Elementy kombinatoryki

dr inż. Bartłomiej Pawlik

25 czerwca 2024

It is difficult to find a definition of combinatorics that is both concise and complete, unless we are satisfied with the statement "Combinatorics is what combinatorialists do."

W.T. Tutte, 1969

Combinatorics is the nanotechnology of mathematics.

Sara Billey, 2005

Więcej punktów widzenia:
What is Combinatorics? (A collection of quotes by Igor Pak)

Przykład

W szafie mam 4 pary butów, 6 par spodni, 9 koszul i 5 casualowych marynarek. Na ile różnych sposobów mogę się ubrać?

$4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 5 = 1080$

Przykład

Na ile sposobów można wybrać czterocyfrowy kod PIN?

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$

Prawo iloczynu

Jeżeli $S_1, \ldots, S_n$ są zbiorami skończonymi, to $|S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n| = \prod_{i=1}^{n} |S_i|$.

Combinatorial explosion

Szybki (często wykładniczy) wzrost złożoności problemu wraz z niewielkimi zmianami w liczbie danych wejściowych.

Permutacje

Przykład

Na ile sposobów można ułożyć w ciąg elementy zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$?

$$
\begin{array}{cccc}
(1,2,3,4) & (2,1,3,4) & (3,1,2,4) & (4,1,2,3) \\
(1,2,4,3) & (2,1,4,3) & (3,1,4,2) & (4,1,3,2) \\
(1,3,2,4) & (2,3,1,4) & (3,2,1,4) & (4,2,1,3) \\
(1,3,4,2) & (2,3,4,1) & (3,2,4,1) & (4,2,3,1) \\
(1,4,2,3) & (2,4,1,3) & (3,4,1,2) & (4,3,1,2) \\
(1,4,3,2) & (2,4,3,1) & (3,4,2,1) & (4,3,2,1)
\end{array}
$$

Szukana liczba sposobów to

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Definicja

Permutacją zbioru n-elementowego nazywamy dowolny n-elementowy ciąg różnych elementów tego zbioru.

Silnia

$n!$ — (czyt. n *silnia*) jest zdefiniowana dla nieujemnych liczb całkowitych w następujący sposób:

$$0! = 1, \qquad\qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ \text{ for } \ n \geqslant 1.$$

Zauważmy, że dla $n \geqslant 1$ mamy

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i \quad \text{oraz} \quad n! = (n-1)! \cdot n.$$

Początkowe wartości (do $12!$) to

$$1,\ 1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720,\ 5040,\ 40\,320,\ 362\,880,\ 3\,628\,800,\ 39\,916\,800,\ 479\,001\,600.$$

Stwierdzenie

Liczba różnych permutacji zbioru n-elementowego wynosi $n!$.

Mówimy, że słowo A jest *anagramem* słowa B, jeżeli można otrzymać A poprzez zamianę kolejności liter w B.

Przykładowo, anagramami są słowa `elevenplustwo` oraz `twelveplusone`.

Przykład

Ile różnych anagramów ma słowo `real`?

Zauważmy, że liczba anagramów słowa `real` to liczba uporządkowań elementów zbioru $\{\mathtt{r}, \mathtt{e}, \mathtt{a}, \mathtt{l}\}$, więc odpowiedź to $4! = 24$.

real	rela	rael	rale	rlea	rlae
eral	erla	earl	ealr	elra	elar
arel	arle	aerl	aelr	alre	aler
lrea	lrae	lera	lear	lare	laer

Przykład

Losujemy trzy spośród siedmiu numerowanych kul i wkładamy po jednej z nich do trzech rozróżnialnych koszyków. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Szukana liczba możliwości to $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Przykład

Na ile sposobów można wybrać czterocyfrowy kod PIN, w którym żadna cyfra się nie powtarza?

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Definicja

Niech $k \leqslant n$. k-**permutacją (permutacją częściową)** zbioru n-elementowego nazywamy dowolny k-elementowy ciąg różnych elementów tego zbioru.

Stwierdzenie

- Liczba różnych k-permutacji zbioru n-elementowego wynosi $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.
- Permutacja zbioru n-elementowego jest jego n-permutacją.

