1. $a_{n+1} = 4a_n - 3a_n^2 \quad , \; a_1 < 0$

a) Показаћемо да је $a_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ индукцијом.

База: $n=1$ $\qquad a_1 < 0$ ✓ по услову задатка

Индуктивни корак: $n \to n+1$

$a_n < 0$ индуктивна хипотеза

доказујемо $a_{n+1} < 0$

$$a_{n+1} = 4a_n - 3a_n^2 = \underset{\wedge \atop 0}{a_n}\underbrace{(4-\overset{<0}{3a_n})}_{>4>0} < 0$$

Показаћемо сада да је овај низ (строго) опадајући.

$a_{n+1} < a_n \iff 4a_n - 3a_n^2 < a_n \iff -3a_n^2 + 3a_n < 0 \iff$

$$\iff \underset{\wedge \atop 0}{-3}\;\underset{\wedge \atop 0}{a_n}\underbrace{(a_n-1)}_{\wedge \atop -1<0} < 0 \quad \text{Т}$$

Пошто је овај низ строго опадајући, постоје две могућности: или је он ограничен одоздо, па је по теореми конвергентан или није ограничен одоздо, па је онда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Претпоставимо да важи ово прво тј. нека је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}.$$

$$a_{n+1} = 4a_n - 3a_n^2 \quad \Big/ \lim_{n\to\infty}$$

$$a = 4a - 3a^2$$

$$3a - 3a^2 = 0$$

$$3a(1-a) = 0$$

$$a = 0 \quad \lor \quad a = 1$$

Међутим, пошто је $a_1 < 0$ и $\{a_n\}$ опадајући низ, он никако не може конвергирати ка 0 или 1. Зато нам претпоставка није била добра, па мора да важи она друга опција тј. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Дакле, овај низ одређено дивергира ка $-\infty$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{1-a_n}} = ?$ $\qquad y_n = \sqrt{1-a_n}$, $n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ опад., па $\{-a_n\}$ расте, а самим тим и $\{1-a_n\}$ и $\underset{\{y_n\}}{\underset{\|}{\{\sqrt{1-a_n}\}}}$ расту

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1-a_n} = \sqrt{1-(-\infty)} = +\infty$$

$\Rightarrow$ Можемо применити Штолцово правило

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1-a_n}} \overset{\text{Штольц}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{1-a_{n+1}}-\sqrt{1-a_n}} \overset{\text{домножимо}}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-a_{n+1}}-\sqrt{1-a_n}}\cdot\frac{\sqrt{1-a_{n+1}}+\sqrt{1-a_n}}{\sqrt{1-a_{n+1}}+\sqrt{1-a_n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-a_{n+1}}+\sqrt{1-a_n}}{1-a_{n+1}-(1-a_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-a_{n+1}}+\sqrt{1-a_n}}{a_n-a_{n+1}}=$$

$$|:a_n^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-4a_n+3a_n^2}+\sqrt{1-a_n}}{a_n-4a_n+3a_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-4a_n+3a_n^2}+\sqrt{1-a_n}}{3a_n^2-3a_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{1-4a_n+3a_n^2}}{a_n^2}+\frac{\sqrt{1-a_n}}{a_n^2}}{3-\frac{3}{a_n}}=$$

користую $a_n\to-\infty,\ n\to\infty$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{a_n^4}}-\underset{\downarrow 0}{\frac{4}{a_n^3}}+\underset{\to 0}{\frac{3}{a_n^2}}}+\sqrt{\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{a_n^4}}-\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{a_n^3}}}}{3-\underset{\to 0}{\frac{3}{a_n}}}=\frac{\sqrt{0-0+0}+\sqrt{0-0}}{3-0}=$$

$$=0$$

2. a)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6), \quad x \to 0$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t), \quad t \to 0$$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) =$$

$$= \ln\Bigg(1 + \underbrace{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)}_{t \to 0}\Bigg) =$$

$$= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)^3 + o(x^6) =$$

Не треба нам t^4, јер он садржи x^8 и веће степене, а они потпадају под $o(x^6)$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{x^4}{24} + o(x^6)\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^6)\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} - \frac{x^6}{24} + o(x^6) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6), \quad x \to 0$$

$\Rightarrow a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = 0,\ a_4 = -\frac{1}{12},\ a_5 = 0,\ a_6 = -\frac{1}{45}$

б) f је непрекидна у свим тачкама скупа $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ као композиција непрекидних ф-ја.

Треба још испитати непрекидност у тачки $x=0$.

