Rekurencja

dr inż. Bartłomiej Pawlik

26 marca 2024

Ciągi rekurencyjne

Rekurencja (łac. *recurrere* - przybiec z powrotem) to sposób definiowania procedur i funkcji polegający na umieszczeniu w treści procedury/funkcji odwołań do samej siebie.

W definicji rekurencyjnej podajemy jawnie pewną liczbę elementów z których składa się dany obiekt (*warunki początkowe* lub *przypadki bazowe*), a następnie podajemy reguły (*zależności rekurencyjne*) definiowania pozostałych elementów przy pomocy elementów zdefiniowanych wcześniej.

Definicja

Funkcja jest zdefiniowana rekurencyjnie, jeżeli

- określono (jawnie) wartości dla pewnego zbioru argumentów funkcji (warunki początkowe)
- pozostałe wartości są zdefiniowane za pomocą innych wartości tej funkcji poprzez zależność rekurencyjną (co najmniej jedną).

Funkcje rekurencyjne o co najwyżej przeliczalnym zbiorze warunków początkowych oraz przeliczalnej liczbie zależności rekurencyjnych mają przeliczalną dziedzinę (więc są ciągami).

Podstawowe przykłady ciągów rekurencyjnych

Niech a, g, r i q będą liczbami rzeczywistymi i niech $g \neq 0$, $q \neq 0$.

1. silnia: $n! = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$
2. ciąg arytmetyczny: $a_n = \begin{cases} a & \text{dla } n = 0 \\ a_{n-1} + r & \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$
3. ciąg geometryczny: $g_n = \begin{cases} g & \text{dla } n = 0 \\ g_{n-1} \cdot q & \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$

Ciąg Fibonacciego

$$F_0 = 0, \ F_1 = 1,$$
$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

Początkowe wyrazy: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 1 \\
F_2 &= F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1 \\
F_3 &= F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2 \\
F_4 &= F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3
\end{aligned}
$$

Wybrane własności ciągu Fibonacciego

- $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
- $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$
- $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$
- $F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} = F_{m+n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$, gdzie $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ciąg Catalana

$$C_0 = 1,\ C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

Początkowe wyrazy: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1 \\
C_1 &= C_0C_0 = 1 \\
C_2 &= C_0C_1 + C_1C_0 = 1 + 1 = 2 \\
C_3 &= C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 2 + 1 + 2 = 5 \\
C_4 &= C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14
\end{aligned}$$

Twierdzenie

Wzór jawny ciągu Catalana ma postać

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}.$$

Funkcja McCarthy'ego

$$M(n) = \begin{cases} M\big(M(n+11)\big) & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant 100 \\ n-10 & \text{dla } n > 100 \end{cases}$$

Początkowe wyrazy: $\underbrace{91, 91, \ldots, 91}_{101}, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, \ldots$

Przykład z *HAKMEM*

Niech a_0 będzie dowolną liczbą i niech a_{n+1} będzie liczbą liter potrzebnych do zapisu liczby a_n w języku angielskim.
Na przykład, jeżeli $a_0 = 33$, to otrzymujemy

$$33\,(thirty\ \ three) \ \to\ 11\,(eleven) \ \to\ 6\,(six) \ \to\ 3\,(three) \ \to$$

$$\to\ 5\,(five) \ \to\ 4\,(four) \ \to\ 4\,(four) \ \to\ \ldots$$

Przykład: Problem Collatza

Niech a_0 będzie dowoloną liczbą całkowitą dodatnią i niech

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & \text{gdy } a_n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ 3a_n + 1, & \text{gdy } a_n \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$$

Przykładowy ciąg Collatza: $12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, \ldots$

Definicja

Jednorodną liniową zależnością rekurencyjną II rzędu o stałych współczynnikach nazywamy zależność postaci

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}, \tag{1}$$

gdzie $n \geqslant n_0$, $A, B \in \mathbb{C}$ i $B \neq 0$.

Szczególne przypadki

Jak wygląda postać ogólna równania (1) z danymi $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ przy założeniu, że $A \cdot B = 0$?

Definicja

Równaniem charakterystycznym dla

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$$

nazywamy równanie $r^2 - Ar - B = 0$. Wielomian $r^2 - Ar - B$ nazywamy **wielomianem charakterystycznym** zależności (1).

Przykład: ciąg Fibonacciego

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Zatem $A = B = 1$. Równanie charakterystyczne ciągu Fibonacciego to $r^2 - r - 1 = 0$.

Twierdzenie (postać rozwiązania równania (1))

Niech ciąg (a_n) spełnia zależność rekurencyjną (1).

