Definicja

Niech G będzie grafem i c będzie k-kolorowaniem grafu G. Kolorowanie c nazywamy **właściwym k-kolorowaniem** grafu G, jeżeli dla każdej pary sąsiednich wierzchołków przyjmuje ono różne wartości:

$$\forall_{u,v \in V(G)}: \; \{u, v\} \in E(G) \;\Rightarrow\; c(u) \neq c(v).$$

Definicja

Graf jest k-**kolorowalny**, gdy istnieje właściwe k-kolorowanie tego grafu.

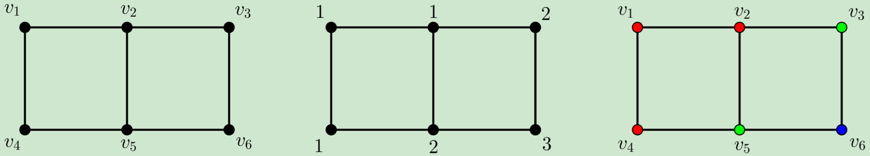
Przykład 1

Rozważmy graf G (na rysunku po lewej) i kolorowanie c ze zbiorem kolorów $C = \{1, 2, 3\}$ takie, że

$$c(v_1) = c(v_2) = c(v_4) = 1,\ c(v_3) = c(v_5) = 2,\ c(v_6) = 3.$$

Graf G z zadanym kolorowaniem c możemy przedstawić graficznie na kilka sposobów.

- Jeżeli w rozważanym kontekście opis wierzchołków jest nieistotny, to wierzchołki możemy indeksować kolorami (rysunek środkowy).
- Przymując, że kolor 1 to czerwony, kolor 2 to zielony, a kolor 3 to niebieski, wierzchołki możemy (nomen omen) pokolorować (rysunek po prawej). W tej konwencji można zachować opis wierzchołków.



Definicja

Niech G będzie grafem i niech dla pewnej liczby całkowitej k, zbiór C będzie zbiorem k-elementowym. Funkcję $c : V(G) \to C$ nazywamy k-**kolorowaniem** grafu G, zbiór C nazywamy **zbiorem kolorów**, a elementy zbioru C — **kolorami**.

Często przyjmuje się, że $C = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Definicja

Niech G będzie grafem i niech dla pewnej liczby całkowitej k, zbiór C będzie zbiorem k-elementowym. Funkcję $c' : E(G) \to C$ nazywamy **k-kolorowaniem krawędziowym** grafu G, zbiór C nazywamy **zbiorem kolorów**, a elementy zbioru C — **kolorami**.

Definicja

Niech G będzie grafem prostym i c' będzie k-kolorowaniem krawędziowym grafu G. Kolorowanie c nazywamy **właściwym k-kolorowaniem krawędziowym** grafu G, jeżeli dla każdej pary sąsiednich krawędzi przyjmuje ono różne wartości:

$$\forall_{\{u,v_1\},\{u,v_2\}\in E(G)} : \; v_1 \neq v_2 \;\Rightarrow\; c'(\{u,v_1\}) \neq c'(\{u,v_2\}).$$

Uwaga!

W dalszej części wykładu pisząc o **kolorowaniu krawędziowym** (**k-kolorowaniu krawędziowym**) będziemy mieli na myśli wyłącznie **właściwe kolorowanie krawędziowe** (**właściwe k-kolorowanie krawędziowe**).

Kolorowanie grafów

dr inż. Bartłomiej Pawlik

2 lipca 2024

Twierdzenie (Brooks, 1941)

Jeżeli G jest spójnym grafem prostym, nie będącym cyklem nieparzystej długości ani grafem pełnym, to

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G).$$

Uwaga!

W dalszej części wykładu pisząc o **kolorowaniu** (k-**kolorowaniu**) będziemy mieli na myśli wyłącznie **kolorowanie właściwe** (k-**kolorowanie właściwe**).

Definicja

Kolorowanie, które każdemu wierzchołkowi przyporządkowuje unikalny kolor nazywamy **kolorowaniem naiwnym**.

Przykład

Rysunek po lewej stronie w przykładzie 2 przedstawia przykładowe kolorowanie naiwne rozpatrywanego grafu.

Twierdzenie

Jeżeli G jest grafem prostym, to

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$$

Dowód.

