Uvod u analizu (M3-02)
30. XII 2016. – 13. I 2017.
dr Nenad Teofanov

1. Funkcije - neprekidnost

U ovom predavanju se uvodi pojam neprekidnosti i proučavaju osnovna svojstva neprekidnih funkcija.

Za razliku od granične vrednosti koja može da postoji u tački u kojoj funkcija nije definisana (a koja mora da bude tačka nagomilavanja domena te funkcije), neprekidnost se definiše u tački koja mora da pripada domenu date funkcije. Prema tome, čak i kada je domen date funkcije čitav skup $\mathbb{R}$, nije moguće posmatrati neprekidnost u fiktivnim elementima $\pm\infty$. Osim toga, domen može da sadrži tačke koje nisu njegove tačke nagomilavanja. To su izolovane tačke domena. U takvim tačkama nije moguće posmatrati graničnu vrednost neke funkcije, ali je svaka funkcija, kao što će se videti, neprekidna u izolovanim tačkama svog domena.

Takozvana *epsilon–delta* definicija neprekidnosti funkcije u nekoj tački obuhvata navedene primedbe.

Definicija 1.1. *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka $x_0 \in X$. Funkcija f je neprekidna u tački x_0 ako važi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon). \tag{1}$$

Sada je lako navesti i ekvivalentnu, topološku definiciju:

Definicija 1.2. *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka $x_0 \in X$. Funkcija f je neprekidna u tački x_0 ako važi*

$$(\forall \mathcal{O}(f(x_0)))(\exists \mathcal{O}(x_0))(\forall x \in X)(x \in \mathcal{O}(x_0) \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{O}(f(x_0))).$$

Upoređivanjem definicija 1.1 i 1.2 sa odgovarajućim definicijama granične vrednosti može se izvesti zaključak da, ako je realan broj $x_0 \in X$ tačka nagomilavanja domena X funkcije f, onda je funkcija f neprekidna u x_0 ako i samo ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dakle, funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je neprekidna u $x_0 \in X$ koja je pri tome tačka nagomilavanja skupa X ako i samo ako postoji granična vrednost funkcije f u toj tački i ako je ta granična vrednost jednaka sa $f(x_0)$.

Na primer, $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ ima graničnu vrednost u $x_0 = 0$ i

$$\lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1 \neq 0 = f(0).$$

Prema tome, funkcija $|\text{sgn}\, x|$ nije neprekidna u nuli.

Ako tačka $x_0 \in X$ nije tačka nagomilavanja skupa X onda neprekidnost nije moguće dovesti u vezu sa graničnom vrednošću. U tom slučaju x_0 je izolovana tačka skupa X pa, po definiciji, postoji $\delta > 0$ tako da je

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X = \{x_0\}.$$

Prema tome, za svaki broj $\varepsilon > 0$ i ovako izabran broj δ važi

$$(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon).$$

Dakle, funkcija je neprekidna u svakoj izolovanoj tački domena.

Ako se uvedu oznake $\Delta x = |x - x_0|$ za priraštaj nezavisne promenljive u tački x_0 i $\Delta f(x) = \Delta y = |f(x) - f(x_0)|$ za odgovarajući priraštaj zavisne promenljive y u tački x_0, onda se definicija (1) može napisati u obliku

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

odakle sledi da je funkcija f neprekidna u x_0 ako i samo ako priraštaj zavisne promenljive teži ka nuli kada priraštaj nezavisne promenljive teži ka nuli.

Ukoliko je potrebno da se posebno istakne tačka u kojoj se ispituje neprekidnost, koriste se oznake $\Delta_{x_0} x$ i $\Delta_{x_0} y$.

Kao i kod graničnih vrednosti i kod neprekidnosti je moguće ograničiti se na $\delta-$okoline tačke x_0 za koje je broj δ manji od nekog unapred zadatog pozitivnog broja. To se vidi iz sledećih primera.

Primer 1.3. *Ispitajmo neprekidnost funkcije $f(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ u tački $x_0 \neq 0$.*

Neka je dato $\varepsilon > 0$. Kako je

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{x x_0} \right| = \frac{|x_0 - x|}{|x x_0|},$$

iz $\Delta x = |x_0 - x| < |x x_0| \varepsilon$ sledi $\Delta y < \varepsilon$. Međutim, δ u definiciji neprekidnosti može da zavisi od x_0 i ε, ali ne od vrednosti nezavisne promenljive x (koja pripada nekom intervalu, to jest koja se menja).

Da bi se ovaj problem prevazišao, potrebno je shvatiti da se uslov $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ u (1) može pojačati tako da se posmatraju samo one tačke x koje pripadaju nekoj unapred određenoj okolini tačke x_0. Na primer, za $x_0 > 0$, dovoljno je posmatrati $x \in (x_0/2, 3x_0/2)$ (slično, za $x_0 < 0$ može se posmatrati samo $(3x_0/2, x_0/2)$). Tada je $|x_0|/2 < |x| < 3|x_0|/2$, pa ako se za zadato $\varepsilon > 0$ izabere $\delta = \min\{|x_0|^2 \varepsilon/2, |x_0|/2\}$ onda iz $|x - x_0| < \delta$ sledi $\Delta y < \varepsilon$, odakle sledi neprekidnost u tački x_0.

Primetimo da δ zavisi od x_0, pri čemu je δ "blizu" nule kada je x_0 "blizu" nule.

