1. (а) покажимо да индукцијом

База: $x_0 \in (0,1)$

Хипотеза: $x_n \in (0,1)$

Корак: $x_{n+1} = 1-2x_n+3x_n^2-x_n^3 = x_n^2-2x_n+1 + 2x_n^2-x_n^3$

$$= \underbrace{(x_n-1)^2}_{>0} + \underbrace{(2-x_n)}_{>0}\underbrace{x_n^2}_{>0} > 0$$

$$x_{n+1} = 1-2x_n+3x_n^2-x_n^3 = 1-x_n(x_n^2-3x_n+2) = 1-\overbrace{\underbrace{x_n}_{>0}\underbrace{(x_n-1)}_{<0}\underbrace{(x_n-2)}_{<0}}^{>0} < 1$$

$\Rightarrow x_{n+1} \in (0,1)$

(б) $1-2x+3x^2-x^3 = 1-3x+3x^2-x^3+x = \underbrace{(1-x)^3}_{\geq 0}+x \geq x$

(в) из (б) је $x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow$ расте

мон. и огр. $\Rightarrow$ конв. $\Rightarrow \exists A \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to+\infty} x_n = A$

$\Rightarrow A = 1-2A+3A^2-A^3 \Rightarrow (A-1)^3 = 0 \Rightarrow A=1$

Дакле, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$

② $f(x) = arctg\left(\frac{(x-1)^2}{x^2-2x}\right) = arctg\left(\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2-1}\right)$

Уводимо смену $t = x-1$:

$$g(x) = f(x+1) = arctg\frac{x^2}{x^2-1}$$

Када анализирамо график ф-је g, све особине за f добијамо транслацијом удесно за 1.

Поени:

1 1° $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1,+1\}$

1 2° $g(-x) = g(x)$ ⇒ g је парна ⇒ довољно да анализирамо само на $D_g \cap [0,+\infty) = (0,1) \cup (1,+\infty)$ (што надаље и радимо)

2 3° $g(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$, $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$

6 4° $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to1^-} = -\frac{\pi}{2}$ ⇒ нема в.а. у 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{4}$ ⇒ $y = \frac{\pi}{4}$ х.а.

3 5° $g'(x) = -\frac{2x}{(2x^4-2x^2+1)}$ ⇒ $g'(x) < 0$ $\forall x > 0$ ⇒ опадајућа на $D_f \cap (0,+\infty)$

$(2x^4-2x^2+1) > 0$ $\forall x$

локални макс у 0 $g(0) = 0$

2 6° $g''(x) = \frac{2(6x^4-2x^2+1)}{(2x^4-2x^2+1)^2}$ ⇒ своди се на решавање ј-не

$(2x^4-2x^2+1)^2 > 0$

$6t^2 - 2t + 1 = 0$, где је $t = x^2$

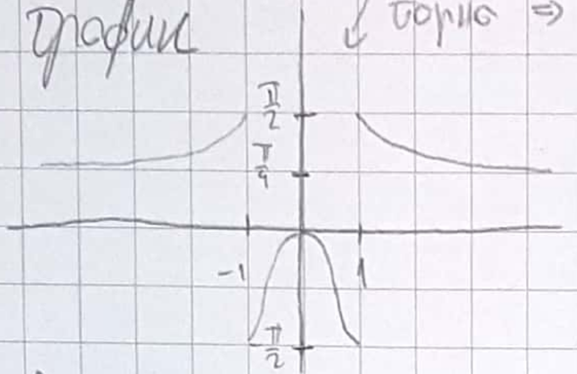
$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\sqrt{\sqrt{7}+1}}{\sqrt{6}} \in (0,1)$

На $(0, x_0)$ конкавна

на $(x_0, 1) \cup (1, +\infty)$ конв.

2 7° график (парна ⇒ сим. у односу на y осу

g:



f: транслирано за 1 у десну страну

3 8° $f(D_f) = g(D_g) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ← види се са графика

3. (а) f је непр. на $(-\infty,0)$ као комп. непр. ф-ја.

f — || — $(0,+\infty)$ — || —

(како је $\lambda+x^2>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, f је добро деф на $(-\infty,0)$)

~~$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1-e^{-\lambda x} = \lambda$~~ $f(0)=1-e^{-\lambda\cdot 0}=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln(\lambda+x^2) = \ln\lambda$

Да би f била непр у 0, $\ln\lambda=0 \iff \lambda=1$

б) За $x<0$, $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$, па је f диф на $(-\infty,0)$

За $x>0$ $f'(x)=e^{-x}$, па је f диф на $(0,+\infty)$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-e^{-h}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-(1-h+o(h))}{h}=\lim_{h\to 0^+}(1+o(1))=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\ln(1+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+o(h^2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}(h+o(h))=0$$

Дакле, како $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, ф-ја није диф у 0.

4. Посматрајмо ф-ју $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дату са $g(x)=f(x)-x^{2n-1}$

g је непр. као разлика две непр. ф-је.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(\underbrace{f(x)}_{\text{огр.}}-\underbrace{x^{2n-1}}_{\text{тежи у } +\infty})=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(\underbrace{f(x)}_{\text{огр.}}-\underbrace{x^{2n-1}}_{\text{тежи у } -\infty \text{ (јер је } 2n-1 \text{ непаран)}})=+\infty$$

Дакле, ф-ја g узима и позитивне и негативне вредности и непр. је, па према теореми Коши-Болцана о међувредности, $\exists c\in\mathbb{R}$ тд

$g(c)=0 \Rightarrow f(c)-c^{2n-1}=0 \Rightarrow f(c)=c^{2n-1}$