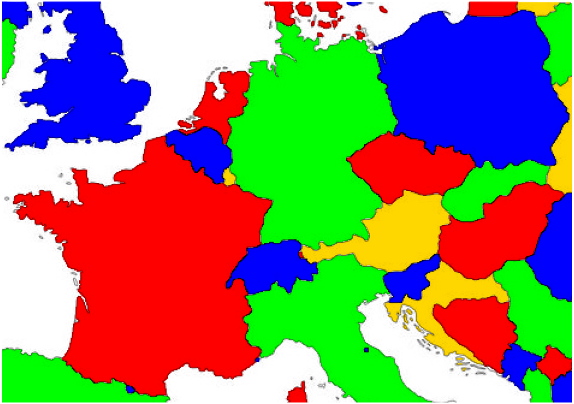
Przeprowadźmy dowód indukcyjny względem liczby wierzchołków. Niech G będzie grafem prostym mającym n wierzchołków i niech $\Delta = \Delta(G)$.
Z grafu G usuwamy wierzchołek v wraz z przylegającymi do niego krawędziami.
Graf $G \backslash \{v\}$ ma $(n-1)$ wierzchołków i $\Delta(G \backslash \{v\}) \leqslant \Delta$. Z założenia indukcyjnego wynika, że $\chi(G \backslash \{v\}) \leqslant \Delta + 1$.
Wykonujemy $(\Delta + 1)$-kolorowanie grafu $G \backslash \{v\}$. Dodajemy do grafu wierzchołek v (z przyległymi krawędziami) i nadajemy mu inny kolor niż mają jego sąsiedzi — możemy to zrobić, bo liczba sąsiadów wierzchołka v nie przekracza Δ. W ten sposób uzyskaliśmy $(\Delta + 1)$ kolorowanie grafu G.

$\square$

Twierdzenie o czterech barwach (Appel, Haken, 1976)

Jeżeli G jest planarnym grafem prostym, to

$$\chi(G) \leqslant 4.$$



Przykład

Określić dla których cykli i dla których grafów pełnych zachodzi $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

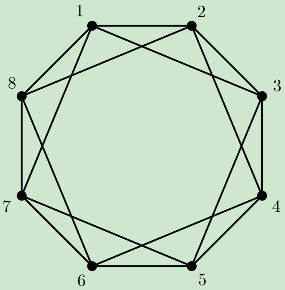
Twierdzenie (Euler, 1741)

Niech G będzie grafem spójnym. Graf G jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Dowód. *(1/2)*

$(\Rightarrow)$
Niech d będzie cyklem Eulera w grafie G i niech $v \in V(G)$. Każde przejście cyklu d przez wierzchołek v zwiększa udział krawędzi należących do tego cyklu w stopniu wierzchołka v o 2. Każda krawędź występuje w grafie G dokładnie raz, więc stopień każdego wierzchołka musi być liczbą parzystą.

Przykład



Na powstawie powyższego twierdzenia Eulera określić czy dany graf jest eulerowski lub jednobieżny.

- Jeżeli jest eulerowski, to wskazać przykładowy cykl Eulera.
- Jeżeli jest jednobieżny to wskazać przykładową ścieżkę Eulera.

Dany graf jest eulerowski, ponieważ stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą. Przykładowy cykl Eulera to

$$(1 \to 2 \to 8 \to 1) \to (3 \to 4 \to 2 \to 3) \to (5 \to 6 \to 4 \to 5) \to$$

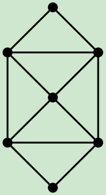
$$\to (7 \to 8 \to 6 \to 7) \to 1.$$

Grafy eulerowskie

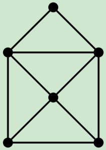
Definicja

- Jeżeli w grafie G istnieje cykl niewłaściwy d przechodzący przez każdą krawędź grafu G dokładnie jeden raz, to d nazywamy **cyklem Eulera**, a graf G — **grafem eulerowskim**.
- Jeżeli graf G nie jest grafem eulerowskim i istnieje ścieżka d przechodząca przez każdą krawędź grafu G dokładnie jeden raz, to G nazywamy **grafem jednobieżnym** (**półeulerowskim**).

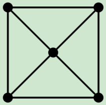
Przykład



G_1



G_2



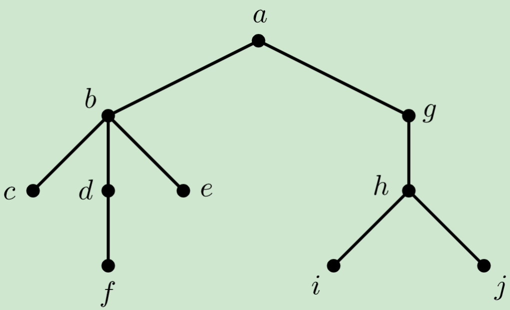
G_3

G_1 — graf eulerowski

G_2 — graf jednobieżny

G_3 — graf, który nie jest ani eulerowski, ani jednobieżny

Przykład



Przykładowe wyniki algorytmów przeszukiwania wszerz i w głąb, zaczynając od wierzchołka a:

$$BFS: \ a, b, g, c, d, e, h, f, i, j$$

$$DFS: \ a, b, c, d, f, e, g, h, i, j$$

Jakie wyniki może zwrócić algorytm, gdy zaczniemy od wierzchołka d?

