

# Algebra 1

Vid Drobnič

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Vektorji v trirazsežnem prostoru</b>	<b>2</b>
1.1	Operacije z vektorji . . . . .	3
1.2	Linearna neodvisnost . . . . .	4
1.3	Skalarni produkt . . . . .	8
1.4	Vektorski produkt . . . . .	10

# 1 Vektorji v trirazsežnem prostoru

$\mathcal{P}$  - prostor

$T \in \mathcal{P}$  - točka

$A, B \in \mathcal{P}$

$\overrightarrow{AB}$  - usmerjena daljica

Formalno:  $\overrightarrow{AB} = (A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$  (urejen par)

**Ekvivalentnost usmerjenih daljic:**

$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ , kadar je  $\overrightarrow{AB}$  z vzporednim premikom mogoče premakniti v  $\overrightarrow{CD}$ .

- $|AB| = |CD|$  (dolžini daljic sta enaki)
- ista smer (če potegnemo premico čez izhodišča daljic ( $AC$ ), morata biti točki  $B$  in  $D$  na istem "bregu" te premice)
- $AB \parallel CD$

$$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

Def: Vektor  $\vec{AB}$  je množica  $\vec{AB} = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}$  (usmerjene daljice ekvivalentne daljici  $\overrightarrow{AB}$ )

- ničelni vektor:  $\vec{AA} = \vec{0}$
- nasprotni vektor vektorja  $\vec{AB}$  je  $\vec{BA}$  ( $\vec{BA} = -\vec{AB}$ )

Dodatna oznaka:  $\vec{a}$ ,  $-\vec{a}$  nasprotni vektor

$V = \{\vec{v} : \vec{v} \text{ vektor}\}$  - vektorski prostor.

$O \in \mathcal{P}$ ;  $O$  fiksiramo

$$f : \mathcal{P} \rightarrow V$$

$$f(T) = \vec{OT}$$

$f$  je bijekcija (vsaki točki priredi natanko en vektor).

$$\vec{a} = \vec{OT}$$

## 1.1 Operacije z vektorji

Seštevanje:

$$\begin{aligned}\vec{a}, \vec{b} &\in V \\ \vec{a} &= \vec{AB}, \vec{b} = \vec{BC} \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{AC} \\ \vec{AB} + \vec{BC} &= \vec{AC}\end{aligned}$$

Lastnosti:<sup>1</sup>

- (1)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  asociativnost
- (2)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  komutativnost
- (3)  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- (4)  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Za lastnosti od (1) do (4)  $(V, +)$  **Abelova grupa**.

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

### Množenje s skalarjem

Skalar je realno število.

$$\vec{a}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha\vec{a}$  je vektor.

- ima isto smer kot  $\vec{a}$  za  $\alpha > 0$
- ima nasprotno smer kot  $\vec{a}$  za  $\alpha < 0$
- $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$

---

<sup>1</sup>Dokaz lastnosti (1) in (2) s skico.

$$\vec{a} = \vec{OA} \neq \vec{0}$$

$$\alpha\vec{a} = \vec{OT}, O, A, T \text{ so na isti premici}$$

S tem uvedemo koordinatni sistem na premici  $OA$ .

Lastnosti:

$$(5) \quad \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

$$(6) \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$(7) \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$(8) \quad 1\vec{a} = \vec{a}$$

$V, +$  in množenje s skalaji je **vektorski prostor**: veljajo lastnosti od (1) do (8).

## 1.2 Linearna neodvisnost

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

$\vec{a}, \vec{b}$  sta linearno odvisna kadar je:

bodisi  $\vec{b} = \alpha\vec{a}$  za ustrezen  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

bodisi  $\vec{a} = \beta\vec{b}$  za ustrezen  $\beta \in \mathbb{R}$ .

V nasprotnem primeru sta  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  linearno neodvisna.

$$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$$

1.  $\vec{OA}$  in  $\vec{OB}$  sta linearno odvisna  $\Leftrightarrow O, A, B$  kolinearne (ležijo na isti premici).

2.  $\vec{a}, \vec{b}$  sta linearno neodvisna  $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$

Privzamemo da sta  $\vec{a}, \vec{b}$  linearno neodvisna:

$$\{T : \vec{OT} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{R}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$  - linearna kombinacija

$\mathcal{R}$  - ravnina določena z  $O, A, B$  (z vektorji  $\vec{a}, \vec{b}$ ) in točko  $O$ .

$$\vec{r} = \vec{OT}, T \in \mathcal{R}$$

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Pri tem sta  $\alpha$  in  $\beta$  enolično določena skalarja.

V  $\mathcal{R}$  smo z vektorjema  $\vec{a}, \vec{b}$  vpeljali koordinatni sistem.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$  so linearno odvisni, kadar je vsaj eden od njih linearna kombinacija drugih dveh.

npr:  $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

V nasprotnem primeru so  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  linearno neodvisni.

1.  $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$  so linearno odvisni  $\Leftrightarrow O, A, B, C$  koplanarne (ležijo na isti ravnini)

2.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  so linearno neodvisni  $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0)$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  linearno neodvisni

$$\vec{a} = \vec{OA}$$

$$\vec{b} = \vec{OB}$$

$$\vec{c} = \vec{OC}$$

$$V = \{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$  je linearna kombinacija vektorjev  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

$V$  - množica vseh vektorjev prostora  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{R \in \mathcal{P} : \vec{OR} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Dodatek: V zapisu vektorja  $\vec{r} \in V$ :  $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ , so koeficienti  $\alpha, \beta, \gamma$  enolično določeni.

