Systemy liczbowe

dr inż. Bartłomiej Pawlik

8 marca 2024

Oznaczenia

- $A, B, C, \ldots$ — zbiory
- $\emptyset$ — zbiór pusty (bywa zapisywany jako $\{\}$)
- $a, b, c, \ldots$ — elementy zbiorów
- $a \in S$ — a należy do zbioru S
- $a \notin S$ — a nie należy do zbioru S
- $A \subset S$ — A jest pozbiorem zbioru S
- $|S|$ — liczba elementów zbioru S
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ — suma liczb a_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

- $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$ — iloczyn liczb a_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Niektóre zbiory liczbowe

- $\mathbb{N}$ — zbiór liczb naturalnych
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
(UWAGA! W trakcie tego kursu będziemy domyślnie zakładać, że 0 nie jest liczbą naturalną.)
- $\mathbb{Z}$ — zbiór liczb całkowitych
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$
- $\mathbb{Q}$ — zbiór liczb wymiernych
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \right\}$$
- $\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych

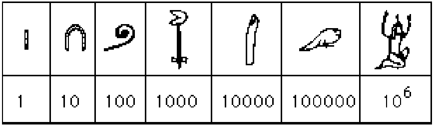
  $\mathbb{R}$ — zbiór granic wszystkich ciągów zbieżnych o współczynnikach wymiernych
- $\mathbb{C}$ — zbiór liczb zespolonych
$$\mathbb{C} = \left\{ a + bi : a, b \in \mathbb{R}, \ i^2 = -1 \right\}$$
- $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$, $\mathbb{S}$, $\ldots$

Systemy liczbowe

Systemem liczbowym nazywamy sposób zapisu liczb.

Przykładowe dawne systemy liczbowe:

- egipski (ok. 3000 p.n.e. — 1000 n.e.) — system oparty na hieroglifach reprezentujących kolejne potęgi liczby 10



Źródło: *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_numerals*

- babiloński — używany w Mezopotamii, system pozycyjny o podstawie 60
- grecki — system alfabetyczny (każdej literze alfabetu przypisywano wartość liczbową)
- rzymski — (wybrane litery alfabetu, dodawanie i odejmowanie) obecnie używany głównie w celach edukacyjnych lub w pewnych specyficznych kontekstach (liczby na zegarach, numery rozdziałów)

Twierdzenie o dzieleniu z resztą

Dla dowolnych niezerowych całkowitych liczb a i b istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite q i r ($0 \leqslant r < |b|$) takie, że

$$a = q \cdot b + r.$$

Liczbę q nazywamy **ilorazem**, a liczbę r **resztą z dzielenia** a **przez** b.

Przykład 1

- Dla $a = 33$ i $b = 7$ otrzymujemy $q = 4$ i $r = 5$:

$$33 = 4 \cdot 7 + 5.$$

- Dla $a = -27$ i $b = -6$ otrzymujemy $q = 5$ i $r = 3$:

$$-27 = 5 \cdot (-6) + 3.$$

- Dla $a = 59$ i $b = -20$ otrzymujemy $q = -2$ i $r = 19$:

$$59 = (-2) \cdot (-20) + 19.$$

Twierdzenie o postaci potęgowej

Niech b będzie liczbą całkowitą większą od 1. Każdą liczbę całkowitą nieujemną n można jednoznacznie zapisać w postaci

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0, \tag{1}$$

gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą, $a_k \neq 0$ oraz $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ dla $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Prawą stronę równania (1) nazywamy **postacią potęgową liczby n przy podstawie b**.
Dowód powyższego twierdzenia można przeprowadzić poprzez iteracyjne stosowanie twierdzenia o dzieleniu z resztą - zaczynamy od podzielenia n przez b, następnie od podzielenia otrzymanej reszty przez b itd. Otrzymany ciąg reszt pokrywa się z ciągiem $a_0, a_1, \ldots, a_k$.

Przykład

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}1202 &= 1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0\\ &= 1\cdot 5^4 + 4\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2 + 0\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0\\ &= 1\cdot 2^{10} + 0\cdot 2^9 + 0\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 +\\ &\quad + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0\end{aligned}$$

Zatem

$$1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0$$

jest *postacią potęgową liczby* 1202 *przy podstawie* 10,

$$1\cdot 5^4 + 4\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2 + 0\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0$$

jest *postacią potęgową liczby* 1202 *przy podstawie* 5, natomiast

$1\cdot 2^{10} + 0\cdot 2^9 + 0\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0$

jest *postacią potęgową liczby* 1202 *przy podstawie* 2.

