~ Подсетник:

1° Вилсон:

p — прост број

$\Rightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod p$

2° Ојлер:

НЗД $(a, n) = 1$

$\Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$

$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \Rightarrow \varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$

факторизација на просте — Ојлерова функција —

— Специјално:

Ферма $\left\{ \begin{array}{l} p \text{ — прост, } p \nmid a \\ \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p \end{array} \right.$

1° $p > 7$ — прост број

$\Rightarrow 504 \mid p^6 - 1$

$504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$, довољно је

показати:

$7 \mid p^6 - 1,\ 8 \mid p^6 - 1,\ 9 \mid p^6 - 1$

— Пошто је $p > 7$ то

$7 \nmid p$ па је по Т Ферма:

$p^{7-1} \equiv 1 \pmod 7$

$$\underbrace{p^6 \equiv 1 \pmod 7}_{7 \mid p^6 - 1}$$

$p^6 - 1 = (p^3)^2 - 1^2 = (p^3 - 1)(p^3 + 1)$

$= (p-1)(p^2 + p + 1)(p+1)(p^2 - p + 1)$

$p-1, p+1$ су 2 узастопна парна броја, па је 1 од њих дељив са 4

$\Rightarrow 8 = 2 \cdot 4 \mid (p-1)(p+1) \Rightarrow 8 \mid p^6 - 1$

НЗД $(p, 9) = 1$ јер $3 \nmid p$.

$$\underbrace{p^{\varphi(9)} \equiv 1}\quad (\mathrm{mod}\ 9)$$

$$\varphi(9) = \varphi(3^2) = 9\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\ \left(= 3^2 - 3^{2-1}\right)$$

$$= 9\cdot\frac{2}{3} = 6 \implies p^6 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 9)$$

$$\implies 9 \mid p^6 - 1.$$

$\square$

2° – Одреди остатак броја $9!\cdot 27! = x$ при дељењу са 333.

– Прво, $333 = 9\cdot 37$, 37 – прост број

$$9 \mid 9!,\ 9 \mid 27! \implies 9 \mid x \implies x \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 9)$$

– По Т Вилсона (на 37):

$$(37-1)! \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 37)$$

$$36! \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 37)$$

$$27!\cdot \underbrace{28}_{(-9)}\cdot \underbrace{29}_{(-8)}\cdot \underbrace{30}_{(-7)}\cdot \underbrace{31}_{(-6)}\cdot \underbrace{32}_{(-5)}\cdot \underbrace{33}_{(-4)}\cdot \underbrace{34}_{(-3)}\cdot \underbrace{35}_{(-2)}\cdot \underbrace{36}_{(-1)} \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 37)$$

$$\underbrace{(-1)^9}_{-1}\cdot 27!\cdot 9! \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 37)$$

$$x = 27!\cdot 9! \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 37)$$

– Добили смо систем:

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} x \equiv 0 & (\mathrm{mod}\ 9) \\ x \equiv 1 & (\mathrm{mod}\ 37) \end{cases}$$

$$x \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 9) \implies x = 9\cdot k$$

$$9k \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 37)\ /\cdot q,$$

$$9q \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 37)$$

$$\text{НЗД}(37, 9) = 1$$

$$9\cdot(-4) = -36 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 37)$$

$$\implies q = -4, \text{ односно}$$

$$k \equiv -4\ (\mathrm{mod}\ 37)$$

$$k \equiv 33\ (\mathrm{mod}\ 37)$$

$$x = 9k = 9(33 + 37\cdot s) = \boxed{9\cdot 33} + 333\cdot s$$

$$= 297$$

– остатак –

$\square$

3° – Одреди остатак броја $x = 317^{259}$ са 15.

$15 = 3\cdot 5$ и $3, 5 \nmid 317 \Rightarrow$ НЗД$(317, 15) = 1$.

– По Ⓣ Ојлера:

$$317^{\underbrace{\varphi(15)}} \equiv 1 \pmod{15}$$

$$\varphi(15) = 15\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 15\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = 4\cdot 2 = 8$$

– Следи: $317^8 \equiv 1 \pmod{15}$

– Поделимо 259 са 8 (са остатком):

• $259 = \underline{8\cdot 32} + 3$ •

$$317^{259} = 317^{8\cdot 32+3} = 317^{8\cdot 32}\cdot 317^3$$

$$= \underbrace{(317^8)}^{32}\cdot 317^3 \equiv 1^{32}\cdot 317^3 \pmod{15}$$

$$\equiv 317^3 \pmod{15}$$

$^3/\ 317 \equiv 2 \pmod{15}$ $(15\cdot 21 + 2 = 317)$

$$317^3 \equiv 2^3 \pmod{15}$$

$$317^3 \equiv 8 \pmod{15}$$

– Следи: $x \equiv 8 \pmod{15}$. □

4° – Одредити остатак при дељењу броја $x = \underbrace{(12!)^2} + \underbrace{22^{19^{12}}}$ са 143.