Primer 1.4. *Ispitajmo neprekidnost kvadratne funkcije* $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, *u nekoj zadatoj tački* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Neka je dato $\varepsilon > 0$. *Kako je*

$$\begin{aligned} \left|ax^2 + bx + c - (ax_0^2 + bx_0 + c)\right| &= \left|a(x - x_0)^2 + b(x - x_0)\right| \\ &= |x_0 - x||a(x + x_0) + b|, \end{aligned}$$

ako se pomatraju samo tačke $x \in \mathbb{R}$ *za koje je* $|x - x_0| < 1$, *onda je* $|x| < |x_0| + 1$, *pa je*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |x_0 - x|(|a||x + x_0| + |b|) \\ &< |x_0 - x|(|a|(2|x_0| + 1) + |b|), \end{aligned}$$

pa ako je $\delta = \varepsilon/(|a|(2|x_0| + 1) + |b|)$, *onda iz*

$$|x_0 - x| < \delta = \varepsilon/(|a|(2|x_0| + 1) + |b|)$$

sledi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Primetimo da δ *zavisi od izbora tačke* x_0, *ali ne sme da zavisi od vrednosti nezavisne promenljive* x. *Iz ovog razloga je uvedeno ograničenje* $|x| < |x_0| + 1$.

Prethodni primer je poseban slučaj tvrđenja da je svaki polinom $P_n(x)$ neprekidna funkcija u svakoj tački $x_0 \in \mathbb{R}$. Opštije, svaka elementarna funkcija je neprekidna u svakoj tački svog domena. Ovu činjenicu usvajamo bez dokaza.

Primer 1.5. *Ispitajmo neprekidnost funkcije najveći ceo deo* $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$, *u nekoj zadatoj tački* $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Podsetimo se, $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$, *odnosno* $\lfloor x \rfloor = k \in \mathbb{Z}$ *ako i samo ako je* $k \leq x < k + 1$.

Tačka $x_0 \in \mathbb{Z}$ *je tačka nagomilavanja domena koja mu priprada pa se neprekidnost može ispitati posmatranjem granične vrednosti. Kako je* $\lim_{x \to x_0+} \lfloor x \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor = x_0$, *a* $\lim_{x \to x_0-} \lfloor x \rfloor = x_0 - 1$, *funkcija nema graničnu vrednost u* x_0, *odakle sledi da ona nije neprekidna u* x_0.

Za vežbu dokazati da je ova funkcija neprekidna u svakoj tački $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Prethodni primer motiviše sledeću definiciju.

Definicija 1.6. *Neka je data funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *i neka* $x_0 \in X$.

Funkcija f *je neprekidna sa desne strane u tački* x_0 *ako važi*

(2)
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

a neprekidna sa leve strane u tački x_0 *ako važi*

(3)
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Iz definicija 1.1 i 1.6 sledi da je funkcija f neprekidna u tački x_0 ako i samo ako je u f neprekidna i sa leve i sa desne strane u tački x_0.

Neprekidnost funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ na skupu $A \subset X$ se uvodi na uobičajen način.

Definicija 1.7. *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka je $A \subset X$.*

Funkcija f je neprekidna na skupu A ako i samo ako je f neprekidna u svakoj tački $x_0 \in A$, to jest ako važi

(4)
$$(\forall x_0 \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(|x-x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon).$$

U posebnom slučaju, f je neprekidna na $A = [a, b] \subset X$, ako i samo ako je neprekidna u svakoj tački $x_0 \in (a, b)$, i ako je neprekidna sa desne strane u tački a, a neprekidna sa leve strane u tački b.

Definicija 1.8. *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka $x_0 \in X$.*

Funkcija f ima prekid u tački x_0 ako f nije neprekidna u x_0, odnosno ako važi

$$(5) \qquad (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in X)(|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon).$$

U tom slučaju, tačka x_0 naziva se tačka prekida funkcije f.

Tačka prekida je uvek tačka nagomilavanja domena, pa iz definicije 1.8 sledi da funkcija f ima prekid u x_0 ako u toj tački postoji granična vrednost koja je različita od $f(x_0)$ ili ako ne postoji granična vrednost funkcije f u x_0. Ova primedba ima za posledicu sledeću klasifikaciju tačaka prekida.

Definicija 1.9. *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in X$ tačka prekida funkcije f.*

Ako je $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$, onda je x_0 tačka otklonjivog prekida funkcije f. U tom slučaju je funkcija $\tilde{f}$ definisana sa

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus \{x_0\} \\ L, & x = x_0, \end{cases}$$

neprekidna u x_0.

Ako postoje leva i desna granična vrednost funkcije f u x_0 i

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \neq f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

onda je x_0 tačka prekida prve vrste funkcije f i kaže se da funkcija f ima skok u x_0.

Ako ne postoji (leva ili desna) granična vrednost funkcije f u x_0 onda je x_0 tačka prekida druge vrste funkcije f.

Dakle, funkcija tačka $x_0 = 0$ je tačka otklonjivog prekida funkcije $|\mathrm{sgn} x|$, $x \in \mathbb{R}$, a svaki ceo broj $k \in \mathbb{Z}$ je tačka prekida prve vrste funkcije najveći ceo deo $\lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$.

Funkcija $f(x) = \sin x/x$ nije definisana u nuli, ali se može odrediti nova funkcija $\tilde{f}$ definisana na $\mathbb{R}$ koja je jednaka sa f na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i koja je neprekidna na $\mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin x/x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Funkcija koja je data sa $\sin(1/x)$, $x \neq 0$, a koja je jednaka nuli za $x = 0$ ima prekid druge vrste u $x_0 = 0$, što će se pokazati nakon sledeće teoreme u kojoj se pojam neprekidnosti funkcije u x_0 dovodi u vezu sa graničnom vrednosti slika nizova koji konvergiraju ka x_0.

