Notacja $\mathcal{O}$

dr inż. Bartłomiej Pawlik

19 czerwca 2024

Przykład 3 (1/2)

Rozpatrzmy ciąg $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ dla $n \geqslant 1$. Pokażemy, że $h_n = \mathcal{O}(\log_2 n)$.

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
h_2 &= 1 + \frac{1}{2} < 2, \\
h_4 &= h_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) < 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2 + 1 = 3, \\
h_8 &= h_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) < 3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 3 + 1 = 4,
\end{aligned}
$$

itd. Ogólnie mamy

$$h_{2^k} < k + 1,$$

co można łatwo uzasadnić indukcyjnie.

Przykład 3 (2/2)

Niech n będzie liczbą ograniczoną kolejnymi potęgami dwójki: $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$. Zauważmy, że pierwsza z tych nierówność daje nam $k < \log_2 n$. Mamy zatem

$$h_n \leqslant h_{2^{k+1}} < (k+1) + 1 = k + 2 < \log_2 n + 2.$$

Dla dostatecznie dużych n mamy

$$\log_2 n + 2 < \log_2 n + \log_2 n = 2\log_2 n,$$

więc ostatecznie

$$h_n = \mathcal{O}(\log_2 n).$$

Przykład 1

Z prezentowanych wcześniej nierówności wynika, że

- $\sqrt{n} = \mathcal{O}(n)$,
- $n = \mathcal{O}(n^2)$,
- $n = \mathcal{O}(2^{n-1})$,
- $n = \mathcal{O}(2^n)$,
- $n^2 = \mathcal{O}(2^n)$,
- $2^n = \mathcal{O}(n!)$,
- $200^n = \mathcal{O}(n!)$,
- $n! = \mathcal{O}(n^n)$,
- $n \log_2 n = \mathcal{O}(n^2)$,

itp.

Notacja O służy do szacowania szybkości wzrostu rozpatrywanego ciągu poprzez porównanie ją z szybkością wzrostu prostszego (dobrze znanego) ciągu.

Dowód *(2/3)*.

3. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ oraz $g_n = \mathcal{O}(b_n)$, to istnieją dodatnie stałe C i D takie, że

$$|f_n| \leqslant C \cdot |a_n| \quad \text{oraz} \quad |g_n| \leqslant D \cdot |b_n|$$

dla dostatecznie dużych n. Ponownie korzystając z nierówności trójkąta mamy

$$\begin{aligned} |f_n + g_n| \leqslant |f_n| + |g_n| \leqslant C \cdot |a_n| + D \cdot |b_n| \leqslant \\ C \cdot \max\{|a_n|, |b_n|\} + D \cdot \max\{|a_n|, |b_n|\} = \\ (C + D) \cdot \max\{|a_n|, |b_n|\}, \end{aligned}$$

więc $f_n + g_n = \mathcal{O}(\max\{|a_n|, |b_n|\})$. Ponadto

$$|f_n \cdot g_n| = |f_n| \cdot |g_n| \leqslant C \cdot |a_n| \cdot D \cdot |b_n| = (C \cdot D) \cdot |a_n \cdot b_n|,$$

więc $f_n \cdot g_n = \mathcal{O}(a_n \cdot b_n)$.

Analogicznie możemy pokazać, że dla każdej liczby dodatniej C mamy

$$C^n < n!$$

dla dostatecznie dużych n, co oznacza że

- $n!$ rośnie szybciej niż jakikolwiek ciąg geometryczny

Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ mamy

$$n! < n^n$$

Dowód.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n < n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n = n^n$$

$\square$

W całym wykładzie przyjmujemy, że zbiór liczb naturalnych to zbiór liczb całkowitych dodatnich.

Jeżeli n jest liczbą naturalną, to

$$\ldots \leqslant \sqrt[4]{n} \leqslant \sqrt[3]{n} \leqslant \sqrt{n} \leqslant n \leqslant n^2 \leqslant n^3 \leqslant n^4 \leqslant \ldots$$

Dużo ogólniej:

Jeżeli n jest liczbą naturalną i α, β są liczbami rzeczywistymi takimi, że $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, to

$$n^\alpha \leqslant n^\beta.$$

Zauważmy, że jeżeli założymy dodatkowo, że $n > 1$, to powyższe nierówności będą ostre.

Nierówność

$$2^n < n!$$

zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n > 3$.

Dowód.

Mamy $2^4 < 4!$ oraz

$$2^n = 2^4 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{n-4} < 4! \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{n-4} < 4! \cdot \underbrace{5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{n-4} = n!$$

$\square$

Notacja $\mathcal{O}$ — własności

1. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ i c jest stałą, to
$$c \cdot f_n = \mathcal{O}(a_n).$$
2. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ i $g_n = \mathcal{O}(a_n)$, to
$$f_n + g_n = \mathcal{O}(a_n).$$
3. Jeżeli $f_n = \mathcal{O}(a_n)$ i $g_n = \mathcal{O}(b_n)$, to
$$f_n + g_n = \mathcal{O}(\max\{|a_n|, |b_n|\}) \quad \text{oraz} \quad f_n \cdot g_n = \mathcal{O}(a_n \cdot b_n).$$
4. Jeżeli $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ i $b_n = \mathcal{O}(c_n)$, to
$$a_n = \mathcal{O}(c_n).$$

(Zauważmy, że powyższe własności pozwalają nam szybko ustalić szacowanie w przykładzie 2: mamy $2n^5 + 9n^3 + 2024 = \mathcal{O}(n^5)$.)

$$\log_2 n < n < 2^n < n! < n^n$$

Precyzyjniej:

$$1 < \ldots < \log_3 n < \log_2 n < \ldots < \sqrt[3]{n} < \sqrt{n} < n < n^2 < n^3 < \ldots$$

oraz

$$\ldots < \sqrt[3]{n} < \sqrt{n} < n < n^2 < n^3 < \ldots < 2^n < 3^n < \ldots < n! < n^n$$

Oczywiście prawdziwe są również nierówności typu

$$n < n\sqrt{n} < n^2, \quad n < n \cdot \log_2 n < n^2,$$

itp.