Да би f било непрекидна и у нули, треба да важи

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \underset{\overset{\parallel}{b}}{f(0)}.$$

Дакле, $$b = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x) + \sqrt{1+x^2} - 1}{x^4} =$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 1} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{16}$$

$$\overset{a)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6) + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{-\frac{1}{2}x^2} - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6) + \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^4 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^6 + o(x^6) \cancel{-1}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6) - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + o(x^6)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + \frac{1}{16}x^6 + o(x^6)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{5}{24} \overbrace{- \frac{1}{45}x^2 + \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)}^{\to 0}\right) =$$

$$= -\frac{5}{24}.$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(\cos x) + \sqrt{1+x^2} - 1}{x^4}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\[2ex] -\dfrac{5}{24}, & x = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

непрекидна

a) f је диференцијабилна на $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ као композиција диференцијабилних ф-ја (можемо јој и експлицитно наћи извод), па треба још испитати диференцијабилност у тачки $x = 0$. Зато рачунамо извод у $x=0$ по дефиницији и проверавамо да ли је он коначан број.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\ln(\cos x) + \sqrt{1+x^2} - 1}{x^4} - \left(-\dfrac{5}{24}\right)}{x} \stackrel{\cdot x^4}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x) + \sqrt{1+x^2} - 1 + \frac{5}{24}x^4}{x^5} \overset{\text{б)}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{1}{12}x^4} - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6) + \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \cancel{\frac{1}{8}x^4} + \frac{1}{16}x^6 + o(x^6) + \cancel{\frac{5}{24}x^4}}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{45}x^6+\frac{1}{16}x^6+o(x^6)}{x^5} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{45}x+\frac{1}{16}x+o(x)\right)=0$$

Пошто је 0 коначан број, имамо да је $f'(0)=0$, тј. је f диференцијабилна и у тачки $x=0$. Даље, f је диференцијабилна на целом свом домену.

4. а) Нека је $f(x)=x^3-6\operatorname{arctg}x-1$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Желимо да покажемо да f има тачно 3 нуле.

То радимо тако што ћемо испитати њене интервале монотоности.

$$f'(x)=3x^2-\frac{6}{1+x^2}=\frac{3x^2+3x^4-6}{1+x^2}=\frac{3(x^4+x^2-2)}{x^2+1}=$$

$$=\frac{3(x^4-x^2+2x^2-2)}{x^2+1}=\frac{3(x^2(x^2-1)+2(x^2-1))}{x^2+1}=$$

$$=\frac{3(x^2+2)(x^2-1)}{x^2+1}=\frac{\overbrace{3(x^2+2)}^{>0}(x-1)(x+1)}{\underbrace{x^2+1}_{>0}}$$

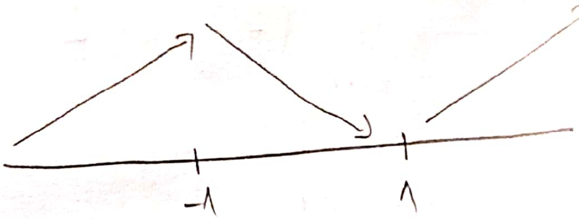
за $x<-1$: $x-1<0$ и $x+1<0$ $\Rightarrow$ $f'(x)>0$ $\Rightarrow$ f строго расте на $(-\infty,-1)$

за $x\in(-1,1)$: $x-1<0$ и $x+1>0$ $\Rightarrow$ $f'(x)<0$ $\Rightarrow$ f строго опада на $(-1,1)$

за $x>1$: $x-1>0$ и $x+1>0$ $\Rightarrow$ $f'(x)>0$ $\Rightarrow$ f строго расте на $(1,+\infty)$

за $x\in\{-1,1\}$: $f'(x)=0$ локални екстремуми

Scanned with CamScanner



Пошто f строго расте на $(-\infty, -1)$, она може имати највише једну нулу на овом интервалу. Помоћу Коши-Болцанове теореме ћемо показати да заиста има нулу на интервалу $(-\infty, -1)$ и због претходног коментара та ће бити јединствена нула на овом интервалу.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3 - 6\operatorname{arctg} x - 1\right) = -\infty - 6\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -\infty$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 6\cdot\operatorname{arctg}(-1) - 1 = -1 + 6\cdot\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{3}{2}\pi - 2$$

$$\frac{3}{2}\pi - 2 > 0 \iff 3\pi > 4 \iff \pi > \frac{4}{3} \quad T$$

$\Rightarrow f(-1) > 0$ и $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, па по Коши-Болцановој теореми f има нулу на $(-\infty, -1)$ која је јединствена.

