Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

ОТЧЕТ

К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ:

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Вариант 1

Студент	ФН2-51Б (Группа)	(Подпись, дата)	Н. О. Акиньшин (И. О. Фамилия)
Студент	ФН2-51Б (Группа)	(Подпись, дата)	А. С. Джагарян (И. О. Фамилия)

2024 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы

1) Почему условие $\|C\| < 1$ гарантирует сходимость итерационных методов?

Ответ. Любой одношаговый итерационный метод можно записать в виде

$$B_{k+1}\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau_{k+1}} + Ax^k = b,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Из этого вида можно прийти к следующему:

$$x^{k+1} = Cx^k + y \tag{1}$$

Подставив истинное решение x в (1), получим

$$x \equiv Cx + y$$

Тогда, вычитая из (1),

$$x^{k+1} - x = C(x^k - x)$$

Переходя к выражению с нормами

$$\|x^{k+1} - x\| = \|C(x^k - x)\| \leqslant \|C\|\|x^k - x\| \leqslant \ldots \leqslant \|C\|^k\|x_0 - x\|$$

Если $\|C\| < 1$, то последовательность сходится $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к x для любого x_0.

2) Каким следует выбирать итерационный параметр τ в методе простой итерации для увеличения скорости сходимости? Как выбрать начальное приближение x_0?

Ответ. Пусть x-истинное решение системы $Ax = f$. Метод простой итерации можно представить в виде $\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = f$, где x^k–kое приближение истинного решения. Введем обозначение $z^k = x^k - x$–погрешность. Тогда метод простой итерации можно переписать $\frac{z^{k+1}-z^k}{\tau} + Az^k = 0$. Отсюда $z^{k+1} = (E + \tau A)z^k$. Перейдем к норме

$$||z^{k+1}|| \leqslant ||(E + \tau A)|| \cdot ||z^k|| \leqslant ||(E + \tau A)||^{k+1} \cdot ||z^0|| = ||(E + \tau A)||^{k+1} \cdot ||x^0 - x||$$

Из данного соотношения можно сделать вывод, что параметр τ нужно выбрать так чтобы норма матрицы $(E + \tau A)$ была как можно меньше, а начальное приближение выбрать как можно ближе к истинному решению.

3) На примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными дайте геометрическую интерпретацию метода метода Якоби, метода Зейделя, метода релаксации.

Ответ. Рассмотрим метод Якоби.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = b_1, \\ a_{21}x_1^k + a_{22}x_2^{k+1} = b_2, \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $l_1 : a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = b_1$, и $l_2 : a_{21}x_1^k + a_{22}x_2^{k+1} = b_2$ – прямые, задаваемые уравнениями системы. Точка их пересечения и есть истинное решение системы (2). На рис. 1 видно, что с каждой итерацией точка $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ сходится к истинному решению x, причем каждая точка x^k лежит внутри области, ограниченных прямыми. Причем ни одна из итеративных точек не лежит на прямых.

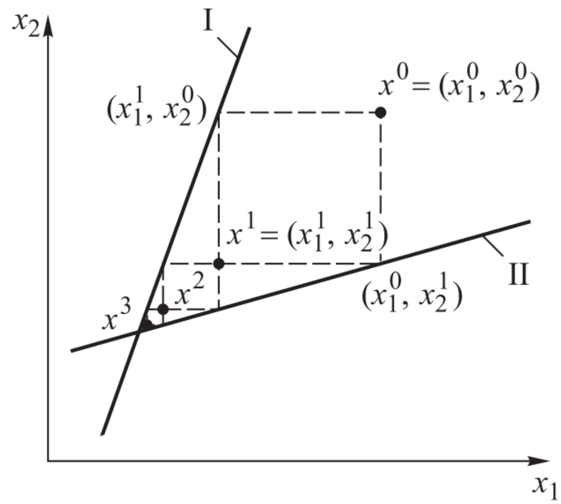

Рис. 1. Графический смысл метода Якоби

Рассмотрим метод Зейделя.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = b_1, \\ a_{21}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^{k+1} = b_2, \end{cases} \tag{3}$$

Аналогично, принимая за прямые $l_1 = a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = b_1$ и $l_2 = a_{21}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^{k+1} = b_2$ за прямые. Изобразим эти прямые на рис. 2. Из рис. 2 видно, что все точки лежат на прямых.

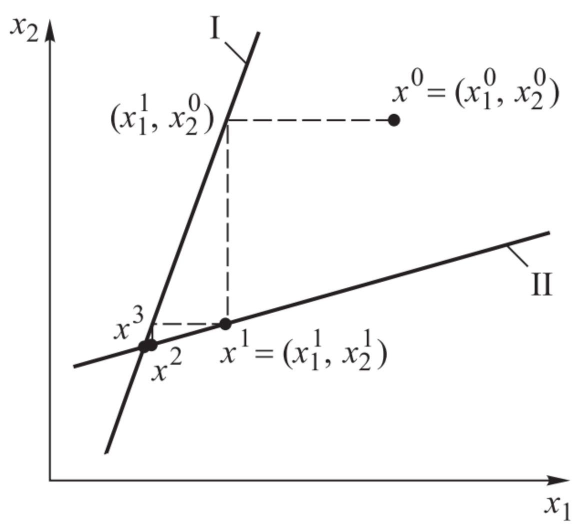

Рис. 2. Графический смысл метода Зейделя

Рассмотрим метод релаксации.

