1. $x_1 = x > 5$, $x_{n+1} = \frac{25 + x_n^2}{10}$

а) Покажемо $x_n > 5$ за свако $n \in \mathbb{N}$ математичком индукцијом.

база $n=1$: $x_1 = x > 5$ по услову задатка ✓

индуктивни корак: $x_n > 5 \Rightarrow x_n^2 > 25 \Rightarrow 25 + x_n^2 > 50 \Rightarrow \frac{25+x_n^2}{10} > 5$

$\Rightarrow x_{n+1} > 5$ ✓✓

Испитујемо монотоност низа:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{25 + x_n^2}{10} - x_n = \frac{25 + x_n^2 - 10x_n}{10} = \frac{(x_n - 5)^2}{10} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ овај низ је строго растући, па ако је ограничен одозго имаће коначан лимес, у супротном ће тежити ка $+\infty$.

Претпоставимо да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$.

$$x_{n+1} = \frac{25 + x_n^2}{10} \quad \Big| \lim_{n\to\infty}$$

$$l = \frac{25 + l^2}{10} \quad \Big| \cdot 10$$

$$l^2 + 25 - 10l = 0$$

$$(l-5)^2 = 0$$

$$l = 5$$

Пошто је први члан низа $x_1$ строго већи од 5 и низ строго расте, не може бити $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$. Зато важи друга опција тј. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

б) Уочимо два „проблематична" низа: $(-1)^n$ и $\sin\frac{2n\pi}{3}$.

За први имамо $(-1)^n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k+1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}_0$, а за други

$\sin\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, & n = 3k+1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & n = 3k+2 \\ 0, & n = 3k \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}_0$, па како је НЗД$(2,3) = 6$, посматраћемо поднизове $(a_{6k})$, $(a_{6k+1})$, $(a_{6k+2})$, $(a_{6k+3})$, $(a_{6k+4})$ и $(a_{6k+5})$, где је $a_n = x_n^{(-1)^n} \cdot \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n} + \sin\frac{2n\pi}{3}$.

Приметимо прво да је

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{2n+3}\right)^{\frac{3n}{2n+3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{3n}{2n+3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+3}} = e^{\frac{3}{2}}, \text{ тј. низ } \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n}$$

конвергира ка $e^{\frac{3}{2}}$ независно од тога да ли је $n=6k$, $n=6k+1$ итд.

<u>$n=6k$:</u> $(-1)^n = 1$, $\sin\frac{2n\pi}{3} = 0 \Rightarrow a_n = x_n \cdot \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n} = +\infty \cdot e^{\frac{3}{2}} = +\infty$$

<u>$n=6k+1$:</u> $(-1)^n = -1$, $\sin\frac{2n\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_n = x_n^{-1} \cdot \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n} + \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$$= \frac{1}{x_n} \cdot \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x_n}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{n}}_{\downarrow\, e^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \cdot e^{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

<u>$n=6k+2$:</u> $(-1)^n = 1$, $\sin\frac{2n\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_n = x_n \cdot \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n} - \frac{\sqrt{3}}{2} = +\infty \cdot e^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = +\infty$$

<u>$n=6k+3$:</u> $(-1)^n = -1$, $\sin\frac{2n\pi}{3} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{1}{x_n} \cdot \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n} = \underbrace{\frac{1}{+\infty}}_{=0} \cdot e^{\frac{3}{2}} = 0$$

$\underline{n=6k+4:}$ $(-1)^n=1$, $\sin\frac{2n\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow a_n = x_n\cdot\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n}+\frac{\sqrt{3}}{2} = +\infty\cdot e^{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2} = +\infty$$

$\underline{n=6k+5:}$ $(-1)^n=-1$, $\sin\frac{2n\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow a_n = \frac{1}{x_n}\cdot\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{3n}-\frac{\sqrt{3}}{2} = \underbrace{\frac{1}{+\infty}}_{=0}\cdot e^{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow T_n = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right\}.$$

2. a) $f$ је непрекидна на $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ као композиција непрекидних и добро дефинисаних функција, па треба још испитати непрекидност у тачкама 0 и 1.

