

Analiza 1

Vid Drobnič

Kazalo

1	Števila	2
1.1	Naravna števila	2
1.2	Cela števila	3
1.3	Racionalna števila	3
1.4	Dedekindov aksiom in Realna števila	10
1.5	Posledice Dedekindovega aksioma	17
1.6	Intervali	18

1 Števila

1.1 Naravna števila

- Z njimi štejemo: 1, 2, 3
- Množico naravnih števil označimo z \mathbb{N}

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- Vsako naravno število n ima naslednika n^+ ($n^+ = n + 1$)

Peanovi aksiomi:

\mathbb{N} je množica skupaj s pravilom, ki vsakemu naravnemu številu n dodeli njegovega naslednika $n^+ \in \mathbb{N}$ in velja:

1. za vse $m, n \in \mathbb{N}$ če $m^+ = n^+$, potem $m = n$
2. obstaja $1 \in \mathbb{N}$, ki ni naslednik nobenega naravnega števila
3. Če je $A \subset \mathbb{N}$ in če je $1 \in A$ ¹ in če velja: če $n \in A$, potem $n^+ \in A$ ², potem $A = \mathbb{N}$

Aksiom (3) se imenuje **aksiom popolne indukcije**.

- Naravna števila lahko **seštevamo, množimo**.
- \mathbb{N} so urejena po velikosti 1, 2, 3, 4, 5, ...

$$\{3, 5, 6, 10\} \subset \mathbb{N}$$

$$\{3, 5, 7, 16, 23, \dots\} \subset \mathbb{N}$$

- Vsaka neprazna podmnožica \mathbb{N} ima najmanjši element.
- V splošnem ne velja³, da ima vsaka neprazna podmnožica \mathbb{N} največji element.

¹indukcijska baza

²indukcijski korak

³ne velja za vse (množice)

1.2 Cela števila

Označimo jih z \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

- Seštevanje in množenje se iz \mathbb{N} razširita na \mathbb{Z} .
- Poleg tega je definirano **odštevanje**.
- Množico celih števil uredimo na običajen način.
- Ni res, da bi imela vsaka neprazna podmnožica \mathbb{Z} najmanjši element.
- V splošnem deljenje ni definirano ($\frac{3}{2}$)

1.3 Racionalna števila

Racionalna števila so kvocienti celih števil. Bolj natančno: kvocienti celih in naravnih števil.

Dva ulomka $\frac{m}{n}, \frac{k}{l}$ predstavljata isto racionalno število če: $ml = nk$ lahko naredimo:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

Množico $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ razdelimo na razrede: urejena para (m, n) in (k, l) sta v istem razredu, če velja $ml = nk$.

Racionalno število je razred urejenih parov in ga označimo z $\frac{m}{n}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Seštevanje v \mathbb{Q} :

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}$$

Seštevanje ulomkov je *dobro definirano*:

če je: $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}, \frac{k'}{l'} = \frac{k}{l}$

potem je: $\frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'} = \frac{m}{n} + \frac{k}{l}$

vemo: $m'n = mn'$ in $k'l = kl'$

Dokaz:

$$\begin{aligned}\frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'} & \stackrel{(def)}{=} \frac{m'l' + n'k'}{n'l'} \cdot \frac{mk}{mk} = \\ & = \frac{m'l'mk + n'k'mk}{n'ml'k} = \\ & = \frac{m'mk'l + m'nk'k}{m'nk'l} = \frac{ml + nk}{nl} \stackrel{(def)}{=} \frac{m}{n} + \frac{k}{l}\end{aligned}$$

Množenje v \mathbb{Q} :

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}$$

Množenje je dobro definirano (izpeljava doma).

Deljenje v \mathbb{Q} :

$$\frac{m}{n} : \frac{k}{l} = \frac{ml}{nk}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}, k \neq 0$$

Lastnosti seštevanja

Naj bo A (številsko) množica z operacijama $+$ in \cdot .

Osnovne lastnosti računskih operacij bomo imenovali **aksiomi**. Druge lastnosti izpeljemo iz aksiomov.

