Teoria grafów — podstawy

dr inż. Bartłomiej Pawlik

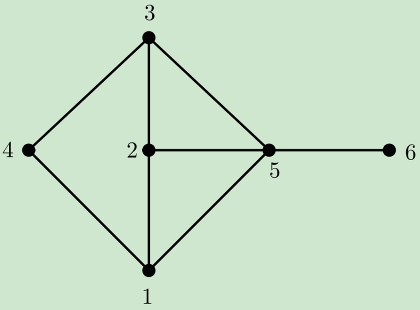
9 września 2024

Przykład 1

Rozpatrzmy parę zbiorów:

$$V(G) = \{1,2,3,4,5,6\},$$
$$E(G) = \Big\{\{1,2\},\ \{1,4\},\ \{1,5\}, \{2,3\},\ \{2,5\},\ \{3,4\},\ \{3,5\},\ \{5,6\}\Big\}.$$

Jak można przedstawić graficznie te zbiory? Przykładowa reprezentacja to:



Definicja

Grafem nazywamy parę zbiorów $G = \big(V(G), E(G)\big)$, gdzie $V(G)$ to **zbiór wierzchołków**, a $E(G)$ (**zbiór krawędzi**) to zbiór nieuporządkowanych par elementów zbioru $V(G)$.

Parę zbiorów spełniającą powyższą definicję nazywa się niekiedy **grafem nieskierowanym**.

Definicja

- **Rzędem grafu** G nazywamy liczbę jego wierzchołków $|V(G)|$.
- **Rozmiarem grafu** G nazywamy liczbę jego krawędzi $|E(G)|$.
- Wierzchołki x i y nazywamy **końcami krawędzi** $\{x, y\}$.
- Krawędź $\{x, x\}$ nazywamy **pętlą**.

Przykład

Rząd grafu G z przykładu 1 wynosi 6, a jego rozmiar to 8.

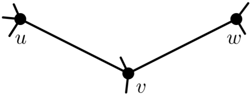
Oznaczenie

Rząd grafu oznaczamy przez n, a jego rozmiar przez m. Krawędź $\{u, v\}$ będziemy często zapisywać w postaci uv.

Definicja

Dany jest graf G i wierzchołki $u, v, w \in V(G)$.

- Jeżeli $uv \in E(G)$, to u nazywamy **wierzchołkiem sąsiednim** do v i do krawędzi uv. Krawędź uv nazywamy **krawędzią sąsiednią** do wierzchołka u i do wierzchołka v.
- Jeżeli $uv, vw \in E(G)$, to uv jest **krawędzią sąsiednią** do krawędzi vw.



Na powyższym rysunku przedstawiono fragment grafu, w którym

- wierzchołki u i v są sąsiednie, bo istnieje krawędź uv,
- wierzchołki v i w są sąsiednie, bo istnieje krawędź vw,
- wierzchołki u i w nie są sąsiednie, bo nie istnieje krawędź uw,
- krawędzie uv i vw są sąsiednie, bo mają wspólny wierzchołek v.

Rysunek grafu to jego reprezentacja graficzna. Zwyczajowo, wierzchołki zaznacza się punktami, a krawędzie - odcinkami między punktami.

Uwaga!

W tym wykładzie rozważamy wyłącznie grafy **skończone**, czyli grafy mające skończone rzędy i rozmiary.

Definicja

Multigrafem (**grafem z krawędziami wielokrotnymi**) nazywamy graf, w którym krawędzie mogą się powtarzać ($E(G)$ jest multizbiorem).

Definicja

Grafem prostym nazywamy graf nie zawierający pętli ani krawędzi wielokrotnych.

Stwierdzenie

Jeżeli G jest grafem prostym, to

$$0 \leqslant |E(G)| \leqslant \binom{|V(G)|}{2}.$$

- Jeżeli $|E(G)| = 0$, to G nazywamy *grafem pustym*.
- Jeżeli $|E(G)| = \binom{|V(G)|}{2}$, to G nazywamy *grafem pełnym* (*kliką*).

Definicja

Stopniem $\deg v$ **wierzchołka** v w grafie G nazywamy liczbę krawędzi sąsiednich z v (pętle liczą się dwukrotnie).