$$\begin{cases} a_{11}(x_1^{k+1} - x_1^k) = \omega(-a_{11}x_1^k - a_{12}x_2^k + f_1), \\ a_{22}(x_2^{k+1} - x_2^k) = \omega(-a_{21}x_1^k - a_{22}x_2^k + f_2) \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $\boldsymbol{l_1} = (a_{11}, -a_{12})$ – вектор нормали первой прямой, тогда величина

$$|\omega(-a_{11}x_1^k - a_{12}x_2^k + f_1)| = \omega d_1 \|\boldsymbol{l_1}\|,$$

где d_1 – расстояние от (x_1^k, x_2^k) до первой прямой. При этом направление смещения вдоль оси абсцисс определяется тем, в положительной или отрицательной полуплоскости относительно прямой I расположена точка (x_1^k, x_2^k). Заметим, что

$$|x_1^{k+1} - x_1^k| = \omega \frac{d_1}{|a_{11}/\|\boldsymbol{l_1}\||} = \omega \frac{d_1}{|\cos\beta_1|},$$

где β_1 – угол между первой прямой и осью координат.

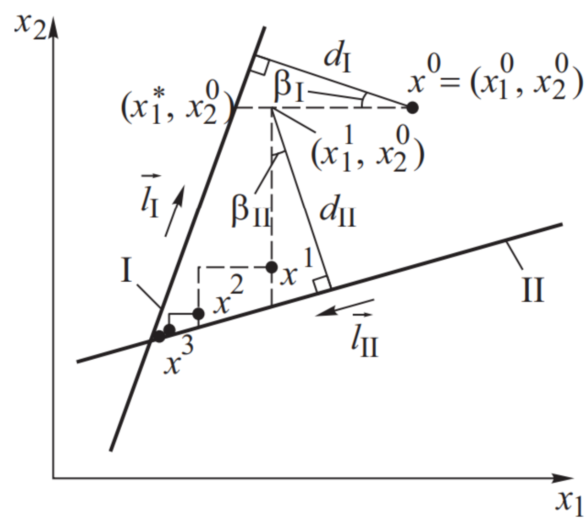

Рис. 3. Графический смысл метода релаксации при $\omega < 1$

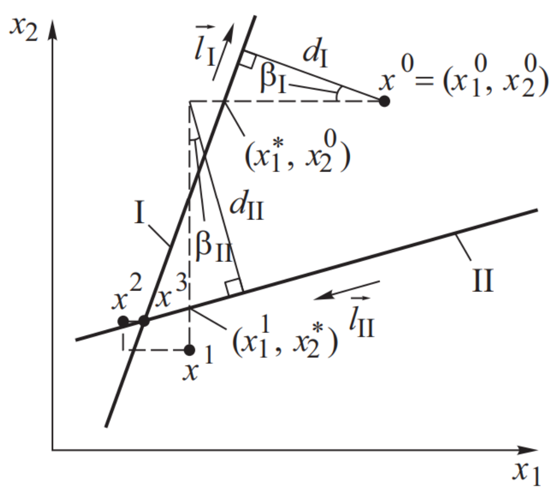

Рис. 4. Графический смысл метода релаксации при $\omega > 1$

4) При каких условиях сходятся метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя и метод релаксации? Какую матрицу называют положительно определенной?

   Ответ. Определение Матрица A называется положительно определенной $A > 0$, если $\forall x\,(Ax, x) > 0$.

   Рассмотрим теорему о сходимости стационарного итерационного метода.

   Теорема Пусть A – – симметричная положительно определенная матрица, $\tau > 0$ и выполнено неравенство

$$B - 0.5\tau A$$

Тогда стационарный итерационный метод

$$B\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = f$$

сходится при любом начальном приближении x^0.

Доказательство Пусть $x^k = x^k - x$–погрешность k–й итерации. Поскольку $f = Ax$, то

$$B\frac{z^{k+1}-z^k}{\tau} + Az^k = 0$$

Необходимо показать,что норма погрешности стремится к нулю при $k \to \infty$. Проведем преобразования:

$$z^{k+1} = (E - \tau B^{-1}A)z^k$$

$$Az^{k+1} = (A - \tau AB^{-1}A)z^k$$

$$(Az^{k+1}, z^{k+1}) = ((A - \tau AB^{-1}A)z^k, (E - \tau B^{-1}A)z^k) =$$

$$(Az^k, z^k) - \tau(Az^k, B^{-1}Az^k) - \tau(AB^{-1}Az^k, z^k) + \tau^2(AB^{-1}Az^k, B^{-1}Az^k).$$

В силу симметрии A имеем

$$(AB^{-1}Az^k, z^k) = (B^{-1}Az^k, Az^k)$$

Следовательно,

$$J_{k+1} = (Az^{k+1}, z^{k+1}) = J_k - 2\tau((B - 0.5\tau A)B^{-1}Az^k, B^{-1}Az^k) + \tau^2(AB^{-1}Az^k, B^{-1}Az^k)$$

Если $B - 0.5\tau A > 0$, то $J_{k+1} \leqslant J_k, J_k \geqslant 0$, так как $A > 0$. Отсюда заключаем, что последовательность J_k монотонно не возрастает и ограничена нулем снизу. Поэтому существует предел последовательности:

5) Выпишите матрицу C для методов Зейделя и релаксации.