Даље, $f(-1) > 0$, $f(1) = 1^3 - 6\operatorname{arctg} 1 - 1 = 1 - 6\cdot\frac{\pi}{4} - 1 =$

$$= -\frac{3\pi}{2} < 0,$$

па по Коши-Болцановој теореми f има нулу на интервалу $(-1,1)$. Међутим, пошто је f строго опадајућа на овом интервалу, та нула је јединствена.

На крају, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-6\operatorname{arctg}x-1) = +\infty - 6\cdot\frac{\pi}{2}-1 =$

$=+\infty$ и пошто је $f(1)<0$, опет по

Коши-Болцановој теореми имамо да постоји нула фје f на интервалу $(1,+\infty)$, а пошто је f строго растућа на том интервалу, ова нула је јединствена на њему.

Дакле, f има тачно три нуле, једну на интервалу $(-\infty,-1)$, једну на $(-1,1)$ и једну на $(1,+\infty)$.

б) Посматрамо фју $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дату са $g(x)=x^3-6\operatorname{arctg}x$.

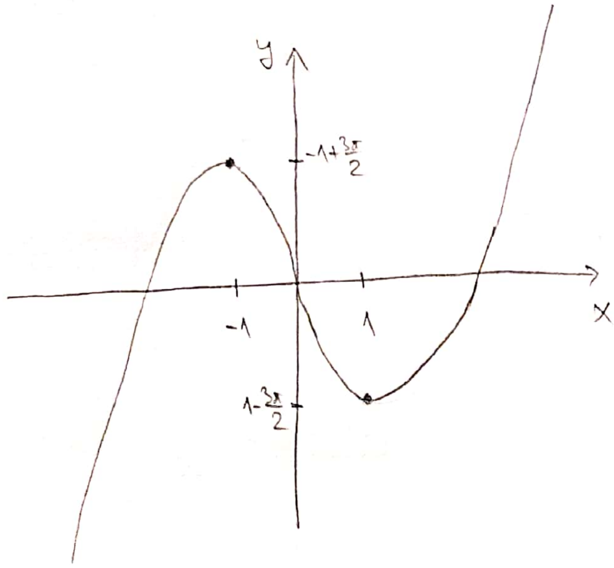
Исто као у делу а) добијамо $g'(x)=\dfrac{3(x^2+2)(x-1)(x+1)}{x^2+1}$

и да g строго расте на $(-\infty,-1)$, строго опада на $(-1,1)$ и строго расте на $(1,+\infty)$. Тачке 1 и -1 су локални екстремуми, па ћемо израчунати $g(1)$ и $g(-1)$ и то ће нам помоћи да „окврно скицирамо" график фје g.

$g(1) = 1^3-6\operatorname{arctg}1 = 1-6\cdot\frac{\pi}{4} = 1-\frac{3\pi}{2} < 0$

$g(-1) = (-1)^3-6\operatorname{arctg}(-1) = -1+6\cdot\frac{\pi}{4} = -1+\frac{3\pi}{2} > 0$

(можете уочити и $g(0)=0$, али то није овде много битно)



Није битно како график ф-је g тачно изгледа за број решења тражене ј-не, већ само да g строго расте на $(-\infty,-1)$, $g(-1)=-1+\frac{3\pi}{2}$, g строго опада на $(-1,1)$, $g(1)=1-\frac{3\pi}{2}$, g строго расте на $(1,+\infty)$.

Такође је битно и да знамо како се g понаша у $\pm\infty$, па као у делу а) добијамо

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty.$$

Зато график ф-је g отприлике изгледа као горе на слици.

Сада можемо да одредимо број решења ј-не $g(x)=\lambda$, што је заправо ј-на $x^3=6\operatorname{arctg} x+\lambda$.

