1. $a_1 \in (-1,0)$

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{1-a_n}} - 1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

а) Покажемо прво индукцијом да $a_n \in (-1,0)$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

<u>База:</u> $n=1$

$a_1 \in (-1,0)$ по услову задатка ✓

<u>индуктивни корак:</u> $n \to n+1$

$a_n \in (-1,0)$ (индуктивна хипотеза)

покажемо да и $a_{n+1} \in (-1,0)$

$$a_{n+1} = \underbrace{\sqrt{\frac{1+a_n}{1-a_n}}}_{>0} - 1 > 0 - 1 = -1$$

>0, јер је $\sqrt{\ } \geq 0$ и $1+a_n \neq 0$ пошто $a_n \in (-1,0)$

$$a_{n+1} < 0 \iff \sqrt{\frac{1+a_n}{1-a_n}} - 1 < 0 \iff \sqrt{\frac{1+a_n}{1-a_n}} < 1 \ \Big/^2 \iff$$

$$\iff \frac{1+a_n}{1-a_n} < 1 \iff \frac{1+a_n}{1-a_n} - 1 < 0 \iff$$

$$\iff \frac{1+a_n - 1 + a_n}{1-a_n} < 0 \iff \frac{\overset{<0}{2a_n}}{\underset{>0,\ \text{јер}\ a_n<0<1}{1-a_n}} < 0 \quad \text{(T)}$$

$\Rightarrow -1 < a_{n+1} < 0$ тј. $a_{n+1} \in (-1,0)$

Сада покажимо да је $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ растући.

$$a_n < a_{n+1} \iff a_n < \sqrt{\frac{1+a_n}{1-a_n}} - 1 \iff \underbrace{1+a_n}_{>0} < \underbrace{\sqrt{\frac{1+a_n}{1-a_n}}}_{>0}$$

$$\iff (1+a_n)^2 < \frac{1+a_n}{1-a_n} \iff \frac{(1+a_n)^2(1-a_n)}{1-a_n} - \frac{1+a_n}{1-a_n} < 0$$

$$\iff \frac{(1+a_n)\big((1+a_n)(1-a_n)-1\big)}{1-a_n} < 0 \iff$$

$$\iff \frac{(1+a_n)(1-a_n^2-1)}{1-a_n} < 0 \iff -\frac{(1+a_n)\cdot a_n^2}{1-a_n} < 0$$

$$\iff \frac{\overbrace{(1+a_n)}^{>0}\cdot \overbrace{a_n^2}^{>0}}{\underbrace{1-a_n}_{>0}} > 0 \quad (T) \text{ јер } a_n \in (-1,0)$$

Низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ је растући и одозго ограничен нулом, па је по Теореми он конвергентан.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{1-a_n}} - 1 \quad \Big| \lim_{n\to\infty}$$

$$a = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - 1$$

$$1+a = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \quad \Big/^2$$

Scanned with CamScanner

$$\frac{(1+a)^2(1-a)}{1-a} - \frac{1+a}{1-a} = 0$$

$$\frac{(1+a)\big((1+a)(1-a)-1\big)}{1-a} = 0$$

$$\frac{(1+a)(\cancel{1}-a^2-\cancel{1})}{1-a} = 0 \quad \Big|\cdot(-1)$$

$$\frac{a^2(1+a)}{1-a} = 0 \quad \Rightarrow \quad a=0 \quad \lor \quad a=-1$$

Пошто је $a_1>-1$ и $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ растући, његов лимес не може бити једнак -1 $\Rightarrow$ $a\neq -1 \Rightarrow \boxed{a=0}$

Дакле, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

б) Израчунаћемо прво $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{na_n}$.

($y_n=n$ је растући и тежи $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{na_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_n}}{n} \overset{\text{Штолц}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}}{n+1-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}} = (*)$$

користимо развој јер $a_n\to 0,\ n\to\infty$

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{1-a_n}}-1 = (1+a_n)^{\frac12}(1-a_n)^{-\frac12}-1 = \qquad (1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2 + o(x^2),\ x\to 0$$

$$= \left(1+\frac12 a_n + \frac{\frac12\cdot\frac{-1}{2}}{2}a_n^2 + o(a_n^2)\right)\left(1+\underbrace{\left(-\frac12\right)\cdot(-a_n)}_{=\frac{a_n}{2}} + \frac{-\frac12\cdot\frac{-3}{2}}{2}\cdot(-a_n)^2 + o(a_n^2)\right)-1$$

$$= \cancel{1}+\frac{a_n}{2}+\frac38 a_n^2 + \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{4} - \frac{a_n^2}{8} + o(a_n^2) - \cancel{1} =$$

$$= a_n + \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2), \ n \to \infty$$

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{a_n} - (\cancel{a_n} + \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2))}{a_n(a_n + \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2))} =$$

$$L : a_n^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)}{a_n^2 + o(a_n^2)} = \frac{-\frac{1}{2}+0}{1+0} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n a_n = -2$$