Korzystając ze wzoru (1), można przyjąć notację

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0 =: \left(\bar{a}_k \bar{a}_{k-1} \ldots \bar{a}_1 \bar{a}_0\right)_b, \qquad (2)$$

gdzie $\bar{a}_i$ jest cyfrą odpowiadającą liczbie a_i (nawiasy można pominąć).
Prawą stronę równania (2) nazywamy **zapisem liczby** n **przy podstawie** b.

Przykład

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} 1202 &= (1202)_{10} \\ &= (14302)_5 \\ &= (10010110010)_2 \end{aligned}$$

Uwaga!

Liczby w zapisie o podstawie 10 będziemy zwyczajowo zapisywać w postaci $\bar{a}_k \bar{a}_{k-1} \ldots \bar{a}_1 \bar{a}_0$ zamiast $\left(\bar{a}_k \bar{a}_{k-1} \ldots \bar{a}_1 \bar{a}_0\right)_b$.

W systemach liczbowych o podstawach $2, 3, \ldots, 16$ zwyczajowo[a] przyjmuje się następujące oznaczenia cyfr:

wartość	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
cyfra	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

[a] Wyjątkiem od tej reguły jest system dwunastkowy — stowarzyszenie *Doznal Society of America* „spopularyzowało" cyfry Ɀ (dek) i Ɛ (el) na oznaczenie 10 i 11.

Jasper Johns, *0 through 9* (1961)
Tate Gallery, London

Nazwy niektórych systemów pozycyjnych

Podstawa systemu	Nazwa	Inne nazwy
-2	minus-dwójkowy	negabinarny
2	dwójkowy	binarny
8	ósemkowy	oktalny
12	dwunastkowy	duodecymalny
16	szesnastkowy	heksadecymalny

Aby wykonać konwersję na system dziesiętny, wystarczy wprost zastosować twierdzenie o postaci potęgowej.

Przykład

Zapisać liczby 10100_2, 320_5 i $2CA_{14}$ w systemie dziesiętnym.

$$10100_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 4 = 20$$
$$320_5 = 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = 75 + 10 + 0 = 85$$
$$2CA_{14} = 2 \cdot 14^2 + 12 \cdot 14^1 + 10 \cdot 14^0 = 392 + 168 + 10 = 570$$

Schemat Hornera

Zauważmy, że postać potęgową

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

można przekształcić na

$$n = b\Big(b \ldots \big(b(b \cdot a_k + a_{k-1}) + a_{k-2}\big) + \ldots + a_1\Big) + a_0.$$

Ile mnożeń należy wykonać, aby obliczyć n w każdej z powyższych postaci?

Przykład

Zapisać liczby 10100_2, 320_5 i $2CA_{14}$ w systemie dziesiętnym.

$$\begin{aligned} 10100_2 &= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 1 + 0) + 1) + 0) + 0 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2 + 1)) = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20 \\ 320_5 &= 5 \cdot (5 \cdot 3 + 2) + 0 = 5 \cdot 17 = 85 \\ 2CA_{14} &= 14 \cdot (14 \cdot 2 + 12) + 10 = 14 \cdot 40 + 10 = 570 \end{aligned}$$

Konwersja z systemu dziesiętnego

Jak przekształcić liczbę naturalną n zapisaną w systemie o podstawie 10 na liczbę n zapisaną w systemie o podstawie b?

Konwersja z systemu dziesiętnego: Pierwszy sposób

1. Liczbę n zapisujemy w postaci $n = q_0 \cdot b + r_0$. Liczba r_0 odpowiada cyfrze $\bar{a}_0$ w zapisie liczby n przy podstawie b.
2. Liczbę q_0 zapisujemy w postaci $q_0 = q_1 \cdot b + r_1$. Liczba r_1 odpowiada cyfrze $\bar{a}_1$ w zapisie liczby n przy podstawie b.
3. Procedurę powtarzamy do momentu, gdy $q_i = 0$.

Przykład

Liczbę 352 zapisać w systemie o podstawie 11.

$$352 = 32 \cdot 11 + 0$$
$$32 = 2 \cdot 11 + 10$$
$$2 = 0 \cdot 11 + 2$$

Resztom $0, 10$ i 2 przypisujemy, odpowiednio, cyfry $0, A$ i 2.
Ostatecznie $352 = 2A0_{11}$.

