Twierdzenie

Jeżeli G jest grafem prostym, to

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$$

Dowód.

Przeprowadźmy dowód indukcyjny względem liczby wierzchołków. Niech G będzie grafem prostym mającym n wierzchołków i niech $\Delta = \Delta(G)$.
Z grafu G usuwamy wierzchołek v wraz z przylegającymi do niego krawędziami.
Graf $G \backslash \{v\}$ ma $(n-1)$ wierzchołków i $\Delta(G \backslash \{v\}) \leqslant \Delta$. Z założenia indukcyjnego wynika, że $\chi(G \backslash \{v\}) \leqslant \Delta + 1$.
Wykonujemy $(\Delta + 1)$-kolorowanie grafu $G \backslash \{v\}$. Dodajemy do grafu wierzchołek v (z przyległymi krawędziami) i nadajemy mu inny kolor niż mają jego sąsiedzi — możemy to zrobić, bo liczba sąsiadów wierzchołka v nie przekracza Δ. W ten sposób uzyskaliśmy $(\Delta + 1)$ kolorowanie grafu G.

□

Definicja

Niech G będzie grafem i c będzie k-kolorowaniem grafu G. Kolorowanie c nazywamy **właściwym** k**-kolorowaniem** grafu G, jeżeli dla każdej pary sąsiednich wierzchołków przyjmuje ono różne wartości:

$$\forall_{u,v \in V(G)}: \ \{u,v\} \in E(G) \ \Rightarrow \ c(u) \neq c(v).$$

Definicja

Graf jest k-**kolorowalny**, gdy istnieje właściwe k-kolorowanie tego grafu.

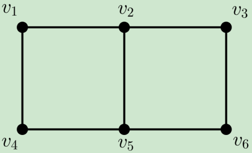
Przykład 1

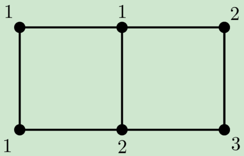
Rozważmy graf G (na rysunku po lewej) i kolorowanie c ze zbiorem kolorów $C = \{1, 2, 3\}$ takie, że

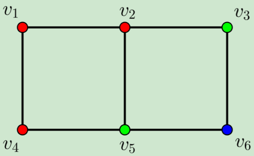
$$c(v_1) = c(v_2) = c(v_4) = 1, \; c(v_3) = c(v_5) = 2, \; c(v_6) = 3.$$

Graf G z zadanym kolorowaniem c możemy przedstawić graficznie na kilka sposobów.

- Jeżeli w rozważanym kontekście opis wierzchołków jest nieistotny, to wierzchołki możemy indeksować kolorami (rysunek środkowy).
- Przymując, że kolor 1 to czerwony, kolor 2 to zielony, a kolor 3 to niebieski, wierzchołki możemy (nomen omen) pokolorować (rysunek po prawej). W tej konwencji można zachować opis wierzchołków.







Definicja

Liczbą chromatyczną $\chi(G)$ grafu prostego G nazywamy najmniejszą liczbę k taką, że istnieje kolorowanie $c : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$.

Nietrudno zauważyć, że dla dowolnego grafu prostego G zachodzą nierówności

$$1 \leqslant \chi(G) \leqslant |V(n)|.$$

Przykład

Wyznaczyć liczby chromatyczne grafów P_n i C_n dla każdego n.

Stwierdzenie

- $\chi(G) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grafem pustym.
- $\chi(G) = |V(G)|$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grafem pełnym.

Stwierdzenie

$\chi(G) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest niepustym grafem dwudzielnym.

Wniosek

$\chi(G) \geqslant 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy G zawiera cykl długości nieparzystej.

Definicja

- Jeżeli $\chi'(G) = \Delta(G)$, to G nazywamy grafem klasy I.
- Jeżeli $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, to G nazywamy grafem klasy II.

Poniższy wynik również jest autorstwa Vadima G. Vizinga.