Przykład

Stopnie wierzchołków grafu G z przykładu 1 wynoszą

$$\begin{array}{lll} \deg(1) = 3, & \deg(2) = 3, & \deg(3) = 3, \\ \deg(4) = 2, & \deg(5) = 4, & \deg(6) = 1. \end{array}$$

Definicja

- **Minimalnym stopniem** $\delta(G)$ **grafu** G nazywamy najmniejszy ze stopni wierzchołków w grafie G:

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \deg v.$$

- **Maksymalnym stopniem** $\Delta(G)$ **grafu** G nazywamy największy ze stopni wierzchołków w grafie G:

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg v.$$

Zauważmy, że jeśli v jest wierzchołkiem grafu G, to

$$0 \leqslant \delta(G) \leqslant \deg v \leqslant \Delta(G) \leqslant n - 1.$$

Przykład

Minimalne i maksymalne stopnie wierzchołków grafu G z przykładu 1 wynoszą

$$\delta(G) = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \Delta(G) = 4.$$

Podstawowe twierdzenie teorii grafów (L. Euler, 1736)

Suma stopni wszystkich wierzchołków skończonego grafu prostego G jest dwa razy większa od liczby jego krawędzi:

$$\sum_{v\in V(G)} \deg v = 2\cdot|E(G)|.$$

Dowód.

Niech G będzie skończonym grafem prostym. Niech S oznacza liczbę wszystkich par (v,e), gdzie $v\in V(G)$ oraz $e\in E(G)$ takich, że wierzchołek v przylega do krawędzi e.

- Liczba krawędzi do których przylega ustalony wierzchołek v wynosi $\deg v$, więc $S=\sum_{v\in V(G)}\deg v$.
- Z drugiej strony do każdej krawędzi przylegają dokładnie dwa różne wierzchołki, więc $S=2\cdot|E(G)|$, co kończy dowód.

$\square$

Powyższy (zaproponowany przez Eulera) dowód stanowi przykład jednej z podstawowych kombinatorycznych metod dowodzenia równości, tzw. *double counting proof*.

Twierdzenie 1

Jeżeli graf prosty G ma co najmniej dwa wierzchołki, to ma co najmniej jedną parę wierzchołków tego samego stopnia.

Dowód.

Niech n będzie liczbą wierzchołków grafu G. Załóżmy niewprost, że każdy wierzchołek ma inny stopień. Jedyną możliwością jest, aby ciąg stopni wierzchołków wyglądał następująco:

$$0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Zatem istnieje wierzchołek, który nie jest połączony krawędzią z żadnym innym wierzchołkiem (stopień 0) oraz wierzchołek połączony krawędzią z każdym innym wierzchołkiem (stopień $n-1$). Te dwa wierzchołki nie są połączone krawędzią (0) i są połączone krawędzią $(n-1)$ - sprzeczność. $\square$

Uwaga!

Podstawowe twierdzenie teorii grafów jest często nazywane **Lematem o uściskach dłoni**. Pierwsza nazwa służy podkreśleniu fundamentalnego charakteru wyniku, druga — wskazująca na bardzo naturalną interpretację (poniżej) — była stosowana przez Leonharda Eulera.

Poglądowe ujęcie powyższych twierdzeń:

- **Lemat o uściskach dłoni**
  Dla dowolnej grupy osób witających się uściskiem dłoni, sumaryczna liczba wymienionych uścisków jest parzysta.
- **Twierdzenie 1**
  Wśród n osób, które ściskały między sobą dłonie, istnieje para osób które wykonały tyle samo uścisków.

Definicja

Macierz sąsiedztwa grafu G to macierz $A_G = [a_{ij}]$, w której a_{ij} określa liczbę krawędzi od i-tego do j-tego wierzchołka.

Oczywiście w przypadku grafu prostego macierz A_G jest symetryczna i jej elementami wyłącznie liczby 0 i 1.

Stwierdzenie

Niech A_G będzie macierzą sąsiedztwa grafu G. Wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $(A_G)^n = [t_{ij}]$, gdzie t_{ij} oznacza liczbę różnych dróg długości n od i-tego do j-tego wierzchołka.

Definicja

Macierz incydencji grafu G to macierz $B_G = [b_{ij}]$, w której

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy wierzchołek } v_i \text{ jest końcem krawędzi } e_j \\ 0, & \text{gdy wierzchołek } v_i \text{ nie jest końcem krawędzi } e_j \end{cases} .$$

Wniosek

- Suma elementów w i-tym wierszu macierzy incydencji grafu G wynosi $\deg v_i$.
- Suma elementów w j-tej kolumnie macierzy incydencji grafu G wynosi 2.

Definicja

Graf H nazywamy **podgrafem** grafu G, jeżeli $V(H) \subset V(G)$ oraz $E(H) \subset E(G)$. Mówimy też, że graf G jest **nadgrafem** grafu H.