1) $\lambda<1-\frac{3\pi}{2}$: једно решење

2) $\lambda=1-\frac{3\pi}{2}$: два решења

3) $1-\frac{3\pi}{2}<\lambda<-1+\frac{3\pi}{2}$: три решења

4) $\lambda=-1+\frac{3\pi}{2}$: два решења

5) $\lambda > -1+\frac{3\pi}{2}$: једно решење

3. $f(x)=\ln\frac{|2x-1|-1}{2x-1}-2x$

a)

1) домен

$2x-1\neq 0$ и $\frac{|2x-1|-1}{2x-1}>0$

$\Downarrow$

$x\neq\frac{1}{2}$

$|2x-1|-1>0$ и $2x-1>0$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$2x-1-1>0$ $x>\frac{1}{2}$

$x>1$

$x>1$

$|2x-1|-1<0$ и $2x-1<0$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$-2x+1-1<0$ $x<\frac{1}{2}$

$x>0$

$x\in(0,\frac{1}{2})$

$\Rightarrow D_f=(0,\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$

2) парност / непарност / периодичност

f нема ова својства

3) знак и нуле

касније

4) непрекидност

фја f је непрекидна на целом домену као композиција непрекидних фја

5) диференцијабилност

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{-2x}{2x-1} - 2x, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \ln \frac{2x-2}{2x-1} - 2x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$$x \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right): \quad f'(x) = \frac{1}{\frac{-2x}{2x-1}} \cdot \left(\frac{-2x}{2x-1}\right)' - 2 =$$

$$= -\frac{\cancel{2x-1}}{2x} \cdot \frac{-2(2x-1) - (-2x)\cdot 2}{(2x-1)^{\cancel{2}}} - 2 =$$

$$= -\frac{-\cancel{4x} + 2 + \cancel{4x}}{2x(2x-1)} - 2 = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x(2x-1)} - 2 =$$

$$= -\frac{1}{x(2x-1)} - \frac{2x(2x-1)}{x(2x-1)} = \frac{-1 - 4x^2 + 2x}{x(2x-1)} =$$

$$= \frac{-4x^2 + 2x - 1}{x(2x-1)} = \frac{4x^2 - 2x + 1}{x(1-2x)}$$

$$x \in (1, +\infty): \quad f'(x) = \frac{1}{\frac{2x-2}{2x-1}} \cdot \left(\frac{2x-2}{2x-1}\right)' - 2 =$$

$$= \frac{\cancel{2x-1}}{2x-2} \cdot \frac{2(2x-1) - 2(2x-2)}{(2x-1)^{\cancel{2}}} - 2 =$$

$$= \frac{\cancel{4x}-2-\cancel{4x}+4}{(2x-2)(2x-1)} - 2 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(x-1)(2x-1)} - 2 =$$

$$= \frac{1}{(x-1)(2x-1)} - \frac{2(x-1)(2x-1)}{(x-1)(2x-1)} = \frac{1-4x^2+4x+2x-2}{(x-1)(2x-1)} =$$

$$= \frac{-4x^2+6x-1}{(x-1)(2x-1)} = -\frac{4x^2-6x+1}{(x-1)(2x-1)}$$

Видимо да е $f'(x)$ дефинирано за $\forall x \in D_f$, та е f диференцируема ф-я

6) монотонност и локални екстремуми

$$f'(x) = \frac{4x^2-2x+1}{x(1-2x)} \quad \text{за } x \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$$

$4x^2-2x+1>0$ защото $4>0$ и $D=(-2)^2-4\cdot4\cdot1=-12<0$

$x>0$ и $1-2x>0$ за $x \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$

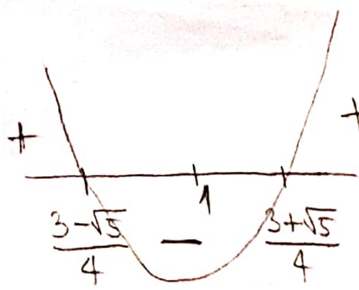
$\Rightarrow f'(x)>0$ за $\forall x \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow f$ е строго растяща на $\left(0, \tfrac{1}{2}\right)$

$$f'(x) = -\frac{4x^2-6x+1}{(x-1)(2x-1)} \quad \text{за } x \in (1, +\infty)$$

$x-1>0$ и $2x-1>0$ за $x \in (1,+\infty)$

$4x^2-6x+1=0$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{8} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$$



$\Rightarrow \quad 4x^2-6x+1<0$ за $x\in\left(1,\frac{3+\sqrt5}{4}\right)$

и $\quad 4x^2-6x+1>0$ за $x\in\left(\frac{3+\sqrt5}{4},+\infty\right)$

$\Rightarrow \quad f'(x)>0$ за $x\in\left(1,\frac{3+\sqrt5}{4}\right)$

$f'(x)<0$ за $x\in\left(\frac{3+\sqrt5}{4},+\infty\right)$

Дакле, f расте на $\left(0,\frac12\right)$ и расте на $\left(1,\frac{3+\sqrt5}{4}\right)$, а опада на $\left(\frac{3+\sqrt5}{4},+\infty\right)$, па је $x=\frac{3+\sqrt5}{4}$ тачка локалног максимума

$$f\left(\frac{3+\sqrt5}{4}\right)=\underbrace{\ln\underbrace{\frac{2\cdot\frac{3+\sqrt5}{4}-2}{2\cdot\frac{3+\sqrt5}{4}-1}}_{<1}}_{<0}-2\cdot\frac{3+\sqrt5}{4}<0-\frac{3+\sqrt5}{2}<0$$