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \\
\vec{r} &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\
\Rightarrow \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\
(\alpha - \alpha_1) \vec{a} + (\beta - \beta_1) \vec{b} + (\gamma - \gamma_1) \vec{c} &= \vec{0} \\
\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ linearno neodvisni} &\Rightarrow \alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1 = \gamma - \gamma_1 = 0 \\
\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1
\end{aligned}$$

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  je **baza** vektorskega prostora  $V$ .  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  so linearno neodvisni.

$R \in \mathcal{P}$  ( $O$  - fiksirana točka)  $\vec{OR} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$

$$R \mapsto (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$\alpha, \beta, \gamma$  je z  $R$  enolično določena.

$\alpha, \beta, \gamma$  so koordinate točke  $R$  glede na koordinaten sistem, ki je določen z bazo  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  in točko  $O$  (izhodišče koordinatnega sistema).

Imena koordinat: dfabscisa, ordinata, aplikata

$$\begin{aligned}
\varphi : V &\rightarrow \mathbb{R} \\
\vec{r} &\mapsto (\alpha, \beta, \gamma); \vec{r} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}
\end{aligned}$$

$\varphi$  je bijekcija.

S  $\varphi$  prenesemo operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorjev s skalarji iz  $V$  v  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1, \vec{r}_2 &\in V \\
\vec{r}_1 &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\
\vec{r}_2 &= \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b} + \gamma_2 \vec{c} \\
\varphi(\vec{r}_1) &= (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \\
\varphi(\vec{r}_2) &= (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \\
\vec{r}_1 + \vec{r}_2 &= (\alpha_1 + \alpha_2) \vec{a} + (\beta_1 + \beta_2) \vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2) \vec{c} \\
\varphi(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) &= (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)
\end{aligned}$$

Torej velja:

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$$

seštevanje je definirano po komponentah.

Podobno velja za množenje s skalarji:

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$$

$\mathbb{R}^3$  je za te operaciji **vektorski prostor** (zadošča A1-A8).

$$\varphi(\vec{a}) = (1, 0, 0)$$

$$\varphi(\vec{b}) = (0, 1, 0)$$

$$\varphi(\vec{c}) = (0, 0, 1)$$

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

je **standardna baza** vektorskega prostora  $\mathbb{R}^3$ .

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

Oznake:

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

Dodatna zahteva za standardno bazo vektorskega prostora  $\mathbb{R}^3$ : baza je **ortonormirana**, torej:

- $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  so paroma pravokotni.



### 1.3 Skalarni produkt

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

Kot med njima je  $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$

Def:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$

$V$  **identificiramo** z  $\mathbb{R}^3$  (glede na standardno bazo in dano izhodišče  $O$ ).

$$O = (0, 0, 0)$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \vec{OA}$$

$$|\vec{a}| = |OA| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Kosinusni izrek:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$\Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Lastnosti:

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0 \text{ (enačaj le za } \vec{a} = \vec{0})$$

$$(2) \quad (\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$$

$$(3) \quad (\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$$

$$(4) \quad \vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \\ \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0\end{aligned}$$

Primer:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &\equiv \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ \vec{a} &= (a_1, a_2, 0) \\ \vec{a} \text{ v } \mathbb{R}^2 : \vec{a} &= (a_1, a_2) \\ \vec{a}\vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2\end{aligned}$$

$p$  - ploščina paralelograma

$p$  izraziti z  $a_1, a_2, b_1, b_2$

$$p = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi$$

$$\begin{aligned}\vec{a}' &\perp \vec{a} \\ |\vec{a}'| &= |\vec{a}|\end{aligned}$$

$\vec{a}, \vec{a}'$  pozitivno orientirana

$$\vec{a}' = (-a_2, a_1)$$

$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$  ali  $\varphi - \frac{\pi}{2}$  če je orientacija  $(\vec{a}, \vec{b})$  pozitivna.

$$|\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = \vec{a}'\vec{b} = (-a_2, a_1) \cdot (b_1, b_2) = a_1b_2 - a_2b_1$$

$p = a_1b_2 - a_2b_1$ , če je orientacija  $\vec{a}, \vec{b}$  pozitivna, če pa je negativna velja:

$$p = -(a_1b_2 - a_2b_1)$$

## 1.4 Vektorski produkt

$$\vec{a}, \vec{b}$$
$$\vec{a} \times \vec{b}$$

- (1)  $\vec{a} \times \vec{b}$  je pravokoten na  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .
- (2)  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  je enaka ploščini paralelograma, ki ga določata  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ . ( $= 0$ , kadar sta  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  linearno odvisna)
- (3) Urejena trojica  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$  je pozitivno orientirana.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = (x, y, z)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$
$$z = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{k} =$$
$$= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{k}| \cos \delta =$$
$$= p \cos \delta$$

$p$  - ploščina paralelograma.

$\delta$  - kot med ravninama, ki ju določata osi (1),(2) in vektorja  $\vec{a}, \vec{b}$ .

$$\vec{a}' = (a_1, a_2, 0)$$
$$\vec{b}' = (b_1, b_2, 0)$$
$$p' = \pm(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$p'$  ima predznak  $+$ , kadar sta  $\vec{a}'$  in  $\vec{b}'$  pozitivno orientirana, ter  $-$ , kadar sta negativno orientirana.

$$p' = \pm p \cos \delta$$

+ kadar:  $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$   
 – kadar:  $\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \pi$

$$z = \pm p' = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$\pm$  se izniči, ker se predznak, ki nastane zaradi  $\cos$  in predznak, ki nastane pri izračunu ploščine paralelograma z vektorjema ujemata.

$$\begin{aligned} x &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ y &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

determinanta (reda 2)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$