Писмени испит из Анализе 1 за И смер **ЈАНУАР 2021**

1. (15 поена) Посматрајмо низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ дат са $a_n = n^3\left(\sin\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

(а) Израчунати $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(б) Израчунати $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1\cdot a_1+2\cdot a_2\cdots+n\cdot a_n}{n^2}$.

2. (15 поена) Нека је функција f дата са

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1+3x^2), & x\le -1,\\ ax^2+bx+c, & -1<x\le 0,\\ \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, & 0<x.\end{cases}$$

(а) Одредити све a, b и c за које је функција f непрекидна.

(б) Испитати диференцијабилност функције f у зависности од a, b и c.

3. (20 поена) Дата је функција $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)+\dfrac{1}{x^2-1}-2$.

(а) Испитати ток и скицирати график функције f.

(б) Колико има тачака у којима је функција f диференцијабилна, а функција $|f|$ није?

4. (10 поена)

(а) Одредити максимум функције $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ на интервалу $(1,+\infty)$.

(б) За које реалне бројеве $\alpha\ge 1$ важи да је $\alpha\ln x\le x\ln\alpha$ за све $x>1$?

(Писмени испит укупно вреди 60 поена. Време за рад је 3 сата.)