Twierdzenie

Jeżeli graf G jest grafem klasy II, to co najmniej trzy wierzchołki tego grafu mają maksymalny stopień.

Twierdzenie

Grafy $K_{3,3}$ i K_5 nie są grafami planarnymi.

Szkic dowodu.

Każda reprezentacja graficzna $K_{3,3}$ musi zawierać cykl długości 6, a każda reprezentacja graficzna K_5 musi zawierać cykl długości 5. Wystarczy narysować te cykle i rozpatrzyć wszystkie przypadki dorysowania pozostałych krawędzi. $\square$

W teorii grafów planarnych centralną rolę ogrywa *twierdzenie Kuratowskiego*. Nie wchodząc w szczegóły, orzeka ono że dany graf nie jest planarny, jeżeli w pewnym sensie *zawiera* podgraf podobny do $K_{3,3}$ lub do K_5.

Twierdzenie Erdősa-Wilsona (1975)

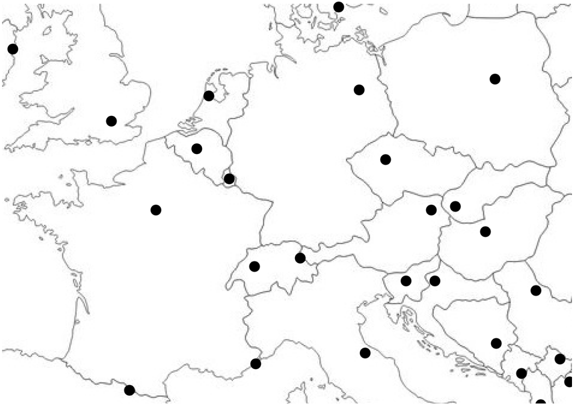
Niech $Gr(n)$ oznacza zbiór wszystkich grafów prostych mających n wierzchołków i niech $Cl_I(n)$ oznacza zbiór wszystkich grafów prostych klasy I mających n wierzchołków. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|Cl_I(n)|}{|Gr(n)|} = 1.$$

Twierdzenie o czterech barwach (Appel, Haken, 1976)

Jeżeli G jest planarnym grafem prostym, to

$$\chi(G) \leqslant 4.$$



Definicja

Indeksem chromatycznym $\chi'(G)$ grafu prostego G nazywamy najmniejszą liczbę k taką, że istnieje kolorowanie krawędziowe $c' : E(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$.

Przykład

Wyznaczyć indeks chromatyczny grafu $K_{1,n}$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej n.

Graf $K_{1,n}$ nazywany bywa gwiazdą S_{n-1}.

Stwierdzenie

Dla każdego grafu prostego G zachodzi

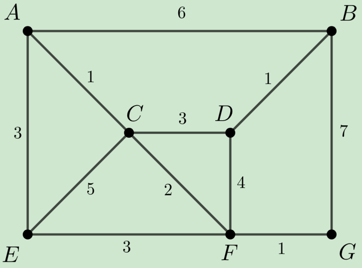
$$\chi'(G) \geqslant \Delta(G).$$

Uwaga!

Powszechnie przyjęte nazewnictwo: **graf półeulerowski**, **graf półhamiltonowski** jest trochę niefortunne, bo sugeruje, że każdemu z tych grafów dużo brakuje do bycia „pełnymi" grafami eulerowskimi lub hamiltonowskimi, podczas gdy w każdym przypadku wystarczy w tym celu do grafu dodać tylko jedną krawędź.

Przykład

W poniższym grafie znaleźć najkrótsze drogi z wierzchołka B do pozostałych wierzchołków korzystając z algorytmu Dijkstry.