Ciąg Catalana

$$C_0 = 1,\ C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

Początkowe wyrazy: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1\\
C_1 &= C_0C_0 = 1\\
C_2 &= C_0C_1 + C_1C_0 = 1 + 1 = 2\\
C_3 &= C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 2 + 1 + 2 = 5\\
C_4 &= C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14
\end{aligned}$$

Twierdzenie

Wzór jawny ciągu Catalana ma postać

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}.$$

Przykład

Wyznaczyć wzór jawny ciągu a_n, jeżeli $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ i $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ dla $n \geqslant 3$.

Zauważmy, że równanie charakterystyczne ma postać $r^2 - 4r + 4 = 0$, więc jego jedynym pierwiastkiem jest liczba $r_0 = 2$. Zatem

$$a_n = (A + Bn) \cdot 2^n.$$

Podstawiając do powyższego wzoru wartości a_1 i a_2 otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 0 = (A+B) \cdot 2 \\ 2 = (A+2B) \cdot 4 \end{cases}, \quad \text{więc} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ostatecznie

$$a_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n\right) \cdot 2^n, \quad \text{więc} \quad a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1}.$$

Przykład z *HAKMEM*

Niech a_0 będzie dowolną liczbą i niech a_{n+1} będzie liczbą liter potrzebnych do zapisu liczby a_n w języku angielskim.
Na przykład, jeżeli $a_0 = 33$, to otrzymujemy

$$33\,(thirty\ \ three) \;\to\; 11\,(eleven) \;\to\; 6\,(six) \;\to\; 3\,(three) \;\to$$

$$\to\; 5\,(five) \;\to\; 4\,(four) \;\to\; 4\,(four) \;\to\; \ldots$$

Przykład: Problem Collatza

Niech a_0 będzie dowoloną liczbą całkowitą dodatnią i niech

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & \text{gdy } a_n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ 3a_n + 1, & \text{gdy } a_n \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$$

Przykładowy ciąg Collatza: $12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, \color{red}{1}, 4, 2, 1, 4, \ldots$

Rekurencja (łac. *recurrere* - przybiec z powrotem) to sposób definiowania procedur i funkcji polegający na umieszczeniu w treści procedury/funkcji odwołań do samej siebie.

W definicji rekurencyjnej podajemy jawnie pewną liczbę elementów z których składa się dany obiekt (*warunki początkowe* lub *przypadki bazowe*), a następnie podajemy reguły (*zależności rekurencyjne*) definiowania pozostałych elementów przy pomocy elementów zdefiniowanych wcześniej.

Wybrane własności ciągu Fibonacciego

- $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
- $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$
- $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$
- $F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} = F_{m+n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$, gdzie $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Przykład

Wyznaczyć wzór jawny ciągu a_n, jeżeli $a_0 = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 20$ i $a_n = -2a_{n-1} + 4a_{n-2} + 8a_{n-3}$ dla $n \geqslant 3$.
Zauważmy, że równanie charakterystyczne ma postać $r^3 + 2r^2 - 4r - 8 = 0$. Po przekształceniu wielomianu do postaci iloczynowej otrzymujemy

$$(r-2)(r+2)^2 = 0.$$

Jak widać, $r_1 = 2$ jest jednokrotnym, natomiast $r_2 = -2$ dwukrotnym pierwiastkiem powyższego równania. Zatem

$$a_n = A \cdot 2^n + (Bn + C) \cdot (-2)^n$$

dla pewnych A, B i C.
Podstawiając do powyższego wzoru wartości a_0, a_1 i a_2 otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 3 = A + C \\ 4 = 2A - 2B - 2C \\ 20 = 4A + 8B + 4C \end{cases}, \quad \text{więc} \quad \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases}.$$

Ostatecznie $a_n = 3 \cdot 2^n + n \cdot (-2)^n$.

Funkcja McCarthy'ego

$$M(n) = \begin{cases} M\big(M(n+11)\big) & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant 100 \\ n-10 & \text{dla } n > 100 \end{cases}$$

Początkowe wyrazy: $\underbrace{91, 91, \ldots, 91}_{101}, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, \ldots$

Ciąg Fibonacciego

$$F_0 = 0, \ F_1 = 1,$$
$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

Początkowe wyrazy: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 1 \\
F_2 &= F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1 \\
F_3 &= F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2 \\
F_4 &= F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3
\end{aligned}$$

Definicja

Jednorodną liniową zależnością rekurencyjną II rzędu o stałych współczynnikach nazywamy zależność postaci

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}, \tag{1}$$

gdzie $n \geqslant n_0$, $A, B \in \mathbb{C}$ i $B \neq 0$.

Szczególne przypadki

Jak wygląda postać ogólna równania (1) z danymi $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ przy założeniu, że $A \cdot B = 0$?

Rekurencja

dr inż. Bartłomiej Pawlik

26 marca 2024