Analiza 1

Vid Drobnič

Kazalo

1 Števila

1.1 Naravna števila

- Z njimi štejemo: 1, 2, 3
- Množico naravnih števil označimo z $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

- Vsako naravno število n ima naslednika n^+ ($n^+ = n + 1$)

Peanovi aksiomi:

$\mathbb{N}$ je množica skupaj s pravilom, ki vsakemu naravnemu številu n dodeli njegovega naslednika $n^+ \in \mathbb{N}$ in velja:

1. za vse $m, n \in \mathbb{N}$ če $m^+ = n^+$, potem $m = n$
2. obstaja $1 \in \mathbb{N}$, ki ni naslednik nobenega naravnega števila
3. Če je $A \subset \mathbb{N}$ in če je $1 \in A$ [1] in če velja: če $n \in A$, potem $n^+ \in A$ [2], potem $A = \mathbb{N}$

Aksiom (3) se imenuje **aksiom popolne indukcije**.

- Naravna števila lahko **seštevamo, množimo**.
- $\mathbb{N}$ so urejena po velikosti $1, 2, 3, 4, 5, ...$

$$\{3, 5, 6, 10\} \subset \mathbb{N}$$

$$\{3, 5, 7, 16, 23, ...\} \subset \mathbb{N}$$

- Vsaka neprazna podmnožica $\mathbb{N}$ ima najmanjši element.
- V splošnem ne velja[3], da ima vsaka neprazna podmnožica $\mathbb{N}$ največji element.

---

[1] indukcijska baza
[2] indukcijski korak
[3] ne velja za vse (množice)

1.2 Cela števila

Označimo jih z $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$$

- Seštevanje in množenje se iz $\mathbb{N}$ razširita na $\mathbb{Z}$.
- Poleg tega je definirano **odštevanje**.
- Množico celih števil uredimo na običajen način.
- Ni res, da bi imela vsaka neprazna podmnožica $\mathbb{Z}$ najmanjši element.
- V splošnem deljenje ni definirano $(\frac{3}{2})$

1.3 Racionalna števila

Racionalna števila so kvocienti celih števil. Bolj natančno: kvoceinti celih in naravnih števil.

Dva ulomka $\frac{m}{n}, \frac{k}{l}$ predstavljata isto racionalno število če: $ml = nk$
lahko naredimo:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

Množico $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ razdelimo na razrede: urejena para (m, n) in (k, l) sta v istem razredu, če velja $ml = nk$.

Racionalno število je razred urejenih parov in ga označimo z $\frac{m}{n}$.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

Seštevanje v $\mathbb{Q}$:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}$$

Seštevanje ulomkov je *dobro definirano:*
če je: $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}, \frac{k'}{l'} = \frac{k}{l}$
potem je: $\frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'} = \frac{m}{n} + \frac{k}{l}$

vemo: $m'n = mn'$ in $k'l = kl'$
Dokaz:

$$\frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'} =^{(def)} \frac{m'l' + n'k'}{n'l'} \frac{\cdot mk}{\cdot mk} =$$
$$= \frac{m'l'mk + n'k'mk}{n'ml'k} =$$
$$= \frac{m'mk'l + m'nk'k}{m'nk'l} = \frac{ml + nk}{nl} =^{(def)}= \frac{m}{n} + \frac{k}{l}$$

Množenje v $\mathbb{Q}$:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l, \in, \mathbb{N}$$

Množenje je dobro definirano (izpeljava doma).

Deljenje v $\mathbb{Q}$:

$$\frac{m}{n} : \frac{k}{l} = \frac{ml}{nk}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}, k \neq 0$$

Lastnosti seštevanja

Naj bo A (številska) množica z operacijama $+$ in $\cdot$.

Osnovne lastnosti računskih operacij bomo imenovali **aksiomi**. Druge lastnosti izpeljemo iz aksiomov.

A1 asociativnost seštevanja

Za vse $a, b, c \in A$ velja $(a + b) + c = a + (b + c)$

A2 komutativnost seštevanja

Za vse $a, b \in A$ velja da $a + b = b + a$

A3 obstoj enote za seštevanje

Obstaja za element $0 \in A$ za katerega velja da: $0 + a = a$ za vse $a \in A$

A4 obstoj nasprotnega števila (elementa)

Za vsak $a \in A$ obstaja nasprotno število $-a \in A$ za katerega velja: $(-a) + a = 0$

Opomba: Množica A za operacijo $+$, ki ustreza aksiomom od A1 do A4 je **Abelova grupa** za $+$.

