



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки
КАФЕДРА _____ Прикладная математика

ОТЧЕТ
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

*Итерационные методы решения систем
линейных алгебраических уравнений
Вариант 1*

Студент _____
ФН2-51Б
(Группа)

(Подпись, дата)

Н. О. Акиншин

(И. О. Фамилия)

Студент _____
ФН2-51Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. С. Джагарян

(И. О. Фамилия)

Оглавление

1. Контрольные вопросы	3
----------------------------------	---

1. Контрольные вопросы

- 1) Почему условие $\|C\| < 1$ гарантирует сходимость итерационных методов?

Ответ. Любой одношаговый итерационный метод можно записать в виде

$$B_{k+1} \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_{k+1}} + Ax^k = b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Из этого вида можно прийти к следующему:

$$x^{k+1} = Cx^k + y \tag{1}$$

Подставив истинное решение x в (1), получим

$$x \equiv Cx + y$$

Тогда, вычитая из (1),

$$x^{k+1} - x = C(x^k - x)$$

Переходя к выражению с нормами

$$\|x^{k+1} - x\| = \|C(x^k - x)\| \leq \|C\| \|x^k - x\| \leq \dots \leq \|C\|^k \|x_0 - x\|$$

Если $\|C\| < 1$, то последовательность сходится $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к x для любого x_0 .

- 2) Каким следует выбирать итерационный параметр τ в методе простой итерации для увеличения скорости сходимости? Как выбрать начальное приближение x_0 ?

Ответ.

- 3) На примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными дайте геометрическую интерпретацию метода Якоби, метода Зейделя, метода релаксации.

Ответ. Рассмотрим метод Якоби.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = b_1, \\ a_{21}x_1^k + a_{22}x_2^{k+1} = b_2, \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $l_1 : a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = b_1$, и $l_2 : a_{21}x_1^k + a_{22}x_2^{k+1} = b_2$ — прямые, задаваемые уравнениями системы. Точка их пересечения и есть истинное решение системы (2). На рис. 1 видно, что с каждой итерацией точка $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ сходится к истинному решению x , причем каждая точка x^k лежит внутри области, ограниченной прямыми. Причем ни одна из итеративных точек не лежит на прямых.

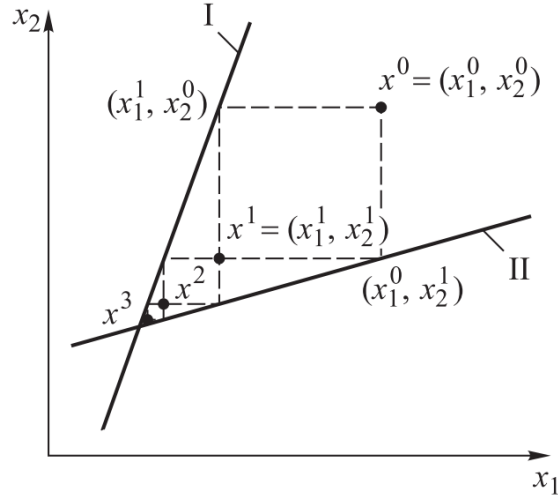


Рис. 1. Графический смысл метода Якоби

Рассмотрим метод Зейделя.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = b_1, \\ a_{21}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^{k+1} = b_2, \end{cases} \quad (3)$$

Аналогично, принимая за прямые $l_1 = a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = b_1$ и $l_2 = a_{21}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^{k+1} = b_2$ за прямые. Изобразим эти прямые на рис. 2. Из рис. 2 видно, что все точки лежат на прямых.

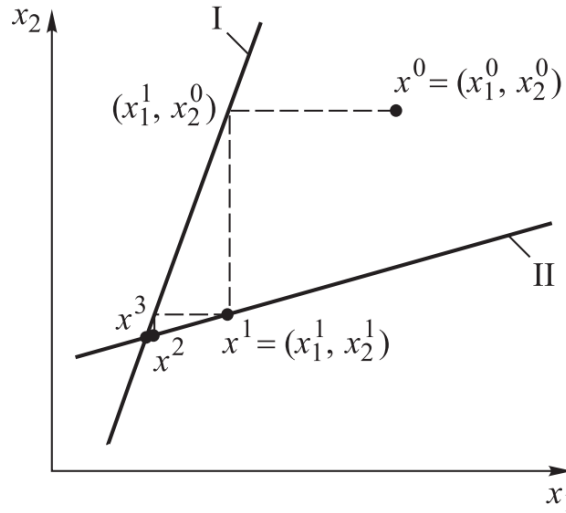


Рис. 2. Графический смысл метода Зейделя

Рассмотрим метод релаксации.

$$\begin{cases} a_{11}(x_1^{k+1} - x_1^k) = \omega(-a_{11}x_1^k - a_{12}x_2^k + f_1), \\ a_{22}(x_2^{k+1} - x_2^k) = \omega(-a_{21}x_1^k - a_{22}x_2^k + f_2) \end{cases} \quad (4)$$

Пусть $\mathbf{l}_1 = (a_{11}, -a_{12})$ – вектор нормали первой прямой, тогда величина

$$|\omega(-a_{11}x_1^k - a_{12}x_2^k + f_1)| = \omega d_1 \|\mathbf{l}_1\|,$$

где d_1 – расстояние от (x_1^k, x_2^k) до первой прямой.

- 4) При каких условиях сходятся метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя и метод релаксации? Какую матрицу называют положительно определенной?

Ответ.

- 5) Выпишите матрицу C для методов Зейделя и релаксации.

Ответ. Рассмотрим метод Зейделя. Будем считать, что $A = L + D + U$, где L – нижнетреугольная матрица, D – диагональная матрица, U – верхнетреугольная матрица. Тогда метод Зейделя можно представить в каноническом виде:

$$(D + L)(x^{k+1} - x^k) + Ax^k = f$$

Из этого вида получаем:

$$C = E - (D + L)^{-1}A$$

Рассмотрим метод релаксации. Метод релаксации можно представить в каноническом виде:

$$(D + L)\frac{x^{k+1} - x^k}{\omega} + Ax^k = f$$

Тогда

$$C = E - \omega(D + L)^{-1}A$$

- 6) Почему в общем случае для остановки итерационного процесса нельзя использовать критерий $\|x^k - x^{k+1}\| < \varepsilon$?

Ответ.

- 7) Какие еще критерии окончания итерационного процесса Вы можете предложить?

Ответ.