



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки
КАФЕДРА _____ Прикладная математика

ОТЧЕТ
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

*Итерационные методы решения систем
линейных алгебраических уравнений
Вариант 1*

Студент	ФН2-51Б (Группа)	_____ (Подпись, дата)	Н. О. Акиншин (И. О. Фамилия)
Студент	ФН2-51Б (Группа)	_____ (Подпись, дата)	А. С. Джагарян (И. О. Фамилия)

Оглавление

1. Контрольные вопросы	3
2. Дополнительные вопросы	9

1. Контрольные вопросы

- 1) Почему условие $\|C\| < 1$ гарантирует сходимость итерационных методов?

Ответ. Любой одношаговый итерационный метод можно записать в виде

$$B_{k+1} \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_{k+1}} + Ax^k = b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Из этого вида можно прийти к следующему:

$$x^{k+1} = Cx^k + y \quad (1)$$

Подставив истинное решение x в (1), получим

$$x \equiv Cx + y$$

Тогда, вычитая из (1),

$$x^{k+1} - x = C(x^k - x)$$

Переходя к выражению с нормами

$$\|x^{k+1} - x\| = \|C(x^k - x)\| \leq \|C\| \|x^k - x\| \leq \dots \leq \|C\|^k \|x_0 - x\|$$

Если $\|C\| < 1$, то последовательность сходится $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к x для любого x_0 .

- 2) Каким следует выбирать итерационный параметр τ в методе простой итерации для увеличения скорости сходимости? Как выбрать начальное приближение x_0 ?

Ответ. Пусть x -истинное решение системы $Ax = f$. Метод простой итерации можно представить в виде $\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + Ax^k = f$, где x^k -кое приближение истинного решения. Введем обозначение $z^k = x^k - x$ -погрешность. Тогда метод простой итерации можно переписать $\frac{z^{k+1} - z^k}{\tau} + Az^k = 0$. Отсюда $z^{k+1} = (E + \tau A)z^k$. Перейдем к норме

$$\|z^{k+1}\| \leq \|(E + \tau A)\| \cdot \|z^k\| \leq \|(E + \tau A)\|^{k+1} \cdot \|z^0\| = \|(E + \tau A)\|^{k+1} \cdot \|x^0 - x\|$$

Из данного соотношения можно сделать вывод, что параметр τ нужно выбрать так чтобы норма матрицы $(E + \tau A)$ была как можно меньше, а начальное приближение выбрать как можно ближе к истинному решению.

- 3) На примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными дайте геометрическую интерпретацию метода Якоби, метода Зейделя, метода релаксации.

Ответ. Рассмотрим метод Якоби.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = b_1, \\ a_{21}x_1^k + a_{22}x_2^{k+1} = b_2, \end{cases} \quad (2)$$

Пусть $l_1 : a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = b_1$, и $l_2 : a_{21}x_1^k + a_{22}x_2^{k+1} = b_2$ - прямые, задаваемые уравнениями системы. Точка их пересечения и есть истинное решение системы (2). На рис. 1 видно, что с каждой итерацией точка $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ сходится к истинному решению x , причем каждая точка x^k лежит внутри области, ограниченных прямыми. Причем ни одна из итеративных точек не лежит на прямых.

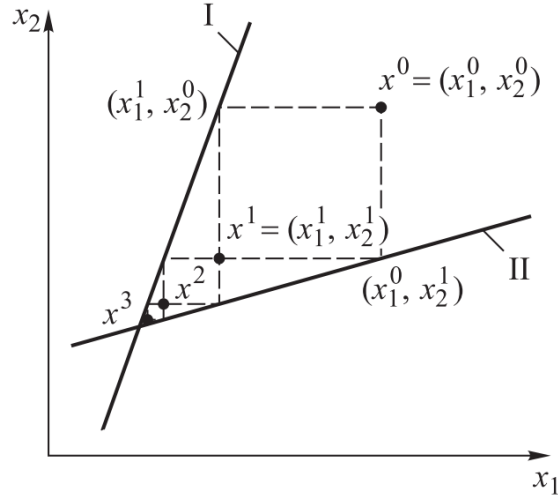


Рис. 1. Графический смысл метода Якоби

Рассмотрим метод Зейделя.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = b_1, \\ a_{21}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^{k+1} = b_2, \end{cases} \quad (3)$$

Аналогично, принимая за прямые $l_1 = a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = b_1$ и $l_2 = a_{21}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^{k+1} = b_2$ за прямые. Изобразим эти прямые на рис. 2. Из рис. 2 видно, что все точки лежат на прямых.

