Definicja

Niech B będzie zbiorem z działaniami binarnymi $\wedge$, $\vee$, działaniem unarnym $\neg$ i niech $0, 1 \in B$, $0 \neq 1$. Szóstkę $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ nazywamy **algebrą Boole'a** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y, z \in B$ mamy

- $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x,$
- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$
- $1 \wedge x = x, \quad 0 \vee x = x,$
- $\neg x \wedge x = 0, \quad \neg x \vee x = 1$

- Działania można interpretować następująco: $\wedge$ to mnożenie, $\vee$ to dodawanie, a $\neg$ to dopełnienie.
- Jeżeli operacje są z góry określone, to $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ oznaczamy w skrócie przez B.

Generowanie funkcji boolowskich przez wielomiany

Twierdzenie

Każdy atom $\texttt{Bool}(n)$ jest generowany przez dokładnie jeden minterm.

Wniosek

Każda funkcja boolowska jest generowana przez sumę mintermów.

Reprezentacja wielomianu boolowskiego w postaci sumy mintermów jest nazywana jego **dysjunkcyjną (alternatywną) postacią normalną (DNF)**.

Stwierdzenie

Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $|\mathtt{Bool}(n)| = 2^{2^n}$.

Dowód.

Funkcja boolowska f każdemu argumentowi przypisuję jedną z dwóch wartości $(0$ lub $1)$. Zatem liczba różnych n-argumentowych funkcji boolowskich wynosi $2^{|D_f|}$, gdzie $|D_f|$ to liczba elementów dziedziny funkcji f.
Dziedzina składa się z n-elementowych ciągów binarnych, których jest 2^n. Zatem ostatecznie $|\mathtt{Bool}(n)| = 2^{2^n}$. $\square$

Definicja

Niech B będzie nietrywialną algebrą Boole'a.

- Niezerowy element $a \in B$ nazywamy **atomem** B wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $b, c \in B$ z równania $a = b \vee c$ wynika, że $a = b$ lub $a = c$.
- Niejedynkowy element $a \in B$ nazywamy **co-atomem** B wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $b, c \in B$ z równania $a = b \wedge c$ wynika, że $a = b$ lub $a = c$.

Zauważmy, że co-atom to dopełnienie atomu.

Wniosek

- Niezerowy element $a \in B$ jest atomem algebry B wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $x \in B$ taki, że $0 < x < a$.
- Niejedynkowy $a \in B$ jest co-atomem algebry B wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $x \in B$ taki, że $a < x < 1$.

Zastosowanie do układów elektrycznych

- **Switch (łącznik)** to urządzenie dwustanowe. Może być ustawiony albo w pozycji otwartej (wartość 0, prąd nie płynie) lub zamkniętej (wartość 1, prąd płynie).
- **(Prosty) system przełączający (obwód elektryczny)** składa się ze źródła energii, wyjścia oraz switchów.
- Dwa podstawowe sposoby łączenia switchów to **równoległy** ($\vee$) i **szeregowy** ($\wedge$). Czasami konieczne jest użycie switcha, który zawsze jest w pozycji odwrotnej do ustalonego ($\neg$).
- Prosty system przełączający nie zawiera pętli, więc wyjście zależy tylko od sposobu połączenia switchy (nie od czasu).

Zatem wszystkie połączenia switchów w systemie przełączającym można opisać wielomianem boolowskim, a wyjście — funkcją boolowską generowaną przez ten wielomian.

Twierdzenie

Dwie skończone algebry Boole'a są izomorficzne, gdy mają taką samą liczbę atomów.

Wniosek

Każda skończona algebra Boole'a jest izomorficzna z $\mathbb{B}^n$ dla pewnej liczby naturalnej n.

Pamiętamy, że $\mathbb{B}^n$ ma dokładnie n atomów.

Algebry Boole'a i funkcje boolowskie

dr inż. Bartłomiej Pawlik

19 czerwca 2024

Analogicznie:

Twierdzenie

Każdy co-atom $\texttt{Bool}(n)$ jest generowany przez dokładnie jeden maxterm.

Wniosek

Każda funkcja boolowska jest generowana przez iloczyn maxtermów.

Reprezentacja wielomianu boolowskiego w postaci iloczynu maxtermów jest nazywana jego **koniunkcyjną postacią normalną (CNF)**.

Uwaga!

Każda funkcja boolowska może być generowana przez nieskończenie wiele wielomianów boolowskich.