Trditev: Naj $(A, +)$ ustreza aksiomom od A1 do A4.

(1) $\forall a \in A$ ima eno samo nasprotno število

(2) **Pravilo krajšanja:** za vse $a, x, y \in A$ velja: $a + x = a + y \Rightarrow x = y$

(3) $-0 = 0$

Dokaz:

(1) izberemo poljubno število $a \in A$. Dokazujemo da ima a natanko 1 nasprotni element.

Po A4 nasprotno število obstaja. Denimo, da sta $b, c \in A$ nasprotni števili od a.

$$b + a = 0 \text{ in } c + a = 0$$

$$(a + b) + c \stackrel{\text{A2}}{=} (b + a) + c \stackrel{\text{predp.}}{=} 0 + c \stackrel{\text{A2}}{=} c$$

$$(a+b)+c \stackrel{\text{A2}}{=} (b+a)+c \stackrel{\text{A1}}{=} b+(a+c) \stackrel{\text{A2}}{=} b+(c+a) \stackrel{\text{predp.}}{=} b+0 \stackrel{\text{A2}}{=} 0+b \stackrel{\text{A3}}{=} b$$

$$c = b$$

(2)

$$a + x = a + y \stackrel{\text{A4}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (-a) + (a + x) = (-a) + (a + y) \stackrel{\text{A1}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow ((-a) + a) + x = ((-a) + a) + y \stackrel{\text{A4}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 0 + x = 0 + y \stackrel{\text{A3}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x = y$$

(3) $-0 = 0$

$$0 \stackrel{\text{A4}}{=} (-0) + 0 \stackrel{\text{A2}}{=} 0 + (-0) \stackrel{\text{A3}}{=} -0$$

Odštevanje v A: razlika števil a in b je vsota a in nasprotnega elementa od b.

$$a - b := a + (-b)$$

$b - a$ je rešitev enačbe $a + x = b$

Pozor: odštevanje ne ustreza aksiomom od A1 do A4.

Lastnosti množenja

A5 asociativnost množenja

Za vse $a, b, c, \in A$ velja: $(ab)c = a(bc)$

A6 komutativnost množenja

Za vse $a, b, c \in A$ velja: $ab = ba$

A7 obstoj enote za množenje

$\exists 1 \in A : 1 \cdot a = a$, za $\forall a \in A$

A8 obstoj obratnega števila (elementa)

Vsak $a \in A, a \neq 0$, ima obratni element, tj.: $a^{-1} \in A : a^{-1} \cdot a = 1$

Množici A z operacijo $+$, ki ustreza A1-A4, rečemo **grupa za seštevanje** (Abelova grupa).

Množica $A \setminus \{0\}$ z operacijo $\cdot$, ki ustreza A5-A8 je **grupa za množenje.**

Podobno kot za seštevanje lahko izpeljemo:
Trditev: veljajo:

(1) Vsak $a \in A \setminus \{0\}$ ima eno samo obratno število

(2) (pravilo krajšanja za množenje)

Za vsak $a, x, y \in A$ velja: $ax = ay \Rightarrow x = y$

(3) $1^{-1} = 1$

A9 Števili 0 in 1 sta različni $0 \neq 1$

A10 Distributivnost

Za vsake $a, b, c \in A$ velja:

$$(a + b)c = ac + bc$$

Def: Množico A z operacijama $+$ in $\cdot$, ki ustreza aksiomom A1-A10, imenujemo **komutativen**[4] **obseg** ali **polje**.
Primer: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ so polje.

V A vpeljemo urejenost z dvema aksiomoma:

A11: Za vsak $a \in A \setminus \{0\}$ velja, da je natanko eno od števil a, $-a$ pozitivno. Število 0 ni niti pozitivno niti negativno. (Število a je negativno, če je število $-a$ pozitivno).

A12: Za vsaka $a, b \in A$ velja: če sta a in b pozitivni števili, potem sta tudi $a + b$ in $a \cdot b$ pozitivni števili.

Def: Če ima obseg $(A, +, \cdot)$ urejenost, ki izpolnjuje A11 in A12, A imenujemo **urejen obseg** (urejeno polje).
Primer: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ z običajno urejenostjo je urejen obseg.

$\frac{m}{n}$ je pozitiven, če $m \cdot n > 0$

Def: Naj bo A urejen obseg. Za poljubna $a, b \in A$ definiramo:

Pišemo $a > b$ natanko tedaj, kadar je $a - b$ pozitivno število.

V tem primeru pišemo tudi $b < a$

V posebnem primeru pišemo $a > 0$, kadar je a pozitivno število.

