Twierdzenie o czterech barwach (Appel, Haken, 1976)

Jeżeli G jest planarnym grafem prostym, to

$$\chi(G) \leqslant 4.$$

Stwierdzenie

- $\chi(G) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grafem pustym.
- $\chi(G) = |V(G)|$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grafem pełnym.

Stwierdzenie

$\chi(G) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest niepustym grafem dwudzielnym.

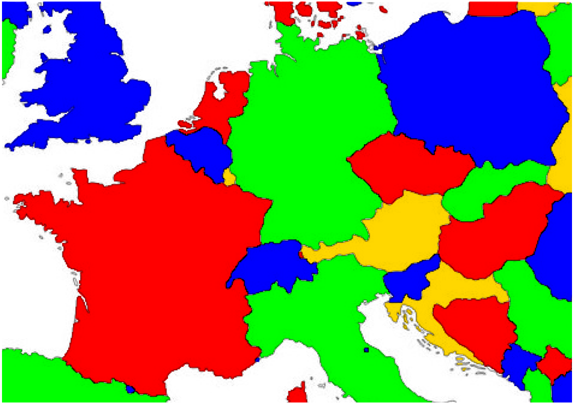
Wniosek

$\chi(G) \geqslant 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy G zawiera cykl długości nieparzystej.

Twierdzenie o czterech barwach (Appel, Haken, 1976)

Jeżeli G jest planarnym grafem prostym, to

$$\chi(G) \leqslant 4.$$



Definicja

Indeksem chromatycznym $\chi'(G)$ grafu prostego G nazywamy najmniejszą liczbę k taką, że istnieje kolorowanie krawędziowe $c' : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$.

Przykład

Wyznaczyć indeks chromatyczny grafu $K_{1,n}$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej n.

Graf $K_{1,n}$ nazywany bywa gwiazdą S_{n-1}.

Stwierdzenie

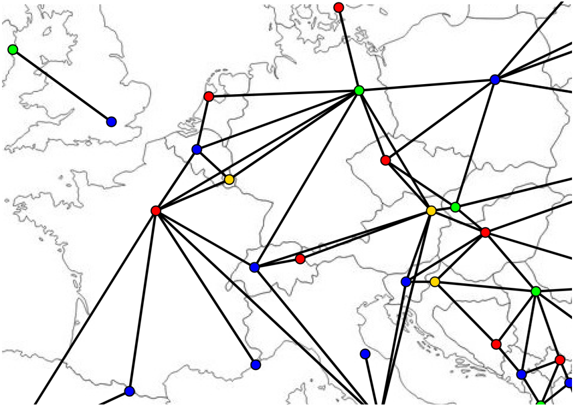
Dla każdego grafu prostego G zachodzi

$$\chi'(G) \geqslant \Delta(G).$$

Twierdzenie o czterech barwach (Appel, Haken, 1976)

Jeżeli G jest planarnym grafem prostym, to

$$\chi(G) \leqslant 4.$$



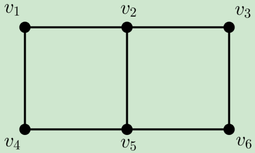
Przykład 1

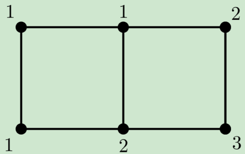
Rozważmy graf G (na rysunku po lewej) i kolorowanie c ze zbiorem kolorów $C = \{1, 2, 3\}$ takie, że

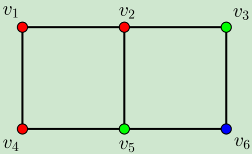
$$c(v_1) = c(v_2) = c(v_4) = 1,\ c(v_3) = c(v_5) = 2,\ c(v_6) = 3.$$

Graf G z zadanym kolorowaniem c możemy przedstawić graficznie na kilka sposobów.

- Jeżeli w rozważanym kontekście opis wierzchołków jest nieistotny, to wierzchołki możemy indeksować kolorami (rysunek środkowy).
- Przymując, że kolor 1 to czerwony, kolor 2 to zielony, a kolor 3 to niebieski, wierzchołki możemy (nomen omen) pokolorować (rysunek po prawej). W tej konwencji można zachować opis wierzchołków.







Przykład

Określić dla których cykli i dla których grafów pełnych zachodzi $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Kolorowanie grafów prostych

Definicja

Niech G będzie grafem i niech dla pewnej liczby całkowitej k, zbiór C będzie zbiorem k-elementowym. Funkcję $c : V(G) \to C$ nazywamy **k-kolorowaniem** grafu G, zbiór C nazywamy **zbiorem kolorów**, a elementy zbioru C — **kolorami**.

Często przyjmuje się, że $C = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Definicja

- Jeżeli $\chi'(G) = \Delta(G)$, to G nazywamy grafem klasy I.
- Jeżeli $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, to G nazywamy grafem klasy II.

Poniższy wynik również jest autorstwa Vadima G. Vizinga.