7) конвексност / конкавност

$$x\in\left(0,\tfrac12\right):\ f''(x)=\left(\frac{4x^2-2x+1}{x-2x^2}\right)'=\frac{(8x-2)(x-2x^2)-(4x^2-2x+1)(1-4x)}{(x-2x^2)^2}$$

$$=\frac{\cancel{8x^2}-\cancel{2x}-\cancel{16x^3}+\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}+\cancel{16x^3}+\cancel{2x}-\cancel{8x^2}-1+4x}{(x-2x^2)^2}=$$

$$=\frac{4x-1}{\underbrace{(x-2x^2)^2}_{>0}}$$

$\Rightarrow$ за $x\in\left(0,\frac14\right)$ је $f''(x)<0 \Rightarrow f$ конкавна

за $x\in\left(\frac14,\frac12\right)$ је $f''(x)>0 \Rightarrow f$ конвексна

$x=\frac14$ је превојна тачка ф-је f

$$x\in(1,+\infty):\quad f''(x)=\left(-\frac{4x^2-6x+1}{(x-1)(2x-1)}\right)'=$$

$$=-\left(\frac{4x^2-6x+1}{2x^2-3x+1}\right)'=$$

$$=-\frac{(8x-6)(2x^2-3x+1)-(4x^2-6x+1)\cdot(4x-3)}{(2x^2-3x+1)^2}=$$

$$=-\frac{\cancel{16x^3}-\cancel{12x^2}-\cancel{24x^2}+\cancel{18x}+8x-6-\cancel{16x^3}+\cancel{12x^2}+\cancel{24x^2}-\cancel{18x}-4x+3}{(2x^2-3x+1)^2}=$$

$$=-\frac{4x-3}{(2x^2-3x+1)^2}=\frac{3-4x}{(2x^2-3x+1)^2}<0,\ \text{јер}\ 3-4x<0\ \text{за}\ x\in(1,+\infty)$$

$\Rightarrow$ f је конкавна на $(1,+\infty)$

8) асимптоте

Вертикалне: кандидати су $0+,\ \frac{1}{2}-,\ 1+$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{|2x-1|-1}{2x-1}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\ln\frac{1-2x-1}{2x-1}-2\cdot 0=\lim_{x\to 0+}\ln\frac{-2x}{2x-1}=$$

$$=\ln\frac{0-}{-1}=\ln 0+=-\infty\quad\Rightarrow\ \text{јесте В.А.}$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}-} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}-}\left(\ln\frac{|2x-1|-1}{2x-1}-2x\right)=\lim_{x\to \frac{1}{2}-}\ln\frac{-2x}{2x-1}-2\cdot\frac{1}{2}=$$

$$= \ln \frac{-2\cdot\frac{1}{2}}{0-} - 1 = \ln\frac{-1}{0-} - 1 = \ln(+\infty) - 1 = +\infty \Rightarrow \text{jесте В.А.}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}\left(\ln\frac{|2x-1|-1}{2x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to 1+} \ln\frac{2x-2}{2x-1} - 2 =$$

$$= \ln\frac{0+}{1} - 2 = \ln 0+ - 2 = -\infty \Rightarrow \text{jесте В.А.}$$

хоризонтална: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{|2x-1|-1}{2x-1} - 2x\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\ln\underbrace{\frac{2x-2}{2x-1}}_{\to 1}}_{\to 0} - 2x\right) = 0 - 2\cdot(+\infty) = -\infty$$

$\Rightarrow$ не постоји Х.А.