A1 asociativnost seštevanja

Za vse $a, b, c \in A$ velja $(a + b) + c = a + (b + c)$

A2 komutativnost seštevanja

Za vse $a, b \in A$ velja da $a + b = b + a$

A3 obstoj enote za seštevanje

Obstaja za element $0 \in A$ za katerega velja da: $0 + a = a$ za vse $a \in A$

A4 obstoj nasprotnega števila (elementa)

Za vsak $a \in A$ obstaja nasprotno število $-a \in A$ za katerega velja:
 $(-a) + a = 0$

Opomba: Množica A za operacijo $+$, ki ustreza aksiomom od A1 do A4 je **Abelova grupa** za $+$.

Trditev: Naj $(A, +)$ ustreza aksiomom od A1 do A4.

- (1) $\forall a \in A$ ima eno samo nasprotno število
- (2) **Pravilo krajšanja:** za vse $a, x, y \in A$ velja: $a + x = a + y \Rightarrow x = y$
- (3) $-0 = 0$

Dokaz:

- (1) izberemo poljubno število $a \in A$. Dokazujemo da ima a natanko 1 nasprotni element.

Po A4 nasprotno število obstaja. Denimo, da sta $b, c \in A$ nasprotni števili od a .

$$\begin{aligned} b + a = 0 \text{ in } c + a = 0 \\ (a + b) + c \stackrel{A2}{=} (b + a) + c \stackrel{\text{predp.}}{=} 0 + c \stackrel{A2}{=} c \\ (a + b) + c \stackrel{A2}{=} (b + a) + c \stackrel{A1}{=} b + (a + c) \stackrel{A2}{=} b + (c + a) \stackrel{\text{predp.}}{=} b + 0 \stackrel{A2}{=} 0 + b \stackrel{A3}{=} b \\ c = b \end{aligned}$$

- (2)

$$\begin{aligned} a + x = a + y &\stackrel{A4}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow (-a) + (a + x) &= (-a) + (a + y) \stackrel{A1}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow ((-a) + a) + x &= ((-a) + a) + y \stackrel{A4}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow 0 + x = 0 + y &\stackrel{A3}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

- (3) $-0 = 0$

$$0 \stackrel{A4}{=} (-0) + 0 \stackrel{A2}{=} 0 + (-0) \stackrel{A3}{=} -0$$

Odštevanje v A : razlika števil a in b je vsota a in nasprotnega elementa od b .

$$a - b := a + (-b)$$

$b - a$ je rešitev enačbe $a + x = b$

Pozor: odštevanje ne ustreza aksiomom od A1 do A4.

Lastnosti množenja

A5 asociativnost množenja

Za vse $a, b, c \in A$ velja: $(ab)c = a(bc)$

A6 komutativnost množenja

Za vse $a, b, c \in A$ velja: $ab = ba$

A7 obstoj enote za množenje

$\exists 1 \in A : 1 \cdot a = a$, za $\forall a \in A$

A8 obstoj obratnega števila (elementa)

Vsak $a \in A, a \neq 0$, ima obratni element, tj.: $a^{-1} \in A : a^{-1} \cdot a = 1$

Množici A z operacijo $+$, ki ustreza A1-A4, rečemo **grupa za seštevanje** (Abelova grupa).

Množica $A \setminus \{0\}$ z operacijo \cdot , ki ustreza A5-A8 je **grupa za množenje**.

Podobno kot za seštevanje lahko izpeljemo:

Trditve: veljajo:

(1) Vsak $a \in A \setminus \{0\}$ ima eno samo obratno število

(2) (pravilo krajšanja za množenje)

Za vsak $a, x, y \in A$ velja: $ax = ay \Rightarrow x = y$

(3) $1^{-1} = 1$

A9 Števili 0 in 1 sta različni $0 \neq 1$

A10 Distributivnost

Za vsake $a, b, c \in A$ velja:

$$(a + b)c = ac + bc$$

Def: Množico A z operacijama $+$ in \cdot , ki ustreza aksiomom A1-A10, imenujemo **komutativen⁴ obseg** ali **polje**.

Primer: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ so polje.

