

Algebra 1

Vid Drobnič

Kazalo

1	Vektorji v trirazsežnem prostoru	3
1.1	Operacije z vektorji	4
1.2	Linearna neodvisnost	5
1.3	Skalarni produkt	9
1.4	Vektorski produkt	10
1.5	Mešani produkt	13
1.6	Dvojni vektorski produkt	14
2	Analitična geomterija v \mathbb{R}^3	14
2.1	Premica	14
2.2	Ravnina	15
2.3	Razdalja med mimobežnima premicama	17
3	Osnovne algebrske strukture	18
3.1	Preslikave in relacije	18
3.2	Operacije	22
3.3	Grupe	23
3.4	Abelove grupe	33
3.5	Homomorfizmi	37
3.6	Kolobar	40
4	Vektorski prostori	42
4.1	Nekaj osnovnih lastnosti vektorskih prostorov	44
4.2	Vektorski podprostor	44

4.3	Linearna ogrinjača	46
4.4	Kvocietni vektorski prostor	48
4.5	Linearne preslikave	49
4.5.1	Slika in jedro linearnih preslikav	50
4.6	Vektorski prostor linearnih preslikav	52
4.7	Končno razsežni vektorski prostori	54
4.8	Linearne preslikave na končno razsežnih V.P.	63
4.8.1	Poseben primer	64
4.8.2	Splošna situacija	67
4.8.3	Množenje matrik	69
4.8.4	Poseben primer	69
4.8.5	Rang linearne preslikave in matrike	70
4.8.6	Sistemi linearnih enačb	75
4.8.7	Gaussov algoritem za reševanje sistema	77
4.8.8	Simultano reševanje sistemov z isto matriko koeficientov	79
4.8.9	Sprememba baze	79
4.8.10	Ekivalentnost matrik	81
4.8.11	Podobnost matrik	83
4.8.12	Diagonalne matrike in diagonalizacija	84
4.8.13	Iskanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev	86
4.8.14	Determinante	87
4.8.15	Lastnosti determinante	91
4.8.16	Determinanta endomorfizma	96
4.8.17	Karakteristični polinom in minimalni polinom	97

1 Vektorji v trirazsežnem prostoru

\mathcal{P} - prostor

$T \in \mathcal{P}$ - točka

$A, B \in \mathcal{P}$

\overrightarrow{AB} - usmerjena daljica

FORMALNO: $\overrightarrow{AB} = (A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ (urejen par)

Ekvivalentnost usmerjenih daljic:

$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$, kadar je \overrightarrow{AB} z vzporednim premikom mogoče premakniti v \overrightarrow{CD} .

- $|AB| = |CD|$ (dolžini daljic sta enaki)
- imata isto smer (če potegnemo premico čez izhodišča daljic (AC), morata biti točki B in D na istem "bregu" te premice)
- $AB \parallel CD$ (premici skozi točke sta vzporedni)

$$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

DEF: Vektor \vec{AB} je množica $\vec{AB} = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}$ (usmerjene daljice ekvivalentne daljici \overrightarrow{AB})

- ničelni vektor: $\vec{AA} = \vec{0}$
- nasprotni vektor vektorja \vec{AB} je \vec{BA} ($\vec{BA} = -\vec{AB}$)

Dodatna oznaka: $\vec{a}, -\vec{a}$ nasprotni vektor

$V = \{\vec{v} : \vec{v} \text{ vektor}\}$ - vektorski prostor.

$O \in \mathcal{P}$; O fiksiramo (izberemo si neko točko v prostoru, ki jo fiksiramo)

$$f : \mathcal{P} \rightarrow V$$

$$f(T) = \vec{OT}$$

f je bijekcija (vsaki točki priredi natanko en vektor).

$$\vec{a} = \vec{OT}$$

1.1 Operacije z vektorji

Seštevanje:

$$\begin{aligned}\vec{a}, \vec{b} &\in V \\ \vec{a} &= \vec{AB}, \vec{b} = \vec{BC} \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{AC} \\ \vec{AB} + \vec{BC} &= \vec{AC}\end{aligned}$$

LASTNOSTI:¹

- (1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ asociativnost
- (2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ komutativnost
- (3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- (4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Za lastnosti od (1) do (4) $(V, +)$ **Abelova grupa**.

Razliko dveh vektorjev definiramo tako:

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

Množenje s skalarjem

Skalar je realno število.

$$\vec{a}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha\vec{a}$ je vektor.

- ima isto smer kot \vec{a} za $\alpha > 0$
- ima nasprotno smer kot \vec{a} za $\alpha < 0$
- $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$

¹Dokaz lastnosti (1) in (2) s skico.

$$\vec{a} = \vec{OA} \neq \vec{0}$$

$$\alpha\vec{a} = \vec{OT}, O, A, T \text{ so na isti premici}$$

S tem uvedemo koordinatni sistem na premici OA .

LASTNOSTI:

$$(5) \quad \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

$$(6) \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$(7) \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$(8) \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$V, +$ in množenje s skalaji je **vektorski prostor**: veljajo lastnosti od (1) do (8).

1.2 Linearna neodvisnost

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

\vec{a}, \vec{b} sta linearno odvisna kadar je:

bodisi $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ za ustrezen $\alpha \in \mathbb{R}$,

bodisi $\vec{a} = \beta\vec{b}$ za ustrezen $\beta \in \mathbb{R}$.

V nasprotnem primeru sta \vec{a} in \vec{b} linearno neodvisna.

$$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$$

1. \vec{OA} in \vec{OB} sta linearno odvisna $\Leftrightarrow O, A, B$ kolinearne (ležijo na isti premici).

2. \vec{a}, \vec{b} sta linearno neodvisna $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$

Privzamemo da sta \vec{a}, \vec{b} linearno neodvisna:

$$\{T : \vec{OT} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{R}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ - linearna kombinacija

\mathcal{R} - ravnina določena z O, A, B (z vektorji \vec{a}, \vec{b}) in točko O .

$$\vec{r} = \vec{OT}, T \in \mathcal{R}$$

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Pri tem sta α in β enolično določena skalarja.

V \mathcal{R} smo z vektorjema \vec{a}, \vec{b} vpeljali koordinatni sistem.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ so linearno odvisni, kadar je vsaj eden od njih linearna kombinacija drugih dveh.

npr: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

V nasprotnem primeru so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni.

1. $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$ so linearno odvisni $\Leftrightarrow O, A, B, C$ koplanarne (ležijo na isti ravnini)

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0)$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni

$$\vec{a} = \vec{OA}$$

$$\vec{b} = \vec{OB}$$

$$\vec{c} = \vec{OC}$$

$$V = \{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

V - množica vseh vektorjev prostora \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{R \in \mathcal{P} : \vec{OR} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

DODATEK: V zapisu vektorja $\vec{r} \in V$: $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, so koeficienti α, β, γ enolično določeni.

DOKAZ: Recimo, da lahko vektor \vec{r} izrazimo na 2 različna načina:

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \\
 \vec{r} &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\
 \Rightarrow \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\
 (\alpha - \alpha_1) \vec{a} + (\beta - \beta_1) \vec{b} + (\gamma - \gamma_1) \vec{c} &= \vec{0} \\
 \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ linearno neodvisni} &\Rightarrow \alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1 = \gamma - \gamma_1 = 0 \\
 \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1
 \end{aligned}$$

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ je **baza** vektorskega prostora V . $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni.

$R \in \mathcal{P}$ (O - fiksirana točka) $\vec{OR} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$

$$R \mapsto (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Urejena trojica (α, β, γ) je s točko R enolično določena.

α, β, γ so koordinate točke R glede na koordinaten sistem, ki je določen z bazo $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ in točko O (izhodišče koordinatnega sistema).

Imena koordinat: abscisa, ordinata, aplikata

$$\begin{aligned}
 \varphi : V &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 \vec{r} &\mapsto (\alpha, \beta, \gamma); \vec{r} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}
 \end{aligned}$$

φ je bijekcija.

S φ prenesemo operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorjev s skalarji iz V v \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_1, \vec{r}_2 &\in V \\
 \vec{r}_1 &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\
 \vec{r}_2 &= \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b} + \gamma_2 \vec{c} \\
 \varphi(\vec{r}_1) &= (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \\
 \varphi(\vec{r}_2) &= (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \\
 \vec{r}_1 + \vec{r}_2 &= (\alpha_1 + \alpha_2) \vec{a} + (\beta_1 + \beta_2) \vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2) \vec{c} \\
 \varphi(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) &= (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)
 \end{aligned}$$

Torej velja:

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$$

seštevanje je definirano po komponentah.

Podobno velja za množenje s skalarji:

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$$

\mathbb{R}^3 je za te operaciji **vektorski prostor** (zadošča A1-A8).

$$\varphi(\vec{a}) = (1, 0, 0)$$

$$\varphi(\vec{b}) = (0, 1, 0)$$

$$\varphi(\vec{c}) = (0, 0, 1)$$

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

je **standardna baza** vektorskega prostora \mathbb{R}^3 .

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

OZNAKE:

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

Dodatna zahteva za standardno bazo vektorskega prostora \mathbb{R}^3 : baza je **ortonormirana**, torej:

- $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ so paroma pravokotni.

Opomba: Po dogovoru je trojica $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pozitivno orientirana (pri določanju orientacije si v 3D koordinatnem sistemu pomagamo z pravilom desnega vijaka).

1.3 Skalarni produkt

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

Kot med njima je $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\text{DEFINICIJA } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

V **identificiramo**² z \mathbb{R}^3 (glede na standardno bazo in dano izhodišče O).

$$O = (0, 0, 0)$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \vec{OA}$$

$$|\vec{a}| = |OA| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Kosinusni izrek:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$\Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

LASTNOSTI:

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0 \text{ (enačaj le za } \vec{a} = \vec{0})$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

²Prej smo vse izpeljevali za splošen vektorski prostor, sedaj pa za V vzamemo \mathbb{R}^3 .

$$(3) \quad (\alpha \vec{a}) \vec{b} = \alpha(\vec{a} \vec{b})$$

$$(4) \quad \vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \\ \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

PRIMER:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\equiv \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ \vec{a} &= (a_1, a_2, 0) \\ \vec{a} \text{ v } \mathbb{R}^2 : \vec{a} &= (a_1, a_2) \\ \vec{a} \vec{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

p - ploščina paralelograma

p si želimo izraziti z a_1, a_2, b_1, b_2

$$p = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \vec{a}' &\perp \vec{a} \\ |\vec{a}'| &= |\vec{a}| \end{aligned}$$

\vec{a}, \vec{a}' pozitivno orientirana

$$\vec{a}' = (-a_2, a_1)$$

$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ali $\varphi - \frac{\pi}{2}$ če je orientacija (\vec{a}, \vec{b}) pozitivna.

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \vec{a}' \vec{b} = (-a_2, a_1) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$p = a_1 b_2 - a_2 b_1$, če je orientacija \vec{a}, \vec{b} pozitivna, če pa je negativna velja:

$$p = -(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

1.4 Vektorski produkt

Vzamemo vektorja \vec{a}, \vec{b} iz prostora. Njun vektorski produkt označimo:

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na \vec{a} in \vec{b} .
- (2) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga določata \vec{a} in \vec{b} . ($= 0$, kadar sta \vec{a} in \vec{b} linearno odvisna)
- (3) Urejena trojica $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ je pozitivno orientirana.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{a} \times \vec{b} &= (x, y, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{k} &= (0, 0, 1) \\ z &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{k} = \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{k}| \cos \delta = \\ &= p \cos \delta\end{aligned}$$

p - ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja \vec{a} in \vec{b}
 δ - kot med ravninama, ki ju določata osi (1),(2) in vektorja \vec{a}, \vec{b} .

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= (a_1, a_2, 0) \\ \vec{b}' &= (b_1, b_2, 0) \\ p' &= \pm(a_1 b_2 - a_2 b_1)\end{aligned}$$

p' je ploščina paralelograma, ki ga določata pravokotni projekciji vektorjev \vec{a} in \vec{b} na ravnino (\vec{i}, \vec{j}) , tj. ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja \vec{a}' in \vec{b}' .

p' ima predznak $+$, kadar sta \vec{a}' in \vec{b}' pozitivno orientirana, ter $-$, kadar sta negativno orientirana.

$$p' = \pm p \cos \delta$$

$+$ kadar: $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$
 $-$ kadar: $\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \pi$

$$z = \pm p' = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

\pm se izniči, ker se predznak, ki nastane zaradi \cos in predznak, ki nastane pri izračunu ploščine paralelograma z vektorjema ujemata.

$$\begin{aligned}x &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ y &= a_3 b_1 - a_1 b_3\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

determinanta (reda 2)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Lastnosti:

- $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

\vec{a}, \vec{b} linearno neodvisna $\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ je baza.

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b})$$

Poseben primer:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 (\vec{a} \perp \vec{b})$$

$\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ je ortonormirana baza.

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b}) / \cdot \vec{a} \text{ (ali } \vec{b}, \vec{c})$$

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = \alpha$$

$$\vec{r} \cdot \vec{b} = \beta$$

$$\vec{r} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \gamma$$

$$\begin{aligned}
(|\vec{a} \times \vec{b}|)^2 &= (|\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi)^2 \\
(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi)^2 \\
\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2
\end{aligned}$$

1.5 Mešani produkt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Paralelepiped je prizma, ki ima za osnovno ploskev paralelogram. V - prostornina paralelepipeda

$$\begin{aligned}
P &= |\vec{a} \times \vec{b}| \\
V &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot v \\
v &= \pm |\vec{c}| \cos \delta \\
V &= \pm |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \delta = \\
&= \pm (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \pm V
\end{aligned}$$

+: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ pozitivno orientirani

–: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ negativno orientirani $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno odvisni $\Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = 0$.

