторное выражение:

$$\vec{u} = \frac{e \cdot \tau}{m} (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}).$$

Теперь используем выражение для плотности тока  $\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{u}$ , и также как в §15 получаем:

$$\vec{j} = \frac{\tau e^2 n}{m} \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}).$$

Таким образом, под совокупным действием поля  $\vec{E}$  и поля сторонних сил  $\vec{E}_{\text{стор}}$  в проводящей среде возникает ток плотности:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) = \frac{\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}}{\rho}}$$

— обобщённый закон Ома или закон Ома для неоднородной среды в дифференциальной форме.

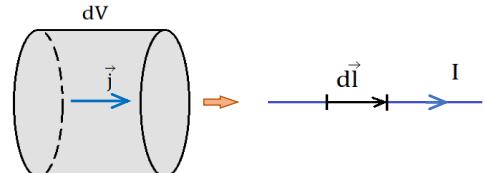
Под неоднородной средой в данном случае понимается проводящая среда, в которой помимо кулоновских сил действуют ещё и сторонние силы.

## Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной форме

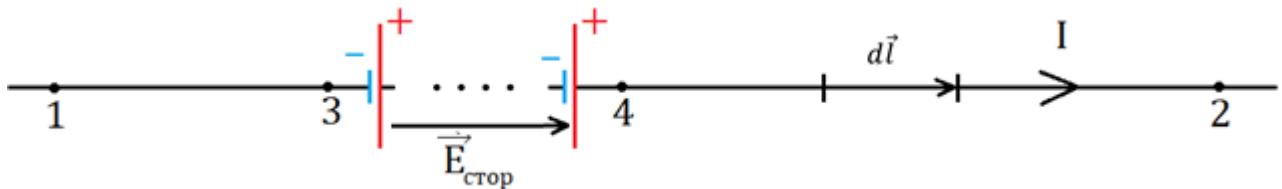
Рассмотрим важнейший случай, когда электрические токи текут вдоль тонких проводов.

В этом случае

- направление тока (или вектора плотности  $\vec{j}$ ) совпадает с направлением оси провода (с элементом длины провода  $d\vec{l}$ ):  $\vec{j} \uparrow\uparrow d\vec{l}$ ;
- плотность тока  $j$  можно принять одинаковой во всех точках сечения провода, хотя сама площадь поперечного сечения провода  $S$  в различных местах его может быть неодинаковой (меняться по длине провода).



Возьмём отрезок такого провода от сечения 1 к сечению 2 на котором есть участок действия



сторонних сил  $3 \rightarrow 4$ . Для любого элемента длины  $d\vec{l}$  этого отрезка выполняется обобщённый закон Ома (мы умножили левую и правую часть выражения на удельное сопротивление материала провода):

$$\rho \vec{j} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}.$$

Полученное выражение скалярно умножим на малый элемент длины провода  $d\vec{l}$ , взятый по направлению тока от сечения 1 к сечению 2 (его мы принимаем за положительное), и затем проинтегрируем по длине нашего отрезка от сечения 1 к сечению 2:

$$\begin{aligned} \rho \vec{j} \cdot d\vec{l} &= (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) \cdot d\vec{l}; \\ \int_1^2 \rho \vec{j} \cdot d\vec{l} &= \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) \cdot d\vec{l}. \quad (*) \end{aligned}$$

Интеграл, стоящий в левой части равен

$$\int_1^2 \rho \vec{j} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \rho j \cdot dl = \int_1^2 \rho \frac{I}{S} \cdot dl = I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = I \int_1^2 dR = IR,$$

мы учли, что векторы плотности тока и элемента длины провода сонаправлены ( $\vec{j} \uparrow\uparrow d\vec{l}$ ), а сила тока  $I$  одинакова во всех сечениях отрезка провода.

$$dR = \rho \frac{dl}{S}$$

— сопротивление участка отрезка длиной  $dl$ , а интеграл от этого выражения — полное сопротивление отрезка провода от сечения 1 к сечению 2:

$$R = \int_1^2 dR.$$

Если провод изготовлен из однородного материала и всюду имеет одинаковую толщину, то получается известная формула:

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Теперь обратимся к правой части:

$$\int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}.$$

Первый интеграл здесь — это разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , т.к. электрическое поле  $\vec{E}$  постоянных токов — потенциальное поле (место одного переместившегося носителя тока тут же занимает другой такой же носитель — распределение зарядов во времени не изменяется). Второй интеграл достаточно распространить на ту часть отрезка провода, которая находится на неоднородный участок провода от сечения 3 к сечению 4. Он представляет собой *электродвижущую силу (ЭДС)  $\Sigma$* , действующую на данном отрезке:

$$\Sigma_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = \int_3^4 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}.$$

Если ЭДС способствует движению положительных носителей тока в выбранном направлении (совпадающем с силой тока  $I$ ), то она считается положительной  $\Sigma_{12} > 0$  (как на нашем рисунке). Если же препятствует  $-\Sigma_{12} < 0$ .

Часто электродвижущей силе дают другое определение, эквивалентное нашему. ЭДС — *работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда*:

$$\Sigma_{12} = \frac{q \int_3^4 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}}{q} = \frac{\int_3^4 q \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}}{q} = \frac{\int_3^4 \vec{F}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}}{q} \Rightarrow \Sigma_{12} = \frac{A_{\text{стор}}}{q}.$$

После всех указанных преобразований для левой и правой частей (\*) получаем:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \Sigma_{12} \quad (**)$$

— интегральная форма обобщённого закона Ома для тонкого провода — *закон Ома для неоднородной цепи*.

Стоит подчеркнуть, что  $R$ , входящее в это выражение — сопротивление всего отрезка провода от сечения 1 к сечению 2, включая сопротивление участка, на котором действуют

сторонние силы от сечения 3 к сечению 4 (внутреннее сопротивление гальванического элемента, например). Формулу (\*\*) можно записать также в виде

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E}_{12} - IR \text{ или } U = \mathcal{E}_{12} - IR$$

Разность потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1$  называется *напряжением* на концах рассматриваемого отрезка провода  $U$ . Если ЭДС равна 0 (сторонние силы отсутствуют), то (\*\*) принимает вид:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  называется в этом случае *падением напряжения* на сопротивлении рассматриваемого отрезка провода  $U$ :  $IR = U$  – закон *Ома для однородной цепи*.

Если конечная и начальная точки провода 1 и 2 совпадают, то  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ . Формула (\*\*) переходит в закон *Ома для замкнутой цепи*:

$$IR = \mathcal{E}$$

– здесь  $R$  означает полное сопротивление всей замкнутой цепи.

### Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме

В предыдущем параграфе нами уже была получена формула, выражающая закон Джоуля-Ленца в локальной (дифференциальной) форме:

$$\frac{dP}{dV} = \frac{j^2}{\sigma} = \rho \cdot j^2$$

– мощность, выделяющаяся в единице объёма проводящей среды при протекании по ней электрического тока. В такой форме записи закон Джоуля-Ленца применим к любым проводящим средам вне зависимости от их формы, однородности и от природы сил, возбуждающих электрические токи. Так если на носители тока действовали только электрические силы (силы Кулона), то на основании закона Ома (см. §15):  $\rho \cdot \vec{j} = \vec{E}$ , получали выражение

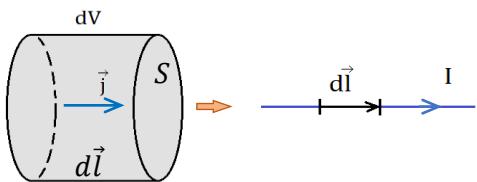
$$\frac{dP}{dV} = \rho \cdot j^2 = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma \cdot E^2 = \frac{E^2}{\rho}.$$

Теперь при наличии в проводящей среде участков, в которых на носители тока действуют сторонние силы, с учётом закона Ома  $\rho \cdot \vec{j} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}$ , получим

$$\frac{dP}{dV} = \rho \cdot j^2 = \vec{j} \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})^2 = \frac{(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})^2}{\rho}$$

– *закон Джоуля-Ленца при наличии сторонних сил*.

В случае тонкого провода, по которому течёт постоянный электрический ток, элемент



объёма проводящей среды можно представить в виде следующего произведения  $dV = S \cdot dl$ .

Мощность, выделяемая электрическим током в этом малом элементе провода:

$$dP = \rho \cdot j^2 \cdot dV = \rho \cdot j^2 \cdot S \cdot dl.$$

Чтобы найти полную мощность, выделяемую во всем проводе, проинтегрируем это выражение по длине нашего отрезка от сечения 1 к сечению 2:

$$P = \int_1^2 \rho \cdot j^2 \cdot S \cdot dl = \int_1^2 \rho \cdot \frac{I^2}{S^2} \cdot S \cdot dl = I^2 \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = I^2 R.$$

Также как при выводе закона Ома для тонкого провода мы учли, что сила тока  $I$  одинакова во всех сечениях нашего провода, а  $R$  — его полное сопротивление от сечения 1 к сечению 2:

$$P = I^2 R$$

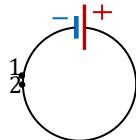
— закон Джоуля-Ленца в интегральной форме.

В случае однородной цепи (при отсутствии в проводнике участка, где действуют сторонние силы)  $IR = U$ , и мощность, выделяемая в проводе, будет равна

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} = IU.$$

Если рассмотреть замкнутую цепь, когда конечная и начальная точки провода 1 и 2 совпадают, то  $IR = \mathcal{E}$ , и мощность, выделяемая в ней, будет равна

$$P = I^2 R = I\mathcal{E} = I \oint \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}.$$



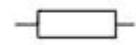
Отсюда видно, что вся выделяющаяся в цепи энергия производится *одними только сторонними силами*. Роль же электрического поля (кулоновских сил) сводится к тому, что оно перераспределяет эту энергию по различным участкам цепи.

## Правила Кирхгофа

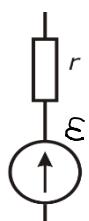
В электрических и радиотехнических цепях часто используется специальный элемент,



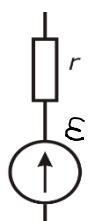
имеющий фиксированное электрическое сопротивление — резистор. На схемах он обозначается прямоугольником.



Такое же обозначение используют для сопротивления проводов и других



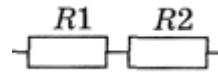
элементов в так называемых *эквивалентных схемах*. Например, гальванический элемент с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  можно представить в виде



последовательно соединенных идеального источника ЭДС (с нулевым внутренним сопротивлением) и резистора с сопротивлением  $r$ .

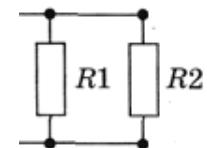
Часто сопротивление сложной цепи можно найти, используя формулы для последовательного и параллельного соединения. Напомним их:

- последовательное сопротивление. Ток в цепи одинаковый, падение напряжения  $U = IR_1 + IR_2$ . Сопротивление цепи равно



$$R = U/I = R_1 + R_2 \text{ -- сопротивления складываются.}$$

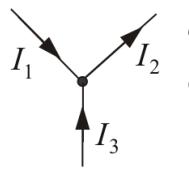
- параллельное соединение. Падение напряжения одинаковое, суммарный ток равен сумме токов  $I = U/R = U/R_1 + U/R_2$ . Складываются проводимости (величины, обратные сопротивлениям)



$$1/R = 1/R_1 + 1/R_2.$$

Однако цепь не всегда удается свести к последовательному и параллельному соединениям. В этом случае для расчета сопротивления, токов и напряжений применяют правила Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа есть следствие закона сохранения заряда. Рассмотрим узел – место



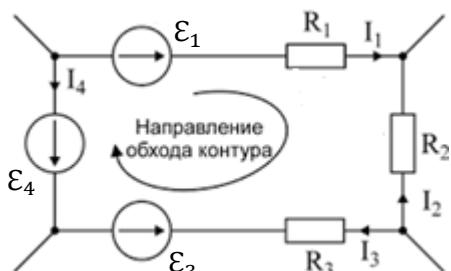
соединения проводников. Окружим его мысленной поверхностью; закон сохранения заряда внутри нее будет иметь вид

$$\frac{dq}{dt} = I_1 - I_2 + I_3 = 0,$$

т.к. заряд узла не изменяется. В общем случае первое правило Кирхгофа формулируется так:

алгебраическая сумма токов в узле равна 0,  $\sum I_k = 0$

Второе правило Кирхгофа есть следствие закона Ома для неоднородной цепи. Выделим в нашей схеме произвольный контур – замкнутую цепь, состоящую из неоднородных отрезков.



В каждом из них протекает различный ток  $I_k$ . Запишем закон Ома для каждого отрезка цепи, выбрав произвольное направление обхода. Токи и ЭДС, направление которых совпадает с направлением обхода будем считать положительными

$$I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1$$

$$-I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3$$

$$I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 - \varepsilon_3$$

$$0 = \varphi_4 - \varphi_1 - \varepsilon_4$$

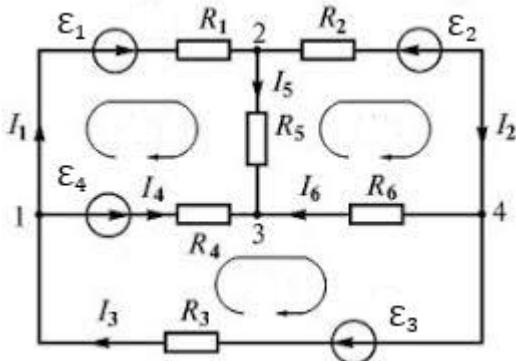
Сложим полученные уравнения. Поскольку контур замкнут, его начальная и конечная точки совпадают и все разности потенциалов в правой части сокращаются

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4,$$

или в общем виде – алгебраическая сумма падений напряжения в контуре равна алгебраической сумме ЭДС, входящих в этот контур:

$$\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_n$$

Рассмотрим применение правил Кирхгофа на примере простой схемы. Зададим для каждого



отрезка цепи направление протекающего по нему тока. Это можно сделать произвольным образом – если окажется, что ток течет в противоположном направлении. Его величина получится отрицательной. Схема содержит 4 узла (1 – 4). Запишем для них первое правило Кирхгофа, приравняв втекающие и вытекающие токи

- 1:  $I_3 = I_1 + I_4$
- 2:  $I_1 = I_2 + I_5$
- 3:  $I_4 + I_5 + I_6 = 0$
- 4:  $I_2 = I_3 + I_6$

Сложим все эти уравнения:  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$  или  $0 = 0$ . Получилось тождество ... Причина проста – каждый ток вытекает из одного узла и втекает в другой и поэтому входит в наше равенство как слева, так и справа. Математически это тождество означает, что записанная нами система избыточна – любое из четырех уравнений может быть получено как сумма трех остальных. Поэтому при наличии  $N$  узлов мы должны написать уравнения только для любых  $N - 1$  узлов.

Для применения второго правила Кирхгофа выделим на схеме три контура и напишем уравнения для них (см. рис. выше)

$$I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_4 R_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_4$$

$$I_2 R_2 + I_6 R_6 - I_5 R_5 = -\mathcal{E}_2$$

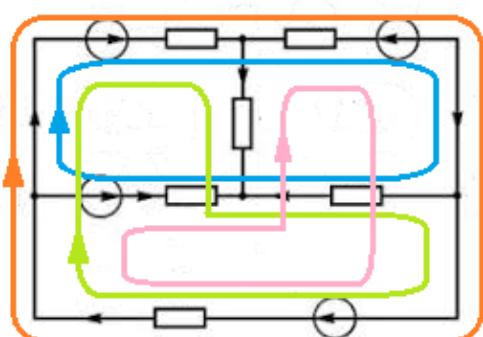
$$I_4 R_4 - I_6 R_6 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_3$$

На самом деле на схеме можно найти еще 4 контура, получающихся объединением выбранных

нами. Надо ли писать уравнения и для них? Сложим уже написанные

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$$

Если посмотреть на получившийся результат, мы видим, что это уравнение для внешнего контура цепи, показанного на рисунке оранжевым цветом. На самом



деле все просто – внешний контур получается объединением трех внутренних, а уравнение для него – сложением уравнений для составляющих его контуров. Поэтому включать в систему уравнение для внешнего контура не нужно, оно уже содержится там. То же самое можно сказать и про три других составных контура. Вообще говоря, мы могли написать уравнения для *любых* трех контуров, важно только, чтобы ни один из них нельзя было составить из других.

У нас теперь есть 6 неизвестных токов  $I_1 \dots I_6$  и 6 уравнений (3 для узлов и 3 для контуров). Мы не будем решать получившуюся систему, это можно сделать в каком-либо математическом пакете. Нашей задачей было разобраться с алгоритмом применения правил Кирхгофа.

Алгоритм применения правил Кирхгофа.

1. Разбиваем цепь на отрезки, в каждом из них произвольным образом задаем направление тока.
2. Для всех узлов, кроме одного (любого) записываем уравнение по первому правилу.
3. Выбираем в цепи К независимых контуров (ни один нельзя составить из других) и пишем для них уравнения по второму правилу Кирхгофа. Количество контуров можно вычислить как  $K = O - Y + 1$  (здесь  $O$  – число отрезков, а  $Y$  – число узлов)
4. Решаем полученную систему уравнений ...

## Магнитное поле в вакууме

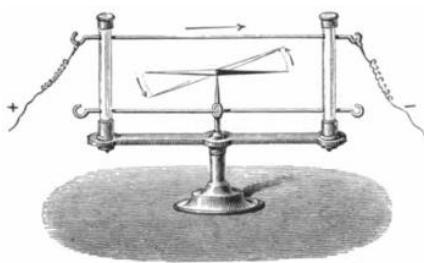
### §17. Магнитное поле. Сила Лоренца. Сила Ампера

Магнитные явления люди ранее всего обнаружили и начали изучать на естественных магнитах. Уже в VI в. до н.э. в Китае было известно, что некоторые руды обладают способностью притягиваться друг к другу и притягивать железные предметы. Куски таких руд (магнетиты), найденные возле города Магнесии в Малой Азии, получили название магнитов, что на древнегреческом значит – «камень из Магнесии».

Современная теория магнетизма опирается на экспериментальные факты, установленные в XIX веке:

- магнитное поле действует на движущиеся заряженные частицы;
- движущиеся заряженные частицы создают магнитное поле.

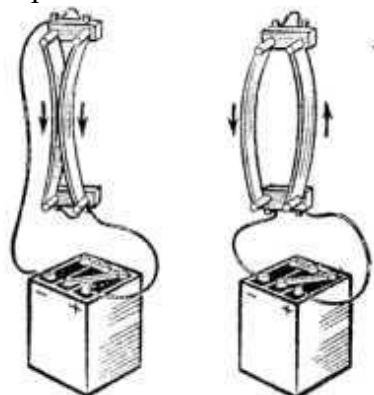
Остановимся подробнее на опытах, проведённых в 1820 году европейскими учёными: датчанином Хансом Кристианом Эрстедом и французом Андре Мари Ампером.



Опыт Эрстеда: над магнитной стрелкой помещался прямолинейный металлический проводник, направленный параллельно стрелке. При пропускании через проводник электрического тока стрелка поворачивалась почти перпендикулярно проводнику. При изменении направления тока стрелка разворачивалась на 180°. Аналогичный разворот наблюдался, если проводник переносился на другую сторону, располагаясь не над, а под стрелкой. Таким образом, впервые была установлена связь между явлениями электричества и магнетизма.

Опыт Ампера: учёный рассматривал взаимодействие параллельных проводников с током. Он выяснил, что если токи в проводниках текут в противоположных направлениях, то проводники отталкиваются друг от друга. Если токи имеют одинаковое направление, то проводники притягиваются. Амперу удалось показать, что сила, приходящаяся на единицу длины любого из проводников с током, прямо пропорциональна произведению обоих токов и обратно пропорциональна расстоянию между проводниками:

$$f \sim \frac{I_1 \cdot I_2}{d}.$$



Так же было установлено, что:

- на покоящийся электрический заряд магнитное поле не действует;

- магнитное поле, созданное несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым зарядом или током в отдельности, т.е. для магнитного поля также как и для электрического справедлив *принцип суперпозиции* (см. §1):

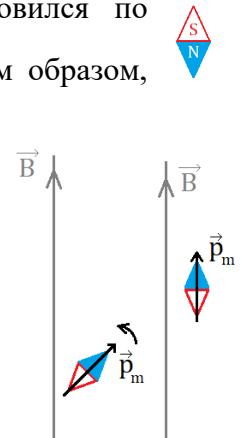
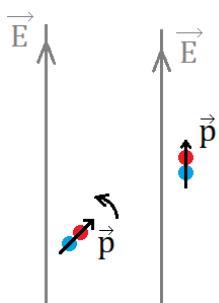
$$\vec{B}_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i.$$

Для описания магнитного поля используют понятие *вектора магнитной индукции*  $\vec{B}$ . Индукция магнитного поля  $\vec{B}$  – аналог напряжённости электрического поля  $\vec{E}$  в электростатике, а отличие в названиях (индукция  $\leftrightarrow$  напряжённость) связано с историческими причинами. Немного позднее мы будем для описания магнитного поля в веществе использовать вектор  $\vec{H}$  – вектор напряжённости магнитного поля, являющийся аналогом вектора  $\vec{D}$  – вектора электростатической индукции. Единицей измерения магнитной индукции является *тесла*:  $[B] = \text{Тл}$ .

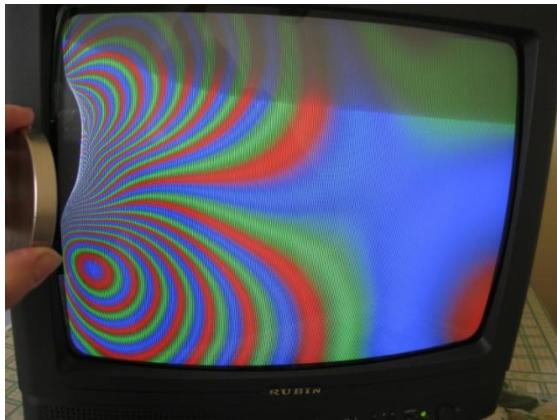
Чтобы определить величину и направление вектора напряжённости электрического поля  $\vec{E}$  мы вносили в поле точечный заряд и фиксировали величину и направление действующей на него силы. С вектором индукции магнитного поля  $\vec{B}$  так поступить не удается – оказывается,

что магнитных зарядов не существует. Вместо точечного заряда мы можем поместить в электрическое поле диполь. Во внешнем электрическом поле на диполь действует механический момент, который стремится повернуть диполь так, чтобы его дипольный момент  $\vec{p}$  установился по направлению внешнего поля (см. §8):  $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ . Таким образом, диполь укажет направление вектора  $\vec{E}$ , а величина действующего на диполь момента – модуль  $E$ . Аналогичную операцию можно провести и для магнитного поля. Для этого надо в пространстве разместить магнитные диполи, в качестве которых можно использовать, например, магнитные стрелки. Во внешнем магнитном поле на стрелку действует механический момент, который стремится повернуть её так, чтобы магнитный момент стрелки  $\vec{p}_m$  установился по направлению внешнего поля:  $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$ . Таким образом, все магнитные стрелки выстраиваются в направлении вектора  $\vec{B}$ .

Также как вектор напряжённости  $\vec{E}$  для электрического поля вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  является силовой характеристикой магнитного поля. Магнитное поле, как и электрическое, можно изображать с помощью силовых линий.



Магнитное поле действует на движущие заряженные частицы, это можно наблюдать если



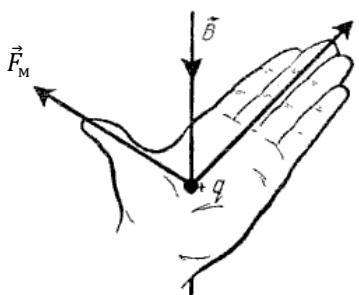
подносить магнит к экрану работающих старых электронно-лучевых устройств (монитор компьютера, телевизор). Сила, действующая на движущиеся заряженные частицы со стороны магнитного поля, перпендикулярна и вектору скорости этих частиц, и вектору магнитной индукции поля:  $\vec{F} \perp \vec{v}$  и  $\vec{F} \perp \vec{B}$ . Величина же этой силы пропорциональна заряду и значениям

скорости и магнитной индукции:  $|\vec{F}| \sim |q||\vec{v}||\vec{B}|$ . Хендрик Лоренц в 1892 году вывел выражение для *магнитной силы, действующей на движущийся точечный заряд в магнитном поле*:

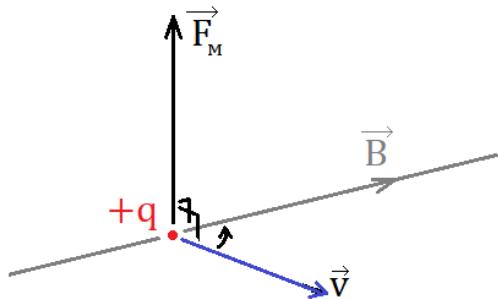
$$\vec{F}_M = q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$$

Т.к. в выражение входит векторное произведение, то направление  $\vec{F}_M$  должно подчиняться правилу «правого винта» (см. §3 «Механика»), а величина силы может быть найдена по формуле:  $|\vec{F}_M| = q \cdot |\vec{v}| |\vec{B}| \sin(\hat{\vec{v}} \hat{\vec{B}})$ .

Известное мнемоническое правило «левой руки», позволяет определять направление магнитной силы



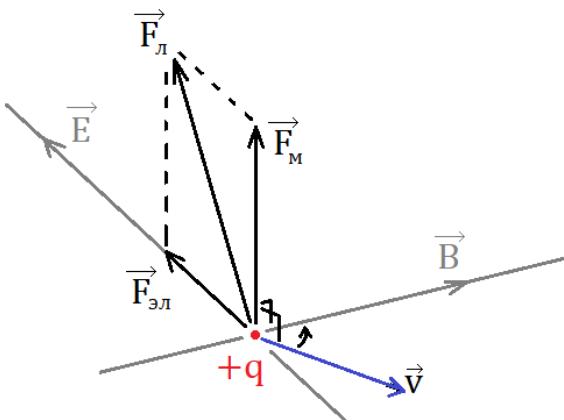
так: если расположить ладонь левой руки так, чтобы линии индукции магнитного поля входили во внутреннюю сторону ладони, перпендикулярно к ней, а четыре пальца были направлены по скорости движения положительного заряда (по току), то отставленный на  $90^\circ$  большой палец укажет направление силы, действующей со стороны магнитного поля на положительный заряд (на проводник с током).



Когда векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  коллинеарны ( $\vec{v} \parallel \vec{B}$ ), сила  $\vec{F}_M$  обращается в нуль. Выражение для магнитной силы справедливо не только для постоянных, но и для переменных магнитных полей, и для любых значений скорости  $\vec{v}$ . На покоящийся заряд ( $\vec{v} = 0$ ) магнитное поле не действует, также, как и на нейтральные частицы ( $q = 0$ ). Индикатором электрического поля служит покоящийся заряд (см. §1), индикатором магнитного поля – движущийся заряд.

Т.к. магнитная сила  $\vec{F}_M$  перпендикулярна вектору скорости  $\vec{v}$ , то её действие приводит к искривлению траектории движения заряженной частицы. Работы над зарядом эта сила не

совершает:  $\delta A = \vec{F}_M \cdot \vec{v} \cdot dt = 0$ . Следовательно в постоянном магнитном поле энергия движущейся заряженной частицы всегда остаётся неизменной, как бы частица ни двигалась.



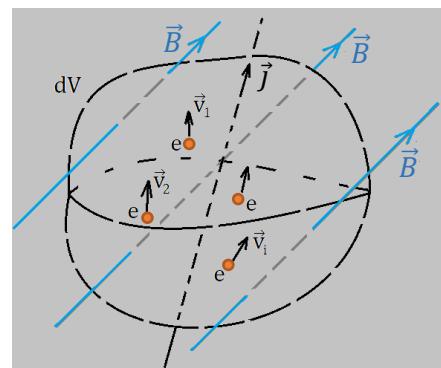
В электрическом поле  $\vec{E}$  на заряд  $q$  действует сила  $\vec{F}_{эл} = q\vec{E}$ . При совместном действии электрического и магнитного полей на движущийся точечный заряд действует *полная электромагнитная сила*, называемая силой Лоренца:

$$\vec{F}_l = \vec{F}_{эл} + \vec{F}_M = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}].$$

При скоростях движения много меньших скорости света ( $v \ll 10^8$  м/с), сила Лоренца, как и любая другая сила не зависит от выбора системы отсчёта (инерциальной). Вместе с тем магнитная сила  $\vec{F}_M$  меняется при переходе от одной системы отсчёта к другой (из-за  $\vec{v}$  см. §4 «Механика»). Поэтому должна меняться и электрическая составляющая  $\vec{F}_{эл}$ . Отсюда следует, что разделение полной электромагнитной силы на электрическую и магнитную зависит от выбора системы отсчёта. Без указания системы отсчёта такое разделение лишено смысла.

Изучение действия магнитного поля на движущиеся заряды проще проводить не с отдельными зарядами, а с электрическими токами, когда в движении участвует очень много зарядов.

Рассмотрим ситуацию, когда электрический ток в проводящей среде, создаётся движением одинаковых носителей, имеющих заряд  $e$ . Выделим в пространстве, где действует внешнее магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , произвольный бесконечно малый объём нашей проводящей среды  $dV$ . Отдельные носители тока двигаются с разными скоростями, поэтому магнитную силу  $d\vec{F}_M$ , действующую на объём  $dV$  найти как  $d\vec{F} = N_{dV} \cdot \vec{F}_M$ , где  $\vec{F}_M = e[\vec{v}, \vec{B}]$  – сила, действующая на один носитель тока, не получится. Поступим так, как мы делали это немного ранее в §14. Сгруппируем носители по значениям скорости  $\vec{v}$ , и сначала найдём  $d\vec{F}(\vec{v})$  – силу, действующую на все носители из объёма  $dV$ , скорости которых  $\vec{v}$ :



$$d\vec{F}(\vec{v}) = dN(\vec{v}) \cdot \vec{F}_M, \quad dN(\vec{v}) - \text{число таких носителей},$$

$$dN(\vec{v}) = dn(\vec{v}) \cdot dV.$$

$$d\vec{F}(\vec{v}) = dn(\vec{v}) \cdot dV \cdot e[\vec{v}, \vec{B}].$$

Магнитную силу  $d\vec{F}$ , действующую на весь объём  $dV$ , найдём как сумму всех  $d\vec{F}(\vec{v})$ . Как всегда в случае, когда складывается большое количество бесконечно малых величин, знак суммы может быть заменён на знак определённого интеграла:

$$d\vec{F} = \int d\vec{F}(\vec{v}) = \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} dn(\vec{v}) \cdot dV \cdot e[\vec{v}, \vec{B}] = e \cdot dV \cdot \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} dn(\vec{v}) \cdot [\vec{v}, \vec{B}] =$$

Умножив и разделив выражение на  $n$  – концентрацию носителей тока, получим под интегралом относительную концентрацию носителей  $\frac{dn(\vec{v})}{n}$ , движущихся со скоростью  $\vec{v}$ .

Поскольку концентрация есть величина пропорциональная числу частиц  $n = \frac{N}{V}$ , то относительная концентрация равна относительному числу, имеющих скорость  $\vec{v}$ :

$$\frac{dn(\vec{v})}{n} = \frac{dN(\vec{v})}{N}.$$

Тогда

$$= e \cdot n \cdot dV \cdot \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} \frac{dN(\vec{v})}{N} \cdot [\vec{v}, \vec{B}] =$$

Наш  $dV$  – объём проводящей среды мал, можно предположить, что магнитное поле внутри него не изменяется, т.е. в векторном произведении, стоящем под интегралом, второй множитель – const, следовательно можно поменять местами операции интегрирования (сложения) и векторного произведения:

$$= e \cdot n \cdot dV \cdot \left[ \left( \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} \frac{dN(\vec{v})}{N} \cdot \vec{v} \right), \vec{B} \right] = e \cdot n \cdot dV \cdot [\langle \vec{v} \rangle, \vec{B}] = dV \cdot [e \cdot n \cdot \langle \vec{v} \rangle, \vec{B}] =$$

$$[\vec{a}_1, \vec{b}] + [\vec{a}_2, \vec{b}] + \dots + [\vec{a}_k, \vec{b}] = [(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_k), \vec{b}] = \left[ \left( \sum_i^k \vec{a}_i \right), \vec{b} \right]$$

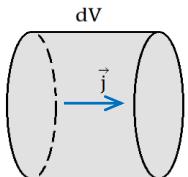
$$= [e \cdot n \cdot \vec{u}, \vec{B}] \cdot dV = [\vec{j}, \vec{B}] \cdot dV,$$

мы учили, что среднее значение скорости носителей тока равно скорости их упорядоченного движения:  $\langle \vec{v} \rangle = \vec{u}$ , а также определение плотности тока:  $\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{u}$ .

