(1) Določi supremum, infimum, minimum in maksimum naslednjih množic, če obstajajo.

(a) $A = \{x^2 - 6x; x > 0\}$

Opazimo, da je pogoj za množico parabola, ki jo lahko razcepimo v $x^2 - 6x = x(x-6)$. Teme te parabole je $x = 1/2(x_0 + x_1) = 3$, to pomeni $T(3, -9)$. Parabola narašča, torej nima supremuma in maksimuma, ima pa minimum, ki je enak infimum, t.j: $\inf A = \min A = -9$

(b) $B = \left\{ \dfrac{2n-3}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Pogoj se da preurediti v $2 - \frac{3}{n}$. Ker naravna števila naraščajo, bo ulomek $3/n$ šel proti 0, za velike n. To pomeni, da bo najmanjša vrednost v tej množici, ko je $n = 1$, kar je -1. Množica bo imela čedalje večje vrednosti, ko bo n velik, ker bo $3/n$ čedalji manjši. To pomeni da se bodo vrednosti v množici B približevale 2. To pomeni:

$$\inf B = \min B = -1 \qquad \sup B = 2$$

$\max B$ pa ne obstaja.

(c) $C = \{x \in [1, 3]; x \text{ ima v decimalnem zapisu vsaj dve trojki}\}$

Zapišimo si nekaj števil, ki so zelo blizu 1 in imajo v decimalnem zapisu dve trojki:

$$1,33$$
$$1,033$$
$$1,0033$$
$$1,00033$$

Opazimo, da lahko vedno zapišemo še manjše število, tako da prejšnjega delimo z 10. Ne glede na to kolikokrat delimo to število, pa ne bo nikoli enako 1. To pomeni da množica nima minimuma, vendar ima infimum $\inf C = 1$

Podobno lahko naredimo za števila, ki se bližajo 3:

$$2,33$$
$$2,933$$
$$2,9933$$
$$2,99933$$

Spet opazimo, da lahko vedno zapišemo večje število, tako da prejšnjemu dodamo devekto v decimalni zapis. To število nikoli ne bo enako 3. To pomeni mno"ica C nima maksimuma, vendar ima supremum $\sup C = 3$

(d) $D = \left\{ \dfrac{2}{1+x^2} - 1; x \in \mathbb{R} \right\}$

Ker imamo v pogoju za množico x^2, bo to število vedno naraščalo, ko bo naraščala absolutna vrednost x. To pomeni, da je dovolj da obravnamo samo pozitivna števila in 0. Ulomek $\frac{2}{1+x^2}$ bo čedalje manjši, ko se bo $1 + x^2$ večal. To pomeni da, ko bo x zelo velik, bo $\frac{2}{1+x^2}$ zelo majhen. S tem vemo, da bo največji element v množici, ko bo $x = 0$, t.j.: 1. Pri velikih x-ih, pa se bodo vrednosti približevale -1, vendar je ne bodo nikoli dosegle. To lahko zapišemo kot:

$$\sup D = \max D = 1 \qquad\qquad \inf D = -1$$

minimum pa ne obstaja.

(e) $E = \left\{ \dfrac{m - 2m^2}{m^2 + 4}; m \in \mathbb{N} \right\}$

Opazimo, da je pogoj za množico zelo podoben racionalni funkciji, ki ima za definicijsko območje naravna števila. Lahko si pomagamo z grafom te funkcije, kjer $m \in \mathbb{R}$ in nato obravnamo samo m-je, ki so naravna števila. Najprej si zapišimo pogoj kot funkcijo za lažje računanje in jo preuredimo:

$$f(m) = \frac{m - 2m^2}{m^2 + 4} = \frac{m(1 - m)}{m^2 + 4} = \frac{-m(m - 1)}{m^2 + 4}$$

Opazimo da funkcija nima polov in ima dve ničli $m_0 = 0, m_1 = 1/2$. Nobena od ničel ni v naravnih številih.

Začetna vrednost te funkcij je $f(0) = 0$, predznak pa je negativen. To pomeni, da bo na intervalu $(1, \infty)$ funkcija negativna in padajoča. Ker nas zanimajo samo vrednosti, kjer je $m \in \mathbb{N}$, lahko s pomočjo skice ugotovimo, da bo največja vrednost funkcije v $m = 1$, kjer je $f(m) = -1/5$.

Funkcija ima asimptoto $y = -2$. To pomeni, da se bo pri velikih m-jih vrednost približevala -2, vendar je funkcija nikoli ne bo dosegla. Sedaj lahko zapišemo vse naše ugotovitve:

$$\sup E = \max E = -\frac{1}{5} \qquad\qquad \inf E = -2$$

množica E nima minimuma.