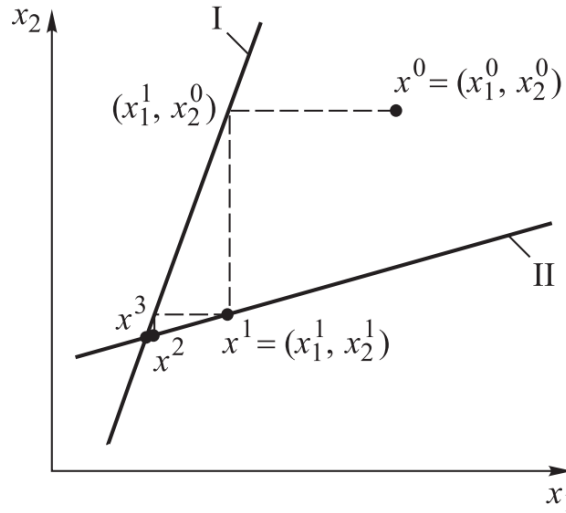


Рис. 2. Графический смысл метода Зейделя

Рассмотрим метод релаксации.

$$\begin{cases} a_{11}(x_1^{k+1} - x_1^k) = \omega(-a_{11}x_1^k - a_{12}x_2^k + f_1), \\ a_{22}(x_2^{k+1} - x_2^k) = \omega(-a_{21}x_1^k - a_{22}x_2^k + f_2) \end{cases} \quad (4)$$

Пусть $\mathbf{l}_1 = (a_{11}, -a_{12})$ — вектор нормали первой прямой, тогда величина

$$|\omega(-a_{11}x_1^k - a_{12}x_2^k + f_1)| = \omega d_1 \|\mathbf{l}_1\|,$$

где d_1 – расстояние от (x_1^k, x_2^k) до первой прямой. При этом направление смещения вдоль оси абсцисс определяется тем, в положительной или отрицательной полуплоскости относительно прямой I расположена точка (x_1^k, x_2^k) . Заметим, что

$$|x_1^{k+1} - x_1^k| = \omega \frac{d_1}{|a_{11}/\|l_1\||} = \omega \frac{d_1}{|\cos \beta_1|},$$

где β_1 – угол между первой прямой и осью координат.

