(1) Poenostavi naslednje izraze

(a) $(3+4i)\overline{(1-3i)}$

$$(3+4i)\overline{(1-3i)} = (3+4i)(1+3i) = 3+9i+4i-12 = -9+13i$$

(b) $\dfrac{7-3i}{1+i}$

$$\frac{7-3i}{1+i} = \frac{(7-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{7-7i-3i-3}{2} = \frac{4-10i}{2} = 2-5i$$

(c) $(1+i\sqrt{3})^{10}$

To enačbo najlažje rešimo tako, da jo pretvorimo v eulerjev zapis.

$$\begin{aligned} z &= 1+i\sqrt{3} \\ |z| &= \sqrt{1+3} = 2 \\ \tan\varphi &= \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \\ z &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Nato poračunamo njeno deseto potenco:

$$z^{10} = 2^{10}e^{10i\frac{\pi}{3}} = 1024e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Nato lahko to pretvorimo nazaj v kartezično obliko:

$$z^{10} = 1024\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 1024\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -512\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

(2) Zapiši vse vrednosti izraza $\sqrt[7]{(-\sqrt{3}-i)^5}$ in jih nariši.

To nalogo ponovno najlažje rešimo tako, da pretvorimo v eulerjev zapis.

$$\begin{aligned} w &= -\sqrt{3}-i \\ z^7 &= (-\sqrt{3}-i)^5 = w^5 \end{aligned}$$

Rešujemo za $z$.

Najprej poračunamo $w^5$:

$$\begin{aligned} w &= -\sqrt{3} - i \\ |w| &= \sqrt{3+1} = 2 \\ \tan\varphi &= \frac{-1}{-\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \\ w &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\ w^5 &= 2^5 e^{i\frac{5\pi}{6}} = 32e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= |z|e^{i\varphi} \\ z^7 &= w^5 \\ |z|^7 e^{i7\varphi} &= 32e^{i(\frac{5\pi}{6}+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Sedaj primerjamo absolutne vrednosti in kote posebej. Za absolutne vrednosti dobimo:

$$|z|^7 = 32 \Rightarrow |z| = \sqrt[7]{32}$$

Za kote pa dobimo:

$$7\varphi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\varphi = \frac{5\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}, k \in [0,6]$$

$k \in [0,6]$, ker ko je $k = 7$ prištejemo kotu $2\pi$ in iz trigonometrije vemo, da smo nazaj na začetku.

$z$ lahko sedaj zapišemo kot:

$$z = \sqrt[7]{32}e^{i\left(\frac{5\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{32}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7}\right)\right)$$

Opomba: ta rezultat je žal drugačen kot tisti v rešitvah. Mislim, da so se zmotili oni, ker je ta enačba rešena “by the book”.

(3) Skiciraj naslendje podmnožice kompleksnih števil.

Skice v latexu so zelo zameudne, tako da lahko rešite to nalogo sami, ali pa počaka na čas, ko bom imel res preveč časa.

(4) Naj bo $k \neq 0$ realno število. Za katere $k$ je $1 + ik$ bliže izhodišču kot $1 - \frac{i}{k}$?

Razdaljo od izhodišča nam predstavlja absolutna vrednost števila, torej lahko zapišemo:

$$|1 + ik| < \left|1 - \frac{i}{k}\right|$$

Ker so absolutne vrednosti večje ali enake 0, lahko neenačbo kvadriramo in razrešimo absolutne vrednost:

$$1 + k^2 < 1 + \frac{1}{k^2}$$

Sedaj lahko enačbo nekoliko preuredimo in dobimo:

$$k^2 < \frac{1}{k^2}$$
$$k^4 < 1$$

Ker je $k^2$ pozitivno število, lahko enačbo korenimo in dobimo:

$$k^2 < 1$$

Sledi dolg premislek o tem, kaj je naš rezultat. Če si skiciramo parabolo $k^2 = 1$, dobimo dve ničli: $-1, 1$, parabola pa je med tema dvema ničlama manjša od 1. Torej je $k \in (-1, 1)$, ali drugače povedano: $|k| < 1$.