V A vpeljemo urejenost z dvema aksiomoma:

A11: Za vsak $a \in A \setminus \{0\}$ velja, da je natanko eno od števil a , $-a$ pozitivno. Število 0 ni niti pozitivno niti negativno. (Število a je negativno, če je število $-a$ pozitivno).

A12: Za vsaka $a, b \in A$ velja: če sta a in b pozitivni števili, potem sta tudi $a + b$ in $a \cdot b$ pozitivni števili.

Def: Če ima obseg $(A, +, \cdot)$ urejenost, ki izpolnjuje A11 in A12, A imenujemo **urejen obseg** (urejeno polje).

Primer: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ z običajno urejenostjo je urejen obseg.

$\frac{m}{n}$ je pozitiven, če $m \cdot n > 0$

Def: Naj bo A urejen obseg. Za poljubna $a, b \in A$ definiramo:

Pišemo $a > b$ natanko tedaj, kadar je $a - b$ pozitivno število.

V tem primeru pišemo tudi $b < a$

V posebnem primeru pišemo $a > 0$, kadar je a pozitivno število.

Def: Naj bo A urejen obseg. Za poljubna $a, b \in A$

$a \leq b$ natanko takrat, kadar $a < b$ ali $a = b$

Trditev: V urejenem obsegu A velja:

(1) Za poljubni števili $a, b \in A$ velja natanko ena od možnosti:

$$a < b, a = b, a > b$$

Sledi iz A11 uporabljen za $a - b$.

⁴komutativnost se nanaša na komutativnost množenja

- (2) Za poljubne $a, b, c \in A$ velja:
če je $a > b \wedge b > c$, potem $a > c$ (tranzitivnost)
- (3) Za poljubne $a, b, c \in A$ velja:
če je $a > b$, potem $a + c > b + c$
- (4) Za poljubne $a, b, c \in A, c > 0$:
če je $a > b$, potem je $ac > bc$
- 5 Za poljubne $a, b, c, d \in A$:
če je $a > b > 0$ in $c > d > 0$, potem je $ac > bd$

Dokaz:

- (2) $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

Po definiciji: $a - b > 0$ in $b - c > 0$

Zato po A12:

$$\begin{aligned}(a - b) + (b - c) &> 0 \\a + (-b) + b + (-c) &> 0 \\a + 0 + (-c) &> 0 \\a - c &> 0\end{aligned}$$

zato $a > c$

- (3) denimo, da je $a > b$

dokazujemo, da je $a + b > b + c$, tj: $(a + c) - (b + c) > 0$

$$\begin{aligned}(a + c) - (b + c) &= a + c + (-(b + c)) = \\&= a + c + (-b) + (-c) = \\&= (a + (-b)) + (c + (-c)) = \\&= a + (-b) = a - b\end{aligned}$$

Dokaz da $-(b + c) = (-b) + (-c)$:

$-(b + c)$ je nasprotni element od $b + c$, kar pomeni da je njuna vsota enaka 0. Če velja $-(b + c) = (-b) + (-c)$, mora biti tudi $b + c + (-b) + (-c) = 0$:

$$b + c + (-b) + (-c) \stackrel{A2, A1}{=} (b + (-b)) + (c + (-c)) \stackrel{A4}{=} 0 + 0 \stackrel{A3}{=} 0$$

Če $a > b$ je $a - b > 0$, zato je $(a + c) - (b + c) > 0$, kar pomni $a + c > b + c$.

(5) $a > b > 0$ in $c > d > 0$

Dokazujemo $ac > bd$:

$$a > b \stackrel{A4}{\Rightarrow} ac > bc \quad (c > 0)$$

$$c > d \stackrel{A4}{\Rightarrow} bc > bd \quad (b > 0)$$

Z upoštevanjem tranzitivnosti (2) dobimo: $ac > bd \square$

Racionalna števila predstavimo na številski premici.

Racionalna števila so na številski premici **povsod gosta** tj: na vsakem nepraznem odprtem intervalu leži racionalno število.

Racionalna števila ne pokrijejo številske premice

Trditev: rešitev enačbe $x^2 = 2, x > 0$ ni racionalno število. ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Dokaz: Dokazujemo da x ni ulomek.

