Logika in Množice

Vid Drobnič

Kazalo

1 Množice

A - množica
$x \in A$ - x je element A

Načelo ekstenzionalnosti:

Če imata množici iste elemte, sta enaki.

Končna množica: $\{a, b, c, ...z\}$, primer:

$$A = \{1, 2, 5\}$$

$$B = \{2, 1, 1, 5\}$$
$$A = B$$

Prazna množica: $\{\}$ oznaka $\varnothing$

Enojec: $\{a\}$

Dvojec ali neurejeni par: $\{a, b\}$ za katerikoli a in b $\Rightarrow$ lahko sta enaka $\Rightarrow$ enojec je posebni primer dvojca.

$$\{c, c\} = \{c\}$$

Standardni enojec: $1 = \{()\}$

2 Preslikava ali Funkcija

(1) **domena**: množica A

(2) **kodomena**: množica B

(3) **prirejanje**: pove kako elementom iz A priredimo elemnte iz B

   - **Celovitost:** vsakemu elementu iz A priredi vsaj 1 element iz B
   - **Enoličnost:** če sta elementu x prirejena y_1 in y_2, potem velja $y_1 = y_2$

$A \to B$ (brezimna)preslikava iz A v B
A - domena
B - kodomena

$f : A \to B$ funkcija (preslikava) poimenovana f
$A \xrightarrow{f} B$

Funkcijski predpis

$$x \mapsto 1 + x^2$$

x se slika v $1 + x^2$

$$f : x \mapsto 1 + x^2$$
$$f(x) = 1 + x^2$$

Opomba: funkciji manjka še domena in kodomena.

$$\{1, 2, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, ...10\}$$
$$x \mapsto 1 + x^2$$

$g(2)$: g uporabimo ali apliciramo na argumentu 2

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: predpis
g: preslikava
$g(3)$: število
$g(x)$: število

(1) $x \mapsto ax + b$ (x je vezana spremenljivka, a in b sta parametra)

(2) $a \mapsto ax + b$

(3) $y \mapsto ay + b$

(1) in (2) sta isti preslikavi.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = 1 + x^3$$
$$g(7) = 1 + 7^3$$

Opomba: ni treba izračunati.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 + x^3$$
$$(x \mapsto 1 + x^3)(7) = 1 + 7^3$$
$$(x \mapsto ax + b)(7) = 7x + b$$

Uporaba funkcije - **aplikacija.**

Preslikave $\varnothing \to A$?

$$\varnothing \to \{1, 2, 3\}$$

Prirejanje "vsi elemtni domene se presliakjo v 1".

$$x \mapsto 1$$
$$x \mapsto 2$$

Preslikavi sta enaki.

Sklep: iz $\varnothing \to A$ imamo natanko eno preslikavo.

Opomba: Za vse elemte prazne množice velja karkoli.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x \cdot x$$
$$x \mapsto x \cdot x + x - x$$

Preslikavi sta enaki.

Načelo ekstenzionalnosti preslikav:

Če imata preslkavi enaki domeni in enaki kodomeni, ter prirejata elementom domene enake vrednosti, potem sta enaki.

$$f : A \to B$$
$$g : C \to D$$

Če $A = C$ in $B = D$ in za vsak $x \in A$ velja $f(x) = g(x)$, potem $f = g$.

Drugače povedano (se izpelje):
Če $A = C$ in $B = D$ in za vsak $x_1, x_2 \in A$ velja, da iz $x_1 = x_2$ sledi: $f(x_1) = g(x_2)$, potem $f = g$.

3 Aritmetika Množic

3.1 Kartezični produkt ali zmnožek

A in B množici
$A \times B$ zmnožek

Elementi $A \times B$ so urejeni pari (a, b), kjer sta $a \in A$ in $b \in B$.

<u>Projekciji:</u>

$$\pi_1 : A \times B \to A$$

$$\pi_2 : A \times B \to B$$

<u>Enačbe:</u>

Za vse $a \in A$ in $b \in B$ velja:

$$\pi_1(a, b) = a$$

$$\pi_2(a, b) = b$$

Ekstanzionalnost za zmnožke:

Za vse $p, q \in A \times B$, če $\pi_1(p) = \pi_1(q)$ in $\pi_2(p) = \pi_2(q)$, potem $p = q$

$$f : A \times B \to C$$

$$f : p \mapsto ...$$

$$f : (x, y) \mapsto ...x...y...$$

$$g : A \to B \times C$$

$$g : a \mapsto (...a..., ...a...)$$

Kaj je $\varnothing \times A$? $\varnothing \times A = \varnothing$

3.2 Eksponentna množica

Če sta A in B množici, je B^A množica vseh preslikav z domeno A in kodomeno B.

3.3 Vsota množic

Če sta A in B množici je vsota $A + B$ množica.