Teorema 1.10. *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in X$. Tada je f neprekidna u x_0 ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elemenata skupa X za koji je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, važi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Dokaz teoreme 1.10 je sličan dokazu odgovarajuće karakterizacije graničnih vrednosti preko nizova, i ostavlja se čitaocu za vežbu.

Na osnovu teoreme 1.10 lako se dokazuju značajna svojstva neprekidnosti po analogiji sa odgovarajućim svojstvima konvergentnih nizova.

Karakterizacija limesa funkcije iz teoreme 1.10 se često koristi pri dokazivanju da funkcija nema limes u x_0. Za to je dovoljno uočiti dva niza koji konvergiraju ka x_0 pri čemu nizovi njihovih slika ne konvergiraju ka istoj vrednosti.

Tako, na primer,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ima prekid druge vrste u $x_0 = 0$, jer ne postoji granična vrednost funkcije f u toj tački. Za to je dovoljno uočiti nizove $x_n = \frac{2}{4n+1}\pi^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ i $y_n = \frac{2}{4n+3}\pi^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, koji konvergiraju ka $x_0 = 0$, ali

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{4n+1}{2}\pi = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{4n+3}{2}\pi = \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

Čitaocu se ostavlja za vežbu da odredi i klasifikuje tačke prekida Dirihleove funkcije.

2. Lokalna svojstva neprekidih funkcija

U ovom predavanju proučavaju se lokalna svojstva neprekidnih funkcija. U nastavku se, jednostavnosti radi, pretpostavlja da su posmatrane funkcije definisane u nekoj okolini tačke x_0 u kojoj su one neprekidne.

Teorema 2.1. *Neka je funkcija f neprekidna u x_0 i definisana u nekoj okolini tačke x_0. Tada postoji okolina tačke x_0 u kojoj je f ograničena.*

Dokaz. Neka je f definisana na skupu $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$. Ako u definiciji neprekidnosti izaberemo neki broj $\varepsilon > 0$, na primer $\varepsilon = 1$, onda postoji $\delta \in (0, \delta_1]$ tako da je

$$f(x) \in (f(x_0) - 1, f(x_0) + 1) \quad \textit{zasve} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

čime je teorema dokazana. □

Teorema 2.2. *Neka je funkcija f neprekidna u x_0, definisana u nekoj okolini tačke x_0 i neka je $f(x_0) \neq 0$. Tada postoji okolina tačke x_0 tako da za sve x iz te okoline $f(x)$ ima isti znak kao i $f(x_0)$.*

Dokaz. Neka je f definisana na skupu $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ i neka je, na primer $f(x_0) > 0$. Ako u definiciji neprekidnosti izaberemo $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$, onda postoji $\delta \in (0, \delta_1]$ tako da je $f(x) \in (f(x_0)/2, 3f(x_0)/2)$ za sve $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, čime je teorema dokazana. □

Teorema 2.3. *Neka su funkcije f i g definisane na nekom skupu $X \subset \mathbb{R}$ i neprekidne u nekoj tački $x_0 \in X$. Tada su funkcije $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$ i $\min(f, g)$ takođe neprekidne x_0. Ako je, pri tome $g(x_0) \neq 0$, onda je i f/g neprekidna funkcija u x_0.*

Dokaz. (Zbir dve funkcije) Kako je

$$|(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|,$$

za zadato $\varepsilon > 0$ postoje $\delta_f > 0$ i $\delta_g > 0$ tako da za sve $x \in X$ važi

$$|x-x_0| < \delta_f \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon/2, \quad |x-x_0| < \delta_g \Longrightarrow |g(x)-g(x_0)| < \varepsilon/2,$$

pa, ako je $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ onda za sve $x \in X$ iz $|x - x_0| < \delta$ sledi

$$|(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| < \varepsilon,$$

pa je zbir neprekidnih funkcija u x_0 neprekidna funkcija u x_0.

(Proizvod dve funkcije) Kako je

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(x_0)| &= |(fg)(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - (fg)(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)||g(x)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)|, \end{aligned}$$

za zadato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_g > 0$ tako da za sve $x \in X$ važi

$$|x - x_0| < \delta_g \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|},$$

za $f(x_0) \neq 0$. Ako je $f(x_0) = 0$ onda je $|f(x_0)||g(x) - g(x_0)| = 0$, pa se procenjuje samo prvi sabirak.

Dalje, iz neprekidnosti funkcije g u x_0 sledi njena ograničenost u nekoj okolini tačke x_0, to jest postoji $\tilde{\delta}_g > 0$ tako da za sve $x \in X$ iz $|x - x_0| < \tilde{\delta}_g$ sledi da je $|g(x)| \leq M$ za neko $M > 0$.

S obzirom da je f neprekidna u x_0, sledi da postoji $\delta_f > 0$ tako da je

$$|f(x) - f(x_0)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}M = \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in (x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f) \cap X.$$

Ako je $\delta = \min\{\delta_g, \tilde{\delta}_g, \delta_f\}$ onda za sve $x \in X$ iz $|x - x_0| < \delta$ sledi $|(fg)(x) - (fg)(x_0)| < \varepsilon$, pa je proizvod neprekidnih funkcija u x_0 neprekidna funkcija u x_0.

(Maksimum dve funkcije) Za zadato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

za sve $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$. Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka iz $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tada postoje 4 moguća slučaja:

1) $\max\{f(x), g(x)\} = f(x)$, $\max\{f(x_0), g(x_0)\} = f(x_0)$,
2) $\max\{f(x), g(x)\} = g(x)$, $\max\{f(x_0), g(x_0)\} = g(x_0)$,
3) $\max\{f(x), g(x)\} = f(x)$, $\max\{f(x_0), g(x_0)\} = g(x_0)$,
4) $\max\{f(x), g(x)\} = g(x)$, $\max\{f(x_0), g(x_0)\} = f(x_0)$.

