Neodređeni integrali

1. Primitivna funkcija

Definicija 1. Data je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ *primitivna funkcija* funkcije f na intervalu (a, b) ako je F diferencijabilna na (a, b) i ako važi $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a, b)$.

Primer 2. Pronaći primitivnu funkciju funkcija:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   $F'(x) = f(x) = 0 \implies F(x) = c, c \in \mathbb{R}.$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   $F'(x) = f(x) = 3x^2 \implies F(x) = x^3 + c, c \in \mathbb{R}.$
   Moguće funkcije: $F_1(x) = x^3, \quad F_2(x) = x^3 + \sqrt{3}, \quad F_3(x) = x^3 - 505$ itd.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   $F'(x) = f(x) = e^x \implies F(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}.$

d) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$
   $F'(x) = f(x) = \frac{1}{x} \implies F(x) = \ln |x| + c, c \in \mathbb{R}.$

Tvrđenje 3. Ako je $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, onda je i svaka funkcija oblika $F(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f.

Dokaz Za neku primitivnu funkciju F funkcije f i za proizvoljan $c \in \mathbb{R}$ posmatrajmo funkciju $G : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$. Pošto je F diferencijabilna na (a, b), sledi da je i G diferencijabilna na (a, b) i važi:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Dakle, G je primitivna funkcija funkcije f.

Tvrđenje 4. Neka su $F_1, F_2 : (a, b) \to \mathbb{R}$ primitivne funkcije funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tada postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $F_1(x) = F_2(x) + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dokaz Za funkciju f imamo dve njene primitivne funkcije $F_1'(x) = f(x)$ i f: $F_2'(x) = f(x)$. Posmatrajmo funkciju $G : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad G(x) = F_1(x) - F_2(x), \quad \forall x \in (a, b)$. Pošto su F_1 i F_2 diferencijabilne na (a, b), sledi da je i G diferencijabilna na (a, b) i važi:

$$G'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Iz ovoga sledi da je funkcija G konstantna na intervalu (a, b), tj. postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x) = c, \quad \forall x \in (a, b)$.

Definicija 5. Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ označavamo sa $\int f(x)\,dx$ i nazivamo ga *neodređeni integral* funkcije f. Dakle,

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\},$$

gde je $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ neka primitivna funkcija funkcije f.

Tablica integrala:	
$\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ x \in (0,+\infty)\quad \int x^\alpha\,\mathrm{dx}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$
$n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}\quad \int x^n\,\mathrm{dx}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$
$n \in \mathbb{N}\setminus\{1\},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\quad \int x^{-n}\,\mathrm{dx}$	$\frac{1}{1-n}x^{1-n}+C_1,\ x \in (-\infty,0)$ $\frac{1}{1-n}x^{1-n}+C_2,\ x \in (0,+\infty)$
$x \in \mathbb{R}\quad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx}$	$\ln\lvert x\rvert + C_1,\ x \in (-\infty,0)$ $\ln\lvert x\rvert + C_2,\ x \in (0,+\infty)$
$a>0,\ a\neq 1,\ x \in \mathbb{R}\quad \int a^x\,\mathrm{dx}$	$\frac{1}{\ln a}a^x+C$
$x \in \mathbb{R}\quad \int \sin x\,\mathrm{dx}$	$-\cos x + C$
$x \in \mathbb{R}\quad \int \cos x\,\mathrm{dx}$	$\sin x + C$
$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3\pi}{2}+k\pi\right)\quad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{dx}$	$\operatorname{tg} x + C_k,\ x \in \left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$
$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi, \pi+k\pi)\quad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{dx}$	$-\operatorname{ctg} x + C_k,\ x \in (k\pi, \pi+k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$
$x \in (-1,1)\quad \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\,\mathrm{dx}$	$\arcsin x + C$
$x \in \mathbb{R}\quad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{dx}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\quad \int x^0\,\mathrm{dx}$	$x + C_1,\ x \in (-\infty,0)$ $x + C_2,\ x \in (0,+\infty)$

Tvrđenje 6. Linearnost neodređenog integrala. Neka su $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funkcije koje imaju primitivne funkcije na intervalu (a,b). Tada i $\lambda f(x) + \mu g(x)$ ima primitivnu funkciju na intervalu (a,b) za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i važi:

