

Зачети 6.

① одређити максимум и минимум функције дјелу
 $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ на $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

② Докажи а) $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
 б) $\tan x > x$ $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$
 в) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$

③ Докажи а) $|\ln \frac{x}{y}| < \frac{|y-x|}{a}$, $x > a > 0$, $y > a > 0$, $x \neq y$
 б) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}$

④ (10 поена) Нека је функција $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна на $[0, 2]$, диференцијабилна на $(0, 2)$ и за свако $x \in (0, 2)$ важи $|f'(x)| \leq 1$.
 (а) Показати да за свако $x, y \in [0, 2]$ важи да је $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.
 (б) Ако је додатно и $f(0) = f(2) = 1$, показати да за свако $x \in [0, 2]$ важи $f(x) \geq 0$.

ЈУН 1
2021

⑤ (10 поена) Нека су $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и функције $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидне на $[a, b]$ и диференцијабилне на (a, b) за које важи $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ и $f(x)g(x) \neq 0$ за свако $x \in [a, b]$. Доказати да постоји $c \in (a, b)$ такво да важи $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.

ЈУН 2
2021

а) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} e^{\frac{1}{x}}$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x \arcsin x}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan x - 1}{x^2}$
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$	д) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$	е) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\sin x}$
ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{x^5 + 5x^4} - \sqrt{x^2 - 2x}$		

⑥ Израчунајте следеће граничне вредности

⑦ Одредити константу $L \in \mathbb{R}$ такву да функција $f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin(\arctan x) - x^2}{e^{2x^2} - 1 - 2x^2}, & x \neq 0 \\ L, & x = 0 \end{cases}$ буде непрекидна на скупу \mathbb{R} .

⑧ Одредити $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$.
 Одредити $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

⑨ Испитати ток и скицирати график функције f .

а) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + x}$.

(ЈУН 1 2022)

б) $f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + |x+1|$.

(ЈУН 2 2022)