$$143 = \underbrace{11}\cdot\underbrace{13}$$

$$\left.\begin{aligned} 11 \mid 12! &\Rightarrow 11 \mid (12!)^2 \\ 11 \mid 22 &\Rightarrow 11 \mid 22^{19^{12}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 11 \mid x$$

13 – прост, па по Вилсону:

$$(13-1)! \equiv -1 \pmod{13}$$

$$12! \equiv -1 \pmod{13}$$

$$(12!)^2 \equiv 1 \pmod{13}.$$

– Тражимо још остатак броја $22^{19^{12}}$ при дељењу са 13.

$$НЗД(13, 22) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 22^{\varphi(13)} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\varphi(13) = 13 - 1 = 12$$

$$\Rightarrow \quad 22^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

- Тражимо остатак од 19^{12} са 12.

$$НЗД(12, 19) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 19^{\varphi(12)} \equiv 1 \pmod{12}$$

$$12 = \underline{2}^2 \cdot \underline{3}, \quad \varphi(12) = 12\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\varphi(12) = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4$$

$$19^4 \equiv 1 \pmod{12}$$

$$(19^4)^3 \equiv 1^3 \pmod{12}$$

$$19^{12} \equiv 1 \pmod{12}$$

$$19^{12} = 1 + 12 \cdot s$$

$$22^{19^{12}} = 22^{1 + 12 \cdot s} = 22 \cdot (22^{12})^s$$

$$\equiv \underbrace{22}_{9} \cdot 1 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow \quad 22^{19^{12}} \equiv 9 \pmod{13}$$

$$x = (12!)^2 + 22^{19^{12}} \equiv \underbrace{1 + 9}_{10} \pmod{13}$$

- Добијамо систем од 2 конгруенције:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{11} \\ x \equiv 10 \pmod{13} \end{cases}$$

$$x = 11 \cdot k$$

$$11 \cdot k \equiv 10 \pmod{13} \quad / \cdot 9, \ (!)$$

$$11 \cdot 9 \equiv \underline{1} \pmod{13}$$

$$НЗД(13, 11) = 1$$

$$13 = 1 \cdot 11 + 2$$
$$11 = 5 \cdot 2 + \boxed{1}$$
$$1 = 11 - 5 \cdot 2 = 11 - 5 \cdot (13 - 11)$$
$$1 = \underbrace{6}_{9} \cdot 11 + (-5) \cdot 13$$

– Следи: $k \equiv \underbrace{6 \cdot 10}_{8} \pmod{13}$

$$k = 8 + 13 \cdot s$$
$$x = 11 \cdot k = 11 \cdot (8 + 13 \cdot s) =$$
$$= \boxed{88} + 143 \cdot s$$
тражени остатак. $\square$

$$\boxed{11} \cdot k \equiv 10 \pmod{13} \ / \cdot 9$$
$$\underbrace{119}_{} \cdot k \equiv \underbrace{10 \cdot 9}_{} \pmod{13}$$
$$\equiv 1 \pmod{13}$$
$\square$

~ Исказна логика ~

$\top$ – тачно (пишемо и 1) } – Могуће истинитосне вредности –
$\bot$ – нетачно (пишемо и 0) }

– Исказ – реченица којој можемо одредити истинитосну вредност.
– Исказна слова – то је скуп градивних елемената реченица. $(p, q, r, s, t, \ldots)$
– Логичке операције:

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$,

$\neg$ – негација
$\wedge$ – логичко „И"
$\vee$ – логичко „ИЛИ"
$\underline{\vee}$ – ексклузивно „ИЛИ"

$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

$\Rightarrow$ – импликација
$\Leftrightarrow$ – еквиваленција

– (Исказна) <u>формула</u>: формула састављена од исказних слова, логичких операција и заграда.
– Циљ: утврдити тачност формуле за

дате истинитосне вредности исказних слова.
- За логичке операције:

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- Таутологија: формула која је увек тачна.
- Контрадикција: формула која је увек нетачна.