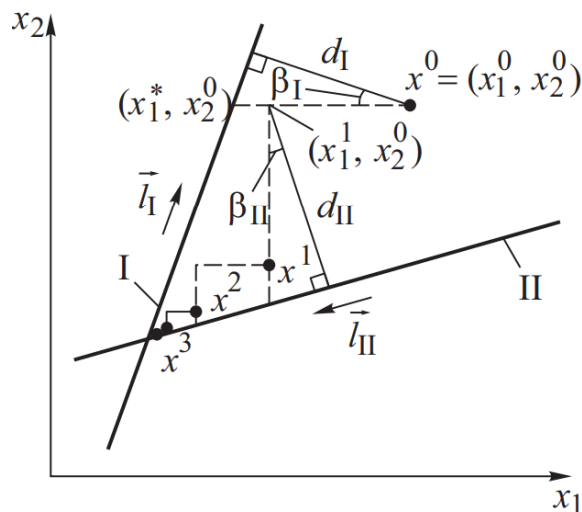


Рис. 3. Графический смысл метода релаксации при $\omega < 1$

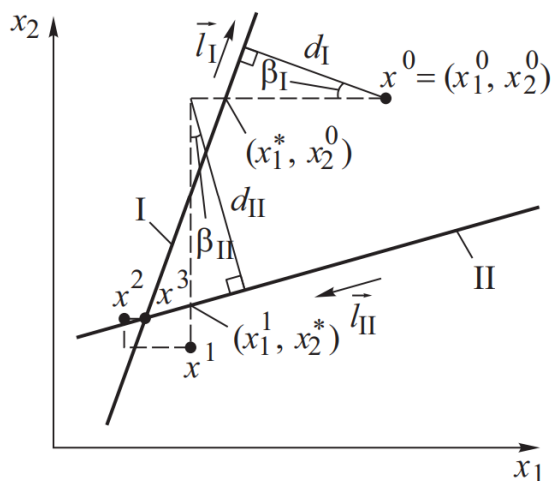


Рис. 4. Графический смысл метода релаксации при $\omega > 1$

- 4) При каких условиях сходятся метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя и метод релаксации? Какую матрицу называют положительно определенной?

Ответ. Определение Матрица A называется положительно определенной $A > 0$, если $\forall x (Ax, x) > 0$.

Рассмотрим теорему о сходимости стационарного итерационного метода.

Теорема Пусть A – симметричная положительно определенная матрица, $\tau > 0$ и выпол-

нено неравенство

$$B - 0.5\tau A$$

Тогда стационарный итерационный метод

$$B \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + Ax^k = f$$

сходится при любом начальном приближении x^0 .

Доказательство Пусть $x^k = x^k - x$ – погрешность k -й итерации. Поскольку $f = Ax$, то

$$B \frac{z^{k+1} - z^k}{\tau} + Az^k = 0$$

Необходимо показать, что норма погрешности стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Проведем преобразования:

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= (E - \tau B^{-1}A)z^k \\ Az^{k+1} &= (A - \tau AB^{-1}A)z^k \\ (Az^{k+1}, z^{k+1}) &= ((A - \tau AB^{-1}A)z^k, (E - \tau B^{-1}A)z^k) = \\ &= (Az^k, z^k) - \tau(Az^k, B^{-1}Az^k) - \tau(AB^{-1}Az^k, z^k) + \tau^2(AB^{-1}Az^k, B^{-1}Az^k). \end{aligned}$$

В силу симметрии A имеем

$$(AB^{-1}Az^k, z^k) = (B^{-1}Az^k, Az^k)$$

Следовательно,

$$J_{k+1} = (Az^{k+1}, z^{k+1}) = J_k - 2\tau((B - 0.5\tau A)B^{-1}Az^k, B^{-1}Az^k) + \tau^2(AB^{-1}Az^k, B^{-1}Az^k)$$

$$J_{k+1} = J_k - 2\tau((B - 0.5\tau A)B^{-1}Az^k, B^{-1}Az^k)$$

Если $B - 0.5\tau A > 0$, то $J_{k+1} \leq J_k$, $J_k \geq 0$, так как $A > 0$. Отсюда заключаем, что последовательность J_k монотонно не возрастает и ограничена нулем снизу. Поэтому существует предел последовательности: $\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = J$. Положительная определенность матрицы $B - 0.5\tau A$ означает, что верна оценка

$$((B - 0.5\tau A)y, y) \geq \delta \|y\|^2$$

Следовательно,

$$J_{k+1} - J_k + 2\tau\delta \|B^{-1}Az^k\|^2 \leq 0$$

откуда при $k \rightarrow \infty$ получим $\lim_{k \rightarrow \infty} \|B^{-1}Az^k\|^2 = 0$. Введем обозначение $w_k = B^{-1}Az^k$, тогда $z^k = A^{-1}Bw_k$. Отсюда $\|z^k\| \leq \|A^{-1}B\| \cdot \|w_k\|$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k\| = 0$.

Следствие Пусть A – симметричная положительно определенная матрица с диагональным преобладанием, т.е.

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1 \dots n.$$

Тогда метод Якоби сходится.

Доказательство Условие сходимости в данном случае имеет вид $D - 0.5A \Rightarrow A < 2D$.