	A	C	D	E	F	G
B_0	6_B	∞	1_B	∞	∞	7_B
BD_1	6_B	4_D	$-$	∞	5_D	7_B
BDC_4	5_C	$-$	$-$	9_C	5_D	7_B
BDF_5	5_C	$-$	$-$	8_F	$-$	6_F
$BDCA_5$	$-$	$-$	$-$	8_F	$-$	6_F
$BDFG_6$	$-$	$-$	$-$	8_F	$-$	$-$
$BDFE_8$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

W pierwszej kolumnie zapisane są najkrótsze drogi (w indeksie każdej z nich jest waga).
Elementy tabeli to wagi dróg z wierzchołka B do danego wierzchołka (w indeksach są wierzchołki bezpośrednio poprzedzające dany).
Symbol „$-$'' oznacza, że do danego wierzchołka już określono najkrótszą drogę.
W sytuacji, gdy w wierszu mamy więcej niż jedną drogę o najmniejszej wadze (5_C do A i 5_D do F w wierszu czwartym), wybieramy dowolną z nich.

Znajdowanie cyklu Eulera - algorytm Fleury'ego

Zaczynając od dowolnego wierzchołka, tworzymy cykl Eulera dodając do niego kolejne krawędzie w taki sposób, że dodajemy do cyklu most tylko wtedy, gdy nie ma innej możliwości.

Przykład

Wyznaczyć cykl Eulera w grafie $K_{2,4}$.

Drzewa przeszukiwań

- **Metoda przeszukiwania wszerz** (**breadth-first search**, **BFS**)
  Odwiedzamy wszystkich sąsiadów aktualnego wierzchołka, zanim przejdziemy do następnego wierzchołka.
- **Metoda przeszukiwania w głąb** (**deapth-first search**, **DFS**)
  Po odwiedzeniu sąsiada v_{k+1} wierzchołka v_k, przechodzimy do nieodwiedzonego sąsiada v_{k+2} wierzchołka v_{k+1} albo — w przypadku braku nieodwiedzony sąsiadów — cofamy się do wierzchołka v_k i powtarzamy.

W *BFS* zanim zagłębimy się bardziej w drzewo, zaglądamy do tak wielu wierzchołków jak to możliwe, a w *DFS* zagłębiamy się tak daleko, jak tylko jest to możliwe, zanim zajrzymy do innych wierzchołków sąsiednich.

Problem komiwojażera

Podamy dwie wersje problemu:

- Mając daną listę miast i odległości między tymi miastami, znaleźć najkrótszą drogę przechodzącą przez wszystkie miasta (przez każde tylko raz) i powracającą do punktu wyjścia.
- Znaleźć najoptymalniejszy cykl Hamiltona w ważonym grafie pełnym.

Przykładowe rozwiązania

- *Brute force*: Znajdujemy wszystkie cykle Hamiltona i wybieramy najodpowiedniejszy.
- *Algorytm najbliższego sąsiada*: Zaczynamy od dowolnego wierzchołka i poruszamy się zawsze wzdłuż krawędzi o najmniejszych wagach. (jest to rozwizanie przybliżone, średnio o 25% gorsze od optymalnego).

Problem chińskiego listonosza

Sformułowanie

Znalezienie cyklu (niewłaściwego) zawierającego każdą krawędź danego grafu co najmniej raz i mającego jak najmniejszy koszt (czyli liczbę krawędzi lub, w przypadku grafu ważonego, sumę wag krawędzi).

Rozwiązanie problemu chińskiego listonosza

- Jeżeli graf G jest eulerowski to znajdujemy dowolny cykl Eulera.
- Jeżeli graf nie jest eulerowski to dublujemy niektóre krawędzie, aby otrzymać graf eulerowski i wtedy szukamy ścieżki Eulera. Aby otrzymać najoptymalniejsze (najkrótsze) ścieżki
  - dla grafów nieważonych wystarczy przeszukać graf wszerz,
  - dla grafów z nieujemnymi wagami można skorzystać np. z algorytmu Dijkstry,
  - dla grafów z dowolnymi wagami można skorzystać np. z algorytmu Bellmana-Forda.

