

Neodređeni integrali

1. Primitivna funkcija

Definicija 1. Data je funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ *primitivna funkcija* funkcije f na intervalu (a, b) ako je F diferencijabilna na (a, b) i ako važi $F'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$.

Primer 2. Pronaći primitivnu funkciju funkcija:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $F'(x) = f(x) = 0 \implies F(x) = c, c \in \mathbb{R}.$
- b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $F'(x) = f(x) = 3x^2 \implies F(x) = x^3 + c, c \in \mathbb{R}.$
Moguće funkcije: $F_1(x) = x^3, \quad F_2(x) = x^3 + \sqrt{3}, \quad F_3(x) = x^3 - 505$ itd.
- c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $F'(x) = f(x) = e^x \implies F(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}.$
- d) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$
 $F'(x) = f(x) = \frac{1}{x} \implies F(x) = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}.$

Tvrđenje 3. Ako je $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, onda je i svaka funkcija oblika $F(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f .

Dokaz Za neku primitivnu funkciju F funkcije f i za proizvoljan $c \in \mathbb{R}$ posmatrajmo funkciju $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$. Pošto je F diferencijabilna na (a, b) , sledi da je i G diferencijabilna na (a, b) i važi:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Dakle, G je primitivna funkcija funkcije f .

Tvrđenje 4. Neka su $F_1, F_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ primitivne funkcije funkcije $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Tada postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $F_1(x) = F_2(x) + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dokaz Za funkciju f imamo dve njene primitivne funkcije $F_1'(x) = f(x)$ i $F_2'(x) = f(x)$. Posmatrajmo funkciju $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = F_1(x) - F_2(x), \quad \forall x \in (a, b)$. Pošto su F_1 i F_2 diferencijabilne na (a, b) , sledi da je i G diferencijabilna na (a, b) i važi:

$$G'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Iz ovoga sledi da je funkcija G konstantna na intervalu (a, b) , tj. postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x) = c, \quad \forall x \in (a, b)$.

Definicija 5. Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ označavamo sa $\int f(x) dx$ i nazivamo ga *neodređeni integral* funkcije f . Dakle,

$$\int f(x) dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\},$$

gde je $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ neka primitivna funkcija funkcije f .

Tablica integrala:	
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \in (0, +\infty) \quad \int x^\alpha dx$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \quad \int x^n dx$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int x^{-n} dx$	$\frac{1}{1-n} x^{1-n} + C_1, x \in (-\infty, 0)$ $\frac{1}{1-n} x^{1-n} + C_2, x \in (0, +\infty)$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \frac{1}{x} dx$	$\ln x + C_1, x \in (-\infty, 0)$ $\ln x + C_2, x \in (0, +\infty)$
$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R} \quad \int a^x dx$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \sin x dx$	$-\cos x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \cos x dx$	$\sin x + C$
$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right) \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C_k, x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, \pi + k\pi) \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C_k, x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$x \in (-1, 1) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin x + C$
$x \in \mathbb{R} \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\operatorname{arctg} x + C$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int x^0 dx$	$x + C_1, x \in (-\infty, 0)$ $x + C_2, x \in (0, +\infty)$

Tvrđenje 6. Linearnost neodređenog integrala. Neka su $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije koje imaju primitivne funkcije na intervalu (a, b) . Tada i $\lambda f(x) + \mu g(x)$ ima primitivnu funkciju na intervalu (a, b) za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i važi:

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx.$$

Dokaz Neka su F i G primitivne funkcije funkcija f i g , redom. Hoćemo da pokažemo da je funkcija $\lambda F + \mu G$ primitivna za $\lambda f + \mu g$.

$$\begin{aligned} (\lambda F(x) + \mu G(x))' &= \lambda F'(x) + \mu G'(x) = \lambda f(x) + \mu g(x). \\ &= \int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda F(x) + \mu G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \\ &= \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx. \end{aligned}$$

Tvrđenje 7. Parcijalna integracija. Neka su $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije na intervalu (a, b) . Tada važi:

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

Dokaz

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Zatim integral sa obe strane:

$$\int (u(x)v(x))' dx = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx$$

Izdvajamo: $\int u(x)v'(x) dx$:

$$\begin{aligned} \int u(x)v'(x) dx &= \int (u(x)v(x))' dx - \int u'(x)v(x) dx \\ &= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx. \end{aligned}$$

Primer 8.

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \log x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v(x) = x \end{array} \right\} \\ &= uv - \int v du \\ &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Primer 9.

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{e^x}_u \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x \, dx \\ dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right\} \\
&= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \\
&= e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_u \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x \, dx \\ dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} \\
&= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \right)
\end{aligned}$$

Ovde uvodimo oznaku $I = \int e^x \cos x \, dx$ pošto se ponavlja isti integral kao početni:

$$\begin{aligned}
I &= e^x \sin x + e^x \cos x - I \\
2I &= e^x (\sin x + \cos x) \\
I &= \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tvrđenje 10. Neka je data funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i njena primitivna funkcija $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Ako je funkcija $\rho : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ diferencijabilna na intervalu (α, β) , tada važi:

$$\int f(\rho(x)) \cdot \rho'(x) \, dx = F(\rho(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Dokaz Proverimo da li je izvod funkcije $F(\rho(x)) + C$ jednak funkciji $f(\rho(x)) \cdot \rho'(x)$ (tj. funkciji pod integralom):

$$(F(\rho(x)) + C)' = (F \circ \rho)'(x) = F'(\rho(x)) \cdot \rho'(x) = f(\rho(x)) \cdot \rho'(x) = (1)$$

