1. (15 поена) Нека је низ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такав да је $x_1 = a > 0$ и $x_{n+1} = \sqrt[4]{1+4x_n} - 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

(a) Доказати да је $x_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Доказ: индукција

$n=1 \quad x_1 = a > 0$

$n \mapsto n-1$

$x_{n+1} = \sqrt[4]{1+\underbrace{4x_n}_{\substack{>0 \\ \text{(хипотеза)}}}} - 1 > 1-1 > 0$ (или $x_{n+1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{1+4x_n} > 1 \;\big|^4 \Leftrightarrow 1+4x_n > 1$
$\Leftrightarrow 4x_n > 0$
$\Leftrightarrow x_n > 0$ тачно према и.х)

>1

(б) Доказати да овај низ конвергира и израчунати његову граничну вредност.

Идеја: хајде да видимо ако већ треба да конвергира $\longrightarrow$ чему конвергира ?

тј хајде да нађемо могуће кандидате!

$x_{n+1} = \sqrt[4]{1+4x_n} - 1 \quad \Big/ \lim_{n\to\infty}$

$\longrightarrow x = \sqrt[4]{1+4x} - 1 \Leftrightarrow x+1 = (1+4x)^{\frac{1}{4}} \;\big|^4$

$\Leftrightarrow (x+1)^4 = 1+4x$

$\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 1+4x$

$\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 6x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2\underbrace{(x^2+4x+6)}_{>0} = 0 \longrightarrow \boxed{x=0}$ кандидат!

Како из дела а) имамо $x_n > 0$ и кандидат за lim је 0 хајде да пробамо да покажемо да низ x_n опада!

$x_{n+1} < x_n \Leftrightarrow (1+4x_n)^{\frac{1}{4}} < x_n + 1 \;\big|^4 \longrightarrow 1+4x_n < 1+4x_n + 6x_n^2 + 4x_n^3 + x_n^4$

$\Leftrightarrow x_n^2(x_n^2+4x_n+6) > 0$ ✓

$\Rightarrow$ низ опада

$\boxed{\text{II начин}}$ $(1+y)^\alpha \leq 1+\alpha y$, за $y \geq -1$ и $\alpha \in [0,1]$ Бернулијева неједнакост

$x_{n+1} = (1+4x_n)^{\frac{1}{4}} - 1 \leq 1 + \frac{1}{4}\cdot 4x_n - 1 = x_n$ ✓ :)

$\Longrightarrow$ низ ограничен одоздо (са 0) и опада $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$

0 – кандидат за lim

(в) Доказати да важи $x_{n+1} = x_n - \frac{3}{2}x_n^2 + o\left(x_n^2\right)$, кад $n \to \infty$.

$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + o(x^2),\ x \to 0$

Па како из дела б) $x_n \to 0$ имамо

$$x_{n+1} = (1+4x_n)^{\frac{1}{4}} - 1 = \cancel{1} + \binom{\frac14}{1} 4x_n + \binom{\frac14}{2}(4x_n)^2 + o(x_n^2) - \cancel{1} \qquad \binom{\frac14}{2} = \frac{\frac14 \cdot \left(-\frac34\right)}{2} = -\frac{3}{32}$$

$$= \frac14 \cdot 4x_n - \frac{3}{2\cdot 16}\cdot 16 x_n^2 + o(x_n^2) = \boxed{x_n - \frac32 x_n^2 + o(x_n^2), \quad x_n \to 0}$$

(г) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{n} \overset{\text{Штолц}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{\underbrace{x_{n+1}}_{\underbrace{(1+4x_n)^{\frac14}-1}_{1+x_n+o(x_n)}} \cdot x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - \left(x_n - \frac32 x_n^2 + o(x_n^2)\right)}{x_n \cdot (1 + x_n + o(x_n) - 1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac32 x_n^2 + o(x_n^2)}{x_n^2 + o(x_n^2)} = \boxed{\frac32} \implies \lim_{n\to\infty} n x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n x_n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n x_n}} = \frac{1}{\frac32} = \boxed{\frac23}$$

2. (15 поена)

(а) Одредити константе $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ такве да важи $\operatorname{arctg} x = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3), \ x \to 0$.

