Liczby szczególne

dr inż. Bartłomiej Pawlik

19 czerwca 2024

Potęgi kroczące

Definicja

Niech $m \geqslant 0$ będzie liczbą całkowitą.

- *Dolną silnią* nazywamy wyrażenie
$$x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1).$$
- *Górną silnią* nazywamy wyrażenie
$$x^{\overline{m}} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1).$$

Wyrażenie $x^{\underline{m}}$ czytamy „x do m-tej ubywającej”, a $x^{\overline{m}}$ — „x do m-tej przybywającej”.

Przykład

- $5^{\underline{3}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
- $5^{\overline{3}} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$
- $4^{\underline{5}} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

$$n! = n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}}$$

Przykład

- $x^{\underline{3}} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$
- $x^{\overline{3}} = x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x$

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju

Definicja

Podziałem skończonego zbioru S nazywamy rodzinę parami rozłącznych podzbiorów $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ zbioru S taką, że

$$S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k = S.$$

Definicja (liczby Stirlinga drugiego rodzaju)

Symbol $\left\{ n \atop k \right\}$ (czyt. k podzbiorów n) oznacza liczbę sposobów podziału zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów.

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju występują częściej niż liczby Stirlinga pierwszego rodzaju, więc zaczynamy od nich — tak jak James Stirling w swojej książce *Methodus Differentialis* (1730).

Przykład

Wyznacz wartość $\left\{ {4 \atop 2} \right\}$.

Wyznaczymy liczbę podziałów zbioru czterolementowego $\{a, b, c, d\}$ na dwa niepuste zbiory. Zauważmy, że $4 = 1 + 3 = 2 + 2$, więc dany zbiór możemy zapisać jako sumę zbiorów trój- oraz jednoelementowego lub dwóch dwuelementowych:

$$
\begin{array}{lllll}
1+3: & \{a\} \cup \{b, c, d\}, & \{b\} \cup \{c, d, e\}, & \{c\} \cup \{a, b, d\}, & \{d\} \cup \{a, b, c\}, \\
2+2: & \{a, b\} \cup \{c, d\}, & \{a, c\} \cup \{b, d\}, & \{a, d\} \cup \{b, c\}. &
\end{array}
$$

Zatem $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$.

Wartości $\left\{ {n \atop k} \right\}$ dla małych wartości k:

- $k = 0$.
  Przyjmujemy, że $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$. Jeżeli $n > 0$ to, oczywiście, $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$.
- $k = 1$.
  Mamy $\left\{ {0 \atop 1} \right\} = 0$. Dla $n > 0$ istnieje dokładnie jeden n-elementowy podział n-elementowego zbioru, więc
  $$\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1.$$
- $k = 2$.
  Oczywiście $\left\{ {0 \atop 2} \right\} = 0$. Załóżmy, że $n > 0$. Chcemy rozbić zbiór $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ na dwa podzbiory S_1 i S_2. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a_1 \in S_1$. Pozostałe a_i możemy przypisać do zbioru S_1 na 2^{n-1} sposobów, ale musimy pamiętać, że nie możemy do niego przypisać wszystkich elementów zbioru S. Zatem
  $$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1.$$

Wartości $\left\{ {n \atop k} \right\}$ dla małych n i k:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0	0
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Uwaga!

W przypadku, gdy $n \geqslant 0$ i $k < 0$ zakładamy, że $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$.

Twierdzenie

Dla $n > 0$ zachodzi zależność rekurencyjna

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

Dowód. *(1/2)*

Niech $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Określimy liczbę podziałów S na k niepustych podzbiorów $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Zauważmy, że w każdym takim podziale elementy $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ można przydzielić <u>albo</u> do zbiorów $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$ <u>albo</u> do zbiorów $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}, S_k$ (w obu przypadkach każdy z wymienionych zbiorów posiada co najmniej jeden z elementów $a_1, \ldots, a_{n-1}$).

W pierwszym przypadku mamy $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ możliwości. Zauważmy, że dla każdego takiego podziału element a_n tworzy jednoznaczenie jednoelementowy ostatni zbiór S_k: $S_k = \{a_n\}$.

Dowód. *(2/2)*

W drugim przypadku mamy $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ możliwości podziału zbioru $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$ na $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Zauważmy, że w przypadku każdego takiego podziału element a_n może trafić do jednego z k zbiorów $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Zatem w tym przypadku mamy $k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ możliwości.