Konwersja z systemu dziesiętnego: Drugi sposób

1. Określić największą potęgę liczby b nie większą niż n, tj. znaleźć największą liczbę całkowitą nieujemną w_0 taką, że $n - b^{w_0} \geqslant 0$.
2. Określić największą liczbę całkowitą k_0 taką, że $n - k_0 \cdot b^{w_0} \geqslant 0$. Liczba k_0 odpowiada cyfrze $\bar{a}_{w_0}$ zapisu liczby n w systemie o podstawie b.
3. Krok 2 powtórzyć w_0 razy, za każdy razem zmniejszając wykładnik o 1, a zamiast n przyjmować ostatnie otrzymane $n_i - k_i b^{w_i}$.

Przykład

Liczbę 352 zapisać w systemie o podstawie 11.
Kolejne potęgi liczby 11 to $1, 11, 121, 1331, \ldots$. Zauważmy, że $121 < 352$ i $1331 > 352$, więc otrzymamy liczbę 3-cyfrową (liczba cyfr jest o 1 większa od wykładnika $121 = 11^2$).

$$352 - 2 \cdot 11^2 = 110 \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad 352 - 3 \cdot 11^2 = -11 < 0,$$

więc pierwszą (od lewej) cyfrą w zapisie liczby 352 w systemie o podstawie 11 jest 2.

$$110 - 10 \cdot 11^1 = 0 \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad 110 - 11 \cdot 11^1 = -11 < 0,$$

więc kolejną cyfrą jest A (odpowiadająca wartości liczbowej 10).

$$0 - 0 \cdot 11^0 = 0 \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad 0 - 1 \cdot 11^0 = -1 < 0,$$

więc ostatnią cyfrą jest 0.
Ostatecznie $352 = 2A0_{11}$.

Konwersja między systemami przy dowolnych podstawach

Jak przekonwertować zapis liczby n w systemie o podstawie a na system o podstawie b? Wyróżnimy kilka przypadków. Zakładamy, że a, b, s, t są większymi od 1 liczbami całkowitymi.

Kowersja $a \longrightarrow b$ (przypadek ogólny)

Dla dowolnej liczby n system dziesiętny może posłużyć za system *pośredni* między systemami o podstawach a i b:

$$n_a \longrightarrow n_{10} \longrightarrow n_b.$$

Przykład

Liczbę 1213_4 zapisać w systemie o podstawie 7.

$$\begin{aligned} 1213_4 &= 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 64 + 32 + 4 + 3 = 103 = \\ &= 2 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0 = 205_7 \end{aligned}$$

Konwersja $a \longrightarrow a^t$

Dzielimy liczbę n na bloki t-cyfrowe (od prawej) i konwertujemy każdy blok na pojedynczą cyfrę (używając postaci potęgowej bloku).

Przykład

Liczbę 10011010111_2 zapisać w systemie o podstawie 8.
$8 = 2^3$, więc daną liczbę dzielimy na bloki 3-cyfrowe i każdy z nich konwertujemy na system oktalny:

010	011	010	111
2	3	2	7

Zatem $10011010111_2 = 2327_8$.

Konwersja $a^s \longrightarrow a$

Konwertujemy każdą cyfrę osobno i ewentualnie uzupełniamy zerami z lewej aby każdy otrzymany blok miał dokładnie s cyfr.

Przykład

Liczbę $3AD2_{16}$ zapisać w systemie o podstawie 2.
$16 = 2^4$, więc każdą cyfrę konwertujemy na blok 4-cyfrowy w systemie binarnym:

3	A	D	2
0011	1010	1101	0010

Zatem $3AD2_{16} = 11101011010010_2$.

Konwersja $a^s \to a^t$

System o podstawie a może posłużyć jako system pośredni między systemami o podstawiach a^s i a^t:

$$n_{a^s} \to n_a \to n_{a^t}.$$

Przykład

Liczbę 10012031_4 zapisać w systemie o podstawie 8.
Liczby 4 i 8 są potęgami liczby 2, więc pośrednio użyjemy systemu binarnego.

1	0	0	1	2	0	3	1
01	00	00	01	10	00	11	01

Zatem $10012031_4 = 100000110001101_2$.