Orientacija se pri cikličnih zamenjavah ohrani:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} &= (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} = \vec{a} (\vec{b} \times \vec{c}) \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} &= \vec{a} (\vec{b} \times \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]
\end{aligned}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \equiv a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

1.6 Dvojni vektorski produkt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{e} = ?$$

$$\vec{e} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{e} \perp \vec{c}$$

\vec{a}, \vec{b} linearno neodvisna $\Rightarrow \vec{e} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$.

$$\vec{e} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\alpha(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \beta(\vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$$

$$\beta = \lambda \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\alpha = -\lambda \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{e} = \lambda(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} + \lambda(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$$

$$\vec{e} = \lambda(-(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b})$$

Če razpišemo po komponentah dobimo $\lambda = 1$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$$

2 Analitična geometrija v \mathbb{R}^3

2.1 Premica

p podana s točko R_0 na njej in *smernim vektorjem* \vec{e} .

$$\vec{r}_0 = \vec{OR}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$R \in p$$

$$\vec{r} = \vec{OR} = (x, y, z)$$

Koordinatizirali smo premico.

$$\vec{R_0R} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{e}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Enačba premice p (vektorska parametrična) (λ je parameter)

$$\vec{e} = (a, b, c)$$

$$x = x_0 + \lambda a$$

$$y = y_0 + \lambda b$$

$$z = z_0 + \lambda c$$

(Parametrična) enačba premice.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

enačba premice (brez parametra)

$a = 0$?

$$\frac{x - x_0}{0} \equiv (x = x_0 \text{ ali } ax - x_0 = 0)$$

Podobno za $b = 0$ in $c = 0$.

$R_0 \vec{R}, \vec{e}$ linearno odvisna $\Leftrightarrow R \in p$

To je kadar: $R_0 \vec{R} \times \vec{e} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{e} = \vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0}$
(vektorska enačba premice)

Če imamo točko R_1 izven premice, je razdalja med premico p in to točko enaka:

$$\Delta = |\vec{r}_1 - \vec{r}_0| \sin \varphi$$

To enačbo lahko preoblikujemo da dobimo:

$$\Delta = \frac{|\vec{e} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{e}|}$$

To je posebej ugodno, kadar $|\vec{e}| = 1$, saj iz tega sledi $\Delta = |\vec{e} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|$.

Razdaljo med točko in premico lahko zapišemo tudi kot: $\Delta = d(R_1, p)$.

2.2 Ravnina

Da določimo ravnino Σ , potrebujemo točko $R_0 \in \Sigma$ in vektor normale \vec{n} , kjer $\vec{n} \perp \Sigma$ in $\vec{n} \neq \vec{0}$.

Da določimo kdaj točka leži na ravnini zapišemo:

$$R \in \Sigma \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

To pomeni da nam ravnino Σ določa enačba:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Če zapišemo vektorje \vec{r}_0, \vec{r} in \vec{n} kot:

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

lahko zapišemo enačbo ravnine kot:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

To enačbo lahko naprej pretvorimo v *implicitno obliko*:

$$ax + by + cz + d = 0$$

kjer je $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Če imamo podane točke R_0, R_1 in R_2 , lahko izračunamo vektor normale kot:

$$\vec{n} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)$$

če to vstavimo v enačbo ravnine, dobimo da lahko ravnino Σ zapišemo kot:

$$((\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Opazimo, da nam ta enačba predstavlja mešani produkt kar lahko zapišemo z determinanto reda 3:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

kjer je vektor \vec{r}_n zapisan kot: $\vec{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$.

Če imamo točko R_1 , ki ni na ravnini, lahko zapišemo razdaljo te točke do ravnine kot:

$$\Delta = \pm |\vec{r}_1 - \vec{r}_0| \cos \varphi \quad (1)$$

To enačbo lahko s pomočjo enačbe ravnine preoblikujemo v:

$$\Delta = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}$$

v števcu lahko uprabimo absolutno vrednost s katero se znebimo predznaka, ki se pojavi v (1), ker je razdalja vedno pozitivna.

Razdaljo med ravnino Σ in točko R_1 lahko zapišemo tudi kot:

$$\Delta = d(R_1, \Sigma)$$

Če si pomagamo z že izpeljano implicitno enačbo ravnine, se lahko znebimo vektorjev in dobimo naslednjo enačbo:

$$d(R_1, \Sigma) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

kjer $O\vec{R}_1 = \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

2.3 Razdalja med mimobežnima premicama

p_1 : e_1 je smerni vektor; $R_1 \in p_1, r_1$

p_2 : e_2 je smerni vektor; $R_2 \in p_2, r_2$

Da sta premici mimobežni imamo dva pogoja:

- $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \neq \vec{0} (p_1 \nparallel p_2)$
- $p_1 \cap p_2 = \emptyset$ (ne sekata se)

$$d(p_1, p_2) = \min\{d(T_1, T_2) : T_1 \in p_1, T_2 \in p_2\}$$

Z pomočjo skice in premisleka opazimo, da je najmanjša razdalja takrat, ko $S_1 S_2 \perp p_1, p_2$. To pomeni:

$$\begin{aligned} S_1 \vec{S}_2 &\perp \vec{e}_1, \vec{e}_2 \\ S_1 \vec{S}_2 &= \lambda \vec{e}_1 \times \vec{e}_2, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tu je spet v veliko pomoč skica. Ideja je, da z vzporednim premikom premaknemo vektor \vec{e}_2 v izhodišče vektorja \vec{e}_1 . S tem lahko naredimo ravnino Σ_1 , ki jo tvorita ta dva vektorja. Nato naredimo ravnino Σ_2 na podoben način – z vzporednim premikom premaknemo vektor \vec{e}_1 v izhodišče vektorja \vec{e}_2 . Velja $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$. Ker sta si ravnini vzporedni lahko premico p_1 z vzporednim premikom premaknemo iz Σ_1 v Σ_2 in dobimo premico p_1^* , ki se seka s premico p_2 v točko S_2 . Podobno lahko premaknemo premico p_2 v ravnino Σ_1 in dobimo točko S_1 kjer se sekata p_1 in p_2^* . Opazimo, da je daljica S_1S_2 pravokotna na premici p_1 in p_2 in je tudi najkrajša razdalja med tema premicama. To pomeni, da je dolžina daljice S_1S_2 razdalja med premicama p_1 in p_2 .

Z nadaljnim premislekom in zelo natančno narisano skico opazimo, da vektorji \vec{e}_1, \vec{e}_2 in $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ tvorijo paralelepiped, katerega višina je enaka daljici S_1S_2 . To pomeni, da lahko uporabimo naše znanje o mešanem produktu in naredimo naslednje:

$$\begin{aligned} V &= |[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2]| \\ V &= |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| \cdot \Delta \end{aligned}$$

kjer je $\Delta = |S_1S_2|$.

To lahko izenačimo in dobimo:

$$\Delta = \frac{|[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2]|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}$$

3 Osnovne algebrske strukture

3.1 Preslikave in relacije

A, B sta neprazni množici.

Preslikavo, ki slika iz A v B lahko zapišemo kot $f : A \rightarrow B$ ali $A \xrightarrow{f} B$.

$\forall x \in A$ predpis f določi natanko en element, ki je iz množice B . Množici A rečemo domena (včasih tudi definicijsko območje), množici B pa rečemo kodomena. $f(x)$ pravimo slika elementa x . ($x \mapsto f(x)$)

Zaloga (vrednosti) preslikave $f : A \rightarrow B$ je množica $\{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.

$f : A \rightarrow B$ je *surjektivna* (surjekcija), kadar je njena zaloga B .

$$\forall y \in B \exists x \in A : y = f(x)$$

$f : A \rightarrow B$ je *injektivna* (injekcija), kadar velja sklep:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Za preverjanje uporabimo:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, x_1, x_2 \in A$$

$f : A \rightarrow B$ je *bijektivna* (bijekcija), kadar je injektivna in hkrati surjektivna. Če je $f : A \rightarrow B$ bijekcija, obstaja točno določena preslikava $g : B \rightarrow A$, da velja:

$$(\forall x \in A : g(f(x)) = x) \wedge (\forall y \in B : f(g(y)) = y)$$

Preslikavo $g : B \rightarrow A$ imenujemo *inverz* preslikave $f : A \rightarrow B$ in jo označimo z:

$$g = f^{-1}$$

Kompozitum preslikav $f : A \rightarrow B$ in $g : B \rightarrow C$ je:

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ ali } gf \\ g \circ f : A \rightarrow C \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

za vsak $x \in A$.

Preslikavo $A \rightarrow A$ imenujemo *identična preslikava* ali *identiteta*:

$$\begin{aligned} id_A : A \rightarrow A \\ \forall x \in A : id_A(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : A \rightarrow B \text{ bijekcija} \\ g : B \rightarrow A \\ g \circ f = id_A \\ f \circ g = id_B \end{aligned}$$

$f : A \rightarrow B$ je bijekcija in $g : B \rightarrow A$ je inverzana preslikava $f \iff (g \circ f = id_A \wedge f \circ g = id_B)$

Graf preslikave $f : A \rightarrow B$ je množica:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

$$G(f) \subseteq A \times B$$

Relacija med elementi množice A in elementi množice B je podmnožica množice $A \times B$.

$R \subseteq A \times B$ (R je relacija)
 $(x, y) \in R \equiv xRy$

Primeri kjer $A = B$ (relacija $R \subseteq A \times A$ je *binarna relacija* na množici A).

(1) $A = \mathbb{R}$

R relacija na \mathbb{R} : \leq

$$(x, y) \in R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \iff x \leq y$$

$$R = \leq$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$$

(2) $A = \{p : p \text{ - premica v prostoru}\}$

R relacija vzporednosti

$$p, q \in A \quad pRq \equiv p \parallel q$$

(3) $M \neq \emptyset, \quad A = \mathcal{P}M$ R relacija *inkluzije* \subseteq

$$x, y \in A \quad (x \subseteq A, y \subseteq A)$$

$$xRy \equiv x \subseteq y$$

Definicije:

(1) Relacija R nad A je *refleksivna*, kadar velja xRx za vsak $x \in A$.

(2) Relacija R nad A je *tranzitivna*, kadar velja sklep:

$$(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

(3) Relacija R nad A je *antisimetrična*, kadar velja sklep:

$$(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$$

(4) Relacija R nad A je *simetrična*, kadar velja sklep:

$$xRy \Rightarrow yRx$$

(5) R je relacija *delne urejenosti*, kadar je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna ($R \equiv \leq$).

(6) R je relacija *ekvivalence* (ali ekvivalenčna relacija), kadar je refleksivna, simetrična in tranzitivna ($R \equiv \sim$).

Naj bo A neprazna množica, \sim ekvivalenčna relacija na A in $a \in A$.

$$[a] = \{x \in A : x \sim a\}$$

$[a]$ je *ekvivalenčni razred* elementa a .

$$a \sim a \Rightarrow a \in [a]$$

a je predstavnik tega ekvivalenčnega razreda.

$$[a] = [b]?$$

Predpostavimo $b \sim a$ (zaradi simetričnosti sledi $a \sim b$).

$$x \in [a] \Rightarrow x \sim a \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b]$$

Torej velja:

$$[a] \subseteq [b]$$

$$[b] \subseteq [a]$$

Zato $[a] = [b]$.

Velja tudi $[a] = [b] \Rightarrow a \sim b$

$$[a] = [b] \Rightarrow a \in [a] \Rightarrow a \in [b] \Rightarrow a \sim b$$

$$a \sim b \iff [a] = [b]$$

Naj velja $[a] \cap [b] \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} \exists c \in [a] \cap [b] \\ \Rightarrow c \sim a \wedge c \sim b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a] \cap [b] \neq \emptyset &\Rightarrow [a] = [b] \\ [a] \neq [b] &\Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset \end{aligned}$$

$A/\sim = \{[a] : a \in A\}$ je *kvocientna* ali *faktorska* množica glede na ekvivalenčno relacijo \sim .

$A = \cup[a]$ pravimo *razčlenitev* A -ja.

Primeri:

- (1) $A = \{\overrightarrow{MN} : M, N - \text{točki v prostoru}\}$
 \overrightarrow{MN} je usmerjena daljica
 $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{MN} \iff$ obstaja translacija, ki XY prenese v MN . \sim je ekvivalenčna relacija.

$$[\overrightarrow{MN}] = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{MN}\} = \overrightarrow{MN}$$

- (2) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

$$\sim : (m, n) \sim (p, q) \iff mq = np$$

\sim je ekvivalenčna relacija

$$A/\sim = \mathbb{Q}$$

$$[(m, n)] = \{(p, q) : (p, q) \sim (m, n)\}$$

3.2 Operacije

$$M \neq \emptyset$$

Operacija na M je preslikava $M \times M \rightarrow M, (a, b) \mapsto a \circ b$

$a \circ b$ je *kompozitum* elementov a in b .

PRIMERI:

1) $M = \mathbb{N}$ ali \mathbb{Z} ali \mathbb{Q} ali \mathbb{R} .

\circ je lahko $+$ ali \cdot .

2) $A \neq \emptyset$

$$M = \{f : A \rightarrow A\} \equiv F(A)$$

\circ je kompozitum preslikav

M z dano operacijo \circ je *grupoid* (M, \circ) .

Zapis operacije brez znaka $(a, b) \mapsto ab$ je *multiplikativen* zapis operacije.

Imamo grupoid (M, \sim, \circ) . Radi bi prenesli \circ v M/\sim .

Operacija \circ je usklajena z ekvivalenčno relacijo \sim , kadar velja sklep:

$$(m_1 \sim m \wedge n_1 \sim n) \Rightarrow m_1 \circ n_1 \sim m \circ n$$

kjer $m, n, m_1, n_1 \in M$.