Таким образом, сила, действующая в магнитном поле на объём проводящей среды с током, равна:

$$d\vec{F} = [\vec{j}, \vec{B}] \cdot dV.$$

Рассмотрим частный случай, когда ток  $I$  течёт вдоль бесконечно тонкого провода с площадью сечения  $S$  (приближение тонкого провода см. §16). Возьмём бесконечно малый



участок провода длины  $d\vec{l}$  и вычислим действующую на него в магнитном поле силу  $d\vec{F}$ . Если  $dV = Sd\vec{l}$  – объём этого участка, то

$$d\vec{F} = [\vec{j}, \vec{B}] \cdot dV = [\vec{j}, \vec{B}] \cdot Sd\vec{l} = [\vec{j} \cdot Sd\vec{l}, \vec{B}] = [jS \cdot d\vec{l}, \vec{B}],$$

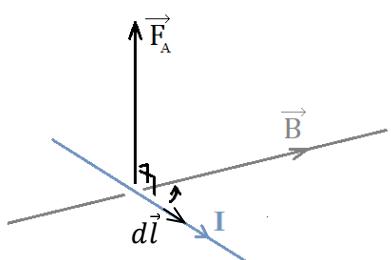
т.к. в этом случае направление тока совпадает с направлением оси провода:  $\vec{j} \uparrow\uparrow d\vec{l}$ . Плотность тока для тонкого провода можно выразить как отношение силы тока к площади сечения  $j = \frac{I}{S}$ .

Вектор  $\vec{j}dV$  называется *объёмным*, а вектор  $Id\vec{l}$  – *линейным элементом тока*.

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$$

– сила, действующая в магнитном поле на линейный элемент тока, – сила Ампера.

Сила, действующая на проводник конечной длины, получится из последней формулы интегрированием по всей длине провода:



$$\vec{F}_A = \int d\vec{F} = \int I[d\vec{l}, \vec{B}].$$

по всей длине провода

Направление силы Ампера может быть определено по тем же двум правилам что и направление силы Лоренца: или по правилу «правого винта», или по правилу «левой руки».

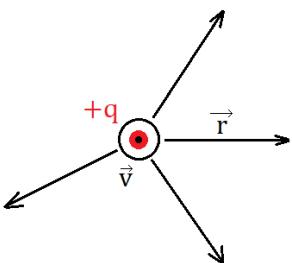
Величина этой силы зависит от угла между векторами  $\vec{j}$  и  $\vec{B}$  или  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ :

$$|d\vec{F}_A| = dV \cdot |\vec{j}| |\vec{B}| \sin(\widehat{\vec{j} \vec{B}}),$$

$$|d\vec{F}_A| = I \cdot |d\vec{l}| |\vec{B}| \sin(\widehat{d\vec{l} \vec{B}}).$$

## §18. Магнитное поле движущегося заряда. Свойства сил магнитного взаимодействия

Как показали многочисленные опыты магнитные поля не только действуют на движущиеся заряженные частицы или токи, но и порождаются ими. В результате обобщения экспериментальных данных магнитное поле точечного заряда  $q$ , движущегося равномерно с малой скоростью  $\vec{v}$  ( $v \ll 10^8$  м/с), может быть записано в виде:

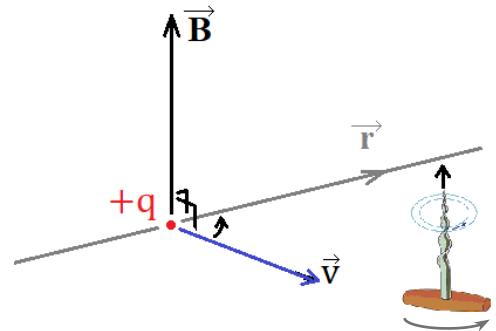


экспериментальных данных магнитное поле точечного заряда  $q$ , движущегося равномерно с малой скоростью  $\vec{v}$  ( $v \ll 10^8$  м/с), может быть записано в виде:

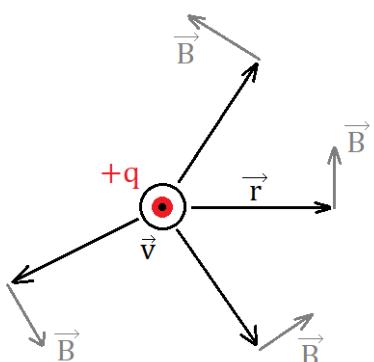
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3},$$

где  $\vec{r}$  – радиус вектор, проведённый от заряда  $q$  к точке наблюдения, а  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,25663706 \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$  – магнитная постоянная. На верхней картинке нарисован заряд, движущийся на нас из плоскости рисунка  $\vec{v} \odot$ . Другое возможное обозначение  $\otimes$ , в этом случае вектор считается направленным от нас за плоскость рисунка.

В соответствии с этой формулой вектор  $\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ , причём вращение от вектора скорости к радиус-вектору по правилу «правого винта» позволяет однозначно определить направление



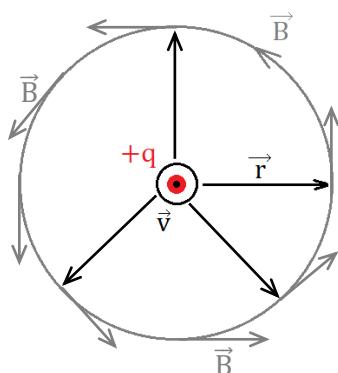
вектора магнитной индукции. Вектор  $\vec{B}$ , определяемый таким способом, является аксиальным (псевдовектором), его направление зависит от того, какой винт мы договорились использовать (см. §3 «Механика»). Величина  $\vec{B}$  зависит от угла между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$  и находится по формуле:



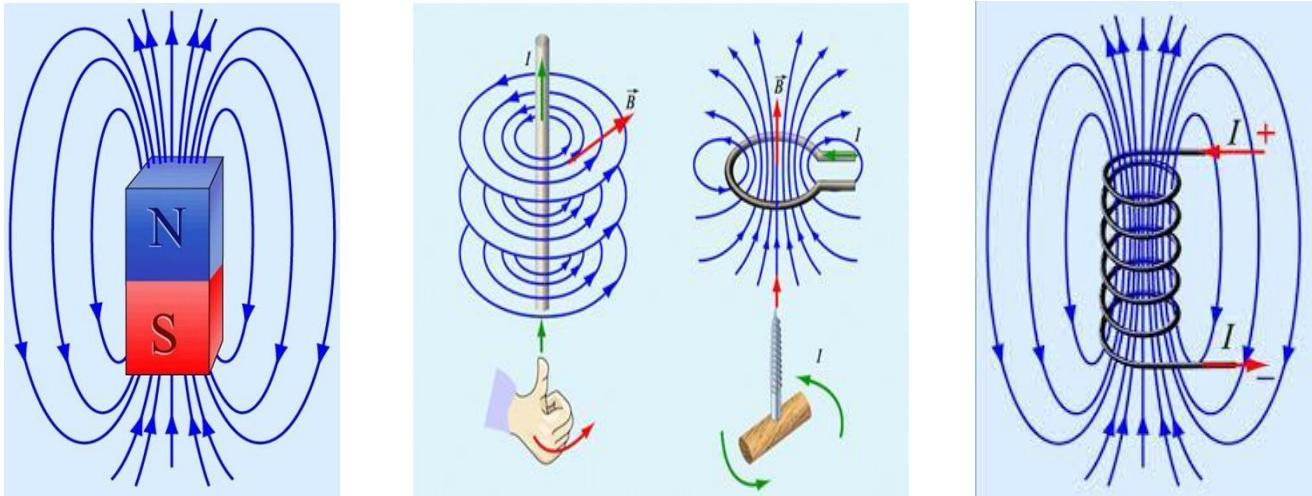
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{v}{r^2} \cdot \sin(\vec{v}, \vec{r}).$$

Для заряда с верхней картинки вектор  $\vec{B}$  лежит в плоскости рисунка и вращается вокруг вектора  $\vec{v}$  против часовой стрелки.

Для магнитного поля также, как и для электрического возможно представление с помощью силовых линий (см. §1). Если на нашей картинке построить линию, для которой вектор  $\vec{B}$  был бы касательным в каждой точке, то получится замкнутая кривая – окружность. В отличие от электрического поля, линии магнитного



поля всегда замкнуты, т.е. они не имеют ни начала, ни конца. Это связано с тем, что в природе *не существует магнитных зарядов*, аналогичных электрическим, на которых силовые линии магнитного поля начинались и заканчивались бы. На картинках ниже приведены силовые линии магнитных полей различных систем: естественного магнита, провода с током, кольца и катушки.



катушки.

### Сравнение сил магнитного и электрического взаимодействий

Рассмотрим два точечных заряда  $q_1 = q_2 = q$ , движущихся параллельно друг другу с одинаковой скоростью  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$  ( $v \ll 10^8$  м/с).

Найдём сначала электрическую силу, действующую, например, со стороны заряда 1 на заряд 2:

$$\vec{F}_{\text{эл}_{21}} = q_2 \cdot \vec{E}_1(\vec{r}), \quad \vec{E}_1(\vec{r}) = k \cdot \frac{q_1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

или

$$F_{\text{эл}_{21}} = q_2 \cdot k \cdot \frac{q_1}{r^2} = q \cdot k \cdot \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}.$$

Магнитная сила, действующая со стороны заряда 1 на заряд 2 будет равна (см. §17):

$$\vec{F}_{\text{м}_{21}} = q_2 \cdot [\vec{v}_2, \vec{B}_1], \quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q_1 \cdot \frac{[\vec{v}_1, \vec{r}]}{r^3}$$

или

$$F_{\text{м}_{21}} = q_2 \cdot v_2 \cdot B_1(\vec{r}) \cdot \sin(\widehat{\vec{v}_2, \vec{B}_1}) = q_2 \cdot v_2 \cdot B_1 \cdot 1,$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q_1 \cdot \frac{v_1}{r^2} \cdot \sin(\widehat{\vec{v}_1, \vec{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q_1 \cdot \frac{v_1}{r^2} \cdot 1,$$

т.к.  $\vec{v}_2 \perp \vec{B}_1$ , а  $\vec{v}_1 \perp \vec{r}$ , окончательно получается, что

$$F_{M_{21}} = q_2 \cdot v_2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q_1 \cdot \frac{v_1}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q^2 \cdot \frac{v^2}{r^2}.$$

Отношение магнитной и электрической сил, действующих со стороны заряда 1 на заряд 2:

$$\frac{F_{M_{21}}}{F_{ЭЛ_{21}}} = \frac{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot v^2 \cdot \frac{q^2}{r^2}\right)}{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}\right)} = \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot v^2.$$

Это выражение можно записать компактнее, введя *электродинамическую константу*:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \frac{1}{4\pi \cdot k}}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}}} = \sqrt{9 \cdot 10^{16}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Получается, что

$$\frac{F_{M_{21}}}{F_{ЭЛ_{21}}} = \frac{v^2}{c^2},$$

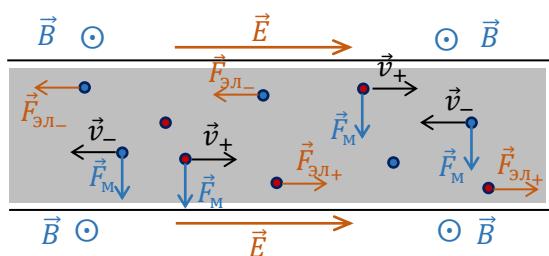
отношение двух сил – безразмерная величина, поэтому единица измерения электродинамической константы должна быть такой же, как и единица измерения скорости, т.е. м/с. Совпадение значения электродинамической константы со скоростью света в вакууме не является случайным, и скоро мы это покажем.

Сосчитаем это отношение, для оценки используем скорость установившегося движения электронов в металлах  $v \approx 1 \frac{\text{см}}{\text{с}} = 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , тогда

$$\frac{F_{M_{21}}}{F_{ЭЛ_{21}}} = \frac{v^2}{c^2} = \frac{(10^{-2})^2}{9 \cdot 10^{16}} \approx \frac{10^{-4}}{10^{17}} = 10^{-21} \Rightarrow F_{M_{21}} \ll F_{ЭЛ_{21}},$$

значит, магнитная сила взаимодействия частиц составляет ничтожную долю силы электрического взаимодействия.

Возникает вопрос: стоит ли такие силы принимать во внимание? Оказывается стоит. Во-первых, обычно мы имеем дело не с одиночными, движущимися заряженными частицами, а с их большими совокупностями – электрическими токами, и это обстоятельство компенсирует малость доли магнитной силы от электрической. Во-вторых, действие магнитного поля на



движущийся заряд  $q$  определяется не  $q$  и  $v$  в отдельности, а произведением этих величин. Когда течёт ток, то заряды противоположных знаков движутся в противоположных направлениях. Силы, действующие со стороны магнитного поля, на

заряды противоположных знаков оказываются соправлены, и следовательно, будут арифметически складываться:

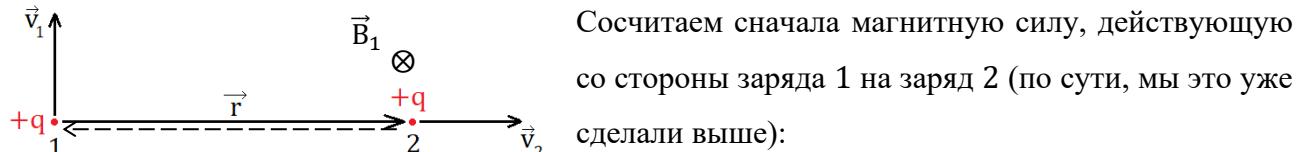
$$\vec{F}_M = \sum_i^N \vec{F}_{M_i}; \quad |\vec{F}_M| = \sum_i^N F_{M_i} \gg 0.$$

Совсем иначе ведут себя заряды по отношению к электрическим полям. В выражение для электрической силы входит только  $q$ , от скорости движения  $v$  она не зависит. Поэтому, **силы, действующие со стороны электрического поля**, на заряды противоположных знаков оказываются направлены противоположно, и следовательно, будут арифметически вычитаться:

$$\vec{F}_{\text{эл}} = \sum_i^N \vec{F}_{\text{эл}_i} = 0.$$

Поскольку в создании тока участвует громадное количество заряженных частиц, то роль магнитной силы в этой ситуации становится основной – она значительно превышает электрическую силу.

Рассмотрим те же два точечных заряда  $q_1 = q_2 = q$ , но движущихся теперь перпендикулярно друг другу с одинаковой скоростью  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$  ( $v \ll 10^8 \text{ м/с}$ ).



$$\vec{F}_{M_{21}} = q_2 \cdot [\vec{v}_2, \vec{B}_1], \quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q_1 \cdot \frac{[\vec{v}_1, \vec{r}]}{r^3} \dots \dots \dots \quad F_{M_{21}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q^2 \cdot \frac{v^2}{r^2}.$$

Магнитная сила, действующая со стороны заряда 2 на заряд 1, (радиус-вектор  $\vec{r}$  в этом случае смотрит в противоположном направлении) будет равна:

$$\vec{F}_{M_{12}} = q_1 \cdot [\vec{v}_1, \vec{B}_2], \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q_2 \cdot \frac{[\vec{v}_2, \vec{r}]}{r^3}$$

или

$$F_{M_{12}} = q_1 \cdot v_1 \cdot B_2(\vec{r}) \cdot \sin(\widehat{\vec{v}_1, \vec{B}_2}),$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q_2 \cdot \frac{v_2}{r^2} \cdot \sin(\widehat{\vec{v}_2, \vec{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q_1 \cdot \frac{v_1}{r^2} \cdot 0 = 0,$$

т.к.  $\vec{v}_2 \uparrow \downarrow \vec{r}$ , окончательно получается, что

$$F_{M_{12}} = q_1 \cdot v_1 \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, *силы магнитного взаимодействия не удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия* (см. §5 «Механика»: III закон Ньютона). Всё дело в том, что третий закон Ньютона, как и вообще вся ньютоновская механика, связан с идеей *действия на*

*расстоянии*, согласно которой сила, действующая со стороны одного тела на другое в некоторый момент времени, определяется их положением в тот же момент времени. Другими словами, это означает бесконечную скорость передачи взаимодействий. Согласно современным представлениям, взаимодействия передаются посредством полей (электромагнитным, гравитационным), и, как следует из опыта, имеют конечную скорость, не превышающую скорости света. Для взаимодействий, передающихся с помощью посредников, соблюдение принципа равенства действия и противодействия не обязательно. Третий закон Ньютона является следствием более общего закона сохранения импульса, связанного с фундаментальным свойством пространства – однородностью. Можно показать, что и в рассмотренном выше случае импульс системы остается неизменным, если учесть, что электромагнитное поле также обладает импульсом.

## §19. Закон Био – Савара

Опираясь на экспериментальные факты установившие, что магнитное поле создаётся движущимися заряженными частицами (согласно им магнитное поле одного движущегося заряда равно

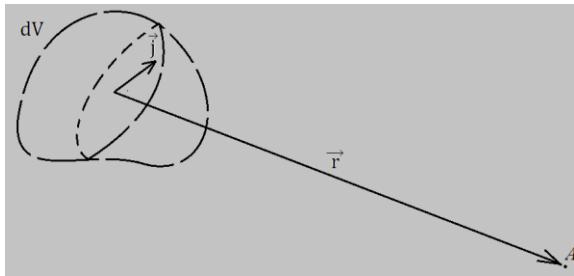
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3},$$

а также на принцип суперпозиции, утверждающий что, магнитные поля отдельных движущихся зарядов векторно складываются, причём каждый заряд возбуждает поле, совершенно независящее от наличия других зарядов

$$\vec{B}_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i,$$

найдём закон, определяющий магнитное поле, создаваемое постоянным электрическим током.

Рассмотрим проводящую среду, по которой течёт постоянный ток плотности  $\vec{j}$ . Выделим в ней



малый объём  $dV$  (т.е. мы собираемся определить магнитное поле объёмного элемента тока). Положим, что заряд положительных носителей тока в этой среде –  $e$ , концентрация носителей тока –  $n$ , а средняя скорость упорядоченного движения носителей –  $\vec{u}$ . Также будем считать,

что размеры объёма много меньше расстояния от него до точки пространства (например, точки  $A$ ), в которой мы собираемся искать магнитное поле.

Начнём с поиска магнитного поля  $d\vec{B}(\vec{v})$ , которое создают носители тока в объёме  $dV$ , движущиеся со скоростью  $\vec{v}$ , т.е. опять как это уже было в §14 и 17, группируем носители по значениям скорости  $\vec{v}$ .

Согласно принципу суперпозиции все такие носители создают в  $(\cdot)A$  магнитное поле:

$$d\vec{B}(\vec{v}) = dN(\vec{v}) \cdot \vec{B}^{[1]} = dN(\vec{v}) \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Все носители тока из объёма  $dV$  согласно принципу суперпозиции будут создавать в  $(\cdot)A$  магнитное поле:

$$d\vec{B} = \int d\vec{B}(\vec{v}) = \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} dN(\vec{v}) \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Число носителей тока, движущиеся со скоростью  $\vec{v}$ , выразим через концентрацию носителей, имеющих данную скорость  $dn(\vec{v})$  и объём цилиндра  $dV$ :  $dN(\vec{v}) = dn(\vec{v}) \cdot dV$ , и сосчитаем интеграл:

$$d\vec{B} = \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} dn(\vec{v}) \cdot dV \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} =$$

Все величины, независящие от скорости движения носителей можно вынести:

$$= dV \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} dn(\vec{v}) \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Умножаем и делим выражение на  $n$ , получаем под интегралом относительную концентрацию носителей  $\frac{dn(\vec{v})}{n}$ , движущихся со скоростью  $\vec{v}$ , или что тоже самое относительное число носителей:

$$\frac{dn(\vec{v})}{n} = \frac{dN(\vec{v})}{N}$$

$$d\vec{B} = dV \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot n \cdot \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} \frac{dN(\vec{v})}{N} \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} = dV \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot n \cdot \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} \frac{dN(\vec{v})}{N} \cdot \left[ \vec{v}, \frac{\vec{r}}{r^3} \right].$$

$r^3$  – скалярная величина, следовательно её можно внести под скобки векторного произведения.

Выбирая в начале параграфа  $dV$ , мы в том числе имели в виду, что  $\vec{r}$  – радиус-вектор, описывающий расстояние от объёма до  $(\cdot)A$ , одновременно определяет и расстояние от любого носителя тока в этом объёме до искомой точки, т.е.  $\vec{r}$  одинаков для всех носителей тока (не зависит от  $\vec{v}$ ). Как это уже встречалось в §17, когда в векторном произведении, стоящем под интегралом, второй множитель постоянный, его можно вынести за знак интеграла:

$$d\vec{B} = dV \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot n \cdot \left[ \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} \frac{dN(\vec{v})}{N} \cdot \vec{v}, \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = dV \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot e \cdot n \cdot \left[ \langle \vec{v} \rangle, \frac{\vec{r}}{r^3} \right] =$$

См. §17 раздел «Молекулярная физика. Термодинамика»:

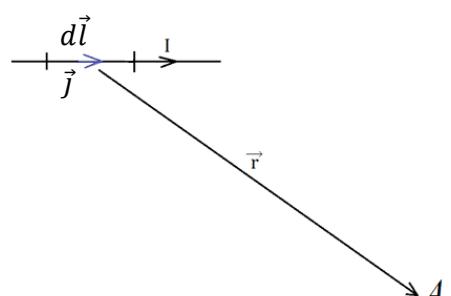
$$\langle \vec{v} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\text{по всем значениям } \vec{v}} \vec{v} \cdot \frac{dN(\vec{v})}{N}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[ e \cdot n \cdot \vec{u}, \frac{\vec{r}}{r^3} \right] \cdot dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[ \vec{j}, \frac{\vec{r}}{r^3} \right] \cdot dV.$$

Проведя ряд последовательных преобразований и учитывая, что  $\langle \vec{v} \rangle = \vec{u}$ , а  $\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{u}$ , окончательно получаем выражение для *магнитного поля объёмного элемента тока*:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot dV. \quad (*)$$

Если рассмотреть частный случай, когда ток  $I$  течёт вдоль бесконечно тонкого провода с площадью сечения  $S$  (приближение тонкого провода см. §16), то можно получить выражение аналогичного вида для линейного



элемента тока. Для этого возьмём бесконечно малый участок провода длины  $d\vec{l}$  и представим объём этого участка как  $dV = Sd\vec{l}$ , тогда магнитное поле, создаваемое таким участком, будет равно:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot Sd\vec{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{j} \cdot Sd\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[jS \cdot d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3},$$

т.к. в этом случае направление тока совпадает с направлением оси провода:  $\vec{j} \uparrow \uparrow d\vec{l}$ . Учитывая, что плотность тока можно выразить через силу тока и площадь сечения тонкого провода  $j = \frac{I}{S}$ , получаем выражение для *магнитного поля линейного элемента тока*:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (**)$$

Формулы (\*) и (\*\*) выражают закон Био – Савара. Полное поле  $\vec{B}$  в соответствии с принципом суперпозиции будет находиться интегрированием выражений (\*) и (\*\*) по всем элементам тока:

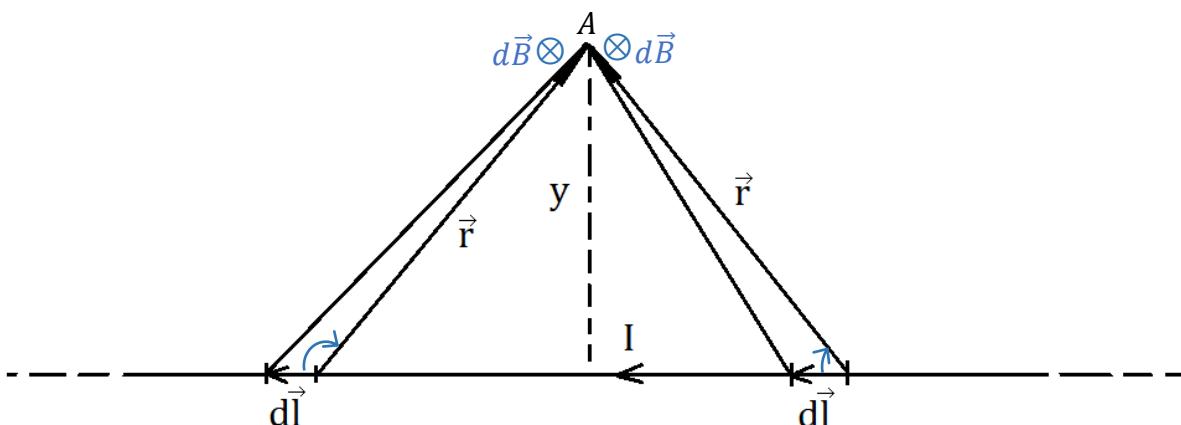
$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot dV,$$

по всему объёму проводящей среды с током

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

по всей длине провода с током

Расчёт по этим формулам индукции магнитного поля тока произвольной конфигурации, вообще говоря, сложен. Однако он значительно упрощается, если распределение тока имеет определённую симметрию. Рассмотрим простейший пример – вычисление индукции магнитного поля очень длинного тонкого прямолинейного провода с постоянным током  $I$  на расстоянии  $y$  от него.



Будем действовать по алгоритму, изложенному выше. Разобъём наш провод на много малых элементов длиной  $d\vec{l}$  – линейных элементов тока. Магнитное поле каждого такого элемента будет вычисляться согласно закону Био – Савара по формуле (\*\*), а поле всего провода соответственно, как сумма полей всех линейных элементов тока:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

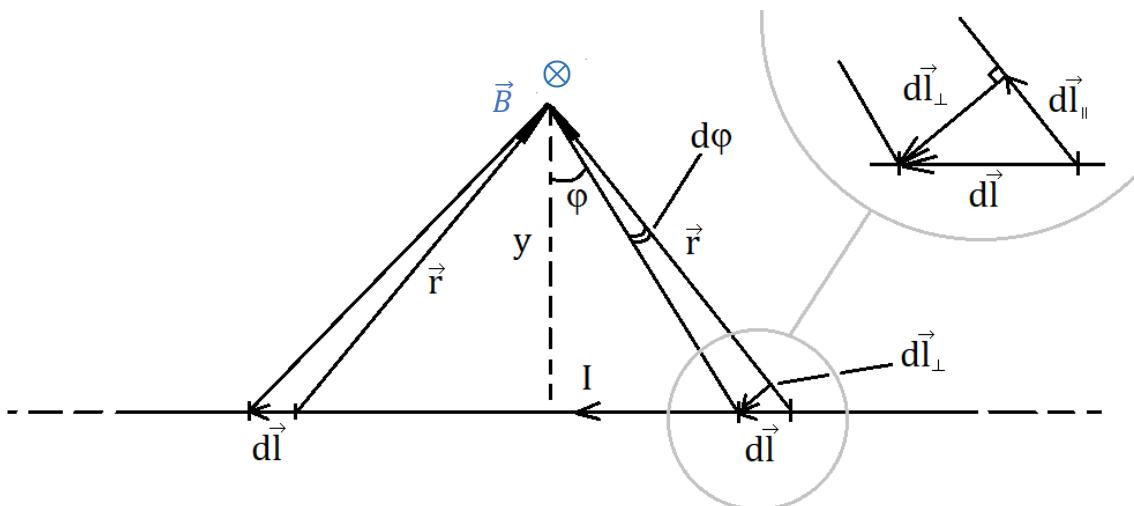
по всей длине провода с током

Сначала выясним как направлены в  $(\cdot)A$  векторы магнитной индукции  $d\vec{B}$  от всех элементов провода. Согласно правилу «правого винта» (см. §18) все они направлены от нас за плоскость рисунка и, следовательно, являются сонаправленными векторами. По правилам сложения векторов в этом случае получается, что

$$|\vec{B}| = \int |d\vec{B}| = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{|[d\vec{l}, \vec{r}]|}{r^3}$$

по всей длине провода с током

по всей длине провода с током



Чтобы упростить задачу, представим вектор элемента длины провода  $d\vec{l}$  как сумму двух слагаемых:  $d\vec{l} = d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp}$ .

Тогда:  $[d\vec{l}, \vec{r}] = [(d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp}), \vec{r}] = [d\vec{l}_{\parallel}, \vec{r}] + [d\vec{l}_{\perp}, \vec{r}] = [d\vec{l}_{\perp}, \vec{r}]$ , т.к. по построению  $d\vec{l}_{\parallel} \uparrow\uparrow \vec{r} \Rightarrow [d\vec{l}_{\parallel}, \vec{r}] = 0$ .

$$|[d\vec{l}, \vec{r}]| = |[d\vec{l}_{\perp}, \vec{r}]| = |d\vec{l}_{\perp}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin(\widehat{d\vec{l}_{\perp} \vec{r}}) = dl_{\perp} \cdot r \cdot 1, \quad (\widehat{d\vec{l}_{\perp} \vec{r}}) = \frac{\pi}{2}$$

Подставляем в выражение для магнитной индукции и получаем:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{|[d\vec{l}, \vec{r}]|}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{dl_{\perp} \cdot r}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{dl_{\perp}}{r^2} =$$

по всей длине провода с током

по всей длине провода с током

Для описания нахождения элемента длины  $d\vec{l}$  на проводе можно использовать радиус-вектор  $\vec{r}$ , а можно угол  $\varphi$  — угол между перпендикуляром, проведённым из  $(\cdot)A$  к проводу с током —  $y$  и  $\vec{r}$ . С учётом малости отрезка:  $dl \rightarrow 0$ , справедливы следующие выражения:

$$r = \frac{y}{\cos \varphi}, \quad dl_{\perp} = r \cdot d\varphi.$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{dl_\perp}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{d\varphi}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{y} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi =$$

по всей длине провода с током

Последний интеграл зависит только от одной переменной  $\varphi$ . Чтобы при интегрировании учесть все элементы тока и, тем самым пройти по всей длине провода, необходимо изменять этот угол в пределах от  $-\frac{\pi}{2}$  для элементов, находящихся левее ( $\cdot A$  очень далеко от неё, до  $+\frac{\pi}{2}$  для таких же элементов, расположенных правее этой точки.

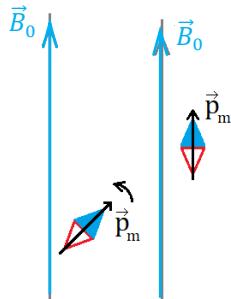
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{y} \cdot \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{y} \cdot 2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{y}$$

$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{y}$

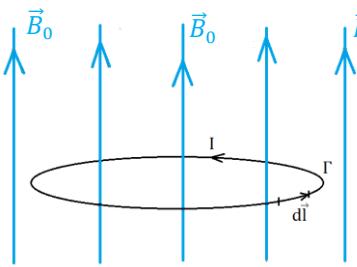
— магнитное поле очень длинного тонкого прямолинейного провода с постоянным током.

## §20. Контур с током в магнитном поле

В §17, где обсуждались способы получения наглядного представления о силовых линиях магнитного поля, было предложено использовать магнитные стрелки. Во внешнем магнитном поле на стрелку действует механический момент, который стремится повернуть её так, чтобы магнитный момент стрелки  $\vec{p}_m$  установился по направлению внешнего поля. Таким образом, все магнитные стрелки выстроются в направлении вектора  $\vec{B}$ . В этом смысле поведение стрелок в магнитном поле было аналогичным поведению диполей в электрическом поле.



Существует ещё один объект, поведение которого в магнитном поле аналогично поведению диполей в электрическом поле. Это замкнутый проводник (контур) с током.



Остановимся на его поведении подробнее. Рассмотрим сначала ситуацию, когда магнитное поле, в которое помещён контур, является *однородным полем* (силовые линии такого поля параллельны и густота их одинакова во всех точках):  $\vec{B}_0$  – индукция нашего внешнего поля. Поместим в данное поле замкнутый контур  $\Gamma$  с текущим по нему током  $I$ . Вычислим силу, действующую на контур со стороны магнитного поля. На каждый из малых элементов контура  $d\vec{l}$  будет действовать сила Ампера  $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}_0]$ . Силу, действующую на весь контур, найдём интегрированием по всему контуру  $\Gamma$ :

$$\vec{F} = \oint_{\Gamma} d\vec{F} = \oint_{\Gamma} I \cdot [d\vec{l}, \vec{B}_0] = I \cdot \oint_{\Gamma} [d\vec{l}, \vec{B}_0].$$

Так как магнитное поле  $\vec{B}_0$  однородно, оно одинаково в пределах любого из элементов  $d\vec{l}$ , и множитель  $\vec{B}_0$  можно вынести из-под знака интеграла, как это уже делалось в §17,19:

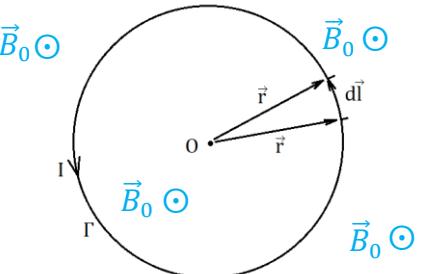
$$\vec{F} = I \cdot \left[ \oint_{\Gamma} d\vec{l}, \vec{B}_0 \right].$$

Складывая векторы элементов длины  $d\vec{l}$  по замкнутому контуру, мы обойдём весь контур и вернёмся в ту же точку, из которой начали, поэтому:

$$\oint_{\Gamma} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{F} = I \cdot [0, \vec{B}_0] = 0$$

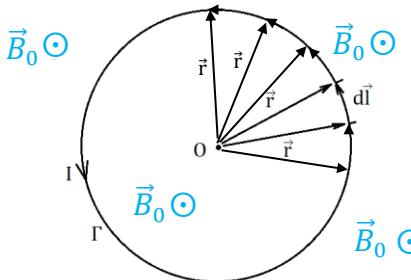
Значит, в однородном магнитном поле суммарная сила, действующая на контур с током равна нулю, и в таком поле он либо будет покоиться, либо перемещаться равномерно и прямолинейно.