U slučajevima 1) i 2) direktno sledi

$$|\max\{f(x), g(x)\} - \max\{f(x_0), g(x_0)\}| < \varepsilon.$$

U slučaju 3) važi:

$$g(x) - g(x_0) \leq f(x) - g(x_0) \leq f(x) - f(x_0),$$

odakle je $|f(x) - g(x_0)| \leq \max\{|g(x) - g(x_0)|, |f(x) - f(x_0)|\}$, pa je

$$|\max\{f(x), g(x)\} - \max\{f(x_0), g(x_0)\}| = |f(x) - g(x_0)|$$

$$\leq \max\{|g(x) - g(x_0)|, |f(x) - f(x_0)|\} < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X.$$

Slično se dokazuje i 4).

Čitaocu se ostavlja za vežbu da dokaže preostala tvrđenja teoreme.

$\square$

Teorema 2.4. *(neprekidnost složene funkcije) Neka su dati skupovi $X, Y \subset \mathbb{R}$ i funkcije $f : X \to Y$ i $g : Y \to \mathbb{R}$ tako da je f neprekidna u nekoj tački $x_0 \in X$, a g neprekidna u $y_0 = f(x_0)$. Tada je funkcija $h = g \circ f$ neprekidna u $x_0 \in X$.*

Dokaz. Neka je dato $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta_g > 0$ tako da je

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \quad \text{za sve} \quad y \in (y_0 - \delta_g, y_0 + \delta_g) \cap Y.$$

Za tako odabranu vrednost δ_g postoji $\delta > 0$ tako da je

$$f(x) \in (y_0 - \delta_g, y_0 + \delta_g) \cap Y \quad \text{za sve} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X.$$

Prema tome,

$$|h(x) - h(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X,$$

čime je teorema dokazana. □

3. Globalna svojstva neprekidih funkcija

Podsetimo se, funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je neprekidna na skupu $A \subset X$ ako je neprekidna u svakoj tački tog skupa. Pri tome, ako je za $a \in A$ funkcija f definisana samo na $(a, \infty) \cap X$ posmatra se neprekidnost sa desne strane u a, a ako je za $b \in A$ funkcija f definisana samo na $(-\infty, b) \cap X$ posmatra se neprekidnost sa leve strane u b. Dakle, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je neprekidna na $[a, b]$ ako je neprekidna u svakoj tački $x \in (a, b)$, i $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ i $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Teorema 3.1. *Neka je data funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, gde je A otvoren skup u $\mathbb{R}$. Tada je funkcija f neprekidna na skupu A ako i samo ako je za svaki otvoren skup $B \subset \mathbb{R}$ njegova inverzna slika*

$$f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\} \subset A,$$

otvoren skup u $\mathbb{R}$.

Analogno tvrđenje važi i za zatvorene skupove.

Dokaz. Neka je f neprekidna na A i neka je B proizvoljan otvoren skup u $\mathbb{R}$. Ako ne postoji $a \in A$ tako da je $f(a) \in B$, onda je $f^{-1}(B) = \emptyset$, a to je otvoren skup. Prema tome, pretpostavimo da $f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Znači, postoji $x \in A$ za koje je $f(x) = b \in B$.

Treba da se dokaže da je $f^{-1}(B)$ okolina svake svoje tačke, odnosno da za proizvoljan element $x \in f^{-1}(B)$ postoji okolina tog elementa $\mathcal{O}(x)$ tako da iz $y \in \mathcal{O}(x)$ sledi $f(y) \in B$.

Neka je, dakle $x \in f^{-1}(B)$ i $b = f(x) \in B$. Iz neprekidnosti funkcije f u tački x sledi da za svaku okolinu $\mathcal{V}(b) \subset B$ tačke b postoji okolina $\mathcal{O}(x) \subset A$ tako da je $f(\mathcal{O}(x)) \subset \mathcal{V}(b)$. Prema tome,

$$f^{-1}(B) \supset f^{-1}(\mathcal{V}(b)) \supset \mathcal{O}(x),$$

pa iz $y \in \mathcal{O}(x)$ sledi $f(y) \in \mathcal{V}(b) \subset B$ odnosno $y \in f^{-1}(B)$, to jest skup $f^{-1}(B)$ je otvoren.

Neka sada za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$, gde je A otvoren skup u $\mathbb{R}$ važi da je za svaki otvoren skup $B \subset \mathbb{R}$ njegova inverzna slika $f^{-1}(B)$ otvoren skup u $\mathbb{R}$. Dokažimo da je f tada neprekidna u proizvoljnoj tački $x \in A$.

Neka je $\mathcal{V}(f(x))$ proizvoljna okolina tačke $f(x)$. To je otvoren skup pa je $f^{-1}(\mathcal{V}(f(x)))$ otvoren skup koji sadrži x. To znači da postoji $\mathcal{O}(x)$, okolina tačke x za koju važi $\mathcal{O}(x) \subset f^{-1}(\mathcal{V}(f(x)))$. Dakle, za sve $y \in \mathcal{O}(x)$ važi $f(y) \in \mathcal{V}(f(x))$, pa je f neprekidna u x. $\square$

U nastavku se dokazuje Bolcano-Košijeva teorema:

Teorema 3.2. *Neka je data funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna na $[a, b]$ i $f(a)f(b) < 0$. Tada postoji $c \in (a, b)$ tako da je $f(c) = 0$.*

Prema tome, Bolcano-Košijeva teorema navodi jedan dovoljan uslov za egzistenciju rešenja jednačine $f(x) = 0$ na nekom intervalu.