Def: Naj bo A urejen obseg. Za poljubna $a, b \in A$

$a \leq b$ natanko takrat, kadar $a < b$ ali $a = b$

Trditev: V urejenem obsegu A velja:

(1) Za poljubni števili $a, b \in A$ velja natanko ena od možnosti:

$$a < b,\ a = b,\ a > b$$

Sledi iz A11 uporabljen za $a - b$.

[4]komutativnost se nanaša na komutativnost množenja

(2) Za poljubne $a, b, c \in A$ velja:

če je $a > b \wedge b > c$, potem $a > c$ (tranzitivnost)

(3) Za poljubne $a, b, c \in A$ velja:

če je $a > b$, potem $a + c > b + c$

(4) Za poljubne $a, b, c, \in A, c > 0$:

če je $a > b$, potem je $ac > bc$

5 Za poljubne $a, b, c, d, \in A$:

če je $a > b > 0$ in $c > d > 0$, potem je $ac > bd$

Dokaz:

(2) $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

Po definiciji: $a - b > 0$ in $b - c > 0$

Zato po A12:

$$\begin{aligned}(a-b) + (b-c) &> 0\\ a + (-b) + b + (-c) &> 0\\ a + 0 + (-c) &> 0\\ a - c &> 0\end{aligned}$$

zato $a > c$

(3) denimo, da je $a > b$

dokazujemo, da je $a + b > b + c$, tj: $(a + c) - (b + c) > 0$

$$\begin{aligned}(a+c) - (b+c) =& a + c + (-(b+c)) =\\ & a + c + (-b) + (-c) =\\ & (a + (-b)) + (c + (-c)) =\\ & a + (-b) = a - b\end{aligned}$$

Dokaz da $-(b + c) = (-b) + (-c)$:

$-(b + c)$ je nasprotni element od $b + c$, kar pomeni da je njuna vsota enaka 0. Če velja $-(b + c) = (-b) + (-c)$, mora biti tudi $b + c + (-b) + (-c) = 0$:

$$b + c + (-b) + (-c) \overset{A2,A1}{=} (b + (-b)) + (c + (-c)) \overset{A4}{=} 0 + 0 \overset{A3}{=} 0$$

Če $a > b$ je $a-b > 0$, zato je $(a+c)-(b+c) > 0$, kar pomni $a+c > b+c$.

(5) $a > b > 0$ in $c > d > 0$

Dokazujemo $ac > bd$:

$a > b \overset{4}{\Rightarrow} ac > bc$ $(c > 0)$
$c > d \overset{4}{\Rightarrow} bc > bd$ $(b > 0)$

Z upoštevanjem tranzitivnosti (2) dobimo: $ac > bd\square$

Racionalna števila predstavimo na številski premici.

Racionalna števila so na številski premici **povsod gosta** tj: na vsakem nepraznem odprtem intervalu leži racionalno število.

Racionalna števila ne pokrijejo številske premice

Trditev: rešitev enačbe $x^2 = 2, x > 0$ ni racionalno število. ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)
Dokaz: Dokazujemo da x ni ulomek.

Dokazujemo s protislovjem.

- privzamemo, da tisto kar dokazujemo ni res. (predpostavimo, da x je ulomek)
- sklepamo
- skepi nas privedejo v protislovje s predpostavko

$$x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$$

Če je x ulomek, ga lahko zapišemo kot okrajšan ulomek, zato sta m in n tuji si števili.

$$\begin{aligned}
x^2 = 2 \Rightarrow (\frac{m}{n})^2 &= 2\\
\frac{m^2}{n^2} &= 2\\
m^2 &= 2n^2\\
2|m^2 &\Rightarrow 2|m\\
\exists l \in \mathbb{N} : m &= 2l\\
4l^2 &= 2n^2\\
2l^2 &= n^2\\
2|n^2 &\Rightarrow 2|n\\
&\rightarrow \leftarrow
\end{aligned}$$

Dokaz da $2|m^2 \Rightarrow 2|m$:
Če je m liho, potem $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
m &= 2k + +1\\
m^2 &= 4k^2 + 4k + 1\\
m^2 &\text{ je lih}
\end{aligned}$$

1.4 Dedekindov aksiom in Realna števila

Radi bi skonstruirali številsko množico, ki bo vsaj urejen obseg in, ki zapolni številsko premico.