$f(x) := \operatorname{arctg} x$

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3), \ x \to 0$

$f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \longrightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -2\frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3} \longrightarrow f'''(0) = -2$

$$\implies f(x) = 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-2}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$= \underbrace{\boxed{0}}_{a} + \underbrace{\boxed{1}}_{b}\cdot x + \underbrace{\boxed{0}}_{c}\cdot x^2 \underbrace{\boxed{-\frac13}}_{d} x^3 + o(x^3), \ x \to 0$$

(б) Доказати да за свако $x \neq 0$ важи $e^{2x^2} > 1 + 2x^2$.

$e^t > 1 + t \quad t > 0$

Докажимо ово

$F(t) := e^t - 1 - t$

$F'(t) = e^t - 1 \longrightarrow f'(x) > 0 \iff e^t > 1 \iff t > 0 \longrightarrow F$ строго расте за $t>0$ 1)

$F(0) = 0$ 2)

$\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$ 3) $\xrightarrow{1)\ 2)\ 3)} F(t) > 0$ за $t > 0 \overset{t=2x^2}{\implies} e^{2x^2} > 1 + 2x^2$, за $x \neq 0$

(в) Одредити константу $L \in \mathbb{R}$ такву да функција $f(x) = \begin{cases} \frac{x\sin(\operatorname{arctg} x) - x^2}{e^{2x^2}-1-2x^2}, & x \neq 0 \\ L, & x = 0 \end{cases}$ буде непрекидна на скупу $\mathbb{R}$.

ф-ја $\frac{x\sin(\operatorname{arctg} x) - x^2}{e^{2x^2}-1-2x^2}$ је добро дефинисана за $x \neq 0$ (део б) и непрекидна као композиција непрекидних.

Да би f била непр на $\mathbb{R}$ потребно је још да $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = L}$

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3), \quad t \to 0$

$$x\sin(\operatorname{arctg} x) - x^2 = x\sin\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - x^2$$

$$= x \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3\right)\right] - x^2$$

$$= x \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + o(x^3)\right) - x^2$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - x^2 = -\frac{x^4}{2} + o(x^4), \quad x \to 0$$

$$e^{2x^2} - 1 - 2x^2 = 1 + 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^4) - 1 - 2x^2, \quad x \to 0$$

$$= 1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) - 1 - 2x^2, \quad x \to 0$$

$$= 2x^4 + o(x^4), \quad x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

3. (20 поена) Дата је функција $f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + |x+1|$.

(а) Испитати ток и скицирати график функције f.

1° D_f $\quad x \in (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$, f непр на D_f

2° парност / непарност / периодичност ✗

3° нуле и знак ⟶ касније

4° асимптотика

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ ⟶ нема хоризонталних асимпт.

$x \to +\infty$

$f(x) = \underbrace{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}_{\to 0} + \overbrace{|x+1|}^{x+1} = x + 1 + o(1)$ ⟶ $y = x+1$ је коса асимпт. кад $x \to +\infty$

ГДЕ је f у односу на ове асимптоте ћемо одредити касније (f', f'' ...)

$x \to -\infty$

$f(x) = -x - 1 + o(1)$ ⟶ $y = -x-1$ је к.асимп. кад $x \to -\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\quad x=0 \text{ је верт. асимптота}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\quad x=1 \text{ је верт. асимптота}$$

5° Монотоност, f'

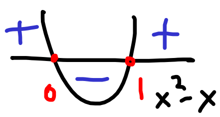
$\ulcorner\ |x|' = \operatorname{sgn} x,\ x\neq 0\ \lrcorner$

$$\left(\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)' = \left|\frac{x}{x-1}\right|\cdot\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)' = \overbrace{\left|\frac{x}{x-1}\right|\cdot \operatorname{sgn}\left|\frac{x-1}{x}\right|}^{\frac{x}{x-1}}\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)' = \frac{x}{x-1}\cdot\frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x(x-1)} + \operatorname{sgn}(x+1), \quad \text{за } x\neq -1$$

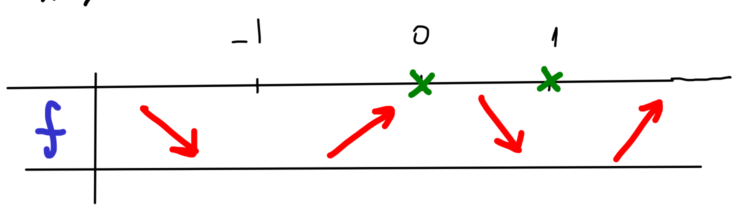
$x>-1 \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x(x-1)} + 1 = \dfrac{\overset{>0}{x^2-x+1}}{x(x-1)}$ $\longrightarrow$ $f'<0 \quad x\in(0,1)$; $\quad f'>0 \quad x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