Да би $f$ била непрекидна у $x=0$, мора бити

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x).$$

$$\left(\sqrt{1-4x}=(1-4x)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\frac{e^{\sin x}-\ln(1-x)+\sqrt{1-4x}-2\cos x}{x^2} =$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{x+o(x^2)}-\left(-x-\frac{(-x)^2}{2}+o(x^2)\right)+\left(1+\frac{1}{2}\cdot(-4x)+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\cdot(-4x)^2+o(x^2)\right)-2\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{\left(1+(x+o(x^2))+\frac{1}{2}(x+o(x^2))^2+o(x^2)\right)+x+\frac{x^2}{2}+1-2x-\frac{1}{8}\cdot 16x^2-2+x^2+o(x^2)}{x^2} =$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{\frac{1}{2}x^2}+o(x^2)+\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+\cancel{1}-\cancel{2x}-\cancel{2x^2}-\cancel{2}+\cancel{x^2}+o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0-}\frac{o(x^2)}{x^2} = 0.$$

$$f(0) = \sqrt[3]{0^2 - 0} - \alpha = -\alpha$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \sqrt[3]{x^2 - x} - \alpha = \sqrt[3]{0^2 - 0} - \alpha = -\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\alpha = -\alpha$$

$\Rightarrow$ $\underline{\alpha = 0}$ да би $f$ била непр. у нули

Да би $f$ била непр. у $x=1$, мора важити

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1+} f(x).$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \sqrt[3]{x^2 - x} - \alpha = \sqrt[3]{1^2 - 1} - 0 = 0$$

$$f(1) = \sqrt[3]{1^2 - 1} - \alpha = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} |x-1| \cdot \sin\frac{\pi}{x-1} = \lim_{x \to 1+} (x-1) \cdot \sin\frac{\pi}{x-1} = \begin{pmatrix} t = x-1 \\ t \to 0+ \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{t \to 0+} \underbrace{t}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{t}}_{[-1,1] \text{ па је ограничено}} = 0 \quad (0 \cdot \text{ограничено} = 0)$$

$\Rightarrow$ за $\alpha = 0$ видимо да је $f$ непр. и у $x=1$

Дакле, $\alpha = 0$ и $f$ је онда непрекидна на целом $\mathbb{R}$.

б) $f$ је диференцијабилна на $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$ као композиција диференцијабилних ф-ја. Треба још испитати диференцијабилност у тачкама $x=0$ и $x=1$.

Да би $f$ била диференцијабилна у $x=0$, леви и десни изводи $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$ морају бити коначни и једнаки.

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt[3]{h^2-h}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \sqrt[3]{\frac{h^2-h}{h^3}} = \lim_{h\to 0+} \sqrt[3]{\frac{h-1}{h^2}} = \sqrt[3]{\frac{-1}{0+}} = -\infty \text{, па-}$$

пошто $f'_+(0)$ није коначан број, $f$ није диференцијабилна у $x=0$.

Да би $f$ била диференцијабилна у $x=1$, леви и десни изводи $f'_+(1)$ и $f'_-(1)$ морају бити коначни и међусобно једнаки.

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\sqrt[3]{(1+h)^2-(1+h)}-0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{\sqrt[3]{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}-h}}{h} = \lim_{h\to 0-} \sqrt[3]{\frac{h^2+h}{h^3}} = \lim_{h\to 0-} \sqrt[3]{\frac{h+1}{h^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-3}{0+}} = -\infty$$ што није коначан број, па $f$ није диференцијабилна ни у тачки $x=1$.