Теперь так же, как в случае с электрическим диполем (см. §8) сосчитаем момент сил, действующих на контур с током, т.к. тело на которое действуют силы, может вращаться под действием их моментов. Для удобства изложения будем теперь смотреть на наш контур сверху. Сначала вычислим момент силы, действующий на каждый из малых элементов контура  $d\vec{l}$ ,  $d\vec{M}_{dl} = [\vec{r}, d\vec{F}]$ , а затем интегрированием по контуру  $\Gamma$ , найдём полный момент:

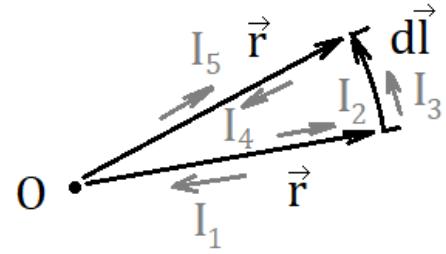


$$\vec{M} = \oint_{\Gamma} d\vec{M}_{dl}.$$

Для упрощения расчётов сделаем дополнительные построения. Из  $(\cdot)O$  – точки относительно, которой мы ищем момент сил, проведём к каждому элементу витка  $d\vec{l}$  прямые проводники



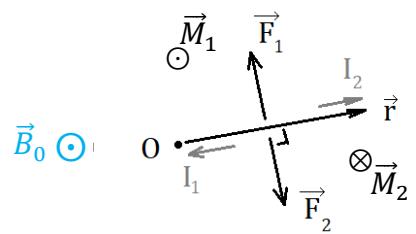
вдоль радиус-вектора  $\vec{r}$ , тем самым разбивая наш контур на треугольные секторы. Пусть по всем этим прямым проводникам тоже течёт ток  $I$  так, как показано на следующей картинке: ток  $I_2 = I$ ,



вытекающий из  $(\cdot)O$ , течёт вдоль радиус-вектора  $\vec{r}$ , ток

$I_3 = I$  течёт вдоль  $d\vec{l}$ , а такой же  $I_4$ , текущий против радиус-вектора  $\vec{r}$ , возвращается в  $(\cdot)O$ . Дальше всё повторяется: ток  $I_5 = I$ , вытекающий из  $(\cdot)O$ , течёт вдоль радиус-вектора  $\vec{r}$  и т.д. Различия токов  $I_4$  и  $I_5$  только в том, что они текут в противоположных направлениях:  $I_4 = -I_5$ , аналогично  $I_1 = -I_2$ . Значит, первоначальной картины – обтекания током  $I$  витка наши дополнения не меняют: в сумме ток, текущий по радиус-вектору  $\vec{r}$  равен нулю:  $I_4 + I_5 = I_1 + I_2 = I - I = 0$ .

Теперь покажем, что моменты сил Ампера, действующие на эти дополнительные токи, не меняют полный момент  $\vec{M}$ , действующий на весь контур с током. Рассмотрим силы и соответствующие им моменты, действующие на один и тот же проводник, направленный по радиус-вектору  $\vec{r}$  со стороны магнитного поля. Например силы, действующие на токи  $I_1$  и  $I_2$ , изображённые на рисунке: (см. §17)



$$\vec{F}_{A_1} = \int d\vec{F} = \int I_1 \cdot [d\vec{l}, \vec{B}_0] = I_1 \cdot [\int d\vec{l}, \vec{B}_0] = I_1 \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0].$$

по всей длине провода    по всей длине провода

$$\vec{F}_1 = I_1 \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0] = I \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0], \quad \vec{F}_2 = I_2 \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0] = -I \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0] = -\vec{F}_1 \Rightarrow \vec{F}_1 \uparrow \downarrow \vec{F}_2.$$

Силы действуют в противоположных направлениях. Тоже самое можно сказать и об их моментах:

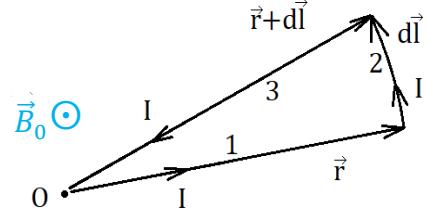
$$\vec{M}_1 = [\vec{r}, \vec{F}_1], \quad \vec{M}_2 = [\vec{r}, \vec{F}_2] = -[\vec{r}, \vec{F}_1] = -\vec{M}_1 \Rightarrow \vec{M}_1 \uparrow \downarrow \vec{M}_2.$$

Таким образом, если суммировать моменты сил Ампера токов, текущих по одному и тому же радиус-вектору  $\vec{r}$ , то они будут взаимно уничтожаться. Следовательно, полный момент сил, действующих со стороны магнитного поля на виток с током, можно также представить как сумму моментов сил, действующих в треугольных секторах:

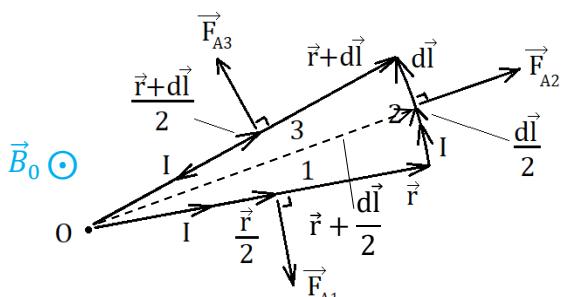
$$\vec{M} = \oint_{\Gamma} d\vec{M}_{dl} = \oint_{\Gamma} d\vec{M}_{\text{трейг.}}$$

На первый взгляд, мы несколько усложнили задачу, нахождения момента, но только на первый взгляд. Сосчитаем  $d\vec{M}_{\text{трейг.}}$  как сумму трёх моментов сил, действующих на каждый из сторон сектора:

$$d\vec{M}_{\text{трейг.}} = d\vec{M}_1 + d\vec{M}_2 + d\vec{M}_3.$$



Запишем каждый из этих моментов, учитывая, что для отрезка с током конечной длины сила Ампера будет приложена в середине отрезка.



$$d\vec{M}_1 = [\vec{r}_{kF_{A1}}, \vec{F}_{A1}] = \left[ \frac{\vec{r}}{2}, I \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0] \right]$$

$$d\vec{M}_2 = [\vec{r}_{kF_{A2}}, \vec{F}_{A2}] = \left[ \left( \vec{r} + \frac{d\vec{l}}{2} \right), I \cdot [d\vec{l}, \vec{B}_0] \right]$$

$$d\vec{M}_3 = [\vec{r}_{kF_{A3}}, \vec{F}_{A3}] = \left[ \frac{\vec{r} + d\vec{l}}{2}, (-I) \cdot [(\vec{r} + d\vec{l}), \vec{B}_0] \right]$$

В последнем выражении (для  $d\vec{M}_3$ ) минус появился из-за того, что на участке 3 ток  $I$  течёт в направлении противоположном вектору  $(\vec{r} + d\vec{l})$ .

Суммируем полученные выражения и «упорно упрощаем их до приемлемого вида»:

$$\begin{aligned} d\vec{M}_{\text{трейг.}} &= \left[ \frac{\vec{r}}{2}, I \cdot [\vec{r}, \vec{B}_0] \right] + \left[ \left( \vec{r} + \frac{d\vec{l}}{2} \right), I \cdot [d\vec{l}, \vec{B}_0] \right] + \left[ \frac{\vec{r} + d\vec{l}}{2}, (-I) \cdot [(\vec{r} + d\vec{l}), \vec{B}_0] \right] = \\ &= I \cdot \left( \left[ \frac{\vec{r}}{2}, [\vec{r}, \vec{B}_0] \right] + \left[ \left( \vec{r} + \frac{d\vec{l}}{2} \right), [d\vec{l}, \vec{B}_0] \right] - \left[ \frac{(\vec{r} + d\vec{l})}{2}, [(\vec{r} + d\vec{l}), \vec{B}_0] \right] \right) = \end{aligned}$$

Раскрываем все круглые скобки, пользуясь свойствами векторного произведения:

$$[(\vec{a}_1 + \vec{a}_2), \vec{b}] = [\vec{a}_1, \vec{b}] + [\vec{a}_2, \vec{b}]$$

первое слагаемое не изменилось, из второго получилось в итоге два слагаемых, из третьего – четыре:

$$= I \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cancel{[\vec{r}, [\vec{r}, \vec{B}_0]]} + \cancel{[\vec{r}, [d\vec{l}, \vec{B}_0]]} + \frac{1}{2} \cdot \cancel{[d\vec{l}, [d\vec{l}, \vec{B}_0]]} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot \cancel{[\vec{r}, [\vec{r}, \vec{B}_0]]} - \cancel{\frac{1}{2} \cdot [\vec{r}, [d\vec{l}, \vec{B}_0]]} - \frac{1}{2} \cdot [d\vec{l}, [\vec{r}, \vec{B}_0]] - \cancel{\frac{1}{2} \cdot [d\vec{l}, [d\vec{l}, \vec{B}_0]]} \right) =$$

сократив одинаковые, но противоположные по знаку скобки, и произведя вычитание, получаем, что в нашем выражении осталось всего два слагаемых:

$$= I \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot [\vec{r}, [d\vec{l}, \vec{B}_0]] - \frac{1}{2} \cdot [d\vec{l}, [\vec{r}, \vec{B}_0]] \right) = \frac{1}{2} \cdot I \cdot ([\vec{r}, [d\vec{l}, \vec{B}_0]] - [d\vec{l}, [\vec{r}, \vec{B}_0]])$$

$$d\vec{M}_{\text{трейг}} = \frac{I}{2} \cdot ([\vec{r}, [d\vec{l}, \vec{B}_0]] - [d\vec{l}, [\vec{r}, \vec{B}_0]])$$

Для следующих преобразований нам потребуется вспомнить свойство двойного векторного произведения:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$[\vec{r}, [d\vec{l}, \vec{B}_0]] = d\vec{l} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{B}_0) - \vec{B}_0 \cdot (\vec{r} \cdot d\vec{l})$$

$$[d\vec{l}, [\vec{r}, \vec{B}_0]] = \vec{r} \cdot (d\vec{l} \cdot \vec{B}_0) - \vec{B}_0 \cdot (d\vec{l} \cdot \vec{r})$$

$$d\vec{M}_{\text{трейг}} = \frac{I}{2} \cdot (d\vec{l} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{B}_0) - \vec{B}_0 \cdot (\vec{r} \cdot d\vec{l}) - \vec{r} \cdot (d\vec{l} \cdot \vec{B}_0) + \vec{B}_0 \cdot (d\vec{l} \cdot \vec{r})) =$$

Т.к. скалярное произведение векторов обладает свойством коммутативности, то два из четырёх слагаемых сокращаются, а оставшиеся могут быть собраны в новое двойное векторное произведение:

$$= \frac{I}{2} \cdot (d\vec{l} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{B}_0) - \vec{r} \cdot (d\vec{l} \cdot \vec{B}_0)) = \frac{I}{2} \cdot (d\vec{l} \cdot (\vec{B}_0 \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\vec{B}_0 \cdot d\vec{l})) = \frac{I}{2} \cdot [\vec{B}_0, [d\vec{l}, \vec{r}]].$$

Теперь воспользуемся антисимметричностью векторного произведения:  $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$

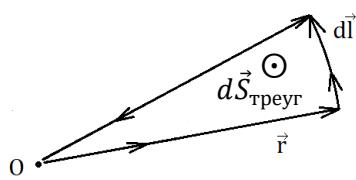
$$d\vec{M}_{\text{трейг}} = \frac{I}{2} \cdot [\vec{B}_0, [d\vec{l}, \vec{r}]] = -\frac{I}{2} \cdot [[d\vec{l}, \vec{r}], \vec{B}_0] = -\frac{I}{2} \cdot [-[\vec{r}, d\vec{l}], \vec{B}_0] = \frac{I}{2} \cdot [[\vec{r}, d\vec{l}], \vec{B}_0].$$

Окончательно имеем очень компактное выражение:

$$d\vec{M}_{\text{трейг}} = I \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot [\vec{r}, d\vec{l}], \vec{B}_0 \right]$$

Выясним, что за вектор первым стоит в нашем векторном произведении:  $\frac{1}{2} \cdot [\vec{r}, d\vec{l}]$ . Модуль его равен

$$\left| \frac{1}{2} \cdot [\vec{r}, d\vec{l}] \right| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r}| \cdot |d\vec{l}| \sin(\widehat{\vec{r}, d\vec{l}}) = dS_{\text{трейг}}$$



Это площадь нашего треугольного сектора. Соответственно само векторное произведение – вектор площади сектора:

$$\frac{1}{2} \cdot [\vec{r}, \vec{dl}] = d\vec{S}_{\text{треуг}},$$

направленный согласно правилу «правого винта» на нас  $\odot$ .

$$d\vec{M}_{\text{треуг}} = I \cdot [d\vec{S}_{\text{треуг}}, \vec{B}_0].$$

Момент сил, действующих в однородном магнитном поле на контур с током равен:

$$\vec{M} = \oint_{\Gamma} d\vec{M}_{\text{треуг}} = \oint_{\Gamma} I \cdot [d\vec{S}_{\text{треуг}}, \vec{B}_0] =$$

Магнитное поле  $\vec{B}_0$  однородно, то есть одинаково в пределах любого из треугольного сектора, то мы опять множитель  $\vec{B}_0$  можем вынести из-под знака интеграла, как это делали в начале параграфа:

$$= I \cdot \left[ \oint_{\Gamma} d\vec{S}_{\text{треуг}}, \vec{B}_0 \right] = I \cdot [\vec{S}_{\Gamma}, \vec{B}_0].$$

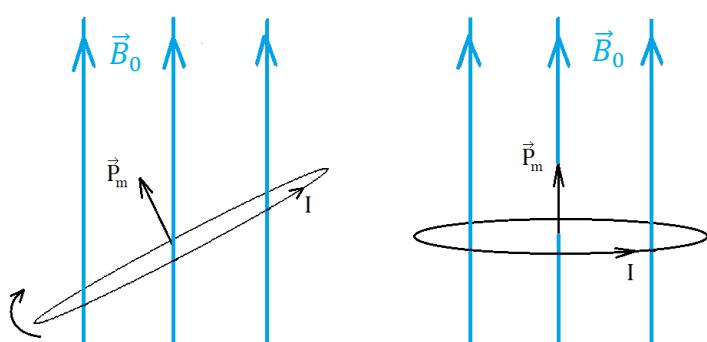
Площадь, охватываемая нашим контуром:

$$\vec{S}_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} d\vec{S}_{\text{треуг}}$$

Ток – скалярная величина, и мы можем внести его в скобки векторного произведения, вводя понятие *магнитного момента*  $\vec{p}_m = I \cdot \vec{S}_{\Gamma}$ .

Следовательно, момент сил, действующих в однородном магнитном поле на контур с током равен:

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}_0].}$$



Из формулы видно, что момент сил Ампера, действующих на контур с током в однородном магнитном поле, перпендикулярен как вектору  $\vec{p}_m$ , так и вектору  $\vec{B}_0$ . Модуль вектора момента  $\vec{M}$  равен  $|\vec{M}| = |\vec{p}_m| \cdot |\vec{B}_0| \sin(\vec{p}_m, \vec{B}_0)$ . В тех случаях, когда  $\vec{p}_m \uparrow\downarrow \vec{B}_0$ , момент сил равен

нулю:  $\vec{M} = 0$ , и положение контура будет устойчивым (по аналогии с диполем в электрическом поле). Если  $\vec{p}_m \uparrow\downarrow \vec{B}_0$ , то тоже  $\vec{M} = 0$ , но такое положение контура будет неустойчиво.

В случае, когда контур с током, оказывается помещённым в *неоднородное* магнитное поле, сила, действующая на него со стороны магнитного поля, в ноль обращаться не будет:

$$\vec{F} = I \cdot \oint_{\Gamma} [d\vec{l}, \vec{B}].$$

Кроме этого, на контур будет действовать момент этой силы стремящийся повернуть контур так, чтобы его магнитный момент стал параллелен полю:  $\vec{p}_m \parallel \vec{B}$ . Пользуясь аналогией с электрическим диполем, мы можем сразу сказать, что магнитный диполь, ориентированный по направлению поля, будет втягиваться в область сильного поля, а ориентированный против поля — выталкиваться.

## §21. Теорема Гаусса и теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме

Магнитное поле также, как и электрическое обладает двумя чрезвычайно важными свойствами, знание которых позволяет глубже проникнуть в суть самого понятия поля и сформулировать его законы – *теорему Гаусса* и *теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$* . Эти свойства связаны с двумя математическими характеристиками векторных полей: *потоком* и *циркуляцией*.

Вспомним, как они выглядят для электрического поля.

Поток вектора  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности, делённой на  $\epsilon_0$  (см. §2):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q^{\text{внутр}}}{\epsilon_0}, \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

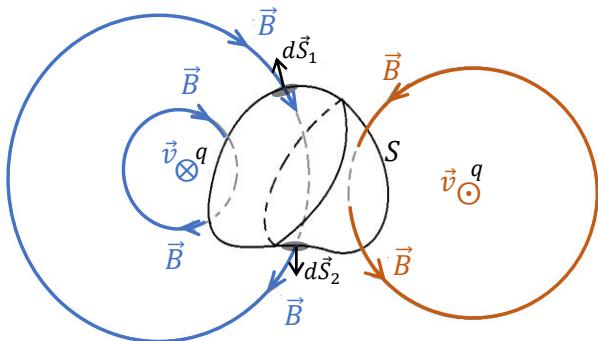
– теорема Гаусса для электрического поля в вакууме. Физический смысл этой теоремы в том, что *источниками электрического (электростатического) поля являются электрические заряды. Линии электрического поля не замкнуты и могут начинаться и заканчиваться только на зарядах.*

Циркуляция вектора  $\vec{E}$  в любом электростатическом поле равна нулю (см. §7):

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = 0$$

– теорема о циркуляции электростатического поля. Смысл этой теоремы в том, что Электростатическое поле – потенциальное поле. *Силовые линии потенциального поля не могут быть замкнутыми.*

Теперь получим основные законы векторного поля – теорему Гаусса и теорему о циркуляции для магнитного поля.



Как уже об этом говорилось в §18, линии магнитного поля всегда замкнуты, т.е. они не имеют ни начала, ни конца. Это значит, что число линий вектора  $\vec{B}$ , выходящих из любого объёма, ограниченного поверхностью  $S$ , всегда равно числу линий, входящих в этот объём. В

§2 мы обсуждали представление о потоке вектора – как о полном числе силовых линий, пересекающих поверхность:

$$d\Phi_1 = \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = B \cdot dS \cdot \cos(\pi - \alpha) < 0;$$

$$d\Phi_2 = \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 = B \cdot dS \cdot \cos(\alpha) > 0;$$

$$\Phi = \oint_S d\Phi = 0.$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

– поток вектора  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю – теорема Гаусса для вектора  $\vec{B}$  в интегральной форме. Соответственно в дифференциальной или локальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Теорема Гаусса для магнитного поля выражает фундаментальный экспериментальный факт отсутствия в природе магнитных зарядов. Поля, не имеющие в строгом смысле источников (дивергенция которых всюду равна нулю), называются *бездивергентными* или *соленоидальными* полями. Следовательно, *магнитное поле есть поле соленоидальное*.

Для получения теоремы о циркуляции магнитного поля в вакууме, приведём вначале два примера расчёта циркуляции вектора  $\vec{B}$ :  $C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l}$ .

Пример 1: магнитное поле движущейся заряженной частицы.

Подробно магнитное поле движущегося заряда было рассмотрено в §18:

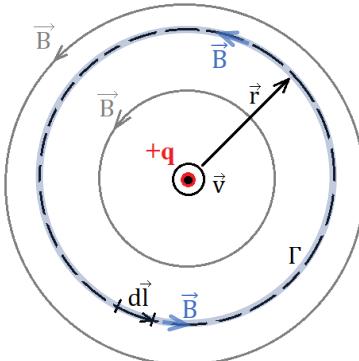
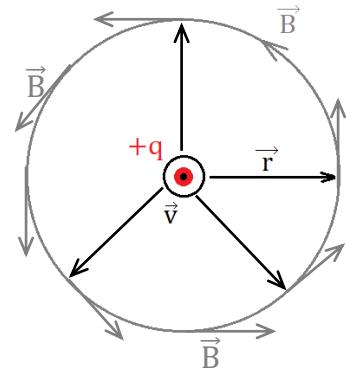
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Если заряд положительный и движется на нас, то силовые линии создаваемого им магнитного поля будут представлять собой замкнутые кривые – окружности, расположенные в плоскости листа. В качестве замкнутого контура  $\Gamma$  для расчёта циркуляции

поля возьмём тоже окружности, центр которых совпадает с точкой, в которой находится заряженная частица. Расчёт циркуляции требует задания направления обхода контура (направления вектора элемента длины контура  $d\vec{l}$ ). В нашем примере договоримся, обходить контур против часовой стрелки. Считаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по нашей окружности:

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} =$$

По рисунку видно, что в любой точке контура  $\Gamma$  (окружности) вектор элемента длины контура



$d\vec{l}$  сонаправлен с вектором индукции магнитного поля  $\vec{B}$  в этой точке:  $\vec{B} \uparrow\uparrow d\vec{l}$ , т.е. под интегралом от скалярного произведения векторов мы можем перейти к произведению их модулей. Все точки нашей окружности – контура находятся на одинаковом расстоянии от заряда  $q$ , следовательно величина магнитного поля в них тоже будет одинакова – не будет зависеть от  $dl$  – мы можем вынести её из под знака интеграла:

$$\oint_{\Gamma} B \cdot dl = B \cdot \oint_{\Gamma} dl = B \cdot L_{\Gamma} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{v \cdot r \cdot \sin(\widehat{\vec{v}, \vec{r}})}{r^3} \cdot 2\pi r.$$

$$\vec{v} \perp \vec{r} \Rightarrow \sin(\widehat{\vec{v}, \vec{r}}) = 1, \quad \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{v \cdot r \cdot 1}{r^3} \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0}{2} \cdot q \cdot \frac{v}{r}$$

Получается, что циркуляция магнитного поля по выбранному контуру в этом примере не равна нулю:

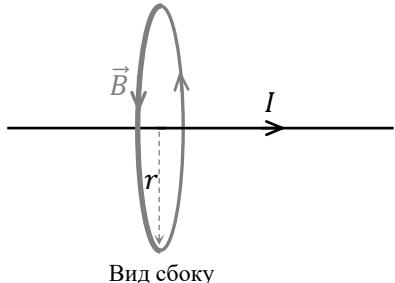
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \frac{q \cdot v}{2r}.$$

Ещё отметим, что единицей измерения множителя

$$\left[ \frac{q \cdot v}{r} \right] = \frac{[q] \cdot [v]}{[r]} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}/\text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А} = [I]$$

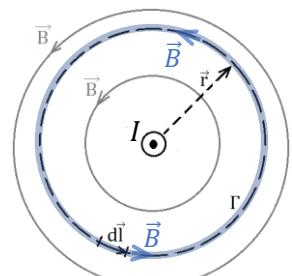
является Ампер – единица измерения силы тока.

Пример 2: магнитное поле длинного тонкого прямолинейного провода с постоянным током (см. §19):



$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}.$$

Как и в предыдущем примере, линии магнитной индукции представляют собой концентрические окружности. Поэтому, в качестве замкнутого контура  $\Gamma$  для расчёта циркуляции поля снова возьмём окружности, центр которых теперь будет находиться на проводе с током. Будем обходить контур против часовой стрелки: в каждой точке контура будет выполняться условие  $\vec{B} \uparrow\uparrow d\vec{l}$ .



Вид сверху вдоль провода

Следовательно, и в этом примере циркуляция магнитного поля по выбранному контуру не равна нулю:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I.$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi} \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I$$

Также как в первом примере, получилось произведение магнитной постоянной на силу тока, охватываемую контуром  $\Gamma$ .

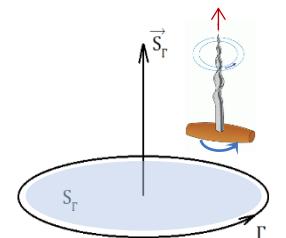
Таким образом, в отличие от электростатического поля циркуляция магнитного поля может быть отличной от нуля, т.е. *магнитное поле – не потенциальное поле*.

Теперь можем сформулировать положение теоремы о циркуляции для магнитного поля постоянных токов в вакууме: *циркуляция вектора  $\vec{B}$  по любому замкнутому контуру  $\Gamma$  равна произведению  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром  $\Gamma$ :*

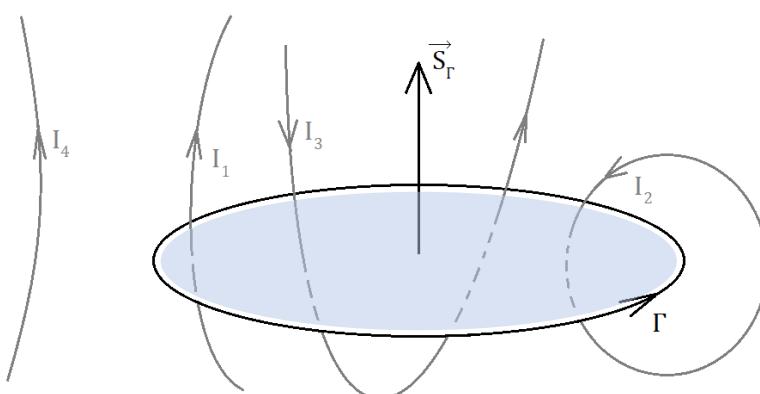
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I,$$

где  $I = I_{\Gamma} = \sum I_k$  – алгебраическая сумма токов. Т.е. сумма, учитывающая направление протекания тока.

Остановимся на этом подробнее. Как уже говорилось выше, любой контур в магнетизме характеризуется с помощью задания направления обхода: «по часовой стрелке» или «против часовой стрелки». Также как в электричестве, площадь, ограниченная контуром  $S_{\Gamma}$  – векторная величина. Если в электричестве вектор площади  $\vec{S}_{\Gamma}$  имел некоторый произвол по направлению: можно было направлять вверх перпендикулярно площади, а можно вниз (см. §2), то в магнетизме вектор  $\vec{S}_{\Gamma}$  должен согласовываться с направлением обхода контура по правилу «правого винта».



Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру по правилу «правого винта», т.е совпадает по направлению с вектором  $\vec{S}_{\Gamma}$ . Ток противоположного направления считается отрицательным. На приведённом рисунке:



$$I_{\Gamma} = I_1 - I_2 + I_3 - I_3 = I_1 - I_2.$$

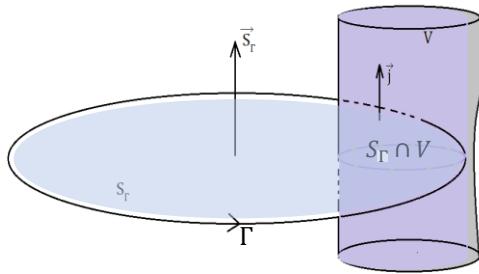
Ток  $I_1$  пересекает поверхность один раз сонаправленно с вектором площади  $\vec{S}_{\Gamma}$ , поэтому он входит в сумму со знаком +. Ток  $I_2$  пересекает поверхность тоже один раз, но в направлении противоположном  $\vec{S}_{\Gamma}$ , поэтому он

взят с отрицательным знаком. Ток  $I_3$  пересекает площадь дважды, сонаправленно  $\vec{S}_{\Gamma}$  и в противоположном направлении, поэтому он входит в сумму два раза с противоположными знаками и самоуничтожается. Ток  $I_4$  не пересекает  $S_{\Gamma}$  совсем, и поэтому в сумму  $I_{\Gamma}$  он не входит.

Теорема о циркуляции может быть доказана, исходя из закона Био – Савара и представлений о телесных углах (см. §2). В общем случае произвольных токов это доказательство достаточно трудоёмко, здесь мы его приводить не будем.

Если ток  $I$ , стоящий в правой части теоремы о циркуляции, течёт не по тонкому проводу, а распределён по объёму проводящей среды, часть которой (или весь объём полностью) попадает внутрь контура  $\Gamma$ , то его можно выразить через интеграл от плотности тока:

$$I_\Gamma = \int_{S_\Gamma \cap V} \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$



Этот интеграл будет в таком случае браться не по всей площади внутри контура  $\Gamma$ , а только по площади пересечения поверхности внутри контура и объёма проводящей среды:  $S_\Gamma \cap V$ . Здесь  $d\vec{S}$  – малый элемент площади внутри такого пересечения, направленный также как и  $\vec{S}_\Gamma$ .

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \int_{S_\Gamma \cap V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

– теорема о циркуляции для случая объёмного тока.

В тех областях пространства, где не текут электрические токи  $I = 0$ , циркуляция по-прежнему будет обращаться в ноль по любому замкнутому контуру:

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0,$$

т.е. в таких областях магнитное поле будет потенциально. Однако, там где токи текут, это выполняться не будет, о чём и свидетельствует теорема о циркуляции.

## §22. Применение теоремы о циркуляции

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{\Gamma}$$

– теорема о циркуляции для магнитного поля постоянных токов в вакууме.

В теории магнитных полей постоянных токов теорема о циркуляции играет примерно ту же роль, что и теорема Гаусса в электростатике (см. §3). При наличии определённой симметрии теорема о циркуляции позволяет иногда очень просто рассчитать индукцию магнитного поля. Приведём несколько примеров.

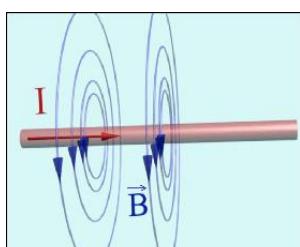
Так же, как в примерах на нахождение векторного поля с помощью теоремы Гаусса решая задачи на нахождение индукции магнитного поля по теореме о циркуляции, удобно использовать следующий алгоритм.

Шаг 1: выбор вспомогательного замкнутого контура  $\Gamma$ , по которому будет рассчитываться циркуляция вектора  $\vec{B}$ . Выбор контура  $\Gamma$  основан на виде симметрии поля. Применяются контуры в виде окружностей или прямоугольников. Необходимо задать направление обхода контура.

Шаг 2: расчёт циркуляции вектора  $\vec{B}$  по выбранному контуру  $\Gamma$  – считаем интеграл в левой части теоремы о циркуляции.

Шаг 3: расчёт постоянных токов, охватываемых контуром  $\Gamma$ :  $I_{\Gamma}$  – считаем правую часть теоремы о циркуляции.

Шаг 4: приравниваем левую и правую части теоремы о циркуляции, после чего из получившегося соотношения выводится выражение для величины магнитной индукции  $\vec{B}$ .



Магнитные поля, силовые линии которых имеют форму окружностей с центром на оси системы.

❖ Магнитное поле бесконечного прямолинейного провода с током.

Дано:

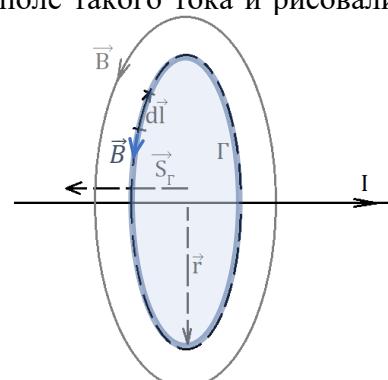
$I$  – ток, текущий по проводу

Найти:

$B(r)$  – ?

циркуляции по алгоритму, приведённый выше.

В §19 мы уже считали поле такого тока и рисовали его силовые линии. Теперь же используем для нахождения вектора  $\vec{B}$ , теорему о циркуляции по алгоритму, приведённый выше.



Шаг 1: в качестве вспомогательного контура  $\Gamma$  возьмём окружность, совпадающую с одной из силовых линий вектора магнитной индукции. Радиус этой окружности  $r$  будет одновременно и расстоянием от провода, до точки пространства, в которой мы хотим вычислить поле. Обход контура – окружности выберем по часовой стрелке.