Рассмотрим положительно определенную форму

$$(Ax, x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j.$$

Для нее имеем оценку

$$(Ax, x) \leq 0.5 \sum_{i,j} |a_{ij}| x_i^2 + 0.5 \sum_{i,j} |a_{ij}| x_j^2 = 0.5 \sum_{i,j} |a_{ij}| x_i^2 + 0.5 \sum_{i,j} |a_{ji}| x_i^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}| x_i^2$$

Последнее равенство верно в силу симметричности матрицы A . Отсюда

$$(Ax, x) \leq \sum_{i,j} |a_{ij}| x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 (|a_{ii}| + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|)$$

Однако вследствие положительной определенности матрицы $a_{ii} > 0, i = 1 \dots n$. Используя условие диагонального преобладания, имеем

$$(Ax, x) < \sum_{i=1}^n x_i^2 (a_{ii} + a_{ii}) = 2(Dx, x)$$

Следствие Пусть A -симметричная положительно определенная матрица. Тогда метод релаксации сходится при $0 < w < 2$. В частности, сходится метод Зейделя ($w = 1$)

Доказательство Для данного метода $B = D + wA_1; \tau = w; A = A_1 + D + A_2$. В случае симметричной матрицы имеем $A_1^* = A_2$. Нужно показать, что

$$(D + wA_1) - 0.5w(A_1 + D + A_2) > 0.$$

При $0 < w < 2$

$$((B - 0.5\tau A)x, x) = (1 - 0.5w)(Dx, x) + 0.5w(A_1x, x) - 0.5w(A_2x, x) = (1 - 0.5w)(Dx, x) > 0$$

Так как D – положительная определенная матрица.

Следствие Метод простой итерации сходится при $\tau < 2/\lambda_{\max}$, где λ_{\max} – максимальное собственное значение симметричной положительно определенной матрицы A .

Доказательство Условие $B - 0.5\tau A > 0$ в данном случае есть $E - 0.5\tau A > 0$, что эквивалентно условию положительности минимального собственного значения матрицы $E - 0.5\tau A$, т.е. $1 - 0.5\tau\lambda_{\max} > 0$

- 5) Выпишите матрицу C для методов Зейделя и релаксации.

Ответ. Рассмотрим метод Зейделя. Будем считать, что $A = L + D + U$, где L – нижнетреугольная матрица, D – диагональная матрица, U – верхнетреугольная матрица. Тогда метод Зейделя можно представить в каноническом виде:

$$(D + L)(x^{k+1} - x^k) + Ax^k = f$$

Из этого вида получаем:

$$C = E - (D + L)^{-1}A$$

Рассмотрим метод релаксации. Метод релаксации можно представить в каноническом виде:

$$(D + \omega L) \frac{x^{k+1} - x^k}{\omega} + Ax^k = f$$

Тогда

$$C = E - \omega(D + \omega L)^{-1}A$$

- 6) Почему в общем случае для остановки итерационного процесса нельзя использовать критерий $\|x^k - x^{k+1}\| < \varepsilon$?

Ответ. Потому, что $\|x^k - x^{k+1}\|$ может быть меньше ε , однако x^k будет плохо приближать истинное решение т.е. для любого ε, δ в общем случае можно подобрать такие уравнения, чтобы $\|x^k - x^{k+1}\| < \varepsilon$, но $\|x^k - x\| > \delta$. Рассмотрим на примере системы из 2-ух уравнений. В таком случае уравнения будут представлять прямые, а решение системы пересечение прямых. Чтобы сделать маленькую разницу между предыдущим и текущим приближением нужно задать прямые достаточно параллельно т.е. острый угол между прямыми сделать достаточно маленьким.

- 7) Какие еще критерии окончания итерационного процесса Вы можете предложить?

Ответ.

Рассмотрим критерий останова $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$. Его достоинством можно считать простоту вычисления, однако он обладает существенным недостатком. Если алгоритм уменьшает скорость схождения, но при этом не сходится к истинному решению, то данный критерий вынудит алгоритм остановиться, а также не отражает связи между истинным решением и полученным:

$$\|x^{k+1} - x^k\| = \|x^{k+1} - x + x - x^k\| \leq \|x^{k+1} - x\| + \|x^k - x\| \not\leq \varepsilon$$

Рассмотрим критерий останова $\frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\| + \varepsilon_0} < \varepsilon$. Его достоинством по сравнению с предыдущим критерием является то, что он вычисляет разность между решениями относительно предыдущего решения, то есть он может заставить алгоритм остановиться только тогда, когда относительная скорость схождения будет достаточно малой, в отличие от абсолютной, как это указано в предыдущем критерии. Недостатком можно считать наличие двух параметров $\varepsilon_0, \varepsilon$.