б) $a_1 = \frac{1}{2}$

$$a_2 = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}} - 1 = \sqrt{3} - 1$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}-1}{1-(\sqrt{3}-1)}} - 1 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} - 1 =$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{3}+3}{4-3}} - 1 = \sqrt{3+2\sqrt{3}} - 1$$

Приметимо да је $a_3 > 1$, јер

$$a_3 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{3+2\sqrt{3}} - 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{3+2\sqrt{3}} > 2 \,/^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+2\sqrt{3} > 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} > 1 \,/^2 \Leftrightarrow 12 > 1 \ \text{Т}$$

Али, онда $a_4 = \sqrt{\frac{1+a_n}{1-a_n}} - 1$ није дефинисано, јер разломак под кореном има позитиван бројилац и негативан имениоц. Дакле, овај низ није добро дефинисан, па није ни конвергентан.

2. а) $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1} =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\right)^{-1} = \left\lceil (1+t)^{-1} = 1 - t + o(t),\ t \to 0 \right\rfloor$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + o(x^2)\right) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$$

$$= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),\ x \to 0$$

$$\Rightarrow a = 0,\ b = 1,\ c = 0,\ d = \frac{1}{3}$$

б) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \sin\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{\cancel{x} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) - \left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)\right)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} =$$

Scanned with CamScanner

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \cancel{-x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

4.

$$\frac{f(x)}{2\sqrt{x}} = -\sqrt{x}\, f'(x) \iff \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f(x) + \sqrt{x} \cdot f'(x) = 0 \iff$$

$$\iff \left(\sqrt{x} \cdot f(x)\right)' = 0$$

Зато уводимо помоћну фју $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ дату са $F(x) = \sqrt{x}\, f(x)$ и желимо да на њу и погодно одабран интервал $[a, b]$ применимо Ролову теорему.

F је, наравно, диференцијабилна на $(0, +\infty)$ као композиција таквих фја.

Тражимо a и b т.д. $F(a) = F(b)$.

Приметимо да је $F(4) = \sqrt{4} \cdot f(4) = 2 \cdot 6 = 12$ и $F(16) = \sqrt{16} \cdot f(16) = 4 \cdot 3 = 12$, па можемо узети $a = 4$ и $b = 16$.

Даље, применом Ролове теореме на фју F на интервалу $[4, 16]$, имамо да постоји неко $c \in (2, 4)$, а самим тим $c \in (0,+\infty)$ за које је $F'(c)=0$ тј.

$$\frac{f(c)}{2\sqrt{c}} = -\sqrt{c}\, f'(c).$$

3. $$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2}$$

а) 1) домен

$$2x-3 \neq 0 \iff x \neq \frac{3}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

2) парност / непарност / периодичност

нема ниједно од ових својстава

3) нуле и знак

касније

4) непрекидност

фја f је непрекидна на целом домену као композиција непрекидних фја

5) диференцијабилност

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)' - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+\frac{(x+1)^2}{(2x-3)^2}}\cdot\frac{1\cdot(2x-3)-(x+1)\cdot 2}{(2x-3)^2} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2x-3-2x-2}{(2x-3)^2+(x+1)^2} - \frac{1}{2} = \frac{-5}{4x^2-12x+9+x^2+2x+1} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{-5}{5x^2-10x+10} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2-2x+2} - \frac{1}{2} = -\frac{2+x^2-2x+2}{2(x^2-2x+2)} =$$

$$= -\frac{x^2-2x+4}{2(x^2-2x+2)}$$

Пошто је $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$, израз $f'(x)$ је добро дефинисан за свако $x\in D_f$, па је фја f диференцијабилна и важи $f'(x)=-\frac{x^2-2x+4}{2(x^2-2x+2)}$.

6) монотоност и локални екстремуми

$$f'(x)=-\frac{x^2-2x+4}{2(x^2-2x+4)}=-\frac{\overbrace{(x-1)^2+3}^{>0}}{\underbrace{2((x-1)^2+3)}_{>0}}<0$$

$\Rightarrow f'(x)<0 \quad \forall x\in D_f=(-\infty,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},+\infty)$

$\Rightarrow$ f опада на $(-\infty,\frac{3}{2})$ и опада на $(\frac{3}{2},+\infty)$, па нема локалних екстремума

7) конвексност / конкавност

$$f''(x)=-\left(\frac{x^2-2x+4}{2(x^2-2x+2)}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-2)(x^2-2x+2)-(x^2-2x+4)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-2)(\cancel{x^2}\cancel{-2x}+2\cancel{-x^2}\cancel{+2x}-4)}{(x^2-2x+2)^2}=-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{-\cancel{2}(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=$$

$$=\frac{2(x-1)}{\underbrace{(x^2-2x+2)^2}_{>0}}\Rightarrow$$

$f''(x)<0$ за $x\in(-\infty,1)$ конкавна

$f''(x)>0$ за $x\in(1,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},+\infty)$ конвексна

