Nazwy niektórych systemów pozycyjnych

Podstawa systemu	Nazwa	Inne nazwy
-2	minus-dwójkowy	negabinarny
2	dwójkowy	binarny
8	ósemkowy	oktalny
12	dwunastkowy	duodecymalny
16	szesnastkowy	heksadecymalny

Systemy liczbowe

dr inż. Bartłomiej Pawlik

8 marca 2024

Konwersja na system dziesiętny

Aby wykonać konwersję na system dziesiętny, wystarczy wprost zastosować twierdzenie o postaci potęgowej.

Przykład

Zapisać liczby 10100_2, 320_5 i $2CA_{14}$ w systemie dziesiętnym.

$$
\begin{aligned}
10100_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 4 = 20 \\
320_5 &= 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = 75 + 10 + 0 = 85 \\
2CA_{14} &= 2 \cdot 14^2 + 12 \cdot 14^1 + 10 \cdot 14^0 = 392 + 168 + 10 = 570
\end{aligned}
$$

Konwersja $a^s \longrightarrow a^t$

System o podstawie a może posłużyć jako system pośredni między systemami o podstawiach a^s i a^t:

$$n_{a^s} \longrightarrow n_a \longrightarrow n_{a^t}.$$

Przykład

Liczbę 10012031_4 zapisać w systemie o podstawie 8.
Liczby 4 i 8 są potęgami liczby 2, więc pośrednio użyjemy systemu binarnego.

1	0	0	1	2	0	3	1
01	00	00	01	10	00	11	01

Zatem $10012031_4 = 100000110001101_2$.

100	000	110	001	101
4	0	6	1	5

Ostatecznie $10012031_4 = 40615_8$.

Zauważmy, że poprzednie twierdzenie umożliwia zapis dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x w systemie o podstawie b. Jeżeli

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{b^k},$$

to możemy przyjąć, że

$$x = (\bar{a}_n \bar{a}_{n-1} \ldots \bar{a}_0 . \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots)_b,$$

gdzie $(\bar{a}_n \bar{a}_{n-1} \ldots \bar{a}_0)_b = x_0$ oraz $\bar{x}_i$ jest cyfrą o wartości x_i.

Przykład

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
251.84 &= 250 + 1 + 0.6 + 0.24 = \\
&= 2 \cdot 125 + 1 + 4 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.04 = \\
&= 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 + 4 \cdot 5^{-1} + 1 \cdot 5^{-2} = \\
&= 2001.41_5.
\end{aligned}$$

Zatem $251.84 = 2001.41_5$.

Liczba cyfr

$\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x.

Przykład

$$\lfloor 5 \rfloor = 5, \quad \lfloor 1.31 \rfloor = 1, \quad \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2, \quad \lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor -2 \rfloor = -2, \quad \lfloor -6.28 \rfloor = -7.$$

Twierdzenie

Liczba cyfr liczby n w zapisie przy podstawie b jest równa $\lfloor \log_b n \rfloor + 1$.

Przykład: googol

Ile cyfr ma liczba 10^{100} w zapisie przy podstawach 10 i 12 ?

- $\lfloor \log_{10} 10^{100} \rfloor + 1 = \lfloor 100 \log_{10} 10 \rfloor + 1 = \lfloor 100 \rfloor + 1 = 101$
- $\lfloor \log_{12} 10^{100} \rfloor + 1 = \lfloor 100 \log_{12} 10 \rfloor + 1 = \lfloor 100 \cdot 0.92662\ldots \rfloor + 1 = 93$

Wniosek

Standardowe rozwinięcie liczby wymiernej x przy dowolnej podstawie jest skończone lub okresowe (tzn. istnieją liczby całkowite dodatnie s i t takie, że $x_k = x_{k+t}$ dla każdego całkowitego $k > s$).

Uwagi

- Najmniejszą liczbę t o powyższej własności nazywamy okresem podstawowym.
- Rozwinięcie liczby x jest skończone, gdy dzielniki pierwsze mianownika skróconej postaci x dzielą również podstawę b rozważanego systemu pozycyjnego.
- W przypadku rozwinięcia okresowego używa się nawiasów (*notacja europejska*):

$$(\bar{a}_n \dots \bar{a}_0 . \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{s-1} (\bar{x}_s \dots \bar{x}_{s+t-1}))_b$$

lub kreski (*notacja amerykańska*):

$$(\bar{a}_n \dots \bar{a}_0 . \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{s-1} \overline{\bar{x}_s \dots \bar{x}_{s+t-1}})_b.$$

Przykład

Liczbę 352 zapisać w systemie o podstawie 11.

$$\begin{aligned} 352 &= 32 \cdot 11 + 0 \\ 32 &= 2 \cdot 11 + 10 \\ 2 &= 0 \cdot 11 + 2 \end{aligned}$$

Resztom $0, 10$ i 2 przypisujemy, odpowiednio, cyfry $0, A$ i 2.
Ostatecznie $352 = 2A0_{11}$.

Konwersja z systemu dziesiętnego: Drugi sposób

1. Określić największą potęgę liczby b nie większą niż n, tj. znaleźć największą liczbę całkowitą nieujemną w_0 taką, że $n - b^{w_0} \geqslant 0$.
2. Określić największą liczbę całkowitą k_0 taką, że $n - k_0 \cdot b^{w_0} \geqslant 0$. Liczba k_0 odpowiada cyfrze $\bar{a}_{w_0}$ zapisu liczby n w systemie o podstawie b.
3. Krok 2 powtórzyć w_0 razy, za każdy razem zmniejszając wykładnik o 1, a zamiast n przyjmować ostatnie otrzymane $n_i - k_i b^{w_i}$.