Дакле, $f$ је диференцијабилна на скупу $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

3. $f(x) = \ln\left|\frac{x+3}{1-x}\right|$

a) 1) домен

$1-x \neq 0$ и $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 0$

$x \neq 1$ $\quad$ $x+3 \neq 0$

$x \neq -3$

$$D_f = (-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty)$$

2) нуле и знак

$f(x)=0 \iff \ln\left|\frac{x+3}{1-x}\right| = 0 \iff \left|\frac{x+3}{1-x}\right| = 1$

Испитаћемо знак израза $\frac{x+3}{1-x}$ како бисмо се ослободили апсолутне вредности.

$$x \in (-\infty, -3): \quad \frac{\overset{<0}{x+3}}{\underset{>0}{1-x}} < 0$$

$$x \in (-3, 1): \quad \frac{\overset{>0}{x+3}}{\underset{>0}{1-x}} > 0$$

$$x \in (1, +\infty): \quad \frac{\overset{>0}{x+3}}{\underset{<0}{1-x}} < 0$$

$$\left|\frac{x+3}{1-x}\right| = \begin{cases} \frac{x+3}{1-x}, & x \in (-3,1) \\ -\frac{x+3}{1-x} = \frac{x+3}{x-1}, & x \in (-\infty,-3) \cup (1,+\infty) \end{cases}$$

Зато је

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{x+3}{1-x}, & x \in (-3,1) \\ \ln \frac{x+3}{x-1}, & x \in (-\infty,-3) \cup (1,+\infty) \end{cases}$$

Вратимо се на $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| = 1$.

1° $x \in (-3,1)$

$$\frac{x+3}{1-x} = 1$$

$$x+3 = 1-x$$

$$x = -1 \in (-3,1)$$

јесте нула фје $f$

2° $x \in (-\infty,-3) \cup (1,+\infty)$

$$\frac{x+3}{x-1} = 1$$

$$x+3 = x-1$$

$$4 = 0 \ ↯$$

Дакле, једина нула од $f$ је $x=-1$.

Scanned with CamScanner

$f(x)>0 \iff \ln\left|\frac{x+3}{1-x}\right|>0 \iff \left|\frac{x+3}{1-x}\right|>1$

1° $x\in(-3,1)$

$\frac{x+3}{1-x}>1 \quad /-1$

$\frac{x+3}{1-x}-\frac{1-x}{1-x}>1$

$\frac{2x+2}{1-x}>0 \quad /:2$

$\frac{x+1}{1-x}>0$

2° $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

$\frac{x+3}{x-1}>1 \quad /-1$

$\frac{x+3}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}>0$

$\frac{4}{x-1}>0$

$x-1>0$

$x>1$

$\underline{x\in(1,+\infty)}$

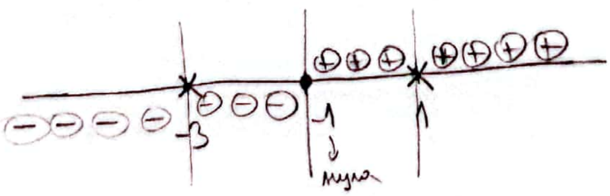
$(x+1>0$ и $1-x>0)\ \vee\ (x+1<0$ и $1-x<0)$

$(x>-1$ и $x<1)\ \vee\ (x<-1$ и $x>1)$

$\underline{x\in(-1,1)}$ што јесте унутар $(-3,1)$

$\Rightarrow f(x)>0$ за $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$

а онда преостаје $f(x)<0$ за $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,-1)$.




3) f није ни парна ни непарна ни периодична (домен није симетричан у односу на нулу и има тачка (једну нулу)).

4) непрекидност и диференцијабилност

f је непр. на целом домену као композиција непр. f

$$f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{x+3}{1-x}, & x\in(-3,1)\\[2ex] \ln\dfrac{x+3}{x-1}, & x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x+3}{1-x}}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(x+3)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{\cancel{1-x}}{x+3}\cdot\frac{1-x+x+3}{(1-x)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{4}{(x+3)(1-x)}\quad,\ x\in(-3,1)$$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x+3}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+3}{x-1}\right)'=\frac{\cancel{x-1}}{x+3}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-(x+3)\cdot 1}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{x-1-x-3}{(x+3)(x-1)}=$$

$$=-\frac{4}{(x+3)(x-1)}=\frac{4}{(x+3)(1-x)}\quad,\ x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$$

$$\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{4}{(x+3)(1-x)}\quad \text{за све } x\in D_f$$