Za vsak $a \in A$ je $\iota_1(a) \in A + B$

Za vsak $b \in B$ je $\iota_2(b) \in A + B$

Elementa u in v iz $A + B$ sta enaka, če bodisi obstaja $a \in A$ da je $u = \iota_1(a)$ in $v = \iota_1(a)$, bodisi obstaja $b \in B$ da je $u = \iota_2(b)$ in $v = \iota_2(b)$.

$$\{1, 2\} + \{1, 2\} = \{\iota_1(1), \iota_1(2), \iota_2(1), \iota_2(2)\}$$

3.4 Izomorfni množici

Def.: Izomorfizem je preslikava $f : A \to B$, za katero obstaja preslikava $g : B \to A$, da je:

- za vsak $x \in A$ je $g(f(x)) = x$ in
- za vsak $y \in B$ je $f(g(y)) = y$

Pravimo da je g inverz f.

Če obstaja izomorfizem $X \to Y$, pravimo, da sta X in Y **izomorfni**, pišemo $X \cong Y$

3.5 Kompozitum

B^A je množica preslikav iz A v B.

Kompozicija preslikav $g \circ f$.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$\circ : C^B \times B^A \to C^A$$
$$\circ : (g, f) \mapsto (x \mapsto g(f(x))) \text{ (ugnezden funkcijski prepis)}$$

Pišemo $g \circ f$

Zakaj ne raje $f \bullet g$?

Npr, da imamo:

$$\bullet : B^A \times C^B \to C^A$$
$$\bullet : (f, g) \mapsto (x \mapsto g(f(x)))$$

Računsko pravilo za $\circ$:

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$ ✓izberemo, ker se ohrani vrstni red.
$(f \bullet g)(a) = g(f(a))$

Imamo dve preslikavi:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 4 - x^2 \qquad\qquad x \mapsto 2 - x$$

$$(x \mapsto 4 - x^2) \circ (x \mapsto 2 - x) = (x \mapsto (x \mapsto 4 - x^2)((x \mapsto 2 - x)x))$$

Zaradi dvoumnosti preimenujemo vezane spremenljivke:

$$x \mapsto 4 - x^2 \Rightarrow y \mapsto 4 - y^2 \qquad\qquad x \mapsto 2 - x \Rightarrow z \mapsto 2 - z$$

$$(y \mapsto 4 - y^2) \circ (z \mapsto 2 - z) = (x \mapsto (y \mapsto 4 - y^2)((z \mapsto 2 - z)x))$$

Identiteta na množici A je preslikava:

$$id_A : A \to A$$
$$id_A : x \mapsto x$$

<u>Def:</u> $f : A \to B, g : B \to A$ rečemo, da je g **inverz** f, ko velja:

$$f \circ g = id_B \land g \circ f = id_A$$

Če ime f inverz, pravimo, da je $izomorfizem$.

Če obstaja izomorfizem $A \to B$, pravimo, da sta A in B **izomorfni** množici.
Pišemo $A \cong B$

<u>Primeri:</u>

(a) $A \times \varnothing \cong \varnothing$
$f : A \times \varnothing \to \varnothing$
Predpis ni potreben, ker ni nobenih elementov.
$g : \varnothing \to A \times \varnothing$
Iz prazne množice obstaja ena sama preslikava.

(b) $1 = \{()\}$
$A \times 1 \cong A$

$$f : A \times 1 \to A \qquad\qquad g : A \to A \times 1$$
$$(x, y) \mapsto x \qquad\qquad x \mapsto (x, ())$$

$$A \times 1 \to A \to A \times 1$$
$$(x, y) \overset{f}{\mapsto} x \overset{g}{\mapsto} (x, ())$$

(c) $A^{B \times C} \cong (A^B)^C$

$$\theta : A^{B \times C} \to (A^B)^C$$
$$\theta : \text{☼} \mapsto (c \mapsto (b \mapsto \text{☼}(b, c)))$$

$$\phi : (A^B)^C \to A^{B \times C}$$
$$\phi : \text{☾} \mapsto ((\beta, \gamma) \mapsto (\text{☾}(\gamma))(\beta))$$

4 Simbolni zapis

4.1 Izjavni račun:

- konstanti
  - $\perp$ - neresnica
  - $\top$ - resnica
- logični vezniki:
  - $p \wedge q$ - p in q (p, q sta izjavi)
  - $p \vee q$ - p ali q
  - $p \Rightarrow q$

    če p potem q
iz p sledi q
p je zadosten (pogoj) za q
q je potreben (pogoj) za p
  - $p \Leftrightarrow q$

    p če in samo če q
p čee q
p iff q (if and only if) p in q sta enakovredna ali ekvivalentna
  - $\neg p$ - ne p

4.2 Predikatni račun:

Izjavni + **kvantifikatorja**

- univerzalni kvantifikator:

  $\forall x \in B.p$
$(\forall x \in B)p$
$\forall x \in B : p$
$\forall x \in B(p)$

  "za vsak x iz B velja p"

  "vsi x-i iz B zadoščajo p"
- eksistenčni kvalifikator

$\exists x \in B.p$	"obstaja x iz B, da velja p"
	"obstaja x iz B, za katerega p"
	"za neki x iz B velja p"

4.3 Prednosti veznikov:

Vezniki si po prednosti sledijo od tistega z največjo, do tistega z najmanjšo v naslednjem vrstnem redu:

$$\neg, \wedge, \vee, (\Rightarrow, \Leftrightarrow), (\forall, \exists)$$