Dokazujemo s protislovjem.

- privzamemo, da tisto kar dokazujemo ni res. (predpostavimo, da x je ulomek)
- sklepamo
- skepi nas privedejo v protislovje s predpostavko

$$x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$$

Če je x ulomek, ga lahko zapišemo kot okrajšan ulomek, zato sta m in n tuji

si števili.

$$\begin{aligned}
 x^2 = 2 &\Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \\
 \frac{m^2}{n^2} &= 2 \\
 m^2 &= 2n^2 \\
 2|m^2 &\Rightarrow 2|m \\
 \exists l \in \mathbb{N} : m &= 2l \\
 4l^2 &= 2n^2 \\
 2l^2 &= n^2 \\
 2|n^2 &\Rightarrow 2|n \\
 &\rightarrow \leftarrow
 \end{aligned}$$

Dokaz da $2|m^2 \Rightarrow 2|m$:

Če je m liho, potem $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
 m &= 2k + 1 \\
 m^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\
 m^2 &\text{ je lih}
 \end{aligned}$$

1.4 Dedekindov aksiom in Realna števila

Radi bi skonstruirali številsko množico, ki bo vsaj urejen obseg in, ki zapolni številsko premico.

Dedekindov pristop

Def: **Rez** je podmnožica $A \subset \mathbb{Q}$, za katero velja:

- (i) $A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{Q}$
- (ii) Če je $p \in A$, potem za vsak $q \in \mathbb{Q}$ in $q < p$, velja $q \in A$
- (iii) za vsak $p \in A$ obstaja $q \in A, q > p$ (A nima največjega elementa)

Def: Množica realnih števil je množica vseh rezov, označimo jo s \mathbb{R}

Primer: 16 ustreza rez: $\{p \in \mathbb{Q}; p < 16\} = B$

Trditev: Preslikava $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ in je definirana s predpisom:

$$q \mapsto \{p \in \mathbb{Q}; p < q\} = p^*$$

vloži množico racionalnih števil v množico realnih števil.

Vpeljimo računski operaciji v \mathbb{R} .

Def: Naj bosta A in B reza. Vsota rezov A in B je

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$$

$$\textit{Opomba: } (p + q)^* = p^* + q^*$$

Trditev: Če sta A in B reza, potem je tudi $A + B$ rez.

Dokaz(trditev): Denimo da sta A in B reza.

Dokazujemo da je $A + B$ rez:

$$(i) \quad \underline{\underline{A + B \neq \emptyset}}$$

Ker sta A in B reza, po lastnosti (i) obstaja $a \in A$ in $b \in B$. Potem je $a + b \in A + B$. Sledi $A + B \neq \emptyset$ \square

$$\underline{\underline{A + B \neq \mathbb{Q}}}$$

Obstaja $c \in \mathbb{Q}, c \notin A$ in obstaja $d \in \mathbb{Q}, d \notin B$.

$$c + d \notin A + B$$

Denimo, da je $c + d \in A + B$.

Potem velja, da je $c + d = a + b$ za $a \in A, b \in B$.

Iz (ii) sledi: $c > a$ in $d > b \Rightarrow a + b < c + d \rightarrow \leftarrow$

$$(ii) \quad \text{Denimo: } p \in A + B, \text{ dokazujemo da za } q \in \mathbb{Q}, q < p \text{ velja } \underline{\underline{q \in A + B}}$$

Obstajata $a \in A$ in $b \in B$, da $p = a + b$

$$q = a + q - a$$

Če je $q - a < b$, potem $q - a \in B$

$$q < a + b$$

$$q < p$$

\square

(iii) $A + B$ nima največjega elementa.

izberimo $p \in A + B$

iščemo $q \in A + B, q > p$

Obstajata $a \in A, b \in B$, da je $p = a + b$

Obstaja $a' \in A, a' > a$

$$q := a' + b \in A + B$$

$$q > p$$

□

Ni težko preveriti, da za $(\mathbb{R}, +)$ veljajo A1-A4.

Asociativnost in komutativnost se dokaže z operacijami na elementih reza.

0^* je enota za seštevanje.