па је $f$ диференцијабилна на целом домену

5) монотоност и локални екстремуми

$$f'(x)=\frac{4}{(x+3)(1-x)}$$

$x\in(-\infty,-3)$: $\quad x+3<0,\ 1-x>0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow$

$x\in(-3,1)$: $\quad x+3>0,\ 1-x>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow$

$x\in(1,+\infty)$: $\quad x+3>0,\ 1-x<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow$

$\Rightarrow$ $f$ расте на $(-3,1)$, а опада на $(-\infty,-3)$ и на $(1,+\infty)$

нема локалних екстремума, јер $1, -3 \notin D_f$.

6) конвексност / конкавност и превојне тачке

$$f''(x) = \left(\frac{4}{(x+3)(1-x)}\right)' = -4 \cdot \frac{1}{(x+3)^2(1-x)^2} \cdot \left((x+3)(1-x)\right)' =$$

$$= -\frac{4}{(x+3)^2(1-x)^2} \cdot \left(1 \cdot (1-x) + (x+3)\cdot(-1)\right) = -\frac{4(1-x-x-3)}{(x+3)^2(1-x)^2} =$$

$$= -\frac{4(-2x-2)}{(x+3)^2(1-x)^2} = \frac{8(x+1)}{\underbrace{(x+3)^2(1-x)^2}_{>0}}$$

за $x<-1$ је $f''(x)<0$, па је $f$ конкавна на $(-\infty,-1)$

за $x>-1$ је $f''(x)>0$, па је $f$ конвексна на $(-1,+\infty)$

$f(-1)=0 \Rightarrow x=-1$ превојна тачка.

7) асимптоте

Кандидати за вертикалне асимптоте су праве $x=-3$ и $x=1$.

$$\lim_{x\to -3-} f(x) = \lim_{x\to -3-} \ln\frac{x+3}{x-1} = \ln\frac{0-}{-4} = \ln(0+) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -3+} f(x) = \lim_{x\to -3+} \ln\frac{x+3}{1-x} = \ln\frac{0+}{4} = \ln(0+) = -\infty$$

$\Rightarrow x=-3$ је вертикална асимптота са обе стране

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \ln\frac{x+3}{1-x} = \ln\frac{4}{0+} = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \ln\frac{x+3}{x-1} = \ln\frac{4}{0+} = \ln(+\infty) = +\infty$$

$\Rightarrow x=1$ је вертикална асимптота са обе стране

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln\frac{x+3}{x-1} = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x-1}\right) = \ln(1+) = 0+$$