Metody reprezentacji funkcji boolowskich

1. Za pomocą wielomianów boolowskich.
2. Za pomocą wartości — zazwyczaj w tabelce.
3. Za pomocą indeksów atomów: **indeksem atomu** a nazywamy ten argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 1. Indeks atomu zwykle zapisywany jest nie w postaci ciągu zer i jedynek, ale jako liczba w systemie dziesiętnym, która ten ciąg reprezentuje. Takie przedstawienie funkcji zaczyna się od symbolu $\sum$, po którym wypisuje się indeksy odpowiednich atomów (w dowolnej kolejności).
4. Za pomocą indeksów co-atomów: **indeksem co-atomu** c nazywamy ten argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0. Takie przedstawienie f zaczyna się od symbolu $\prod$.

Definicja

W algebrze Boole'a B definiujemy relację $\leqslant$ następująco:

$$\forall_{x,y \in B} \quad x \leqslant y \iff x \vee y = y.$$

Twierdzenie

Niech B będzie algebrą Boole'a i niech $x, y \in B$. Wtedy

1. $x \leqslant y \iff x \wedge y = x$
2. $x \wedge y \leqslant x \leqslant x \vee y$
3. $0 \leqslant x \leqslant 1$

Ponadto $(B, \leqslant)$ jest kratą (tzn. zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym każdy dwuelementowy podzbiór ma supremum i infimum).

Definicja

Digrafem (grafem skierowanym) D nazywamy parę zbiorów $\big(V(D), E(D)\big)$, gdzie $V(D)$ to **zbiór wierzchołków**, a $E(D) \subset \big(V(D)\big)^2$ to **zbiór łuków**.

Wiele definicji dotyczących grafów (np. rząd, rozmiar, podgraf indukowany, izomorfizm) przenosi się również na digrafy.
Zauważmy, że z powyższej definicji wynika, że każdy łuk to uporządkowana para wierzchołków (zbiór łuków to podzbiór kwadratu kartezjańskiego zbioru wierzchołków).

Definicja

Niech $(x, y) \in E(D)$.

- Parę (x, y) nazywamy **łukiem (krawędzią skierowaną)** od x do y.
- Wierzchołek y nazywamy **sąsiednim** do x.
- Wierzchołek x nazywamy **początkiem łuku**, a y - **końcem łuku**.
- Krawędź (x, x) nazywamy **pętlą**.

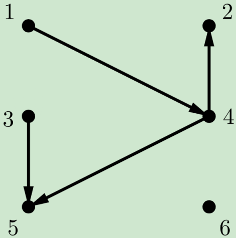
Definicja

- Jeżeli w digrafie D istnieje cykl niewłaściwy d przechodzący przez każdą krawędź digrafu D dokładnie jeden raz, to d nazywamy **cyklem Eulera**, a digraf D — **digrafem eulerowskim**.
- Jeżeli digraf D nie jest digrafem eulerowskim i istnieje ścieżka d przechodząca przez każdą krawędź digrafu D dokładnie jeden raz, to d nazywamy **ścieżką Eulera**, a digraf D — **digrafem jednobieżnym** (**półeulerowskim**).

Przykład 11

Rozważmy turnieje rzędu 3 (przykład 7). D_2 jest eulerowski, natomiast D_1 nie jest ani eulerowski ani jednobieżny.

Przykład 1

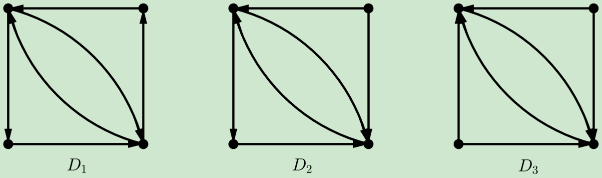


Rysunek przedstawia reprezentację graficzną digrafu D takiego, że

$$V(D) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E(D) = \{(1, 4),\ (3, 5),\ (4, 2),\ (4, 5)\}$$

Rząd D wynosi 6, natomiast rozmiar to 4.

Przykład 13



D_1 - digraf hamiltonowski
D_2 - digraf trasowalny
D_3 - digraf nie hamiltonowski i nie trasowalny

Przykład 14

Które turnieje rzędu 4 (przykład 9) są hamiltonowskie, a które są trasowalne?

$T_{4,1}$ — turniej hamiltonowski
$T_{4,2}$, $T_{4,3}$, $T_{4,4}$ — turnieje trasowalne

Definicja

Macierzą sąsiedztwa (multi)digrafu D to macierz $A_D = [s_{ij}]$, w której a_{ij} określa liczbę łuków od i-tego do j-tego wierzchołka.

