Notacja $\mathcal{O}$

dr inż. Bartłomiej Pawlik

19 czerwca 2024

W całym wykładzie przyjmujemy, że zbiór liczb naturalnych to zbiór liczb całkowitych dodatnich.

Jeżeli n jest liczbą naturalną, to

$$\ldots \leqslant \sqrt[4]{n} \leqslant \sqrt[3]{n} \leqslant \sqrt{n} \leqslant n \leqslant n^2 \leqslant n^3 \leqslant n^4 \leqslant \ldots$$

Dużo ogólniej:

Jeżeli n jest liczbą naturalną i α, β są liczbami rzeczywistymi takimi, że $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, to

$$n^\alpha \leqslant n^\beta.$$

Zauważmy, że jeżeli założymy dodatkowo, że $n > 1$, to powyższe nierówności będą ostre.

Dla dowolnej liczby naturalnej n mamy

$$n < 2^n.$$

Dowód.

Dla $n = 1$ nierówność jest oczywista.
Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ mamy

$$n = \underbrace{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1}}_{n-1} \leqslant \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{n-1} = 2^{n-1} < 2^n.$$

$\square$

Zauważmy, że powyżej uzasadniliśmy mocniejszą nierówność

$$n \leqslant 2^{n-1}$$

dla $n > 1$.

Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 4$ mamy

$$n^2 < 2^n.$$

Dowód.

Mamy

$$n^2 = 4^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^2}_{n-4}.$$

Zauważmy, że $\left(\frac{5}{4}\right)^2 < 2$ i że jest to największy spośród powyższych ułamków.

Zatem

$$n^2 < 4^2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{n-4} = 4^2 \cdot 2^{n-4} = 2^n.$$

□

Dla dowolnej liczby naturalnej n mamy

$$\log_2 n < n.$$

Dowód.

Nierówność otrzymujemy po zlogarytmowaniu stronami wyrażenia $n < 2^n$, które wcześniej udowodniliśmy. $\square$

Z powyższej nierówności wynika, że dla dowolnej liczby dodatniej α mamy

$$\log_2 n^\alpha < n^\alpha.$$

W szególności

$$\log_2 \sqrt{n} < \sqrt{n}.$$

Dla dowolnej liczby dodatniej α i dla dostatecznie dużych wartości n zachodzi

$$\log_2 n^\alpha < n.$$

Dowód.

Mamy

$$\log_2 n^\alpha = \alpha \cdot \log_2 n = 2\alpha \cdot \frac{1}{2} \log n = 2\alpha \cdot \log \sqrt{n} < 2\alpha \cdot \sqrt{n} = \frac{2\alpha}{\sqrt{n}} \cdot n.$$

Zauważmy że dla $n > 4\alpha^2$ zachodzi

$$\frac{2\alpha}{\sqrt{n}} \cdot n < \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2}} \cdot n = n,$$

więc ostatecznie dla $n > 4\alpha^2$ mamy $\log_2 n^\alpha < n$. $\square$

Z nierówności $\log_2 n^\alpha < n$ dla $n > 4\alpha^2$ wynikają następujące fakty:

Dla dowolnej liczby dodatniej α zachodzą nierówności

$$n^\alpha < 2^n \qquad \text{oraz} \qquad \log_2 n < \sqrt[\alpha]{n}$$

dla dostatecznie dużych wartości n.

Reasumując:

- 2^n rośnie szybciej niż jakakolwiek potęga z n
- $\log_2 n$ rośnie wolniej niż jakikolwiek pierwiastek z n

Zatem dla dowolnego $\alpha > 1$ mamy

$$\log_2 n < \sqrt[\alpha]{n} < n < n^\alpha < 2^n$$

dla dostatecznie dużych n.

Nierówność

$$2^n < n!$$

zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n > 3$.

Dowód.

Mamy $2^4 < 4!$ oraz

$$2^n = 2^4 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{n-4} < 4! \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{n-4} < 4! \cdot \underbrace{5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{n-4} = n!$$

$\square$

Nierówność
$$100^n < n!$$
zachodzi dla każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej n.

Powyższą nierówność można udowodnić podobnie jak poprzednią $(2^n < n!)$, znajdując najmniejszą liczbę k taką, że $100^k < k!$ i przeprowadzić szacowanie lub indukcję. Poniżej pokażemy dowód nie odwołujący się do poszukiwania tej najmniejszej liczby.