Шаг 2: найдём циркуляцию  $C_\Gamma$  по выбранному контуру. В каждой точке нашей окружности, согласно рисунку, выполняется  $\vec{B} \uparrow\downarrow d\vec{l}$  – вектор магнитной индукции и вектор единицы длины контура направлены в противоположные стороны. Кроме этого, величина вектора  $\vec{B}$  во всех точках контура (на расстоянии  $r$  от провода) одинакова, т.е.  $B$  не зависит от  $dl$ :

$$C_\Gamma = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \oint_{\text{окр-ть}} B \cdot dl = -B \cdot \oint_{\text{окр-ть}} dl = -B \cdot L_\Gamma = -B \cdot 2\pi r.$$

Шаг 3: считаем ток, охватываемый контуром  $I_\Gamma$ . Внутри выбранной окружности оказался весь провод с током. Но, направление тока в проводе противоположно направлению  $\vec{S}_\Gamma$  – вектора площади контура, связанного с обходом контура по правилу «правого винта». Согласно рассуждениям из §19, это означает, что ток считается отрицательным:

$$I_\Gamma = -I.$$

Шаг 4: приравниваем левую и правую части, не забывая про  $\mu_0$ :

$$-B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot (-I) \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}.$$

Такой же результат был получен в §19 только более сложным способом – интегрированием магнитных полей линейных элементов с током (через закон Био - Савара).

❖ Магнитное поле бесконечного длинной трубы с током (ток течёт вдоль трубы по ее стенкам).

Дано:

$R$  – радиус трубы;

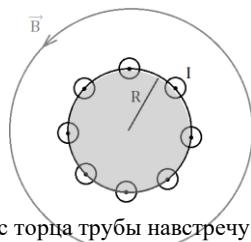
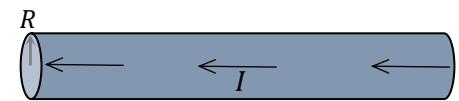
$I$  – сила тока

Найти:

$B(r)$ ,  $0 \leq r < R$  (внутри)

$B(r)$ ,  $r > R$  (снаружи)

Ток, текущий по  
стенкам трубы,  
можно представить  
как систему очень  
большого числа  
тонких проводов

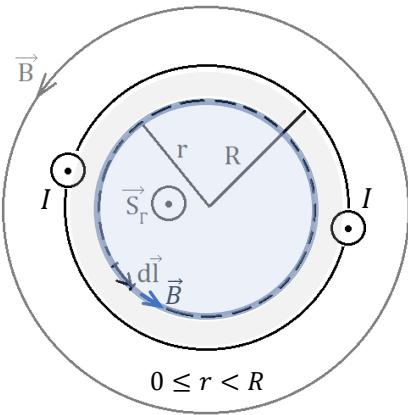


Вид с торца трубы навстречу току

(нитей) с током, выложенных вдоль стенок. Магнитное поле такой системы можно найти по принципу суперпозиции, но очевидно, что в силу симметрии системы силовые линии поля должны иметь вид окружностей с центром на оси трубы. Причём величина вектора магнитной индукции должна быть одинакова во всех точках на расстоянии  $r$  от оси трубы.

Ввиду того, что силовые линии магнитного поля трубы с током полностью повторяют вид линий вектора  $\vec{B}$  из предыдущего примера шаги нашего алгоритма 1 и 2 будут тоже аналогичны. Некоторое отличие будет заключаться в том, что обход вспомогательного

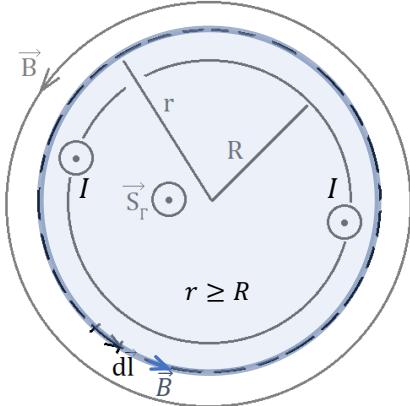
контура  $\Gamma$  – окружности возьмём теперь против часовой стрелки. И таких контуров будет два: первый а)  $0 \leq r < R$  для случая, когда будем искать магнитное поле внутри трубы; б)  $r > R$  для случая – вне трубы.



Шаг 2:

$$\begin{aligned} C_\Gamma = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_{\text{окр-ть}} B \cdot dl = \\ &= B \cdot \oint_{\text{окр-ть}} dl = B \cdot L_\Gamma = \\ &= B \cdot 2\pi r \end{aligned}$$

– справедливо и для а) и для б).



Шаг 3: теперь размер вспомогательного контура имеет значение.

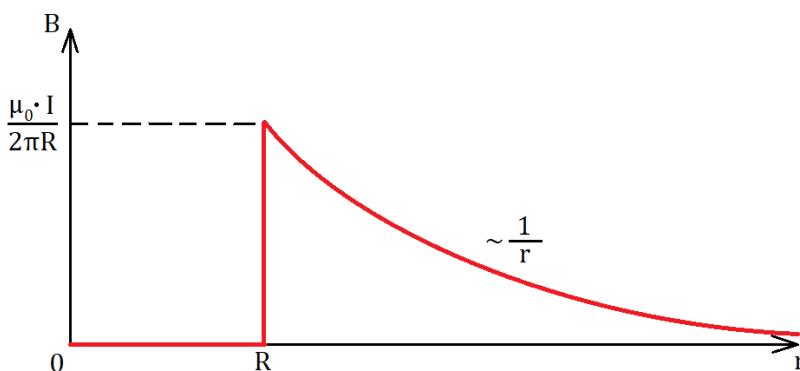
- a) если  $0 \leq r < R$ , то никакой ток, текущий по стенкам трубы радиусом  $R$ , внутрь нашего контура не попадает. Следовательно,  $I_\Gamma = 0$ .
- b) если  $r > R$ , то внутри вспомогательного контура  $\Gamma$  оказывается весь ток, текущий по стенкам трубы радиусом  $R$ , и  $I_\Gamma = +I$ .

Ток в этом примере считается положительным, т.к. его направление совпадает по направлению с  $\vec{S}_\Gamma$  – вектором площади контура, связанного с обходом контура по правилу «правого винта».

Шаг 4:

a)  $0 \leq r < R$ :  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot 0 \Rightarrow B = 0$ .

b)  $r > R$ :  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$ .



Вне трубы магнитное поле ведёт себя как поле бесконечного прямолинейного провода с током.

- ❖ Магнитное поле бесконечного длинного прямого цилиндрического провода, по которому течёт ток с постоянной плотностью.

Дано:

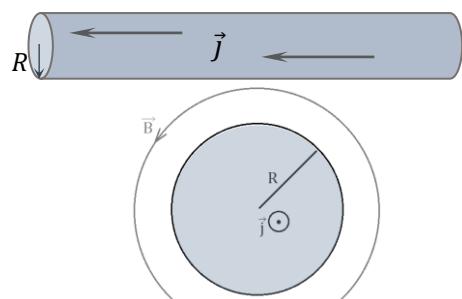
$R$  – радиус трубы;

$\vec{j} = \text{const}$  – плотность тока

Найти:

$$B(r), \quad 0 \leq r < R \text{ (внутри)}$$

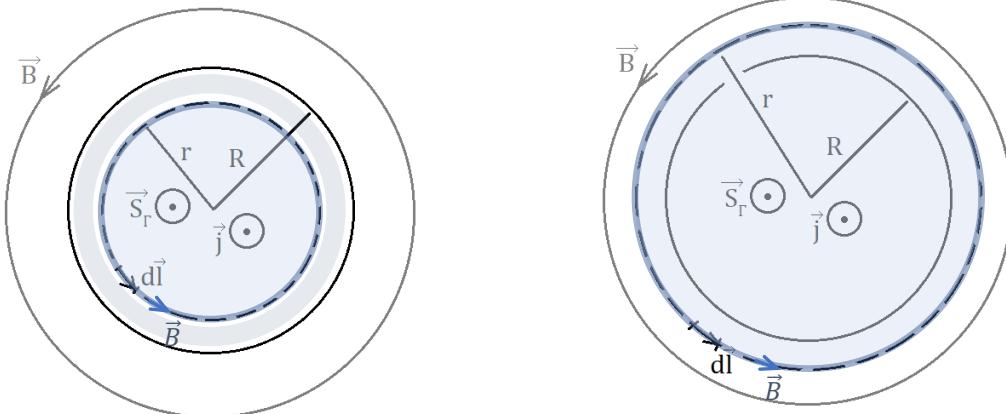
$$B(r), \quad r \geq R \quad (\text{снаружи})$$



Вид с торца трубы навстречу току

Все рассуждения, сделанные относительно вида силовых линий магнитного поля в прошлом примере, ввиду симметрии задачи справедливы и здесь. Линии вектора  $\vec{B}$  такого провода с током – окружности с центром на оси тока. Значит в качестве вспомогательного контура  $\Gamma$  выбираем снова окружность. Таких окружностей будет две – чтобы рассчитать поле внутри

a)  $0 \leq r < R$  и вне трубы b)  $r \geq R$ . Обход каждой из окружностей зададим против часовой стрелки.



Шаг 2:

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \dots = B \cdot 2\pi r$$

– справедливо и для а) и для б).

В этом примере ток с некоторой плотностью распределён по объёму провода, поэтому для нахождения  $I_\Gamma$  воспользуемся формулой из §21:

$$I_\Gamma = \int_{S_\Gamma \cap V} \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Шаг 3:

$$a) \quad 0 \leq r < R$$

$$I_\Gamma = \int_{S_\Gamma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{S_\Gamma} j \cdot dS = j \cdot \int_{S_\Gamma} dS = j \cdot \pi r^2$$

– в этом случае контур  $\Gamma$  полностью лежит внутри провода. Соответственно, охватить весь ток, текущий по проводу, он не может.  $I_\Gamma$  тут – часть тока провода, пронизывающая площадь внутри контура:  $S_\Gamma$ . Величина получается положительной, т.к. вектор плотности тока  $\vec{j}$  совпадает по направлению с вектором площади  $\vec{S}_\Gamma$ .

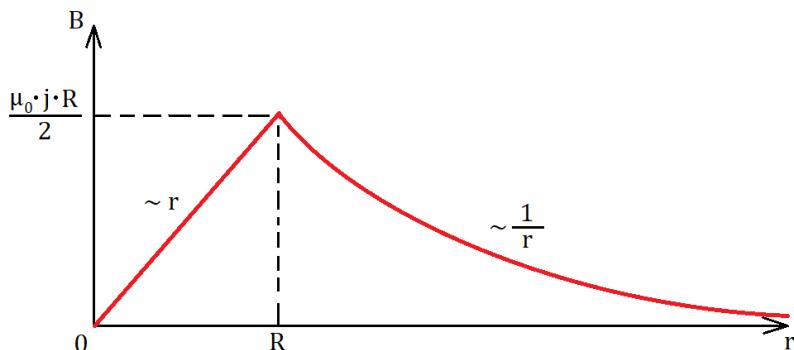
$$b) \ r \geq R: \quad I_{\Gamma} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j \cdot dS = j \cdot \int_S dS = j \cdot \pi R^2$$

— в этом случае контур  $\Gamma$  выходит за границы провода. Площадь поперечного сечения провода  $S < S_{\Gamma}$ . Т.е. контур  $\Gamma$  охватывает весь ток, текущий по проводу. Значит должны интегрировать только по площади, которую пронизывает ток провода, а не по всей площади внутри  $\Gamma$ .

Шаг 4:

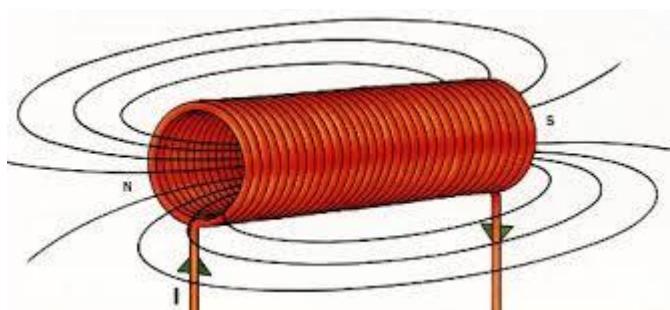
$$a) \ 0 \leq r < R: \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot j \cdot \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{2} \cdot jr.$$

$$b) \ r \geq R: \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot j \cdot \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{jR^2}{r}.$$



*Магнитные поля, силовые линии которых параллельны оси системы.*

❖ Магнитное поле бесконечного длинного соленоида



Соленоидом называется цилиндрическая катушка, состоящая из большого числа витков провода, образующих винтовую линию. Соленоид принимается бесконечно длинным, если его длина намного превышает его поперечные размеры (диаметр, например).

Дано:

$R$  — радиус основания соленоида;

$I$  — сила тока в проводе;

$n$  — число витков провода на единицу длины соленоида

Найти:

$B(r), \quad 0 \leq r < R$  (внутри)

$B(r), \quad r > R$  (снаружи)

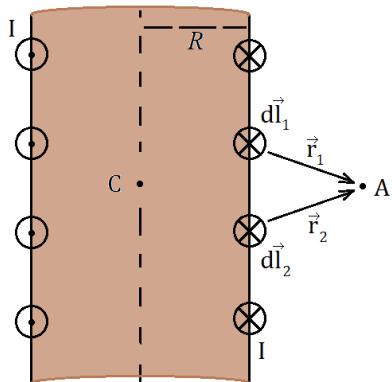
Если шаг винтовой линии провода достаточно мал, то каждый виток соленоида можно приближённо заменить замкнутым витком. Также принято

считать, что сечение провода, по которому течёт ток настолько мало, что ток в соленоиде можно принимать текущим по его поверхности.

Определим сначала, что представляют собой линии вектора  $\vec{B}$  магнитного поля соленоида.

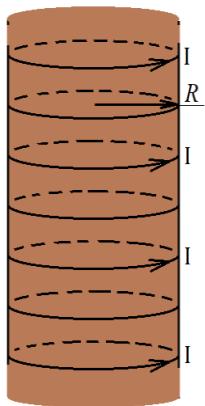
Представим картинку в разрезе. Рассмотрим два линейных элемента тока  $I d\vec{l}_1$  и  $I d\vec{l}_2$

симметрично расположенные относительно точки наблюдения ( $\cdot$ ) A, как это изображено на рисунке слева. Ток в них направлен от нас за плоскость рисунка.



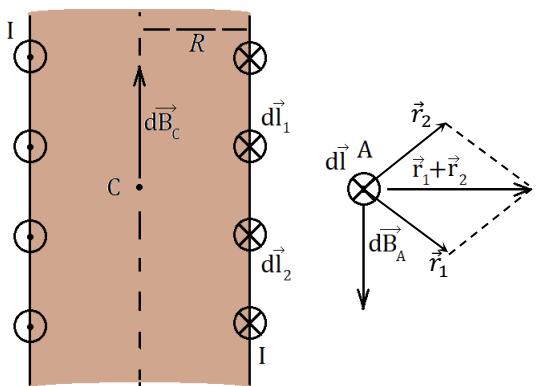
По закону Био – Савара (см. §19) результирующее магнитное поле этих двух элементов в ( $\cdot$ ) A определяется выражением:

$$\begin{aligned} d\vec{B}_A &= d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{[d\vec{l}_1, \vec{r}_1]}{r_1^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{[d\vec{l}_2, \vec{r}_2]}{r_2^3}. \end{aligned}$$



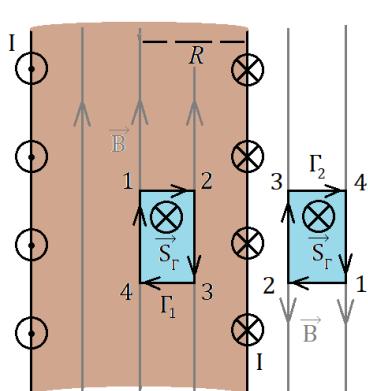
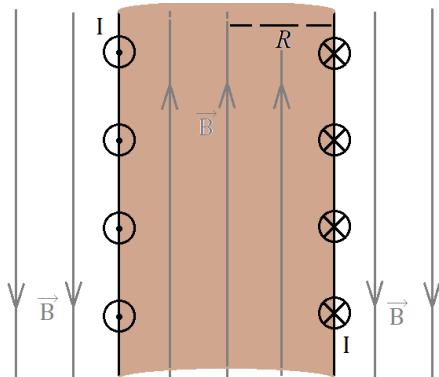
С учётом, что элементы тока одинаковы  $d\vec{l}_1 = d\vec{l}_2 = d\vec{l}$  и расположены на одном расстоянии от точки  $r_1 = r_2 = r$ , получаем:

$$d\vec{B}_A = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}_1]}{r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}_2]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{[d\vec{l}, (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)]}{r^3}.$$



Т.к. векторы  $d\vec{l}$  и  $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$  перпендикулярны к оси соленоида, то поле  $d\vec{B}_A$  параллельно этой оси и согласно правилу «правого винта» направлено вниз. Всю поверхность бесконечного длинного соленоида можно разбить на пары элементов, аналогичных  $d\vec{l}_1$  и  $d\vec{l}_2$ . Магнитное поле каждой такой пары параллельно оси соленоида.

Следовательно, то же справедливо и для полного поля соленоида. Доказательство справедливо независимо от того, где лежит точка наблюдения: внутри ( $\cdot$ ) C или вне ( $\cdot$ ) A соленоида. Меняется только направление: внутри соленоида вектор магнитной индукции направлен вверх, а снаружи вниз, если ток течёт по проводу, так как показано на рисунке.



Теперь исследуем, как ведёт себя магнитное поле бесконечного длинного соленоида при удалении точки наблюдения A от соленоида или при удалении ( $\cdot$ ) C от оси соленоида к его поверхности. Для этого выберем два прямоугольных контура 12341 внутри и вне соленоида, и сосчитаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по ним. Обход контуров осуществим по часовой стрелке.

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{12341} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{1 \rightarrow 2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{2 \rightarrow 3} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{3 \rightarrow 4} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{4 \rightarrow 1} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

— представим циркуляцию по прямоугольному контуру как сумму интегралов, считаемых по сторонам выбранного прямоугольника.

Т.к. на сторонах  $1 \rightarrow 2$  и  $3 \rightarrow 4$  любого из прямоугольников вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен элементу длины  $d\vec{l}$ :  $\vec{B} \perp d\vec{l}$ , то скалярное произведение на них  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ , т.е. в сумме остаётся только два интеграла. Кроме того, на стороне  $4 \rightarrow 1$ :  $\vec{B} \uparrow d\vec{l} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot dl$ , а на стороне  $2 \rightarrow 3$ :  $\vec{B} \uparrow d\vec{l} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B \cdot dl$ . Окончательно, получаем

$$\oint_{12341} \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \int_{2 \rightarrow 3} B_{23} \cdot dl + \int_{4 \rightarrow 1} B_{41} \cdot dl = -B_{23} \cdot \int_{2 \rightarrow 3} dl + B_{41} \cdot \int_{4 \rightarrow 1} dl = \\ = -B_{23} \cdot l + B_{41} \cdot l = (B_{41} - B_{23}) \cdot l,$$

если считать, что стороны контура не велики, и магнитное поле вдоль них не изменяется.

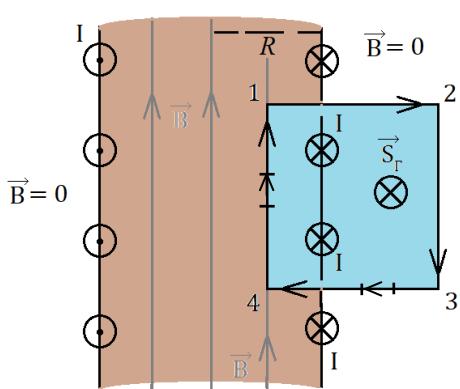
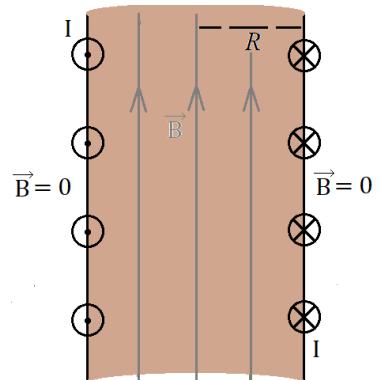
Ни один из выбранных нами прямоугольных контуров не охватывает ток, текущий по проводу, намотанному на соленоид. Следовательно, в обоих случаях  $I_\Gamma = 0$ .

Приравнивая левую и правую части теоремы о циркуляции, получаем следующее:

$$(B_{41} - B_{23}) \cdot l = \mu_0 \cdot 0, \quad B_{41} - B_{23} = 0, \quad B_{41} = B_{23} = B$$

Значит, магнитное поле как внутри, так и снаружи бесконечного соленоида является однородным и не зависит от расстояния до оси соленоида.

Поле соленоида конечной длины не является однородным, Чем длиннее соленоид, тем меньше индукция магнитного поля вне его. У бесконечного длинного соленоида магнитное поле снаружи отсутствует совсем. Все магнитное поле бесконечно длинного соленоида находится внутри него так же, как электрическое поле сосредоточено внутри плоского конденсатора.



Всё что мы выше выяснили относительно вида магнитного поля бесконечного длинного соленоида, подсказывает для нахождения величины этого поля с помощью теоремы о циркуляции выбрать прямоугольный контур так, как показано на рисунке: прямоугольник 12341, в котором участок  $4 \rightarrow 1$  будет находиться внутри соленоида, а участок  $2 \rightarrow 3$  — вне соленоида. Направление обхода контура возьмём опять по часовой стрелке.

Шаг 2: циркуляцию по выбранному контуру сосчитаем также, как мы это сделали выше, за исключением того, что на стороне контура  $2 \rightarrow 3$ :  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ , т.к эта часть контура по построению находится вне соленоида.

$$\begin{aligned} C_\Gamma = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_{12341} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{1 \rightarrow 2} \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0, \vec{B} \perp d\vec{l}} + \int_{2 \rightarrow 3} \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0} + \int_{3 \rightarrow 4} \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0, \vec{B} \perp d\vec{l}} + \int_{4 \rightarrow 1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{4 \rightarrow 1} B_{41} \cdot dl = B \cdot \int_{4 \rightarrow 1} dl = B \cdot l. \end{aligned}$$

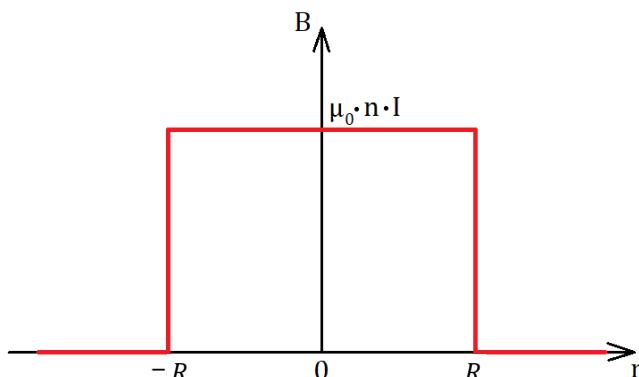
Шаг 3:

$$I_\Gamma = N \cdot I = n \cdot l \cdot I,$$

где  $N$  – число витков провода обмотки соленоида, пересекающих поверхность, ограниченную нашим прямоугольным контуром,  $S_\Gamma$ . Его можно найти, используя заданное число витков на единицу длины соленоида  $n$  и длину контура  $l$ . При нашем выборе обхода прямоугольника 12341 этот ток – положительный.

Шаг 4:

$$B \cdot l = \mu_0 \cdot n \cdot l \cdot I \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 \cdot n \cdot I.$$



❖ Магнитное поле тороида.

*Тороид* представляет собой *тонкий провод, плотно (виток к витку) намотанный на каркас в форме тора*.

Дано:

$r_i$  – внутренний радиус тора;

$r_e$  – внешний радиус тора;

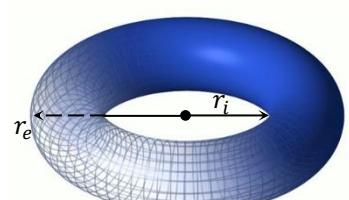
$I$  – сила тока в проводе;

$N$  – число витков провода, намотанного на тор.

Найти:

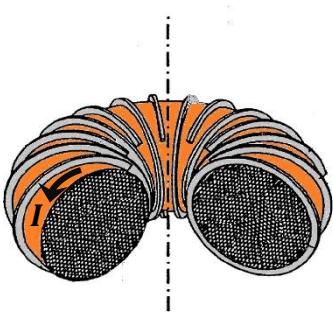
$$B(r), \quad r_i < r < r_e \text{ (внутри)}$$

$$B(r), \quad \left. \begin{array}{l} r > r_e \\ r < r_i \end{array} \right\} \quad (\text{снаружи})$$



Благодаря плотной обмотке каждый виток тороида, как и виток соленоида, можно приближённо заменить замкнутым витком. Также принято считать, что сечение провода, по

которому течёт ток настолько мало, что ток в тороиде можно принимать текущим по его поверхности.



Представление о линиях вектора  $\vec{B}$  магнитного поля тороида можно получить, если представить, что тороид – это соленоид, согнутый и скреплённый торцами друг к другу. Соответственно, силовые линии вектора магнитной индукции магнитного поля тороида – окружности с центром на оси тороида. Магнитное поле тороида сосредоточено внутри него ( $r_i < r < r_e$ ), вне тороида магнитное поле, создаваемое круговыми токами тороида, равно нулю.

**Шаг 1:** в качестве контура  $\Gamma$  для нахождения магнитного поля по теореме о циркуляции выберем окружность, совпадающую с одной из силовых линий поля. Радиус этой окружности будет больше внутреннего радиуса тора, но меньше внешнего:  $r_i < r < r_e$ . Обход контура зададим против часовой стрелки.

**Шаг 2:** как и в предыдущих примерах, где был использован вспомогательный контур в виде окружности

$$C_\Gamma = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{окр-ть}} B \cdot dl = B \cdot \oint_{\text{окр-ть}} dl = B \cdot L_\Gamma = B \cdot 2\pi r.$$

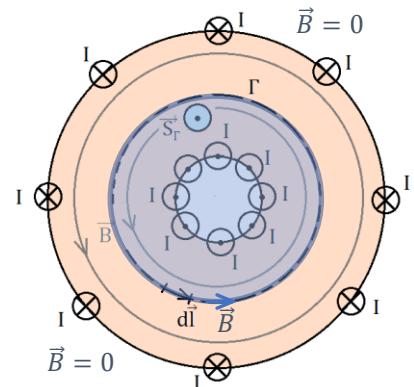
**Шаг 3:** полный ток, охватываемый нашим контуром  $\Gamma$ , можно представить как произведение числа витков провода, намотанного на тор, и тока в одном витке:

$$I_\Gamma = N \cdot I.$$

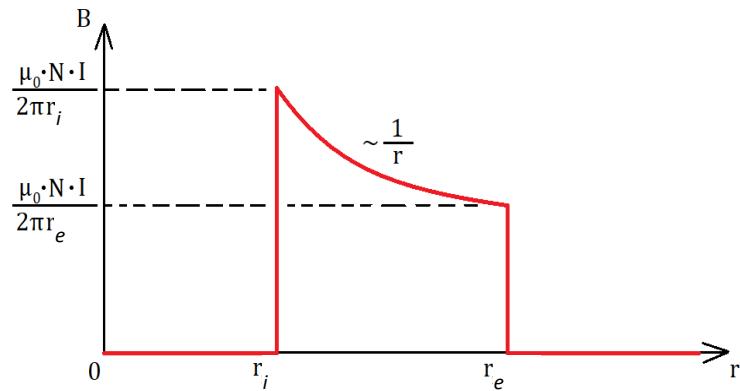
Так можно поступить, поскольку радиус нашей окружности  $r_i < r < r_e$ . Витки с током, как показано на рисунке, огибая поверхность тора по внутреннему радиусу  $r_i$ , однократно пересекают площадь, ограниченную контуром, в положительном направлении  $\vec{S}_\Gamma$ . Внешний радиус тора  $r_e > r$ , поэтому возвращаясь обратно по витку, ток второй раз площадь  $S_\Gamma$  уже не пересекает.

**Шаг 4:**

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot N \cdot I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi r}.$$

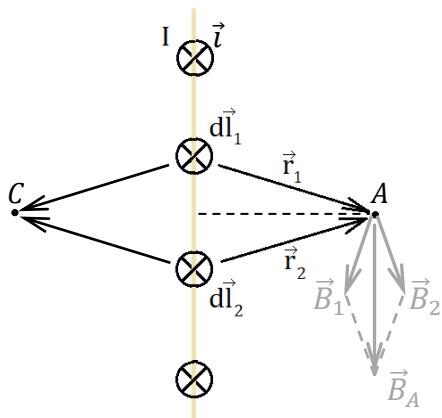
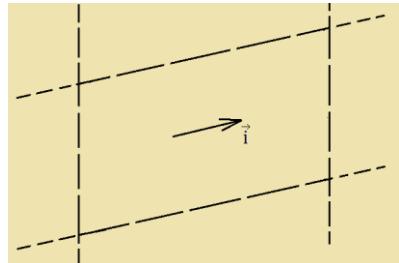


Вид сверху на сечение тороида в горизонтальной плоскости



❖ Магнитное поле безграничной плоскости с током.

Рассмотрим безграничную проводящую плоскость, по которой течёт равномерно распределённый ток одного направления. Для удобства решения перерисуем эту плоскость торцом к нам, что бы обтекающий её ток был направлен от нас за плоскость рисунка. Введём понятие *линейной плотности тока* как вектор



$\vec{i}$ , направленный вдоль линий тока. Величина этого вектора представляет собой ток, проходящий через единицу длины «поперечного сечения», т.е. измеряется в  $[i] = \frac{A}{m}$ .

Дано:  
 $i$  – линейная плотность тока

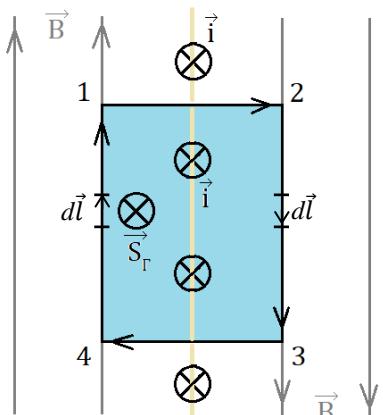
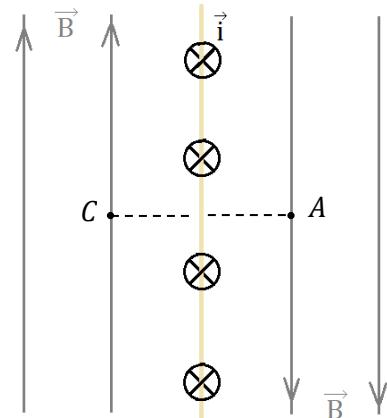
Найти:  
 $B - ?$

Как уже поступали в случае с соленоидом, для получения представления о линиях вектора  $\vec{B}$  этой плоскости, рассмотрим две тонкие нити с током ( $I d\vec{l}_1$  – линейный элемент тока первой нити,  $I d\vec{l}_2$  – второй) симметрично расположенные относительно точки наблюдения (•) A, как это изображено на рисунке слева. Ток в них направлен от нас за плоскость рисунка. Поле отдельной нити с током (бесконечного прямолинейного провода с током) было сосчитано в первом примере этого параграфа, направление его определяется правилом «правого винта». По построению поле первой нити  $\vec{B}_1 \perp \vec{r}_1$ , а поле второй  $\vec{B}_2 \perp \vec{r}_2$ . Результирующее магнитное поле этих двух нитей в (•) A определяется выражением:

$$\vec{B}_A = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

С учётом того, что нити тока одинаковы и расположены на одном расстоянии от точки  $r_1 = r_2 = r$ , получаем:  $|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2|$ , т.е. поле  $\vec{B}_A$  параллельно плоскости с током на нашем рисунке и направлено вниз. Всю поверхность безграничной проводящей плоскости можно разбить на

пары аналогичных нитей. Магнитное поле каждой пары параллельно плоскости. Следовательно, то же справедливо и для поля всей безграничной плоскости с током. Доказательство справедливо независимо от того, где лежит точка наблюдения: левее ( $\cdot$ )  $C$  или правее ( $\cdot$ )  $A$  от плоскости. Меняется только направление: левее плоскости вектор магнитной индукции направлен вверх, а правее вниз, если ток течёт по безграничной плоскости, так как показано на рисунке.



И снова также как в примере про соленоид, в качестве вспомогательного контура для нахождения магнитного поля плоскости по теореме о циркуляции возьмём прямоугольник 12341, в котором участки  $4 \rightarrow 1$  и  $2 \rightarrow 3$  будут расположены параллельно линиям магнитной индукции на одинаковом расстоянии от плоскости. Направление обхода контура выберем по часовой стрелке.

Шаг 2: циркуляция по прямоугольному контуру 12341

$$\begin{aligned} C_G = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_{12341} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{1 \rightarrow 2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{2 \rightarrow 3} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{3 \rightarrow 4} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{4 \rightarrow 1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{2 \rightarrow 3} B_{23} \cdot dl + \int_{4 \rightarrow 1} B_{41} \cdot dl = 2 \cdot B \int_{2 \rightarrow 3} dl = 2 \cdot Bl, \quad B_{23} = B_{41} \end{aligned}$$

из соображений симметрии.

Шаг 3: полный ток, охватываемый контуром 12341,

$$I_{\Gamma} = l \cdot i,$$

где  $l$  – длина стороны контура, параллельная плоскости с током.

Шаг 4:

$$2 \cdot Bl = \mu_0 \cdot l \cdot i \implies B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2}.$$

Из полученной формулы видно, что магнитное поле как с одной стороны плоскости, так и другой является однородным. Этот результат справедлив и для ограниченной пластины с током, но лишь для точек вблизи пластины и удалённых от её краёв.