PRIMER: $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

\sim iz primera (2)

$$(p_1, q_1) \sim (p, q) \wedge (m_1, n_1) \sim (m, n) \Rightarrow (p_1, q_1) + (m_1, n_1) \sim (p, q) + (m, n) \\ (p, q) + (m, n) := (pn + mq, nq)$$

v $+$ iz $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ lahko prenesemo na $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\sim$.

(M, \sim, \circ) , \sim in \circ usklajeni.

V M/\sim lahko uvedemo operacijo $\tilde{\circ}$ s predpisom:

$$[a] \tilde{\circ} [b] = [a \circ b]$$

Definicija je dobra zaradi uklajenosti operacije \circ z relacijo \sim :

$$[a_1] = [a] \text{ in } [b_1] = [b] \Rightarrow [a_1 \circ b_1] = [a \circ b]$$

3.3 Grupe

DEFINICIJE:

- (M, \circ) grupoid

$e \in M$ je *enota* ali *neutralni element* grupoida (M, \circ) kadar velja:

$$\forall a \in M : a \circ e = e \circ a = a$$

Če enota obstaja je ena sam

$e_1, e_2 \in M$ sta enoti. Sledi:

$$e_1 \circ e_2 = e_2$$

če upoštevamo da je e_1 enota,

$$e_1 \circ e_2 = e_1$$

če upoštevamo da je e_2 enota

$$\Rightarrow e_1 = e_2$$

□

- Grupoid (M, \circ) je *polgrupa*, kadar je opracije \circ *asociativna*:

$$\forall a, b, c \in M : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

V polgrupi oklepaji niso potrebni: $a \circ b \circ c$.

- Naj bo (M, \circ) polgrupa z enoto e .

Element $b \in M$ je *inverz* elementa $a \in M$, kadar velja:

$$a \circ b = b \circ a = e$$

Kadar ima element $a \in M$ inverz, pravimo, da je a *invertabilen* ali *obrnljiv*.

Če ima $a \in M$ inverz, je ta en sam

b_1, b_2 inverza elementa a .

$$a \circ b_1 = b_1 \circ a = e$$

$$a \circ b_2 = b_2 \circ a = e$$

$$\Rightarrow b_1 = b_1 \circ e = b_1 \circ (a \circ b_2) = (b_1 \circ a) \circ b_2 = e \circ b_2 = b_2$$

□

Če je $a \in M$ obrnljiv, njegov inverz zaznamujemo (v splošnem) z a^{-1} .

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

- Polgrupa z enoto, v kateri je vsak element obrnljiv se imenuje *grupa*.

Z multiplikativnim zapisom: (G, \circ) je grupa, kadar velja:

$$(1) \quad \forall a, b, c \in G : (ab)c = a(bc)$$

$$(2) \quad \exists e \in G \forall a \in G : ae = ea = a$$

$$(3) \quad \forall a \in G \exists b \in G : ab = ba = e$$

- (M, \circ) grupoid je *komutativen*, kadar velja:

$$\forall a, b \in M : a \circ b = b \circ a$$

PRIMERI:

(1) $(\mathbb{N}, +)$ polgrupa brez enote (če $0 \notin \mathbb{N}$).

(2) (\mathbb{N}, \cdot) polgrupa z enoto 1

(3) $(\mathbb{Z}, +)$ grupa

(4) (\mathbb{Z}, \cdot) polgrupa z enoto 1

(5) $A \neq \emptyset, M = F(A) = \{f : A \rightarrow A\}$

operacija: komponiranje preslikave

(M, \circ) je polgrupa z enoto $e = id$

(6) $M = S(A) = \{f : A \mapsto A, f \text{ je bijekcija}\}$

(M, \circ) je grupa

Prejšen primer lahko nekoliko spremenimo in dobimo:

$$A = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$S(A) \equiv S_n$$

S_n je *simetrična grupa*.

$$\pi \in S_n$$

$$\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

Če preslikamo vse elemente s preslikavo π dobimo:

$$\{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$$

Pravimo, da je π *permutacija* in jo zapišemo kot:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Zapis $\pi(k)$ je raltivno dolg, zato ga skrajšamo na:

$$\pi(k) = i_k$$

S tem lahk permutacijo π zapišemo kot:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

Zelo lahko je izplejati, da S_n ima $n!$ elementov.

Ker so permutacije elementi grupe, ki ima za operacijo komponiranje preslikav (kompozitum), lahko z njimi računamo. Poglejmo si primer:

$$\begin{aligned} \rho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kjer $\rho, \sigma \in S_3$

$$\begin{aligned} \rho\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \sigma\rho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Opazimo, da $\rho\sigma \neq \sigma\rho$.

Poglejmo si, kako lahko v grupi krajšamo. Naj bo (G, \cdot) grupa.

$$\begin{aligned} ab &= ac \\ a^{-1}(ab) &= a^{-1}(ac) \\ (a^{-1}a)b &= (a^{-1}a)c \\ eb &= ec \\ b &= c \end{aligned}$$

Pozorni moramo biti na vrstni red, ker v grupi ni obvezno da velja komutativnost. Pri tem primeru smo na obeh straneh enačbe a imeli na levi strani.

Analogno bi lahko pravilo krajšanja izpeljali, če bi bil a na desni strani, vendar ne če je na eni strani enačbe desni, na drugi pa levi člen. To pomeni da v grupi vlejajo naslednje trditve:

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

$$ab = ca \nRightarrow b = c$$

$$b \neq c \Rightarrow ab \neq ac$$

GRUPA S TREMI ELEMENTI JE SAMO ENA

Naj bo G grupa s tremi elementi.

$$G = \{e, a, b\}$$

kjer je e enota.

Zapišimo naslednjo tabelo:

	e	a	b
e			
a			
b			

Prva vrstica in prvi stolpec sta trivialna, saj imamo na eni strani enoto. Tabelo lahko dopolnimo in dobimo:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

Potrebujemo premisliti drugo vrstico. Vemo že, da $ae = a$, potrebujemo pa se odločiti, kaj bomo zapisali pri aa in pri ab .

Zgoraj smo zapisali pravilo, ki nam pravi naslednje: $b \neq c \Rightarrow ab \neq ac$. V grupi so trije različni elementi, to pomeni: $e \neq a \neq b \Rightarrow ae \neq aa \neq ab$. Drugače povedano, v vsaki vrstici bo vsak element nastopil natanko enkrat in tudi v vsakem stolpcu bo vsak element nastopil natanko enkrat. To si lahko predstavljamo kot nekakšen sudoku.

Če se vrnemo na prejšnji problem - odločitev kaj je aa in kaj ab . Sedaj vemo da imamo dve možnosti:

1) $ab = b \Rightarrow a = e \rightarrow \leftarrow$ ni možno, ker bi potem a bil enota, vemo pa da mora biti različen od enote.

2) $ab = e$

Torej se odločimo da bo veljalo $ab = e$. Za aa nam torej ostane samo ena možnost, to je: $aa = b$. Tabelo lahko še nekoliko dopolnimo:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b		

Za izpolniti nam ostane samo še ba in bb . Zapisali smo že, da se mora v vsaki vrstici vsak element nahajati natanko enkrat. Torej lahko samo dopolnimo tabelo do konca in dobimo:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Definirajmo potence. To bomo naredili podobno kot pri analizi. Za pozitivne cele eksponente torej velja:

$$\begin{aligned} aa &= a^2 \\ aaa &= a^3 \\ \underbrace{aa \dots a}_n &= a^n \end{aligned}$$

Za negativne cele eksponente velja podobno:

$$\begin{aligned} a^{-1}a^{-1} &= a^{-2} \\ a^{-1}a^{-1}a^{-1} &= a^{-3} \\ \underbrace{a^{-1}a^{-1} \dots a^{-1}}_n &= a^{-n} \end{aligned}$$

Definirati moramo še a^0 . To naredimo na sledeč način:

$$a^0 \equiv e$$

Sedaj lahko zapišemo G kot $G = \{e, a, a^2\}$. Vemo tudi, da $a^3 = e$.

Primer take je grupe je podmnožica kompleksnih števil kjer je opracija množenje:

$$\begin{aligned} G &\subseteq \mathbb{C} \\ G &= \{1, a, a^2\} \\ a &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Za katerikoli n obstaja grupa. Zgornji grupi G pravimo tudi *ciklična grupa*.

DEFINICIJA transpozicije:

Naj bosta $j, k \in \{1, \dots, n\}, j \neq k$

$$\begin{aligned} \tau &\in S_n \\ \tau(j) &= k \\ \tau(k) &= j \\ \tau(i) &= i \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j, k\} \end{aligned}$$

τ je *transpozicija*.

Vsaka permutacija je kompozitum samih transpozicij.

PRIMER:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Lahko si naredimo diagram, kjer v vsakem koraku premaknemo en element na pravo mesto. Začnemo z 1, nato 2 in tako naprej. Nato samo komponiramo transpozicije, ki smo jih uporabili. Skica takega postopka je v zvezku. Če je ni, potem lahko poizkusiš izumiti toplo vodo, lahko pa vprašaš kakšnega študenta, ki je bolj priden od tebe in ima to skico v zvezku. Torej lahko permutacijo π zapišemo kot kompozitum transpozicij na naslednj način:

$$\pi = (4, 5)(2, 4)(1, 3)$$

Strategija velja v vsaki simetrični grupi S_n . Zelo lahko je opzaiti, da lahko vsako permutacijo zapišemo kot kompozitum največ $n - 1$ transpozicij.

Definirajmo inverzijo. Naj bo

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n \\ 1 &\leq j < k \leq n \end{aligned}$$

DEFINICIJA: Par (j, k) tvori *inverzijo* v permutaciji π , kadar v vrstici i_1, i_2, \dots, i_n k nastopa pred j (z leve proti desni). Drugače povedano: indeks mesta elementa i_k je manjši od indeksa elementa i_j .

$$\text{inv}\pi = \text{število inverzij v } \pi$$

PRIMER:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Inverzije v π so:

$$\begin{aligned} &(1, 3), (1, 5) \\ &(2, 3), (2, 5) \\ &(4, 5) \end{aligned}$$

$$\text{inv}\pi = 5$$

Definirajmo naslednjo funkcijo:

$$s(\pi) = (-1)^{\text{inv}\pi} = \begin{cases} 1 & \pi \text{ ima sodo inverzij} \\ -1 & \pi \text{ ima liho inverzij} \end{cases}$$

Pravimo da:

$$\pi \text{ je soda} \iff s(\pi) = 1$$

$$\pi \text{ je liha} \iff s(\pi) = -1$$

TRDITEV: Naj bo $\tau \in S_n$ transpozicija. Potem $\forall \rho \in S_n$ velja:

$$s(\tau\rho) = -s(\rho)$$

DOKAZ:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

$$1) \quad \tau = (i_k, i_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \text{inv}(\tau\rho) &= \text{inv}(\rho) \pm 1 \\ \Rightarrow s(\tau\rho) &= -s(\rho) \end{aligned}$$

$$2) \quad \tau(i_k, i_{k+p}), p > 1$$

τ dosežemo s produktom transpozicij podobni tisti v primeru (1). To pomeni, da najprej element i_k premikamo v desno proti i_{k+p} , vsakič za

eno mesto, nato pa še element i_{k+p} premikamo nazaj na prvotno mesto elementa i_k . Če znamo vsaj malo algoritmov, se lahko spomnimo na bubble sort. Za ostale, ki ne znajo algoritmov pa obstaja skica, ki se žal ponovno nahaja samo v zvezku in domišljiji bralca.

Torej potrebujemo p transpozicij, da premaknemo element i_k na mesto elementa i_{k+p} . V tem trenutku, je i_{k+p} , že premaknjen eno mesto proti ciljni poziciji, zato potrebujemo samo še $p - 1$ transpozicij, da ga damo na mesto elementa i_k . Torej je skupno število potrebnih transpozicij:

$$p + p - 1 = 2p - 1$$

Vemo, da se na vsakem koraku predznak permutacije zamenja, zato velja:

$$s(\tau\rho) = (-1)^{2p-1}s(\rho) = -s(\rho)$$

saj je $2p - 1$ liho število. □

IZREK: Naj bo $\pi \in S_n$ in naj velja:

$$\pi = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$$

kjer so τ_i transpozicije.

Potem je π soda (oziroma liha) natanko takrat, kadar je število k sodo (oziroma liho).

DOKAZ: $s(e) = 1$ kjer je $e = id_{\{1, \dots, n\}}$ enota grupa S_n . Z uporabo prejšnje trditve lahko naredimo naslednje:

$$\begin{aligned} s(\pi) &= s(\underbrace{\tau_1}_{\tau} \underbrace{\tau_2 \dots \tau_k}_{\rho} e) = \\ &= (-1)s(\tau_2 \dots \tau_k e) = (-1)^2 s(\tau_3 \dots \tau_k e) = \dots \\ &= (-1)^k s(e) = (-1)^k \end{aligned}$$

Naj bo $A_n = \{\pi \in S_n : \pi \text{ soda}\}$, $e \in A_n$

$$(1) \quad \rho, \sigma \in A_n \Rightarrow \rho\sigma \in A_n$$

ρ, σ zapišemo kot produkt samih transpozicij. Nato uporabimo prejšnji izrek.

Opomba: to velja samo za sode permutacije. Produkt 2 lihih permutacij je soda permutacija.

$$(2) \rho \in A_n \Rightarrow \rho^{-1} \in A_n$$

$$\begin{aligned}\rho &= \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{k-1} \tau_k \\ \rho^{-1} &= \tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_2 \tau_1\end{aligned}$$

kjer τ_i transpozicija in k je sodo.

$$\rho \rho^{-1} = \tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_2 \tau_1 \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{k-1} \tau_k$$

Ker je S_n grupa velja asociativnost, torej lahko začnemo v sredini: $\tau_1 \tau_1 = e$, nato $\tau_2 \tau_2 = e$ in tako naprej.