Twierdzenie (Euler, 1741)

Niech G będzie grafem spójnym. Graf G jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Dowód. *(1/2)*

$(\Rightarrow)$

Niech d będzie cyklem Eulera w grafie G i niech $v \in V(G)$. Każde przejście cyklu d przez wierzchołek v zwiększa udział krawędzi należących do tego cyklu w stopniu wierzchołka v o 2. Każda krawędź występuje w grafie G dokładnie raz, więc stopień każdego wierzchołka musi być liczbą parzystą.

Dowód *(2/2)*

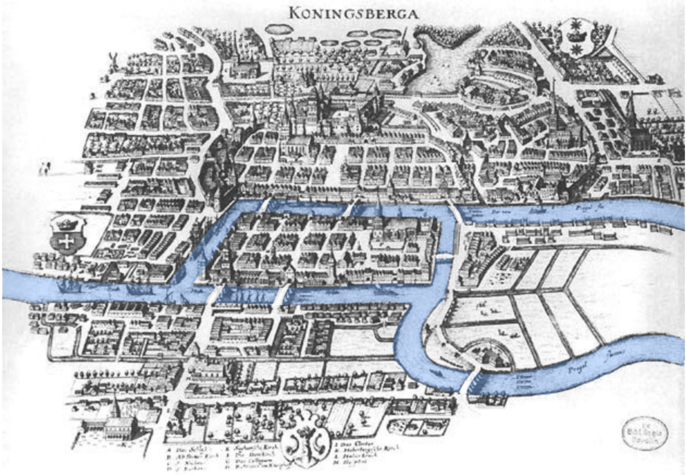
($\Leftarrow$)

Dowód indukcyjny względem liczby krawędzi grafu G. G jest grafem spójnym, w którym stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą, więc $\delta(G) \geqslant 2$. Zatem, na mocy Lematu 1, w G istnieje cykl c.

- Jeżeli c zawiera każdą krawędź grafu G, to twierdzenie jest udowodnione.
- Jeżeli c nie zawiera każdej krawędzi grafu G, to usuwamy z grafu G wszystkie krawędzie należące do cyklu c, otrzymując graf $G\backslash\{c\}$, który ma mniej krawędzi niż G. Z założenia indukcyjnego każda składowa spójności grafu $G\backslash\{c\}$ posiada cykl Eulera. Ze spólności G wynika, że każda składowa spójności grafu $G\backslash\{c\}$ ma co najmniej jeden wierzchołek wspólny z cyklem c. Zatem w grafie G można stworzyć cykl Eulera poprzez połączenie cyklu c z cyklami Eulera wszystkich składowych spójności grafu $G\backslash\{c\}$ poprzez wierzchołki wspólne.

Problem mostów królewieckich

Czy można przejść dokładnie jeden raz przez każdy z siedmiu mostów przedstawionych na poniższym rysunku i powrócić do punktu wyjścia?



[Źródło: *https://pl.wikipedia.org/wiki/Królewiec#/media/Plik:Image-Koenigsberg,_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg*, 13.05.2024]

Lemat 1

Jeżeli $\delta(G) \geqslant 2$, to graf G zawiera cykl.

Dowód.

Jeżeli G zawiera pętle lub krawędzie wielokrotne, to lemat jest trywialny. Załóżmy zatem, że G jest grafem prostym i że $v \in G$ jest dowolnym wierzchołkiem G. Tworzymy trasę

$$v \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \dots$$

tak aby v_{k+1} był sąsiadem v_k różnym od v_{k-1} (zawsze jest to możliwe ze względu na założenie, że stopień każdego wierzchołka wynosi co najmniej 2). Graf G ma skończenie wiele wierzchołków, więc po skończonej liczbie kroków na trasie musi pojawić się wierzchołek v_K, który pojawił się na niej już wcześniej. Fragment trasy

$$v_K \longrightarrow \dots \longrightarrow v_K$$

jest szukanym cyklem. □