Twierdzenie

Dwie skończone algebry Boole'a są izomorficzne, gdy mają taką samą liczbę atomów.

Wniosek

Każda skończona algebra Boole'a jest izomorficzna z $\mathbb{B}^n$ dla pewnej liczby naturalnej n.

Pamiętamy, że $\mathbb{B}^n$ ma dokładnie n atomów.

Stwierdzenie

Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $|\mathtt{Bool}(n)| = 2^{2^n}$.

Dowód.

Funkcja boolowska f każdemu argumentowi przypisuję jedną z dwóch wartości $(0$ lub $1)$. Zatem liczba różnych n-argumentowych funkcji boolowskich wynosi $2^{|D_f|}$, gdzie $|D_f|$ to liczba elementów dziedziny funkcji f.
Dziedzina składa się z n-elementowych ciągów binarnych, których jest 2^n. Zatem ostatecznie $|\mathtt{Bool}(n)| = 2^{2^n}$. $\square$

Definicja

Niech B będzie nietrywialną algebrą Boole'a.

- Niezerowy element $a \in B$ nazywamy **atomem** B wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $b, c \in B$ z równania $a = b \vee c$ wynika, że $a = b$ lub $a = c$.
- Niejedynkowy element $a \in B$ nazywamy **co-atomem** B wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $b, c \in B$ z równania $a = b \wedge c$ wynika, że $a = b$ lub $a = c$.

Zauważmy, że co-atom to dopełnienie atomu.

Wniosek

- Niezerowy element $a \in B$ jest atomem algebry B wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $x \in B$ taki, że $0 < x < a$.
- Niejedynkowy $a \in B$ jest co-atomem algebry B wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $x \in B$ taki, że $a < x < 1$.

Definicja

Niech B_1, B_2 będą algebrami Boole'a. Funkcję $f : B_1 \to B_2$ nazywamy **izomorfizmem** B_1 i B_2 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $x, y \in B_1$ mamy

1. f jest bijekcją,
2. $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$,
3. $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$,
4. $f(\neg x) = \neg f(x)$,
5. $f(0) = 0$,
6. $f(1) = 1$.

Zatem izomorfizm to bijekcja, która zachowuje wszystkie działania.

Analogicznie:

Twierdzenie

Każdy co-atom $\texttt{Bool}(n)$ jest generowany przez dokładnie jeden maxterm.

Wniosek

Każda funkcja boolowska jest generowana przez iloczyn maxtermów.

Reprezentacja wielomianu boolowskiego w postaci iloczynu maxtermów jest nazywana jego **koniunkcyjną postacią normalną (CNF)**.

Uwaga!

Każda funkcja boolowska może być generowana przez nieskończenie wiele wielomianów boolowskich.

Metody reprezentacji funkcji boolowskich

1. Za pomocą wielomianów boolowskich.
2. Za pomocą wartości — zazwyczaj w tabelce.
3. Za pomocą indeksów atomów: **indeksem atomu** a nazywamy ten argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 1. Indeks atomu zwykle zapisywany jest nie w postaci ciągu zer i jedynek, ale jako liczba w systemie dziesiętnym, która ten ciąg reprezentuje. Takie przedstawienie funkcji zaczyna się od symbolu $\sum$, po którym wypisuje się indeksy odpowiednich atomów (w dowolnej kolejności).
4. Za pomocą indeksów co-atomów: **indeksem co-atomu** c nazywamy ten argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0. Takie przedstawienie f zaczyna się od symbolu $\prod$.

Przykład

Określić $\texttt{Bool}(1)$.
Wypiszmy wszystkie możliwe wartościowania funkcji boolowskiej na jednej binarnej zmiennej x:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Nietrudno zauważyć, że $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = \neg x$ i $f_4(x) = 1$.
Zatem $\texttt{Bool}(1) = \{0, 1, x, \neg x\}$.

Przykład

Podać trzy przykładowe elementy zbioru $\texttt{Bool}(3)$.

$$f_1(x, y, z) = \big(x \wedge (\neg y)\big) \vee z,$$
$$f_2(x, y, z) = 1,$$
$$f_3(x, y, z) = x \wedge y \wedge z$$

Podstawowe przykłady algebry Boole'a

$\mathbb{B} = \{0, 1\}$ — zbiór wartości logicznych (boolowskich); działaniami są $\wedge, \vee, \neg$.

