Z nierówności $\log_2 n^\alpha < n$ dla $n > 4\alpha^2$ wynikają następujące fakty:

Dla dowolnej liczby dodatniej α zachodzą nierówności

$$n^\alpha < 2^n \qquad \text{oraz} \qquad \log_2 n < \sqrt[\alpha]{n}$$

dla dostatecznie dużych wartości n.

Reasumując:

- 2^n rośnie szybciej niż jakakolwiek potęga z n
- $\log_2 n$ rośnie wolniej niż jakikolwiek pierwiastek z n

Zatem dla dowolnego $\alpha > 1$ mamy

$$\log_2 n < \sqrt[\alpha]{n} < n < n^\alpha < 2^n$$

dla dostatecznie dużych n.

W całym wykładzie przyjmujemy, że zbiór liczb naturalnych to zbiór liczb całkowitych dodatnich.

Jeżeli n jest liczbą naturalną, to

$$\ldots \leqslant \sqrt[4]{n} \leqslant \sqrt[3]{n} \leqslant \sqrt{n} \leqslant n \leqslant n^2 \leqslant n^3 \leqslant n^4 \leqslant \ldots$$

Dużo ogólniej:

Jeżeli n jest liczbą naturalną i α, β są liczbami rzeczywistymi takimi, że $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, to

$$n^\alpha \leqslant n^\beta.$$

Zauważmy, że jeżeli założymy dodatkowo, że $n > 1$, to powyższe nierówności będą ostre.

Przykład 3 (1/2)

Rozpatrzmy ciąg $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ dla $n \geqslant 1$. Pokażemy, że $h_n = \mathcal{O}(\log_2 n)$.

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
h_2 &= 1 + \frac{1}{2} < 2, \\
h_4 &= h_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) < 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2 + 1 = 3, \\
h_8 &= h_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) < 3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 3 + 1 = 4,
\end{aligned}
$$

itd. Ogólnie mamy

$$h_{2^k} < k + 1,$$

co można łatwo uzasadnić indukcyjnie.

Przykład 1

Z prezentowanych wcześniej nierówności wynika, że

- $\sqrt{n} = \mathcal{O}(n)$,
- $n = \mathcal{O}(n^2)$,
- $n = \mathcal{O}(2^{n-1})$,
- $n = \mathcal{O}(2^n)$,
- $n^2 = \mathcal{O}(2^n)$,
- $2^n = \mathcal{O}(n!)$,
- $200^n = \mathcal{O}(n!)$,
- $n! = \mathcal{O}(n^n)$,
- $n \log_2 n = \mathcal{O}(n^2)$,

itp.

Notacja O służy do szacowania szybkości wzrostu rozpatrywanego ciągu poprzez porównanie ją z szybkością wzrostu prostszego (dobrze znanego) ciągu.

Dowód *(1/3)*.

1. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$, to istnieje stała $C > 0$ taka, że $|f_n| \leqslant C \cdot |a_n|$ dla dostatecznie dużych n. Mamy

$$|c \cdot f_n| = |c| \cdot |f_n| \leqslant |c| \cdot C \cdot |a_n| = (|c| \cdot C) \cdot |a_n|$$

dla dostatecznie dużych n, więc $c \cdot f_n = \mathcal{O}(a_n)$.

2. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ oraz $g_n = \mathcal{O}(a_n)$, to istnieją dodatnie stałe C i D takie, że

$$|f_n| \leqslant C \cdot |a_n| \quad \text{oraz} \quad |g_n| \leqslant D \cdot |a_n|$$

dla dostatecznie dużych n. W poniższym szacowaniu skorzystamy z nierówności trójkąta $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ dla dowonych $x, y \in \mathbb{R}$. Mamy

$$|f_n + g_n| \leqslant |f_n| + |g_n| \leqslant C \cdot |a_n| + D \cdot |a_n| = (C + D) \cdot |a_n|,$$

więc $f_n + g_n = \mathcal{O}(a_n)$.

Definicja

Niech f i g będą ciągami liczb rzeczywistych. Przyjmujemy, że

$$f_n = \mathcal{O}(g_n)$$

gdy istnieje dodatnia stała C taka, że

$$|f_n| < C \cdot |g_n|$$

dla dostatecznie dużych n.