Ostatecznie

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

□

Trójkąt Stirlinga dla podzbiorów:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \left\{ {0 \atop 0} \right\} & & & & & \\
 & & & & \left\{ {1 \atop 0} \right\} & & \left\{ {1 \atop 1} \right\} & & & & \\
 & & & \left\{ {2 \atop 0} \right\} & & \left\{ {2 \atop 1} \right\} & & \left\{ {2 \atop 2} \right\} & & & \\
 & & \left\{ {3 \atop 0} \right\} & & \left\{ {3 \atop 1} \right\} & & \left\{ {3 \atop 2} \right\} & & \left\{ {3 \atop 3} \right\} & & \\
 & \left\{ {4 \atop 0} \right\} & & \left\{ {4 \atop 1} \right\} & & \left\{ {4 \atop 2} \right\} & & \left\{ {4 \atop 3} \right\} & & \left\{ {4 \atop 4} \right\} & \\
\left\{ {5 \atop 0} \right\} & & \left\{ {5 \atop 1} \right\} & & \left\{ {5 \atop 2} \right\} & & \left\{ {5 \atop 3} \right\} & & \left\{ {5 \atop 4} \right\} & & \left\{ {5 \atop 5} \right\} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Trójkąt Stirlinga dla podzbiorów:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 3 & & 1 & & \\
 & 0 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & \\
0 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Przykład

Oblicz wartości wyrażeń

a) $x^{\underline{1}} + x^{\underline{2}}$,

b) $x^{\underline{1}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{3}}$,

c) $x^{\underline{1}} + 7x^{\underline{2}} + 6x^{\underline{3}} + x^{\underline{4}}$.

d) $x^{\underline{1}} + 15x^{\underline{2}} + 25x^{\underline{3}} + 10x^{\underline{4}} + x^{\underline{5}}$.

Powyższy przykład pokazuje, że dla małych wartości n wyrażenie x^n można zapisać jako sumę potęg zstępujących ze współczynnikami wynikającymi z tabeli liczb Stirlinga drugiego rodzaju:

$$
\begin{aligned}
x^0 &= x^{\underline{0}},\\
x^1 &= x^{\underline{1}},\\
x^2 &= x^{\underline{1}} + x^{\underline{2}},\\
x^3 &= x^{\underline{1}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{3}},\\
x^4 &= x^{\underline{1}} + 7x^{\underline{2}} + 6x^{\underline{3}} + x^{\underline{4}},\\
x^5 &= x^{\underline{1}} + 15x^{\underline{2}} + 25x^{\underline{3}} + 10x^{\underline{4}} + x^{\underline{5}}.
\end{aligned}
$$

Czy prawdziwa jest ogólna zależność?

Twierdzenie

Wzór

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}$$

zachodzi dla każdej liczby całkowitej dodatniej n.

Dowód. *(1/2)*

Zauważmy, że z

$$x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k)$$

wynika, że

$$x^{\underline{k}} \cdot x = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}.$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Wiemy, że wzór jest prawdziwy dla małych wartości n. Załóżmy (ZI), że zachodzi on dla $(n-1)$, czyli

$$x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ n-1 \atop k \right\} x^{\underline{k}}.$$

Dowód. *(2/2)*

Mamy

$$
\begin{aligned}
x^n &= x \cdot x^{n-1} \overset{(ZI)}{=} x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \cdot x = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} (x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} = \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} + 0 = \\
&= \left\{ {n-1 \atop -1} \right\} x^{\underline{0}} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} + \left\{ {n-1 \atop n} \right\} nx^{\underline{n}} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \left(\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k} \right\} k \right) \cdot x^{\underline{k}} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot x^{\underline{k}}.
\end{aligned}
$$

□

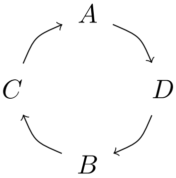
Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju

Definicja

Cyklem nazywamy cykliczne ustawienia elementów danego zbioru.

Przykładowo jednym z cykli zbioru $\{A, B, C, D\}$ jest cykl w którym A przechodzi na D, D na B, B na C, a C na A. Ten cykl zapisujemy w postaci $[A, D, B, C]$. Oczywiście

$$[A, D, B, C] = [D, B, C, A] = [B, C, A, D] = [C, A, D, B].$$



Definicja (liczby Stirlinga pierwszego rodzaju)

Symbol $\left[{n \atop k}\right]$ (czyt. k cykli n) oznacza liczbę sposobów na rozmieszczenie n elementów w k rozłącznych cyklach.

Przykład

Wyznacz wartość $\left[{4 \atop 2}\right]$.

Wyznaczymy liczbę podziału elementów czterolementowego zbioru $\{a, b, c, d\}$ na dwa niepuste cykle:

$$\begin{array}{llll} [a]\,[b,c,d], & [b]\,[a,c,d], & [c]\,[a,b,d], & [d]\,[a,b,c], \\ [a]\,[b,d,c], & [b]\,[a,d,c], & [c]\,[a,d,b], & [d]\,[a,c,b], \\ [a,b]\,[c,d], & [a,c]\,[b,d], & [a,d]\,[b,c]. & \end{array}$$

Zatem $\left[{4 \atop 2}\right] = 11$.

Wartości $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ dla małych wartości k:

- $k = 0$.
  Podobnie jak w przypadku liczb Stirlinga drugiego rodzaju mamy $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ oraz $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ dla $n > 0$.
- $k = 1$.
  Oczywiście $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. Pamiętamy, że zbiór n-elementowy ma dokładnie $n!$ permutacji. Każdemu cyklowi odpowiada dokładnie n permutacji (każda rozpoczyna się od innego elementu danego zbioru), zatem

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Wartości $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ dla małych n i k:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0	0	0	0
4	0	6	11	6	1	0	0	0	0
5	0	24	50	35	10	1	0	0	0
6	0	120	274	225	85	15	1	0	0
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	0
8	0	5040	13 068	13 132	6769	1960	322	28	1
9	0	40 320	109 584	118 124	67 284	22 449	4536	546	36

Uwaga!