$\mathbb{B}^n = \{0, 1\}^n$ — produkt kartezjański n kopii zbioru $\mathbb{B}$ z naturalnie określonymi działaniami (po współrzędnych).

Przykład

Wykonać działania $\wedge, \vee, \neg$ na elementach $(1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 1) \in \mathbb{B}^5$.

$$\begin{aligned}
(1, 1, 0, 0, 0) \wedge (0, 1, 1, 0, 1) &= (0, 1, 0, 0, 0) \\
(1, 1, 0, 0, 0) \vee (0, 1, 1, 0, 1) &= (1, 1, 1, 0, 1) \\
\neg(1, 1, 0, 0, 0) &= (0, 0, 1, 1, 1) \\
\neg(0, 1, 1, 0, 1) &= (1, 0, 0, 1, 0)
\end{aligned}$$

Przykład

Wyznaczyć atomy i co-atomy $\mathbb{B}_3$ i $\mathbb{B}_n$ dla dowolnej liczby naturalnej n.
Atomami $\mathbb{B}_3$ są

$$(0,0,1),\ (0,1,0) \text{ i } (1,0,0),$$

natomiast co-atomy $\mathbb{B}_3$ to

$$(0,1,1),\ (1,0,1) \text{ i } (1,1,0),$$

(por. przykład z diagramem Hassego $\mathbb{B}_3$).
Analogicznie, atomy $\mathbb{B}_n$ to elementy zawierające 1 na dokładnie jednej współrzędnej, a co-atomy to elementy zawierające 0 na dokładnie jednej współrzędnej.
Zauważmy, że liczba różnych (co-)atomów $\mathbb{B}_n$ wynosi n.

Przykład

Wygenerować funkcję $f \in \texttt{Bool}(3)$ daną wzorem

$$f(x,y,z) = \neg\big(x \wedge (\neg y \Leftrightarrow z)\big) \Rightarrow y$$

za pomocą wielomianu DNF.
Zapiszmy tabelę wartości funkcji f, aby sprawdzić, kiedy przyjmuje ona wartość 1:

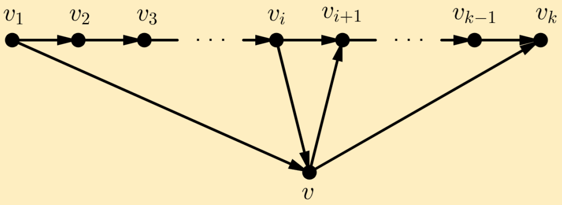
x	y	z	$f(x,y,z)$		
0	0	0	0		
0	0	1	0		
0	1	0	1	$\longrightarrow$	$\neg x \wedge y \wedge \neg z$
0	1	1	1	$\longrightarrow$	$\neg x \wedge y \wedge z$
1	0	0	0		
1	0	1	1	$\longrightarrow$	$x \wedge \neg y \wedge z$
1	1	0	1	$\longrightarrow$	$x \wedge y \wedge \neg z$
1	1	1	1	$\longrightarrow$	$x \wedge y \wedge z$

Zatem funkcja f w postaci wielomianu DNF to

$$(\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

Dowód. (2/2)

W takim razie istnieje największa liczba całkowita i $(1 \leqslant i < k)$ taka, że $(v_i, v) \in E(T)$, co oznacza że $(v, v_{i+1}) \in E(T)$.



Zauważmy, że teraz w turnieju T istnieje ścieżka

$$(v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_{i-1},\, v_i,\, v,\, v_{i+1},\, \ldots,\, v_{k-1},\, v_k),$$

która ma większą długość $(k+1)$ niż ścieżka P — co daje nam sprzeczność z faktem, że P nie jest ścieżką Hamiltona.

Definicja

Turniej T jest **przechodni**, jeżeli z tego, że (u, v) i (v, w) są łukami w T wynika, że (u, w) również jest łukiem w T.

Przykład 10

Które turnieje rzędu 4 (przykład 9) są przechodnie?

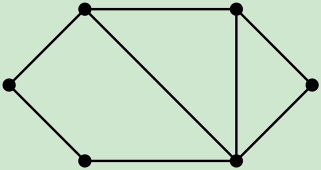
Jedynym przechodnim turniejem rzędu 4 jest $T_{4,4}$.

Definicja

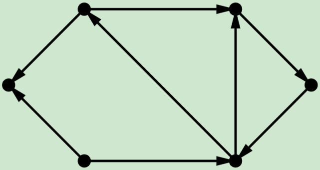
Jeżeli G jest grafem pierwotnym grafu zorientowanego D, to D nazywamy **orientacją** grafu G.