Przykład 3

Macierzą sąsiedztwa digrafu przedstawionego w przykładzie 1 jest

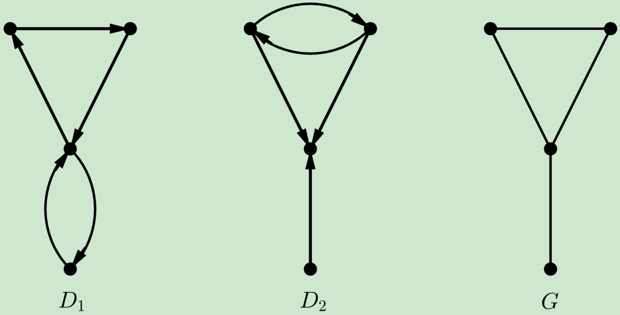
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Grafem pierwotnym digrafu D nazywamy graf otrzymany przez zastąpienie każdego łuku (u, v) lub symetrycznej pary łuków (u, v) i (v, u) przez krawędź $\{u, v\}$.

Przykład 6

Poniższe digrafy D_1 i D_2 mają taki sam graf pierwotny (G).



Definicja

- Dowolną orientację grafu pełnego nazywamy **turniejem**.
- Digraf D jest r-**regularny**, jeżeli równania

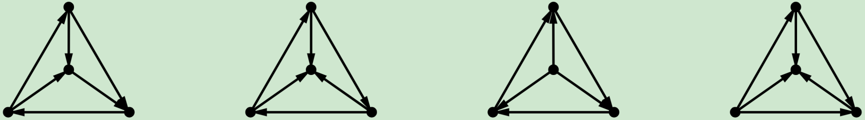
$$\operatorname{outdeg} v = \operatorname{indeg} v = r$$

zachodzą dla każdego $v \in V(D)$.

Przykład 9

Grafy D_1 i D_2 z przykładu 7 są jedynymi turniejami rzędu 3 (a zarazem jedynymi orientacjami grafu K_3). Ponadto graf D_2 jest grafem 1-regularnym.

Ile jest turniejów rzędu 4? Są cztery takie turnieje:



$T_{4,1}$ $T_{4,2}$ $T_{4,3}$ $T_{4,4}$

Definicja

Macierz incydencji digrafu D to macierz $B_D = [b_{ij}]$, w której

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy wierzchołek } v_i \text{ jest początkiem łuku } e_j \\ -1, & \text{gdy wierzchołek } v_i \text{ jest końcem łuku } e_j \\ 0, & \text{gdy wierzchołek } v_i \text{ nie jest incydentny z łukiem } e_j \end{cases}.$$

Wniosek

- Suma elementów w i-tym wierszu macierzy incydencji digrafu D wynosi $\operatorname{outdeg} v_i + \operatorname{indeg} v_i$.
- Suma elementów w j-tej kolumnie macierzy incydencji digrafu D wynosi 0.

Dowód. (2/2)

($\Rightarrow$)
Niech T będzie przechodnim turniejem. Załóżmy niewprost, że w turnieju T istnieje cykl $(v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$, gdzie $k \geqslant 3$. Przechodniość T pozwala nam skonstruować ciąg krawędzi:

- Z $(v_1, v_2), (v_2, v_3) \in E(T)$ wynika, że $(v_1, v_3) \in E(T)$.
- Z (v_1, v_3), $(v_3, v_4) \in E(T)$ wynika, że $(v_1, v_4) \in E(T)$.
- $\ldots$
- Z $(v_1, v_{k-1}), (v_{k-1}, v_k) \in E(T)$ wynika, że $(v_1, v_k) \in E(T)$ — daje to sprzeczność z faktem, że $(v_k, v_1) \in E(T)$.

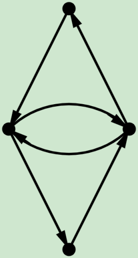
Zatem T jest acykliczny.

$\square$

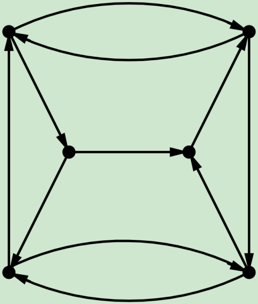
Twierdzenie

Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ istnieje dokładnie jeden przechodni (acykliczny) turniej rzędu n.

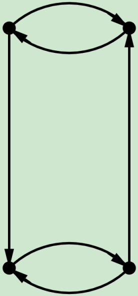
Przykład 12



D_1



D_2



D_3

D_1 - digraf eulerowski
D_2 - digraf jednobieżny
D_3 - digraf nie eulerowski i nie jednobieżny