Definicja

Niech $G = (V(G), E(G))$ będzie grafem i niech $w : E(G) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Parę (G, w) nazywamy *grafem ważonym*.

Innymi słowy, grafem ważonym nazywamy graf, w którym każdej krawędzi przypisana jest liczba rzeczywista (może ona reprezentować odległość między wierzchołkami, przepustowość sieci, ilość interakcji itd.).

Dowód. (2/2)

W G istnieje co najmniej jedna para wierzchołków, które nie są połączone krawędzią — bez straty ogólności przyjmijmy że są to wierzchołki v_1 i v_n. Z faktu, że po dodaniu krawędzi otrzymalibyśmy cykl Hamiltona wynika, że w grafie G istnieje droga

$$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{n-1} \to v_n.$$

Z założenia wiemy, że

$$\deg v_1 + \deg v_n \geqslant n,$$

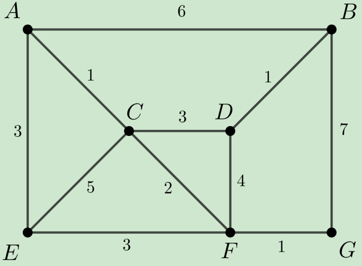
co oznacza że istnieje indeks k taki, że v_{k-1} jest sąsiadem v_n i że v_k jest sąsiadem v_1. Jednak teraz cykl

$$v_1 \to \ldots \to v_{k-1} \to v_n \to \ldots \to v_k \to v_1$$

jest cyklem Hamiltona, co daje nam szukaną sprzeczność.

Przykład

W poniższym grafie znaleźć najkrótsze drogi z wierzchołka B do pozostałych wierzchołków korzystając z algorytmu Dijkstry.



	A	C	D	E	F	G
B_0	6_B	∞	1_B	∞	∞	7_B
BD_1	6_B	4_D	$-$	∞	5_D	7_B
BDC_4	5_C	$-$	$-$	9_C	5_D	7_B
BDF_5	5_C	$-$	$-$	8_F	$-$	6_F
$BDCA_5$	$-$	$-$	$-$	8_F	$-$	6_F
$BDFG_6$	$-$	$-$	$-$	8_F	$-$	$-$
$BDFE_8$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

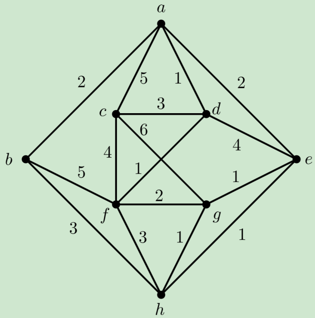
W pierwszej kolumnie zapisane są najkrótsze drogi (w indeksie każdej z nich jest waga).
Elementy tabeli to wagi dróg z wierzchołka B do danego wierzchołka (w indeksach są wierzchołki bezpośrednio poprzedzające dany).
Symbol „$-$" oznacza, że do danego wierzchołka już określono najkrótszą drogę.
W sytuacji, gdy w wierszu mamy więcej niż jedną drogę o najmniejszej wadze (5_C do A i 5_D do F w wierszu czwartym), wybieramy dowolną z nich.

Uwaga!

Powszechnie przyjęte nazewnictwo: **graf półeulerowski**, **graf półhamiltonowski** jest trochę niefortunne, bo sugeruje, że każdemu z tych grafów dużo brakuje do bycia „pełnymi" grafami eulerowskimi lub hamiltonowskimi, podczas gdy w każdym przypadku wystarczy w tym celu do grafu dodać <u>tylko jedną krawędź</u>.

Przykład

Rozwiąż problem chińskiego listonosza dla poniższego grafu. Jaki jest koszt cyklu stanowiącego rozwiązanie?



Wierzchołki b i f są jedynymi wierzchołkami nieparzystego stopnia, więc dany graf jest jednobieżny. Najkrótsza droga z b do f to

$$b \to a \to d \to f,$$

więc w grafie dublujemy krawędzie

$$\{a, b\},\ \{a, d\} \text{ oraz } \{d, f\},$$

dzięki czemu uzyskaliśmy graf eulerowski.

Przykładowym cyklem Eulera w nowym grafie (i zarazem rozwiązaniem problemu chińskiego listonosza) jest

$$a \to e \to h \to b \to a \to d \to f \to b \to a \to d \to$$

$$\to e \to g \to h \to f \to d \to c \to g \to f \to c \to a,$$

którego koszt wynosi 48.

Wniosek

Niech G będzie grafem spójnym.

- Graf G jest grafem eulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy jego zbiór krawędzi można podzielić na rozłączne cykle.
- Graf G jest grafem jednobieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie dwa wierzchołki nieparzystych stopni.