Nasprotni rez od A :

$$-A = \{r \in \mathbb{Q}, \text{ obstaja } r' \in \mathbb{Q}, r' > r \text{ in } r' + p < 0 \text{ za vse } p \in A\}$$

(i) $-A \neq \emptyset$

$$\underline{-A \neq \mathbb{Q}}$$

$$q + a < 0 \text{ za vse } q \in \mathbb{Q}$$

$$q = -a$$

(ii) $q \in -A : r < q$

$$q + a < 0 \text{ za vse } a \in A$$

$$r + a < q + a \text{ za vse } a \in A \text{ po tranzitivnosti: } r + a < 0$$

(iii) Izberemo poljuben $r \in A$. Iščemo $q \in A, q > r$.

$$q := \frac{r + r'}{2} (r' > r, r' \in \mathbb{Q} : r' + p < 0 \text{ za vse } p \in \mathbb{Q})$$

$$q \in \mathbb{Q}, r' > q$$

Def: Pravimo da je A pozitiven, če je $0^* \in A, A \neq 0^*$. Denimo da sta A in B pozitivna reza:

$$A \cdot B = \{q \in \mathbb{Q}, \text{ obstajata } a \in A, a > 0 \text{ in } b \in B, b > 0, \text{ da je } q < ab\}$$

Želimo $(pq)^* = p^* \cdot q^*, p, q \in \mathbb{Q}$

Def: Naj bosta A in B poljubna reza.

$$A \cdot B = \begin{cases} A \cdot B & A > 0 \wedge B > 0 \\ -A \cdot (-B) & A > 0 \wedge B < 0 \\ -(-A) \cdot B & A < 0 \wedge B > 0 \\ (-A) \cdot (-B) & A < 0 \wedge B < 0 \end{cases}$$

Če je vsaj eden od rezov enak 0^* , potem $A \cdot B = 0^*$.

Ni težko preveriti, da množenje rezov izpolnjuje A5-A8 in A9, A10.

Enota za množenje je 1^* .

Urejenost izpolnjuje A11 in A12.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je **urejen obseg** in vsebuje \mathbb{Q} kot **urejen podobseg**.

Cilj: Obseg \mathbb{R} izpolnjuje še dodaten aksiom A13 (**Dedekindov aksiom**), ki pove, da \mathbb{R} zapolnjuje številsko premico.

Aksioma A13 obseg \mathbb{Q} ne izpolnjuje.

Def: Naj bo B urejen obseg in $A \subset B$. Pravimo, da je A navzgor omejena, če obstaja $M \in B$, da velja:

$$\forall a \in A : a \leq M$$

$\forall M$ s to lastnostjo pravimo zgornja meja množice A . Če je $A \subset \mathbb{Q}$ (ali \mathbb{R}) in je množica navzgor omejena, potem ima A neskončno zgornjih mej.

Def: Naj bo A navzgor omejena množica. Če obstaja najmanjša od vseh zgornjih mej množice A v B , jo imenuje natančna zgornja meja množice A .

Torej je $\alpha \in B$ natančna zgornja meja množice A , če velja:

(i) α je zgornja meja $\forall a \in A : a \leq \alpha$

(ii) Če $b \in B, b < \alpha$, potem b ni zgornja meja množice A , t.j.: $\exists a \in A : a > b$

Natančno zgornjo mejo množice A imenujemo tudi **supremum** množice A in jo označimo z $\sup A$

Def: Če obstaja največji element množice A , ga imenujemo **maksimum** množice A in označimo z $\max A$.

Če ima A maksimum, potem velja:

$$\max A \in A \wedge \forall a \in A : a \leq \max A$$

Če ima A maksimum, potem $\max A = \sup A$. (Za a v (2) lastnosti definicije supremuma vzamemo $\max A$) *Dokaz:*

(1) $\max A$ je zgornja meja A (po definiciji maksimuma).

(2) če $b < \max A$, potem b ni zgornja meja.

$\exists \max A$, ki je večji

Primeri:

1. $A = \{x \in \mathbb{Q}, x < 0\} \subset \mathbb{Q}$

4 je zgornja meja množice A , ker $x \in A, x < 0, 0 < 4 \Rightarrow x < 4$

$\Rightarrow A$ je navzgor omejena.