$x<-1 \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x(x-1)} - 1 = \dfrac{-x^2+x+1}{x(x-1)} = -\dfrac{x^2-x-1}{x(x-1)} \overset{\cdots}{\longrightarrow} f'<0 \quad x<-1$



f је диференцијабилна за $x\in D_f\setminus\{-1\}$ (Проверићемо на крају за $x=-1$)

$\Rightarrow$



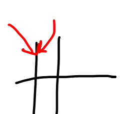
$-1\in D_f \longrightarrow -1$ је тачка локалног минимума $\Rightarrow \boxed{f(-1)=\ln 2}$

Диференцијабилност у -1?

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \overset{\text{лема}}{=} f'_-(-1)$$

слично $f_+'(-1) \overset{\text{лема}}{=} \dfrac{3}{2}$

видећемо прецизније помоћу f'' како ф-ја изгледа



$\boxed{\text{Лема}}$ f непр. у околини тачке a и $f'(x)$ постоји на $(a,a+\varepsilon)$ и $\boxed{\text{ако постоји}}$ $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ онда важи

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

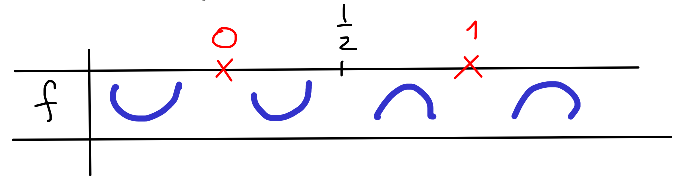
слично (с леве стране)

$f_+'(-1)\neq f_-'(-1) \Rightarrow f$ није диференцијабилна у -1 $\Rightarrow \boxed{f \text{ диф на } D_f\setminus\{-1\}}$

6° f'' (конкавност / конвексност)

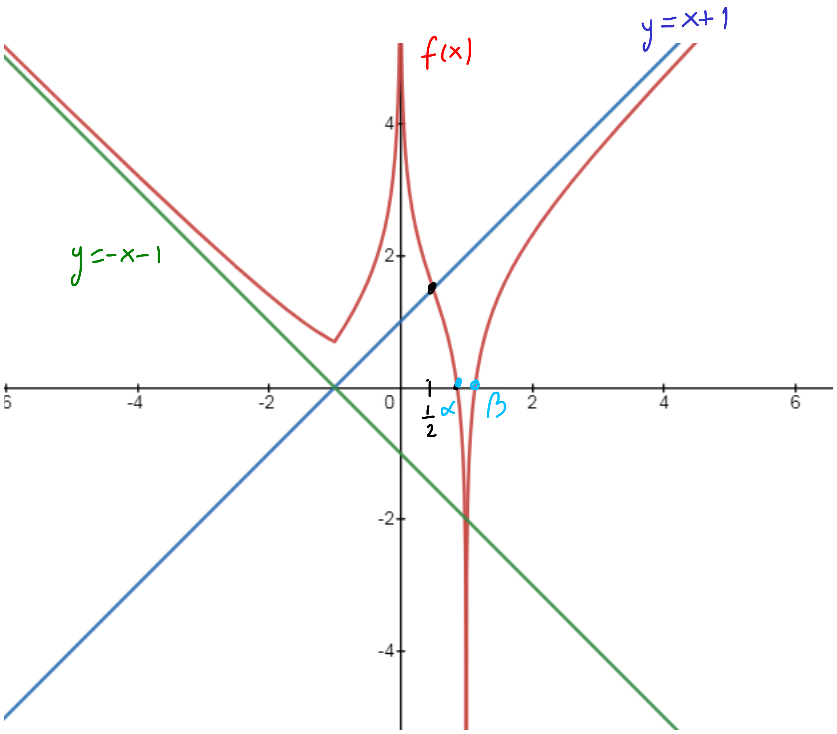
$$f'(x) = \frac{1}{x(x-1)} + sgn(x+1) \longrightarrow f''(x) = \left(\frac{1}{x(x-1)}\right)' = \frac{1-2x}{x^2(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''>0 \iff 1-2x>0 \iff x<\frac{1}{2} \\ f''<0 \iff x>\frac{1}{2} \end{array}\right\} \to$$