Direktna posledica ove teoreme je takozvana *teorema o srednjoj vrednosti.*

Posledica 3.3. *Neka je data funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna na $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$ i $A < B$ ($B < A$, respektivno). Tada za svaki broj $C \in (A, B)$ ($C \in (B, A)$, respektivno) postoji $c \in (a, b)$ tako da je $f(c) = C$.*

Dokaz. (dokaz posledice) Posmatra se funkcija $g(x) = f(x) - C$. Ona je neprekidna na $[a, b]$ i važi:

$$g(a) \cdot g(b) = (f(a) - C)(f(b) - C) = (A - C)(B - C) < 0.$$

Iz teoreme 3.2 sledi da postoji $c \in (a, b)$ tako da je $g(c) = 0$, odnosno $f(c) - C = 0$, pa je $f(c) = C$. $\square$

Dokaz. (dokaz teoreme 3.2) Neka je, na primer, $f(a) > 0$ i $f(b) < 0$ i neka je $I_1 = [a, b]$. Tada je dužina datog intervala jednaka $|I_1| = b - a$.

Posmatra se tačka $(a + b)/2$. Ako je $f((a + b)/2) = 0$, onda je $c = (a + b)/2$ i tvrđenje je dokazano. Nasuprot tome, može da se desi da je $f((a + b)/2) > 0$ ili da je $f((a + b)/2) < 0$.

Ako je $f((a + b)/2) > 0$, onda se posmatra interval $I_2 = [a_1, b_1] = [(a + b)/2, b]$. Važi $f(a_1) > 0$ i $f(b_1) < 0$.

Ako je $f((a + b)/2) < 0$, onda se posmatra interval $I_2 = [a_1, b_1] = [a, (a + b)/2]$. Važi $f(a_1) > 0$ i $f(b_1) < 0$.

Dakle, sada se posmatra neprekidna funkcija f na $I_2 = [a_1, b_1]$ za koju važi $f(a_1)f(b_1) < 0$ i tačka $(a_1 + b_1)/2$.

Ako je $f((a_1 + b_1)/2) = 0$, onda je $c = (a_1 + b_1)/2$ i tvrđenje je dokazano. Nasuprot tome, može da se desi da je $f((a_1 + b_1)/2) > 0$ ili da je $f((a_1 + b_1)/2) < 0$.

Ako je $f((a_1 + b_1)/2) > 0$, onda se posmatra interval $I_3 = [a_2, b_2] = [(a_1 + b_1)/2, b_1]$. Važi $f(a_2) > 0$ i $f(b_2) < 0$.

Ako je $f((a_1+b_1)/2)<0$, onda se posmatra interval $I_3=[a_2,b_2]=[a_1,(a_1+b_1)/2]$. Važi $f(a_2)>0$ i $f(b_2)<0$.

Sada se posmatra neprekidna funkcija f na $I_3=[a_2,b_2]$ za koju važi $f(a_2)f(b_2)<0$ i tačka $(a_2+b_2)/2$. Ako je $f((a_2+b_2)/2)=0$, onda je $c=(a_2+b_2)/2$ i tvrđenje je dokazano. U suprotnom, nastavljamo sa podelom intervala I_3 i biranjem intervala $I_4=[a_3,b_3]$ tako da je $f(a_3)>0$ i $f(b_3)<0$.

Ako se, primenom navedenog postupka dobije $f((a_n+b_n)/2)=0$ za neki prirodan broj $n\in\mathbb{N}$, onda je tvrđenje dokazano. U suprotnom, dobija se niz umetnutih intervala $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ pri čemu je $f(a_n)>0$ i $f(b_n)<0$ za sve $n\in\mathbb{N}$.

Na osnovu Kantorovog principa sledi da postoji $c\in\mathbb{R}$ koji pripada svim intervalima $[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}$. Pri tome je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(Čitalac bi trebalo da bude u stanju da samostalno argumentuje ove činjenice.)

Iz neprekidnosti funkcije f i $f(a_n)>0$ za sve $n\in\mathbb{N}$ sledi da je $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(c)\geq 0$, a iz neprekidnosti funkcije f i $f(b_n)<0$ za sve $n\in\mathbb{N}$ sledi da je $\lim_{n\to\infty} f(b_n)=f(c)\leq 0$.

Dakle, $f(c)=0$, čime je teorema dokazana ako je $f(a)>0$ i $f(b)<0$.

Slučaj $f(a)<0$ i $f(b)>0$ se dokazuje na analogan način. □

Prethodna teorema ne daje nikakvu informaciju o broju tačaka c za koje je $f(c)=0$. Uz neki dodatni uslov, na primer stroge monotonosti, moguće je dokazati jedinstvenost rešenja jednačine $f(x)=0$ na intervalu $[a,b]$ ako je $f(a)f(b)<0$.

Konačno, važi i Vajerštrasova teorema:

Teorema 3.4. *Neka je data funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ koja je neprekidna na $[a,b]$. Tada važi:*

1) *f je ograničena na $[a,b]$.*
2) *f dostiže svoj infimum i supremum na $[a,b]$, to jest skup*

$$f([a,b])=\{f(x)\ \mid\ x\in[a,b]\}$$

ima minimalni i maksimalni element.