Uwaga! (semantyczne wariactwo)

W starszej literaturze naukowej (oraz w polskich szkołach) permutacje częściowe bywają nazywane wariacjami i oznaczane przez V_n^k, P_n^k, ${}_nP_k$, ${}^nP_k$, $P_{n,k}$ itp. (w zależności od źródła).

Kombinacje

Przykład

Losujemy trzy spośród siedmiu numerowanych kul. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Z poprzedniego przykładu wiemy, że liczba uporządkowanych trójek kul wynosi 210. Teraz interesuje nas liczba nieuporządkowanych trójek.
Zauważmy, że każdej nieuporządkowanej trójce $\{K_1, K_2, K_3\}$ odpowiada dokładnie sześć uporządkowanych trójek:

$$(K_1, K_2, K_3), \quad (K_2, K_1, K_3), \quad (K_3, K_1, K_2),$$

$$(K_1, K_3, K_2), \quad (K_2, K_3, K_1), \quad (K_3, K_2, K_1).$$

Zatem szukana liczba to $\dfrac{210}{6} = 35$.

Definicja

Kombinacją n **po** k nazywamy k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego.

Symbol dwumianowy Newtona

Definicja

Symbolem dwumianowym Newtona nazywamy wyrażenie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dla $0 \leqslant k \leqslant n$.

Czasami przyjmuje się, że jeżeli $k > n$, to $\binom{n}{k} = 0$.

Stwierdzenie

Liczba różnych k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi $\binom{n}{k}$.

Przykład

Określ liczbę 12-cyfrowych liczb złożonych z czterech cyfr 1, czterech cyfr 2, trzech cyfr 5 i jednej cyfry 8.

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{1}{1} = 495 \cdot 70 \cdot 4 \cdot 1 = 138\,600$$

Przykład

Wyznacz liczbę anagramów słowa `rearrange`.

W rozważanym słowie występują trzy litery `r`, dwie litery `e`, dwie litery `a` i po jednej literze `n` i `g`.

$$\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 15\,120.$$

Wartości symbolu dwumianowego $\binom{n}{k}$ dla małych wartości n i k:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Podstawowe własności symbolu dwumianowego

Niech k, n będą nieujemnymi liczbami całkowitymi takimi, że $k \leqslant n$.

1. $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
2. $$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$
3. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Powyższe równania można łatwo udowodnić wprost z definicji symbolu dwumianowego.

Wzór Pascala

Równanie

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

zachodzi dla każdej pary liczb naturalnych n i k takich, że $1 \leqslant k < n$.

Dowód

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k!(n-k-1)! \cdot (n-k)} + \frac{(n-1)! \cdot k}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$\square$

Trójkąt Pascala (I):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Trójkąt Pascala (II):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Przykład

Wyznaczyć liczbę wszystkich podzbiorów zbioru $\{a, b, c\}$.

sposób pierwszy

Zbiór jest tak mały, że możemy to przeliczyć na palcach:

podzbiory 0-elementowe:	$\emptyset$	(1)
podzbiory 1-elementowe:	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	(3)
podzbiory 2-elementowe:	$\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}$	(3)
podzbiory 3-elementowe:	$\{a, b, c\}$	(1)

Ostatecznie zbiór $\{a, b, c\}$ ma 8 podzbiorów.

Przykład

Wyznaczyć liczbę wszystkich podzbiorów zbioru $\{a, b, c\}$.

sposób drugi

Określmy, na ile sposobów można skonstruować podzbiór danego zbioru.
Element a należy do podzbioru lub nie, co daje dwie możliwości. Identycznie jest z elementami b i c.
Zatem z zasady mnożenia wynika, że podzbiór danego zbioru można otrzymać na

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

sposobów.

Zauważmy, że z drugi sposób rozwiązania powyższego przykładu sugeruje bijekcję między liczbą podzbiorów zbioru 3-elementowego i liczbą ciągów binarnych długości 3. Istotnie:

podzbiór	abc
$\emptyset$	000
$\{a\}$	100
$\{b\}$	010
$\{c\}$	001
$\{a, b\}$	110
$\{a, c\}$	101
$\{b, c\}$	011
$\{a, b, c\}$	111

Stwierdzenie

Liczba podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n.

Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A często (całkiem słusznie) nazywa się **zbiorem potęgowym** zbioru A i oznacza przez $P(A)$ lub 2^A.
Stosując drugie z powyższych oznaczeń, stwierdzenie o liczbie podzbiorów zbioru n-elementowego możemy zapisać w postaci

$$\left|2^A\right| = 2^{|A|}.$$

Wniosek

Dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n zachodzi

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Dowód.

Zauważmy, że $\binom{n}{k}$ oznacza liczbę podzbiorów zbioru n-elementowego. Zatem

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

to liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego. Z drugiej strony, wiemy że liczba podzbiorów danego zbioru to 2^n, więc dana równość jest prawdziwa. $\square$

Twierdzenie (Wzór dwumianowy Newtona)

Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ i dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Przykład

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona opracować wzory skróconego mnożenia dla wyrażeń $(x+y)^4$ oraz $(x-y)^4$.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^{4-k} y^k = \\
&= \binom{4}{0} x^4 y^0 + \binom{4}{1} x^3 y^1 + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x^1 y^3 + \binom{4}{4} x^0 y^4 = \\
&= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4
\end{aligned}
$$

Analogicznie

$$
\begin{aligned}
(x-y)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^{4-k} (-y)^k = \\
&= x^4 + 4x^3(-y) + 6x^2(-y)^2 + 4x(-y)^3 + (-y)^4 = \\
&= x^4 - 4x^3 y + 6x^2 y^2 - 4xy^3 + y^4
\end{aligned}
$$

Przykład

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona udowodnić wzór $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}.$$

Liczba elementów sumy zbiorów

Przykład

Adaś uczy się dwóch języków europejskich, Beatka uczy się jednego języka afrykańskiego, a Celinka uczy się trzech języków azjatyckich. Ilu różnych języków uczą się dzieci?

$$2 + 1 + 3 = 6.$$

Prawo sumy dla zbiorów rozłącznych

Niech $S_1, \ldots, S_n$ będą zbiorami skończonymi, które są parami rozłączne. Wtedy

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} S_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| \, .$$

Przykład

W klasie każde dziecko uczy się co najmniej jednego języka. 15 dzieci uczy się języka angielskiego, 11 dzieci uczy się języka francuskiego i 5 dzieci uczy się obu tych języków. Z ilu uczniów składa się klasa?

Dodając do siebie liczbę dzieci uczących się angielskiego (15) i uczących się francuskiego (11), dwukrotnie policzyliśmy te, które uczą się obu języków (5). Zatem liczba uczniów wynosi

$$15 + 11 - 5 = 21.$$

Uogólnione prawo sumy dla dwóch zbiorów

Dla dowolnych zbiorów skończonych S_1 i S_2 mamy

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|.$$

Przykład

Uogólnić powyższy wzór na trzy zbiory S_1, S_2, S_3.

$$\begin{aligned} |S_1 \cup S_2 \cup S_3| &= |(S_1 \cup S_2) \cup S_3| = |S_1 \cup S_2| + |S_3| - |(S_1 \cup S_2) \cap S_3| = \\ &= |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2| + |S_3| - |(S_1 \cap S_3) \cup (S_2 \cap S_3)| = \\ &= |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2| + |S_3| + \\ &\quad - \Big(|S_1 \cap S_2| + |S_2 \cap S_3| - |S_1 \cap S_3 \cap S_2 \cap S_3|\Big) = \\ &= |S_1| + |S_2| + |S_3| - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_2 \cap S_3| + \\ &\quad + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|. \end{aligned}$$

Zatem

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|$$

Zasada włączeń i wyłączeń

Niech $n \geqslant 2$ i niech $S_1, S_2, \ldots, S_n$ będą zbiorami skończonymi. Liczba elementów sumy zbiorów $S_1, \ldots, S_n$ jest równa liczbie elementów wszystkich możliwych różnych przecięć nieparzystej liczby zbiorów spośród $S_1, \ldots, S_n$ pomniejszonej o liczbę elementów wszystkich możliwych różnych przecięć parzystej liczby zbiorów spośród $S_1, \ldots, S_n$:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{i,j:i<j} |S_i \cap S_j| + \sum_{i,j,k:i<j<k} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \ldots + \\ + (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|$$

Dowód (1/2).