Dedekindov pristop

Def: **Rez** je podmonožica $A \subset \mathbb{Q}$, za katero velja:

(i) $A \neq \varnothing, A \neq \mathbb{Q}$

(ii) Če je $p \in A$, potem za vsak $q \in \mathbb{Q}$ in $q < p$, velja $q \in A$

(iii) za vsak $p \in A$ obstaja $q \in A, q > p$ (A nima največjega elementa)

Def: Množica realnih števil je množica vseh rezov, označimo jo s $\mathbb{R}$
Primer: 16 ustreza rez: $\{p \in \mathbb{Q}; p < 16\} = B$

Trditev: Preslikava $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ in je definirana s predpisom:

$$q \mapsto \{p \in \mathbb{Q}; p < q\} = p^*$$

vloži množico racionalnih števil v množico realnih števil.

Vpeljimo računski operaciji v $\mathbb{R}$.

Def: Naj bosta A in B reza. Vsota rezov A in B je

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$$

Opomba: $(p + q)^* = p * + q*$

Trditev: Če sta A in B reza, potem je tudi $A + B$ rez.
Dokaz(trditev): Denimo da sta A in B reza.

Dokazujemo da je $A + B$ rez:

(i) $\underline{A + B \neq \varnothing}$

Ker sta A in B reza, po lastnosti (i) obstaja $a \in A$ in $b \in B$. Potem je $a + b \in A + B$. Sledi $A + B \neq \varnothing$ $\square$

$\underline{A + B \neq \mathbb{Q}}$

Obstaja $c \in \mathbb{Q}, c \notin A$ in obstaja $d \in \mathbb{Q}, d \notin B$.

$$c + d \notin A + B$$

Denimo, da je $c + d \ \in A + B$.

Potem velja, da je $c + d = a + b$ za $a \in A, b \in B$.

Iz (ii) sledi: $c > a$ in $d > b \Rightarrow a + b < c + d \quad \to\leftarrow$

(ii) Denimo: $p \in A + B$, dokazujemo da za $q \in \mathbb{Q}, q < p$ velja $\underline{q \in A + B}$

Obstajata $a \in A$ in $b \in B$, da $p = a + b$

$$q = a + q - a$$

Če je $q - a < b$, potem $q - a \in B$

$$q < a + b$$
$$q < p$$
$$\square$$

(iii) $\underline{A + B \text{ nima največjega elementa.}}$

izberimo $p \in A + B$
iščemo $q \in A + B, q > p$

Obstajata $a \in A, b \in B$, da je $p = a_b$
Obstaja $a' \in A, a' > a$

$$q := a' + b \in A + B$$
$$q > p$$
$$\square$$

Ni težko preveriti, da za $(\mathbb{R}, +)$ veljajo A1-A4.
Asociativnost in komutatiovnost se dokaže z operacijami na elementih reza.
0^* je enota za seštevanje.

Nasprotni rez od A:

$$-A = \{r \in \mathbb{Q}, \text{obstaja } r' \in \mathbb{Q}, r' > r \text{ in } r' + p < 0 \text{ za vse } p \in A\}$$

(i) $-A \neq \varnothing$

$\underline{-A \neq \mathbb{Q}}$

$$q + a < 0 \text{ za vse } q \in \mathbb{Q}$$
$$q = -a$$

(ii) $q \in -A : r < q$

$q + a < 0$ za vse $a \in A$

$r + a < q + a$ za vse $a \in A$ po tranzitivnosti: $r + a < 0$

(iii) Izberemo poljuben $r \in A$. Iščemo $q \in A, q > r$.

$$q := \frac{r + r'}{2} (r' > r, r' \in \mathbb{Q} : r' + p < 0 \text{ za vse } p \in \mathbb{Q})$$

$$q \in \mathbb{Q}, r' > q$$

Def: Pravimo da je A pozitiven, če je $0^* \subset A, A \neq 0^*$. Denimo da sta A in B pozitivna reza:

$$A \cdot B = \{q \in \mathbb{Q}, \text{ obstajata } a \in A, a > 0 \text{ in } b \in B, b > 0, \text{ da je } q < ab\}$$

Želimo $(pq)^* = p^* \cdot q^*, p, q \in \mathbb{Q}$

Def: Naj bosta A in B poljubna reza.

$$A \cdot B = \begin{cases} A \cdot B & A > 0 \wedge B > 0 \\ -A \cdot (-B) & A > 0 \wedge B < 0 \\ -(-A) \cdot B & A < 0 \wedge B > 0 \\ (-A) \cdot (-B) & A < 0 \wedge B < 0 \end{cases}$$

Če je vsaj eden od rezov enak 0^*, potem $A \cdot B = 0^*$.