<u>коса:</u> $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2x-2}{2x-1} - 2x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\frac{2x-2}{2x-1}}{x} - 2\right) =$

$$= \frac{0}{+\infty} - 2 = -2 \Rightarrow a = -2$$

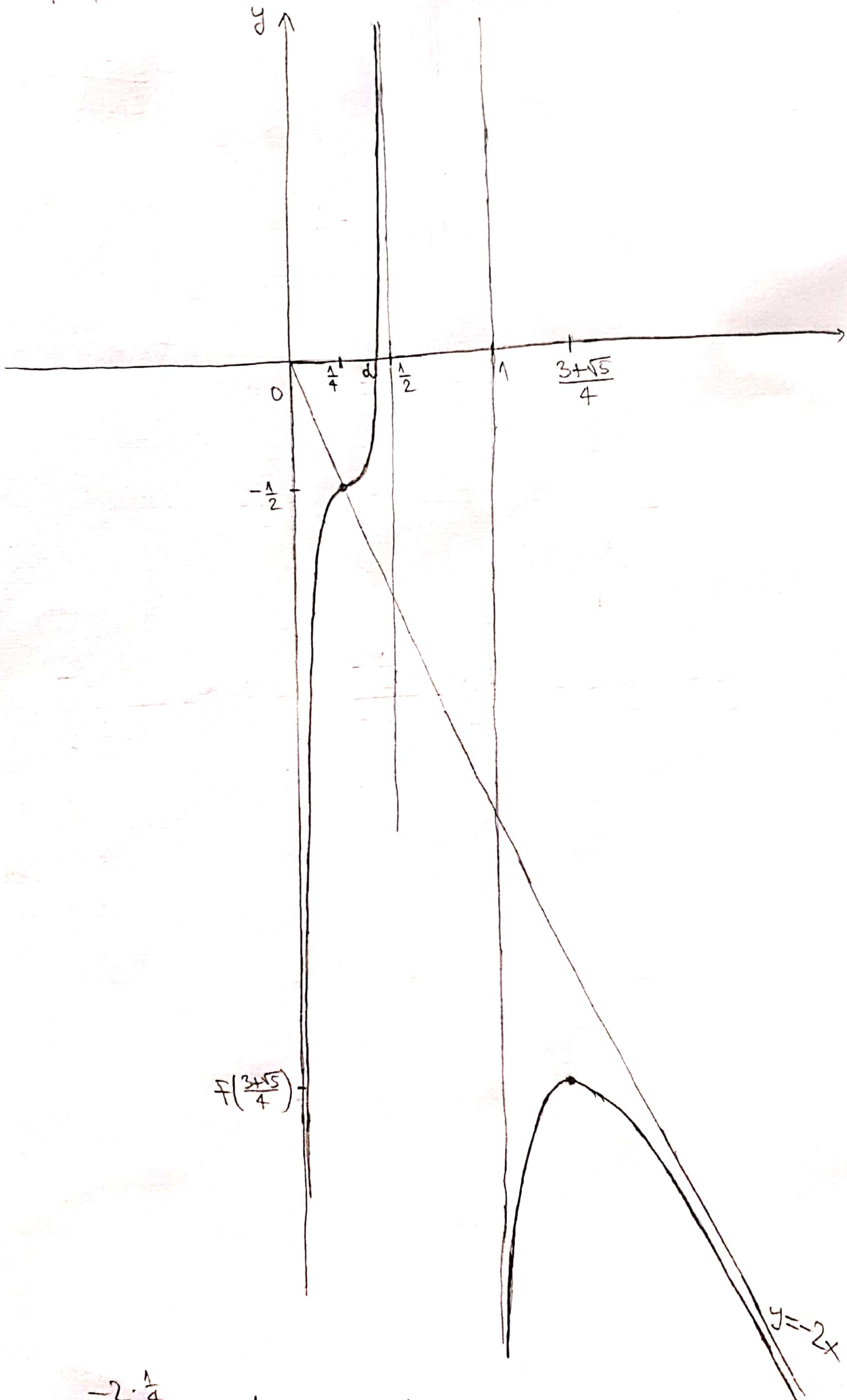
$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{2x-2}{2x-1} - 2x + 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x-2}{2x-1} = 0$$

$\Rightarrow y = -2x$ је К.А. кад $x\to+\infty$

Scanned with CamScanner

g) График



$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \ln \frac{-2\cdot\frac{1}{4}}{2\cdot\frac{1}{4}-1} - 2\cdot\frac{1}{4} = \ln 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

3) нуле и знак

са графика видимо да фја f има једну нулу $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, прецизније $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

на $(\alpha, \frac{1}{2})$ f је позитивна

на $(0, \alpha) \cup (1, +\infty)$ f је негативна

б) са графика видимо:

1) $a < f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$: 3 решења

2) $a = f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$: 2 решења

3) $a > f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$: 1 решење