0 je natančna zgornja meja množice A

(a) $x \in A, x < 0$

(b) Izberemo poljuben $b \in \mathbb{Q}, b < 0$ in dokazujemo, da b ni zgornja meja.

$$b < \frac{b}{2} < 0; \frac{b}{2} \in A, \frac{b}{2} > b$$

Množica A nima maksimuma: $0 \notin A$.

2. $C = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$

C je navzgor omejena z 2.

$$x \in C : x^2 < 2 \wedge 2 < 4 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x < 2$$

(a) Vsako število $p \in \mathbb{Q}, p^2 > 2$ je zgornja meja množice C .

(b) Nobeno racionalno število $q \in \mathbb{Q}, q^2 < 2$ ni zgornja meja množice C .

Vemo: Rešitev enačbe $x^2 = 2, x > 0, x \notin \mathbb{Q}$.

Sledi: $C \subset \mathbb{Q}$ nima natančne zgornje meje.

Dokaz:

(a)

$$x^2 < 2 < p^2$$

sledi: $x^2 < p^2 \Rightarrow x < p$ za vse $x \in C$ \square

(b) Iščemo $c \in C$, da je $c > q, c^2 < 2$

$$c := \frac{2q+2}{q+2} = q + \frac{2q+2-q^2-2q}{q+2} = q + \frac{2-q^2}{q+2} > 0$$

($q^2 < 2$)

$$c^2 = \left(\frac{2q+2}{q+2}\right)^2 = \frac{4(q^2+2q+1)}{q^2+4q+4}$$

$$c^2 - 2 = \frac{4q^2+8q+4-2q^2-8q-8}{(q+2)^2} = \frac{2q^2-4}{(q+2)^2} = \frac{2(q^2-2)}{(q+2)^2} > 0$$

$$q^2 < 2$$

Podobno kot zgornjo mejo, navzgor omejeno množico, supremum in maksimum, definiramo spodnjo mejo, navzdol omejeno množico, infimum in minimum.

A13 (Dedekindov aksiom): Vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica v množici A ima supremum (v množici A).

Def: Če množica $(A, +, \cdot, <)$ izpolnjuje aksiome A1-A13 jo imenujem *poln urejen obseg* (poln se nanaša na A13).

Trditev: $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ je urejen obseg, ki ne izpolnjuje A13.

Izrek: vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica v \mathbb{R} ima natančno določeno zgornjo mejo. (\mathbb{R} izpolnjuje A13)

Posledica: $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ je poln urejen obseg.

Posledica: Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica \mathbb{R} ima natančno spodnjo mejo.

A neprazna navzdol omejena.

$$-A = \{x; -x \in A\}$$

$-A$ je neprazna, navzgor omejena (če m spodnja meja od A , je $-m$ zgornja meja od $-A$). $\Rightarrow -A$ ima supremum in velja: $-\sup A = \inf A$

Dokaz (izrek): Izberemo poljubno neprazno navzgor omejeno podmnožico \mathcal{A} v \mathbb{R} .

$$C = \cup A, A \in \mathcal{A}$$

Dokazati je treba:

1. C je rez
2. $C = \sup \mathcal{A}$

1. (i) $C \neq \emptyset$

Ker \mathcal{A} ni prazna $\exists A \in \mathcal{A}$. Torej velja $A \subset C$, torej $C \neq \emptyset$.

$$C \neq \mathbb{Q}$$

Ker je \mathcal{A} omejena, obstaja zgornja meja M množice \mathcal{A} , velja:

$$\forall A \in \mathcal{A} : A \leq M$$

$$\forall A \in \mathcal{A} : A \subset M$$

Sledi: $C \subset M$, zato $C \neq \mathbb{Q}$ (ker $M \neq \mathbb{Q}/M$ je rez).

- (ii) $p \in C, q \in \mathbb{Q}, q < p \Rightarrow q \in C$

$p \in C \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}$, da je $p \in A$. Ker je A rez, za $q \in \mathbb{Q}, q < p$ velja $q \in A$.

Sledi: $q \in C$.