Dowód.

Zauważmy, że dla $n > 200$ mamy

$$n! > \underbrace{201 \cdot 202 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{n-200} > \underbrace{200 \cdot 200 \cdot \ldots \cdot 200 \cdot 200}_{n-200} = 200^{n-200} =$$
$$100^n \cdot 2^n \cdot \frac{1}{200^{200}} = 100^n \cdot \frac{2^n}{200^{200}}.$$

Oczywiście 2^n jest funkcją rosną i nieograniczoną z góry, więc począwszy od pewnego n mamy $2^n > 200^{200}$, więc $100^n \cdot \dfrac{2^n}{200^{200}} > 100^n$, co kończy dowód. $\square$

Analogicznie możemy pokazać, że dla każdej liczby dodatniej C mamy

$$C^n < n!$$

dla dostatecznie dużych n, co oznacza że

- $n!$ rośnie szybciej niż jakikolwiek ciąg geometryczny

Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ mamy

$$n! < n^n$$

Dowód.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n < n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n = n^n$$

$\square$

$$\log_2 n < n < 2^n < n! < n^n$$

Precyzyjniej:

$$1 < \ldots < \log_3 n < \log_2 n < \ldots < \sqrt[3]{n} < \sqrt{n} < n < n^2 < n^3 < \ldots$$

oraz

$$\ldots < \sqrt[3]{n} < \sqrt{n} < n < n^2 < n^3 < \ldots < 2^n < 3^n < \ldots < n! < n^n$$

Oczywiście prawdziwe są również nierówności typu

$$n < n\sqrt{n} < n^2, \quad n < n \cdot \log_2 n < n^2,$$

itp.

Definicja

Niech f i g będą ciągami liczb rzeczywistych. Przyjmujemy, że

$$f_n = \mathcal{O}(g_n)$$

gdy istnieje dodatnia stała C taka, że

$$|f_n| < C \cdot |g_n|$$

dla dostatecznie dużych n.

Wyrażenie „$f_n = \mathcal{O}(g_n)$" czytamy „f_n *jest* O *od* g_n".

Przykład 1

Z prezentowanych wcześniej nierówności wynika, że

- $\sqrt{n} = \mathcal{O}(n)$,
- $n = \mathcal{O}(n^2)$,
- $n = \mathcal{O}(2^{n-1})$,
- $n = \mathcal{O}(2^n)$,
- $n^2 = \mathcal{O}(2^n)$,
- $2^n = \mathcal{O}(n!)$,
- $200^n = \mathcal{O}(n!)$,
- $n! = \mathcal{O}(n^n)$,
- $n \log_2 n = \mathcal{O}(n^2)$,

itp.

Notacja O służy do szacowania szybkości wzrostu rozpatrywanego ciągu poprzez porównanie ją z szybkością wzrostu prostszego (dobrze znanego) ciągu.

Przykład 2

Rozpatrzmy ciąg
$$2n^5 + 9n^3 + 2024.$$

Dla dużych n wartość wyrażenia n^5 jest dużo większa niż wartość wyrażenia $9n^3 + 2024$, zatem dla dostatecznie dużych n mamy
$$2n^5 + 9n^3 + 2024 < 2n^5 + n^5 = 3n^5.$$

Zatem
$$2n^5 + 9n^3 + 2024 = \mathcal{O}(n^5).$$

Uwaga! Zauważmy, że możemy również szacować:

- $2n^5 + 9n^3 + 2024 = \mathcal{O}(n^6)$,
- $2n^5 + 9n^3 + 2024 = \mathcal{O}(n^5 \log_2 n)$,
- $2n^5 + 9n^3 + 2024 = \mathcal{O}(n!)$,

itp., ale zaproponowane w powyższym przykładzie $\mathcal{O}(n^5)$ jest dużo precyzyjniejszą informacją.

Przykład 3 (1/2)

Rozpatrzmy ciąg $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ dla $n \geqslant 1$. Pokażemy, że $h_n = \mathcal{O}(\log_2 n)$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} h_2 &= 1 + \frac{1}{2} < 2, \\ h_4 &= h_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) < 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2 + 1 = 3, \\ h_8 &= h_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) < 3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 3 + 1 = 4, \end{aligned}$$

itd. Ogólnie mamy

$$h_{2^k} < k + 1,$$

co można łatwo uzasadnić indukcyjnie.