Рассмотрим критерий останова $\|Ax^k - f\| < \varepsilon$. Среди достоинств можно отметить, что он не реагирует на скорость схождения алгоритма. Однако он может оказаться неприемлимым, когда норма матрицы A достаточно мала.

Рассмотрим критерий останова $\frac{\|r^k\|}{\|r^0\|} < \varepsilon$. Достоинством можно считать не такая сильная зависимость от нормы матрицы A . Недостатком является, что если мы выберем x_0 достаточно близко к истинному решению x , то невязка r_0 будет близко к 0, и при вычислении критерия будет большая погрешность.

Рассмотрим критерий останова $\frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$.

Заметим, что

$$\|x^{k+1} - x\| = \|C(x^k + 1 - x^k) + C(x^k - x)\| \leq \|C\| \|x^{k+1} - x^k\| + \|C\| \|x^k - x\|$$

Тогда

$$\|z^k\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$$

Благодаря данному критерию можно ограничивать погрешность между истинным и полученным решением. Недостатком является необходимость вычислять матрицу C , хранить её и вычислять норму.

2. Дополнительные вопросы

- 1) Сформулировать теорему о сжимающем отображении

Ответ. Определение. (X, ρ) называют метрическим пространством, если задана функция $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

- (a) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (b) $\forall x, y \in X \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- (c) $\forall x, y, z \in X \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$;

Определение. Метрическое пространство (X, ρ) называется полным, если в нем сходится любая фундаментальная последовательность.

Пример полного м.п.: Пусть $X = \mathbb{R}$ и для любых чисел $x, y \in X \rho(x, y) = |x - y|$. Тогда по критерию Коши, числовая последовательность сходится \Leftrightarrow она является фундаментальной.

Пример неполного м.п.: Пусть $Y = \mathbb{Q}$ и для любых $x, y \in Y \rho(x, y) = |x - y|$

Определение. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство. Отображение $g : X \rightarrow X$ называется сжимающим $\Leftrightarrow \exists \alpha \in (0, 1) : \forall x, y \in X : \rho(g(x), g(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$

Теорема. Любое сжимающее отображение $g : X \rightarrow X$ в полном метрическом пространстве (X, ρ) имеет, и притом только одну неподвижную точку, то есть $\exists! x \in X : g(x) = x$

- 2) Чему равно значение параметра τ , при котором норма матрицы C минимальна?

Ответ. 1)Общий случай. Любой итерационный алгоритм можно представить в виде.

$$B_{k+1} \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau^k} + Ax^k = f$$

Приведем к виду $x^{k+1} = Cx^k + y$. Получим

$$x^{k+1} = (E - \tau_k B_{k+1}^{-1} A)x^k + \tau_k B_{k+1}^{-1} f$$

Тогда $C = E - \tau_k B_{k+1}^{-1} A, y = \tau_k B_{k+1}^{-1} f$. Тогда норму матрицы C можно найти $\|C\| = \|E - \tau_k B_{k+1}^{-1} A\|$. Из соотношения можно сделать вывод, что для того чтобы $\|C\|$ была минимальна нужно выбирать параметры τ_k так, чтобы $\|E - \tau_k B_{k+1}^{-1} A\|$ была минимальной.

2) Пусть имеем положительно определенные, самосопряженные матрицы A, B такие, что выполняется неравенство $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$. Будем рассматривать стационарный итерационный алгоритм т.е.

$$B \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + Ax^k = f$$

Аналогично 1 можно показать $C = E - \tau B^{-1} A, \|C\| = \|E - \tau B^{-1} A\|$. Данное неравенство можно переписать в виде $\gamma_1 \leq B^{-1} A \leq \gamma_2$, что равносильно неравенству $\gamma_1(x, x) \leq (B^{-1} Ax, x) \leq \gamma_2(x, x)$. Домножим на $-\tau$ и прибавим (x, x) Получим следующее. $(x, x) - \tau \gamma_2(x, x) \leq (x, x) + (-\tau B^{-1} Ax, x) \leq (x, x) - \tau \gamma_1(x, x)$. В итог получим следующее неравенство.