$\boxed{\frac{1}{2} \text{ – превојна тачка}}$

7° График



Нуле и знак

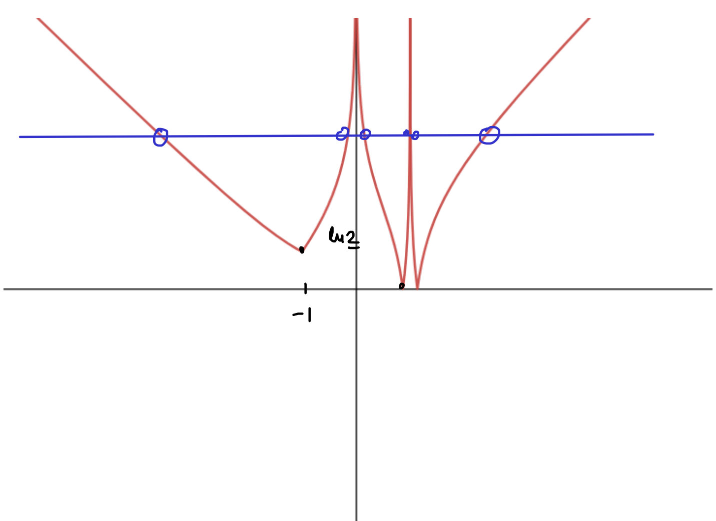
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty \\ f \searrow \ x<-1 \\ f \nearrow \ x>-1 \\ f(-1) = \ln 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)>0 \text{ за } x>0$$

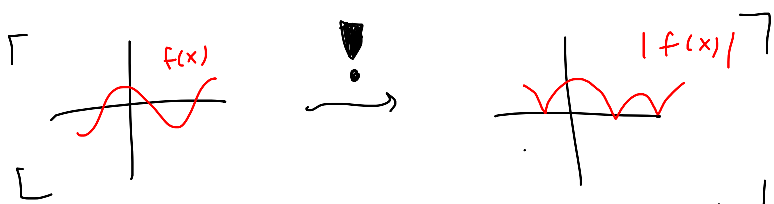
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty \\ f \searrow \text{ на } (0,1) \\ \text{(строго)} \end{array}\right\} \overset{\text{Коши Болцано}}{\Longrightarrow} \exists\, \alpha \in (0,1) \text{ тд } f(\alpha)=0$$

Слично $\exists\, \beta \in (1,+\infty)$ тд $f(\beta)=0$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} f>0 & x\in(0,\alpha)\cup(\beta,+\infty) \\ f<0 & x\in(\alpha,\beta) \end{array}$$

(б) Одредити број решења једначине $|f(x)| = 2021$.





$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Једначина има } |f|=2021 \quad 6 \quad \text{решења}}$

4. (10 поена) Нека су $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и функције $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидне на $[a, b]$ и диференцијабилне на (a, b) за које важи $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ и $f(x)g(x) \neq 0$ за свако $x \in [a, b]$. Доказати да постоји $c \in (a, b)$ такво да важи $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.

Уочимо $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

из $f(x)g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b] \iff \boxed{f(x) \neq 0 \ \wedge \ g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]}$

$f(a)\,g(b) = f(b)\,g(a) \quad /: g(a) \neq 0 \implies \dfrac{f(a)}{g(a)}\,g(b) = f(b) \quad /: g(b) \neq 0 \implies \boxed{\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{f(b)}{g(b)} \quad *}$

$$\left.\begin{array}{l} F(a) = \dfrac{f(a)}{g(a)} \\ F(b) = \dfrac{f(b)}{g(b)} \end{array}\right\} \overset{*}{\implies} F(a) = F(b) \overset{\text{Рол}}{\implies} \exists c \in (a,b) \text{ тд } F'(c) = 0$$

$$\boxed{F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

$$\implies \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)} = 0$$

$$\implies f'(c)g(c) = f(c)g'(c) \quad /: \overbrace{f(c)g(c)}^{\neq 0}$$

$$\boxed{\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}}$$

✓