$f''(x)=0$ за $x=1$ превојна тачка

8) асимптоте

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\overbrace{\frac{x+1}{2x-3}}^{\to\frac{1}{2}} - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - (+\infty) = -\infty$$

$\Rightarrow$ кад $x\to+\infty$ немамо хоризонталну асимптоту, па тражимо косу

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2x-3}}{x} - \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}{+\infty} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2x-3} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $y = -\frac{x}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ је коса асимптота кад $x\to+\infty$

на идентичан начин се добије да је $y = -\frac{x}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ коса асимптота и кад $x\to-\infty$

За вертикалне асимптоте испитујемо $\lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x)$.

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}+} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}+}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\frac{5}{2}}{0+} - \frac{3}{4} =$$

$$= \operatorname{arctg}(+\infty) - \frac{3}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}-} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}-}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2x-3} - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\frac{5}{2}}{0-} - \frac{3}{4} =$$

$$= \operatorname{arctg}(-\infty) - \frac{3}{4} = -\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}$$

Дакле, права $x=\frac{3}{2}$ није вертикална асимптота ове ф-је (ни са једне стране), већ се график полако приближава тачки $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\right)$ слева и тачки $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\right)$ здесна.

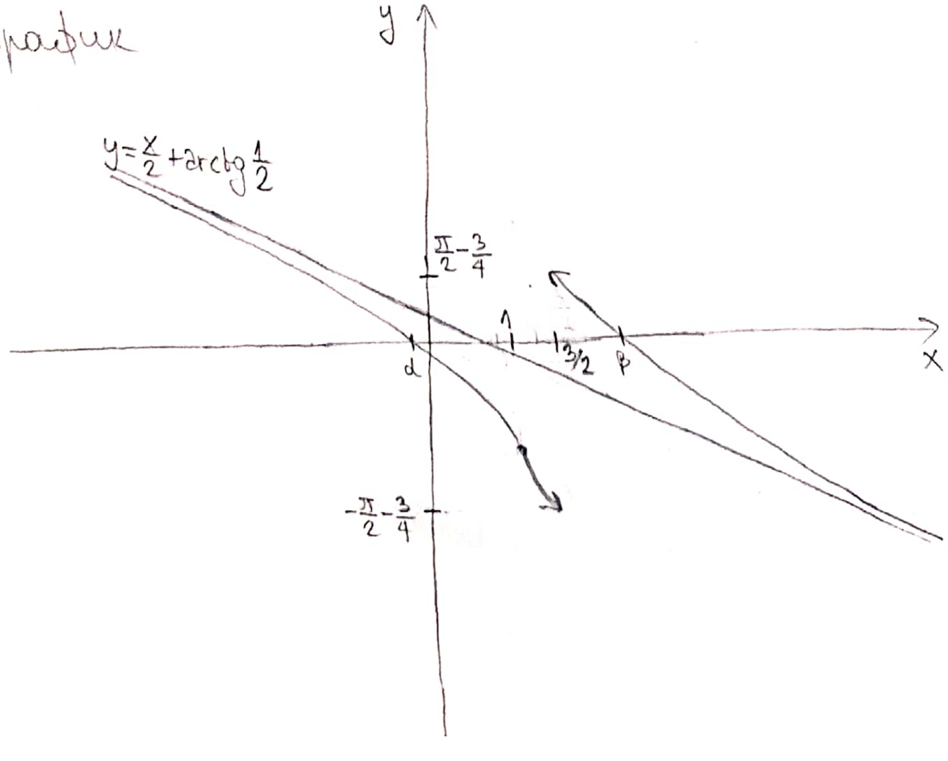
Одредимо и углове под којима се приближавају (самим тим и део б)).

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}+} f'(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}+} -\frac{x^2-2x+4}{2(x^2-2x+2)} = -\frac{\frac{9}{4}-3+4}{2\left(\frac{9}{4}-3+2\right)} =$$

$$= -\frac{\frac{13}{4}}{2\cdot\frac{5}{4}} = -\frac{13}{10}$$

Слично, $\lim_{x\to\frac{3}{2}-} f'(x) = -\frac{13}{10}$, па су оба ова угла једнака по $\arctg\left(-\frac{13}{10}\right)$

д) График



3) нуле и знак

са графика видимо да ова ф-ја има две нуле $\alpha \in (-\infty, \frac{3}{2})$

и $\beta \in (\frac{3}{2}, +\infty)$

f је позитивна на интервалима $(-\infty, \alpha)$ и $(\frac{3}{2}, \beta)$, а

негативна на интервалима $(\alpha, \frac{3}{2})$ и $(\beta, +\infty)$

4) $f(x) = a$

1° $a \leq -\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}$: једно решење

2° $-\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} < a < \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}$: два решења

3° $a \geq \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}$: једно решење