$A_n \subseteq S_n, e \in A_n$. Torej je A_n zaprta za množenje in zaprta za invertiranje. Zato je A_n grupa. Pravimo ji *alternirajoča grupa*.

Naj bo τ transpozicija, $\rho \in A_n \Rightarrow \tau \rho$ je liha

Naj bosta $\rho_1 \rho_2 \in A_n, \rho_1 \neq \rho_2$. Sledi $\tau \rho_1 \neq \tau \rho_2$.

$n > 1$ število lihih permutacij je enako številu sodih permutacij. Torej ima A_n $\frac{n!}{2}$ elementov.

DEFINIRAJMO podgrupo:

Naj bo (G, \cdot) grupa in $H \subseteq G, H \neq \emptyset$. H naj izpolnjuje pogoja:

$$(1) a, b \in H \Rightarrow ab \in H$$

Temu pravimo *zaprtost za množenje*

$$(2) a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

Temu pravimo *zaprtost za invertiranje*

Potem je H za operacijo iz G grupa.

$$\begin{aligned}a \in H &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} a^{-1} \in H \\ a, a^{-1} \in H &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} e = aa^{-1} \in H\end{aligned}$$

e enota grupa G leži v H in je enota v H . Pravimo, da je H *podgrupa* grupe G .

PRIMERI:

- (1) A_n je podgrupa S_n
- (2) G grupa, G je podgrupa v G .
 $\{e\}$ je *trivialna podgrupa* G
- (3) (G, \cdot) je grupa

$$\begin{aligned}
 a &\in G \\
 H &= \{a^m; m \in \mathbb{Z}\} \\
 H &= \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, a^3, \dots\}
 \end{aligned}$$

H je najmanjša podgrupa grupe G , ki vsebuje a .

$$H \equiv \langle a \rangle$$

Recimo, da velja $a^{m_1} = a^{m_2}$ za celi števili $m_1 < m_2$.

$$\begin{aligned}
 a^m a^{-m_1} &= a^{m_2} a^{-m_1} = a^{m_2 - m_1} \\
 k &= m_2 - m_1 \in \mathbb{N}, k \geq 1 \\
 \exists k \in \mathbb{N} : a^k &= e
 \end{aligned}$$

Naj bo $k \in \mathbb{N}$ najmanjše naravno število, ki izpolnjuje pogoj $a^k = e$. Pona-
 vljal se bo vzorec:

$$e, a, a^2, \dots, a^{k-1}$$

in veja:

$$\begin{aligned}
 a^{k+1} &= a^k a = a \\
 a^{k+2} &= a^k a^2 = a^2
 \end{aligned}$$

$$H = \{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$$

H ima k elementov. Pravimo, da je H *ciklična grupa reda* k .

3.4 Ablove grupe

Pravimo jim tudi *komutativne grupe*.

$(G, +)$ je grupa in je komutativna:

$$\forall a, b \in G : a + b = b + a$$

PRIMERI: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$

Naj bo (G, \cdot) grupa (ne nujno komutativna).

$$a \in G, \langle a \rangle = \{a^m : m \in \mathbb{Z}\}$$

$\langle a \rangle$ je abelova grupa:

$$a^i a^j = a^{i+j} = a^j a^i$$

Oznake v abelovi grupi:

- 0 -enota Abelove grupe
- $-a$ nasprotni element od a
- $\underbrace{a + a + \dots + a}_{n, n \in \mathbb{N}} \equiv na, n \in \mathbb{N}$
- $(-n)a \equiv -(na) = \underbrace{(-a) + (-a) + \dots + (-a)}_n, n \in \mathbb{N}$
- $0a \equiv 0$

Opomba: na levi strani je 0 število 0, na desni pa je enota grupe

- $a, b \in GG$

$$a - b \equiv a + (-b)$$

Naj bo $(G, +)$ Abelova grupa in $H \subseteq G, H \neq \emptyset, H$ podgrupa

$$(1) \ a, b \in H \Rightarrow a + b \in H$$

$$(2) \ a \in H \Rightarrow -a \in H$$

$$(1) \ \& \ (2) \iff (a, b \in H \Rightarrow a - b \in H)$$

PRIMER: $(G, +) = (\mathbb{Z}, +)$, $+$ je običajno seštevanje.

$$n \in \mathbb{N}$$

$$H = \{kn : k \in \mathbb{Z}\} = \{m \in \mathbb{Z} : n|m\}$$

H je podgrupa grupe $(\mathbb{Z}, +)$ in je množica večkratnikov n . Pišemo:

$$H \equiv n\mathbb{Z}$$

Naj bo $(G, +)$ Abelova grupa, $H \subseteq G$, H podgrupa.

$$a, b \in G : a \sim b \stackrel{\text{def}}{\iff} a - b \in H$$

\sim je ekvivalenčna relacija

(1) *refleksivnost*: $\forall a \in G : a \sim a$

$$a \sim a \iff \underbrace{a - a}_{\text{enota } H} \in H$$

(2) *simetričnost* $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

$$a \sim b \Rightarrow a - b \in H \Rightarrow b - a = -(a - b) \in H$$

Dokazati je potrebno korak $b - a = -(a - b)$:

$$(b - a) + (a - b) = b + (-a) + a + (-b) = 0$$

(3) *tranzitivnost* $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

$$a - b \in H$$

$$b - c \in H$$

Po definiciji $a, b \in H : a + b \in H$, torej v našem primeru:

$$(a - b) + (b - c) = b - c \in H \Rightarrow a \sim c$$

□

Seštevanje in ekvivalenčna relacija \sim sta usklajeni: $x \sim a, y \sim b \Rightarrow x + y \sim a + b$

$$x - a \in H$$

$$y - b \in H$$

Po definiciji relacije potrebuje veljati: $(x + y) - (a + b) \in H$

$$(x + y) - (a + b) = \underbrace{x - a}_{\in H} + \underbrace{y - b}_{\in H} \in H$$

□

Zato lahko operacijo $+$ prenesemo na kvocientno množico:

$$G/\sim = \{[a] : a \in G\}$$

$$\forall a, b \in G : [a] + [b] = [a + b]$$

$(G/\sim, +)$ je Abelova grupa

Opomba: $+$ je operacija med ekvivalenčnimi razredi in je različna od operacije med elementi

OZNAKA: G/H (namesto G/\sim , ker \sim definiramo s pomočjo H)

Komutativnost in asociativnost se hitro preveri. Za enoto vzamemo $[0]$. Nasprotni element definiramo kot $-[a] = [-a]$

Naj bo $(G, +)$ Abelova grupa in H njena podgrupa. Velja:

$$G/H = \{[q] : q \in G\}$$

$$[q] = \{x \in G : x - q \in H\} = \{q + h : h \in H\}$$

Uvedemo novi oznaki:

$$[q] \equiv q + H$$

$$[0] = H$$

PRIMER: $G = \mathbb{Z}$ z običajnim seštevanjem. Naj bo $n \in \mathbb{N}$; $H = n\mathbb{Z}$ podgrupa \mathbb{Z} . Ekvivalenčni razred torej zaznamujemo kot:

$$[m] = m + n\mathbb{Z}$$

Če si narišemo skico za npr. $n = 4$ opazimo, da je $[0] = [4]$ Torej je kvocientna grupa:

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

V splošnem zapišemo:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$$

To da je m v nekem ekvivalenčnem razredu, lahko povemo kot:

$$m \in [j], j \in 0, 1, \dots, n \iff m \text{ pri deljenju z } n \text{ da ostanek } j$$

Običajno skrajšamo zapis in pišemo:

$$[j] \equiv j$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}_n$$

Pravimo, da je \mathbb{Z}_n grupa ostankov pri deljenju z n . To lahko narišemo v tabelo. Poglejmo si, kako bi izgledala tabela za grupo

$$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

Tabela 1: Tabela za \mathbb{Z}_4

+	1	2	3
1	2	3	0
2	3	0	1
3	0	1	2

3.5 Homomorfizmi

DEFINICIJA: Naj bosta $(G_1, \circ), (G_2, \circ)$ grupoida. Preslikava $f : G_1 \rightarrow G_2$ je *homomorfizem*, kadar velja:

$$\forall x, y \in G_1 : f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$$

Z besedami: “Slika kompozituma je kompozitum slik”.

Če je $G_2 = G_1$ in $f : G_1 \rightarrow G_2$ homomorfizem, potem je f *endomorfizem*.

DEFINICIJA: Preslikava $f : G_1 \rightarrow G_2$ je *izomorfizem*, kadar je f bijektivna in sta f ter f^{-1} homomorfizma.

TRDITEV: Bijektven homomorfizem je izomorfizem.

DOKAZ: Naj bo $f : G_1 \rightarrow G_2$ bijektiven homomorfizem, kjer sta G_1 in G_2 grupoida. Trdimo, da je $f^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$ homomorfizem. Naj bosta $u, v \in G_2$. Ker je f surjektivna velja: $u = f(x)$ in $v = f(y)$. Torej lahko zapišemo:

$$f^{-1}(u \circ v) = f^{-1}(f(x) \circ f(y)) = f^{-1}(f(x \circ y)) = x \circ y = f^{-1}(u) \circ f^{-1}(v)$$

Zadnji enačaj velja, ker je f injektivna. □

PRIMERI:

(1) $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$, (G, \circ) grupa, $a \in G$. Predpis f definiramo kot $f(m) = a^m$.

f je homomorfizem med grupama $(\mathbb{Z}, +)$ in (G, \circ)

$$f(m_1 + m_2) = a^{m_1+m_2} = a^{m_1}a^{m_2} = f(m_1)f(m_2)$$

G nadomestimo s podgrupo $\langle a \rangle = \{a^m, m \in \mathbb{Z}\}$ in ohranimo isti predpis:

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \langle a \rangle$$

f je surjektiven homomorfizem.

Opazimo, da je f izomorfizem natanko takrat, ko $\langle a \rangle$ ni končna:

$$a^{m_1} = a^{m_2} \Rightarrow m_1 = m_2$$

(2) $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow C_n$ kjer:

$$C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$$

imamo $(C_n, \circ), (\mathbb{Z}_n, +)$. Predpis od f definiramo kot:

$$f(j) = z_0^j, z_0 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

f je homomorfizem

$$f(j+k) = z_0^{j+k} = z_0^j z_0^k = f(j)f(k)$$

f je surjekcija in injekcija $\Rightarrow f$ je izomorfizem.

(3) $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^+, \circ)$, kjer:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

$$f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \circ)$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Predpis definiramo kot:

$$f(x) = 2^x$$

f je homomorfizem

$$f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x 2^y = f(x)f(y)$$

f je bijekcija z inverzom:

$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$

Torej je f izomorfizem.

TRDITEV: Kompozitum (dveh) homomorfizmov je homomorfizem. Kompozitum izomorfizmov je izomorfizem.

DOKAZ:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x \circ y) &= \\ &= f(g(x \circ y)) = f(g(x) \circ g(y)) = f(g(x)) \circ f(g(y)) = \\ &= (f \circ g)(x) \circ (f \circ g)(y)\end{aligned}$$

Naj bosta G_1, G_2 grupi z multiplikativnim zapisom in $f : G_1 \rightarrow G_2$ homomorfizem. Potem velja:

- (1) f enoto grupe G_1 preslika v enoto grupe G_2
- (2) $\text{im} f = \{f(x) : x \in G_1\}$ (zaloga vrednosti) je podgrupa v G_2 ³
- (3) $\ker f = \{x \in G_1 : f(x) = e_2\}$ (e_2 je enota grupe G_2) je podgrupa v G_1 ⁴

DOKAZ: e_1 enota G_1 , e_2 enota G_2

- (1) $f(e_1) = f(e_2)$

$$f(e_1) = f(e_1 e_1) = f(e_1) f(e_1)$$

Označimo

$$f(e_1) = x \in G_2$$

Dobili smo:

$$\begin{aligned}x &= xx \\ xx^{-1} &= (xx)x^{-1} = x(xx^{-1})\end{aligned}$$

Torej:

$$e_2 = x$$

Sklep: $f(e_1) = e_2$

□

- (2) $\text{im} f$ je podgrupa G_2

Naj bosta $u, v \in \text{im} f$. Velja:

$$\exists x, y \in G_1 : u = f(x), v = f(y)$$

³ $\text{im} f$ je slika (image) od f

⁴ $\ker f$ je jedro (kernel) od f

Velja:

$$uv = f(x)f(y) = f(xy)$$

Torej $uv \in \text{im} f$.

Podgrupa potrebuje tudi zaprtost za invertiranje:

$$\underline{u \in \text{im} f \Rightarrow u^{-1} \in \text{im} f}$$

$$u = f(x) \Rightarrow f(x^{-1}) = u^{-1}$$

To je potrebno še dokazati in naj bi bilo doma za vajo. Iz tega sledi:

$$u^{-1} \in \text{im} f$$

3.6 Kolobar

DEFINICIJA: Kolobar je množica K skupaj z operacijama $+$ in \cdot na K . ($+$ je seštevanje, \cdot je množenje), kadar je $(K, +)$ Abelova grupa, (K, \cdot) je podgrupa. Operaciji povezujeta distributivnostna zakona:

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(b + c)a = ba + ca$$

PRIMERI:

(1) Številski kolobarji $(+, \cdot)$ običajni operaciji

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$$

(2) $\mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}$ Kolobar ostankov pri deljenju z n

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Množenje definiramo podobno kot seštevanje:

$$i, j \in \mathbb{Z}_n; ij = k - \text{ostanek pri deljenju običajnega produkta } ij \text{ z } n$$

Primer množenja v \mathbb{Z}_6 :

$$3 \cdot 5 = 3$$

$$3 \cdot 4 = 0$$

(3) $K = \mathbb{R}^2$

$$\oplus (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

$$\odot (x, y) \cdot (u, v) = (xu, yv)$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ je kolobar.