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx.$$

Dokaz Neka su F i G primitivne funkcije funkcija f i g, redom. Hoćemo da pokažemo da je funckija $\lambda F + \mu G$ primitivna za $\lambda f + \mu g$.

$$\begin{aligned}(\lambda F(x) + \mu G(x))' &= \lambda F'(x) + \mu G'(x) = \lambda f(x) + \mu g(x).\\ &= \int (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda F(x) + \mu G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\\ &= \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Tvrđenje 7. Parcijalna integracija. Neka su $u, v : (a,b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije na intervalu (a,b). Tada važi:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Dokaz

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Zatim integral sa obe strane:

$$\int (u(x)v(x))'\,dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$$

Izdvajamo:$\int u(x)v'(x)dx$:

$$\begin{aligned}\int u(x)v'(x)\,dx &= \int (u(x)v(x))'\,dx - \int u'(x)v(x)\,dx\\ &= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Primer 8.

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \left\{\begin{array}{l} u(x) = \log x \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \;\Rightarrow\; v(x) = x \end{array}\right\}\\ &= uv - \int v\,du\\ &= x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= x\log x - \int dx\\ &= x\log x - x + c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Primer 9.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} &= \left\{\begin{array}{l} u = e^x \;\Rightarrow\; du = e^x\,dx \\ dv = \cos x\,dx \;\Rightarrow\; v = \sin x \end{array}\right\}\\ &= e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx\\ &= e^x\sin x - \int \underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = \left\{\begin{array}{l} u = e^x \;\Rightarrow\; du = e^x\,dx \\ dv = \sin x\,dx \;\Rightarrow\; v = -\cos x \end{array}\right\}\\ &= e^x\sin x - \left(-e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx\right)\end{aligned}$$

Ovde uvodimo oznaku $I = \int e^x\cos x\,dx$ pošto se ponavlja isti integral kao početni:

$$\begin{aligned}I &= e^x\sin x + e^x\cos x - I\\ 2I &= e^x(\sin x + \cos x)\\ I &= \frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Tvrđenje 10. Neka je data funkcija $f : (a,b)\to\mathbb{R}$ i njena primitivna funkcija $F : (a,b)\to\mathbb{R}$. Ako je funkcija $\rho : (\alpha,\beta)\to(a,b)$ diferencijabilna na intervalu (α,β), tada važi:

$$\int f(\rho(x))\cdot\rho'(x)\,dt = F(\rho(x)) + c, \quad c\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Dokaz Proverimo da li je izvod funkcije $F(\rho(x)) + C$ jednak funkciji $f(\rho(t))\cdot\rho'(t)$ (tj. funckiji pod integralom):

$$(F(\rho(x)) + C)' = (F\circ\rho)'(x) = F'(\rho(x))\cdot\rho'(x) = f(\rho(x))\cdot\rho'(x) = (1)$$

Primer 11.

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{x+3} = \left\{ \begin{array}{l} t = x+3, \quad dt = dx, \quad x > -3 \\ \text{ili } x < -3, \quad dt = dx \end{array} \right\}$$
$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x+3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Primer 12.

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{dx} = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+x^3, \\ dt = 3x^2\,dx, \\ dt \cdot \frac{1}{3} = x^2\,dx. \end{array} \right\}$$
$$= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3} \cdot dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + c = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. Tehnike integracija

1. $\int \sin^n(x) \cdot \cos^m(x)\, dx$

   - $n = 2k+1$, odnosno za neparno n važi:
   $$\int (\sin^2(x))^k \cdot \sin(x) \cdot \cos^m(x)\, \mathrm{dx} = \int (1-\cos^2(x))^k \cdot \sin(x) \cdot \cos^m(x)\, \mathrm{dx}$$
   Koristimo smenu $t = \cos(x)$, $dt = -\sin(x)\, dx$.
   - $m = 2l+1$, odnosno za neparno m važi:
   $$\int \sin^n(x) \cdot (\cos^2(x))^l \cdot \cos(x)\, \mathrm{dx} = \int \sin^n(x) \cdot (1-\sin^2(x))^l \cdot \cos(x)\, \mathrm{dx}$$
   Koristimo smenu $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x)\, dx$.
   - $n = 2k$ i $m = 2l$, odnosno kada su nam i m i n parni, svodimo na niži stepen koristeći formule:
   $$cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x), \quad cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}, \quad sin^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$$

