

Neodređeni integrali

1. Primitivna funkcija

Definicija 1. Data je funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f na intervalu (a, b) ako je F diferencijabilna na (a, b) i ako važi $F'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$.

Primer 2. Pronaći primitivnu funkciju funkcija:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = f(x) = 0 \implies F(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = f(x) = 3x^2 \implies F(x) = x^3 + c, c \in \mathbb{R}.$$

Moguće funkcije: $F_1(x) = x^3$, $F_2(x) = x^3 + \sqrt{3}$, $F_3(x) = x^3 - 505$ itd.

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = f(x) = e^x \implies F(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}.$$

d) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{x} \implies F(x) = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}.$$

Tvrđenje 3. Ako je $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, onda je i svaka funkcija oblika $F(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f .

Dokaz Za neku primitivnu funkciju F funkcije f i za proizvoljan $c \in \mathbb{R}$ posmatrajmo funkciju $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$. Pošto je F diferencijabilna na (a, b) , sledi da je i G diferencijabilna na (a, b) i važi:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Dakle, G je primitivna funkcija funkcije f .

Tvrđenje 4. Neka su $F_1, F_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivne funkcije funkcije $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Tada postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $F_1(x) = F_2(x) + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dokaz Za funkciju f imamo dve njene primitivne funkcije $F'_1(x) = f(x)$ i $f: F'_2(x) = f(x)$.

Posmatrajmo funkciju $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = F_1(x) - F_2(x), \quad \forall x \in (a, b)$. Pošto su F_1 i F_2 diferencijabilne na (a, b) , sledi da je i G diferencijabilna na (a, b) i važi:

$$G'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F'_1(x) - F'_2(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Iz ovoga sledi da je funkcija G konstantna na intervalu (a, b) , tj. postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x) = c, \quad \forall x \in (a, b)$.

Definicija 5. Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ označavamo sa $\int f(x) dx$ i nazivamo ga *neodređeni integral* funkcije f . Dakle,

$$\int f(x) dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\},$$

gde je $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ neka primitivna funkcija funkcije f .

Tablica integrala:		
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x \in (0, +\infty)$	$\int x^\alpha dx$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$	$\int x^n dx$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\int x^{-n} dx$	$\begin{cases} \frac{1}{1-n}x^{1-n} + C_1, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{1-n}x^{1-n} + C_2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$
$x \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{x} dx$	$\begin{cases} \ln x + C_1, & x \in (-\infty, 0) \\ \ln x + C_2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$
$a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$	$\int a^x dx$	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$
$x \in \mathbb{R}$	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
$x \in \mathbb{R}$	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi \right)$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C_k$, $x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, \pi + k\pi)$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C_k$, $x \in (k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
$x \in (-1, 1)$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin x + C$
$x \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\operatorname{arctg} x + C$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\int x^0 dx$	$\begin{cases} x + C_1, & x \in (-\infty, 0) \\ x + C_2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$

Tvrđenje 6. Linearnost neodređenog integrala. Neka su $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije koje imaju primitivne funkcije na intervalu (a, b) . Tada i $\lambda f(x) + \mu g(x)$ ima primitivnu funkciju na intervalu (a, b) za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i važi:

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx.$$

Dokaz Neka su F i G primitivne funkcije funkcija f i g , redom. Hoćemo da pokažemo da je funkcija $\lambda F + \mu G$ primitivna za $\lambda f + \mu g$.

$$\begin{aligned} (\lambda F(x) + \mu G(x))' &= \lambda F'(x) + \mu G'(x) = \lambda f(x) + \mu g(x). \\ &= \int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda F(x) + \mu G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \\ &= \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx. \end{aligned}$$

Tvrđenje 7. Parcijalna integracija. Neka su $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije na intervalu (a, b) . Tada važi:

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

Dokaz

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Zatim integral sa obe strane:

$$\int (u(x)v(x))' dx = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx$$

Izdvajamo: $\int u(x)v'(x) dx :$

$$\begin{aligned} \int u(x)v'(x) dx &= \int (u(x)v(x))' dx - \int u'(x)v(x) dx \\ &= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx. \end{aligned}$$

Primer 8.

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \log x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v(x) = x \end{array} \right\} \\ &= uv - \int v du \\ &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Primer 9.

$$\begin{aligned}
 \int \underbrace{e^x}_u \underbrace{\cos x dx}_{dv} &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right\} \\
 &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\
 &= e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_u \underbrace{\sin x dx}_{dv} = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} \\
 &= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right)
 \end{aligned}$$

Ovde uvodimo oznaku $I = \int e^x \cos x dx$ pošto se ponavlja isti integral kao početni:

$$\begin{aligned}
 I &= e^x \sin x + e^x \cos x - I \\
 2I &= e^x(\sin x + \cos x) \\
 I &= \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Tvrđenje 10. Neka je data funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i njena primitivna funkcija $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Ako je funkcija $\rho : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ diferencijabilna na intervalu (α, β) , tada važi:

$$\int f(\rho(x)) \cdot \rho'(x) dt = F(\rho(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Dokaz Proverimo da li je izvod funkcije $F(\rho(x)) + C$ jednak funkciji $f(\rho(t)) \cdot \rho'(t)$ (tj. funkciji pod integralom):

$$(F(\rho(x)) + C)' = (F \circ \rho)'(x) = F'(\rho(x)) \cdot \rho'(x) = f(\rho(x)) \cdot \rho'(x) = (1)$$

Primer 11.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x+3} &= \left\{ \begin{array}{l} t = x + 3, \quad dt = dx, \quad x > -3 \\ \text{ili } x < -3, \quad dt = dx \end{array} \right\} \\
 &= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x+3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Primer 12.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{1+x^3} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = 1 + x^3, \\ dt = 3x^2 dx, \\ dt \cdot \frac{1}{3} = x^2 dx. \end{array} \right\} \\
 &= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3} \cdot dt = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + c = \frac{1}{3} \ln|1+x^3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

2. Tehnike integracije