Przykład 8

Graf (G) i jedna z jego orientacji (D).



G



D

Definicja

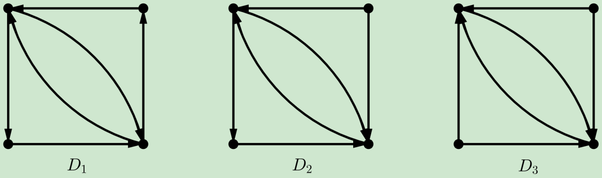
Macierz incydencji digrafu D to macierz $B_D = [b_{ij}]$, w której

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy wierzchołek } v_i \text{ jest początkiem łuku } e_j \\ -1, & \text{gdy wierzchołek } v_i \text{ jest końcem łuku } e_j \\ 0, & \text{gdy wierzchołek } v_i \text{ nie jest incydentny z łukiem } e_j \end{cases}.$$

Wniosek

- Suma elementów w i-tym wierszu macierzy incydencji digrafu D wynosi $\operatorname{outdeg} v_i + \operatorname{indeg} v_i$.
- Suma elementów w j-tej kolumnie macierzy incydencji digrafu D wynosi 0.

Przykład 13



D_1 - digraf hamiltonowski
D_2 - digraf trasowalny
D_3 - digraf nie hamiltonowski i nie trasowalny

Przykład 14

Które turnieje rzędu 4 (przykład 9) są hamiltonowskie, a które są trasowalne?

$T_{4,1}$ — turniej hamiltonowski
$T_{4,2}$, $T_{4,3}$, $T_{4,4}$ — turnieje trasowalne

Definicja

- Jeżeli w digrafie D istnieje cykl h przechodzący przez każdy wierzchołek digrafu D dokładnie jeden raz, to h nazywamy **cyklem Hamiltona**, a D — **digrafem hamiltonowskim**.
- Jeżeli digraf D nie jest digrafem hamiltonowskim i istnieje ścieżka h przechodząca przez każdy wierzchołek tego grafu dokładnie jeden raz, to h nazywamy **ścieżką Hamiltona**, a D — **digrafem trasowalnym** (**półhamiltonowskim**).

Stwierdzenie

- Digraf D jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny oraz dla każdego wierzchołka $w \in V(D)$ zachodzi

$$\operatorname{outdeg} w = \operatorname{indeg} w.$$

- Digraf D jest jednobieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny i zawiera dwa wierzchołki u i v takie, że

$$\operatorname{outdeg} u = \operatorname{indeg} u + 1 \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{indeg} v = \operatorname{outdeg} v + 1$$

  oraz

$$\operatorname{outdeg} w = \operatorname{indeg} w$$

  dla wszystkich pozostałych łuków $w \in V(D)$. Co więcej, u jest początkiem, a v końcem każdej ścieżki Eulera w D.

Zauważmy, że turnieje mogą mieć źródła i ujścia, co sugeruje że na ogół nie są one digrafami hamiltonowskimi. Zachodzi jednak następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Rédei, Camion)

Każdy turniej jest trasowalny lub hamiltonowski.

Dowód. (1/2)

Aby teza była prawdziwa, wystarczy aby turniej zawierał ścieżkę Hamiltona. Niech T będzie turniejem i niech

$$P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$$

będzie najdłuższą ścieżką w T. Jeżeli P nie jest ścieżką Hamiltona, to $1 \leqslant k < n$ oraz istnieje wierzchołek $v \in V(T)$ taki, że $v \notin P$.
Z faktu, że P jest najdłuższą ścieżką otrzymujemy, że

$$(v, v_1),\ (v_k, v) \notin E(T).$$

Zatem, na mocy faktu że T jest turniejem, mamy

$$(v_1, v),\ (v, v_k) \in E(T).$$

Digrafy

dr inż. Bartłomiej Pawlik

14 sierpnia 2024

Podstawowe twierdzenie teorii digrafów

Dla każdego digrafu D zachodzi

$$\sum_{v \in V(D)} \operatorname{outdeg} v = \sum_{v \in V(D)} \operatorname{indeg} v = |E(D)|.$$

Dowód.

Podczas dodawania stopni wyjściowych każdy łuk jest liczony tylko raz — podobnie jak podczas dodawania stopni wejściowych. $\square$

Powyższe twierdzenie jest digrafowym odpowiednikiem **lematu o uściskach dłoni**.