Ni težko preveriti, da množenje rezov izpolnjuje A5-A8 in A9, A10.

Enota za množenje je 1^*.

Urejenost izplonjuje A11 in A12.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je **urejen obseg** in vsebuje $\mathbb{Q}$ kot **urejen podobseg**.

Cilj: Obseg $\mathbb{R}$ izpolnjuje še dodaten aksion A13 (**Dedekindov aksiom**), ki pove, da $\mathbb{R}$ zapolnjuje številsko premico.

Aksioma A13 obseg $\mathbb{Q}$ ne izpolnjuje.

Def: Naj bo B urejen obseg in $A \subset B$. Pravimo, da je A navzgor omejena, če obstaja $M \in B$, da velja:

$$\forall a \in A : a \leq M$$

$\forall M$ s to lastnostjo pravimo zgornja meja množice A. Če je $A \subset \mathbb{Q}$(ali $\mathbb{R}$) in je množica navzgor omejena, potem ima A neskončno zgornjih mej.

Def: Naj bo A navzgor omejena množica. Če obstaja najmanjša od vseh zgornjih mej množice A v B, jo imenuje natančna zgornja meja množice A.

Torej je $\alpha \in B$ natančna zgornja meja množice A, če velja:

(i) α je zgornja meja $\forall a \in A : a \leq \alpha$

(ii) Če $b \in B, b < \alpha$, potem b ni zgornja meja množice A, t.j.: $\exists a \in A : a > b$

Natančno zgornjo mejo množice A imenujemo tudi **supremum** množice A in jo označimo z $\sup A$

Def: Če obstaja največji element množice A, ga imenujemo **maksimum** množice A in označimo z $\max A$.

Če ima A maksimum, potem velja:

$$\max A \in A \land \forall a \in A : a \leq \max A$$

Če ima A maksumum, potem $\max A = \sup A$. (Za a v (2) lastnosti definicije supremuma vzamemo $\max A$) *Dokaz:*

(1) $\max A$ je zgornja meja A (po definiciji maksimuma).

(2) če $b < \max A$, potem b ni zgornja meja.

$$\exists \max A, \text{ ki je večji}$$

Primeri:

1. $A = \{x \in \mathbb{Q}, x < 0\} \subset \mathbb{Q}$

   4 je zgornja meja množice A, ker $x \in A, x < 0, 0 < 4 \Rightarrow x < 4$

   $\Rightarrow A$ je navzgor omejena.

   0 je natančna zgornja meja množice A

   (a) $x \in A, x < 0$
   (b) Izberemo poljuben $b \in \mathbb{Q}, b < 0$ in dokazujemo, da b ni zgornja meja.
   $$b < \frac{b}{2} < 0; \frac{b}{2} \in A, \frac{b}{2} > b$$

   Množica A nima maksimuma: $0 \notin A$.

2. $C = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$

   C je navzgor omejena z 2.

   $$x \in C : x^2 < 2 \land 2 < 4 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x < 2$$

   (a) Vsako število $p \in \mathbb{Q}, p^2 > 2$ je zgornja meja množice C.
   (b) Nobeno racionalno število $q \in \mathbb{Q}, q^2 < 2$ ni zgornja meja množice C.

Vemo: Rešitev enačbe $x^2 = 2, x > 0, x \notin \mathbb{Q}$.
Sledi: $C \subset \mathbb{Q}$ nima natančne zgornje meje.

Dokaz:

(a)

$$x^2 < 2 < p^2$$

sledi: $x^2 < p^2 \Rightarrow x < p$ za vse $x \in C$ $\square$

(b) Iščemo $c \in C$, da je $c > q, c^2 < 2$

$$c := \frac{2q+2}{q+2} = q + \frac{2q+2-q^2-2q}{q+2} = q + \frac{2-q^2 > 0}{q+2} > 0$$

$(q^2 < 2)$

$$c^2 = (\frac{2q+2}{q+2}^2 = \frac{4(q^2+2q+1)}{q^2+4q+4}$$

$$c^2 - 2 = \frac{4q^2+8q+4-2q^2-8q-8}{(q+2)^2} = \frac{2q^2-4}{(q+2)^2} = \frac{2(q^2-2>0)}{(q+2)^2} > 0$$

$$q^2 < 2$$

Podobno kot zgornjo mejo, navzgor omejeno množico, supremum in maskimum, definiramo spodnjo mejo, navzdol omejeno množico, infimum in minimum.

A13 (Dedekindov aksiom): Vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica v množici A ima supremum (v množici A).