Często będziemy stosować następujące oznaczenia:

Niech G będzie grafem i niech $v \in V(G)$ oraz $e \in E(G)$.

- Przez $G - e$ oznaczamy podgraf grafu G otrzymany przez usunięcie krawędzi e.
- Przez $G - v$ oznaczamy podgraf grafu G otrzymany przez usunięcie wierzchołka v i wszystkich krawędzi do niego sąsiednich.

Definicja

Podgraf H grafu G nazywamy **podgrafem indukowanym przez zbiór wierzchołków** $W \subset V(G)$, jeżeli $W = V(H)$ oraz H zawiera wszystkie krawędzie grafu G łączące wierzchołki ze zbioru W.

Definicja

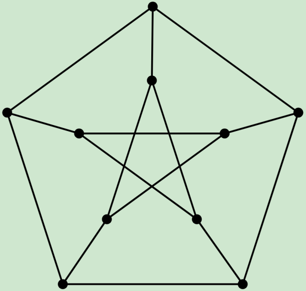
Niech $G = \big(V(G), E(G)\big)$ będzie grafem.

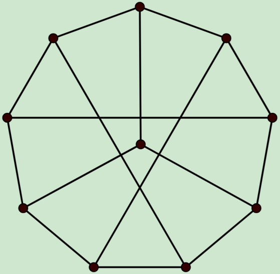
- **Drogą** nazywamy ciąg wierzchołków $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ w grafie G taki, że $v_i v_{i+1} \in E(G)$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n-1$.
- **Ścieżką** nazywamy drogę w której każdy wierzchołek występuje co najwyżej jeden raz.
- **Cyklem** nazywamy drogę w której $v_1 = v_n$ oraz wszystkie pozostałe wierzchołki występują co najwyżej jeden raz.
- **Cyklem niewłaściwym** nazywamy drogę w której $v_1 = v_n$.
- Graf G jest **spójny**, gdy dla każdej pary jego wierzchołków istnieje ścieżka zawierająca te wierzchołki.
- Maksymalny (w sensie zawierania) podgraf spójny danego grafu nazywamy **składową spójności**.

Izomorfizm grafów

Przykład

Czy można uznać poniższe rysunki za dwie różne reprezentacje graficzne tego samego grafu?





Tak!

Graf w powyższym przykładzie to tzw. *graf Petersena*.

Definicja

Funkcję $f : V(G) \to V(H)$ nazywamy **izomorfizmem** grafów G i H, jeżeli f jest bijekcją zachowującą sąsiedztwo wierzchołków. Grafy G i H nazywamy **izomorficznymi**, gdy istnieje izomorfizm f między tymi grafami i oznaczamy to przez $G \cong H$.

- Jeżeli G i H są grafami ważonymi, to f zachowuje również wagi krawędzi.
- Jeżeli G i H są multigrafami, to f zachowuje również liczbę krawędzi między danymi wierzchołkami.

Niektóre niezmienniki izomorfizmów

- rząd
- rozmiar
- liczba wierzchołków danego stopnia
- liczba składowych spójności
- liczba pętli i krawędzi wielokrotnych
- liczba cykli danej długości
- liczba ścieżek

Uwaga!

Powyższe niezmienniki stanowią warunki konieczne, ale niewystarczające dla istnienia izomorfizmu.

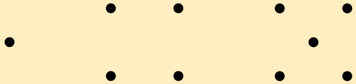
Przykład

Wszystkie z dokładnością do izomorfizmu grafy proste rzędu 4.

Podstawowe grafy proste

Graf pusty E_n

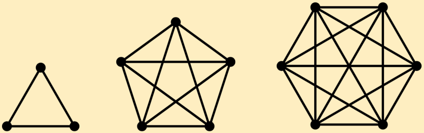
$V(E_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$,
$E(E_n) = \emptyset$.



E_1 E_4 E_5

Graf pełny (klika) K_n

$V(K_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$,
$E(K_n) = \{\{i, j\} : i, j \in V(K_n), i \neq j\}$.