Niech $1 \leqslant m \leqslant n$ i niech $s \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Załóżmy, że element s należy do dokładnie m zbiorów spośród $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Określmy, ile razy element s jest zliczony przez wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{i,j: i<j} |S_i \cap S_j| + \sum_{i,j,k: i<j<k} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|.$$

Zauważmy, że w sumie $\sum_{i=1}^{n} |S_i|$ element s jest policzony $m = \binom{m}{1}$ razy.

W sumie $\sum_{i,j: i<j} |S_i \cap S_j|$ element s jest policzony $\binom{m}{2}$ razy itd.

Ostatecznie element s został zliczony

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \ldots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} + \underbrace{0 + 0 + \ldots + 0}_{n-m \text{ razy}}$$

razy.

Dowód (2/2).

Dodajemy z lewej strony sztuczne zero, a następnie korzystamy ze wzoru dwumianowego Newtona:

$$1 - \binom{m}{0} + \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m} =$$

$$= 1 - \left(\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \ldots + (-1)^{m}\binom{m}{m}\right) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 1^{m-k}(-1)^k = 1 - (1-1)^m = 1.$$

Zatem powyższe wyrażenie zliczyło element s dokładnie raz, co dowodzi poprawności zasady włączeń i wyłączeń. $\square$

Specjalne przypadki zasady włączeń i wyłączeń

Niech S_1, S_2, S_3, S_4 będą zbiorami skończonymi.

$$\begin{aligned} |S_1 \cup S_2| = &|S_1| + |S_2| + \\ &- |S_1 \cap S_2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S_1 \cup S_2 \cup S_3| = &|S_1| + |S_2| + |S_3| + \\ &- |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_2 \cap S_3| + \\ &+ |S_1 \cap S_2 \cap S_3| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = &|S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + \\ &- |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_1 \cap S_4| + \\ &\quad - |S_2 \cap S_3| - |S_2 \cap S_4| - |S_3 \cap S_4| + \\ &+ |S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| + \\ &\quad + |S_1 \cap S_3 \cap S_4| + |S_2 \cap S_3 \cap S_4| + \\ &- |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4| \end{aligned}$$

Przykład

Ile jest liczb dodatnich mniejszych od 1000, które są podzielne przez 2 lub 9 lub 11?

Zauważmy, że

A_2 — zbiór rozpatrywanych liczb podzielnych przez 2; $|A_2| = 499$
A_9 — zbiór rozpatrywanych liczb podzielnych przez 9; $|A_9| = 111$
A_{11} — zbiór rozpatrywanych liczb podzielnych przez 11; $|A_{11}| = 90$

$A_{18} = A_2 \cap A_9$; $|A_{18}| = 55$
$A_{22} = A_2 \cap A_{11}$; $|A_{22}| = 45$
$A_{99} = A_9 \cap A_{11}$; $|A_{99}| = 10$

$A_{198} = A_2 \cap A_9 \cap A_{11}$; $|A_{198}| = 5$

Ostatecznie, stosując zasadę włączeń i wyłączeń, otrzymujemy

$$|A_2 \cup A_9 \cup A_{11}| = |A_2| + |A_9| + |A_{11}| - |A_{18}| - |A_{22}| - |A_{99}| + |A_{198}| =$$
$$= 499 + 111 + 90 - 55 - 45 - 10 + 5 = 595.$$

Przykład (1/5)

Wyzaczyć liczbę permutacji zbioru $[7] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, które nie zawierają czterech kolejnych elementów w porządku rosnącym.