1° - Испитати да ли је формула

$$F = ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

- Таблични метод:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	F
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

- формула F јесте таутологија -

□

~ Ако имамо 3 исказна слова:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

□

– Корисна скраћивања:

$0 \wedge F = 0$ $\qquad$ $0 \vee F = F$

$1 \wedge F = F$ $\qquad$ $1 \vee F = 1$

$1 \Rightarrow F = F$ $\qquad$ $0 \Rightarrow F = 1$

$F \Rightarrow 1 = 1$ $\qquad$ $F \Rightarrow 0 = \neg F$

$1 \Leftrightarrow F = F$ $\qquad$ $0 \Leftrightarrow F = \neg F$

$\square$

~ Острва (примена исказне логике)

– Посматрамо острво, и на њему 4 врсте племена.

1° Истинозборци: они увек говоре истину

2° Лажови: они увек лажу

3° Шпијуни: Говоре истину свом племену, остале лажу

4° Агенти: Лажу своје племе, осталима говоре истину.

– Ситуација: посматрамо острво са 2 племена. Особе A, B разговарају. A каже реченицу p особи B

– Занима нас истинитосна вредност исказа p, зависно од тога у ком су племену особе A, B.

$\boxed{1°}$ Острво истинозборац и лажова

a	b	p
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

a – „A је истинозборац"
b – „B је истинозборац"

– На овом острву важи:

$$(a \Leftrightarrow p) = 1$$

– Особа A изговара реченицу p особи B –

– Исказ $a \Leftrightarrow p$ је тачан-

- Пример: A изговара особи B (писаћемо $A \to B$) $\underbrace{\text{C је лажов или је D лажов.}}_{}$

$$p = \neg c \vee \neg d$$

$$(a \Leftrightarrow (\neg c \vee \neg d)) = 1$$

- Исказ $a \Leftrightarrow (\neg c \vee \neg d)$ је тачан - $\square$

$\boxed{2^\circ}$ Острво Шпијуна/Лажова:

$\underline{a}$: „A је Шпијун"

($\neg a$: „A је Лажов")

- У реч: A изговара реченицу особи B - p

$$(a \wedge b \Leftrightarrow p) = 1$$

a	b	p
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$a \wedge b$

$\square$

$\boxed{3^\circ}$ Истинозборци/Дупли агенти

a: „A је Истинозборац"

$$((a \vee b) \Leftrightarrow p) = 1$$

$\boxed{4^\circ}$ Истинозборци / Шпијуни

a: „A је Истинозборац"

$$((\underline{b} \Rightarrow a) \Leftrightarrow p) = 1$$

$\boxed{5^\circ}$ Северни / Јужни Шпијуни

a: „A је Северни Шпијун"

$$((a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow p) = 1$$

$\boxed{6^\circ}$ Северни/Јужни Дупли агенти

a: „A је Северни дупли агент"

$$\left((a \veebar b) \Leftrightarrow p \right) = 1$$

7° Шпијуни / Дупли агенти

a : „A - Шпијун"

$$(b \Leftrightarrow p) = 1$$

8° Лажови / Дупли агенти

a : „A је лажов"

$$((\neg a \wedge b) \Leftrightarrow p) = 1$$

1° – Налазимо се на острву Шпијуна и Лажова.

1) A каже особи B: „Ако је C лажов, H је Шпијун"

2) B каже особи C: „Ако је F шпијун, A је лажов"

3) C каже особи D: „Ако је A лажов, B је лажов".

4) E каже особи F: „Ако је B лажов, C је Шпијун"

5) F каже особи G: „Или је D шпијун, или је A лажов". Ово је $\veebar$

– Испитати ком племену припадају особе A, B, C, D, E, F, G, H.

x - „X је Шпијун"

$\neg x$ - „X је лажов"

– формирамо логичке формуле:

1) $((a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg c \Rightarrow h)) = 1$

2) $((b \wedge c) \Leftrightarrow (f \Rightarrow \neg a)) = 1$

3) $((c \wedge d) \Leftrightarrow (\neg a \Rightarrow \neg b)) = 1$

• 4) $((e \wedge f) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow c)) = 1$

• 5) $((f \wedge g)) \Leftrightarrow (d \veebar \neg a)) = 1$

– Радимо дискусију по словима. Најбоље почети од слова које се највише појављује.

1° $a = 0$

$a \wedge b = 0 \wedge b = 0$

па је из $\boxed{1)}$ $(0 \Leftrightarrow (\neg c \Rightarrow h)) = 1$

па је $(\neg c \Rightarrow h) = 0$ то је $\neg c = 1$, $h = 0$

односно $c = 0$, $h = 0$.

$b \wedge c = b \wedge 0 = 0$

па је из 2) $(0 \Leftrightarrow f \Rightarrow \neg a) = 1$,

па је $(f \Rightarrow \neg a) = 0$, па је $f = 1$, $\neg a = 0$

односно $a = 1$ што је контрадикција

(лишемо ↯) са претпоставком $a = 0$.