Def: Če množica $(A, +, \cdot, <)$ izpolnjuje aksiome A1-A13 jo imenujem *poln urejen obseg* (poln se nanaša na A13).

Trditev: $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ je urejen obseg, ki ne izpolnjuje A13.

Izrek: vsaka nerpazna navzgor omejena podmnožica v $\mathbb{R}$ ima natančno določeno zgornjo mejo. ($\mathbb{R}$ izpolnjuje A13)

Posledica: $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ je poln urejen obseg.

Posledica: Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica $\mathbb{R}$ ima natančno spodnjo mejo.

A neprazna navzdol omejena.

$$-A = \{x; -x \in A\}$$

$-A$ je neprazna, navzgor omejena (če m spodnja meja od A, je $-m$ zgornja meja od $-A$). $\Rightarrow -A$ ima supremum in velja: $-\sup A = \inf A$

Dokaz (izrek): Izberemo poljubno neprazno navzgor omejeno podmnožico $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}$.

$$C = \cup A, A \in \mathcal{A}$$

Dokazati je treba:

1. C je rez
2. $C = \sup \mathcal{A}$

1. (i) $C \neq \emptyset$
   Ker $\mathcal{A}$ ni prazna $\exists A \in \mathcal{A}$. Torej velja $A \subset C$, torej $C \neq \emptyset$.
   $C \neq \mathbb{Q}$
   Ker je $\mathcal{A}$ omejena, obstaja zgornja meja M množice $\mathcal{A}$, velja:

   $$\forall A \in \mathcal{A} : A \leq M$$
   $$\forall A \in \mathcal{A} : A \subset M$$

   Sledi: $C \subset M$, zato $C \neq \mathbb{Q}$ (ker $M \neq \mathbb{Q}/M$ je rez).

   (ii) $p \in C, q \in \mathbb{Q}, q < p \Rightarrow q \in C$
   $p \in C \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}$, da je $p \in A$. Ker je A rez, za $q \in \mathbb{Q}, q < p$ velja $q \in A$.
   Sledi: $q \in C$.

   (iii) $p \in C \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, q > p : q \in C$ $p \in C \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}$, da je $p \in A$. Ker je A rez, $\exists q \in A, q > p$.
   Sledi: $q \in C$.

2. (i) C je zgornja meja $\mathcal{A}$
   Ker je $A \subset C$ za vse $A \in \mathcal{A}$, velja $A \leq C$ za vse $A \in \mathcal{A}$. t.j.: C je zgornja meja.

   (ii) C je natančna zgornja meja $\mathcal{A}$
   Izberimo poljuben $D < C$. Dokazujemo, da D ni zgornja meja $\mathcal{A}$.
   Ker je $D < C, D \subset C$ in $D \neq C$, obstaja $p \in \mathbb{Q}, p \in C$ in $p \notin D$.
   Ker je $p \in C$, obstaja $A \in \mathcal{A}$, da je $p \in A$.
   Velja: $A > D$ in $A \in \mathcal{A}$ (vemo da sta vsaka reza primerljiva po velikosti.)
   Sledi: D ni zgornja meja. $\square$

Za radovedne: Poleg Dedekinda je realna števila definiral tudi Cantor. Ta je to naredil s Cauchyjevimi zaporedji.

Opomba: Med obsegoma $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ je še veliko obsegov.

Definicija: Pravimo, da je x iracionalno število, če $x \notin \mathbb{Q}$.

Rešitvam polinomskih enačb s celimi koeficienti rečemo *algebraična števila.*

Primer: $\sqrt{2} : x^2 - 2 = 0$

Niso vsa iracionalna števila algebraična: π, e. Tem pravimo *transcendentna števila.*

1.5 Posledice Dedekindovega aksioma

- Množica $\mathbb{Z}$ ni navzgor omejena v $\mathbb{R}$.

  Dokaz: Denimo, da je $\mathbb{Z}$ navzgor omejena v $\mathbb{R}$. Potem obstaja $M \in \mathbb{R}$, da $M = \sup \mathbb{Z}$. Torej $M - 1$ ni zgornja meja $\mathbb{Z}$.

  $$\exists a \in \mathbb{Z}, a > M - 1$$
  $$a + 1 > M, a + 1 \in \mathbb{Z} \rightarrow\leftarrow$$

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{Z} : a < b$

  Dokaz: če to ne bi bilo res, bi bilo število a zgornja meja $\mathbb{Z}$. To pa ni res (prejšnja posledica).

- *Arhimedska lastnost:* Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^+$. Potem obstaja $n \in \mathbb{N} : na > b$.