- (iii) $p \in C \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, q > p : q \in C$ $p \in C \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}$, da je $p \in A$.

Ker je A rez, $\exists q \in A, q > p$.

Sledi: $q \in C$.

2. (i) C je zgornja meja \mathcal{A}

Ker je $A \subset C$ za vse $A \in \mathcal{A}$, velja $A \leq C$ za vse $A \in \mathcal{A}$. t.j.: C je zgornja meja.

- (ii) C je natančna zgornja meja \mathcal{A}

Izberimo poljuben $D < C$. Dokazujemo, da D ni zgornja meja \mathcal{A} .

Ker je $D < C, D \subset C$ in $D \neq C$, obstaja $p \in \mathbb{Q}, p \in C$ in $p \notin D$.

Ker je $p \in C$, obstaja $A \in \mathcal{A}$, da je $p \in A$.

Velja: $A > D$ in $A \in \mathcal{A}$ (vemo da sta vsaka reza primerljiva po velikosti.)

Sledi: D ni zgornja meja. \square

Za radovedne: Poleg Dedekinda je realna števila definiral tudi Cantor. Ta je to naredil s Cauchyjevimi zaporedji.

Opomba: Med obsegoma \mathbb{Q} in \mathbb{R} je še veliko obsegov.

Definicija: Pravimo, da je x iracionalno število, če $x \notin \mathbb{Q}$.

Rešitvam polinomskih enačb s celimi koeficienti rečemo *algebraična števila*.

Primer: $\sqrt{2} : x^2 - 2 = 0$

Niso vsa iracionalna števila algebraična: π, e . Tem pravimo *transcendentna števila*.

1.5 Posledice Dedekindovega aksioma

- Množica \mathbb{Z} ni navzgor omejena v \mathbb{R} .

Dokaz: Denimo, da je \mathbb{Z} navzgor omejena v \mathbb{R} . Potem obstaja $M \in \mathbb{R}$, da $M = \sup \mathbb{Z}$. Torej $M - 1$ ni zgornja meja \mathbb{Z} .

$$\begin{aligned} \exists a \in \mathbb{Z}, a > M - 1 \\ a + 1 > M, a + 1 \in \mathbb{Z} \rightarrow \leftarrow \end{aligned}$$

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{Z} : a < b$

Dokaz: če to ne bi bilo res, bi bilo število a zgornja meja \mathbb{Z} . To pa ni res (prejšnja posledica).

- *Arhimedska lastnost:* Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^+$. Potem obstaja $n \in \mathbb{N} : na > b$.

Dokaz: Obstajati mora $n \in \mathbb{N} : n > \frac{b}{a} \therefore$ Po prejšnji posledici tak n obstaja. \square

- Naj bo $a \in \mathbb{R}^+$. Potem obstaja $n \in \mathbb{N}$, da $\frac{1}{n} < a$.

Dokaz: uporabimo arhimedsko lastnost za $n = 1$.

- Naj bosta a, b poljubni $\mathbb{R}, a < b$. Obstaja $q \in \mathbb{Q}$, da velja $a < q < b$.

Dokaz: če je $b - a > 1$, potem obstaja $m \in \mathbb{Z}, a < m < b$

$\{n \in \mathbb{Z}, n \leq a\}$ je navzdol omejena neprazna.

$$\sup\{n \in \mathbb{Z}, n \leq a\} = x, x \in \mathbb{Z}$$

$$m := x + 1$$

$$b > m > 0$$

$$b - a > 0$$

$$\exists n \in \mathbb{N} : n(b - a) > 1$$

Obstaja $m \in \mathbb{Z} : an < m < nb$.

$$a < \frac{m}{n} < b \quad \square$$

Rečemo tudi: \mathbb{Q} so v \mathbb{R} *povsod gosta*.

1.6 Intervali

Def: Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ *zaprti interval*
2. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ *odprti interval*
3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ *polodprti interval*
 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
4. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
 $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$
 $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$
 $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$
 $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Def: Naj bo $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ imenujemo ε -*okolica* števila a .

Okolica točke a je vsaka taka podmnožica v \mathbb{R} , ki vsebuje kakšno ε -okolico točke a .