Dokaz. 1) Dokaz izvodimo kontradikcijom. Pretpostavimo da je f neprekidna funkcija koja nije ograničena sa gornje strane na $[a,b]$. To znači da postoji niz (međusobno različitih) tačaka $x_n\in[a,b]$, $n\in\mathbb{N}$, tako da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$.

S obzirom da svaki ograničen niz ima konvergentan podniz, to znači da postoji podniz $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i tačka $x_0 \in \mathbb{R}$ tako da je

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

Taj broj x_0 je tačka nagomilavanja skupa $[a, b]$ (jer u svakoj okolini te tačke postoje elementi skupa $[a, b] \setminus \{x_0\}$), pa važi $x_0 \in [a, b]$ jer je $[a, b]$ zatvoren skup, a svaki zatvoren skup sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.

Dakle funkcija f je definisana u x_0, pa $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Iz neprekidnosti funkcije f sledi

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0),$$

što je u kontradikciji sa $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ (jer se posmatra podniz niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Prema tome, f ne može biti neograničena sa gornje strane.

Analogno se dokazuje slučaj kada se pretpostavi da f nije ograničena sa donje strane.

2) Na osnovu 1) sledi da je skup $f([a, b])$ ograničen u $\mathbb{R}$. Prema tome, postoje infimum i supremum tog skupa. Neka je $s = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dokažimo da postoji $x^* \in [a, b]$ takav da je $f(x^*) = s$.

Po definiciji supremuma za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in [a, b]$ tako da važi

$$s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s.$$

Niz (različitih tačaka) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen, pa postoji neki njegov podniz $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ koji je konvergentan: $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$. Taj broj x^* je tačka nagomilavanja zatvorenog skupa $[a, b]$, pa važi $x^* \in [a, b]$.

Iz neprekidnosti funkcije f sledi:

$$\lim_{k\to\infty}(s - \frac{1}{n_k}) \leq \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*) \leq s,$$

a kako je $\lim_{k\to\infty}(s - \frac{1}{n_k}) = s$ dobija se $f(x^*) = s$, odnosno neprekidna funkcija f dostiže svoj supremum na $[a, b]$.

Slično se dokazuje za infimum. □

Primetimo da se teorema 3.4 ne može proširiti na poluzatvorne (ni na otvorene) intervale. Na primer, funkcija $\ln x$ je neprekidna na $(0, 1]$ ali nije ograničena na tom intervalu. Za niz $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, važi $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, a $\lim_{n\to\infty} \ln(x_n) = -\infty$.

Analizom dokaza teoreme 3.4, može se zaključiti da se umesto intervala $[a, b]$ može posmatrati proizvoljan zatvoren i ograničen (kompaktan) skup. Nasuprot tome, teorema o srednjoj vrednosti ne može da se proširi na proizvoljne kompaktne skupove.

Sledi jedna direktna posledica teoreme 3.4.

Posledica 3.5. *Neka je data neprekidna funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *(koja je različita od konstante). Tada je*

$$f([a, b]) = \{f(x) \mid x \in [a, b]\} = [m, M],$$

gde je m *minimalna, a* M *maksimalna vrednost funkcije* f *na* $[a, b]$.

Neprekidna funkcija preslikava kompaktan (zatvoren i ograničen) skup na kompaktan skup.

4. Neprekidnost monotonih funkcija

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i neka je $f(a) = A$, $f(b) = B$. Na osnovu prethodnih razmatranja može se zaključiti sledeće. Ako je $A < B$, posledica teoreme o srednjoj vrednosti kaže da je $[A, B] \subset f([a, b])$. (U slučaju da je $A > B$ imamo $[B, A] \subset f([a, b])$.) U slučaju da je f monotono rastuća funkcija dobija se $[A, B] = f([a, b])$, pri čemu su A i B minimalna i maksimalna vrednost funkcije f na $[a, b]$ tim redom. Ako je, uz to f strogo monotono rastuća funkcija, onda je odgovarajuće preslikavanje bijektivno.

Prirodno se postavlja pitanje obratnog tvrđenja, to jest da li važi sledeća teorema:

Teorema 4.1. *Neka je data monotono rastuća funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *za koju važi* $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. *Tada je* f *neprekidna na* $[a, b]$.

Neka je data monotono opadajuća funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *za koju važi* $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$. *Tada je* f *neprekidna na* $[a, b]$.

Nije teško uočiti da je teorema 4.1 kontrapozicija sledeće teoreme.

Teorema 4.2. *Neka je data monotona funkcija* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Tada* f *može da ima samo tačke prekida prve vrste i to najviše prebrojivo mnogo njih.*

Za dokaz nam je potrebno pomoćno tvrđenje.

Lema 4.3. *Neka je data monotono rastuća funkcija* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Ako su* x *i* y *tačke prekida funkcije* f *i ako je* $x < y$ *onda važi:*

$$(f(x^-), f(x^+)) \cap (f(y^-), f(y^+)) = \emptyset.$$

Sa $f(x^-)$ i $f(x^+)$ su označene leva i desna granična vrednost funkcije f u tački x tim redom. Slično i za $f(y^-)$ i $f(y^+)$.

Dokaz. (dokaz leme) Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $f(y^-) < f(x^+)$. pri čemu je f monotono rastuća i $x < y$. Neka je $d = y - x > 0$ i neka je $\varepsilon = f(x^+) - f(y^-) > 0$ (dakle, $f(x^+) - \frac{\varepsilon}{2} = f(y^-) + \frac{\varepsilon}{2}$).