- Jeżeli równanie charakterystyczne dla (1) ma dwa różne rozwiązania r_1 i r_2, to
$$a_n = C \cdot r_1^n + D \cdot r_2^n. \tag{2}$$
- Jeżeli równanie charakterystyczne dla (1) ma jedno rozwiązanie r_0, to
$$a_n = (C + Dn) \cdot r_0^n. \tag{3}$$

W powyższym twierdzeniu wartości C, D są wyznaczalne przy pomocy warunków początkowych (np. a_0, a_1) lub - ogólniej - przy pomocy wartości dowolnej pary a_k, a_l.
Znając pierwiastki wielomianu charakterystycznego oraz dwie wartości ciągu, z równania (2) lub (3) można utworzyć układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (C, D).

Przykład

Wyznaczyć wzór jawny ciągu a_n, jeżeli $a_0 = -1$, $a_1 = 1$ i $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$.

Zauważmy, że równanie charakterystyczne ma postać

$$r^2 - 4r + 3 = 0,$$

więc jego pierwiastkami są liczby $r_1 = 1$ i $r_2 = 3$. Zatem

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 3^n, \quad \text{więc} \quad a_n = A + B \cdot 3^n.$$

Podstawiając do powyższego wzoru wartości a_0 i a_1 otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} -1 = A + B \\ 1 = A + 3B \end{cases}, \quad \text{więc} \quad \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases}.$$

Ostatecznie

$$a_n = -2 + 3^n.$$

Przykład

Wyznaczyć wzór jawny ciągu a_n, jeżeli $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ i $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ dla $n \geqslant 3$.

Zauważmy, że równanie charakterystyczne ma postać $r^2 - 4r + 4 = 0$, więc jego jedynym pierwiastkiem jest liczba $r_0 = 2$. Zatem

$$a_n = (A + Bn) \cdot 2^n.$$

Podstawiając do powyższego wzoru wartości a_1 i a_2 otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 0 = (A + B) \cdot 2 \\ 2 = (A + 2B) \cdot 4 \end{cases}, \quad \text{więc} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ostatecznie

$$a_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n\right) \cdot 2^n, \quad \text{więc} \quad a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1}.$$

Definicja

Jednorodną liniową zależnością rekurencyjną k-tego rzędu o stałych współczynnikach nazywamy zależność postaci

$$a_n = A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2} + \ldots + A_k a_{n-k}, \tag{4}$$

gdzie $n \geqslant n_0$, $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathbb{C}$ i $A_k \neq 0$.

Definicja

Równaniem charakterystycznym dla (4) nazywamy równanie

$$r^k - A_1 r^{k-1} - A_2 r^{k-2} - \ldots - A_{k-1} r - A_k = 0.$$

Lewą stronę powyższego równania nazywamy **wielomianem charakterystycznym** zależności (4).

Twierdzenie (postać rozwiązania równania (4))

Niech ciąg (a_n) spełnia zależność rekurencyjną (4) i niech

$$f(r) = (r - r_1)^{m_1}(r - r_2)^{m_2} \ldots (r - r_s)^{m_s}$$

będzie jego wielomianem charakterystycznym. Wówczas

$$\begin{aligned} a_n = &(A_{1,1} + A_{1,2} \cdot n + \ldots + A_{1,m_1} \cdot n^{m_1 - 1}) \cdot r_1^n + \\ &+ (A_{2,1} + A_{2,2} \cdot n + \ldots + A_{2,m_2} \cdot n^{m_2 - 1}) \cdot r_2^n + \\ &+ \ldots + \\ &+ (A_{s,1} + A_{s,2} \cdot n + \ldots + A_{s,m_s} \cdot n^{m_s - 1}) \cdot r_s^n \end{aligned}$$

W powyższym twierdzeniu współczynniki $A_{i,j}$ są wyznaczalne przy pomocy np. wartości początkowych.

Przykład

Wyznaczyć wzór jawny ciągu a_n, jeżeli $a_0 = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 20$ i $a_n = -2a_{n-1} + 4a_{n-2} + 8a_{n-3}$ dla $n \geqslant 3$.

Zauważmy, że równanie charakterystyczne ma postać $r^3 + 2r^2 - 4r - 8 = 0$. Po przekształceniu wielomianu do postaci iloczynowej otrzymujemy

$$(r-2)(r+2)^2 = 0.$$

Jak widać, $r_1 = 2$ jest jednokrotnym, natomiast $r_2 = -2$ dwukrotnym pierwiastkiem powyższego równania. Zatem

$$a_n = A \cdot 2^n + (Bn + C) \cdot (-2)^n$$

dla pewnych A, B i C.

Podstawiając do powyższego wzoru wartości a_0, a_1 i a_2 otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 3 = A + C \\ 4 = 2A - 2B - 2C \\ 20 = 4A + 8B + 4C \end{cases}, \quad \text{więc} \quad \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases}.$$

Ostatecznie $a_n = 3 \cdot 2^n + n \cdot (-2)^n$.