2.
   - $\int (\sin(ax) \cdot \cos(bx))\, dx$
   - $\int (\sin(ax) \cdot \sin(bx))\, dx$
   - $\int (\cos(ax) \cdot \cos(bx))\, dx$
   Koristimo formule:
   $$\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$
   $$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
   $$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

3. $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, \mathrm{dx}$

4. $\int R(\sin x, \cos x)\, dx = I$

   Ovo je integral racionalne funkcije koja u brojiocu i u imeniocu ima polinom po $\sin(x), \cos(x)$
   Koristi se smena:
   $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

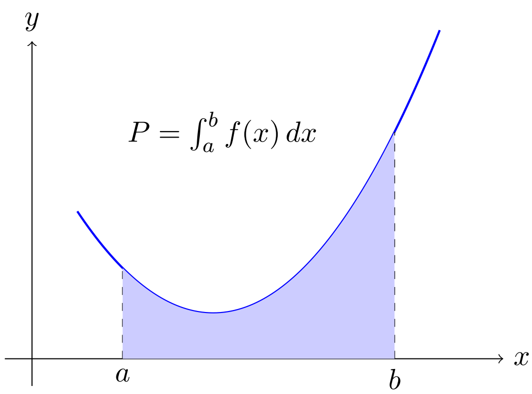
5. $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx = I$
   Koristi se smena $x = \frac{1}{\cos(t)}$, $\cos(t) = \frac{1}{x}$, $t = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$, $dx = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}dt$, $\sqrt{x^2-1} = \tan(t)$.

6. $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\, dx = I$
   Koristi se smena $x = \tan(t)$, $\tan(t) = x$, $t = \arctan(x)$, $dx = \frac{1}{\cos^2(t)}dt$, $\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\cos(t)}$.

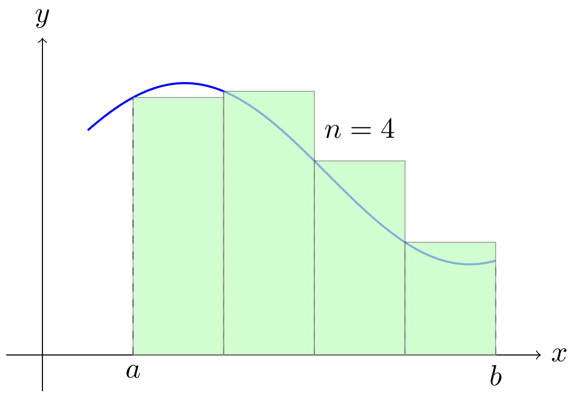
7. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\, dx$

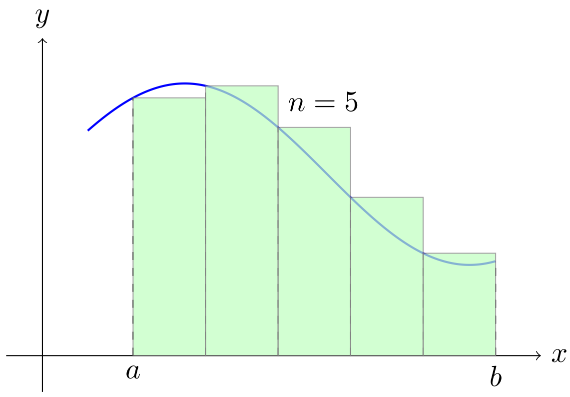
   Koristi se smena $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Određeni integrali

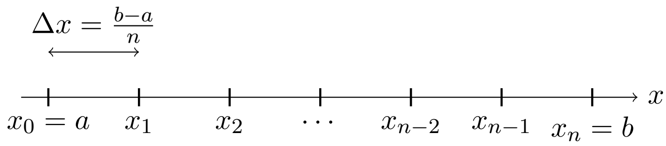


Neodređeni integral funkcije f je definisan preko izvoda, dok je određeni integral funkcije f definisan pomoću limesa niza.





U n-tom koraku podelimo interval $[a, b]$ na n jednakih delova.



Sada ćemo da definišemo podeone tačke intervala $[a, b]$

$$x_0 = a < x_1 = a + \frac{b-a}{n} < x_2 = a + \frac{2 \cdot (b-a)}{n} < \cdots < x_{n-1} = a + \frac{(n-1) \cdot (b-a)}{n} < x_n = b$$

a