(4) $K = \mathbb{R}^3$

$$\oplus (x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w)$$

$$\odot (x, y, z) \cdot (u, v, w) = (xu, xv + yw, zw)$$

$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ je kolobar.

(5) $M \neq \emptyset, K = \{f : M \rightarrow R\} = \mathbb{R}^M$

$$\oplus (f + g)(x) = f(x) + g(x) \forall x \in M (f, g \in K)$$

$$\odot (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \forall x \in M (f, g \in K)$$

Opomba: Pravimo, da operaciji definiramo po točkah.

K je *kolobar z enoto* (ali enico) e , kadar je e enota za množenje.

$$\forall a \in K : ea = ae = a$$

K je *komutativen kolobar*, kadar je množenje komutativno.

$$\forall a, b \in K : ab = ba$$

PRIMERI: (nanašajo se na primere za kolobarje)

	ima enoto	komutativen
1	✓	✓
2	✓	✓
3	✗	✗
4	✗	✓
5	✓	✓

DEFINICIJA: Naj bo $(K, +, \cdot)$ kolobar in $a, b \in K \setminus \{0\}$. Če velja $ab = 0$, sta a in b *delitelja nič*. Pravimo, da je a *levi delitelj nič* in b *desni delitelj nič*.

DEFINICIJA: Kolobar z enoto (enko) 1 je *obseg*, kadar je $1 \neq 0$ in vsak $a \in K \setminus \{0\}$ obrnljiv (v polgrupi (K, \cdot)). S simbolnim zapisom je to:

$$\forall a \in K \setminus \{0\} \exists b \in K : ab = ba = 1$$

Posledica je, da je $(K \setminus \{0\}, +, \cdot)$ grupa.

PRIMERI:

- (1) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ za običajna $+$ in \cdot .
- (2) \mathbb{Z}_n je obseg, kadar je n praštevilo.

Naj bo \mathcal{O} obseg in $a, b, c \in \mathcal{O}$. Linearne enačbe lahko rešujemo na naslednji način:

$$ax + b = c$$

predpostavimo $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$$\begin{aligned} ax &= c - b \\ a^{-1}ax &= a^{-1}(c - b) \\ x &= a^{-1}(c - b) \end{aligned}$$

Ker komutativnost ni obvezna, moramo biti pozorni iz katere smeri pomnožimo enačbo z a^{-1} .

DEFINICIJA: Naj bosta K_1 in K_2 kolobarja. Preslikava $f : K_1 \rightarrow K_2$ je homomorfizem kolobarjev, kadar za vse $a, b \in K_1$ velja:

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + f(b) \\ f(ab) &= f(a)f(b) \end{aligned}$$

Če je $f : K_1 \rightarrow K_2$ bijektiven homomorfizem kolobarjev, je $f^{-1} : K_2 \rightarrow K_1$ homomorfizem kolobarjev. V tem primeru je f izomorfizem med kolobarjema K_1 in K_2 .

4 Vektorski prostori

DEFINICIJA: *Vektorski prostor* na obsegu \mathcal{O} je Abelova grupa $(V, +)$ skupaj z *zunanjo operacijo*

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

ki ustreza naslednjim pogojem:

1. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}, \forall v \in V$
2. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ $\forall \alpha \in \mathcal{O}, \forall u, v \in V$
3. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}, \forall v \in V$
4. $1v = v$ $\forall v \in V$

Elemente iz \mathcal{O} imenujemo *skalarji*, elemente iz V imenujemo *vektorji*, zunanjo operacijo pa imenujemo *množenje z skalarji*.

PRIMER:

- (1) $V = \mathbb{R}^3, \mathcal{O} = \mathbb{R}$ običajen trirazsežen vektorski prostor
- (2) $V = \mathcal{O}^n, \mathcal{O}$ - obseg

Naj bosta x in y naslednja vektorja:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}^n (x_i \in \mathcal{O} \forall i) \\ y &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{O}^n (y_i \in \mathcal{O} \forall i) \end{aligned}$$

Operaciji definiramo sledeče:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathcal{O}^n \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in \mathcal{O}^n \end{aligned}$$

Za ti dve operaciji je \mathcal{O}^n vektorski prostor na obsegom \mathcal{O} . Ničelni element je

$$0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathcal{O}^n$$

Nasprotni element je:

$$-(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathcal{O}^n$$

- (3) $M \neq \emptyset \quad \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^M = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}\}$

Operaciji definiramo po točkah:

$$\begin{aligned} (\alpha f)(t) &= \alpha f(t) & \forall t \in M (\alpha \in \mathbb{R}) \\ (f + g)(t) &= f(t) + g(t) & \forall t \in M \end{aligned}$$

$$V = \mathbb{R}^M, \mathcal{O} = \mathbb{R}$$

V je vektorski prostor nad \mathbb{R} .

4.1 Nekaj osnovnih lastnosti vektorskih prostorov

Naj bo V vektorski prostor nad \mathcal{O} . Velja:

$$(1) \quad 0v = 0 \qquad \qquad \qquad \forall v \in V$$

$$(2) \quad \alpha 0 = 0 \qquad \qquad \qquad \forall \alpha \in \mathcal{O}$$

$$(3) \quad \alpha v = 0 \Rightarrow (\alpha = 0 \vee v = 0)$$

$$(4) \quad (-1)v = -v \qquad \qquad \qquad \forall v \in V$$

DOKAZ:

(1)

$$\begin{aligned} 0v = x \in V &\Rightarrow \\ x + x &= 0v + 0v = (0 + 0)v = 0v = x \\ &\Rightarrow x + x = x \Rightarrow x = 0 \\ &\Rightarrow 0v = 0 \end{aligned}$$

(2) Podoben dokaz kot za (1).

(3) $\alpha v = 0$. Če $\alpha = 0$ optem velja (2). Drugače:

$$\begin{aligned} \alpha \neq 0 &\Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in \mathcal{O} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}0 = 0 \\ &\quad \underbrace{(\alpha^{-1}\alpha)}_1 v = 1v = v \\ &\Rightarrow v = 0 \end{aligned}$$

(4)

$$(-1)v + v = (-1)v + 1v = (-1 + 1)v = 0v = 0$$

4.2 Vektorski podprostor

DEFINICIJA: Naj bo V vektorski prostor nad \mathcal{O} in $U \subseteq V, U \neq \emptyset$. U je vektorski poprostor vektorskega prostora V , kadar velja:

$$(1) \ x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$$

$$(2) \ x \in U \Rightarrow \alpha x \in U \qquad \forall \alpha \in \mathcal{O}$$

Obe zahtevi lahko združimo v eno:

$$(1) \wedge (2) \iff (x, y \in U \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in U : \alpha x + \beta y \in U)$$

$(U, +)$ je podgrupa grupe $(V, +)$.

PRIMERI:

$$(1) \ V = \mathbb{R}^3, \ U \text{ je ravnina skozi } 0 \text{ v } \mathbb{R}^3$$

$$(2)$$

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^3 \\ U &= \mathbb{R}[x] \end{aligned}$$

$$(3)$$

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}[x] \\ U &= \mathbb{R}_m[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{stp}(x) \leq m\} \end{aligned}$$

Če je V vektorski prostor nad \mathcal{O} in $U \subseteq V$ podprostor, uporabljamo oznako:

$$U \leq V$$

Vsak podprostor vsebuje ničlo:

$$x \in U \Rightarrow 0x = 0 \in U$$

Nasprotni element je element podprostora:

$$x, y \in U \Rightarrow x - y = x + (-1) \in U$$

Ker velja $\alpha x \in U$ in $\beta y \in U$, lahko zapišemo:

$$\alpha x + \beta y \in U$$

Zapišemo lahko:

$$x_1, x_2, \dots, x_k \in U \Rightarrow \underbrace{\alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_k}_{\text{linearna kombinacija vektorjev } x_1, \dots, x_k} \in U$$

4.3 Linearna ogrinjača

DEFINICIJA: Naj bo $M \in V, M \neq \emptyset$. *Linearno ogrinjača množice* M je

$$\text{Lin}M = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k : x_1, \dots, x_k \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathcal{O}, k \in \mathbb{N}\}$$

Velja:

$$M \subseteq U \leq V \Rightarrow \text{Lin}M \subseteq U$$

LinM je vektorski podprostor vektorskega prostora V ($\text{Lin}M \leq V$)

- Zaprtost za seštevanje:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \in \text{Lin}M$$

$$\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n y_n \in \text{Lin}M$$

Opazimo, da so po definiciji $\text{Lin}M$ posamečni členi $\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_k x_k \in \text{Lin}M$ in $\beta_1 y_1, \dots, \beta_n y_n \in \text{Lin}M$, torej je tudi vsota vseh členov $\in \text{Lin}M$.

- Zaprtost za množenje s skalarjem:

$$\begin{aligned} \beta(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) &= (\beta \alpha_1) x_1 + \dots + (\beta \alpha_k) x_k \in \text{Lin}M \\ x_1, \dots, x_k &\in M \end{aligned}$$

□

Iz tega sledi, da je $\text{Lin}M$ najmanjši vektorski podprostor, ki vsebuje M . Simbolno za malo naprednejše:

$$M \subseteq U \leq V \Rightarrow \text{Lin}M \subseteq U$$

Za prazno množico velja:

$$\text{Lin}\emptyset = \{0\}$$

Poglejmo si, kako je s preseki in unijami. Za preseke velja:

$$V_i \leq V \forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} V_i \leq V$$

To je očitno. Zaprtost za seštevanje velja, ker če sta neka dva vektorja x, y v $\bigcap_{i \in I} V_i$, potem se nahajata v vseh V_i . Ker so V_i vektorski podprostori, v njih tudi velja zaprtost za seštevanje. Zato je vsota $x + y$ tudi v vseh V_i ,

torej je tudi v $\bigcap_{i \in I} V_i$. Podobno lahko naredimo za zaprtost za množenje s skalarjem.

Malo več je za videti pri uniji. $V_1, V_2 \leq V \Rightarrow \text{Lin}(V_1 \cup V_2)$ je najmanjši vektorski podprostor, ki vsebuje V_1 in V_2 . Primer na katerem se lahko predstavljamo, sta dve premici. Unija dveh premic, ki se sekata ni vektorski podprostor, zato okoli naredimo linearno ogrinjačo. Poglejmo si eno zanimivost:

$$x \in \text{Lin}(V_1 \cup V_2)$$

$$x = \underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k}_{\in V_1} + \underbrace{\beta_1 y_1 + \dots + \beta_n y_n}_{\in V_2} = u + v$$

Torej velja:

$$x \in \text{Lin}(V_1 \cup V_2) \iff x = u + v, u \in V_1, v \in V_2$$

Zapišemo:

$$V_1 + V_2 = \{u + v : u \in V_1, v \in V_2\}$$

Torej velja:

$$\text{Lin}(V_1 \cup V_2) = V_1 + V_2$$

Analogno naredimo za več sumandov:

$$\text{Lin}(V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k) = V_1 + V_2 + \dots + V_k$$

$$V_i \leq V \forall i$$

$$V_1 + \dots + V_k = \{x_1 + \dots + x_k : x_i \in V_i \forall i\}$$

DEFINICIJA: $V_1 + \dots + V_k$ je *prema* ali *direktna*, kadar za vsak $x \in V_1 + \dots + V_k$ obstajajo in so z x enolično določeni taki vektorji $x_i \in V_i (i = 1, \dots, k)$, da je $x = x_1 + \dots + x_k$. Ozaničimo:

$$V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

TRDITEV: Vsota $V_1 + V_2$ vektorskih podprostorov V_1 in V_2 je direktna natanko takrat, kadar je $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

DOKAZ:

(\Rightarrow) Naj bo vsota $V_1 + V_2$ direktna ($V_1 \oplus V_2$). Vzemimo $x \in V_1 \cup V_2$.

$$x = \underbrace{x}_{\in V_1} + \underbrace{0}_{\in V_2} = \underbrace{0}_{\in V_1} + \underbrace{x}_{\in V_2} \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow V_1 \cup V_2 = \{0\}$$

(\Leftarrow) Naj bo $V_1 \cup V_2 = \{0\}$.

$$\begin{aligned}
 x &\in V_1 + V_2 \\
 x &= x_1 + x_2, x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \\
 x &= x'_1 + x'_2, x'_1 \in V_1, x'_2 \in V_2 \\
 x_1 + x_2 &= x'_1 + x'_2 \\
 \underbrace{x_1 - x'_1}_{\in V_1} &= \underbrace{x_2 - x'_2}_{\in V_2} = z
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$$

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'_1 = x_1 \wedge x'_2 = x_2$$

$$V_1 \oplus V_2$$

□

4.4 Kvocientni vektorski prostor

Naj bo U vektorski prostor nad \mathcal{O} , $U \leq V$. Definiramo:

$$v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in U$$

kjer je \sim ekvivalenčna relacija. U je Abelova podgrupa Abelove grupe V . V/U je torej Abelova grupa in velja:

$$\begin{aligned}
 [x] + [y] &= [x + y] \forall x, y \in V \\
 [z] &= z + U \forall z \in V
 \end{aligned}$$

V V/U uvedemo množenje s skalarji:

$$\alpha[x] := [\alpha x], \alpha \in \mathcal{O}, x \in V$$

Definicija je dobra če velja:

$$\begin{aligned}
 y \sim x &\Rightarrow \alpha x \sim \alpha y \\
 y - x \in U &\Rightarrow \underbrace{\alpha y - \alpha x}_{\alpha(y-x)=z} \in U
 \end{aligned}$$

Ker je U podprostor zaprt za množenje s skalarjem, vemo:

$$z \in U \Rightarrow \alpha z \in U \forall \alpha \in \mathcal{O}$$

□

Sledi, da je V/U vektorski prostor nad \mathcal{O} . Elementi so $x + U, x \in V$.

