**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»**
**(МГТУ им. Н. Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

# ОТЧЕТ
# *К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ*
# *НА ТЕМУ:*

## *Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений*
## *Вариант 1*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Студент | ФН2-51Б<br>(Группа) | (Подпись, дата) | Н. О. Акиньшин<br>(И. О. Фамилия) |
| Студент | ФН2-51Б<br>(Группа) | (Подпись, дата) | А. С. Джагарян<br>(И. О. Фамилия) |

2024 г.

# Оглавление

# 1. Исходные данные

1. Тестовый пример 1
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 + x_4 = 2, \\ x_4 = 1. \end{cases} \tag{1}$$
Точное решение: $x = (1, 1, 1, 1)^T$.
$\operatorname{cond}_1 A = 8,\ \operatorname{cond}_\infty A = 8$
2. Тестовый пример 2
$$\begin{cases} x_4 = 1, \\ x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases} \tag{2}$$
Точное решение: $x = (1, 1, 1, 1)^T$.
$\operatorname{cond}_1 A = 8,\ \operatorname{cond}_\infty A = 8$
3. Тестовый пример 3
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 15, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 22 \end{cases} \tag{3}$$
Матрица не совместна, $\operatorname{cond} A = \infty$.
4. Тестовый пример 4
$$\begin{cases} 10x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 25, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 14, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases} \tag{4}$$
Точное решение: $x = (2, 1, -0.5, 0.5)^T$.
$\operatorname{cond}_1 A \approx 240.55,\ \operatorname{cond}_\infty A \approx 269.19$
5. Тестовый пример 5
$$\begin{cases} 28.589x_1 - 0.008x_2 + 2.406x_3 + 19.24x_4 = 30.459, \\ 14.436x_1 - 0.001x_2 + 1.203x_3 + 9.624x_4 = 18.248, \\ 120.204x_1 - 0.032x_2 + 10.024x_3 + 80.144x_4 = 128.156, \\ -57.714x_1 + 0.016x_2 - 4.812x_3 - 38.478x_4 = -60.908. \end{cases} \tag{5}$$
Точное решение: $x = (1, 1000, -20, 3)^T$.
$\operatorname{cond}_1 A \approx 122414849.9,\ \operatorname{cond}_\infty A \approx 109686235.3.$

6. Система варианта 1

$$\begin{cases} 16.3820x_1 - 2.0490x_2 - 41.8290x_3 + 16.3920x_4 = 33.6130 \\ 307.6480x_1 - 38.4660x_2 - 840.3660x_3 + 312.5280x_4 = 710.3420 \\ 0.4560x_1 - 0.0570x_2 - 1.1770x_3 + 0.4560x_4 = 0.9490 \\ 23.2720x_1 - 2.9090x_2 - 66.3090x_3 + 23.8720 = 57.6730 \end{cases} \tag{6}$$

7. Система варианта 2

$$\begin{cases} 31.2000x_1 - 1.3200x_2 - 7.6800x_3 + 4.0900x_4 = -83.3200 \\ 7.2300x_1 - 126.0000x_2 + 7.1400x_3 + 3.0400x_4 = 38.9000 \\ 9.4900x_1 + 6.4000x_2 + 6.0000x_3 + 8.4500x_4 = -56.7000 \\ 2.6800x_1 - 3.2900x_2 + 0.2800x_3 + 13.4000x_4 = -504.0900 \end{cases} \tag{7}$$

# 2. Краткое описание используемых алгоритмов

## 2.1. Метод Гаусса

Метод Гаусса — это алгоритм решения систем линейных уравнений. Основная идея заключается в преобразовании системы уравнений к треугольному виду с помощью элементарных преобразований строк матрицы, а затем нахождении решения методом обратного хода.

## 2.2. QR-разложение

QR-разложение — это метод разложения матрицы на произведение двух матриц: ортогональной матрицы Q и верхнетреугольной матрицы R.