Primer 11.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x+3} &= \left\{ \begin{array}{l} t = x+3, \quad dt = dx, \quad x > -3 \\ \text{ili } x < -3, \quad dt = dx \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |x+3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Primer 12.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{1+x^3} \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = 1+x^3, \\ dt = 3x^2 \, dx, \\ dt \cdot \frac{1}{3} = x^2 \, dx. \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3} \cdot dt = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln |t| + c = \frac{1}{3} \ln |1+x^3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2. Tehnike integracija

1. $\int \sin^n(x) \cdot \cos^m(x) dx$

- $n = 2k + 1$, odnosno za neparno n važi:

$$\int (\sin^2(x))^k \cdot \sin(x) \cdot \cos^m(x) dx = \int (1 - \cos^2(x))^k \cdot \sin(x) \cdot \cos^m(x) dx$$

Koristimo smenu $t = \cos(x)$, $dt = -\sin(x) dx$.

- $m = 2l + 1$, odnosno za neparno m važi:

$$\int \sin^n(x) \cdot (\cos^2(x))^l \cdot \cos(x) dx = \int \sin^n(x) \cdot (1 - \sin^2(x))^l \cdot \cos(x) dx$$

Koristimo smenu $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x) dx$.

- $n = 2k$ i $m = 2l$, odnosno kada su nam i m i n parni, svodimo na niži stepen koristeći formule:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x), \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

2.
 - $\int (\sin(ax) \cdot \cos(bx)) dx$
 - $\int (\sin(ax) \cdot \sin(bx)) dx$
 - $\int (\cos(ax) \cdot \cos(bx)) dx$

Koristimo formule:

$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

3. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

4. $\int R(\sin x, \cos x) dx = I$

Ovo je integral racionalne funkcije koja u brojiocu i u imeniocu ima polinom po $\sin(x)$, $\cos(x)$

Koristi se smena:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

5. $\int R(x, \sqrt{x^2 - 1}) dx = I$

Koristi se smena $x = \frac{1}{\cos(t)}$, $\cos(t) = \frac{1}{x}$, $t = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$, $dx = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} dt$, $\sqrt{x^2 - 1} = \tan(t)$.

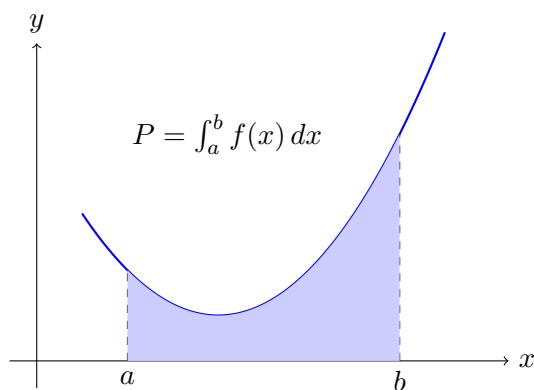
6. $\int R(x, \sqrt{x^2 + 1}) dx = I$

Koristi se smena $x = \tan(t)$, $\tan(t) = x$, $t = \arctan(x)$, $dx = \frac{1}{\cos^2(t)} dt$, $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{\cos(t)}$.

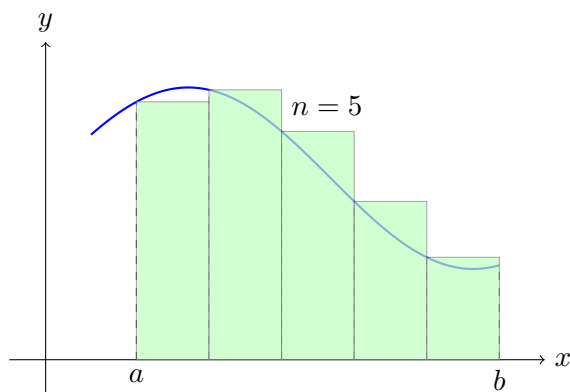
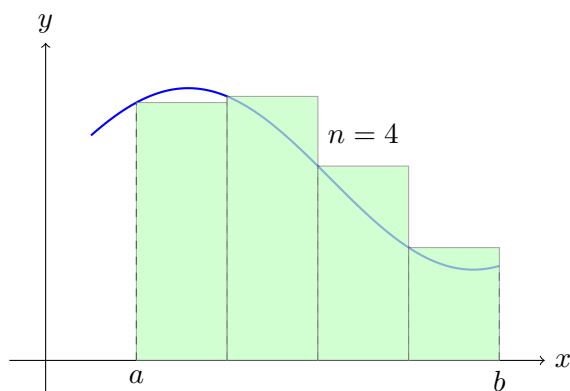
7. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$

Koristi se smena $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$.

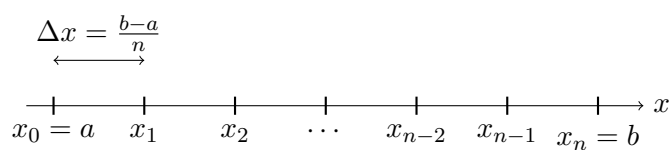
Određeni integrali



Neodređeni integral funkcije f je definisan preko izvoda, dok je određeni integral funkcije f definisan pomoću limesa niza.



U n -tom koraku podelimo interval $[a, b]$ na n jednakih delova.



Sada ćemo da definišemo podeone tačke intervala $[a, b]$

$$x_0 = a < x_1 = a + \frac{b-a}{n} < x_2 = a + \frac{2 \cdot (b-a)}{n} < \dots < x_{n-1} = a + \frac{(n-1) \cdot (b-a)}{n} < x_n = b$$