PRIMER: U premica skozi 0 v $V = \mathbb{R}^3$. Elementi $V/U : x + U, x \in \mathbb{R}^3$ so premice vzporedne premici U .

4.5 Linearne preslikave

So neke vrste homomorfizmi vektorskih prostorov.

DEFINICIJA: Naj bosta V in U vektorska prostora nad istim \mathcal{O} . Preslikava $\mathcal{A} : V \rightarrow U$ je *linearne* (= homomorfizem vektorskih prostorov), kadar velja:

$$(1) \quad \mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y \quad \forall x, y \in V$$

$$(2) \quad \mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}, \forall x \in V$$

Pogoju (1) pravimo, da je \mathcal{A} *aditivna*, pogoju (2) pa pravimo, da je \mathcal{A} *homogena*.

Nekaj lastnosti:

- $\mathcal{A}0 = 0$ (pride iz Abelove grupe)

- $\mathcal{A}(-x) = -\mathcal{A}x$ (pride iz Abelove grupe) $\forall x \in V$

- $\mathcal{A}(x - y) = \mathcal{A}x - \mathcal{A}y$ $\forall x, y \in V$

$$(3) \quad \mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \mathcal{A}(\alpha x) + \mathcal{A}(\beta y) = \alpha \mathcal{A}x + \beta \mathcal{A}y \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}$$

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}x + \beta \mathcal{A}y$$

Ta lastnost sledi iz pogojev (1) in (2). Iz te lastnosti lahko dobimo nazaj pogoj (1) in (2).

$$((1) \wedge (2)) \iff (3)$$

SPLOŠNO:

$$\mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \alpha_2 \mathcal{A}x_2 + \cdots + \alpha_n \mathcal{A}x_n$$

DEFINICIJA: $\mathcal{A}V \rightarrow U$ je *izomorfizem* vektorskega prostora, kadar je \mathcal{A} bijektivna in sta \mathcal{A} in \mathcal{A}^{-1} linearni preslikavi. **Velja:** bijektivna linearna preslikava je izomorfizem vektorskega prostora.

Naj bo $\mathcal{A} : V \rightarrow U$ linearna bijekcija. $\mathcal{A}^{-1} : U \rightarrow V$ je linearna

Aditivnost sledi iz dejstva, da je \mathcal{A} izomorfizem Abelovih grup $(V, +)$, $(U, +)$.

$$\mathcal{A}^{-1}(\alpha u) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha \mathcal{A}v) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(\alpha v)) = \alpha v = \alpha \mathcal{A}^{-1}u$$

kjer upoštevamo, da $\exists v \in V : u = \mathcal{A}v$ ($v = \mathcal{A}^{-1}u$)

$\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ je homogena

□

PRIMERI:

(1) $V = U = \mathbb{R}^3$

- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija na ravnino skozi 0.
- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zasuk za določen kot okrog dane osi skozi 0.

(2) $\mathcal{A} : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, \mathcal{A} odvajanje.

(3) $\mathcal{A} : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{A} je določeno integriranje.

4.5.1 Slika in jedro linearnih preslikav

DEFINICIJA: Naj bo $\mathcal{A} : V \rightarrow U$ linearna preslikava. Definiramo:

- $\text{im}\mathcal{A} = \{\mathcal{A}x : x \in V\}$ slika preslikave \mathcal{A}
- $\text{ker}\mathcal{A} = \{x \in V : \mathcal{A}x = 0\}$ jedro preslikave \mathcal{A}

VELJA: $\text{im}\mathcal{A} \leq U$ in $\text{ker}\mathcal{A} \leq V$

DOKAZ: za $\text{im}\mathcal{A}$: $u_1, u_2 \in \text{im}\mathcal{A} \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in \text{im}\mathcal{A}$

$$\exists x_1, x_2 \in V : u_1 = \mathcal{A}x_1, u_2 = \mathcal{A}x_2$$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \alpha_2 \mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in \text{im}\mathcal{A}$$

DEFINICIJA: Naj bo $\mathcal{A} : V \rightarrow U$. Velja:

(1) \mathcal{A} je surjektivna $\iff \text{im}\mathcal{A} = U$

(2) \mathcal{A} je injektivna $\iff \ker \mathcal{A} = \{0\}$

DOKAZ za (2):

(\Rightarrow) \mathcal{A} je injektivna. Vemo $\mathcal{A}0 = 0$. Zanima nas, za katere x velja $\mathcal{A}x = 0$.

Ker je injektivna je $x = 0 \Rightarrow \ker \mathcal{A} = \{0\}$.

(\Leftarrow) $\ker \mathcal{A} = \{0\}$ Naj bosta $\mathcal{A}x = \mathcal{A}y$, $x, y \in V$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \underbrace{\mathcal{A}x - \mathcal{A}y}_{\mathcal{A}(x-y)=0} = 0 \\ &\Rightarrow x - y \in \ker \mathcal{A} = \{0\} \\ &\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

□

IZREK: Naj bo $\mathcal{A} : V \rightarrow U$ linearna preslikava. Potem obstaja izomorfizem med vektorskima prostoroma $V/\ker \mathcal{A}$ in $\text{im}\mathcal{A}$. Izomorfizem deluje s predpisom:

$$\hat{\mathcal{A}} : [x] \mapsto \mathcal{A}x$$

DOKAZ:

- Predpis je dober t.j.: $[x] = [y] \Rightarrow \mathcal{A}x = \mathcal{A}y$.

$$x \sim y \Rightarrow x - y \in \ker \mathcal{A} \Rightarrow \underbrace{\mathcal{A}(x - y)}_{\mathcal{A}x - \mathcal{A}y = 0} = 0 \Rightarrow \mathcal{A}x = \mathcal{A}y$$

- $\hat{\mathcal{A}}$ je linearna

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}(\underbrace{\alpha[x]}_{[\alpha x]} + \underbrace{\beta[y]}_{[\beta y]}) &= \\ &= \hat{\mathcal{A}}(\alpha x + \beta y) = \mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}x + \beta \mathcal{A}y = \\ &= \alpha \hat{\mathcal{A}}([x]) + \beta \hat{\mathcal{A}}([y]) \end{aligned}$$

- $\hat{\mathcal{A}}$ je surjektivna – sledi neposredno iz definicije $\hat{\mathcal{A}}$

- $\hat{\mathcal{A}}$ je injektivna

$$\begin{aligned}\underbrace{\hat{\mathcal{A}}([x])}_{\mathcal{A}x} &= \underbrace{\hat{\mathcal{A}}([y])}_{\mathcal{A}y} \\ \Rightarrow \mathcal{A}(x - y) &= \mathcal{A}x - \mathcal{A}y = 0 \\ \Rightarrow x - y &\in \ker \mathcal{A} \Rightarrow \\ \Rightarrow x \sim y &\Rightarrow [x] = [y]\end{aligned}$$

$\Rightarrow \hat{\mathcal{A}}$ je linearne in bijektivna $\Rightarrow \hat{\mathcal{A}} : V/\ker \mathcal{A} \rightarrow \text{im} \mathcal{A}$ je izomorfizem vektorskih prostorov. \square

POSLEDICI: Naj bo $\mathcal{A} : V \rightarrow U$ linearne preslikava

- (1) Če je \mathcal{A} surjektivna, je vektorski prostor $V/\ker \mathcal{A}$ izomorfen U .
- (2) Če je \mathcal{A} injektivna, je vektorski prostor V izomorfen vektorskemu prostoru $\text{im} \mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \text{ injektivna} \Rightarrow \ker \mathcal{A} = \{0\} \Rightarrow V/\{0\} = V$$

4.6 Vektorski prostor linearnih preslikav

V, U naj bosta vektorska prostora nad komutativnim obsegom \mathcal{O} .

$$\mathcal{L}(V, U) = \{\mathcal{A} : V \rightarrow U; \mathcal{A} \text{ je linearne}\}$$

Ničelna preslikava 0 je element te množice $0 \in \mathcal{L}(V, U)$.

V $\mathcal{L}(V, U)$ uvedemo operacijo $+$ (seštevanje) po točkah:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}, \mathcal{B} &\in \mathcal{L}(V, U) \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) &= \mathcal{A}x + \mathcal{B}x, \forall x \in V\end{aligned}$$

Velja $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, U)$. Preverimo homogenost (aditivnost za DN):

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x + \alpha \mathcal{B}x = \alpha(\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) = \alpha((\mathcal{A} + \mathcal{B})x)$$

VELJA:

- $(\mathcal{L}(V, U), +)$ je Abelova grupa

- 0 (ničelna preslikava) je ničelni element
- $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U); -\mathcal{A} = -\mathcal{A}x \forall x \in V$

$$\begin{aligned} (-\mathcal{A})x &= -\mathcal{A}x, \forall x \in V \\ (\mathcal{A} + (-\mathcal{A}))x &= \mathcal{A}x + (-\mathcal{A})x = \mathcal{A}x + (-\mathcal{A})x = 0(\in U), \forall x \in V \\ &\Rightarrow \mathcal{A} + (-\mathcal{A}) = 0 \end{aligned}$$

Množenje s skalarji definiramo po točkah:

$$\begin{aligned} (\alpha A)x &= \alpha(Ax), \forall x \in V, \alpha \in \mathcal{O} \\ \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U) &\Rightarrow \alpha A \in \mathcal{L}(V, U) \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(V, U)$ postane z obema operacijama vektorski prostor nad \mathcal{O} . **Poseben primer** $U = V$

$\mathcal{L}(V, V) \equiv \mathcal{L}(V)$ – množica vseh endomorfizmov vektorskega prostora V . V množico $\mathcal{L}(V)$ uvedemo že množenje (= komponiranje preslikav).

$$\begin{aligned} \mathcal{A}, \mathcal{B} &\in \mathcal{L}(V) \\ (\mathcal{AB})x &= A(Bx), \forall x \in V \end{aligned}$$

Množenje je operacija na $\mathcal{L}(V) : \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V) \Rightarrow \mathcal{AB} \in \mathcal{L}(V)$.

$(\mathcal{L}(V), \cdot)$ je polgrupa (množenje je asociativno) in velja

- $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$
- $(\mathcal{B} + \mathcal{C})\mathcal{A} = \mathcal{BA} + \mathcal{CA}$

$(\mathcal{L}(V), +, \cdot)$ je kolobar. Velja še:

$$(\alpha\mathcal{A})(\beta\mathcal{B}) = (\alpha\beta)(\mathcal{AB})$$

Pravimo, da je $\mathcal{L}(V)$ *algebra* nad \mathcal{O} .

DEFINICIJA: \mathcal{A} je *algebra* nad komutativnim obsegom \mathcal{O} , kadar je \mathcal{A} vektorski prostor nad \mathcal{O} , v katerem je dano množenje

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad ((a, b) \mapsto ab)$$

ki ustreza pogojem:

- $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ je kolobar
- $(\alpha a)(\beta b) = (\alpha\beta)(ab) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$

PRIMERI:

- (1) $\mathcal{L}(V)$ je algebra
- (2) $(\mathbb{R}^M) \equiv \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ za operacije definirane po točkah je algebra
- (3) $\mathbb{R}[x]$ algebra polinomov z realnimi koeficienti, kjer so operacije definirane po točkah

$id_V \in \mathcal{L}(V)$ je enota algebre $\mathcal{L}(V)$

$$id_V(x) = x \forall x \in V$$

4.7 Končno razsežni vektorski prostori

DEFINICIJA: Naj bo V vektorski prostor nad \mathcal{O} in $M \subseteq V$. M je *ogrodje* vektorskega prostora V , kadar velja $\text{Lin} M = V$

$M \neq \emptyset$ je ogrodje vektorskega prostora V , kadar za vsak $x \in V$ velja

$$\exists v_1, \dots, v_m \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{O} : x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

DEFINICIJA: Vektorski prostor V je *končno razsežen*, kadar ima kakšno končno ogrodje.

$$M = \{v_1, \dots, v_m\} \text{ ogrodje v.p. } V$$

$$x \in V \Rightarrow x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{O}$$

Poglejmo si kako je z enolišnostjo zapisa. Naj bo

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_m$$

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

Če je zapis enoličen, velja sklep

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

Poglejmo si še, kako je v obratno smer. Naj velja prejšnji sklep

$$\begin{aligned}x &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \\x &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m \\ \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_m - \beta_m)v_m &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_m - \beta_m &= 0 \\ \Rightarrow \beta_j = \alpha_j \quad \forall j = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Torej velja enoličnost zapisa.

DEFINICIJA: Vektorji v_1, \dots, v_m so *linearno neodvisni*, kadar velja sklep

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$$

Če je $M = \{v_1, \dots, v_m\}$ ogrodje vektorskega prostora V , potem vsak $x \in V$ lahko zapišemo v obliki $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$, pri čemer so $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ enolično določeni z x natanko takrat, kadar so v_1, \dots, v_m linearno neodvisni.

Če so v_1, \dots, v_m linearno neodvisni, potem so različni ($i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$). Naj bo $v_1 = v_2$. Zapišemo lahko:

$$\underbrace{1}_{\neq 0} v_1 + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_m = 0$$

\Rightarrow vektorji niso neodvisni.