## §23. Локальная форма теоремы о циркуляции магнитного поля в вакууме. Формула Стокса

Полученное в §21 соотношение

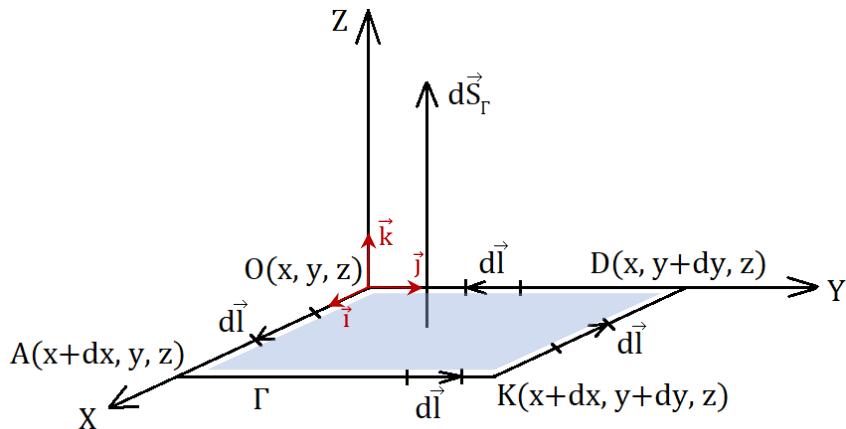
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I = \mu_0 \cdot \int_{S_{\Gamma \cap V}} \vec{j} d\vec{S}$$

выражает теорему о циркуляции магнитного поля в вакууме в интегральной форме. Как и прежде, чтобы расширить возможности применения этой теоремы для исследования и расчёта магнитных полей придадим этой теореме другую форму – *дифференциальную (локальную)*.

С этой целью рассмотрим пространство, по которому течёт ток плотности  $\vec{j}$  и действует магнитное поле  $\vec{B}$ . Пусть для описания положения точек в этом пространстве используется декартова система координат. Тогда индукция магнитного поля в этом пространстве может быть записана как функция положения точки в пространстве

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z).$$

Построим в некоторой точке этого пространства  $O(x, y, z)$  малый прямоугольный контур со сторонами  $dx, dy$  и сосчитаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по этому контуру  $dC_{OAKDO}$ . Наш контур выберем таким образом, чтобы его стороны OA и DO совпадали с осями декартовой системы координат OX и OY соответственно, а ось OZ была перпендикулярна к плоскости контура и составляла с направлением его обхода «правовинтовую» систему.



Исходя из сказанного выше, обход контура  $\Gamma$  будет происходить против часовой стрелки (если смотреть на него сверху).

$$dC_{\Gamma} = \oint_{OAKDO} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{OA} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{AK} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{KD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DO} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

Поскольку для описания данного пространства нами использована декартова система координат, вектор магнитной индукции можно представить в покомпонентной форме записи как:  $\vec{B} = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}$ .

Сначала сосчитаем интеграл по стороне ОА нашего контура:

$$\int_{OA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{OA} (B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}) \cdot dl \cdot \vec{i} = \int_{OA} B_x \cdot dl =$$

мы учитываем, что эта сторона контура сонаправлена с осью ОХ, и значит перемещение вдоль неё можно представить как  $d\vec{l} = dl \vec{i}$ . Также стоит отметить, что наш контур – мал, и можно считать, что магнитное поле в пределах стороны контура остаётся неизменным.

$$= B_x \cdot \int_{OA} dl = B_x \cdot dx = B_x(x, y) \cdot dx$$

– т.к. в нашем выражении величина магнитной индукции считается в самой точке  $O(x, y)$ :  $B_x = B_x(x, y)$ . Величина магнитной индукции по третьей координате пространства в данном случае не изменяется, т.к. все точки выбранного контура лежат в плоскости  $z = const$  согласно построению.

Аналогично найдём интеграл по стороне АК нашего контура:

$$\int_{AK} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AK} (B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}) \cdot dl \cdot \vec{j} = \int_{AK} B_y \cdot dl = B_y \cdot \int_{AK} dl = B_y \cdot dy =$$

на предыдущем шаге мы уже сместились из точки  $O(x, y)$ , и теперь ближайшая к ней точка – точка  $A(x + dx, y)$ :

$$= B_y(x + dx, y) \cdot dy.$$

Интеграл по стороне KD нашего контура:

$$\int_{KD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{KD} (B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}) \cdot dl \cdot (-\vec{i}) = - \int_{KD} B_x \cdot dl = -B_x \cdot \int_{KD} dl = -B_x \cdot dx =$$

знаком «минус» мы учли, что теперь перемещение  $d\vec{l}$  по стороне KD противонаправлено оси ОХ и её орту  $\vec{i}$ . Ближайшей к точке  $O(x, y)$  теперь будет точка  $D(x, y + dy)$ , и значит  $B_x = B_x(x, y + dy)$ ,

$$= -B_x(x, y + dy) \cdot dx.$$

Последний интеграл по стороне DO:

$$\begin{aligned} \int_{DO} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_{DO} (B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}) \cdot dl \cdot (-\vec{j}) = - \int_{DO} B_y \cdot dl = -B_y \cdot \int_{DO} dl = -B_y \cdot dy = \\ &= -B_y(x, y) \cdot dy. \end{aligned}$$

После всех перемещений вернулись в исходную точку – точку  $O(x, y)$ .

Таким образом, циркуляция по всему прямоугольному контуру OAKDO равна:

$$dC_\Gamma = \oint_{OAKDO} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underline{B_x(x, y) \cdot dx} + \underline{B_y(x + dx, y) \cdot dy} - \underline{B_x(x, y + dy) \cdot dx} - \underline{B_y(x, y) \cdot dy} =$$

объединяя слагаемые с одинаковой проекцией вектора магнитной индукции и вынося общие множители, получаем:

$$= (B_y(x + dx, y) - B_y(x, y)) \cdot dy - (B_x(x, y + dy) - B_x(x, y)) \cdot dx =$$

следующим шагом умножим и разделим каждую из скобок на  $dx$  и  $dy$  соответственно

$$= \frac{B_y(x + dx, y) - B_y(x, y)}{dx} \cdot dxdy - \frac{B_x(x, y + dy) - B_x(x, y)}{dy} \cdot dxdy =$$

подобные дроби первый раз мы встретили в §4 – это частные производные

$$= \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \cdot dxdy = \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \cdot dS_\Gamma,$$

т.к.  $dxdy$  – это площадь, ограниченная нашим прямоугольным контуром,  $-dS_\Gamma$

Выражение, стоящее в скобках, узнать немного сложнее, но с подобными выражениями мы встречались в §7, когда искали дифференциальную (локальную) форму теоремы о циркуляции электростатического поля. Это выражение – одна из проекций операции векторного произведения оператора набла  $\nabla$  и вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , точнее проекция на ось OZ:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) &= \left( \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right) \cdot \vec{k} = \\ &= \left( \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\vec{i} B_x + \vec{j} B_y + \vec{k} B_z) \right) \cdot \vec{k} = [\nabla, \vec{B}] \cdot \vec{k} = \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Следовательно, полная циркуляция по прямоугольному контуру OAKDO будет равна

$$dC_\Gamma = \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \cdot dS_\Gamma = (\text{rot } \vec{B} \cdot \vec{k}) \cdot dS_\Gamma = \text{rot } \vec{B} \cdot (\vec{k} \cdot dS_\Gamma) = \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}_\Gamma,$$

где  $\vec{k} \cdot dS_\Gamma = d\vec{S}_\Gamma$  – вектор площади нашего прямоугольного контура, поскольку ось OZ с направлением обхода контура, составляет «правовинтовую систему», так мы сориентировали контур при построении.

По интегральной форме теоремы о циркуляции магнитного поля в вакууме циркуляция по контуру вектора  $\vec{B}$  должна быть равна полному току, охватываемому этим контуром, умноженному на  $\mu_0$ :  $dI_\Gamma = \vec{j} \cdot d\vec{S}_\Gamma$ . Наш контур был выбран малым, значит и величина тока, пронизывающая площадь OAKDO, тоже мала, и плотность тока  $\vec{j}$  – одинакова во всех её точках. Таким образом,

$$dC_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot dI_{\Gamma} \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}_{\Gamma} = \mu_0 \cdot \vec{j} \cdot d\vec{S}_{\Gamma}$$

Равенство справедливо для произвольной площадки  $d\vec{S}_{\Gamma}$ , что возможно только если

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$$

– дифференциальная (локальная) форма теоремы о циркуляции.

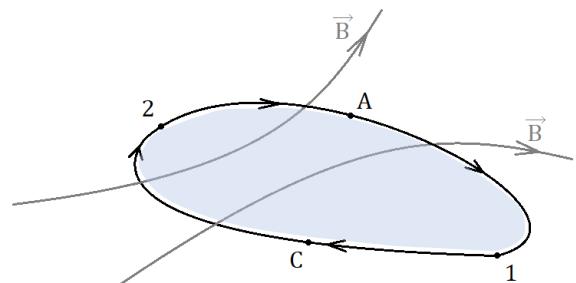
Как уже упоминалось в §7, векторные поля, ротор которых не равен нулю, называются *вихревыми полями*. Полученная нами формула показывает, что магнитное поле  $\vec{B}$  является *вихревым* во всех областях пространства, где текут электрические токи (т.е. где  $\vec{j} \neq 0$ ), и *безвихревым*, где токов нет (т.е. там где  $\vec{j} = 0$ ).

### Формула Стокса

В различных вопросах теории магнетизма и других разделах физики часто применяется математическая формула, с помощью которой циркуляцию вектора по произвольному контуру  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l}$  можно выразить через интеграл по площади, ограниченной этим контуром  $S_{\Gamma}$  (поверхности, опирающейся на контур).

Для получения этой формулы покажем сначала, что циркуляция обладает свойством аддитивности, т.е. циркуляция по контуру, ограничивающему несколько смежных поверхностей, равна сумме циркуляций по контурам, ограничивающим каждую поверхность в отдельности:  $C_{\Gamma} = \sum C_i$ .

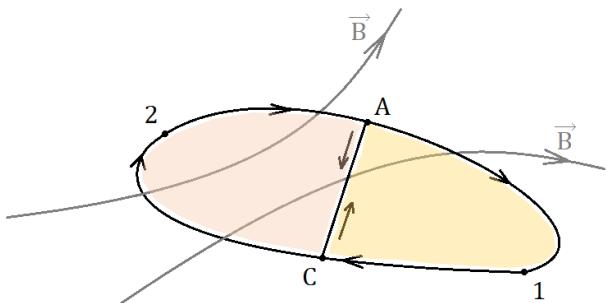
Рассмотрим малый замкнутый контур  $A1C2A$  в пространстве, где действует магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ . Циркуляцию вектора магнитной индукции по контуру  $A1C2A$  представим в виде интегралов по участкам контура  $A1C$  и  $C2A$ . Так мы уже поступали неоднократно, например в §22:



$$C_{\Gamma} = \oint_{A1C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{A1C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

С помощью перемычки  $AC$  разобьём наш контур ещё на два малых замкнутых контура  $A1CA$

и  $AC2A$  и сосчитаем циркуляцию  $\vec{B}$  по ним:



$$C_1 = \oint_{A1CA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{A1C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$C_2 = \oint_{AC2A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Сумма этих двух циркуляций будет равна:

$$C_1 + C_2 = \int_{A1C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{AC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l} =$$

здесь два средних интеграла отличаются только направлением элемента длины  $d\vec{l}$  отрезка: в первом случае от  $C$  к  $A$ , во втором от  $A$  к  $C$ . Результат скалярного произведения векторов при изменении направления одного из множителей на  $180^\circ$ , изменится только на  $(-1)$ , вследствие изменения косинуса угла:  $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ , поэтому

$$\begin{aligned} \int_{AC} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= - \int_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \\ &= \int_{A1C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{l} - \int_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{A1C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = C_\Gamma \end{aligned}$$

или

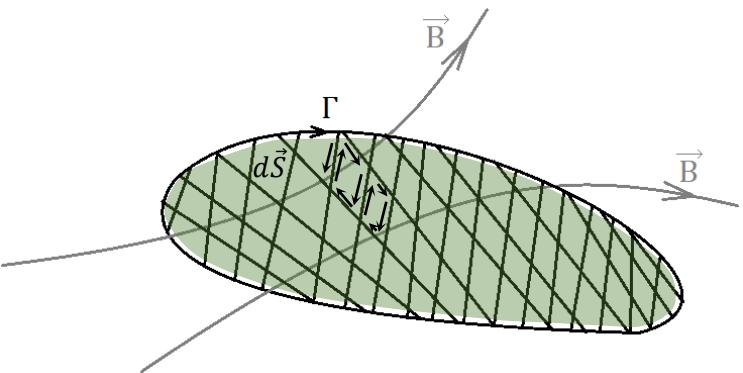
$$\oint_{A1CA} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{AC2A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{A1C2A} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

Аддитивность доказана.

Теперь рассмотрим произвольный замкнутый контур  $\Gamma$  в пространстве, где действует магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ .

Используя большое число перемычек, разобьём его на малые элементы площади  $dS$ .

С одной стороны, циркуляцией по контуру  $\Gamma$  вектора магнитной индукции является  $\vec{B}$  интеграл:



$$C_\Gamma = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l},$$

с другой стороны, в силу свойства аддитивности, и при наличии огромного числа маленьких контуров, составляющих большой:

$$C_\Gamma = \int_{S_\Gamma} dC$$

— мы заменили знак суммы на знак определённого интеграла, как делали всегда, когда складывали большое количество малых величин. Этот интеграл берётся по площади, ограниченной контуром  $\Gamma$ . Складывая циркуляции по маленьким контурам, мы тем самым складываем площади, которые они ограничивают.

В предыдущей части этого параграфа, при выводе дифференциальной формы теоремы о циркуляции мы получили следующее выражение для циркуляции по малому контуру, находящемуся в магнитном поле:  $dC = \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . Поэтому справедливо:

$$C_\Gamma = \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Приравнивая определение циркуляции и полученное для нее выражение, получаем

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

— это и есть формула Стокса. При ее выводе мы не использовали каких-либо свойств магнитного поля, поэтому эта формула, также, как и формула Гаусса — Остроградского, справедлива для любого векторного поля.

Используя её, можно переходить от интеграла по замкнутому контуру, к интегралу, вычисляемому по поверхности, опирающейся на него.

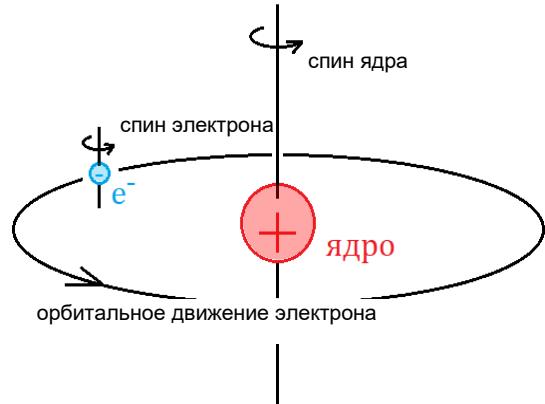
## Магнитное поле в веществе

В помещенном в электрическое поле диэлектрике происходит перераспределение зарядов (поляризация). Поле этих поляризационных зарядов складывается с внешним полем и изменяет его. Аналогичная ситуация имеет место и в случае магнитного поля: если в магнитное поле, внести то или иное вещество, то поле изменится.

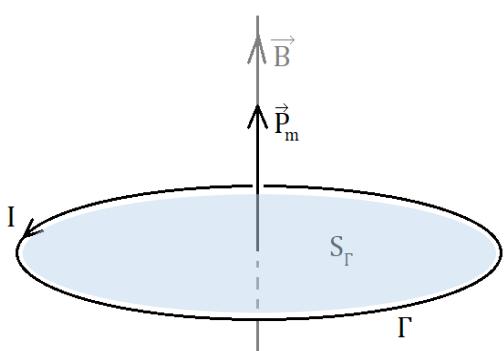
### §24. Магнитное поле в веществе

Рассуждая о магнитном поле в вакууме, мы представляли, что оно возбуждается движущимися заряженными частицами или их большими совокупностями – электрическими токами, текущими по проводам. Кроме того, мы установили, что силовые линии магнитного поля – замкнутые линии.

В веществе же магнитное поле возбуждается не только электрическими токами и отдельно движущимися заряженными частицами, но и движением заряженных частиц внутри самих атомов и молекул. Чтобы прояснить это, вспомним полуклассическую теорию Бора, основанную на планетарной модели атома Резерфорда. Согласно ей электроны вращаются вокруг ядер по замкнутым орбитам. Кроме того, они обладают собственным моментом импульса (см. §14 раздел «Механика»), называемым *спином*. Название это возникло из предположения, что электроны совершают вращения вокруг своих осей подобно вращениям планет. Довольно скоро выяснилось, что это не соответствует действительности, однако название осталось.



Спином обладают не только электроны, но и атомные ядра. Орбитальное вращение заряженных частиц аналогично току, текущему по замкнутому контуру, и возбуждает, как и он магнитное поле. Оказалось, что помимо собственного механического момента (спина), элементарные частицы обладают связанным с ним магнитным дипольным моментом, также



участвующим в создании магнитного поля. По современным представлениям, на которые опирается квантовая механика, понятия траектории движения частицы не существует, как не существуют и понятия о движении электронов по классическим орбитам и вращении их относительно собственных осей. Однако

для теории магнетизма существенное значение имеет не наглядность картины движения частиц, а механический и магнитный моменты, описывающие поведение частиц. Таким образом, по современным представлениям, магнетизм вещества обусловлен тремя причинами:

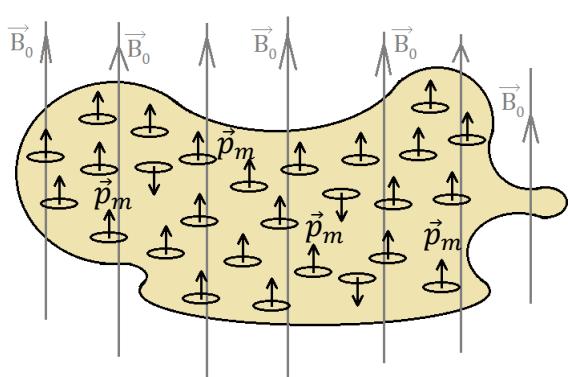
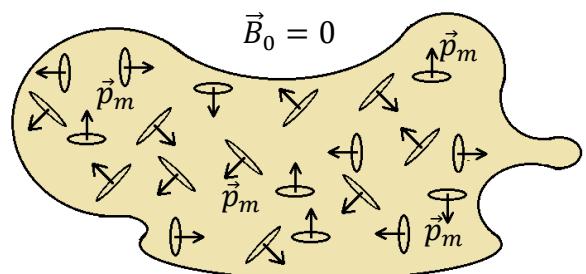
- орбитальным движением электронов вокруг атомных ядер;
- спиновым магнитным моментом электронов;
- магнитным моментом атомных ядер.

Тяжёлые атомные ядра движутся значительно медленнее лёгких электронов, магнитные моменты атомных ядер в тысячи раз меньше орбитальных и спиновых магнитных моментов электронов. Кроме того, орбитальные и спиновые магнитные моменты электронов могут быть направлены в противоположные стороны и компенсировать друг друга.

Итак, движению заряженных частиц внутри самих атомов и молекул соответствует некоторый магнитный момент, а каждому магнитному моменту можно поставить в соответствие элементарный круговой ток – ток, текущий по малому замкнутому контуру.

Как было установлено в §20, для описания поведения контура с током в магнитном поле используется своё понятие магнитного момента:  $\vec{p}_m = I \cdot \vec{S}_r$ . Эту же характеристику будем в теперь применять для описания механизма поведения вещества в магнитном поле. И не забудем, что на контур с током в магнитном поле действует механический момент:  $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}_0]$ , стремящийся повернуть контур так, чтобы его магнитный момент стал параллелен полю.

Остановимся подробнее на *механизме намагничивания вещества*. Сначала рассмотрим ситуацию, когда внешнее магнитное поле отсутствует:  $\vec{B}_0 = 0$ . Предположим, что атомы вещества имеют отличные от нуля магнитные моменты, которые вследствие беспорядочного теплового движения атомов, в отсутствии внешнего магнитного поля ориентированы хаотически. Можно утверждать, что суммарный магнитный момент всех атомов в этом случае



равен нулю:  $\sum \vec{p}_{m,i} = 0$ . Магнитные поля, возбуждаемые атомами в окружающем пространстве, компенсируют друг друга, и собственного поля вещество не создает.

При наложении внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0 \neq 0$  атомы (точнее их магнитные моменты) полностью или частично ориентируются в

направлении этого поля:  $\vec{p}_m \parallel \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{M} = 0$ , и тогда компенсация нарушается:  $\sum \vec{p}_{m_i} \neq 0$ .

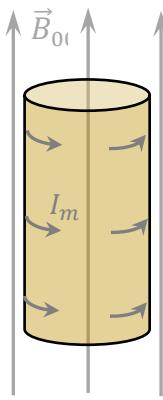
Вещество начинает создавать в пространстве собственное магнитное поле  $\vec{B}'$ , которое вместе с исходным теперь действует в пространстве:  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ . В таких случаях говорят, что вещество *намагничен*. *Вещества, способные намагничиваться*, называются *магнетиками*.

Большинство веществ при внесении в магнитное поле намагничиваются слабо. У некоторых из них суммарный магнитный момент направлен в сторону противоположную внешнему магнитному полю:  $\sum \vec{p}_{m_i} \downarrow \vec{B}_0$ , и возникающее собственное магнитное поле такого магнетика тоже направлено в сторону противоположную внешнему полю  $\vec{B}' \downarrow \vec{B}_0$ . Как результат такие вещества – *диамагнетики* немного ослабляют внешнее поле:  $|\vec{B}| < |\vec{B}_0|$ . У других веществ суммарный магнитный момент направлен в ту же сторону, что и внешнее магнитное поле:  $\sum \vec{p}_{m_i} \uparrow \vec{B}_0$ , и как следствие, их собственное поле сонаправлено с внешним:  $\vec{B}' \uparrow \vec{B}_0$ . Такие вещества – *парамагнетики* немногого усиливают внешнее магнитное поле:  $|\vec{B}| > |\vec{B}_0|$ . Более редко встречаются вещества способные усиливать поле  $\vec{B}_0$  очень сильно – *ферромагнетики*: железо, никель, кобальт и множество их сплавов, например.

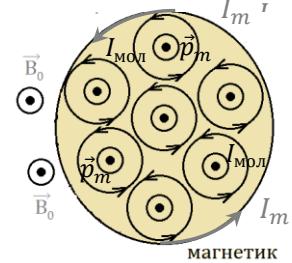
Магнитное поле, как и электрическое поле, можно разделить на микроскопическое и макроскопическое. Микроскопическое поле – поле, возбуждаемое частицами внутри и вблизи атомов и молекул вещества. Оно резко меняется на расстояниях атомного масштаба. Макроскопическое поле получается из микроскопического усреднением по физически бесконечно малым объёмам пространства. Индукция макроскопического поля обозначается  $\vec{B}$ . Как уже было сказано выше, орбитальные и спиновые магнитные моменты электронов и атомных ядер эквивалентны токам, текущим по замкнутому контуру. Такие токи получили общее название *молекулярных токов*. Молекулярные токи, складываясь, образуют макроскопические токи, которые и определяют макроскопическое поле  $\vec{B}$  магнетиков. Эти токи в теории магнетизма получили название *токов намагничивания*. Как и при изучении электрического поля в веществе, когда мы начали разделять заряды на *индуцированные* – заряды, появляющиеся в веществе, при внесении его в электрическое поле, и *сторонние*, так и в ситуации с магнитным полем мы теперь будем разделять токи на *токи намагничивания* и *токи проводимости* – токи, текущие по проводникам и связанные с перемещением в них свободных зарядов – носителей тока.

В некотором роде можно говорить об аналогии в поведении однородного изотропного диэлектрика во внешнем электрическом поле и однородного магнетика в магнитном поле. В таком намагниченном магнетике молекулярные токи текут согласованно.

Рассмотрим однородный магнетик, имеющий форму прямого цилиндра круглого сечения.



Внешнее магнитное поле направлено вверх вдоль оси симметрии системы. Молекулярные токи соседних молекул в местах их соприкосновения текут в противоположных направлениях и макроскопически взаимно компенсируют друг друга. Некомпенсированными остаются только молекулярные токи, выходящие на наружную боковую поверхность цилиндра. Эти токи складываются в макроскопический поверхностный ток — ток намагничивания  $I_m$ , циркулирующий по боковой поверхности цилиндра. Значит, также как в случае с однородной поляризацией, в объёме магнетика ток намагничивания не течёт, только по поверхности. В случае неоднородного намагничивания ток намагничивания  $I_m$  возникает и в объёме магнетика.



Величиной, характеризующей намагченность магнетика, является вектор  $\vec{J}$  — *вектор намагничивания* (или просто *намагченность*), определяют через суммарный магнитный момент единицы объёма магнетика:

$$\vec{J} = \frac{d\vec{p}_m}{dV}.$$

В случае однородного магнетика и однородного магнитного поля:

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_{m_i}}{V} = \frac{N \cdot \langle \vec{p}_m \rangle}{V} = n \cdot \langle \vec{p}_m \rangle,$$

$\langle \vec{p}_m \rangle$  — средний магнитный момент молекулы.

Единицей вектора намагничивания (намагченности)  $\vec{J}$  является

$$[J] = \frac{[p_{m_i}]}{[V]} = \frac{[I] \cdot [S_\Gamma]}{[V]} = \frac{A \cdot m^2}{m^3} = \frac{A}{m}$$

— Ампер на метр.

Для стационарного случая *циркуляция вектора намагничивания по произвольному контуру  $\Gamma$ , выбранному в магнетике, равна алгебраической сумме токов намагничивания, охватываемых этим контуром* (интегральная форма):

$$\oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{l} = I_m.$$

Применив формулу Стокса (§23), можем переписать это соотношение, связывающее между собой две характеристики, описывающие намагничивание магнетиков, в дифференциальную (локальную) форму:

$$\oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{l} = \int_{S_\Gamma} \text{rot} \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Правую часть можно переписать, выразив ток намагничивания, охватываемый этим контуром, через его плотность:

$$I_m = \int_{S_\Gamma} \vec{J}_m \cdot d\vec{S}.$$

Таким образом,

$$\int_{S_\Gamma} \text{rot} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_\Gamma} \vec{J}_m \cdot d\vec{S}$$

или, поскольку полученное выражение справедливо для любых контуров и любых поверхностей, опирающихся на них,

$$\text{rot} \vec{J} = \vec{J}_m$$

— плотность тока намагничивания равна ротору вектора намагничивания в той же точке пространства.

Свойства поля вектора  $\vec{J}$ , которые мы выразили интегральным и дифференциальным выражениями, не означают, что поле вектора намагничивания определяется только токами намагничивания. Поле вектора  $\vec{J}$  (существующее внутри магнетика) зависит от всех токов — как от тока намагничивания  $I_m$ , так и от тока проводимости  $I$ . В этом смысле вектор  $\vec{J}$  магнетика аналогичен вектору поляризации диэлектрика — вектору  $\vec{P}$ . Поле вектора  $\vec{P}$  тоже зависит от всех зарядов, как связанных (индуцированных), так и сторонних (см. §12). Токи намагничивания (или их плотности) определяют лишь циркуляцию (или ротор) вектора намагничивания.

## §25. Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе. Связь между векторами $\vec{J}$ , $\vec{B}$ и $\vec{H}$

Как было выяснено в предыдущем параграфе, в магнетиках, помещённых во внешнее магнитное поле, возникают токи намагничивания. Полное магнитное поле в такой ситуации становится суперпозицией исходного (внешнего) поля и собственного поля магнетика – поля токов намагничивания  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ .

Сначала остановимся на теореме Гаусса. Для магнитного поля в вакууме она выражает фундаментальный экспериментальный факт отсутствия в природе магнитных зарядов:

$$\oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = 0.$$

Хотя поле  $\vec{B}'$  в магнетиках порождается токами намагничивания, а не проводимости, его природа остается прежней: силовые линии являются замкнутыми, и поток вектора  $\vec{B}'$  через произвольную замкнутую поверхность, выбранную в магнетике всегда равен нулю:

$$\oint_S \vec{B}' \cdot d\vec{S} = 0.$$

Следовательно, можно утверждать, что поток полного магнитного поля  $\vec{B}$  в этом случае тоже будет равен нулю:

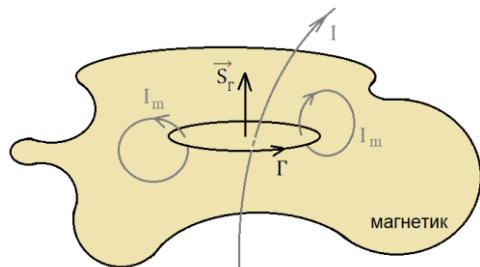
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S (\vec{B}_0 + \vec{B}') \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{B}' \cdot d\vec{S} = 0 + 0 = 0.$$

Теперь теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  в веществе. Поскольку в магнетиках, если они помещены в магнитное поле, возникают токи намагничивания, то циркуляция вектора  $\vec{B}$  будет теперь определяться не только токами проводимости  $I$ , но и токами намагничивания  $I_m$ , а именно:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot (I + I_m),$$

где  $I$  и  $I_m$  – токи проводимости и намагничивания, охватываемые контуром  $\Gamma$ .

Появление токов намагничивания  $I_m$  усложняет дело, и теорема о циркуляции в таком виде оказывается малополезной для нахождения поля  $\vec{B}$  в магнетике даже при наличии симметрии у токов проводимости. В этом виде неизвестное поле  $\vec{B}$  выражается через ток намагничивания  $I_m$ , распределение которого в магнетике в свою очередь определяется неизвестным полем  $\vec{B}$ . С подобной проблемой мы уже встречались, когда изучали электрическое поле в диэлектриках. Тогда нас спасло введение вспомогательного вектора – вектора  $\vec{D}$  (см. §13).



Поступим аналогичным образом, используя выражение для циркуляции вектора намагничивания  $\vec{J}$ , связывающее его с токами намагничивания (см. §24):

$$\oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{l} = I_m.$$

Предполагая, что циркуляция векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{J}$  берётся по одному и тому же контуру  $\Gamma$ , разделим левую и правую части теоремы о циркуляции на магнитную постоянную:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = I + I_m,$$

и заменим ток намагничивания по формуле, приведённой выше:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = I + \oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{l}.$$

Собирая циркуляции по контуру  $\Gamma$  в левой части выражения, получим:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} - \oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{l} = I \Rightarrow \oint_{\Gamma} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) \cdot d\vec{l} = I.$$

Величину, стоящую под интегралом в скобках, обозначают буквой  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

— вектор напряжённости магнитного поля или просто вспомогательный вектор  $\vec{H}$ .

Из определения вектора  $\vec{H}$  следует, что его размерность такая же, как и у вектора  $\vec{J}$ :

$$[H] = [J] = \frac{A}{M}$$

Следовательно, вместо выражения

$$\oint_{\Gamma} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) \cdot d\vec{l} = I$$

можем теперь писать

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

— циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром — теорема о циркуляции магнитного поля в веществе (интегральная форма).

Правило знаков для расчёта алгебраической суммы токов проводимости то же, что и в случае вектора  $\vec{B}$  (см. §21).

Вектор  $\vec{H}$  представляет собой разность совершенно разных величин  $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$  и  $\vec{J}$ , поэтому он действительно вспомогательный вектор, не имеющий какого-нибудь глубокого физического смысла. Однако выражение для его циркуляции, которое мы получили, оправдывает введение

этого вектора, значительно упрощая изучение поля при наличии в пространстве магнетика. Вектор  $\vec{H}$  играет в науке о магнетизме, как это уже было показано, такую же роль, что и вектор  $\vec{D}$  в науке о диэлектриках. *Основным вектором* является вектор  $\vec{B}$ . Он *силовая характеристика* магнитного поля, и по аналогии с теорией электричества, его следовало бы называть напряжённостью магнитного поля в веществе. Однако по историческим причинам *напряжённостью магнитного поля в веществе* называют вектор  $\vec{H}$ , а вектор  $\vec{B}$  получил неудачное название *магнитной индукции*. Такая нерациональная терминология сложилась потому, что исторически учение о магнетизме развивалось по аналогии с электростатикой. Источниками магнитного поля считались магнитные заряды, а их, как было установлено позднее, в действительности не существует. Но, терминология осталась прежней 😞.

Чтобы расширить возможности применения теоремы о циркуляции магнитного поля в веществе для исследования и расчёта магнитных полей в магнетиках придадим ей другую форму – дифференциальную. Дифференциальная (локальная) форма теоремы о циркуляции получается, если применить к полученной интегральной форме формулу Стокса (см. §23, 24).

$$\left. \begin{array}{l} \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_{\Gamma}} \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S}, \\ I = \int_{S_{\Gamma}} \vec{j} \cdot d\vec{S}. \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{S_{\Gamma}} \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\Gamma}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j}}$$

– дифференциальная (локальная) форма теоремы о циркуляции для магнетиков.