# 3. Контрольные вопросы

1. Каковы условия применимости метода Гаусса без выбора и с выбором ведущего элемента?
   **Ответ**. В случае, если применяется метод Гаусса без выбора ведущего элемента, то условие применимости алгоритма заключается в $a_{ii} \neq 0$, где $a_{ii}$ – элемент матрицы коэффициентов $A$. Если же используется выбор ведущего элемента, то достаточно требовать от матрицы наличия в соответствующих строке или столбце наличие ненулевых элементов.
2. Докажите, что если $\det A \neq 0$, то при выборе главного элемента в столбце среди элементов, лежащих не выше главной диагонали, всегда найдется хотя бы один элемент, отличный от нуля.
   **Доказательство**. Пусть $\det A \neq 0$ и все элементы, лежащие не выше главной диагонали, равны 0, то есть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots\dots\dots & & 0 \end{pmatrix}$$

   Тогда матрица $A$ имеет верхнетреугольный вид, тогда $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$. Получаем, что $\det A = 0$, что противоречит с изначальным условием, значит существует хотя бы 1 не нулевой элемент, который находиться не выше главной диагонали. Пусть $A_1 \sim A_2$ и $\det A \neq 0$, тогда $\det A_2 \neq 0$. Тогда пусть существует k ненулевых элементов в разных столбцах, находящихся ниже главной диагонали, причем $k < n$. Тогда переставим строки так, чтобы эти элементы находились на главной диагонали, причем вычтем переставленные строки так, чтобы итоговая матрица имела нижнетреугольный вид. Заметим, что хотя бы 1 элемент на главной диагонале остался равным 0, следовательно $\det A = 0$ – противоречие, следовательно $k = n$.

3. В методе Гаусса с полным выбором ведущего элемента приходится не только переставлять уравнения, но и менять нумерацию неизвестных. Предложите алгоритм, позволяющий восстановить первоначальный порядок неизвестных.

   **Ответ**. Будем хранить перестановку переменных $x_i \to x_j$ в виде $(i, j)$. Тогда создадим переменную *permutations*, которая будет хранить все перестановки.

   В общем виде:
$$permutations = ((n_1, n_2), (n_3, n_4), \ldots, (n_{k-1}, n_k)),$$
   где $n_i$ - порядковый номер переменной. При добавлении новой нумерации двух переменных следует записать их в конец *permutations*. Для восстановления порядка, необходимо проделать замены в обратном порядке, записанном в *permutations*:
$$recover = ((n_k, n_{k-1}), (n_{k-2}, n_{k-3}), \ldots, (n_2, n_1)).$$
   Выполняя замены, записанные в *recover*, можно получить изначальный порядок переменных.

4. Оцените количество арифметических операций, требуемых для QR-разложения произвольной матрицы $A$ размера $n \times n$.

   **Ответ**.

5. Что такое число обусловленности и что оно характеризует? Имеется ли связь между обусловленностью и величиной определителя матрицы? Как влияет выбор нормы матрицы на оценку числа обусловленности?

   **Ответ**. Величину
$$\operatorname{cond} A = \|A\| \|A^{-1}\|$$
   называют числом обусловленности матрицы A. Оно показывает влияние погрешностей правой части $b$ на точное решение $x$.

   Покажем связь между $\operatorname{cond} A$ и $\det A$. Пусть $\det A \neq 0$.
$$\begin{cases} A(x + \Delta x) = b + \Delta b, \\ Ax = b \end{cases}$$
   Тогда справедливо
$$A\Delta x = \Delta b$$
   В силу неотрицательности определителя
$$\Delta x = A^{-1}\Delta b$$
   Тогда перейдем к неравенству
$$\|\Delta x\| \leqslant \|A^{-1}\| \|\Delta b\|$$

6. Как упрощается оценка числа обусловленности, если мат- рица является:

   а) диагональной; б) симметричной; в) ортогональной; г) положительно определенной; д) треугольной?

   **Ответ**. а) Справедлива следующая оценка

$$\operatorname{cond} A \geqslant \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|},$$

   но все собсвтенные числа находяться на диагонале в силу диагонального вида матрицы. Тогда

$$\operatorname{cond} A \geqslant \frac{|max(a_{ii})|}{|min(a_{ii})|}, \quad i = 1, 2, 3 \dots n$$

7. Применимо ли понятие числа обусловленности к вырожденным матрицам?

   **Ответ**. Нет, потому что $\operatorname{cond} A = \|A\| \|A^{-1}\|$, но если $\det A = 0$, то не существует $A^{-1}$.
8. В каких случаях целесообразно использовать метод Гаусса, а в каких — методы, основанные на факторизации матрицы?
9. Как можно объединить в одну процедуру прямой и обратный ход метода Гаусса? В чем достоинства и недостатки такого подхода?
10. Объясните, почему, говоря о векторах, норму $\|\cdot\|_1$ часто называют октаэдрической, норму $\|\cdot\|_2$ — шаровой, а норму $\|\cdot\|_\infty$ — кубической.