DEFINICIJA: Naj bo $M \subseteq V$. M je linearno neodvisna, kadar je vsaka njena končna podmnožica linearno neodvisna.

DEFINICIJA: Naj bo $M \subseteq V$. M je *baza* vektorskega prostora V , kadar je linearno neodvisna in hkrati ogrodje vektorskega prostora V .

PRIMERI:

1) Baze v \mathbb{R}^3 so oblike $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, kjer so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ linearno neodvisni.

2) $V = \mathcal{O}^n$

$$e_j(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-to mesto}}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{O}^n$$

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ je *standardna baza* \mathcal{O}^n .

$$x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{O}^n \Rightarrow x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

3) $V = \mathbb{R}[x]$

$$p(x) \in \mathbb{R}[x]$$

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

Baza tega prostora je

$$\{p_j(x) = x^j : j = 0, 1, \dots\} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$$

DEFINICIJA: Vektorji v_1, \dots, v_m so *linearno odvisni*, kadar niso linearno neodvisni.

Naj bodo v_1, \dots, v_m linearno odvisni ($m > 1$). Potem obstajajo tudi skalarji $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{O}$, da niso vsi enako 0, vendar pa je

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

Recimo, da $\alpha_1 \neq 0$, Potem je

$$v_1 = \underbrace{(-\alpha_1^{-1}\alpha_2)}_{\beta_2} v_2 + \cdots + \underbrace{(-\alpha_1^{-1}\alpha_m)}_{\beta_m} v_m$$

v_1 je linearna kombinacija elementov v_2, \dots, v_m .

Potem obstaja tak $j \in \{2, \dots, m\}$, da je v_j linearna kombinacija vektorjev

$$v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m$$

Obratno: Če velja prejšnja trditev, potem so v_1, \dots, v_m linearno odvisni

$$v_1 = \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_m v_m$$

$$1v_1 + (-\beta_2)v_2 + \cdots + (-\beta_m)v_m = 0$$

TRDITEV: Naj bodo v_1, \dots, v_m linearno odvisni in $v_1 \neq 0$, $m > 1$. Potem obstaja tak $k > 1$, $k \leq m$, da je v_k linearna kombinacija vektorjev v_1, \dots, v_{k-1} .

DOKAZ: Naj bo $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$, pri čemer niso vsi $\alpha_j = 0$.

$$\exists \alpha_j \neq 0 : j > 1$$

$$k = \max\{j : \alpha_j \neq 0\} \quad (k > 1)$$

$$\Rightarrow v_k = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1}$$

□

TRDITEV: Naj vektorji x_1, \dots, x_m tvorijo ogródje vektorskega prostora V . Če obstaja $j \in \{1, \dots, m\}$, da je x_j linearna kombinacija vektorjev $x_i, i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$, potem vektorji $\{x_i : i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}\}$ sestavljajo ogródje vektorskega prostora V .

DOKAZ: Smemo vzeti $j = 1$, ker lahko spremenimo indekse.

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m \\ v &\in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m = \\ &= \beta_1 (\alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m) + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m = \\ &= (\beta_1 \alpha_2 + \beta_2) x_2 + \dots + (\beta_1 \alpha_m + \beta_m) x_m \end{aligned}$$

Torej x_2, \dots, x_m sestavljajo ogródje vektorskega prostora V .

□

TRDITEV: Iz vsakega končnega ogródja vektorskega prostora $V \neq \{0\}$, lahko izberemo bazo.

DOKAZ: Iz ogródja postopoma odstanjujemo vektorje, ki so linearna kombinacija drugih. Na koncu ostane baza. (Predpostavimo lahko, da so vektorji v ogródju različni).

POSLEDICA: Vsak netrivialen končno razsežen vektorski prostor ima bazo.

TRDITEV: Naj vektorji $x_1 \dots x_m$ sestavljajo ogródje vektorskega prostora V , vektorji y_1, \dots, y_n pa naj bodo linearno neodvisni. Potem je $m \geq n$.

DOKAZ: Predpostavimo, da je $n > m$. Imamo dve vrsti vektorjev:

$$x_1, \dots, x_m \quad y_1, \dots, y_n$$

Premaknemo y_1 v bazo in dobimo

$$y_1, x_1, \dots, x_m$$

To je ogródje, vektorji y_1, x_1, \dots, x_m pa so linearno odvisni. Torej obstaja tak vektor, ki je linearna kombinacija predhodnih. To je eden od vektorjev x_1, \dots, x_m . Tega odstranimo in ostane ogródje

$$y_1, x'_1, \dots, x'_{m-1}$$

Postopem ponovimo še enkrat in dobimo

$$y_2, y_1, x'_1, \dots, x'_{m-1}$$

Ti vektorji sestavljajo ogrodje in so linearno odvisni. Odstranimo vektor, ki je linearna kombinacija predhodnih. To je eden od vektorjev x'_1, \dots, x'_{m-1} , ker so y_i linearno neodvisni. Dobimo ogrodje

$$y_2, y_1, x''_1, \dots, x''_{m-2}$$

Postopoma izpodrinemo vse x -e in dobimo ogrodje y_m, y_{m-1}, \dots, y_1 . Zato je y_{m+1} linearna kombinacija vektorjev y_1, \dots, y_m . $\rightarrow \leftarrow$ (y_1, \dots, y_n so linearno neodvisni).

Sklep: $m \geq n$ □

Posledica: Vse baze netrivialnega končno razsežnega vektorsksega prostora imajo enako elementov.

DEFINICIJA: Število elementov v bazi končno razsežnega vektorskega prostora imenujemo *razsežnost* ali *dimenzija* tega vektorskega prostora. **Oznaka:** $\dim V$

DOKAZ POSLEDICE: $V \neq \{0\}$. Naj bosta

$$\begin{aligned} X &= \{x_1, \dots, x_m\} \\ Y &= \{y_1, \dots, y_n\} \end{aligned}$$

bazi vektorskega prostora V in velja $x_i \neq x_j \forall i \neq j$ in $y_i \neq y_j \forall i \neq j$. Potem velja:

X je ogrodje, Y niz linearno neodvisnih vektorjev $\Rightarrow m \geq n$

Y je ogrodje, X niz linearno neodvisnih vektorjev $\Rightarrow n \geq m$

$\Rightarrow m = n$

IZREK: Naj bo V n -razsežen vektorski prostor nad \mathcal{O} (komutativen), $N \in \mathbb{N}$. Potem je vektorski prostor V izomorfen vektorskemu prostoru \mathcal{O}^n .

DOKAZ: Naj bo $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ baza V (*urejena*, t.j., določen vrstni red).

$$\begin{aligned} x \in V, x &\mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{O}^n \\ x &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \end{aligned}$$

ker je $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza, so $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ enolično določeni. Zapišemo lahko preslikavo

$$\begin{aligned}\Phi_v : V &\rightarrow \mathcal{O}^n \\ \Phi_v(x) &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\end{aligned}$$

Φ_v je odvisen od vrstenga reda baze in je izomorfen . Zapišemo lahko tudi preslikavo

$$\begin{aligned}\Psi_v : \mathcal{O}^n &\rightarrow V \\ \Psi_v(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\end{aligned}$$

Ψ_v je inverz preslikave $\Phi_v \Rightarrow \Psi_v, \Phi_v$ sta bijekciji. Zadoš'ca dokazati, da je Ψ linearna. Torej je potrebno dokazati homogenost in aditivnost. Oboje je očitno, zato nismo napisali dokaza. Lahko ga napišeš za vajo doma (ni težek, saj je očiten).

IZREK: Končno razsežna vektorska prostora nad istim obsegom sta izomorfna natanko takrat, kadar imata enako dimenzijo.

DOKAZ: Smemo privzeti, da sta V, U netrivialna. Kot se je izrazil profesor: „če sta V in U trivialna, je tudi dokaz trivialen.”

(\Leftarrow) $\dim V = \dim U = n \Rightarrow$ obstajata izomorfizma Φ, Ψ :

$$\begin{aligned}\Phi : V &\rightarrow \mathcal{O}^n \\ \Psi : \mathcal{O}^n &\rightarrow U\end{aligned}$$

$\Rightarrow \Psi\Phi : V \rightarrow U$ je izomorfizem

(\Rightarrow) Naj bo $F : V \rightarrow U$ izomorfizem vektorskih prostorov in $\dim V = n, n \in \mathbb{N}$, ter $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza V . Trdimo, da je $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ baza U .

1. linearna neodvisnost

$$\begin{aligned}\alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_n F(v_n) &= 0 \\ F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) &= F(0) \\ \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n &= 0\end{aligned}$$

2. $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ je ogrodje

$$\begin{aligned}u \in U &\Rightarrow \exists v \in V : F(v) = u \\ v &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \Rightarrow \\ \Rightarrow u = f(v) = F(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) &= \\ = \beta_1 F(v_1) + \dots + \beta_n F(v_n)\end{aligned}$$

□

TRDITEV: Naj bo $V \neq \{0\}$ končno razsežen vektorski prostor. Če so $v_1, \dots, v_m \in V$ linearno neodvisni, obstaja baza V , ki vsebuje v_1, \dots, v_m .

DOKAZ: u_1, \dots, u_n naj tvorijo ogrodje V .

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n\}$ je ogrodje V . Postopoma iz tega ogrodja odtranjamo vektorje, ki so linearna kombinacija vektorjev pred njimi. Vsi vektorji v_1, \dots, v_m ostanejo, ker so linearno neodvisni. Ostane nam baza, ki vsebuje $\{v_1, \dots, v_m\}$.

TRDITEV: Naj bo V končno razsežen vektorski prostor in U njegov vektorski podprostor. Potem je $\dim U \leq \dim V$, pri čemer velja enačaj le v primeru $U = V$.

DOKAZ: $V \neq \{0\}, \dim V = n \in \mathbb{N}$.

$U \subseteq V, U \neq \{0\}$

$u_1, \dots, u_m \in U$ linearno neodvisni v U (\Rightarrow v V), zato je $m \leq n$. Naj bo m maksimalen. Trdimo, da je potem $\{u_1, \dots, u_m\}$ baza U . Zadošča dokaz, da je $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_m\}$ ogrodje U .

Če \mathcal{U} ni ogrodje vektorskega prostora U , obstaja tak $u \in U$ da u ni linearna kombinacija vektorjev u_1, \dots, u_m ($u \notin \text{Lin}\mathcal{U}$). Potem so vektorji u_1, \dots, u_m, u linearno neodvisni, to pa je protislovje z maksimalnostjo števila m . Torej je \mathcal{U} ogrodje vektorskega prostora U , zato je baza U in $\dim U = m (\leq n)$. Če je $\dim U = n$, je U baza V , zato $U = V$.

□

TRDITEV: Naj bo V končno razsežen vektorski prostor in U njegov vektorski podprostor. Potem obstaja tak vektorski podprostor $W \subset V$, da velja $V = U \oplus W$.

DOKAZ: $U = \{0\}, W = V$. Bolj zanimivo je, če $U \neq \{0\}, \{u_1, \dots, u_m\}$ baza U . Dopolnimo jo do baze V

$$\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_{m+k}\}$$

Postavimo $W = \text{Lin}\{u_{m+1}, \dots, u_{m+k}\}$. Če dopolnimo tako, da nič ne dopol-

nimo potem:

$$\begin{aligned} W &= \text{Lin}\{\} = \{0\} \\ U &= V \end{aligned}$$

Trdimo, da je $V = U \oplus W$

$$\begin{aligned} v \in V \Rightarrow v &= \underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m}_{x \in U} + \underbrace{\alpha_{m+1} u_{m+1} + \dots + \alpha_{m+k} u_{m+k}}_{y \in W} \\ v &= x + y, x \in U, y \in W \\ \Rightarrow V &= U + W \end{aligned}$$

$$U \cap W = \{0\}$$

$$\begin{aligned} z &\in U \cap W \\ z &= \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = \beta_1 u_{m+1} + \dots + \beta_{m+k} u_{m+k} \\ \beta_1 u_1 + \dots + (-\beta_{m+k}) u_{m+k} &= 0 \\ \Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_{m+k} &= 0 \Rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = U \oplus W$$

□

Tej trditvi pravimo *trditev o eksistenci direktnega komplementa*.

TRDITEV: Naj bo V končno razsežen vektorski prostor in U, W njegova vektorska podprostora. Če je $U \cap W = \{0\}$, potem velja $\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$.

DOKAZ: U, W sta netrivialna, drugače je očitno. Naj bosta

$$\begin{aligned} \{u_1, \dots, u_m\} &\text{ baza } U, \dim U = m \\ \{w_1, \dots, w_n\} &\text{ baza } W, \dim W = n \end{aligned}$$

Trdimo, da je $\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\}$ baza $U \oplus W$.

1. linearna neodvisnost

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n &= 0 \\ z = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m}_{\in U} &= \underbrace{(-\beta_1) w_1 + \dots + (-\beta_n) w_n}_{\in W} \\ z \in U \cap W = \{0\} &\Rightarrow z = 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m &= 0, \\ \beta_1 = \dots = \beta_n &= 0 \end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow u_1 \dots u_m, w_1 \dots w_n$ so različni

$$2. \operatorname{Lin}\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\} = U \oplus W$$

Očitno je, da je $\operatorname{Lin}\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\} \subseteq U \oplus W$. Dokazati je treba še obratno smer (\supseteq).

$$\begin{aligned} x &\in U \oplus W \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= u + w, u \in U, w \in W \\ u &= \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m \\ w &= \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \\ \Rightarrow x &= \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \end{aligned}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \dim U \oplus W = m + n = \dim U + \dim W$$

TRDITEV: Naj bo V končno razsežen vektorski prostor in $U \leq V, W \leq V$. Ptem velja enakost (= *dimeznisjska formula*):

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

OSNOVNA IDEJA DOKAZA: Vzamemo bazo vektorskega prostora $U \cap W$. V W najdemo vektorje s katerimi razširimo $U \cap W$. Linearno ogrinjačo teh vektorjev označimo z Z . Velja $U + W = U \oplus Z$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dim(U + W) &= \dim U + \dim Z \text{ in} \\ W &= (U \cap W) \oplus Z \Rightarrow \dim W = \dim(U \cap W) + \dim Z \end{aligned}$$

Iz tega sledi zgornja formula.