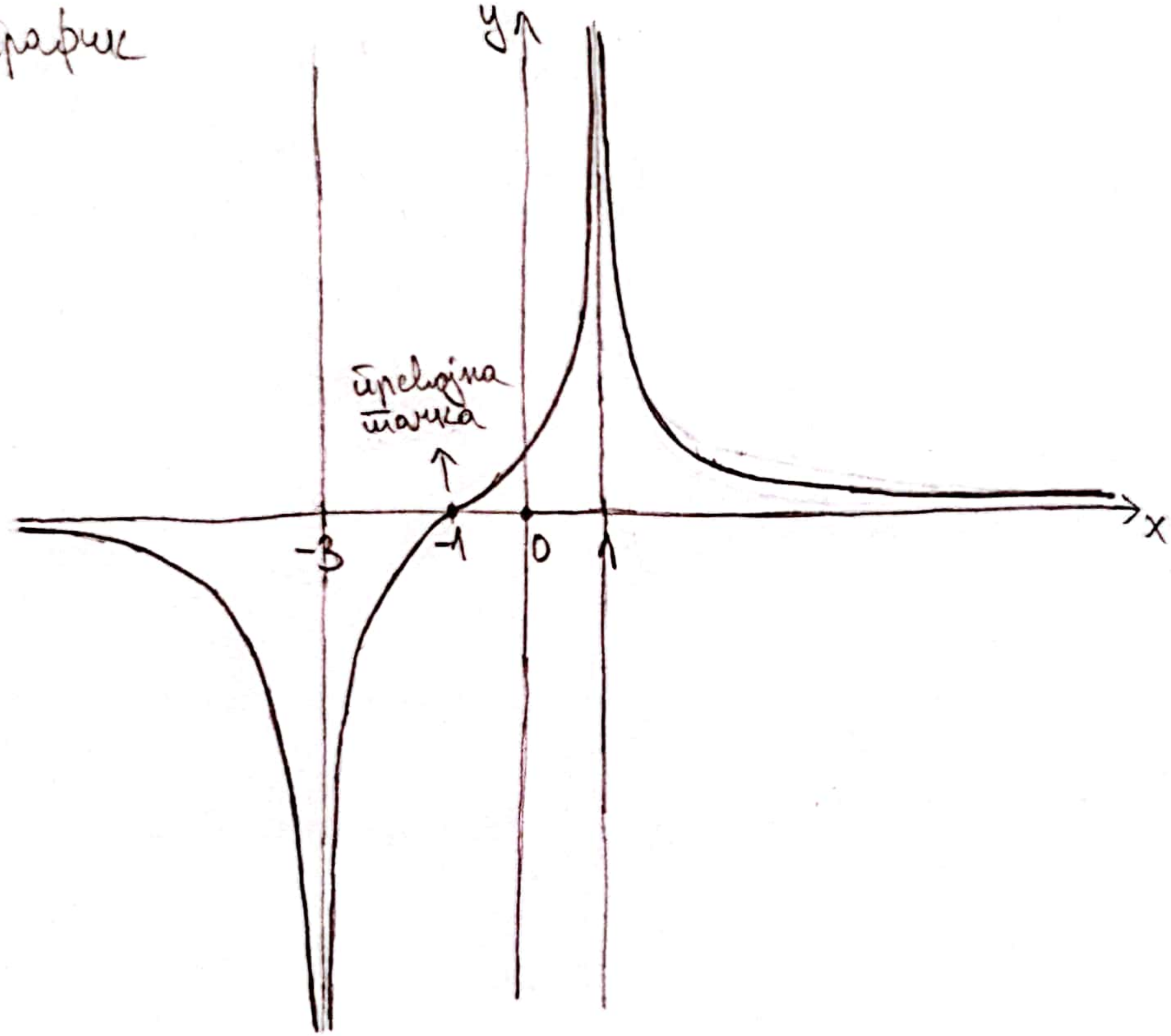
$\Rightarrow y=0$ је хоризонтална асимптота кад $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \ln\frac{x+3}{x-1} = \left(\begin{matrix} t=-x \\ t\to+\infty \end{matrix}\right) = \lim_{t\to+\infty} \ln\frac{-t+3}{-t-1}^{\cdot(-1)} = \ln\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{t-3}{t+1}\right) = \ln(1-) = 0-$$

$\Rightarrow y=0$ је хоризонтална асимптота кад $x \to -\infty$

Пошто смо нашли хоризонталне асимптоте и кад $x \to +\infty$ и кад $x \to -\infty$, нема косих асимптота.

в) График



б) $F(x)+f(b-x)=0 \iff \ln\left|\frac{x+3}{1-x}\right|+\ln\left|\frac{b-x+3}{1-(b-x)}\right|=0$

$$\iff \ln\left|\frac{x+3}{1-x}\cdot\frac{b-x+3}{1-b+x}\right|=0$$

$$\iff \left|\frac{x+3}{1-x}\cdot\frac{b+3-x}{x+1-b}\right|=1$$

Дакле, треба нам $b\in\mathbb{R}$ т.д. $(\forall x\in D_f)\left|\frac{x+3}{1-x}\cdot\frac{b+3-x}{x+1-b}\right|=1$.

Ако би било $x+3=x+1-b$ и $1-x=b+3-x$, очигледно би претходни услов био задовољен, јер је $\left|\frac{x+3}{1-x}\cdot\frac{b+3-x}{x+1-b}\right|=|1|=1$.