Przykład 3 (2/2)

Niech n będzie liczbą ograniczoną kolejnymi potęgami dwójki: $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$. Zauważmy, że pierwsza z tych nierówność daje nam $k < \log_2 n$. Mamy zatem

$$h_n \leqslant h_{2^{k+1}} < (k+1) + 1 = k + 2 < \log_2 n + 2.$$

Dla dostatecznie dużych n mamy

$$\log_2 n + 2 < \log_2 n + \log_2 n = 2 \log_2 n,$$

więc ostatecznie

$$h_n = \mathcal{O}(\log_2 n).$$

Notacja $\mathcal{O}$ — własności

1. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ i c jest stałą, to
$$c \cdot f_n = \mathcal{O}(a_n).$$
2. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ i $g_n = \mathcal{O}(a_n)$, to
$$f_n + g_n = \mathcal{O}(a_n).$$
3. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ i $g_n = \mathcal{O}(b_n)$, to
$$f_n + g_n = \mathcal{O}(\max\{|a_n|, |b_n|\}) \text{ oraz } f_n \cdot g_n = \mathcal{O}(a_n \cdot b_n).$$
4. Jeżeli $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ i $b_n = \mathcal{O}(c_n)$, to
$$a_n = \mathcal{O}(c_n).$$

(Zauważmy, że powyższe własności pozwalają nam szybko ustalić szacowanie w przykładzie 2: mamy $2n^5 + 9n^3 + 2024 = \mathcal{O}(n^5)$.)

Dowód *(1/3)*.

1. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$, to istnieje stała $C > 0$ taka, że $|f_n| \leqslant C \cdot |a_n|$ dla dostatecznie dużych n. Mamy

$$|c \cdot f_n| = |c| \cdot |f_n| \leqslant |c| \cdot C \cdot |a_n| = (|c| \cdot C) \cdot |a_n|$$

dla dostatecznie dużych n, więc $c \cdot f_n = \mathcal{O}(a_n)$.

2. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ oraz $g_n = \mathcal{O}(a_n)$, to istnieją dodatnie stałe C i D takie, że

$$|f_n| \leqslant C \cdot |a_n| \quad \text{oraz} \quad |g_n| \leqslant D \cdot |a_n|$$

dla dostatecznie dużych n. W poniższym szacowaniu skorzystamy z nierówności trójkąta $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ dla dowonych $x, y \in \mathbb{R}$. Mamy

$$|f_n + g_n| \leqslant |f_n| + |g_n| \leqslant C \cdot |a_n| + D \cdot |a_n| = (C + D) \cdot |a_n|,$$

więc $f_n + g_n = \mathcal{O}(a_n)$.

Dowód *(2/3)*.

3. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ oraz $g_n = \mathcal{O}(b_n)$, to istnieją dodatnie stałe C i D takie, że

$$|f_n| \leqslant C \cdot |a_n| \quad \text{oraz} \quad |g_n| \leqslant D \cdot |b_n|$$

dla dostatecznie dużych n. Ponownie korzystając z nierówności trójkąta mamy

$$\begin{aligned} |f_n + g_n| \leqslant |f_n| + |g_n| \leqslant C \cdot |a_n| + D \cdot |b_n| \leqslant \\ C \cdot \max\{|a_n|, |b_n|\} + D \cdot \max\{|a_n|, |b_n|\} = \\ (C + D) \cdot \max\{|a_n|, |b_n|\}, \end{aligned}$$

więc $f_n + g_n = \mathcal{O}(\max\{|a_n|, |b_n|\})$. Ponadto

$$|f_n \cdot g_n| = |f_n| \cdot |g_n| \leqslant C \cdot |a_n| \cdot D \cdot |b_n| = (C \cdot D) \cdot |a_n \cdot b_n|,$$

więc $f_n \cdot g_n = \mathcal{O}(a_n \cdot b_n)$.

Dowód *(3/3)*.

4. Jeżeli $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ oraz $b_n = \mathcal{O}(c_n)$, to istnieją dodatnie stałe B i C takie, że

$$|a_n| \leqslant B \cdot |b_n| \quad \text{oraz} \quad |b_n| \leqslant C \cdot |c_n|$$

dla dostatecznie dużych n. Zatem

$$|a_n| \leqslant B \cdot |b_n| \leqslant B \cdot |C \cdot c_n| = (B \cdot C) \cdot |c_n|,$$

więc $a_n = \mathcal{O}(c_n)$.

□