Wyrażenie „$f_n = \mathcal{O}(g_n)$" czytamy „f_n *jest* O *od* g_n".

Notacja $\mathcal{O}$ — własności

1. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ i c jest stałą, to
$$c \cdot f_n = \mathcal{O}(a_n).$$
2. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ i $g_n = \mathcal{O}(a_n)$, to
$$f_n + g_n = \mathcal{O}(a_n).$$
3. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ i $g_n = \mathcal{O}(b_n)$, to
$$f_n + g_n = \mathcal{O}(\max\{|a_n|, |b_n|\}) \text{ oraz } f_n \cdot g_n = \mathcal{O}(a_n \cdot b_n).$$
4. Jeżeli $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ i $b_n = \mathcal{O}(c_n)$, to
$$a_n = \mathcal{O}(c_n).$$

(Zauważmy, że powyższe własności pozwalają nam szybko ustalić szacowanie w przykładzie 2: mamy $2n^5 + 9n^3 + 2024 = \mathcal{O}(n^5)$.)

Nierówność
$$100^n < n!$$
zachodzi dla każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej n.

Powyższą nierówność można udowodnić podobnie jak poprzednią $(2^n < n!)$, znajdując najmniejszą liczbę k taką, że $100^k < k!$ i przeprowadzić szacowanie lub indukcję. Poniżej pokażemy dowód nie odwołujący się do poszukiwania tej najmniejszej liczby.

Dowód.

Zauważmy, że dla $n > 200$ mamy

$$n! > \underbrace{201 \cdot 202 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{n-200} > \underbrace{200 \cdot 200 \cdot \ldots \cdot 200 \cdot 200}_{n-200} = 200^{n-200} =$$
$$100^n \cdot 2^n \cdot \frac{1}{200^{200}} = 100^n \cdot \frac{2^n}{200^{200}}.$$

Oczywiście 2^n jest funkcją rosną i nieograniczoną z góry, więc począwszy od pewnego n mamy $2^n > 200^{200}$, więc $100^n \cdot \frac{2^n}{200^{200}} > 100^n$, co kończy dowód. $\square$

Przykład 3 (2/2)

Niech n będzie liczbą ograniczoną kolejnymi potęgami dwójki: $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$. Zauważmy, że pierwsza z tych nierówność daje nam $k < \log_2 n$. Mamy zatem

$$h_n \leqslant h_{2^{k+1}} < (k+1) + 1 = k + 2 < \log_2 n + 2.$$

Dla dostatecznie dużych n mamy

$$\log_2 n + 2 < \log_2 n + \log_2 n = 2 \log_2 n,$$

więc ostatecznie

$$h_n = \mathcal{O}(\log_2 n).$$

Nierówność

$$2^n < n!$$

zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n > 3$.

Dowód.

Mamy $2^4 < 4!$ oraz

$$2^n = 2^4 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{n-4} < 4! \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{n-4} < 4! \cdot \underbrace{5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{n-4} = n!$$

$\square$

Twierdzenie (postać rozwiązania równania (1))

Niech ciąg (a_n) spełnia zależność rekurencyjną (1).

- Jeżeli równanie charakterystyczne dla (1) ma dwa różne rozwiązania r_1 i r_2, to
$$a_n = C \cdot r_1^n + D \cdot r_2^n. \tag{2}$$
- Jeżeli równanie charakterystyczne dla (1) ma jedno rozwiązanie r_0, to
$$a_n = (C + Dn) \cdot r_0^n. \tag{3}$$

W powyższym twierdzeniu wartości C, D są wyznaczalne przy pomocy warunków początkowych (np. a_0, a_1) lub - ogólniej - przy pomocy wartości dowolnej pary a_k, a_l.
Znając pierwiastki wielomianu charakterystycznego oraz dwie wartości ciągu, z równania (2) lub (3) można utworzyć układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (C, D).