Niech X będzie zbiorem permutacji o szukanej własności. Zauważmy, że liczba wszystkich permutacji zbioru $[7]$ to $7! = 5040$.
W zbiorze $[7]$ wyszczególnimy pozdbiór A złożony z tych permutacji, które zawierają cztery kolejne elementy w porządku rosnącym. Oczywiście

$$|X| = 7! - |A|.$$

W zbiorze A określamy cztery podzbiory:

- A_1 — zbiór permutacji zawierających elementy w porządku rosnącym na pozycjach 1, 2, 3 i 4. ($\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ$)
- A_2 — zbiór permutacji zawierających elementy w porządku rosnącym na pozycjach 2, 3, 4 i 5. ($\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ$)
- A_3 — zbiór permutacji zawierających elementy w porządku rosnącym na pozycjach 3, 4, 5 i 6. ($\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\circ$)
- A_4 — zbiór permutacji zawierających elementy w porządku rosnącym na pozycjach 4, 5, 6 i 7. ($\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet$)

Przykład (2/5)

Zauważmy, że

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

ale wyróżnione podzbiory nie są rozłączne. Aby policzyć $|A|$, zastosujemy zasadę włączeń i wyłączeń.

Obliczmy $|A_1|$. $(\bullet \bullet \bullet \bullet \circ \circ \circ)$
Elementy na pierwszych czterech pozycjach $(\bullet)$ możemy wybrać na $\binom{7}{4}$ sposobów i układamy je jednoznacznie (rosnąco). Zostały nam 3 elementy $(\circ)$, które możemy ustawić dowolnie, co daje $3!$ możliwości. Zatem liczba permutacji należących do zbioru A_1 to

$$|A_1| = \binom{7}{4} \cdot 3!.$$

Oczywiście

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4|.$$

Przykład (3/5)

Obliczmy $|A_1 \cap A_2|$.
Elementy zbioru $A_1 \cap A_2$ muszą być ustawione w porządku rosnącym na pozycjach 1, 2, 3 i 4 oraz na pozycjach 2, 3, 4 i 5, więc muszą być ustawione rosnąco na pozycjach 1, 2, 3, 4 i 5 ($\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \circ \circ$). Zatem (analogicznie jak w przypadku $|A_1|$) otrzymujemy

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{7}{5} \cdot 2! = |A_2 \cap A_3| = |A_3 \cap A_4|.$$

Zauważmy, że dla $|A_1 \cap A_3|$ musimy mieć elementy w porządku rosnącym na pozycjach 1, 2, 3, 4, 5 i 6 ($\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \circ$). Mamy

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{7}{6} \cdot 1! = |A_2 \cap A_4|.$$

Ostatnim przypadkiem dla przecięć dwóch podzbiorów jest $|A_1 \cap A_4|$ ($\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$). Mamy tylko jedno ustawienie w porządku rosnącym na siedmiu pozycjach:

$$|A_1 \cap A_4| = 1 = \binom{7}{7} \cdot 0!.$$

Przykład (4/5)

Obliczmy $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

Zauważmy, że w tym przypadku elementy na początkowych 6-ciu pozycjach muszą być ustawione w porządku rosnącym ($\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \circ$), więc

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{7}{6} \cdot 1! = |A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

Natomiast w przypadku, w którym pomijamy jeden z "wewnętrznych" podzbiorów, np. A_3, musimy mieć wszystkie elementy w porządku rosnącym ($\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$). Zatem

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 1 = |A_1 \cap A_3 \cap A_4|.$$

W przypadku przecięcia wszystkich zbiorów ($\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$) ponownie mamy tylko jeden przypadek, więc

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1.$$

Przykład (5/5)

Zatem

$$|A| = \underbrace{4 \cdot \binom{7}{4} \cdot 3!}_{|A_i|} - \underbrace{\left(3 \cdot \binom{7}{5} \cdot 2! + 2 \cdot \binom{7}{6} \cdot 1! + 1\right)}_{|A_i \cap A_j|} +$$

$$+ \underbrace{\left(2 \cdot \binom{7}{6} \cdot 1! + 2 \cdot 1\right)}_{|A_i \cap A_j \cap A_k|} - \underbrace{1}_{|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|} =$$

$$= 840 - 141 + 16 - 1 = 714.$$

Zatem liczba permutacji zbioru $[7]$, które nie zawierają czterech kolejnych elementów w porządku rosnącym to

$$5040 - 714 = 4326.$$