W przypadku, gdy $n \geqslant 0$ i $k < 0$ zakładamy, że $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$.

Twierdzenie

Dla $n > 0$ zachodzi zależność rekurencyjna

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Poniższy dowód jest modyfikacją wcześniej przedstawionego dowodu zależności rekurencyjnej dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju.

Dowód. *(1/2)*

Niech $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Określimy liczbę podziałów S na k cykli $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Zauważmy, że w każdym takim podziale elementy $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ można rozmieścić albo w cyklach $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$ albo w cyklach $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}, C_k$.

W pierwszym przypadku mamy $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ możliwości. Zayważmy, że dla każdego takiego podziału element a_n tworzy ostatni, jednoelementowy cykl $C_k = [a_n]$.

Dowód. *(2/2)*

W drugim przypadku mamy $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ możliwości podziału zbioru $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$ na cykle $C_1, C_2, \ldots, C_k$. W przypadku każdego takiego podziału element a_n może trafia do jednego z tych cykli. Nietrudno zauważyć, że można go tak umieścić na $(n-1)$ sposobów (cykl długości L można rozszerzyć o jeden element na L sposobów). Zatem w tym przypadku mamy $(n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ możliwości.

Ostatecznie

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

□

Trójkąt Stirlinga dla cykli:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & {0 \brack 0} & & & & & \\
 & & & & {1 \brack 0} & & {1 \brack 1} & & & & \\
 & & & {2 \brack 0} & & {2 \brack 1} & & {2 \brack 2} & & & \\
 & & {3 \brack 0} & & {3 \brack 1} & & {3 \brack 2} & & {3 \brack 3} & & \\
 & {4 \brack 0} & & {4 \brack 1} & & {4 \brack 2} & & {4 \brack 3} & & {4 \brack 4} & \\
{5 \brack 0} & & {5 \brack 1} & & {5 \brack 2} & & {5 \brack 3} & & {5 \brack 4} & & {5 \brack 5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Trójkąt Stirlinga dla cykli:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 2 & & 3 & & 1 & & \\
 & 0 & & 6 & & 11 & & 6 & & 1 & \\
0 & & 24 & & 50 & & 35 & & 10 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Zauważmy, że $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ oznacza liczbę permutacji n obiektów, które zawierają dokładnie k cykli. Zatem aby otrzymać liczbę wszystkich permutacji n obiektów, można zsumować wartości wyrażenia $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ dla wszystkich k takich, że $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$$

Przykład

Zapisz w postaci ogólnej wielomiany $x^{\overline{s}}$ dla $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{0}} &= 1 = x^0, \\
x^{\overline{1}} &= x = x^1, \\
x^{\overline{2}} &= x(x+1) = x^1 + x^2, \\
x^{\overline{3}} &= x(x+1)(x+2) = 2x^1 + 3x^2 + x^3, \\
x^{\overline{4}} &= x(x+1)(x+2)(x+3) = 6x^1 + 11x^2 + 6x^3 + x^4, \\
x^{\overline{5}} &= x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24x^1 + 50x^2 + 35x^3 + 10x^4 + x^5.
\end{aligned}
$$

Jak powinno wyglądać uogólnienie zaobserwowanych wyników?

Twierdzenie

Wzór

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k$$

zachodzi dla każdej liczby całkowitej dodatniej n.

- Zauważmy, że jak w powyższym wzorze podstawimy $x = 1$, to otrzymamy jeden z omawianych wcześniej wzorów.
- Dowód powyższego twierdzenia można przeprowadzić indukcyjnie — podobnie do przeprowadzonego wcześniej dowodu analogicznego twierdzenia dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju (należy pamiętać, że $x^{\overline{n}} = (x + n - 1)x^{\overline{n-1}}$).

Zależności między liczbami Strilinga pierwszego i drugiego rodzaju

Zauważmy, że liczba cykli musi być co najmniej równa liczbie podzbiorów, więc mamy

$$\left\{ {n \atop k} \right\} \leqslant \left[{n \atop k} \right]$$

dla całkowitych nieujemnych n i k.

Zachodzą tzw. *wzory inwersji*:

Jeżeli $m \neq n$, to

$$\sum_{k=m}^{n} \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^{n-k} = \sum_{k=m}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k} = 0$$

- $\binom{n}{k}$ — liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego
- $\left\{ {n \atop k} \right\}$ — liczba podziałów n-elementowego zbioru na k niepustych podzbiorów
- $\left[{n \atop k} \right]$ — liczba permutacji n-elementowego zbioru zawierających k cykli

Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju nazywane są *liczbami cyklicznymi Stirlinga*, a drugiego rodzaju — *liczbami podzbiorowymi Stirlinga*.