### Связь между векторами $\vec{j}$ , $\vec{B}$ и $\vec{H}$

Как уже говорилось в §24 вещества могут быть разделены на слабые магнетики (ди-, парамагнетики), присутствие в пространстве которых изменяет исходное магнитное поле незначительно, и сильные магнетики (ферромагнетики), присутствие в пространстве которых значительно изменяет магнитное поле.

У слабых магнетиков зависимость между векторами  $\vec{j}$  и  $\vec{H}$  линейная и для изотропных сред может быть записана в виде:

$$\vec{j} = \chi \cdot \vec{H},$$

где  $\chi$  – магнитная восприимчивость вещества, безразмерная для каждого магнетика (как мы выяснили выше единица измерения у векторов  $\vec{j}$  и  $\vec{H}$  одна и та же – А/м).

В отличии от диэлектрической восприимчивости  $\epsilon$  (см. §13), которая всегда положительна, магнитная восприимчивость  $\chi$  бывает как положительной, так и отрицательной. Соответственно слабые магнетики, для которых справедлива линейная зависимость  $\vec{j}$  от  $\vec{H}$ ,

подразделяют на *диамагнетики* ( $\chi < 0$ ) и *парамагнетики* ( $\chi > 0$ ). Очевидно, что у диамагнетиков  $\vec{J} \uparrow\downarrow \vec{H}$ , а у парамагнетиков  $\vec{J} \uparrow\uparrow \vec{H}$ . Т.е. диамагнетики намагничиваются противоположно магнитному полю, а парамагнетики – вдоль поля.

Подставим линейную зависимость  $\vec{J}$  от  $\vec{H}$  в выражение, определяющее вспомогательный вектор:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}.$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \chi \cdot \vec{H}) = \mu_0 \cdot (1 + \chi) \cdot \vec{H} \Rightarrow$$

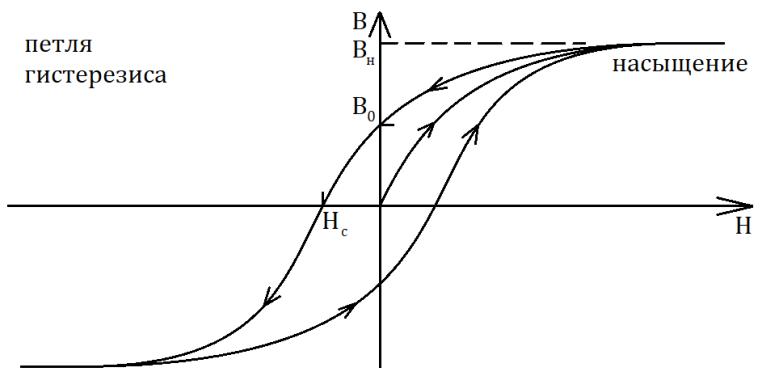
$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H}},$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость среды,  $\mu = 1 + \chi$ . Так же, как и  $\chi$  безразмерная величина. У парамагнетиков  $\mu > 1$ , у диамагнетиков  $\mu < 1$ . Причём как у тех, так и у других  $\mu$  отличается от единицы весьма мало. Поэтому магнитные свойства диа- и парамагнетиков выражены очень слабо:

диамагнетики:  $\mu_{\text{H}_2(\text{газ})} = 0,999937$ ,  $\mu_{\text{вода}} = 0,999987$ ,  
 $\mu_{\text{серебро}} = 0,999981$ ,  $\mu_{\text{золото}} = 0,999963$ ;

парамагнетики:  $\mu_{\text{воздух(газ)}} = 1,000038$ ,  $\mu_{\text{алюминий}} = 1,000023$ ,  $\mu_{\text{платина}} = 1,000253$ .

У веществ присутствие в пространстве которых сильно изменяет исходное магнитное поле – ферромагнетиков, зависимость  $\vec{J}$  (а также  $\vec{B}$ ) от  $\vec{H}$  имеет весьма сложный характер: она не линейная и неоднозначная: его намагченность зависит от предыстории. Такое явление носит название *гистерезис*, а характерный ее график – петля гистерезиса. Магнитная проницаемость ферромагнетиков является функцией величины вектора  $\vec{H}$ , и при максимальных значениях может быть очень значительной:



$$\mu_{\text{max чистое железо}} = 5000, \quad \mu_{\text{сплав супермаллой}} = 800000.$$

Как уже не раз упоминалось в этом параграфе, при наличии в пространстве магнетика результирующее магнитное поле оказывается суперпозицией внешнего магнитного поля и поля токов намагничивания:  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ . Нахождение этого поля представляет весьма сложную задачу, т.к. заранее конфигурация токов намагничивания не известна. Распределение этих токов зависит от природы и конфигурации самого магнетика, а также от конфигурации внешнего поля  $\vec{B}_0$  – поля токов проводимости. А поскольку мы не знаем конфигурации токов

намагничивания, то и не можем найти поле  $\vec{B}'$  (точнее, для его нахождения необходимо решать систему дифференциальных уравнений в частных производных). Исключения составляют случаи, когда все пространство, где имеется поле  $\vec{B}$ , заполнено однородным изотропным магнетиком. В этом случае магнитное поле увеличивается в  $\mu$  раз.

Рассмотрим пример: магнитное поле бесконечного длинного соленоида, заполненного однородным изотропным магнетиком. Аналогичный пример без магнетика был изучен в §22.

Дано:

$R$  – радиус основания соленоида;

$I$  – сила тока в проводе;

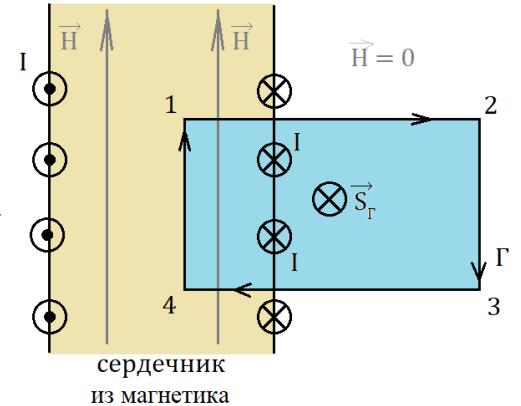
$n$  – число витков провода на единицу длины соленоида;

$\mu$  – магнитная проницаемость магнетика ( $\mu > 1$ )

Найти:

$$B(r), \quad 0 \leq r < R \text{ (внутри)}$$

$$B(r), \quad r > R \quad (\text{снаружи})$$



В силу симметрии задачи и однородности и изотропности

магнетика вектор  $\vec{H}$  оказывается таким же, как и в вакууме.

Он однороден внутри бесконечного длинного соленоида и равен нулю вне его. Для нахождения вектора  $\vec{H}$  можно воспользоваться теоремой о циркуляции, выбрав в качестве замкнутого контура прямоугольник:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I.$$

Шаг 1: 12341 – такой прямоугольник, его участок  $4 \rightarrow 1$  находится внутри соленоида, а участок  $2 \rightarrow 3$  – вне соленоида. Направление обхода контура берём по часовой стрелке.

Шаг 2: циркуляция по выбранному контуру 12341

$$\begin{aligned} C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \oint_{12341} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{1 \rightarrow 2} \underbrace{\vec{H} \cdot d\vec{l}}_{=0, \vec{B} \perp d\vec{l}} + \int_{2 \rightarrow 3} \underbrace{\vec{H} \cdot d\vec{l}}_{=0} + \int_{3 \rightarrow 4} \underbrace{\vec{H} \cdot d\vec{l}}_{=0, \vec{B} \perp d\vec{l}} + \int_{4 \rightarrow 1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{4 \rightarrow 1} H_{41} \cdot dl = H \cdot \int_{4 \rightarrow 1} dl = H \cdot l. \end{aligned}$$

Шаг 3:

$$I_{\Gamma} = N \cdot I = n \cdot l \cdot I,$$

где  $N$  – число витков провода обмотки соленоида, пересекающих поверхность, ограниченную нашим прямоугольным контуром,  $S_{\Gamma}$ . Его можно найти, используя известное число витков на единицу длины соленоида  $n$  и длину контура  $l$ . При нашем выборе обхода прямоугольника 12341 этот ток – положительный.

Шаг 4:

$$H \cdot l = n \cdot l \cdot I \quad \Rightarrow \quad H = n \cdot I.$$

Величина магнитной индукции поля в магнетике сердечника соленоида равна

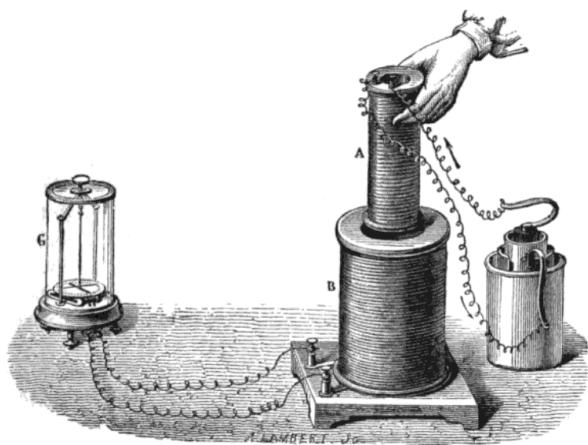
$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot H = \mu \cdot \mu_0 \cdot n \cdot I = \mu \cdot B_0$$

в  $\mu$  раз больше, чем мы получили в аналогичный пример без магнетика.

## §26. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца

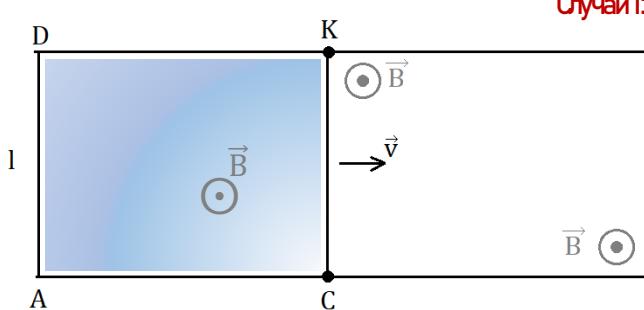
В 1820 году Ханс Кристиан Эрстед показал (см. §17), что протекающий по цепи электрический ток вызывает отклонение магнитной стрелки. Если электрический ток порождает магнетизм, то с магнетизмом должно быть связано и появление электрического тока. Эта мысль захватила английского ученого Майкла Фарадея. «Превратить магнетизм в электричество», – записал он в 1822 году в своем дневнике. Многие годы учёный настойчиво ставил различные опыты, но безуспешно, и только 29 августа 1831 года наступил триумф: явление электромагнитной индукции было открыто.

Открытие Фарадея – одно из фундаментальных открытий в электродинамике, заложившее основу для современной теории электромагнитного поля. Оно заключается в том, что *в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока (т.е. потока вектора  $\vec{B}$ ), охваченного этим контуром, возникает электрический ток – его назвали индукционный.*



При движении соленоида (A) внутри проволочной катушки (B) в ней возникает ток – протекает электрический заряд, фиксируемый гальванометром (G).

*Arthur William Poyser (1892) Magnetism and Electricity: A Manual for Students in Advanced Classes*



### Случай 1:

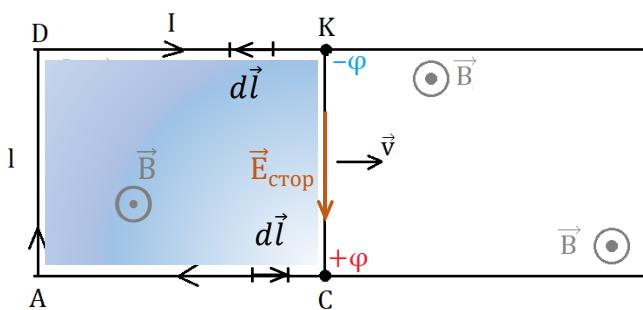
Рассмотрим сначала простейший случай, когда два параллельных провода  $AC$  и  $DK$ , помещены в постоянное однородное магнитное поле  $\vec{B}$ , перпендикулярное к плоскости рисунка и направленное из него на нас. Слева провода  $AC$  и  $DK$  замкнуты, справа – разомкнуты. Вдоль проводов может свободно скользить проводящий мостик  $CK$ . Ширина мостика, как и расстояние между проводами –  $l$ . Когда мостик  $CK$  движется в право со скоростью  $\vec{v}$ , вместе с ним движутся его электроны и положительные ионы. На каждый движущийся заряд  $e$  в магнитном поле действует составляющая силы Лоренца  $\vec{F} = e \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$ . На положительный ион она будет действовать вниз, на отрицательный электрон – на верх. В результате электроны начнут перемещаться по мостику вверх. В точке  $K$  появится нескомпенсированный отрицательный заряд, в точке  $C$  – положительный. Между концами мостика возникнет разность потенциалов  $\varphi_+ - \varphi_-$ , т.е. по нему потечёт электрический ток,

направленный вниз. Это и есть индукционный ток. Перераспределившиеся заряды создадут электрической поле, которое приведёт к появлению тока и в остальных участках контура  $ACDK$ .

Можно сказать, что у нас получился контур с током, на одном из участков которого действует сторонняя сила (см. §16). Роль этой сторонней силы в нашем опыте играет магнитная составляющая силы Лоренца  $\vec{F}_{\text{стор}} = \vec{F} = e \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$ . При этом напряжённость электрического поля сторонних сил равна  $\vec{E}_{\text{стор}} = \frac{\vec{F}_{\text{стор}}}{e} = [\vec{v}, \vec{B}]$ . Электродвижущая сила, создаваемая этим полем, называется *электродвижущей силой индукции* и обозначается  $\mathcal{E}_i$ .

Вычислим её. По определению из §16:

$$\mathcal{E}_i = \oint_{CADKC} \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = \int_{KC} \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}.$$



Обход контура, согласованный с направлением вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  по правилу «правого винта», осуществляется против часовой стрелке. Напряжённость поля сторонних сил, действующих только на участке  $KC$ , направлена от «минуса» в точке  $K$  к «плюсу» в точке  $C$ , т.е. вниз и направлена в сторону противоположную обходу контура  $CADKC$ . Величина этого поля во всех точках мостика  $KC$  одинакова, её можно вынести из-под знака интеграла:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \int_{KC} \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = - \int_{KC} E_{\text{стор}} \cdot dl = -E_{\text{стор}} \cdot \int_{KC} dl = -E_{\text{стор}} \cdot l = \\ &= -|[\vec{v}, \vec{B}]| \cdot l = -|\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \sin(\vec{v} \cdot \vec{B}) \cdot l = -v \cdot B \cdot l. \end{aligned}$$

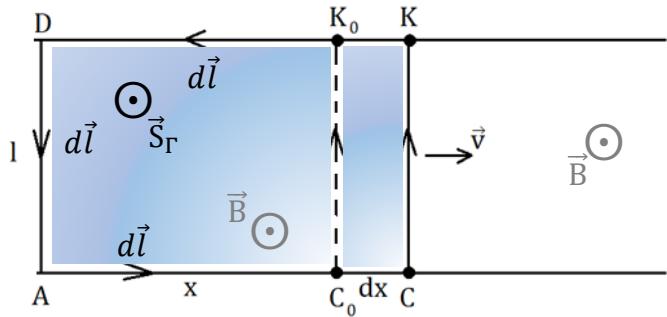
Со временем мостик  $KC$  перемещается вправо, что приводит к увеличению площади, охватываемой контуром  $CADKC$ . Легко показать, что произведение  $(v \cdot l)$  есть приращение площади внутри нашего контура:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v \cdot l = l \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d(l \cdot x)}{dt} = \frac{dS_\Gamma}{dt}$$

*CADKC* – прямоугольник, неизменной ширины  $l$ , длина которого  $x$  увеличивается со скоростью  $v$ .

$$\mathcal{E}_i = -v \cdot l \cdot B = -\frac{dS_\Gamma}{dt} \cdot B = -\frac{d(S_\Gamma \cdot B)}{dt},$$

т.к. нашем примере  $\vec{B}$  – постоянное



однородное поле, его можно внести под знак производной. Кроме того, направление вектора магнитной индукции и вектора площади контура совпадают:  $\vec{S}_\Gamma \uparrow \vec{B}$ , что означает следующее  $S_\Gamma \cdot B = \vec{S}_\Gamma \cdot \vec{B}$ . Последние произведение есть ни что иное как поток вектора магнитной индукции через поверхность, ограниченную контуром:

$$\Phi_S \stackrel{\text{def}}{=} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \int_S d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S}_\Gamma$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d(\vec{S}_\Gamma \cdot \vec{B})}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Таким образом, в нашем примере величина электродвижущей силы равна скорости убывания магнитного потока, пронизывающего контур *CADKC*:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (*)$$

Полученный результат будет справедлив и в том случае, когда однородное магнитное поле  $\vec{B}$  направлено под любым углом к плоскости контура *CADKC*. Действительно, представим вектор  $\vec{B}$  как сумму двух векторов: вектора  $\vec{B}_{\parallel}$ , лежащего в плоскости контура, и вектора  $\vec{B}_{\perp}$ , перпендикулярного ей. Запишем магнитную составляющую силы Лоренца:

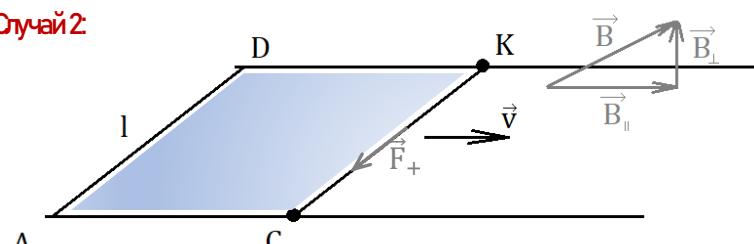
$$\vec{F} = e \cdot [\vec{v}, \vec{B}] = e \cdot [\vec{v}, (\vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp})] = e \cdot [\vec{v}, \vec{B}_{\parallel}] + e \cdot [\vec{v}, \vec{B}_{\perp}].$$

Первое слагаемое из этой суммы  $[\vec{v}, \vec{B}_{\parallel}]$  перпендикулярно плоскости контура *CADKC* и приводит к перераспределению зарядов поперёк мостика *KC* или вовсе равно нулю, если векторы  $\vec{v} \parallel \vec{B}_{\parallel}$ , как показано на

нашем рисунке. Величина сторонней силы зависит только от поля составляющей перпендикулярной плоскости контура:

контура:  $\vec{F}_{\text{стор}} = \vec{F}_+ = e \cdot [\vec{v}, \vec{B}_{\perp}]$ . Следовательно, возникающие в мостике разность потенциалов и индукционный ток связаны только с этой составляющей, а потому величина  $\mathcal{E}_i$  определяется прежней формулой (\*).

Случай 2:

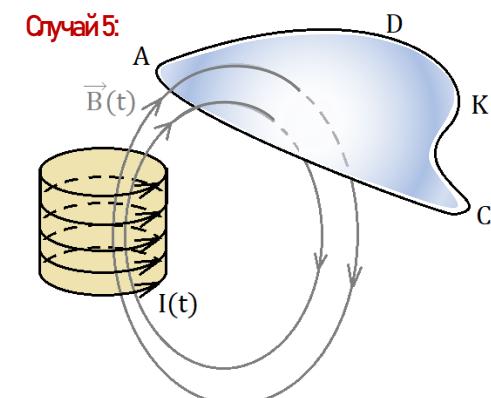


Немного сложнее, но тоже возможно показать, что полученное выражение (\*) для ЭДС индукции справедливо в случае любого замкнутого провода, движущегося произвольным образом в постоянном неоднородном магнитном поле. Для этого надо разбить провод на бесконечно малые участки и рассмотреть движение каждого из них. При бесконечно малом перемещении каждого из таких участков магнитное поле, в котором он движется

можно считать однородным. Поэтому

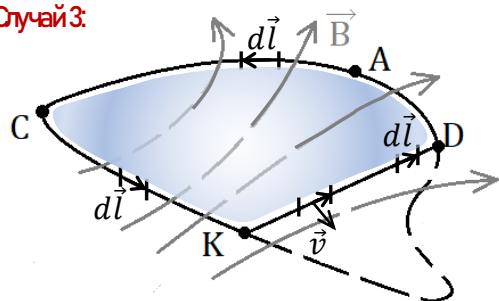
электродвижущая сила, действующая между концами участка, может быть представлена выражением (\*). Путём суммирования таких выражений получится формула того же вида, в которой, однако, под  $\Sigma_i$  следует понимать полную электродвижущую силу, действующую в замкнутом проводе, а под  $\frac{d\Phi}{dt}$  — скорость изменения магнитного потока через любую поверхность, натянутую на контур провода.

Индукционные токи могут возникать и в неподвижных проводниках. Возьмём замкнутый провод и постоянный магнит (или катушку с постоянным током). При движении провода возникает индукционный ток. Что произойдёт, если, оставляя провод неподвижным, двигать катушку? Движение и покой — понятия относительные. Всё, как мы помним, зависит от выбора тела отсчёта (см. §1 «Механика»). Появление индукционного тока в проводе должно зависеть только от *относительной движения провода и катушки*. Следовательно, что при движении катушки будет возбуждаться такой же индукционный ток, что и при соответствующем движении провода. Зависимость (\*) выполняется и в этом случае.



В описанных выше примерах магнитный поток через площадь контура CADKC изменялся благодаря движениям контура или магнита (катушки) рядом с ним. Но такое же изменение потока можно получить и ничего не двигая в пространстве. Надо только поместить наш контур в переменное магнитное поле. Последнее можно создать, изменяя ток, текущий по проводу, намотанному на катушку. Опыты подтверждают, что в контуре CADKC при этом появится электродвижущая сила  $\Sigma_i$  и индукционный ток.

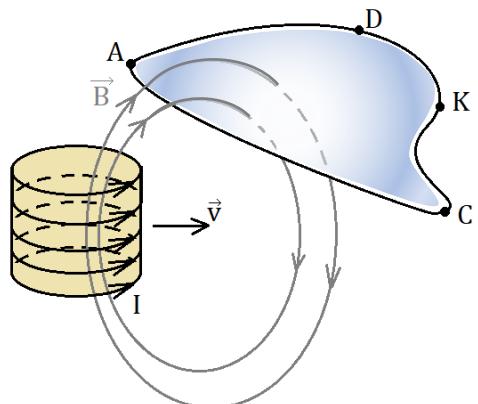
### Случай 3:



индуциции справедливо в случае любого замкнутого провода, движущегося произвольным образом в постоянном неоднородном магнитном поле. Для этого надо разбить провод на бесконечно малые участки и рассмотреть движение каждого из них. При бесконечно малом перемещении каждого из таких участков магнитное поле, в котором он движется

можно считать однородным. Поэтому

### Случай 4:



В описанных выше примерах магнитный поток через площадь контура CADKC изменялся благодаря движениям контура или магнита (катушки) рядом с ним. Но такое же изменение потока можно получить и ничего не двигая в пространстве. Надо только поместить наш контур в переменное магнитное поле. Последнее можно создать, изменяя ток, текущий по проводу, намотанному на катушку. Опыты подтверждают, что в контуре CADKC при этом появится электродвижущая сила  $\Sigma_i$  и индукционный ток.

Таким образом, для возбуждения индукционного тока существенно изменение магнитного потока через контур проводника, а не способ каким это изменение достигается. При изменении магнитного потока, охватываемого замкнутым проводящим контуром, в последнем возникает ЭДС индукции, определяемая формулой:

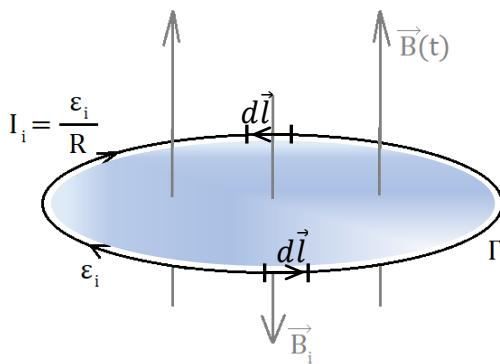
$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

— закон электромагнитной индукции.

Формула закон электромагнитной индукции определяет не только величину, но и направление ЭДС и индукционного тока. Рассмотрим в магнитном поле замкнутый проволочный виток, положительное направление обхода которого составляет с направлением поля правовинтовую систему. Предположим, что магнитный поток  $\Phi$  возрастает, например за счёт увеличения магнитной индукции поля. Тогда, согласно закону электромагнитной индукции, величина  $\mathcal{E}_i$  будет отрицательна:

$$\Phi \nearrow \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} > 0 \Rightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} < 0.$$

Индукционный ток в витке потечёт в отрицательном направлении. Такой ток, ослабляя магнитное поле, будет препятствовать, возрастанию магнитного потока. Можно говорить, что

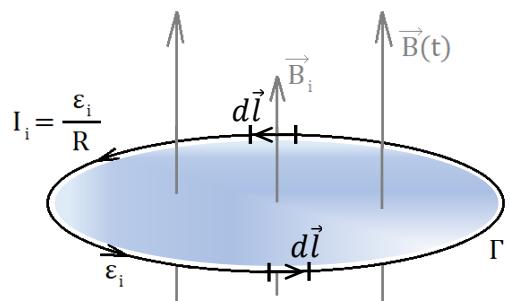
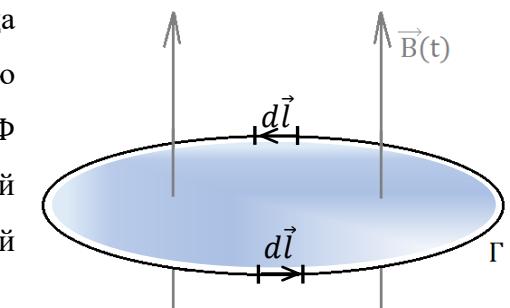


в нашем примере с возрастающим магнитным полем  $\vec{B} \nearrow$ , индукционный ток, создаёт дополнительное магнитное поле  $\vec{B}_i$ . Это поле, направление которого связано с направлением  $I_i$  по правилу «правого винта», будет смотреть в сторону противоположную первоначальному полю  $\vec{B}$ , тем самым уменьшая результирующее магнитное поле.

Пусть теперь магнитный поток  $\Phi$  убывает. Тогда величина  $\mathcal{E}_i$  станет положительной, а индукционный ток в витке потечёт в положительном направлении и будет препятствовать убыванию магнитного поля и магнитного потока:

$$\Phi \swarrow \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} < 0 \Rightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} > 0.$$

Т.е. магнитное поле  $\vec{B}_i$ , связанное с индукционным током  $I_i$ , в этом случае будет сонаправлено с исходным полем  $\vec{B}$ .



Таким образом, индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток. Это утверждение впервые было сформулировано в 1833 году Эмилием Христиановичем Ленцом – российским физиком немецкого происхождения, и носит его имя – правило Ленца.

## Максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции

Когда провод (проводник) движется в постоянном магнитном поле ([случаи 1 - 3](#)), индукционный ток, как мы показали, вызывается магнитной составляющей силы Лоренца:  $\vec{F} = e \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$ . Какая же сила возбуждает индукционный ток в неподвижном проводнике, находящемся в переменном магнитном поле ([случаи 4-5](#))? Ясно, что это не магнитная сила, т.к.  $\vec{v} = 0$ . Ответ был дан британским (шотландским) физиком Джеймсом Клерком Максвеллом. Согласно Максвеллу, *всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле*. Последнее и является причиной появления индукционного тока в проводнике. Циркуляция вектора напряженности  $\vec{E}$  этого поля по любому неподвижному контуру определяется выражением

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где  $\Phi$  – магнитный поток, пронизывающий контур поверхность, опирающуюся на контур  $\Gamma$ , – формулировка Максвелла закона электромагнитной индукции. Здесь для обозначения скорости изменения магнитного потока использован знак частной производной, а не полной, как написано выше. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть, контур  $\Gamma$  и опирающаяся на него поверхность неподвижны.

Между предложенными Максвеллом и Фарадеем трактовками явления электромагнитной индукции имеется существенное отличие. Согласно Фарадею, электромагнитная индукция заключается в *возбуждении электрического тока*. Для её наблюдения необходимо наличие замкнутого проводника (провода). Максвелл, напротив, считает, что сущность электромагнитной индукции – *возбуждение электрического поля*, а не тока. Электромагнитная индукция, по Максвеллу, может наблюдаться и тогда, когда в пространстве вообще нет никаких проводников. Появление индукционного тока в замкнутом проводнике, когда он внесён в переменное магнитное поле, – одно из проявлений электрического поля  $\vec{E}$ , возникшего вследствие изменения магнитного поля. Но проявление электрического поля  $\vec{E}$  может быть и другим. Например, поляризовать диэлектрик, вызывать пробой конденсатора, ускорять и тормозить заряженные частицы. Оно может вызвать электрический ток и в незамкнутом проводнике, например *вихревые токи Фуко*.

Максвелловская формулировка закона электромагнитной индукции более общая, чем формулировка Фарадея. Математическая форма закона электромагнитной индукции по Максвеллу может быть представлена следующим образом.

$$\Phi = \int_{S_\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

— магнитный поток через произвольную поверхность, опирающуюся на некоторый контур

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{S_\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

интегрирование по пространству и дифференцирование по времени, с точки зрения математики, независимые операции, их порядок можно менять местами. Окончательно,

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

— интегральная форма закона электромагнитной индукции (в формулировке Максвелла).

Используя формулу Стокса (см. §23 – 24), можно преобразовать полученное выражение в дифференциальную форму.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{S_\Gamma} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_{S_\Gamma} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

— *дифференциальная (локальная) форма закона электромагнитной индукции*, выражает локальную связь между электрическим и магнитным полями: изменение магнитного поля  $\vec{B}$  в данной точке определяет ротор электрического поля в этой же точке.

В электростатике, с которой мы начали знакомство с теорией электромагнетизма, источниками электрического поля являются *неподвижные заряды*. Для таких полей циркуляция по любому замкнутому контуру всегда обращается в нуль, т.е. электростатическое поле — потенциальное безвихревое поле:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{и} \quad \text{rot} \vec{E} = 0.$$

По этой причине одно только электростатическое поле не может обеспечить непрерывное течение тока вдоль замкнутых проводов (нужны сторонние силы (см. §16)).

Напротив, *электрическое поле, возбуждаемое магнитным полем*, меняющимся во времени, — *не потенциальное, вихревое поле* (см. §7):

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{и} \quad \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\star\star)$$

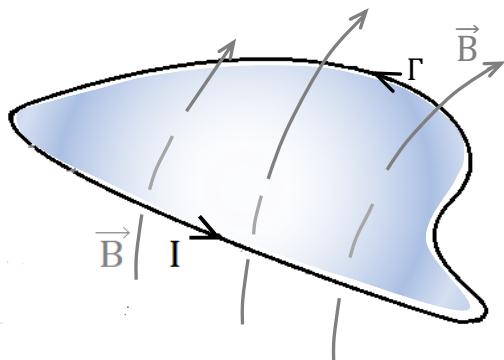
Благодаря этому вихревое электрическое поле без каких-либо сторонних сил может вызывать непрерывное течение тока (индукционного) по замкнутым проводам.

Таким образом, теперь мы можем утверждать, что *электрические поля*, действующие в пространстве, могут быть обусловлены наличием в этом пространстве электрических зарядов и *переменных магнитных полей*. Результирующее поле  $\vec{E}$  будет складываться из двух соответствующих составляющих. Уравнения (\*\*) выполняются как для общего случая, когда поле  $\vec{E}$  представляет собой сумму двух полей (потенциального и вихревого), так и для каждого по отдельности.

## §27. Индуктивность

Мы уже не раз говорили об аналогиях между величинами, описывающими электрические и магнитные явления (см. §24, 25). Введём в рассмотрение ещё одну такую величину.

Рассмотрим тонкий замкнутый провод (контура), по которому течёт постоянный ток  $I$ .



Пусть  $S_\Gamma$  – как и прежде, некоторая поверхность, опирающаяся на этот контур, вектор площади которой связан с направлением тока в проводе по правилу «правого» винта. Будем считать, что в пространстве рядом с ними нет ферромагнетиков. Опыты показывают, что между током в контуре  $I$  и магнитным потоком  $\Phi$  через поверхность, опирающуюся на контур, существует

линейная зависимость (прямая пропорциональность):  $\Phi \sim I$ . Если удвоить силу тока в проводе, то магнитный поток также удвоится. Такую связь между током и потоком можно объяснить, используя закон Био – Савара (см. §19):

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = I \cdot \underbrace{\oint_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}}_{\vec{b}(\vec{r})}, \text{ т. е. } B \sim I$$

и определение потока вектора:

$$\Phi = \int_{S_\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_\Gamma} I \cdot \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = I \cdot \int_{S_\Gamma} \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}, \text{ т. е. } \Phi \sim I.$$

А значит магнитный поток через контур можно написать, как

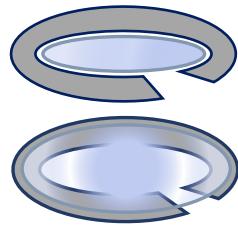
$$\Phi = L \cdot I,$$

где  $L$  – коэффициент, называемый *индуктивностью* контура. В соответствии с введённым направлением обхода контура получается, что  $\Phi$  и  $I$  всегда имеют одинаковые знаки, что означает следующее:  $L$  – величина существенно положительная.