Ciąg Fibonacciego

$$F_0 = 0,\ \ F_1 = 1,$$
$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

Początkowe wyrazy: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 1 \\
F_2 &= F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1 \\
F_3 &= F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2 \\
F_4 &= F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3
\end{aligned}$$

Wybrane własności ciągu Fibonacciego

- $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
- $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$
- $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$
- $F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} = F_{m+n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$, gdzie $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Funkcja McCarthy'ego

$$M(n) = \begin{cases} M\big(M(n+11)\big) & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant 100 \\ n - 10 & \text{dla } n > 100 \end{cases}$$

Początkowe wyrazy: $\underbrace{91, 91, \ldots, 91}_{101}, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, \ldots$

Definicja

Funkcja jest zdefiniowana rekurencyjnie, jeżeli

- określono (jawnie) wartości dla pewnego zbioru argumentów funkcji (warunki początkowe)
- pozostałe wartości są zdefiniowane za pomocą innych wartości tej funkcji poprzez zależność rekurencyjną (co najmniej jedną).

Funkcje rekurencyjne o co najwyżej przeliczalnym zbiorze warunków początkowych oraz przeliczalnej liczbie zależności rekurencyjnych mają przeliczalną dziedzinę (więc są ciągami).

Twierdzenie (postać rozwiązania równania (4))

Niech ciąg (a_n) spełnia zależność rekurencyjną (4) i niech

$$f(r) = (r - r_1)^{m_1}(r - r_2)^{m_2} \ldots (r - r_s)^{m_s}$$

będzie jego wielomianem charakterystycznym. Wówczas

$$\begin{aligned} a_n = & (A_{1,1} + A_{1,2} \cdot n + \ldots + A_{1,m_1} \cdot n^{m_1 - 1}) \cdot r_1^n + \\ & + (A_{2,1} + A_{2,2} \cdot n + \ldots + A_{2,m_2} \cdot n^{m_2 - 1}) \cdot r_2^n + \\ & + \ldots + \\ & + (A_{s,1} + A_{s,2} \cdot n + \ldots + A_{s,m_s} \cdot n^{m_s - 1}) \cdot r_s^n \end{aligned}$$

W powyższym twierdzeniu współczynniki $A_{i,j}$ są wyznaczalne przy pomocy np. wartości początkowych.

Przykład z *HAKMEM*

Niech a_0 będzie dowolną liczbą i niech a_{n+1} będzie liczbą liter potrzebnych do zapisu liczby a_n w języku angielskim.
Na przykład, jeżeli $a_0 = 33$, to otrzymujemy

$$33\,(thirty\;\;three) \;\to\; 11\,(eleven) \;\to\; 6\,(six) \;\to\; 3\,(three) \;\to$$

$$\to\; 5\,(five) \;\to\; 4\,(four) \;\to\; 4\,(four) \;\to\; \dots$$

Przykład: Problem Collatza

Niech a_0 będzie dowoloną liczbą całkowitą dodatnią i niech

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & \text{gdy } a_n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ 3a_n + 1, & \text{gdy } a_n \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$$

Przykładowy ciąg Collatza: $12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, \dots$

Definicja

Równaniem charakterystycznym dla

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$$

nazywamy równanie $r^2 - Ar - B = 0$. Wielomian $r^2 - Ar - B$ nazywamy **wielomianem charakterystycznym** zależności (1).

Przykład: ciąg Fibonacciego

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Zatem $A = B = 1$. Równanie charakterystyczne ciągu Fibonacciego to $r^2 - r - 1 = 0$.

Przykład

Wyznaczyć wzór jawny ciągu a_n, jeżeli $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ i $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ dla $n \geqslant 3$.

Zauważmy, że równanie charakterystyczne ma postać $r^2 - 4r + 4 = 0$, więc jego jedynym pierwiastkiem jest liczba $r_0 = 2$. Zatem

$$a_n = (A + Bn) \cdot 2^n.$$

Podstawiając do powyższego wzoru wartości a_1 i a_2 otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 0 = (A+B) \cdot 2 \\ 2 = (A+2B) \cdot 4 \end{cases}, \quad \text{więc} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ostatecznie

$$a_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n\right) \cdot 2^n, \quad \text{więc} \quad a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1}.$$

Definicja

Jednorodną liniową zależnością rekurencyjną II rzędu o stałych współczynnikach nazywamy zależność postaci

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}, \tag{1}$$

gdzie $n \geqslant n_0$, $A, B \in \mathbb{C}$ i $B \neq 0$.

Szczególne przypadki

Jak wygląda postać ogólna równania (1) z danymi $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ przy założeniu, że $A \cdot B = 0$?