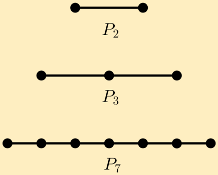


K_3 K_5 K_6

Podstawowe grafy proste

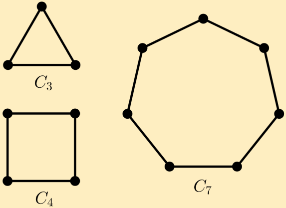
Ścieżka P_n

$$V(P_n) = \{1, 2, \ldots, n\},$$
$$E(P_n) = \big\{\{i, i+1\} : \ i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\big\}.$$



Cykl C_n (dla $n \geqslant 3$)

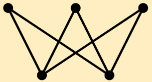
$$V(C_n) = \{1, 2, \ldots, n\},$$
$$E(C_n) = \big\{\{i, j\} : \ i, j \in V(C_n), \ |i - j| \equiv_n 1\big\}.$$



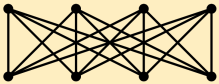
Graf pełny dwudzielny $K_{m,n}$

Graf w którym zbiór wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne podzbiory V_1, V_2 takie, że

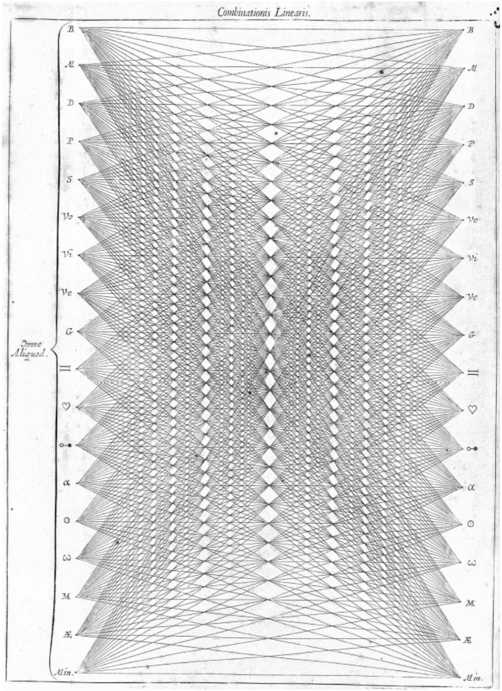
$$E(K_{m,n}) = \big\{\{i,j\} : i \in V_1,\ j \in V_2\big\}.$$



$K_{2,3}$



$K_{4,4}$



$K_{18,18}$
A. Kircher (1669)
Ars Magna Sciendi Sive Combinatoria

Podstawowe grafy proste

Inne

- **Graf dwudzielny** - graf w którym zbiór wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne podzbiory V_1, V_2 takie, że

$$E(G) \subset \big\{\{i,j\} : i \in V_1,\ j \in V_2\big\}.$$

- **Drzewo** - graf spójny nie zawierający cykli.
- **Las** - graf nie zawierający cykli.
- **Graf r-regularny** - graf w którym stopień każdego wierzchołka wynosi r.

Definicja

Jeżeli $\deg v = 1$ dla pewnego wierzchoła $v \in V(G)$, to v nazywamy **liściem**.

Twierdzenie

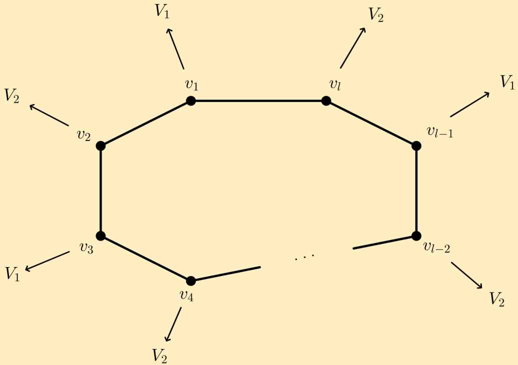
Graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy G nie zawiera cyklu nieparzystej długości.

Dowód. *(1/2)*

($\Rightarrow$) Jeżeli G jest grafem dwudzielnym, to $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdzie $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
Niech $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ będzie cyklem długości l.
Załóżmy (bez straty ogólności), że $v_1 \in V_1$. Wtedy

- $v_2 \in V_2$,
- $v_3 \in V_1$,
- $v_4 \in V_2$,
- $\ldots$,
- $v_l \in V_2$.

Ogólnie $v_i \in V_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy i jest liczbą nieparzystą. Zatem l jest liczbą parzystą.



Dowód. *(2/2)*

($\Leftarrow$)
Zakładamy, że G nie zawiera cyklu nieparzystej długości.

Graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy każda jego składowa jest grafem dwudzielnym, więc możemy założyć, że G jest spójny.

Niech $x \in V(G)$ i niech V_1 będzie zbiorem wierzchołków, których odległość od x jest nieparzysta i niech $V_2 = V \setminus V_1$. Nie ma krawędzi łączących dwa wierzchołki ze zbioru V_i, bo gdyby taka krawędź istniała, to G zawierałby cykl nieparzystej długości. Zatem G jest dwudzielny.

$\square$