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi}{I}.$$

Индуктивность  $L$  зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды. Если контур жёсткий и рядом с ним нет ферромагнетиков, индуктивность является постоянной величиной, не зависящей от силы тока в проводе  $I$ .

Данное нами определение для индуктивности содержит известный элемент неопределённости. Как бы тонок провод, из которого изготовлен контур, ни был, его сечение конечно. Что означает неоднозначность выбора поверхности, опирающейся на контур, через которую необходимо рассчитывать поток  $\Phi$ . Результат для  $L$  тоже оказывается неоднозначным.



Для тонкого провода эта неопределённость пренебрежимо мала и не имеет никакого значения. Для толстого провода эта неопределённость существенна, и результат расчёта может иметь большую ошибку. Это надо учитывать. Существует другой способ определения индуктивности  $L$ , полностью свободный от описанной проблемы. Он будет представлен в следующем параграфе.

Единица магнитного потока называется *вебер* (Вб):  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл}\cdot\text{м}^2$ .

Единицей индуктивности является *генри* (Гн). Согласно приведённому выше определению индуктивностью 1 Гн обладает контур, магнитный поток сквозь который равен 1 Вб при токе в 1 А, значит

$$[L] = \frac{[\Phi]}{[I]} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = \text{Гн.}$$

Аналогом индуктивности контура в теории электричества является электроёмкость уединённого проводника.

Пример: найдём индуктивность соленоида, пренебрегая краевыми эффектами.

Дано:

$V$  – объём соленоида;

$n$  – число витков провода на единицу длины соленоида;

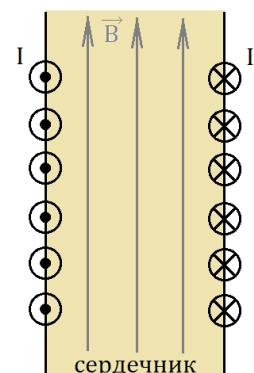
$\mu$  – магнитная проницаемость магнетика сердечника

Найти:

$L - ?$

Предположим, что по проводу, намотанному на сердечник, течёт ток величиной  $I$ . Этот ток создаёт в соленоиде магнитное поле  $B = \mu\mu_0 n I$  (см. §25). Магнитный поток через один виток соленоида равен

$$\Phi_1 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS = B \cdot \int_S dS = B \cdot S = \mu\mu_0 n I \cdot S,$$



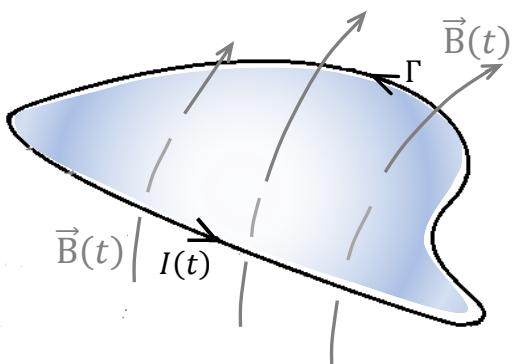
где  $S$  – площадь основания соленоида. Поскольку направление вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  так же, как и направление вектора площади  $d\vec{S}$  согласовываются с направлением тока, то они всегда будут сонаправлены друг другу, т.е. поток будет положительной величиной.

Витки провода, намотанного на сердечник, как обсуждалось в §22 представляют собой замкнутые кольца, расположенные строго один над другим. Следовательно, линии вектора  $\vec{B}$  пересекают площадь, ограниченную одним витком, обязательно пересекут и площади всех остальных витков. Поэтому, полный поток через все витки провода, намотанного на соленоид, можно найти простым умножением:

$$\Phi = N \cdot \Phi_1 = n \cdot l \cdot \mu\mu_0 n I \cdot S = \mu\mu_0 n^2 I \cdot lS = \mu\mu_0 n^2 I \cdot V,$$

где  $V = l \cdot S$  – объём соленоида. Отсюда индуктивность соленоида равна

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu\mu_0 n^2 V.$$



Если теперь в рассматриваемом нами замкнутом проводе (контуре) с током величина последнего будет изменяться со временем:  $I = I(t)$ , то магнитное поле этого тока будет также изменяться  $\vec{B} = \vec{B}(t)$ . Это влечёт за собой изменения магнитного потока через контур  $\Phi = \Phi(t)$ , а следовательно, и появление в нём ЭДС индукции (см. §26):

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

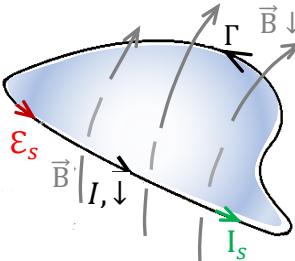
Таким образом, изменение тока в контуре ведёт к появлению ЭДС индукции в этом же самом контуре. Данное явление называется *самоиндукцией*, а ЭДС обозначается  $-\mathcal{E}_s$ :

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L \cdot I).$$

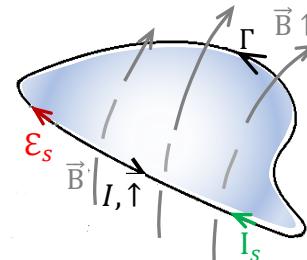
Если при изменении тока индуктивность не изменяется (не меняется форма контура и рядом нет ферромагнетиков)  $L = const$ , то

$$\boxed{\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}}.$$

Знак минус означает, что направление ЭДС самоиндукции также подчиняется правилу Ленца (см. §26): она направлена так, чтобы препятствовать изменению тока. Если ток в проводе увеличивается  $I \uparrow$ , то ЭДС  $\mathcal{E}_s$  и ток самоиндукции  $I_s = \frac{\mathcal{E}_s}{R}$  будут направлены в сторону противоположную  $I$ . В случаях, когда ток уменьшается  $I \downarrow$ , ЭДС  $\mathcal{E}_s$  и ток самоиндукции  $I_s$  будут поддерживать его. В явлениях самоиндукции ток обладает «инерцией», потому что эффекты индукции стремятся сохранить магнитный поток постоянным, подобно тому, как механическая инерция



самоиндукции  $I_s = \frac{\mathcal{E}_s}{R}$  будут направлены в сторону противоположную  $I$ . В случаях, когда ток уменьшается  $I \downarrow$ , ЭДС  $\mathcal{E}_s$  и ток самоиндукции  $I_s$  будут поддерживать его. В явлениях самоиндукции ток обладает «инерцией», потому что эффекты индукции стремятся сохранить магнитный поток постоянным, подобно тому, как механическая инерция

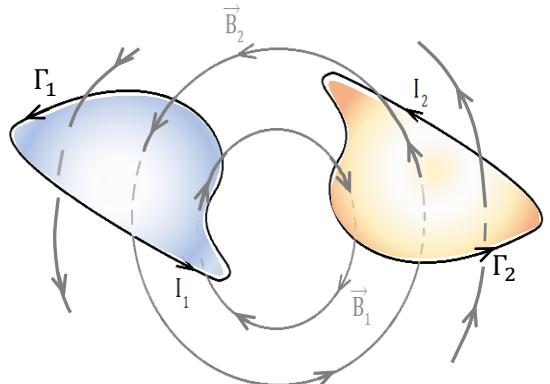


препятствует изменению скорости системы. Благодаря магнитному полю, текущий по контуру ток обладает «обобщенным импульсом» и аналогичен летящему кирпичу. Он не может остановиться мгновенно, чтобы остановить его необходимо приложить силу. Чем быстрее мы хотим остановить его, тем большая сила должна быть приложена: если поймать кирпич руками или лбом результат будет существенно разным. Так же, как и при попытке остановить летящий кирпич, при попытке разорвать цепь и остановить ток возникают огромные ЭДС самоиндукции, называемые экстракторами размыкания, которые мы часто наблюдаем в виде электрического пробоя воздуха (искр).

Рассмотрим теперь два неподвижных замкнутых провода (контура), расположенных на небольшом расстоянии друг от друга. В пространстве рядом с контурами ферромагнетики отсутствуют. Если в контуре 1 течёт электрический ток  $I_1$ , то он создаёт в окружающем пространстве магнитное поле индукцией

$$\vec{B}_1 = \oint_{\Gamma_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_1 \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = I_1 \cdot \oint_{\Gamma_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$\Rightarrow B_1 \sim I_1.$$



Силовые линии этого поля пересекают в том числе поверхность, опирающуюся на контур  $\Gamma_2$ , создавая через неё магнитный поток  $\Phi_{21}$  пропорциональный току  $I_1$  (помимо потока  $\Phi_1$ , обсуждённого в начале параграфа):

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} I_1 \cdot \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = I_1 \cdot \int_{S_2} \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Phi_{21} \sim I_1.$$

Коэффициент пропорциональности в этой зависимости обозначают  $L_{21}$  и называют *взаимной индуктивностью*:  $\Phi_{21} = L_{21} I_1$ .

Совершенно так же, если в контуре 2 течёт электрический ток  $I_2$ , он создаёт через контур  $\Gamma_1$  магнитное поле индукцией

$$\vec{B}_2 = \oint_{\Gamma_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_2 \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = I_2 \cdot \oint_{\Gamma_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \Rightarrow B_2 \sim I_2$$

И магнитный поток

$$\Phi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} I_2 \cdot \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = I_2 \cdot \int_{S_1} \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Phi_{12} \sim I_2,$$

$$\Phi_{12} = L_{12} I_2.$$

Коэффициенты взаимной индуктивности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  не зависят от токов, а определяются только формой, размерами и взаимным расположением контуров, а также магнитной проницаемостью окружающей среды. Выражаются эти коэффициенты в тех же единицах измерения, что и индуктивность  $L$ :  $[L_{12}] = [L_{21}] = [L] = \text{Гн}$ . Взаимная индуктивность численно равна магнитному потоку сквозь один из контуров, создаваемому единичным током в другом контуре.

Замечательное свойство взаимной индукции, утверждаемое *теоремой взаимности* и подтверждаемое экспериментально, заключается в том, что коэффициенты взаимной индукции  $L_{12}$  и  $L_{21}$  одинаковы:

$$L_{12} = L_{21}.$$

Пример: найдём коэффициенты взаимной индуктивности соленоида с двумя обмотками: одна на другой. Краевые эффекты не учитываем. Сердечник соленоида выполнен из слабого магнетика.

Дано:

$V$  – объём соленоида;

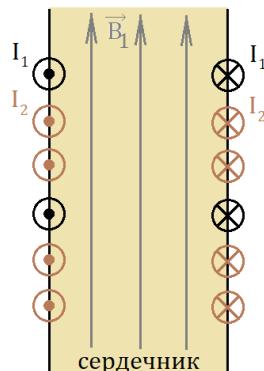
$n_1$  – число витков провода на единицу длины соленоида в первой обмотке;

$n_2$  – число витков провода на единицу длины соленоида во второй обмотке;

$\mu$  – магнитная проницаемость магнетика сердечника

Найти:

$L_{12} - ?$



Предположим, что по проводу первой обмотки, намотанному на сердечник, соленоида течёт ток величиной  $I_1$ . Этот ток создаёт в соленоиде магнитное поле  $B_1 = \mu\mu_0 n_1 I_1$  (см. §25). Магнитный поток через один виток второй обмотки соленоида равен

$$\Phi = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} B_1 \cdot dS = B_1 \cdot \int_{S_2} dS = B_1 \cdot S_2 = \mu\mu_0 n_1 I_1 \cdot S,$$

также как в первом примере направления векторов магнитной индукции  $\vec{B}_1$  и площади  $d\vec{S}$  совпадают.  $S$  – площадь сечения соленоида, толщиной провода обмотки можно пренебречь – провод тонкий.

Аналогично, полный поток через все витки провода второй обмотки соленоида можно найти простым умножением:

$$\Phi_{21} = N_2 \cdot \Phi = n_2 \cdot l \cdot \mu\mu_0 n_1 I_1 \cdot S = \mu\mu_0 n_2 n_1 I_1 \cdot lS = \mu\mu_0 n_1 n_2 I_1 \cdot V,$$

где  $V = l \cdot S$  – объём соленоида. Отсюда коэффициент взаимной индуктивности соленоида

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \mu\mu_0 n_1 n_2 V = L_{12}.$$

Наличие магнитной связи между контурами проявляется в том, что при всяком изменении тока в одном из контуров в другом контуре возникает ЭДС индукции. Это явление называют *взаимной индукцией*.

Согласно закону электромагнитной индукции ЭДС, возникающая во втором контуре вследствие изменения во времени тока в проводе первого контура равна

$$I_1 = I_1(t), \vec{B}_1 = \vec{B}_1(t) \Rightarrow \Phi_{21} = \Phi_{21}(t), \\ \mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{21} \cdot I_1) = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

В обратном случае при изменении тока второго контура

$$I_2 = I_2(t), \vec{B}_2 = \vec{B}_2(t) \Rightarrow \Phi_{12} = \Phi_{12}(t), \\ \mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{12} \cdot I_2) = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

Оба выражения справедливы для ситуаций, когда контуры неподвижны, и рядом с ними отсутствуют ферромагнетики.

Направление возникающих ЭДС взаимной индукции также подчиняется правилу Ленца.

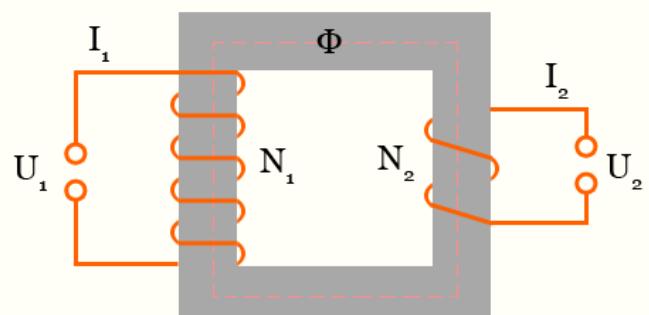
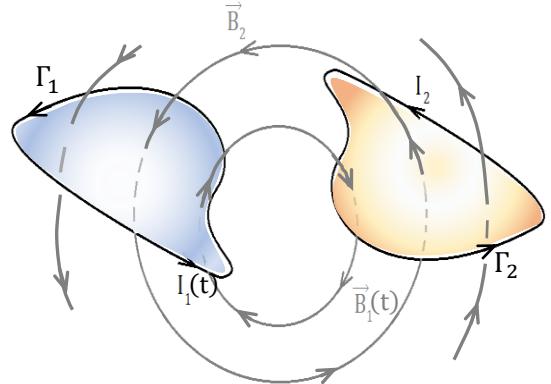
На явлении взаимной индукции основано действие трансформаторов – устройств,

используемых для преобразования токов и напряжений. Простейший трансформатор представляет собой две обмотки, намотанные на общем *магнитопроводе* – ферромагнитном сердечнике. Обмотка, на которую подается внешнее питающее напряжение, называется первичной, обмотка, с которой снимается напряжение – вторичной. Допустим, что вторичная



обмотка никуда не подключена, а на первичную обмотку подано напряжение  $U_1$ . Поданное напряжение вызывает в первичной обмотке переменный ток, приводящий к появлению ЭДС самоиндукции. Если индуктивность первичной обмотки  $L_1$ , то закон Ома (см. §16) для первичной цепи можно записать так

$$U_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + I_1 R_1 \approx L_1 \frac{dI_1}{dt}$$



Мы пренебрегли сопротивлением первичной обмотки, так как обычно это сопротивление не велико. Во вторичной обмотке переменный ток  $I_1$  создает ЭДС индукции

$$U_2 = L_{21} \frac{dI_1}{dt} = L_{21} \frac{U_1}{L_1} = \frac{L_{21}}{L_1} U_1$$

Входящее в формулу отношение индуктивностей легко найти, если заметить, что

$$\Phi_1 = N_1 \Phi = L_1 I_1, \quad \Phi_{21} = N_2 \Phi = L_{21} I_1$$

Где  $\Phi$  – магнитный поток через поперечное сечение магнитопровода, создаваемый током  $I_1$ .

В результате получаем, что напряжение во вторичной обмотке определяется отношением числа витков

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1$$

Если  $\frac{N_2}{N_1} < 1$ , то трансформатор называется понижающим, в противном случае – повышающим.

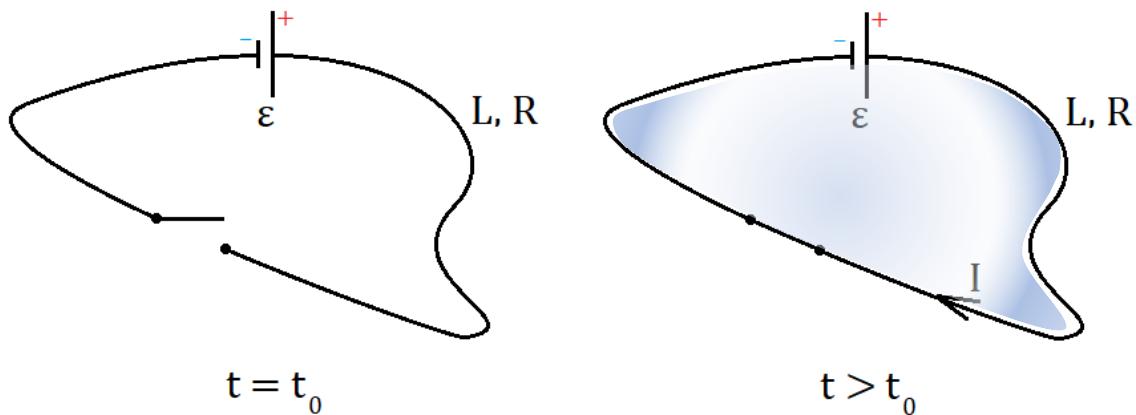
При подключении ко вторичной обмотке нагрузки, в ней начинает протекать ток  $I_2$ , который в приводит к появлению в первичной обмотке встречной ЭДС индукции, отчего ток в первичной обмотке возрастает, потребляемая из питающей сети мощность увеличивается на величину мощности, выделяющейся в нагрузке (если пренебречь потерями в трансформаторе).

## §28. Магнитная энергия тока.

### Энергия магнитного поля

Электрический ток обладает запасом энергии, называемой *магнитной*. Эта энергия зависит от величины и распределения токов, а также от магнитных свойств среды, заполняющей пространство.

Рассмотрим неподвижный контур (электрическую цепь), обладающий индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$ , в который включены источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и ключ, в начальный момент времени  $t_0$  разомкнутый.



Замкнём ключ. В контуре, как мы уже знаем (см. §15), начнёт протекать ток. Пока он не достигнет установившегося значения, в контуре будет действовать ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s$  (см. §27):

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Согласно закону Ома для замкнутой цепи (см. §16) после замыкания ключа будет выполняться следующее соотношение:

$$I \cdot R = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s.$$

Найдём малую работу, которую совершают сторонние силы (т.е. источник ЭДС) за малый промежуток времени  $dt$ .

Перегруппируем величины и умножим левую и правые части выражения на  $dq$  – заряд, перемещённый по контуру за это время:

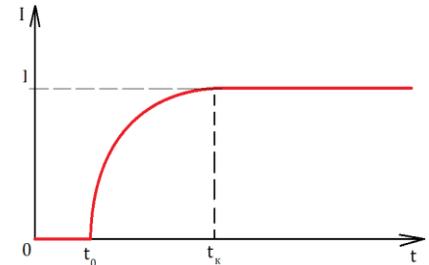
$$\mathcal{E} = I \cdot R - \mathcal{E}_s,$$

$$dq \cdot \mathcal{E} = (I \cdot R - \mathcal{E}_s) \cdot dq.$$

Согласно определению силы тока  $dq = I \cdot dt$ , первое слагаемое из правой части равно:

$$I \cdot R \cdot dq = I \cdot R \cdot I \cdot dt = I^2 R \cdot dt = P \cdot dt = \delta Q$$

– тепло, выделяемое в контуре при протекании электрического тока – закон Джоуля – Ленца (см. §16).



В левой части стоит искомая работа сторонних сил:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\Gamma} \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} \Rightarrow dq \cdot \mathcal{E} = dq \cdot \oint_{\Gamma} \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = dq \cdot \int_{\text{источник тока}} \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{\text{источник тока}} dq \cdot \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{источник тока}} \vec{F}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = \delta A_{\text{стор}}. \end{aligned}$$

Выяснив смысл каждого слагаемого, мы получили:

$$\delta A_{\text{стор}} = \delta Q - dq \cdot \mathcal{E}_s.$$

Последнее слагаемое по аналогии с работой сторонних сил обозначим пока как некоторую дополнительную работу, которую приходится совершать источнику тока:  $\delta A_{\text{доп}} = -dq \cdot \mathcal{E}_s$ .

$$\delta A_{\text{стор}} = \delta Q + \delta A_{\text{доп}}.$$

Мы видим, что пока ток, текущий в контуре, *нарастает*, то в нём действует ЭДС самоиндукции ( $t_0 < t < t_k$ ), связанная с *увеличением* магнитного потока через контур:

$$\delta A_{\text{доп}} = -dq \cdot \mathcal{E}_s = -dq \cdot \left( -\frac{d\Phi}{dt} \right) = dq \cdot \frac{d\Phi}{dt} > 0,$$

Работа, которую совершает источник тока оказывается больше выделяемого в цепи джоулева тепла:

$$\delta A_{\text{стор}} > \delta Q.$$

После установления тока ( $t > t_k$ ):  $I = \text{const} \Rightarrow \mathcal{E}_s = 0$  дополнительная работа не совершается

$$\delta A_{\text{доп}} = 0,$$

и вся работа источника будет идти только на выделение джоулевой теплоты

$$\delta A_{\text{стор}} = \delta Q.$$

Как можно вспомнить из предыдущего семестра, совершаемая системой работа всегда связана с изменением энергии какого-либо вида:  $\delta A = dE_{\text{кин}}$  – в механике;  $\delta A = \delta Q - dU$  – в термодинамике. Предположим, что в этом случае

$$\delta A_{\text{доп}} = dW_{\text{магн}}.$$

Такое предположение справедливо, если принять, что данная работа совершается пока в нашем контуре происходит установление электрического тока, т.е. идёт изменение магнитного поля  $\vec{B}$ , порождаемого этим током.

$$\begin{aligned} \delta A_{\text{доп}} &= -dq \cdot \mathcal{E}_s = -I \cdot dt \cdot \left( -\frac{d\Phi}{dt} \right) \Rightarrow \\ \delta A_{\text{доп}} &= I \cdot d\Phi \quad \Rightarrow \quad dW_{\text{магн}} = I \cdot d\Phi. \end{aligned}$$

Это соотношение имеет общий характер. Оно справедливо и при наличии ферромагнетиков, т.к. при его выводе не было сделано никаких предположений о магнитных свойствах среды, окружающих контур.

Теперь (и далее) будем считать, что ферромагнетиков вблизи контура нет, окружающая среда – слабый магнетик. Тогда магнитный поток через контур пропорционален силе тока в нём:  $\Phi = L \cdot I$  (см. §27). Изменение потока  $d\Phi = L \cdot dI \Rightarrow \delta A_{\text{доп}} = L \cdot IdI$ .

Следовательно,

$$dW_{\text{магн}} = Id\Phi = L \cdot IdI = L \cdot d\left(\frac{I^2}{2}\right) = d\left(\frac{LI^2}{2}\right)$$

– малое изменение магнитной энергии контура.

Проинтегрируем верхнее выражение и получим, что при отсутствии ферромагнетиков контур индуктивностью  $L$ , по которому течёт ток  $I$  обладает энергией:

$$W_{\text{магн}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

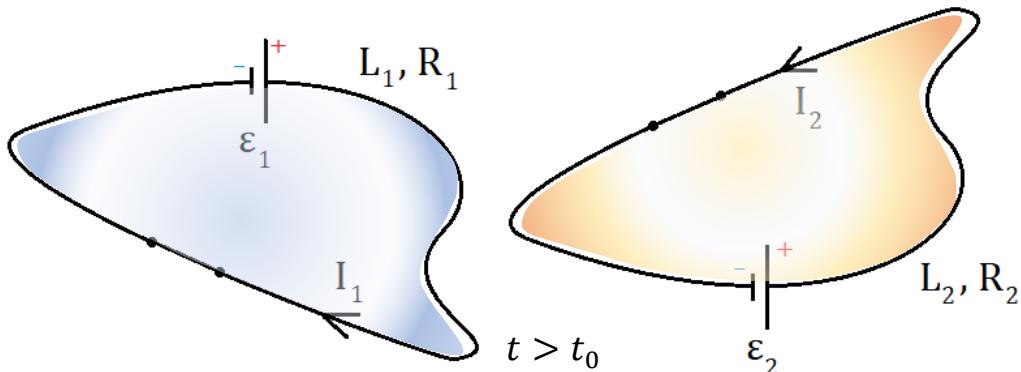
Эту энергию называют *магнитной энергией тока* или *собственной энергией тока*. Её можно целиком превратить во внутреннюю энергию контура, если отключить источник тока  $\mathcal{E}$ , быстро разомкнув ключ.

Первое равенство из написанных выше позволяет ещё одним способом определить коэффициент индуктивности контура

$$L = 2 \frac{W_{\text{магн}}}{I^2}.$$

Ток  $I$  и энергия  $W_{\text{магн}}$  – величины, определяемые совершенно однозначно. Поэтому определение индуктивности таким способом может служить и в тех случаях, когда провод тонкий, и в тех, когда – толстый (см. §27).

Рассмотрим теперь два неподвижных замкнутых контура аналогичных верхнему и расположенных на небольшом расстоянии друг от друга (что бы между контурами существовала магнитная связь).  $L_1, L_2$  – коэффициенты индуктивности первого и второго контура соответственно,  $R_1, R_2$  – их сопротивления, а  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  – ЭДС источников тока, действующие в контурах. Одновременно замкнём ключи в каждом из контуров. Как в том, так



и в другом контуре начнёт устанавливаться свой ток и, следовательно, появятся как ЭДС

самоиндукции  $\mathcal{E}_{S_1}$  и  $\mathcal{E}_{S_2}$ , так и ЭДС взаимной индукции  $\mathcal{E}_{12}$  и  $\mathcal{E}_{21}$  – результат наличия магнитной связи между контурами (см. §27):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{S_1} &= -L_1 \frac{dI_1}{dt}; & \mathcal{E}_{12} &= -L_{12} \frac{dI_2}{dt}; \\ \mathcal{E}_{S_2} &= -L_2 \frac{dI_2}{dt}; & \mathcal{E}_{21} &= -L_{21} \frac{dI_1}{dt}.\end{aligned}$$

Закон Ома для контуров примет в этом случае следующий вид:

1 – й контур:  $I_1 \cdot R_1 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{S_1} + \mathcal{E}_{12};$

2 – ой контур:  $I_2 \cdot R_2 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{S_2} + \mathcal{E}_{21}.$

Проведя преобразования аналогичные тем, что мы проводили с одиночным витком в начале параграфа получим выражения для работы источников тока за время  $dt$ :

$$\delta A_{\text{стор}_1} = \delta Q_1 + \delta A_{\text{доп}_1}, \text{ где } \delta A_{\text{доп}_1} = -(\mathcal{E}_{S_1} + \mathcal{E}_{12}) \cdot dq = -(\mathcal{E}_{S_1} + \mathcal{E}_{12}) \cdot I_1 \cdot dt$$

$$\delta A_{\text{стор}_2} = \delta Q_2 + \delta A_{\text{доп}_2}, \text{ где } \delta A_{\text{доп}_2} = -(\mathcal{E}_{S_2} + \mathcal{E}_{21}) \cdot dq = -(\mathcal{E}_{S_2} + \mathcal{E}_{21}) \cdot I_2 \cdot dt$$

Суммарная дополнительная работа, совершаемая источниками тока против ЭДС самоиндукции и ЭДС взаимной индукции за это время ( $t_0 < t < t_k$ ) идёт, как мы показали выше, на изменение магнитной энергии контуров:

$$\delta A_{\text{доп}} = \delta A_{\text{доп}_1} + \delta A_{\text{доп}_2} = -(\mathcal{E}_{S_1} + \mathcal{E}_{12}) \cdot I_1 \cdot dt - (\mathcal{E}_{S_2} + \mathcal{E}_{21}) \cdot I_2 \cdot dt = dW_{\text{магн.}}$$

Преобразуем последнее выражение, используя определения для  $\mathcal{E}_{S_1}$ ,  $\mathcal{E}_{S_2}$  и  $\mathcal{E}_{12}$ ,  $\mathcal{E}_{21}$ :

$$\begin{aligned}dW_{\text{магн.}} &= L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} \cdot I_1 \cdot dt + L_{12} \cdot \frac{dI_2}{dt} \cdot I_1 \cdot dt + L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} \cdot I_2 \cdot dt + L_{21} \cdot \frac{dI_1}{dt} \cdot I_2 \cdot dt = \\ &= L_1 \cdot I_1 \cdot dI_1 + L_{12} \cdot I_1 \cdot dI_2 + L_2 \cdot I_2 \cdot dI_2 + L_{21} \cdot I_2 \cdot dI_1 =\end{aligned}$$

с учётом теоремы взаимности и отсутствия ферромагнетиков в пространстве рядом с контурами

$$\begin{aligned}&= d\left(\frac{L_1 \cdot I_1^2}{2}\right) + d\left(\frac{L_2 \cdot I_2^2}{2}\right) + L_{12} \cdot (I_1 \cdot dI_2 + I_2 \cdot dI_1) = \\ &= d\left(\frac{L_1 \cdot I_1^2}{2}\right) + d\left(\frac{L_2 \cdot I_2^2}{2}\right) + L_{12} \cdot d(I_1 \cdot I_2) = d\left(\frac{L_1 \cdot I_1^2}{2}\right) + d\left(\frac{L_2 \cdot I_2^2}{2}\right) + d(L_{12} \cdot I_1 I_2) = \\ &= d\left(\frac{L_1 \cdot I_1^2}{2} + \frac{L_2 \cdot I_2^2}{2} + L_{12} \cdot I_1 I_2\right).\end{aligned}$$

Откуда, полная магнитная энергия двух токов:

$$W_{\text{магн.}} = \frac{L_1 \cdot I_1^2}{2} + \frac{L_2 \cdot I_2^2}{2} + L_{12} \cdot I_1 I_2. \quad (1)$$

Здесь первые два слагаемые называются *собственными* магнитными энергиями токов  $I_1$  и  $I_2$ , а последнее слагаемое – *взаимная энергия* обоих токов:

$$W_{\text{магн}} = W_{\text{маг}_1} + W_{\text{маг}_1} + W_{\text{маг}_{12}}.$$

Для компактной формы записи выражения магнитной энергии двух токов можно использовать двойную сумму:

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (L_{ij} \cdot I_i I_j),$$

после чего данное выражение легко обобщить на случай произвольного числа контуров:

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (L_{ij} \cdot I_i I_j)$$

— *магнитная энергия системы токов.*

### Энергия магнитного поля

Формулы, полученные в первой части параграфа, выражают магнитную энергию тока через индуктивность и силу тока (в случае отсутствия ферромагнетиков). Однако, как и в случае электрической энергии заряженных тел (см. §11), магнитную энергию можно выразить непосредственно через характеристику поля — вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ . Рассмотрим сначала однородное магнитное поле, например, поле бесконечного длинного соленоида (см. §22). По формуле для магнитной энергии контура с током:

$$W_{\text{маг}} = \frac{L \cdot I^2}{2},$$

где  $L$  — индуктивность соленоида. Запишем её в виде, полученном в §27:  $L = \mu\mu_0 n^2 V$ , и найдём:

$$W_{\text{маг}} = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 V \cdot I^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 I^2}{2} V,$$

здесь  $V$  — объём соленоида, а  $n$  — число витков провода на единицу его длины, или

$$W_{\text{маг}} = \frac{\mu\mu_0 n^2 I^2}{2} V = \frac{\mu\mu_0 n I \cdot n I}{2} V.$$

Как и прежде, мы полагаем, что в системе отсутствуют ферромагнетики, т.е. сердечник соленоида выполнен из слабого магнетика:

$nI = H$  — напряжённость магнитного поля соленоида;

$\mu\mu_0 n I = B$  — магнитная индукция поля,

$$W_{\text{маг}} = \frac{B \cdot H}{2} V = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V.$$

Для слабых магнетиков справедлива линейная зависимость между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  (см. §25):

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H}.$$

У парамагнетиков  $\mu > 1$ , у диамагнетиков  $\mu < 1$ . Причём как у тех, так и у других  $\mu$  отличается от единицы весьма мало. Поэтому векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  – сонаправленные векторы, и  $B \cdot H = \vec{B} \cdot \vec{H}$ .

$$W_{\text{маг}} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} V$$

– энергия магнитного поля бесконечно длинного соленоида. В этой формуле  $V$  – объём соленоида, то есть пространство, занимаемое однородным магнитным полем.