$x+3=x+1-b \Rightarrow b=1-3=-2$

$1-x=b+3-x \Rightarrow b=1-3=-2$,

па за $\underline{b=-2}$ ово заиста важи и тада је $f(x)+f(-2-x)=0$ за свако $x\in D_f$

4. Дата једначина $x^2-3=a\cdot e^x$ еквивалентна је једначини

$$\frac{x^2-3}{e^x}=a \quad (\text{поделили смо обе стране са } e^x>0).$$

Зато ћемо увести $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$, испитати фју $f$ (њене интервале монотоности и екстремне вредности) довољно да можемо оквирно да је скицирамо и потом са графика одредимо број решења једначине $f(x)=a$ за различите вредности параметра $a\in\mathbb{R}$.

1) $D_f=\mathbb{R}$ и $f$ је непрекидна на целом домену као композиција непр. ф-ја

2) $f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-(x^2-3)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{(2x-x^2+3)e^x}{e^{2x}}=-\frac{(x-3)(x+1)}{e^x}$

за $x\in(-\infty,-1)$ је $f'(x)<0$

за $x\in(-1,3)$ је $f'(x)>0$

за $x\in(3,+\infty)$ је $f'(x)<0$

$\Rightarrow$ $f$ опада на $(-\infty,-1)$, у $x=-1$ има локални минимум, расте на $(-1,3)$, у $x=3$ има локални максимум и опада на $(3,+\infty)$.

$$f(-1)=\frac{1-3}{e^{-1}}=-2e<0$$

$$f(3)=\frac{9-3}{e^{3}}=\frac{6}{e^{3}}>0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{e^x}=\left(\begin{matrix}t=-x\\ t\to+\infty\end{matrix}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2-3}{e^{-t}}=$$

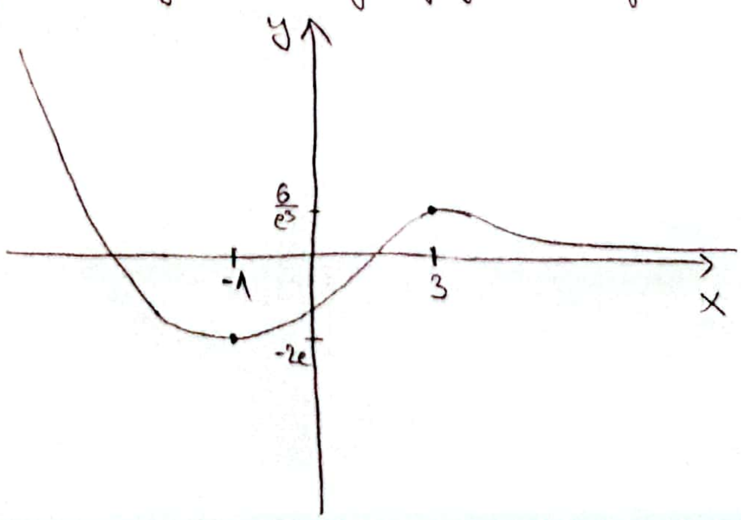
$$=\lim_{t\to+\infty}(t^2-3)\cdot e^t=+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{e^x}=0+,$$ јер је експоненцијална ф-ја јача од степене, кад $x\to+\infty$

(могли смо и два пута Лопиталово правило)

$\Rightarrow$ $y=0$ је хоризонтална асимптота ф-је $f$ кад $x\to+\infty$

Друга својства ф-је $f$ нас не занимају у овом контексту, па нам је ово довољно да би смо оквирно скицирали график.



Са графика видимо да једначина $f(x)=a$ (а самим тим и почетна једначина $x^2-3=ae^x$) има:

0 решења за $a<-2e$

1 решење за $a=-2e$

2 решења за $-2e<a\leq 0$

3 решења за $0<a<\frac{6}{e^3}$

2 решења за $a=\frac{6}{e^3}$

1 решење за $a>\frac{6}{e^3}$