  Dokaz: Obstajati mora $n \in \mathbb{N} : n > \frac{b}{a}$:. Po prejšnji posledici tak n obstaja. $\square$

- Naj bo $a \in \mathbb{R}^+$. Potem obstaja $n \in \mathbb{N}$, da $\frac{1}{n} < a$.

  Dokaz: uporabimo arhimedsko lastnost za $n = 1$.

- Naj bosta a, b poljubni $\mathbb{R}, a < b$. Obstaja $q \in \mathbb{Q}$, da velja $a < q < b$.

  *Dokaz:*če je $b - a > 1$, potem obstaja $m \in \mathbb{Z}, a < m < b$

$\{n \in \mathbb{Z}, n \leq a\}$ je navzdol omejena neprazna.

$$\sup\{n \in \mathbb{Z}, n \leq a\} = x, x \in \mathbb{Z}$$
$$m := x + 1$$

$$b > m > 0$$

$$b - a > 0$$
$$\exists n \in \mathbb{N} : n(b - a) > 1$$

Obstaja $m \in \mathbb{Z} : an < m < nb$.

$$a < \frac{m}{n} < b \ \square$$

Rečemo tudi: $\mathbb{Q}$ so v $\mathbb{R}$ *povsod gosta.*

1.6 Intervali

Def: Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ *zaprti interval*
2. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ *odrpti interval*
3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ *polodprti interval*
   $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
4. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
   $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$
   $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$
   $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$
   $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Def: Naj bo $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ imenujemo ε-*okolica* števila a.

Okolica točke a je vsaka taka podmnožica v $\mathbb{R}$, ki vsebuje kakšno ε-okolico točke a.

1.7 Decimalni ulomki

Vsako $\mathbb{R}$ število lahko zapišemo kot *decimalni ulomek.*

Naj bo $x \in \mathbb{R}^+$ in naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ največje števliko, ki ne presega x:

$$n \leq x < n+1$$

Interval $[n, n{+}1]$ razdelimo na 10 enakih delov. Nato poiščemo $n_1 \in \{0,1,2,\dots,9\}$, da velja:

$$n + \frac{n_1}{10} \leq x < n + \frac{n_1+1}{10}$$

Postopek nadaljujemo in na ta način sestavimo zaporedje decimalnih približkov za x.

$$\mathcal{A} = \{n, n + \frac{n_1}{10}, n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100}, \dots\}$$

Trditev: $x = \sup \mathcal{A}$
Dokaz:

(i) $\underline{x \text{ je zgornja meja množice } \mathcal{A}}$
Velja po konstrukciji: $\forall a \in \mathcal{A} : a \leq x$.

(ii) $\underline{x \text{ je najmanjša zgornja meja}}$
Denimo da to ni res:

$$y := \sup \mathcal{A} < x$$
$$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq x - y$$
$$\exists p \in \mathbb{N} : \frac{1}{10^p} < \frac{1}{n} < x - y$$

$$y + \frac{1}{10^p} < x$$

$$n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \ldots + \frac{n_p}{10^p} \leq y$$
$$n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \ldots + \frac{n_p+1}{10^p} \leq y + \frac{1}{10^p} < x \rightarrow\leftarrow$$

Trditev utemelji, da x lahko zapišemo, kot neskončni decimalni ulomek.

$$x = n_0 + \frac{n_1}{10} + \ldots + \frac{n_p}{10^p} + \ldots = n_0, n_1 n_2 \ldots n_p \ldots$$

Trditev: Naj bosta $x, y \in \mathbb{R}^+$

(1) Denimo, da obstaja $k \in \mathbb{N}_0$, za katerega velja:

$$x = n_0, n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n_k 99 \ldots$$
$$y = n_0, n_1 n_2 \ldots n_{k-1}(n_k + 1)00 \ldots$$

in $n_k \neq 9$, potem $x = y$.

(2) Za dva različna decimalna zapisa $x \in \mathbb{R}^+$ velja (1).

Dokaz: Naj bo $\mathcal{A}$ množica decimalnih preslikav za x.

(1)

$$\forall a \in \mathcal{A} : y \geq a \ (y \text{ je zgornja meja})$$

Zato $y \geq x$ (x je $\sup \mathcal{A}$)

Dokzujemo y je natančna zgornja meja od $\mathcal{A}$

Naj bo $l > k$ in a_l l-ti decimalni približek za x.

$$y - a_l = \frac{1}{10^l}$$
$$y - \frac{1}{10^l} = a_l$$
$$y - \frac{1}{10^l} \leq a_l < a_{l+1}$$

$\Rightarrow y - \dfrac{1}{10^l}$ ni zgornja meja za noben l, torej je y natančna zgornja meja.