Twierdzenie

Jeżeli graf G jest grafem klasy II, to co najmniej trzy wierzchołki tego grafu mają maksymalny stopień.

Kolorowanie grafów

dr inż. Bartłomiej Pawlik

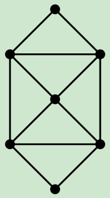
2 lipca 2024

Grafy eulerowskie

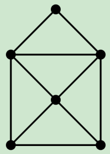
Definicja

- Jeżeli w grafie G istnieje cykl niewłaściwy d przechodzący przez każdą krawędź grafu G dokładnie jeden raz, to d nazywamy **cyklem Eulera**, a graf G — **grafem eulerowskim**.
- Jeżeli graf G nie jest grafem eulerowskim i istnieje ścieżka d przechodząca przez każdą krawędź grafu G dokładnie jeden raz, to G nazywamy **grafem jednobieżnym** (**półeulerowskim**).

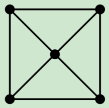
Przykład



G_1



G_2



G_3

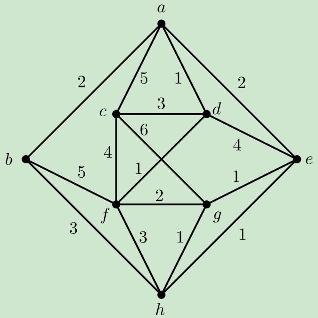
G_1 — graf eulerowski

G_2 — graf jednobieżny

G_3 — graf, który nie jest ani eulerowski, ani jednobieżny

Przykład

Rozwiąż problem chińskiego listonosza dla poniższego grafu. Jaki jest koszt cyklu stanowiącego rozwiązanie?



Wierzchołki b i f są jedynymi wierzchołkami nieparzystego stopnia, więc dany graf jest jednobieżny. Najkrótsza droga z b do f to

$$b \to a \to d \to f,$$

więc w grafie dublujemy krawędzie

$$\{a, b\},\ \{a, d\} \text{ oraz } \{d, f\},$$

dzięki czemu uzyskaliśmy graf eulerowski.

Przykładowym cyklem Eulera w nowym grafie (i zarazem rozwiązaniem problemu chińskiego listonosza) jest

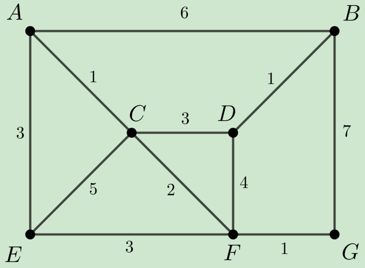
$$a \to e \to h \to b \to a \to d \to f \to b \to a \to d \to$$

$$\to e \to g \to h \to f \to d \to c \to g \to f \to c \to a,$$

którego koszt wynosi 48.

Przykład

W poniższym grafie znaleźć najkrótsze drogi z wierzchołka B do pozostałych wierzchołków korzystając z algorytmu Dijkstry.



	A	C	D	E	F	G
B_0	6_B	∞	1_B	∞	∞	7_B
BD_1	6_B	4_D	$-$	∞	5_D	7_B
BDC_4	5_C	$-$	$-$	9_C	5_D	7_B
BDF_5	5_C	$-$	$-$	8_F	$-$	6_F
$BDCA_5$	$-$	$-$	$-$	8_F	$-$	6_F
$BDFG_6$	$-$	$-$	$-$	8_F	$-$	$-$
$BDFE_8$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

W pierwszej kolumnie zapisane są najkrótsze drogi (w indeksie każdej z nich jest waga).
Elementy tabeli to wagi dróg z wierzchołka B do danego wierzchołka (w indeksach są wierzchołki bezpośrednio poprzedzające dany).
Symbol „$-$'' oznacza, że do danego wierzchołka już określono najkrótszą drogę.
W sytuacji, gdy w wierszu mamy więcej niż jedną drogę o najmniejszej wadze (5_C do A i 5_D do F w wierszu czwartym), wybieramy dowolną z nich.

Twierdzenie (Dirac, 1952)

Jeżeli minimalny stopień grafu G jest nie mniejszy niż połowa liczby wierzchołków tego grafu:

$$\delta(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{2},$$

to G jest grafem hamiltonowskim.

Dowód.

Niech $u, v \in V(G)$ i niech $|V(G)| = n$. Każdy wierzchołek grafu G ma stopień nie mniejszy niż $\frac{n}{2}$, więc

$$\deg(u) + \deg(v) \geqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Zatem w szczególności sumy stopni wszystkich par <u>niesąsiednich</u> wierzchołków są nie mniejsze niż n, więc z twierdzenia Orego otrzymujemy, że G jest grafem hamiltonowskim. □