– Дакле, ако је $a = 0$, нема решења.

$\square$

2° $a = 1 \Rightarrow \neg a = 0$

$\neg a = 0$, следи да је $(\neg a \Rightarrow \neg b) = 1$

па је из 3) $((c \wedge d) \Leftrightarrow (\neg a \Rightarrow \neg b)) = 1$,

односно $((c \wedge d) \Leftrightarrow 1) = 1$, па је

$c \wedge d = 1$ па је $c = 1, d = 1$. Пошто је

$c = 1$, то је $(\neg b \Rightarrow c) = 1$ па је из 4):

$((e \wedge f) \Leftrightarrow (1)) = 1$, па је

$e \wedge f = 1$ па је $e = 1$, $f = 1$.

$d = 1$, $\neg a = 0$ па је $d \veebar \neg a = 1$, па је из 5) : $((f \wedge g) \Leftrightarrow (1)) = 1$

односно $f \wedge g = 1 \Rightarrow f = 1, g = 1$

$(f \Rightarrow \neg g) = (1 \Rightarrow 0) = 0$, па

из 2) имамо :

$((b \wedge c) \Leftrightarrow 0) = 1$, односно

$b \wedge c = 0$ односно $(c = 1)$ то је $b = 0$.

– Из 1) $(((a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg c \Rightarrow k)) = 1)$

имамо $((1 \wedge 0) \Leftrightarrow (\neg 1 \Rightarrow k)) = 1$

$(0 \Leftrightarrow (0 \Rightarrow k)) = 1$

– Пошто је $(0 \Rightarrow k) = 1$, то

не може бити $(0 \Leftrightarrow 1) = 1$

па овде нема решења. $\square$

(2)

– Налазимо се на острву Северних и Јужних шпијуна.

1) A каже особи B : „F је Јужни и C је Јужни шпијун"

2) B каже особи C : „E и F нису из истог племена" $\}$ $\veebar$ – Да је писало једу из истог племена, онда је $\Leftrightarrow$.

3) C каже особи D : „A и B су Северни шпијуни"

4) D каже особи E : „A и F су Северни шпијуни".

x – „X је Северни шпијун"

– Испитати којем племену припадају особе A, B, C, D, E, F.

1) $((a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg c \wedge \neg f)) = 1$

2) $((b \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow (e \veebar f)) = 1$

3) $((c \Leftrightarrow d) \Leftrightarrow (a \wedge b)) = 1$

4) $((d \Leftrightarrow e) \Leftrightarrow (a \wedge f)) = 1$

1° $a = 0$

$a \wedge b = 0 \wedge b = 0$, па је из 3):

$((c \Leftrightarrow d) \Leftrightarrow 0) = 1$ односно

$(c \Leftrightarrow d) = 0$ односно c, D нису из истог племена.

$a \wedge f = 0 \wedge f = 0$, па је из 4):

$((d \Leftrightarrow e) \Leftrightarrow 0) = 1$ односно

$((d \Leftrightarrow e)) = 0$ односно D, E нису из истог племена.

– Сада гледамо 2 случаја:

1°) $d = 1 \Rightarrow e = 0,\ c = 0$

• $f = 0$:

– Из прве једначине:

$(0 \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow \underbrace{(1 \wedge 1)}_{1} = 1$

$\Rightarrow (0 \Leftrightarrow b) = 1$

$\Rightarrow b = 0.$

$((0 \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow (0 \veebar 0)) = 1$

$(1 \Leftrightarrow 0) = 1$, што је контрадикција. ↯

• $f = 1$

– Из прве:

$((0 \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (0 \wedge 1)) = 1$

$((0 \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow 0) = 1$

односно $(0 \Leftrightarrow b) = 0$

односно $b = 1$.

– Убацимо у другу:

$((1 \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow (0 \veebar 1)) = 1$

$(0 \Leftrightarrow 1) = 1$, што није тачно.

2°) $d = 0 \Rightarrow e = 1, \ c = 1.$

– Прва једначина:

$$((0 \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg c \wedge 0)) = 1$$

$\neg c \wedge 0 = 0$, па је:

$$((0 \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow 0) = 1, \text{ па је}$$

$(0 \Leftrightarrow b) = 0$ па је $b = 1$.

– Друга једначина:

$$((1 \Leftrightarrow 1) \Leftrightarrow (1 \veebar f)) = 1$$

односно $(1 \Leftrightarrow (1 \veebar f)) = 1$

односно $(1 \veebar f) = 1$, одакле је $f = 0$.