(2) x naj ima dva decimalna zapisa:

$$x = n_0, n_1 n_2 \ldots$$
$$x = m_0, m_1 m_2 \ldots$$

Obstaja najmanjši indeks $k \in \mathbb{N} : n_k \neq m_k$.

Predpostavimo, da je $m_k > n_k$

$m_0, m_1m_2 \dots m_k$ je zgornja meja množice decimalnih približkov za x.

$$m_0, m_1m_2 \dots m_k > m_0, m_1m_2 \dots m_{k-1}n_kn_{k+1}n_{k+2} \dots$$

Če bi veljajo $n_k < m_k - 1$ (dokazujemo, da je razlika lahko največ 1, t.j: morajo se ponavljati 9-ke)

$$x \leq n_0, n_1n_2 \dots n_{k-1}(n_k + 1) < m_0, m_1 \dots m_{k-1}m_k \leq x \rightarrow\leftarrow$$

($x < x$ ni možno)
Če bi bil $m_{k+1} \neq 0$ (ali za indeks $l > k$):

$$x \leq m_0, m_1m_2 \dots m_k < m_0, m_1 \dots m_km_{k+1} \leq x \rightarrow\leftarrow$$

Na podoben način dokažemo, da velja:

$$\forall l \in \mathbb{N} : n_{k+l} = 9$$

Podobno velja tudi za druge osnove. Primer v dvojiškem bi bil:

$$1101,011 = 1101,010\overline{1}$$

Trditev: Naj bo $x \in \mathbb{R}$. x ima periodičen decimalni zapis natanko tedaj, kadar $x \in \mathbb{Q}$ (tudi končen decimalni zapis je periodičen).

Dokaz: denimo, da je $x \in \mathbb{Q}^+$.

$$x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$$

m delimo z n pisno. To pomeni da podpisujemo ostanke. Ker imamo na voljo n različnih ostankov: $o_j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, se bo med $n+1$ zaporednimi ostanki vsaj eden zagotovo ponovil. Ko se ostanek ponovi, se ponovi tudi cel zapis, kar je perioda.

Denimo, da ima x periodičen decimalni zapis:

$$\begin{aligned}
x &= d, d_1d_2 \dots d_n\overline{d_{n+1}d_{n+2} \dots d_{n+k}} \\
10^kx &= d \cdot 10^k + d_1d_2 \dots d_k, d_{k+1} \dots d_n \dots d_{n+k}\overline{d_{n+1} \dots d_{n+k}} \\
10^kx - x & \text{ ima končen decimalni zapis} = p \in \mathbb{Q} \\
x &= \frac{p}{10^k - 1} \in \mathbb{Q} \quad \square
\end{aligned}$$

1.8 Absolutna vrednost

Def: če je $x \in \mathbb{R}$, potem

$$|x| = \begin{cases} x & \text{če } x \geq 0 \\ -x & \text{če } x < 0 \end{cases}$$

Število $|x|$ imenujemo *absolutna vrednost realnega števila x.*

Trditev: Naj bo $x \in \mathbb{R}$. Veljajo:

(i) $|x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $|x| = |-x|$

(iv) $-|x| \leq x \leq |x|$

(v) $|x|$ je razdalja x do 0 na številski premici

(vi) *Trikotniška neenakost:* $|x + y| \leq |x| + |y|$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$

(vii) $|xy| = |x| \cdot |y|$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$

Dokaz:

(vi) pregledamo vse možnosti glede na predznak

(1) $x \geq 0, y \geq 0$

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|$$

(2) $x < 0, y < 0$

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y = |x| + |y|$$

(3) $x \geq 0, y < 0$

$$|x| = x, |y| = -y$$
$$x + y = |x| - |y|$$
$$|x + y| = \begin{cases} |x| - |y| & \text{če } |x| \geq |y|, \\ |y| - |x| & \text{če } |x| < |y| \end{cases}$$
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(4) simetrična (3)

Posledica:

1) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$
2) $|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$ za vse $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}$

Dokaz:

1) Za + je disna neenakost trikotniška neenakost.

   Leva neenakost:

$$
\begin{aligned}
|x| = |(x+y) - y| &\leq |x+y| + |y| \\
|x| - |y| &\leq |x+y|
\end{aligned}
$$

   Podobno velja: $|y| - |x| \leq |x+y|$

   Iz tega sledi: $||x| - |y|| \leq |x+y| \quad \square$