Iz definicije granične vrednosti funkcije sledi

1) $(\exists \delta_1(x,\varepsilon) \in (0, d/2)$ tako da za sve $z \in (x, x+\delta_1)$ važi

$$f(z) \in \left(f(x^+) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x^+) + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

2) $(\exists \delta_2(y,\varepsilon) \in (0, d/2)$ tako da za sve $z \in (y-\delta_2, y)$ važi

$$f(z) \in \left(f(y^-) - \frac{\varepsilon}{2}, f(y^-) + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Kako je $x + \delta_1 < y - \delta_2$ za proizvoljne brojeve $\tilde{x} \in (x, x+\delta_1)$ i $\tilde{y} \in (y-\delta_2, y)$ iz monotonosti funkcije f sledi $f(\tilde{x}) \leq f(\tilde{y})$. Nasuprot tome, iz 1) i 2) sledi

$$f(\tilde{x}) > f(x^+) - \frac{\varepsilon}{2} = f(y^-) + \frac{\varepsilon}{2} > f(\tilde{y}),$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom $f(y^-) < f(x^+)$. □

Dokaz. (dokaz teoreme 4.2) Iz lekcije o graničnoj vrednosti monotonih funkcija znamo da monotona funkcija u svakoj tački intervala (a, b) ima levu i desnu graničnu vrednost, pa ako f ima tačke prekida, onda su to prekidi prve vrste (za vežbu objasniti zašto nije moguće da prekid bude otklonjiv).

Preostaje da se dokaže da takvih tačaka prekida ima najviše prebrojivo mnogo. Dokaz navodimo za monotono rastuće funkcije, a za monotnono opadajuće funkcije dokaz je analogan.

Neka je x tačka prekida funkcije f na (a, b). S obzirom da je x tačka prekida prve vrste i da je f monotono rastuća funkcija, važi $f(x^-) < f(x^+)$, pa postoji $r = r(x) \in (f(x^-), f(x^+)) \cap \mathbb{Q}$. Na ovaj način svakoj tački prekida dodeljujemo jedan racionalan broj. Na osnovu leme 4.3 sledi da je ovako definisano preslikavanje injektivno, odnosno, ako je $x \neq y$ onda je $r(x) \neq r(y)$, pa skup tačaka prekida ne može da ima kardinalnost veću od skupa racionalnih brojeva, odnosno, monotono rastuća funkcija na (a, b) može da ima najviše prebrojivo mnogo tačaka prekida. □

Na osnovu do sada dokazanih teorema važi:

Teorema 4.4. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i strogo monotona funkcija. Tada je $f([a, b])$ interval sa krajevima $f(a)$ i $f(b)$, postoji inverzna funkcija f^{-1} koja preslikava $f([a, b])$ na $[a, b]$ i ona je strogo monotona i neprekidna.*

5. Uniformna neprekidnost

Kao što smo videli, pri ispitivanju neprekidnosti funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ u nekoj tački $x_0 \in X$, izbor broja $\delta > 0$ koji figuriše u definiciji, zavisi od izbora tačke x_0, a ne samo od vrednosti broja $\varepsilon > 0$. Na primer, za funkciju $f(x) = x^2$ važi

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|.$$

Ako $x \in (x_0 - 1, x_0 + 1)$ onda je $|x + x_0| < 2|x_0| + 1$, pa za zadato $\varepsilon > 0$ birajući $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|x_0| + 1)\}$ dobijamo

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

S obzirom da je $x^2 = x \cdot x$, može se koristiti i dokaz teoreme o neprekidnosti proizvoda neprekidnih funkcija:

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)||g(x)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)|.$$

Neka je $f(x_0) \neq 0$. Iz neprekidnosti funkcije g sledi njena ograničenost u nekoj okolini tačke x_0:

$$x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \Longrightarrow |g(x)| < M, \quad \text{za neko } M \in \mathbb{R},$$

a iz neprekidnosti funkcije f sledi da postoji $\delta_2 > 0$ tako da važi

$$x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Zatim, za $\delta_3 = \varepsilon/(2|f(x_0)|)$ iz

$$x \in (x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3) \Longrightarrow |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pa, ako je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, dobija se

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon,$$

pri čemu δ očigledno zavisi od izbora tačke x_0 (jer δ_3 zavisi od vrednosti $f(x_0)$).

Primetimo da kod linearne funkcije $f(x) = x$ vrednost broja δ ne zavisi od izbora tačke u kojoj se posmatra neprekidnost, a da se to svojstvo ne može uopštiti na proizvod $x \cdot x$.

Posmatrajmo sada $f(x) = x^2$, $x \in [a, b]$. Tada je $|x| \leq \max\{|a|, |b|\}$. Za proizvoljan broj $x_0 \in [a, b]$ važi

$$|x^2 - x_0^2| \leq |x - x_0|(|x| + |x_0|) \leq 2 \cdot \max\{|a|, |b|\}|x - x_0|,$$

pa za zadato $\varepsilon > 0$ i za $\delta = \varepsilon/(2 \cdot \max\{|a|, |b|\})$ važi

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

U ovom slučaju izbor broja $\delta > 0$ ne zavisi od izbora tačke $x_0 \in [a, b]$.

Uniformna neprekidnost na nekom skupu je pojam koji pomaže ispitivanje ovakvih situacija.

Definicija 5.1. *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka je $A \subset X$.*
Funkcija f je uniformno neprekidna na skupu A ako i samo ako
(6)
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in X)(|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Dakle, definicija uniformne neprekidnosti se uvek odnosi na neki skup te je ona globalno svojstvo funkcije, za razliku od neprekidnosti koja je lokalno svojstvo funkcije.