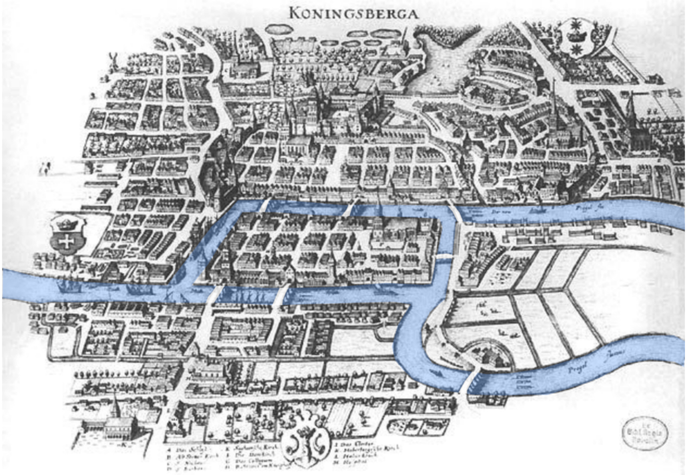
Dowód *(2/2)*

($\Leftarrow$)
Dowód indukcyjny względem liczby krawędzi grafu G. G jest grafem spójnym, w którym stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą, więc $\delta(G) \geqslant 2$. Zatem, na mocy Lematu 1, w G istnieje cykl c.

- Jeżeli c zawiera każdą krawędź grafu G, to twierdzenie jest udowodnione.
- Jeżeli c nie zawiera każdej krawędzi grafu G, to usuwamy z grafu G wszystkie krawędzie należące do cyklu c, otrzymując graf $G \backslash \{c\}$, który ma mniej krawędzi niż G. Z założenia indukcyjnego każda składowa spójności grafu $G \backslash \{c\}$ posiada cykl Eulera. Ze spólności G wynika, że każda składowa spójności grafu $G \backslash \{c\}$ ma co najmniej jeden wierzchołek wspólny z cyklem c. Zatem w grafie G można stworzyć cykl Eulera poprzez połączenie cyklu c z cyklami Eulera wszystkich składowych spójności grafu $G \backslash \{c\}$ poprzez wierzchołki wspólne.

Problem mostów królewieckich

Czy można przejść dokładnie jeden raz przez każdy z siedmiu mostów przedstawionych na poniższym rysunku i powrócić do punktu wyjścia?



[Źródło: *https://pl.wikipedia.org/wiki/Królewiec#/media/Plik:Image-Koenigsberg,_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg*, 13.05.2024]

Lemat 1

Jeżeli $\delta(G) \geqslant 2$, to graf G zawiera cykl.

Dowód.

Jeżeli G zawiera pętle lub krawędzie wielokrotne, to lemat jest trywialny. Załóżmy zatem, że G jest grafem prostym i że $v \in G$ jest dowolnym wierzchołkiem G. Tworzymy trasę

$$v \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \dots$$

tak aby v_{k+1} był sąsiadem v_k różnym od v_{k-1} (zawsze jest to możliwe ze względu na założenie, że stopień każdego wierzchołka wynosi co najmniej 2). Graf G ma skończenie wiele wierzchołków, więc po skończonej liczbie kroków na trasie musi pojawić się wierzchołek v_K, który pojawił się na niej już wcześniej. Fragment trasy

$$v_K \longrightarrow \dots \longrightarrow v_K$$

jest szukanym cyklem. $\square$

Znajdowanie cyklu Eulera - algorytm Fleury'ego

Zaczynając od dowolnego wierzchołka, tworzymy cykl Eulera dodając do niego kolejne krawędzie w taki sposób, że dodajemy do cyklu most tylko wtedy, gdy nie ma innej możliwości.

Przykład

Wyznaczyć cykl Eulera w grafie $K_{2,4}$.

Twierdzenie (Ore, 1960)

Jeżeli graf prosty G ma n wierzchołków ($n \geqslant 3$) oraz

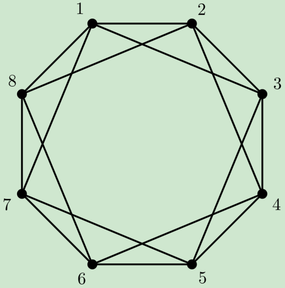
$$\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$$

dla każdej pary wierzchołków niesąsiednich u i v, to graf G jest hamiltonowski.

Dowód. (*1/2*)

Załóżmy nie wprost, że dla ustalonego $n \geqslant 3$ istnieją grafy niehamiltonowskie spełniające założenia rozpatrywanego twierdzenia. Niech G będzie takim grafem z jak największą liczbą krawędzi — jeżeli do G dołączymy jedną krawędź to otrzymamy graf hamiltonowski.

Przykład



Na powstawie powyższego twierdzenia Eulera określić czy dany graf jest eulerowski lub jednobieżny.

- Jeżeli jest eulerowski, to wskazać przykładowy cykl Eulera.
- Jeżeli jest jednobieżny to wskazać przykładową ścieżkę Eulera.

Dany graf jest eulerowski, ponieważ stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą. Przykładowy cykl Eulera to

$$(1 \to 2 \to 8 \to 1) \to (3 \to 4 \to 2 \to 3) \to (5 \to 6 \to 4 \to 5) \to$$

$$\to (7 \to 8 \to 6 \to 7) \to 1.$$