Neodređeni integrali

1. Primitivna funkcija

Definicija 1. Data je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ *primitivna funkcija* funkcije f na intervalu (a, b) ako je F diferencijabilna na (a, b) i ako važi $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a, b)$.

Primer 2. Pronaći primitivnu funkciju funkcija:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$F'(x) = f(x) = 0 \implies F(x) = c, c \in \mathbb{R}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$F'(x) = f(x) = 3x^2 \implies F(x) = x^3 + c, c \in \mathbb{R}$.
Moguće funkcije: $F_1(x) = x^3, \quad F_2(x) = x^3 + \sqrt{3}, \quad F_3(x) = x^3 - 505$ itd.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$F'(x) = f(x) = e^x \implies F(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$.

d) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$
$F'(x) = f(x) = \frac{1}{x} \implies F(x) = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}$.

Tvrđenje 3. Ako je $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, onda je i svaka funkcija oblika $F(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f.

Dokaz Za neku primitivnu funkciju F funkcije f i za proizvoljan $c \in \mathbb{R}$ posmatrajmo funkciju $G : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$. Pošto je F diferencijabilna na (a, b), sledi da je i G diferencijabilna na (a, b) i važi:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Dakle, G je primitivna funkcija funkcije f.

Tvrđenje 4. Neka su $F_1, F_2 : (a, b) \to \mathbb{R}$ primitivne funkcije funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tada postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $F_1(x) = F_2(x) + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dokaz Za funkciju f imamo dve njene primitivne funkcije $F_1'(x) = f(x)$ i f: $F_2'(x) = f(x)$. Posmatrajmo funkciju $G : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad G(x) = F_1(x) - F_2(x), \quad \forall x \in (a, b)$. Pošto su F_1 i F_2 diferencijabilne na (a, b), sledi da je i G diferencijabilna na (a, b) i važi:

$$G'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Iz ovoga sledi da je funkcija G konstantna na intervalu (a, b), tj. postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x) = c, \quad \forall x \in (a, b)$.

Definicija 5. Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ označavamo sa $\int f(x)\,dx$ i nazivamo ga *neodređeni integral* funkcije f. Dakle,

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\},$$

gde je $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ neka primitivna funkcija funkcije f.

Tablica integrala:		
$\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ x \in (0,+\infty)$	$\int x^\alpha \,\mathrm{dx}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$
$n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$	$\int x^n \,\mathrm{dx}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$
$n \in \mathbb{N}\setminus\{1\},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\int x^{-n} \,\mathrm{dx}$	$\frac{1}{1-n}x^{1-n}+C_1,\ x \in (-\infty,0)$ $\frac{1}{1-n}x^{1-n}+C_2,\ x \in (0,+\infty)$
$x \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{dx}$	$\ln\lvert x\rvert+C_1,\ x \in (-\infty,0)$ $\ln\lvert x\rvert+C_2,\ x \in (0,+\infty)$
$a>0,\ a\neq 1,\ x \in \mathbb{R}$	$\int a^x \,\mathrm{dx}$	$\frac{1}{\ln a}a^x+C$
$x \in \mathbb{R}$	$\int \sin x \,\mathrm{dx}$	$-\cos x+C$
$x \in \mathbb{R}$	$\int \cos x \,\mathrm{dx}$	$\sin x+C$
$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3\pi}{2}+k\pi\right)$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{dx}$	$\operatorname{tg} x+C_k,\ x \in \left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3\pi}{2}+k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$
$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, \pi+k\pi)$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{dx}$	$-\operatorname{ctg} x+C_k,\ x \in (k\pi, \pi+k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
$x \in (-1,1)$	$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \,\mathrm{dx}$	$\arcsin x+C$
$x \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{dx}$	$\operatorname{arctg} x+C$
$x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\int x^0 \,\mathrm{dx}$	$x+C_1,\ x \in (-\infty,0)$ $x+C_2,\ x \in (0,+\infty)$

Tvrđenje 6. Linearnost neodređenog integrala. Neka su $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funkcije koje imaju primitivne funkcije na intervalu (a,b). Tada i $\lambda f(x) + \mu g(x)$ ima primitivnu funkciju na intervalu (a,b) za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i važi:

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx.$$

Dokaz Neka su F i G primitivne funkcije funkcija f i g, redom. Hoćemo da pokažemo da je funckija $\lambda F + \mu G$ primitivna za $\lambda f + \mu g$.

$$\begin{aligned}(\lambda F(x) + \mu G(x))' &= \lambda F'(x) + \mu G'(x) = \lambda f(x) + \mu g(x).\\ &= \int (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda F(x) + \mu G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\\ &= \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Tvrđenje 7. Parcijalna integracija. Neka su $u, v : (a,b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije na intervalu (a,b). Tada važi:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Dokaz

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Zatim integral sa obe strane:

$$\int (u(x)v(x))'\,dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$$

Izdvajamo:$\int u(x)v'(x)dx$:

$$\begin{aligned}\int u(x)v'(x)\,dx &= \int (u(x)v(x))'\,dx - \int u'(x)v(x)\,dx \\ &= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Primer 8.

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \log x \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \;\Rightarrow\; v(x) = x \end{array} \right\} \\ &= uv - \int v\,du \\ &= x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x\log x - \int dx \\ &= x\log x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Primer 9.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \;\Rightarrow\; du = e^x\,dx \\ dv = \cos x\,dx \;\Rightarrow\; v = \sin x \end{array} \right\} \\ &= e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx \\ &= e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \;\Rightarrow\; du = e^x\,dx \\ dv = \sin x\,dx \;\Rightarrow\; v = -\cos x \end{array} \right\} \\ &= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx\right)\end{aligned}$$

Ovde uvodimo oznaku $I = \int e^x \cos x\,dx$ pošto se ponavlja isti integral kao početni:

$$\begin{aligned}I &= e^x \sin x + e^x \cos x - I \\ 2I &= e^x(\sin x + \cos x) \\ I &= \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Tvrđenje 10. Neka je data funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ i njena primitivna funkcija $F : (a,b) \to \mathbb{R}$. Ako je funkcija $\rho : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ diferencijabilna na intervalu (α,β), tada važi:

$$\int f(\rho(x)) \cdot \rho'(x)\,dt = F(\rho(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dokaz Proverimo da li je izvod funkcije $F(\rho(x)) + C$ jednak funkciji $f(\rho(t)) \cdot \rho'(t)$ (tj. funckiji pod integralom):

$$(F(\rho(x)) + C)' = (F \circ \rho)'(x) = F'(\rho(x)) \cdot \rho'(x) = f(\rho(x)) \cdot \rho'(x) = (1)$$

Primer 11.

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{x+3} = \left\{ \begin{array}{l} t = x+3, \quad dt = dx, \quad x > -3 \\ \text{ili } x < -3, \quad dt = dx \end{array} \right\}$$
$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x+3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Primer 12.

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{dx} = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+x^3, \\ dt = 3x^2\,dx, \\ dt \cdot \frac{1}{3} = x^2\,dx. \end{array} \right\}$$
$$= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3} \cdot dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + c = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. Tehnike integracija