Primer 5.2. *Ispitajmo neprekidnost funkcije $f(x) = 1/x$ na skupovima $A = [a, 1]$, $a > 0$ i $B = (0, 1]$.*
Ako se za zadato $\varepsilon > 0$ bira $\delta = \varepsilon|a|^2$ onda važi
$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1||x_2|} < \frac{|x_1 - x_2|}{|a|^2} < \varepsilon,$$
pa je f uniformno neprekidna na $[a, 1]$ za proizvoljno $a > 0$.
Primetimo da se na isti način može dokazati uniformna neprekidnost funkcije $1/x$ na skupu $(a, +\infty)$, $a > 0$, koji je neograničen skup.
Nasuprot tome (videti i primer 1.3) kada nezavisna promenljiva x teži ka nuli, vrednost $\delta > 0$ se povećava. Ova okolnost upućuje na potencijalno narušavanje uniformne neprekidnosti kada se umesto skupa $[a, 1]$ posmatra $(0, 1]$, bez obzira što $a > 0$ može biti broj proizvoljno blizak nuli.
Da funkcija nije uniformno neprekidna na nekom skupu pokazuje se posmatranjem negacije definicije 5.1:
$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_1, x_2 \in X)(|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon).$$
Znači, promenom izbora broja δ, menjaju se tačke x_1 i x_2. Kao i kod negacije neprekidnosti, ovaj uslov je ekvivalentan sa egzistencijom nizova (različitih) tačaka domena $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tako da je
$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0 \quad \wedge \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon,$$
za neki pogodno izabran broj $\varepsilon > 0$.
Konkretno, za $x_n = 1/n$ i $y_n = 1/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, važi $|x_n - y_n| = 1/n(n+1) \to 0$, kada $n \to \infty$, i
$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| = 1 > 0,$$
pa izborom $\varepsilon = 1$ (ili $\varepsilon \in (0, 1)$) zaključujemo da f nije uniformno neprekidna na $(0, 1]$.

Primer 5.3. *Ispitajmo neprekidnost funkcije $f(x) = x^2$ na skupovima $A = [a, b]$, i $B = \mathbb{R}$.*

Za svako broj $x \in A$ *važi* $|x| \leq \max\{|a|, |b|\}$, *pa je*

$$|x_1^2 - x_2^2| \leq |x_1 - x_2|(|x_1| + |x_2|) \leq 2 \cdot \max\{|a|, |b|\}|x_1 - x_2|.$$

Za zadato $\varepsilon > 0$ *i za* $\delta = \varepsilon/(2 \cdot \max\{|a|, |b|\})$ *važi*

$$|x_1 - x_2| \Longrightarrow |x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon,$$

odnosno f *je uniformno neprekidna na* A.

Kada nezavisna promenljiva x *teži ka beskonačnosti, vrednost* $\delta > 0$ *se povećava. Da* x^2 *nije uniformno neprekidna na* $\mathbb{R}$ *pokazuje se posmatranjem nizova* $x_n = \sqrt{n}$ *i* $y_n = \sqrt{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. *Važi*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 0 \quad \wedge \quad |f(x_n) - f(y_n)| = 1 > 0,$$

pa zaključujemo da x^2 *nije uniformno neprekidna na* $\mathbb{R}$.

U nastavku se daje jedan dovoljan uslov za uniformnu neprekidnost funkcije f na skupu A. Lako se dokazuje da, ako je f uniformno neprekidna na nekom skupu A, onda je f neprekidna u svakoj tački skupa A, pa je neprekidnost funkcije u svakoj tački posmatranog skupa neophodan uslov za uniformnu neprekidnost.

Teorema 5.4. *(Kantorova teorema) Neka je* $f : X \to \mathbb{R}$ *neprekidna na* $[a, b] \subset X$. *Tada je* f *uniformno neprekidna na* $[a, b]$.

Opštije, ako je $K \subset \mathbb{R}$ *kompaktan skup i funkcija* $f : K \to \mathbb{R}$ *neprekidna na* K, *onda je* f *i uniformno neprekidna na* K.

Dokaz. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz elemenata skupa K. Kao i u dokazu Vajerštrasove teoreme 3.4, i ovde se koristi činjenica da svaki niz elemenata $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji pripadaju kompaktnom skupu K ima konvergentan podniz čija granica pripada skupu K. Naime, ako je

$$A = \{x_n \ \ |n \in \mathbb{N}\}$$

konačan skup, onda postoji stacionaran podniz datog niza i tvrđenje je očigledno. Ako je A beskonačan skup, onda iz Bolcano-Vajerštrasove teoreme za skupove sledi da on ima barem jednu tačku nagomilavanja $x_0 \in \mathbb{R}$. (Skup A je ograničen jer je podskup ograničenog skupa K.) Broj x_0 je istovremeno i tačka nagomilavanja niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pa postoji njegov konvergentan podniz $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Kako je K nadskup skupa A, sledi da je x_0 njegova tačka nagomilavanja, a iz zatvorenosti skupa K sledi $x_0 \in K$, čime je dokazana navedena činjenica koju ćemo koristiti u nastavku dokaza.

Pretpostavimo da je f neprekidna na K ali da nije uniformno neprekidna na K. To znači da postoje nizovi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elemenata skupa K tako da je

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0 \quad \wedge \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon,$$

za neki broj $\varepsilon > 0$.

Neka je $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan podniz niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in K.$$

Tada iz $\lim_{k\to\infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = 0$ sledi da je $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan podniz niza $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i da je

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0 \in K.$$

Na osnovu neprekidnosti funkcije f važi:

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0,$$

čime smo dobili kontradikciju sa pretpostavkom da f nije uniformno neprekidna na K. $\square$