100	000	110	001	101
4	0	6	1	5

Ostatecznie $10012031_4 = 40615_8$.

Przykład

Wyznaczyć b, jeżeli $247_b = 1310_5$.
Korzystając (obustronnie) z twierdzenia o postaci potęgowej, możemy powyższe równanie zapisać w postaci

$$2 \cdot b^2 + 4 \cdot b + 7 = 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 0.$$

Po uproszczeniu otrzymanego równania dostajemy

$$b^2 + 2b - 99 = 0.$$

Jedynymi rozwiązaniami są $b = 9$ oraz $b = -11$. Drugie z otrzymanych rozwiązań jest sprzeczne z założeniem, że podstawa systemu pozycyjnego jest liczbą całkowitą większą od 1.
Zatem ostatecznie jedynym rozwiązaniem jest $b = 9$.

Rozwinięcie liczby rzeczywistej przy danej podstawie

Twierdzenie

Niech b będzie większą od 1 liczbą całkowitą. Każda nieujemna liczba rzeczywista x jest sumą jednoznacznie określonego szeregu postaci $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{b^k}$, takiego że

- $x_0 = \lfloor x \rfloor$ oraz $x_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ dla $k > 0$.
- Nie istnieje liczba naturalna K taka, że dla każdego $k > K$ zachodzi $x_k = b - 1$.

Szereg zdefiniowany w powyższym twierdzeniu nazywamy **standardowym (lub normalnym) rozwinięciem liczby** x **przy podstawie** b.

Zauważmy, że poprzednie twierdzenie umożliwia zapis dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x w systemie o podstawie b. Jeżeli

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{b^k},$$

to możemy przyjąć, że

$$x = (\bar{a}_n \bar{a}_{n-1} \ldots \bar{a}_0 . \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots)_b,$$

gdzie $(\bar{a}_n \bar{a}_{n-1} \ldots \bar{a}_0)_b = x_0$ oraz $\bar{x}_i$ jest cyfrą o wartości x_i.

Przykład

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} 251.84 &= 250 + 1 + 0.6 + 0.24 = \\ &= 2 \cdot 125 + 1 + 4 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.04 = \\ &= 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 + 4 \cdot 5^{-1} + 1 \cdot 5^{-2} = \\ &= 2001.41_5. \end{aligned}$$

Zatem $251.84 = 2001.41_5$.

Wniosek

Standardowe rozwinięcie liczby wymiernej x przy dowolnej podstawie jest skończone lub okresowe (tzn. istnieją liczby całkowite dodatnie s i t takie, że $x_k = x_{k+t}$ dla każdego całkowitego $k > s$).

Uwagi

- Najmniejszą liczbę t o powyższej własności nazywamy okresem podstawowym.
- Rozwinięcie liczby x jest skończone, gdy dzielniki pierwsze mianownika skróconej postaci x dzielą również podstawę b rozważanego systemu pozycyjnego.
- W przypadku rozwinięcia okresowego używa się nawiasów (*notacja europejska*):

$$(\bar{a}_n \dots \bar{a}_0 . \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{s-1}(\bar{x}_s \dots \bar{x}_{s+t-1}))_b$$

lub kreski (*notacja amerykańska*):

$$(\bar{a}_n \dots \bar{a}_0 . \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{s-1}\overline{\bar{x}_s \dots \bar{x}_{s+t-1}})_b.$$

Liczba cyfr

$\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x.

Przykład

$$\lfloor 5 \rfloor = 5, \quad \lfloor 1.31 \rfloor = 1, \quad \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2, \quad \lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor -2 \rfloor = -2, \quad \lfloor -6.28 \rfloor = -7.$$

Twierdzenie

Liczba cyfr liczby n w zapisie przy podstawie b jest równa $\lfloor \log_b n \rfloor + 1$.

Przykład: googol

Ile cyfr ma liczba 10^{100} w zapisie przy podstawach 10 i 12 ?

- $\lfloor \log_{10} 10^{100} \rfloor + 1 = \lfloor 100 \log_{10} 10 \rfloor + 1 = \lfloor 100 \rfloor + 1 = 101$
- $\lfloor \log_{12} 10^{100} \rfloor + 1 = \lfloor 100 \log_{12} 10 \rfloor + 1 = \lfloor 100 \cdot 0.92662\ldots \rfloor + 1 = 93$