$$(1 - \tau \gamma_2)(x, x) \leq (E - \tau B^{-1} Ax, x) \leq (1 - \tau \gamma_1)(x, x)$$

Что равносильно

$$(1 - \tau \gamma_2) \leq E - \tau B^{-1} A \leq (1 - \tau \gamma_1), C = E - \tau B^{-1} A$$

Поскольку операторы A, B самосопряженные, то $E - \tau B^{-1} A$, также самосопряжен. Тогда Неравенство позволяет оценить спектр оператора $C = E - \tau B^{-1} \leq \max(|1 - \tau \gamma_2|, |1 - \tau \gamma_1|) =$

$N(\tau)$ т.к норма самосопряженного оператора есть максимальное по модулю собственное значение. Если минимизировать выражение $N(\tau)$, то $\|C\|$ будет минимальна. Таким образом нужно найти величину $\min_{\tau} N(\tau) = \min_{\tau} \max(|1 - \tau\gamma_2|, |1 - \tau\gamma_1|)$. Для этого изобразим в осях N vs τ .

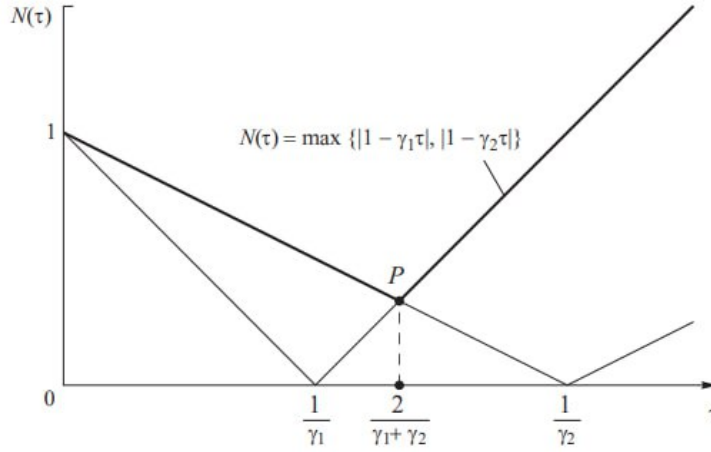


Рис. 5. Графическая зависимость $N(\tau)$

Легко видеть, что $N(\tau)$ минимально при $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$.

- 3) На примере системы из 2-х уравнений объяснить, как влияет на сходимость итерационного метода порядок уравнений в системе (что произойдет, если уравнение поменять местами и почему).

Ответ. Будем рассматривать метод Зейделя. Рассмотрим систему с 2 неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2 \end{cases} \quad (5)$$

Тогда итерационный процесс будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = f_1 \\ a_{21}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^{k+1} = f_2 \end{cases}$$

Если изобразить процесс приближений в осях x_2 vs x_1 см. Рис.2. Видно что приближения сходятся к пересечению прямых, что есть решение системы. Из геометрического смысла имеем что следующее приближение находится путем нахождения пересечения горизонтальной либо вертикальной прямой с прямой системы. Однако при перестановки уравнений порядок нарушиться т.е. если сначала алгоритм искал пересечения 1ого уравнения с горизонтальной прямой, то теперь он будет искать пересечение 2ого уравнения с 1ой прямой, что может привести к расхождению системы. Также можно нарушить условия, которые гарантировали сходимость например перестановкой строк можно испортить диагональное преобладание или симметрию матрицы или изменить норму матрицы C . После перестановки уравнений итерационный процесс будет иметь уже другой вид

$$\begin{cases} a_{21}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^k = f_2 \\ a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^{k+1} = f_1 \end{cases}$$

4) Для чего в расчетах используется матрица C ?

Ответ.

Матрица C в расчетах может использоваться для вычисления следующего значения x^{k+1} по формуле

$$x^{k+1} = Cx^k + y.$$

Однако такое использование матрицы C неэффективно в силу итерационного умножения матрицы на вектор. Также матрица C может использоваться в критерии останова:

$$\frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon,$$

который связан с погрешностью решения. Тогда матрицу C нужно будет только вычислить и хранить, что делает её использование эффективнее.