– Имамо решење:

$$\boxed{a = 0, \ b = 1, \ c = 1, \ d = 0, \ e = 1, \ f = 0}$$

□

2°) $\underline{a = 1}$

– Гледамо шта добијамо:

$$\begin{cases} 1) & (\overset{b}{(1 \Leftrightarrow b)} \Leftrightarrow (\neg f \wedge \neg c)) = 1 \\ 2) & ((b \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow (e \veebar f)) = 1 \\ 3) & ((c \Leftrightarrow d) \Leftrightarrow \overset{b}{(1 \wedge b)}) = 1 \\ 4) & ((d \Leftrightarrow e) \Leftrightarrow \underset{f}{(1 \wedge f)}) = 1 \end{cases}$$

– Радимо дискусију по b.

1°) $b = 1$, $(1 \Leftrightarrow (\neg f \wedge \neg c)) = 1$ из 1)

односно $\boxed{\neg f \wedge \neg c = 1}$ односно $\neg f = 1, \neg c = 1$,

односно $f = 0, \ c = 0$. Из 3),

$1 \wedge b = 1 \wedge 1 = 1$, односно:

$$((c \Leftrightarrow d)) \Leftrightarrow 1 = 1$$

односно $(c \Leftrightarrow d) = 1$ па мора је

$c = 0$, $d = 0$. Из $\underline{2)}$:

$$((1 \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow (e \veebar f)) = 1$$

$$(0 \Leftrightarrow (e \veebar f)) = 1$$

односно $(e \veebar f) = 0$, односно

e, f су из истог племена.

– Из $\underline{4)}$:

$$((0 \Leftrightarrow e) \Leftrightarrow f) = 1.$$

• $e = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow (1 \Leftrightarrow 0) = 1$ ↯

• $e = 1 \Rightarrow (0 \Leftrightarrow 1) = 1$, ↯

– Дакле, овде нема решења. □

2°) $b = 0$:

– Тражимо дискусију $f = 0$, $f = 1$

што можете за домаћи.

$$\begin{cases} 1) & 0 \Leftrightarrow (\neg f \wedge \neg c) = 1 \\ 2) & (0 \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow (e \veebar f) = 1 \\ 3) & (c \Leftrightarrow d) \Leftrightarrow 0 = 1 \\ 4) & (d \Leftrightarrow e) \Leftrightarrow f = 1 \end{cases}$$

– Из $\underline{1)}$, $\neg f \wedge \neg c = 0$, па зато

мора дискусија по f. За $f = 0$,

$\neg f = 1$ односно $1 \wedge \neg c = 0 \Rightarrow \neg c = 0$

$\Rightarrow c = 1$. Из $\underline{2)}$, $(0 \Leftrightarrow c) = (0 \Leftrightarrow 1) = 0$

$(0 \Leftrightarrow (e \veebar 0)) = 1$ па је $e \veebar 0 = 0$,

па је $e = 0$. Из $\underline{3)}$, $(c \Leftrightarrow d) = 0$,

$c = 1 \Rightarrow d = 0$, $d, e = 0 \Rightarrow (d \Leftrightarrow e) = 1 \Rightarrow (1 \Leftrightarrow 0) = 0$ ↯

$a \sim b \iff (a^2 - b^2)(a^2b^2 - 16) = 0$

– Тражимо класе еквиваленције –

фиксирамо $a \in \mathbb{R}$.

$$[a] = \{ b \in \mathbb{R} \mid a \sim b \}$$

$$= \{ b \in \mathbb{R} \mid (a^2 - b^2)(a^2b^2 - 16) = 0 \}$$

$$(a^2 - b^2)(a^2b^2 - 16) = 0$$

$$\iff \underbrace{(a-b)(a+b)}_{a^2 - b^2} \cdot \underbrace{(ab-4)(ab+4)}_{a^2b^2 - 4^2} = 0$$

$\iff a - b = 0$ или $a + b = 0$

или $ab - 4 = 0$ или $ab + 4 = 0$

$\iff a = b$ или $-a = b$, $ab = 4$, $ab = -4$

$b = \frac{4}{a}$, $b = -\frac{4}{a}$

(за $a \neq 0$)

– За $a = 0$, $[0] = \{0, -0\} = \{0\}$

– За $a \neq 0$, $[a] = \{a, -a, \frac{4}{a}, -\frac{4}{a}\}$

$$\mathbb{R}/_\sim = \{ [a] \mid a \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \{0\}, \{a, -a, \tfrac{4}{a}, -\tfrac{4}{a}\} \mid a \neq 0 \}$$

$\square$