Ответ. Рассмотрим метод Зейделя. Будем считать, что $A = L + D + U$, где L – нижнетреугольная матрица, D – диагональная матрица, U – верхнетреугольная матрица. Тогда метод Зейделя можно представить в каноническом виде:

$$(D + L)(x^{k+1} - x^k) + Ax^k = f$$

Из этого вида получаем:

$$C = E - (D + L)^{-1}A$$

Рассмотрим метод релаксации. Метод релаксации можно представить в каноническом виде:

$$(D + \omega L)\frac{x^{k+1}-x^k}{\omega} + Ax^k = f$$

Тогда

$$C = E - \omega(D + \omega L)^{-1}A$$

6) Почему в общем случае для остановки итерационного процесса нельзя использовать критерий $\|x^k - x^{k+1}\| < \varepsilon$?

Ответ. Алгоритм может получить такие значения x_k, что $\|x^k - x^{k+1}\| < \varepsilon$, но при этом x_k будет далеко от x^*. Приведем пример:

7) Какие еще критерии окончания итерационного процесса Вы можете предложить?

Ответ.

Рассмотрим критерий останова $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$. Его достоинством можно считать простоту вычисления, однако он обладает существенным недостатком. Если алгоритм уменьшает скорость схождения, но при этом не сходится к истинному решению, то данный критерий вынудит алгоритм остановиться, а также не отражает связи между истинным решением и полученным:

$$\|x^{k+1} - x^k\| = \|x^{k+1} - x + x - x^k\| \leqslant \|x^{k+1} - x\| + \|x^k - x\| \nleqslant \varepsilon$$

Рассмотрим критерий останова $\dfrac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\| + \varepsilon_0} < \varepsilon$. Его достоинством по сравнению с предыдущем критерием является то, что он вычисляет разность между решениями относительно предыдущего решения, то есть он может заставить алгоритм остановиться только тогда, когда относительная скорость схождения будет достаточно малой, в отличие от абсолютной, как это указано в предыдущем критерии. Недостатком можно считать наличие двух параметров $\varepsilon_0,\ \varepsilon$.

Рассмотрим критерий останова $\|Ax^k - f\| < \varepsilon$. Среди достоинств можно отметить, что он не реагирует на скорость схождения алгоритма. Однако он может оказаться неприемлимым, когда норма матрицы A достаточно мала.

Рассмотрим критерий останова $\dfrac{\|r^k\|}{\|r^0\|} < \varepsilon$. Достоинством можно считать не такая сильная зависимость от нормы матрицы A. Недостатком является постоянное вычисления вектора невязки и хранение самого первого приближения.

Рассмотрим критерий останова $\dfrac{\|C\|}{1 - \|C\|}\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$.

Заметим, что

$$\|x^{k+1} - x\| = \|C(x^k + 1 - x^k) + C(x^k - x)\| \leqslant \|C\|\|x^{k+1} - x^k\| + \|C\|\|x^k - x\|$$

Тогда

$$\|z^k\| \leqslant \frac{\|C\|}{1 - \|C\|}\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$$

Благодаря данному критерию можно ограничивать погрешность между истинным и полученным решением. Недостатком является необходимость вычислять матрицу C, хранить её и вычислять норму.

2. Дополнительные вопросы

1) Сформулировать теорему о сжимающем отображении

Ответ.

Определение. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство. Отображение $g : X \to X$ называется сжимающим $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in (0,\, 1) : \forall x,\, y \in X : \rho(g(x),\, g(y)) \leqslant \alpha\, \rho(x, y)$

Теорема. Любое сжимающее отображение $g : X \to X$ в полном метрическом пространстве (X, ρ) имеет, и притом только одну неподвижную точку, то есть $\exists!\, x \in X : g(x) = x$

2) Чему равно значение параметра τ, при котором норма матрицы C минимальна?

Ответ.

3) На примере системы из 2-х уравнений обьяснить, как влияет на сходимость итерационного метода порядок уравнений в системе(что произойдёт, если уравнение поменять местами и почему).

   Ответ.

4) Для чего в расчетах используется матрица C?

   Ответ.

   Матрица C в расчетах может использоваться для вычисления следующего значения x^{k+1} по формуле

   $$x^{k+1} = Cx^k + y.$$

   Однако такое использование матрицы C неэффективно в силу итерационного умножения матрицы на вектор. Также матрица C может использоваться в критерии останова:

   $$\frac{\|C\|}{1 - \|C\|}\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon,$$

   который связан с погрешностью решения. Тогда матрицу C нужно будет только вычислить и хранить, что делает её использование эффективнее.