Konwersja z systemu dziesiętnego

Jak przekształcić liczbę naturalną n zapisaną w systemie o podstawie 10 na liczbę n zapisaną w systemie o podstawie b?

Konwersja z systemu dziesiętnego: Pierwszy sposób

1. Liczbę n zapisujemy w postaci $n = q_0 \cdot b + r_0$. Liczba r_0 odpowiada cyfrze $\bar{a}_0$ w zapisie liczby n przy podstawie b.
2. Liczbę q_0 zapisujemy w postaci $q_0 = q_1 \cdot b + r_1$. Liczba r_1 odpowiada cyfrze $\bar{a}_1$ w zapisie liczby n przy podstawie b.
3. Procedurę powtarzamy do momentu, gdy $q_i = 0$.

Elementy kombinatoryki

dr inż. Bartłomiej Pawlik

25 czerwca 2024

Przykład

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona opracować wzory skróconego mnożenia dla wyrażeń $(x+y)^4$ oraz $(x-y)^4$.

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{4-k}y^k = \\ &= \binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}x^0y^4 = \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned}(x-y)^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{4-k}(-y)^k = \\ &= x^4 + 4x^3(-y) + 6x^2(-y)^2 + 4x(-y)^3 + (-y)^4 = \\ &= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Przykład

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona udowodnić wzór $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Permutacje

Przykład

Na ile sposobów można ułożyć w ciąg elementy zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$?

$$
\begin{array}{cccc}
(1,2,3,4) & (2,1,3,4) & (3,1,2,4) & (4,1,2,3) \\
(1,2,4,3) & (2,1,4,3) & (3,1,4,2) & (4,1,3,2) \\
(1,3,2,4) & (2,3,1,4) & (3,2,1,4) & (4,2,1,3) \\
(1,3,4,2) & (2,3,4,1) & (3,2,4,1) & (4,2,3,1) \\
(1,4,2,3) & (2,4,1,3) & (3,4,1,2) & (4,3,1,2) \\
(1,4,3,2) & (2,4,3,1) & (3,4,2,1) & (4,3,2,1)
\end{array}
$$

Szukana liczba sposobów to
$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Definicja

Permutacją zbioru n-elementowego nazywamy dowolny n-elementowy ciąg różnych elementów tego zbioru.

Przykład (4/5)

Obliczmy $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.
Zauważmy, że w tym przypadku elementy na początkowych 6-ciu pozycjach muszą być ustawione w porządku rosnącym ($\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ$), więc

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{7}{6} \cdot 1! = |A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

Natomiast w przypadku, w którym pomijamy jeden z "wewnętrznych" podzbiorów, np. A_3, musimy mieć wszystkie elementy w porządku rosnącym ($\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$). Zatem

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 1 = |A_1 \cap A_3 \cap A_4|.$$

W przypadku przecięcia wszystkich zbiorów ($\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$) ponownie mamy tylko jeden przypadek, więc

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1.$$

Mówimy, że słowo A jest *anagramem* słowa B, jeżeli można otrzymać A poprzez zamianę kolejności liter w B.

Przykładowo, anagramami są słowa `elevenplustwo` oraz `twelveplusone`.

Przykład

Ile różnych anagramów ma słowo `real`?

Zauważmy, że liczba anagramów słowa `real` to liczba uporządkowań elementów zbioru $\{\mathtt{r}, \mathtt{e}, \mathtt{a}, \mathtt{l}\}$, więc odpowiedź to $4! = 24$.

```
real  rela  rael  rale  rlea  rlae
eral  erla  earl  ealr  elra  elar
arel  arle  aerl  aelr  alre  aler
lrea  lrae  lera  lear  lare  laer
```

Dowód (1/2).

Niech $1 \leqslant m \leqslant n$ i niech $s \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Załóżmy, że element s należy do dokładnie m zbiorów spośród $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Określmy, ile razy element s jest zliczony przez wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{i,j:i<j} |S_i \cap S_j| + \sum_{i,j,k:i<j<k} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|.$$

Zauważmy, że w sumie $\sum_{i=1}^{n} |S_i|$ element s jest policzony $m = \binom{m}{1}$ razy.

W sumie $\sum_{i,j:i<j} |S_i \cap S_j|$ element s jest policzony $\binom{m}{2}$ razy itd.

Ostatecznie element s został zliczony

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \ldots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} + \underbrace{0 + 0 + \ldots + 0}_{n-m \text{ razy}}$$

razy.

Trójkąt Pascala (I):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&& \binom{0}{0} &&&&& \\
&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&& \\
&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&& \\
&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} && \\
& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5} \\
&&&&& \vdots &&&&&
\end{array}$$

Trójkąt Pascala (II):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&& 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 2 && 1 &&& \\
&& 1 && 3 && 3 && 1 && \\
& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\
1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \\
&&&&& \vdots &&&&&
\end{array}$$

It is difficult to find a definition of combinatorics that is both concise and complete, unless we are satisfied with the statement "Combinatorics is what combinatorialists do."

W.T. Tutte, 1969

Combinatorics is the nanotechnology of mathematics.

Sara Billey, 2005

Więcej punktów widzenia:
What is Combinatorics? (A collection of quotes by Igor Pak)

Wzór Pascala

Równanie

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

zachodzi dla każdej pary liczb naturalnych n i k takich, że $1 \leqslant k < n$.

Dowód

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k!(n-k-1)! \cdot (n-k)} + \frac{(n-1)! \cdot k}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)! \cdot (n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

$\square$