Введём понятие *объёмной плотности*  $w$  энергии поля:

$$w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}$$

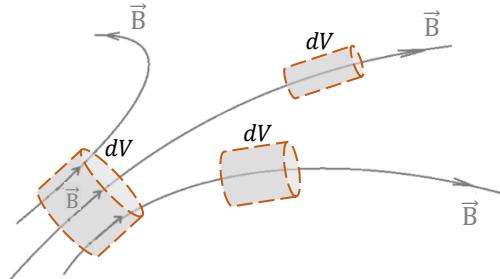
– объёмная плотность энергии магнитного поля.

Тогда

$$W_{\text{маг}} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} V = w \cdot V$$

– полная энергия однородного магнитного поля, заполняющего объём  $V$ .

Аналогично тому, как мы поступили в §11 для нахождения энергии неоднородного



электрического поля, представим опять всё пространство, заполненное магнитным полем, как систему малых объёмов  $dV$ , в пределах каждого из которых магнитное поле можно считать однородным. Полную энергию всего пространства найдём как сумму энергий  $dW$ , заключённых во всех объёмах  $dV$ :

$$W_{\text{маг}} = \int_{\text{по всему пространству}} dW = \int_{\text{по всему пространству}} wdV;$$

$$W_{\text{маг}} = \int_{\text{по всему пространству}} \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \cdot dV = \int_{\text{по всему пространству}} \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \cdot dV$$

– полная энергия магнитного поля для диа- и парамагнитных сред.

Подынтегральное выражение в этом уравнении  $dW = wdV$ , как уже говорилось, имеет смысл энергии, с некоторой плотностью  $w$  заключённой в объёме  $dV$ . Это наводит нас на мысль, что и магнитная энергия аналогично электрической энергии, подобно веществу, распределена в пространстве с некоторой плотностью. Т.е. *магнитная энергия локализована в самом поле*. Это соответствует представлениям теории поля.

Рассмотрим случай, когда магнитное поле в пространстве создаётся двумя электрическими токами  $I_1$  и  $I_2$ . Магнитное поле, создаваемое каждым из токов,  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$

соответственно. По принципу суперпозиции поле в каждой точке этого пространства:  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ , его квадрат –  $B^2 = (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2$ . Тогда по нашим формулам, энергия магнитного поля системы токов будет равна:

$$\begin{aligned} W_{\text{маг}} &= \int_{\text{по всему пространству}} \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \cdot dV = \\ &= \int_{\text{по всему пространству}} \frac{B_1^2}{2\mu\mu_0} \cdot dV + \int_{\text{по всему пространству}} \frac{B_2^2}{2\mu\mu_0} \cdot dV + \int_{\text{по всему пространству}} \frac{\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2}{\mu\mu_0} \cdot dV. \quad (11) \end{aligned}$$

Первые два интеграла тут представляют собой собственную энергию первого и второго токов ( $W_1$  и  $W_2$ ), последний интеграл – взаимную энергию ( $W_{12}$ ):

$$W_{\text{магн}} = W_{\text{маг}1} + W_{\text{маг}2} + W_{\text{маг}12}.$$

Полученные формулы позволяют сделать следующие выводы:

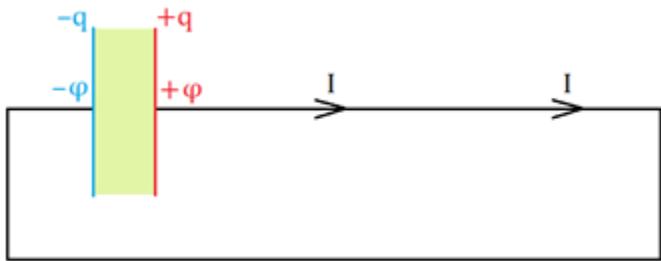
- собственная энергия каждого тока – величина всегда положительная, так же, как и полная энергия системы ( $W_1, W_2, W > 0$ ); взаимная энергия может быть как положительной, так и отрицательной величиной ( $W_{\text{маг}12} \leq 0$ ).
- магнитная энергия (также как электрическая) – величина не аддитивная (из-за присутствия взаимной энергии).
- сравнивая выражения (1) и (11), получим другие определения для коэффициентов индукции и взаимной индукции:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{2}{I_1^2} W_{\text{маг}1} = \frac{2}{I_1^2} \int_{\text{по всему пространству}} \frac{B_1^2}{2\mu\mu_0} \cdot dV; \\ L_{12} &= \frac{2}{I_1 \cdot I_2} W_{\text{маг}12} = \frac{2}{I_1 \cdot I_2} \int_{\text{по всему пространству}} \frac{\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2}{\mu\mu_0} \cdot dV. \end{aligned}$$

## §29. Ток смещения

Теория электромагнитного поля, начала которой заложил Фарадей, математически была завершена Максвеллом. При этом одной из важнейших новых идей, выдвинутых Максвеллом, была мысль о симметрии во взаимозависимости электрического и магнитного полей. А именно, поскольку меняющееся во времени магнитное поле  $(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$  создаёт электрическое поле (см. §26), следует ожидать, что меняющееся во времени электрическое поле  $(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$  создаёт магнитное поле.

К этой идее можно прийти разными рассуждениями, но мы рассмотрим противоречие, возникающее в теореме о циркуляции магнитного поля, если токи, текущие в проводящей среде или по проводу, изменяются со временем  $I = I(t)$ .

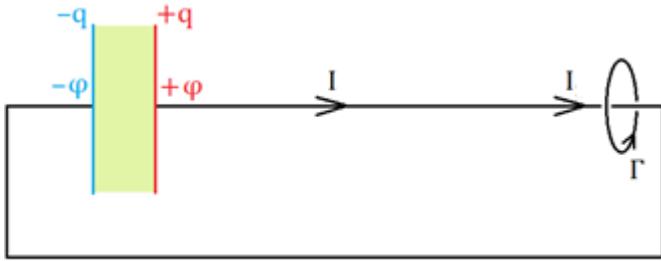


Представим заряженный плоский конденсатор. Соединим его обкладки проводом с сопротивлением  $r$ . Конденсатор начнёт разряжаться. Положительные носители тока в проводе будут перемещаться из мест с

большим потенциалом  $+φ$  (от положительно заряженной обкладки) к местам с меньшим потенциалом  $-φ$  (к отрицательно заряженной обкладке), а отрицательные носители — в обратном направлении. Это будет приводить к уменьшению разности потенциалов на обкладках конденсатора, и следовательно, уменьшению силы тока в проводе со временем (в результате, как мы помним (см. §16), протекание электрического тока в проводе закончится). Т.е. по нашей цепи течёт переменный электрический ток  $I(t)$ . Применим теорему о циркуляции (см. §25) к этому случаю:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I.$$

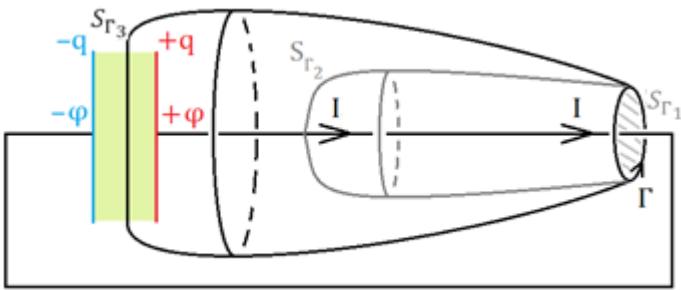
В качестве контура  $\Gamma$  возьмём кривую, охватывающую наш провод. Циркуляция вектора  $\vec{H}$ ,



стоящая в левой части теоремы, — величина вполне определённая, зависит только от формы и расположения контура. Примеры расчёта циркуляции для некоторых

симметричных систем были подробно рассмотрены в §22. Между тем, ток  $I$ , стоящий в правой

части, таким свойством не обладает. Для определения  $I$  надо мысленно натянуть на контур  $\Gamma$



какую-то поверхность  $S_\Gamma$  и найти пронизывающий её ток. Если поверхность пересекается проводом ( $S_{\Gamma_1}, S_{\Gamma_2}$ ), то проходящий через неё ток равен  $I$ .

Если же поверхность провести между обкладками конденсатора ( $S_{\Gamma_3}$ ), нигде не пересекая провода, то проходящий через неё ток будет равен 0. Но все поверхности должны иметь «равные права», иначе теорема перестаёт быть теоремой и становится выражением для некоторого частного случая.

Получается, что в случае с разряжающимся конденсатором циркуляция вектора  $\vec{H}$  зависит от того, какую поверхность мы натягиваем на данный контур  $\Gamma$  (? !), чего явно не может быть, и в случае постоянных токов этого не происходило (см. §22, 25).

Проверим дифференциальную (локальную) форму теоремы о циркуляции:  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ . Может быть для неё никаких проблем в случае переменного тока не возникает? Сосчитаем дивергенцию правой и левой частей:  $\text{div}(\text{rot } \vec{H}) = \text{div } \vec{j}$ . В §7, где мы знакомились с операцией векторного произведения оператора набла и её свойствами, было найдено, что  $\text{div}(\text{rot } \vec{H}) = \nabla \cdot [\nabla, \vec{H}] = 0$ . Значит, должна быть равна нулю и правая часть  $\text{div } \vec{j} = 0$ . В случае постоянных (неизменных во времени – стационарных) токов, это справедливое выражение (см. §14). Но для переменных токов  $\vec{j} = \vec{j}(t)$  должно выполняться *уравнение непрерывности*:

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

– т.е.  $\text{div } \vec{j}$  равна скорости изменения плотности заряда в данной точке и может быть отлична от 0. Значит, и эта форма теоремы о циркуляции в случае переменных токов приводит к противоречию.

Получается, что в случае переменных токов теорема о циркуляции становится непригодной к использованию, и от неё надо отказаться? Нет. Надо просто изменить правую часть этой теоремы, чтобы избежать противоречий, обсуждённых выше.

Решение проблемы «непригодности» теоремы о циркуляции было найдено Максвеллом, который предложил дополнить ток проводимости в правой части теоремы *током смещения*:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_{\text{см}}; \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}.$$

В этом случае, проделав с дифференциальной (локальной) формой теоремы всё то же, что мы проделали выше, получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) &= \operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) \Rightarrow \\ 0 &= \operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{см}} \Rightarrow (\because) \\ \operatorname{div} \vec{j}_{\text{см}} &= -\operatorname{div} \vec{j} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j}_{\text{см}} = -\left(-\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \Rightarrow \\ \operatorname{div} \vec{j}_{\text{см}} &= \frac{\partial \rho}{\partial t}, \end{aligned}$$

опять использовали *уравнение непрерывности* для электрических токов. Согласно, дифференциальной (локальной) форме теоремы Гаусса для диэлектриков объёмная плотность зарядов в некоторой точке пространства равна дивергенции вектора  $\vec{D}$  в этой же точке пространства (см. §13):  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ , а значит

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}).$$

Дивергенцией (см. §6) называется операция скалярного умножения оператора набла на произвольный вектор:  $\operatorname{div} \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D}$ , а оператор набла в свою очередь это векторный дифференциальный оператор, компоненты которого являются частными производными по координатам, например, в декартовой системе:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

Воспользовавшись тем, что дифференцирование по пространству и дифференцирование по времени, с точки зрения математики, независимые операции, меняем их порядок местами:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j}_{\text{см}} &= \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \text{ или} \\ \vec{j}_{\text{см}} &= \boxed{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}. \end{aligned}$$

Максвелл назвал эту величину плотностью *тока смещения*.

Подставляя полученное выражение в формулу для  $\operatorname{rot} \vec{H}$ , получаем

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \boxed{\left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)}$$

– дифференциальную (локальную) форму *теоремы о циркуляции*: ротор вектора  $\vec{H}$  определяется плотностью тока проводимости  $\vec{j}$  и тока смещения  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  в той же точке.

В вакууме ( $\vec{P} = 0$ ) плотность тока смещения определяется изменением во времени напряжённости электрического поля

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}: \quad \boxed{\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}.$$

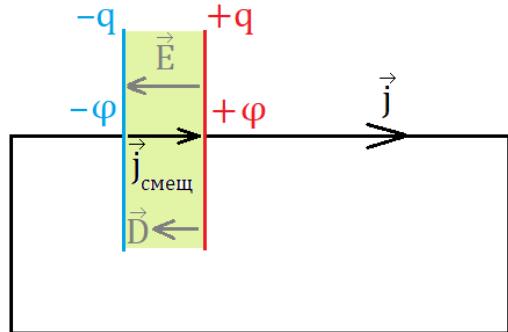
Сумму же тока проводимости и тока смещения называют полным током. Его плотность:

$$\vec{J}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Согласно (∴)

$$\operatorname{div} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \vec{J}_{\text{полн}} = 0,$$

значит линии полного тока являются замкнутыми (непрерывными) (см. §21:  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ), в отличие от токов проводимости ( $\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ). Токи проводимости, если они не замкнуты, замыкаются токами смещения. В нашем примере с конденсатором, ток смещения, действующий между обкладками конденсатора (там, где меняется во времени электрическое поле), образует с током проводимости  $\vec{j}$ , текущим по проводу, соединившему обкладки, замкнутую линию:



$$\vec{D}, \vec{E} \downarrow \Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} < 0 \Rightarrow \vec{j}_{\text{см}} \uparrow \vec{D}, \vec{E}.$$

Перепишем в новом «исправленном» виде интегральную форму теоремы о циркуляции. Согласно Максвеллу, для этого необходимо в её правой части вместо тока проводимости  $I$  записать полный ток  $I_{\text{полн}} = I + I_{\text{см}}$ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{полн}}; \quad \text{где} \quad I_{\text{полн}} = \oint_{S_{\Gamma}} \vec{J}_{\text{полн}} \cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{S_{\Gamma}} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}}$$

— *теорема о циркуляции* вектора  $\vec{H}$ . В таком виде теорема справедлива для всех случаев (и постоянных и переменных токов), свидетельством чему является согласие этого уравнения с результатами опытов во всех без исключения случаях.

Некоторые замечания:

- ток смещения эквивалентен току проводимости только в отношении способности создавать магнитное поле.
- ток смещения существует лишь там, где меняется со временем электрическое поле. В диэлектриках ток смещения состоит из двух принципиально различных составляющих: т.к. в диэлектрике вектор  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , то

$$\vec{J}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  – «истинный» ток смещения и ток поляризации  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  – определяемый движением связанных зарядов в диэлектрике в процессе поляризации. С точки зрения, что ток – упорядоченное движение заряженных частиц, нет ничего неожиданного в том, что движение связанных зарядов, как и движение обычных носителей тока возбуждает магнитное поле.

Принципиально новое состоит в том, что что слагаемое  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , не связанное с перемещением никаких зарядов, также возбуждает магнитное поле. Получается, что *всякое изменение электрического поля во времени возбуждает в окружающем пространстве магнитное поле*.

Открытие этого явления – наиболее существенный и решающий шаг, сделанный Максвеллом при построении теории электромагнитного поля. Это открытие также революционно, как и открытие электромагнитной индукции, согласно которому *переменное магнитное поле возбуждает в пространстве вихревое электрическое поле*.

## §30. Система уравнений Максвелла

Открытие Максвеллом тока смещения (см. §30) в 1861 году завершило создание макроскопической теории электромагнитного поля. Оно позволило Максвеллу сформулировать *единую теорию электрических и магнитных явлений*, которая не только объяснила разрозненные явления электричества и магнетизма, но и предсказала ряд новых явлений, существование которых позже подтвердилось. Краеугольным камнем теории электромагнитного поля является система уравнений Максвелла, состоящая из четырёх фундаментальных уравнений. До сих пор нами были рассмотрены отдельные части этой теории, теперь же их можно собрать вместе.

В интегральной форме *система фундаментальных уравнений электродинамики в неподвижных средах* содержит следующие уравнения:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

— циркуляция вектора  $\vec{E}$  по любому замкнутому контуру  $\Gamma$  равна производной по времени от магнитного потока через любую поверхность  $S_{\Gamma}$ , ограниченную данным контуром, взятой со знаком минус. При этом под электрическим полем  $\vec{E}$  понимается не только вихревое электрическое поле, но и электростатическое (циркуляция последнего равна нулю (см. §7)).

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{V_S} \rho \cdot dV \quad (2)$$

— поток вектора  $\vec{D}$  сквозь любую замкнутую поверхность  $S$  равен алгебраической сумме сторонних зарядов, оказавшихся внутри ограниченного этой поверхностью объёма  $V_S$ .

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_{\Gamma}} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (3)$$

— циркуляция вектора  $\vec{H}$  по любому замкнутому контуру  $\Gamma$  равна полному току (сумме токов проводимости и тока смещения) через произвольную поверхность  $S_{\Gamma}$ , ограниченную данным контуром.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4)$$

— поток вектора  $\vec{B}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$  всегда равен нулю.

Из уравнений Максвелла (1) и (3) для циркуляции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые: изменение во времени одного из

этих полей приводит к возникновению другого. Поэтому имеет смысл лишь совокупность этих полей, описывающая *единое электромагнитное поле*.

В частном случае, когда ни электрическое, ни магнитное поля не зависят от времени – стационарны:  $\vec{E} = \text{const}$ ,  $\vec{B} = \text{const}$ , уравнения Максвелла распадаются на две группы *независимых* уравнений:

$$\begin{array}{ll} \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 & \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \\ \text{и} & \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q & \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{array}$$

В таком случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга. Их действительно можно изучать раздельно, как мы и делали в течение всего семестра.

В дифференциальной (локальной) форме уравнения Максвелла (1) – (4) выглядят следующим образом:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1d)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (2d)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3d)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (4d)$$

Уравнения (1д) и (2д) свидетельствуют о том, что электрическое поле  $\vec{E}$  может возникнуть по двум причинам. Во-первых, его *источниками являются электрические заряды, как сторонние, так и связанные*:  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ;

$$\text{div } \vec{D} = \epsilon_0 \text{div } \vec{E} + \text{div } \vec{P}; \quad \text{div } \vec{P} = -\rho' \Rightarrow \text{div } \vec{E} \sim \rho + \rho'.$$

Во-вторых, вихревое электрическое поле возникает всегда, когда имеющееся *магнитное поле меняется во времени* (явление электромагнитной индукции).

Уравнение (3д) свидетельствует о том, что магнитное поле  $\vec{B}$  может возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо *переменными электрическими полями*, или обоими вариантами одновременно:  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ ;

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} - \text{rot } \vec{J}; \quad \text{rot } \vec{J} = \vec{J}_m \Rightarrow \text{rot } \vec{B} \sim \left( \vec{J} + \vec{J}_m + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Уравнение (4д) постулирует факт отсутствия в природе источников магнитного поля, подобных электрическим зарядам (магнитных зарядов). Благодаря этому, можно утверждать,

что уравнения (1) – (4) или (1д) – (4д) не симметричны относительно электрического и магнитного полей.

Уравнения Максвелла (1д) – (4д) совместно с формулой для силы Лоренца

$$\vec{F}_\text{л} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}], \quad \text{т. к. } \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_\text{л}$$

составляют фундаментальную систему уравнений, которой достаточно для описания любых электромагнитных явлений, в которых не проявляются квантовые эффекты. Интегрируя эти уравнения, можно найти сами поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Фундаментальные уравнения Максвелла (1) – (4) или (1д) – (4д) не составляют еще полной системы уравнений электромагнитного поля. Если записать их в координатной форме, то получится всего восемь уравнений (шесть уравнений для проекций векторов и два скалярных уравнения для дивергенций). Этого недостаточно чтобы определить пятнадцать составляющих векторов  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{j}$  и скаляр  $\rho$ . Кроме того, фундаментальные уравнения Максвелла не содержат никаких постоянных, характеризующих свойства самой среды, в которой возбуждено электромагнитное поле. Необходимо дополнить эти уравнения такими соотношениями, в которые входили бы величины, характеризующие индивидуальные свойства среды. Такие соотношения называются *материальными уравнениями*.

Принципиальный способ получения материальных уравнений дают молекулярные теории поляризации, намагничивания и электропроводности среды. Наиболее просто материальные уравнения выглядят в случае слабых электромагнитных полей, довольно медленно изменяющихся во времени и в пространстве. В этом случае для изотропных неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред материальные уравнения могут быть записаны в следующем виде

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_\text{стор}) \quad (\text{закон Ома}),$$

где  $\epsilon, \mu, \sigma$  – постоянные, характеризующие электромагнитные свойства среды: диэлектрическая и магнитная проницаемости среды и её проводимость.

### Свойства системы уравнений Максвелла.

- ✓ уравнения Максвелла – линейны и содержат только первые производные векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  по времени и пространственным координатам и первые степени плотности электрических зарядов  $\rho$  и плотности электрических токов  $\vec{j}$ . Свойство линейности уравнений Максвелла также связано с принципом суперпозиции: если два каких-нибудь поля удовлетворяют системе уравнений Максвелла, то их сумма тоже ей удовлетворяет.

- ✓ в общем случае уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей, так как магнитных зарядов, в отличие от электрических, в природе не существует. Однако в частном случае, в нейтральной однородной непроводящей среде, в которой  $\rho = 0$  и  $\vec{j} = 0$ , уравнения всё же приобретают почти симметричный вид:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0.\end{aligned}$$

- ✓ в число фундаментальных уравнений Максвелла не включено уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения электрического заряда,

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

т.к. это уравнение является следствием уравнений (2), (3) или (2д) и (3д). Сосчитаем дивергенцию правой и левой частей уравнения (3д):

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right).$$

Как мы вспомнили в предыдущем параграфе  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = 0$ , значит будет обращаться в ноль и правая часть уравнения:

$$\operatorname{div} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0.$$

Меняя местами производную по времени и производную по пространству (дивергенцию), получаем

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}).$$

Окончательно, учитывая уравнение (2д):

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

– дифференциальная форма закона сохранения заряда.

Из уравнений Максвелла следует важный вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов. При этом изменение его состояния обязательно имеет волновой характер. Поля такого рода называют *электромагнитными волнами*.

Именно благодаря существованию токов смещения  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  наряду с величиной  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  стало возможно возникновение электромагнитных волн. *Всякое изменение магнитного поля во времени*

лекции по физике (I семестр) доц. Т.А.Андреева

*порождает электрическое поле, а изменение электрического поля, в свою очередь, порождает магнитное поле.* За счет непрерывного взаимопревращения и взаимодействия поля не исчезают, и электромагнитное возмущение распространяется в пространстве.

Теория Максвелла не только предсказала существование электромагнитных волн, но и позволила установить все их основные свойства. Максвелл обосновал гипотезу о том, что и свет является электромагнитной волной. В 1887-1888 годах Генрих Герц получил, что электромагнитные волны распространяются, отражаются, преломляются,гибают препятствия и интерферируют – ведут себя как обычные волны. Он измерил скорость распространения электромагнитных волн и показал, что их свойства правильно описываются уравнениями Максвелла. Начиная с этого момента, теория Максвелла быстро получила всеобщее признание.

## §31. Волновое уравнение

В предыдущем параграфе, где рассматривалась фундаментальная система уравнений электродинамики – система уравнений Максвелла, утверждалось, что теория Максвелла не только объяснила все разрозненные явления электричества и магнетизма с единого похода, но и предсказала новые явления. Одним из таких явлений стало существование *электромагнитных волн*.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме (1д) – (4д) (см. §30):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Договоримся, что описываемая среда – вакуум, и в ней отсутствуют сторонние заряды и токи проводимости. Это немножко упростит вид рассматриваемых уравнений, но никак не скажется на общности вывода. Получается:

$$\varepsilon = 1, \mu = 1, \rho = 0, \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Наша система приобретает следующий вид.

Первое уравнение не изменяется:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1).$$

Второе уравнение:

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (2).$$

Третье уравнение:

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

В §18 была введена *электродинамическая константа*, в состав которой входит произведение  $\mu_0 \varepsilon_0$ :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \Rightarrow \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{1}{c} \Rightarrow \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Окончательно третье уравнение:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3).$$

Четвёртое уравнение остаётся прежним:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4).$$

Начнём преобразования. Вычислим ротор обеих частей уравнения (1)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

Сосчитаем левую и правую части отдельно. Вычислим  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}$  как двойное векторное произведение, которое можно представить как разность двойных скалярных произведений:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = [\nabla, [\nabla, \vec{E}]] = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \cdot \nabla) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - (\nabla \cdot \nabla) \cdot \vec{E}.$$

Оператор  $(\nabla \cdot \nabla)$  действует на вектор  $\vec{E}$ , хотя и стоит после него. Мы поменяли их местами, чтобы оператор действовал в обычном направлении. Скалярное умножение оператора набла на самого себя приводит к скалярному оператору, называемому оператором Лапласа (см. §6),  $(\nabla \cdot \nabla) = \nabla^2 = \Delta$ . Согласно уравнению (2) нашей системы уменьшаемое этой разности обращается в ноль:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\nabla^2 \vec{E} = -\Delta \vec{E}.\end{aligned}$$

В правой части меняем местами производную по координатам (rot) и по времени, так как порядок дифференцирования не имеет значения:

$$\operatorname{rot} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}.$$

Подставляя  $\operatorname{rot} \vec{B}$  из уравнения (3), получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Приравняв преобразованные левую и правую части, получаем:

$$\begin{aligned}-\Delta \vec{E} &= -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \quad (5)\end{aligned}$$

— уравнение для вектора  $\vec{E}$  электромагнитного поля.

Последнее выражение можно записать и в другом виде, используя оператор Д'Аламбера:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = \square \vec{E} = 0$$

где  $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  — оператор Д'Аламбера.

$$\boxed{\square \vec{E} = 0} \quad (5d)$$

— уравнение для вектора  $\vec{E}$  электромагнитного поля (через оператор Д'Аламбера).

Теперь преобразуем уравнение (3) нашей системы, также взяв ротор от обеих частей:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \left( \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Сосчитаем левую и правую части по-отдельности.

По аналогии с вычислениями выше и учётом уравнения (4) левая часть:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\Delta \vec{B}.$$

Правая часть с учётом уравнения (1):

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Приравняв левые и правые части после преобразований, получаем:

$$-\Delta \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0} \quad (6)$$

– уравнение для вектора  $\vec{B}$  электромагнитного поля или с использованием оператора Д'Аламбера:

$$\boxed{\square \vec{B} = 0} \quad (6d).$$

Уравнения (5, 6) или (5д, 6д) имеют одинаковую структуру – это дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных по времени и пространству. Попробуем выяснить, что представляют собой решения подобных уравнений. Чтобы не усложнять ещё сильнее и без того непростую задачу поиска, будем для описания пространства, в котором действует наше электромагнитное поле, использовать декартову систему координат. Тогда операторы, входящие в уравнения, можно записать следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0;$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Уравнения (5, 6) или (5д, 6д) – векторные уравнения. При переходе к проекциям векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , соответствующим выбранной системе координат, получится шесть одинаковых уравнений:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad \text{или} \quad \square E_x = 0;$$

и аналогично для остальных компонент вектора  $\vec{E}$ :  $\square E_y = 0$ ;  $\square E_z = 0$ ;

и вектора  $\vec{B}$ :  $\square B_x = 0$ ;  $\square B_y = 0$ ;  $\square B_z = 0$ .

Поскольку все уравнения имеют одинаковый вид, рассмотрим их решения для произвольной функции координат и времени  $a(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0. \quad (5\pi)$$

Упростим нашу задачу, предположим, что  $a$  зависит только от  $x$  и  $t$  и не зависит от  $y$  и  $z$ , то есть  $a = a(x, t)$ . Тогда уравнение для  $a$  упрощается – из него уходят производные по  $y$  и  $z$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \quad (5\pi').$$

Производные по  $x$  и  $t$  могут быть равны если, например,  $a$  зависит от этих переменных одинаково. Представим решение в виде функции, одновременно зависящей от координаты  $x$  точки в пространстве и от времени:

$$a = a(x - ct) = a(\xi)$$

где  $\xi = x - ct$  ( $x$  и  $t$  – переменные,  $c$  – некоторая константа, совпадающая с той, что стоит перед производной по времени). Проверим, является ли предложенная нами функция решением этого дифференциального уравнения. Для этого в первую очередь найдём все производные второго порядка, присутствующие в уравнении.

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\partial a}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial \xi}, & \text{т. к. } \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - ct) = 1, & \text{то } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \text{ и} \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial a}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

С производной по времени ситуация аналогичная

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{\partial a}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{\partial a}{\partial \xi}, & \text{т. к. } \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x - ct) = -c, & \text{то } \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi}. \\ \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial a}{\partial t} \right) = -c \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -c \frac{\partial a}{\partial \xi} \right) = (-c)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial a}{\partial \xi} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

Теперь подставим все найденные производные в само уравнение (5п):

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \cdot c^2 \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} = 0.$$

Полученное равенство свидетельствует о том, что функция вида  $a = a(x - ct)$  действительно является решением уравнения (5п). Несложно показать, что решением уравнения (5п') является также функция вида  $a = a(x + ct) = a(\eta)$ ,  $\eta = x + ct$ , для этого достаточно в предыдущих формулах заменить  $-c$  на  $+c$ .

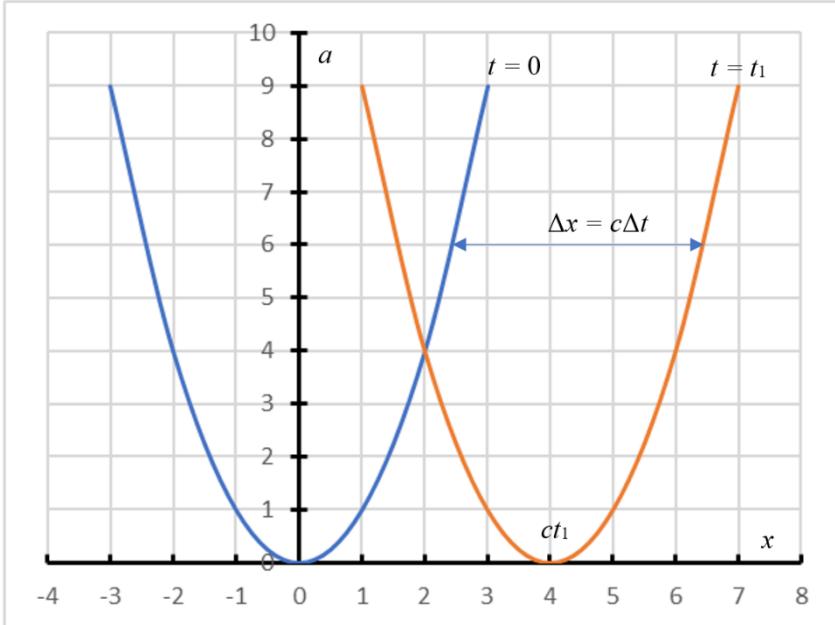
Что же у нас получилось, и какими свойствами обладает полученное решение?

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим какую-нибудь конкретную функцию такого вида, и изучим её поведение. Пусть

$$a = \xi^2 = (x - ct)^2, \quad \xi = x - ct.$$

Выберем два момента времени:  $t = 0$  и  $t = t_1$  – и построим соответствующие графики зависимости  $a(x, t)$ :  $x = \xi + ct$ .

Видно, что с течением времени график функции  $a$  перемещается вдоль координаты  $x$ , не изменяя своей формы. Это значит, что найденное решение описывает волну, распространяющуюся в пространстве (в нашем случае в положительном направлении оси  $OX$ ). За промежуток времени  $t_1$  все точки функции смещаются вдоль оси на расстояние равное  $ct_1$ , т.е. константа  $c$ , стоящая в функции, есть скорость распространения волны. Аналогичным образом ведут себя все функции, зависящие от  $\xi = x - ct$ . Все функции, зависящие  $\eta = x + ct$  также описывают волны, но распространяющиеся в противоположном направлении. Уравнение вида (5п), решением которого является волновая функция, называется *волновым уравнением*.



Уравнения (5, 6) или (5д, 6д) – волновые уравнения для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . В предыдущем параграфе утверждалось, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые, имеет смысл лишь совокупность этих полей – единое электромагнитное поле. Это электромагнитное поле существует в виде электромагнитных волн, распространяющихся в пространстве со скоростью  $c$ , стоящей в уравнениях. Опыты немецких физиков Вильгельма Вебера и Рудольфа Колльрауша по измерению электродинамической константы  $c$ , а также все последующие измерения показали, что *электродинамическая константа равна скорости света в вакууме*. Это обстоятельство, по-видимому, и позволило Максвеллу выдвинуть ещё одну гипотезу, что *свет – это электромагнитная волна*.

Волновое уравнение описывает множество процессов в окружающем мире. Одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0$$

описывает малые поперечные колебания струны (в том числе в струнных музыкальных инструментах) или распространение продольных волн в одномерных системах, двумерное уравнение – колебания мембран, например, в ударных инструментах.

Трёхмерное скалярное волновое уравнение описывает, например, распространение звука в различных средах

$$\Delta a - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0.$$

Векторное волновое уравнение описывает распространение продольных и поперечных волн в пространстве:

$$\Delta \vec{a} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2} = 0.$$

*Волновое уравнение* является простейшим из уравнений, описывающих распространение волн в пространстве. Большинство реальных волновых процессов описывается более сложными и часто нелинейными уравнениями, как, например, волны на поверхности жидкости.