TRDITEV: Naj bo $V = U \oplus W, \dim V < \infty$. Potem je vektorski prostor V/U izomorfen W , vektorski prsotor V/W , pa je izomorfen U .

DOKAZ:

$$\begin{aligned} f &: W \rightarrow V/U \\ f(w) &= [w] = w + U \end{aligned}$$

f je linearna preslikava

$$f(w_1 + w_2) = [w_1 + w_2] = [w_1] + [w_2] = f(w_1) + f(w_2)$$

$\Rightarrow f$ je aditivna. Podobno dokažemo homogenost.

f je injektivna

$$\begin{aligned}
 f(w_1) = f(w_2) &\Rightarrow \\
 \Rightarrow [w_1] = [w_2] &\Rightarrow \\
 \Rightarrow w_1 \sim w_2 &\Rightarrow \\
 \Rightarrow w_1 - w_2 \in U & \\
 w_1 - w_2 \in W & \\
 \Rightarrow w_1 - w_2 \in U \cap W = \{0\} &\Rightarrow w_1 - w_2 = 0 \\
 \Rightarrow w_1 = w_2 &
 \end{aligned}$$

f je surjektivna:

$$\begin{aligned}
 [v] \in V/U, v \in V \\
 v = u + w, u \in U, w \in W
 \end{aligned}$$

$$f(w) = [v]$$

$$\begin{aligned}
 f(w) &= w \\
 v = u + w &\Rightarrow u = v - w \in U \Rightarrow w \sim v
 \end{aligned}$$

□

Naj bo $V = V_1 \oplus V_2 \Rightarrow V/V_1 \cong V_2 \wedge V/V_2 \cong V_1$

TRDITEV: Naj bo V končno razsežen vektorski prostor in U njegov vektorski podprostor. Potem je

$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

DOKAZ: Poiščimo $W \leq V$, da je $V = U \oplus W$. Ker je $V/U \cong W$, velja $\dim V/U = \dim W$. Vemo:

$$\dim V = \dim U + \dim W$$

Zato je

$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

4.8 Linearne preslikave na končno razsežnih V. P.

Naj bosta V, U končno razsežna vektorska prostora nad \mathcal{O} in naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$ linearna.

Naj bo $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ baza V . Če poznamo slike $\mathcal{A}v_1, \dots, \mathcal{A}v_n$, poznamo \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} x \in V, \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{O} : \\ x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \\ \Rightarrow \mathcal{A}x = \mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \mathcal{A}v_1 + \dots + \alpha_n \mathcal{A}v_n \end{aligned}$$

4.8.1 Poseben primer

$$\begin{aligned} V = \mathcal{O}^n, \quad U = \mathcal{O}^m \\ A = \mathcal{L}(\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m) \\ \{e_1, \dots, e_n\} \text{ standardna baza } \mathcal{O}^n \end{aligned}$$

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$x \in \mathcal{O}^n, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Poznamo $Ae_1, \dots, Ae_n \Rightarrow$ poznamo A .

$$\begin{aligned} Ae_j \in \mathcal{O}^m \\ Ae_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^m \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = m \times n \text{ matrika, ki predstavlja linearno preslikavo } A$$

a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) je člen matrike A . a_{ij} leži v i -ti vrstici in j -tem stolpcu.

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = j\text{-ti stolpec matrike}$$

$$A_{(i)} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

$$A = [a_{ij}]$$

$$A : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{O}^m$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^n$$

$$A = [a_{ij}]$$

$$Ax = y$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

y izračunamo kot:

$$\begin{aligned} y = Ax &= A(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = \\ &= x_1Ae_1 + x_2Ae_2 + \cdots + x_nAe_n = \\ &= x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \cdots + x_nA^{(n)} \\ \Rightarrow y_i &= x_1a_{i1} + x_2a_{i2} + \cdots + x_na_{in} = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

PRIMER: $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zasuk za kot φ okrog z -osi. Kaj je matrika A in kam A preslika točko $(1, 2, 3)$?

$$Ae_1 = A\vec{i} = A^{(1)}$$

$$Ae_2 = A\vec{j} = A^{(2)}$$

$$Ae_3 = A\vec{k} = A^{(3)}$$

$$\begin{aligned}
A^{(3)} &= A\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
A^{(1)} &= A\vec{i} = \begin{bmatrix} \cos \varphi'' \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\
A^{(2)} &= A\vec{j} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\
A &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Izračunajmo sliko točke $(1, 2, 3)$:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 2 \sin \varphi \\ \sin \varphi + 2 \cos \varphi \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m) \equiv \mathcal{O}^{m \times n}$ je množica vseh $m \times n$ matrik s členi \mathcal{O} . Preslikave smo *identificirali* (poistovetili) z matrikami.

$\mathcal{L}(\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m)$ je vektorski prostor nad \mathcal{O} . $\mathcal{O}^{m \times n}$ postane vektorski prostor nad \mathcal{O} .

Naj bosta $A, B \in \mathcal{O}^{m \times n}$.

$$\begin{aligned}
(A + B)x &= Ax + Bx \quad \forall x \in \mathcal{O}^n \\
(\underbrace{A + B}_{C \in \mathcal{O}^{m \times n}})e_j &= Ae_j + Be_j = A^{(j)} + B^{(j)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow C^{(j)} &= Ce_j = A^{(j)} + B^{(j)} \\
\Rightarrow c_{ij} &= a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j
\end{aligned}$$

\Rightarrow v $\mathcal{O}^{m \times n}$ seštevamo po členih. Podobno je z množenjem s skalarji.

4.8.2 Splošna situacija

Naj bosta V, U vektorska prostora nad \mathcal{O} .

$$\dim V = n$$

$$\dim U = m$$

$$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ urejena baza } V$$

$$\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_m\} \text{ urejena baza } U$$

$\mathcal{A} = \mathcal{L}(V, U)$, \mathcal{A} poznamo, če poznamo slike $\mathcal{A}v_j$, $j = 1, \dots, n$.

$$\Phi_{\mathcal{V}} : V \rightarrow \mathcal{O}^n \text{ izomorfizem}$$

$$v \in V$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$v \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Phi_{\mathcal{V}}(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{\mathcal{V}}(v_j) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_j$$

Podobno velja za izomorfizem $\Phi_{\mathcal{U}} : U \rightarrow \mathcal{O}^m$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{A}} & U \\ \Phi_{\mathcal{V}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{U}} \\ \mathcal{O}^n & \xrightarrow{A} & \mathcal{O}^m \end{array}$$

Slika 1: Diagram preslikave

Diagram *komutira* $\Phi_{\mathcal{U}}\mathcal{A} = A\Phi_{\mathcal{V}}$

$$(\Phi_{\mathcal{U}}\mathcal{A})v_j = (A\Phi_{\mathcal{V}})v_j = Ae_j = A^{(j)}$$

$$(\Phi_{\mathcal{U}}\mathcal{A})v_j = \Phi_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}v_j) = \Phi_{\mathcal{U}}(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}v_j = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m$$

$$\Rightarrow A^{(j)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_i = a_{ij} \quad \forall i, j$$

$$\mathcal{A}v_j = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{mj}u_m$$

Linearni preslikavi $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$ priredimo (glede na bazi \mathcal{U}, \mathcal{V}) matriko $A \in \mathcal{O}^{m \times n}$.

$$F : \mathcal{L}(V, U) \rightarrow \mathcal{O}^{m \times n}$$

$$\mathcal{A} \mapsto A = F(\mathcal{A})$$

$$F(\mathcal{A}) = \Phi_{\mathcal{U}}\mathcal{A}(\Phi_{\mathcal{V}})^{-1}$$

F je izomorfizem med $\mathcal{L}(V, U)$ in $\mathcal{O}^{m \times n}$

- aditivnost in homogenost sta očitni
- iz diagrama hitro dobimo inverz $F^{-1} = (\Phi_{\mathcal{U}})^{-1} A \Phi_{\mathcal{V}}$

$$\dim \mathcal{L}(V, U) = \dim \mathcal{O}^{m \times n} = ?$$

Standardna baza $\mathcal{O}^{m \times n}$ je sestavljena iz *elementarnih matrik*. V elementarni matriki se nahaja ena 1, ostali členi so 0.

$$E_{pq} = [e_{ij}] \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & i = p \wedge j = q \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

4.8.3 Množenje matrik

Naj bodo U, V in W vektorski prostori, linearna preslikava $\mathcal{B} : W \rightarrow V$, $\mathcal{A} : V \rightarrow U$ in $\mathcal{C} : W \rightarrow U$, t.j.: $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$.

\mathcal{U} je urejena baza v.p. U , \mathcal{V} urejena baza V , \mathcal{W} , pa urejena baza W .

Poznamo $\Phi_{\mathcal{V}} : V \rightarrow \mathcal{O}^n$, $\Phi_{\mathcal{U}} : U \rightarrow \mathcal{O}^m$ in $\Phi_{\mathcal{W}} : W \rightarrow \mathcal{O}^p$. in poznamo preslikavi $A : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{O}^m$, ter $B : \mathcal{O}^p \rightarrow \mathcal{O}^n$. Zanima nas $C = AB$.

$$\begin{aligned} A &= [a_{ij}] \in \mathcal{O}^{m \times n} \\ B &= [b_{ij}] \in \mathcal{O}^{n \times p} \\ C &= [c_{ij}] \in \mathcal{O}^{m \times p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= AB \\ C^{(j)} &= Ce_j = (AB)e_j = A(Be_j) = AB^{(j)} \Rightarrow \\ C^{(j)} &= AB^{(j)} \quad \forall j \\ \Rightarrow C_{ij} &= A_{(i)}B^{(j)} \\ C_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

4.8.4 Poseben primer

Naj bo $U = V = W$, in $m = n = p$.

$$A, B \in \mathcal{O}^{n \times n} \Rightarrow C = AB \in \mathcal{O}^{n \times n}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{O}^n) \equiv \mathcal{O}^{n \times n}$ je *algebra kvadratnih matrik*. Naj bodo baze U, V, W enake, to je $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{W}$. Skonstruiramo preslikavo

$$\begin{aligned} F : \mathcal{L}(V) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{O}^n) \equiv \mathcal{O}^{n \times n} \\ \mathcal{A} &\mapsto A \\ F(\mathcal{A}) &= \Phi_{\mathcal{V}} \mathcal{A} \Phi_{\mathcal{V}}^{-1} \end{aligned}$$

Vemo: F je izomorfizem vektorskih prostorov $\mathcal{L}(V)$ in $\mathcal{O}^{n \times n}$.

TRDITEV: F je izomorfizem med algebrama $\mathcal{L}(V)$ in $\mathcal{O}^{n \times n}$.

DOKAZ: Zadošča ugotoviti, da F ohranja množenje $F(\mathcal{A}\mathcal{B}) = F(\mathcal{A})F(\mathcal{B})$

$$F(\mathcal{AB}) = \Phi_V(\mathcal{AB})\Phi_V^{-1}$$

$$F(\mathcal{A})F(\mathcal{B}) = \Phi_V\mathcal{A}\Phi_V^{-1}\Phi_V\mathcal{B}\Phi_V^{-1} = \Phi_V\mathcal{AB}\Phi_V^{-1}$$

□

id_V je enota algebre $\mathcal{L}(V)$. $F(id_V)$ je enota algebre $\mathcal{O}^{n \times n}$

$$F(id_V) = id_{\mathcal{O}^{n \times n}} = I$$

I je *enotska* (ali identična) matrika. Velja:

$$I^{(j)} = Ie_j = e_j$$

torej

$$I = [e_1, e_1, \dots, e_n]$$

Zapišemo lahko tudi kot

$$I = [\delta_{ij}] \quad i, j = 1, \dots, n$$

kjer je δ_{ij} *Kroneckerjeva delta*, za katero velja predpis

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

DEFINICIJA: Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ bijekcija ($\exists \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V) : \mathcal{AB} = \mathcal{BA} = id_V$). Pravimo, da je $F(\mathcal{A}) = A$ *obrnljiva*:

$$\exists B \in \mathcal{O}^{n \times n} : AB = BA = I$$

A obrnljiva $\Rightarrow B$ je enolično določena. Označimo:

$$B = A^{-1}$$

4.8.5 Rang linearne preslikave in matrike

Naj bosta V, U končno razsežna vektorska prostora nad \mathcal{O} in $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$.

IZREK: Za \mathcal{A} velja formula

$$\dim(\text{im } \mathcal{A}) + \dim(\ker \mathcal{A}) = \dim V \quad (2)$$

DOKAZ: Vemo, da sta vektorska prostora $V_{\ker \mathcal{A}}$ in $\text{im} \mathcal{A}$ izomorfna. Zato je $\dim V / \ker \mathcal{A} = \dim(\text{im} \mathcal{A})$. Vemo $\dim V / \ker \mathcal{A} = \dim V - \dim(\ker \mathcal{A})$. $\Rightarrow 2$.

□

DEFINICIJA: Rang preslikave \mathcal{A} je $\dim(\text{im} \mathcal{A})$. Oznaka $\text{rang } \mathcal{A} = \dim(\text{im} \mathcal{A})$.

TRDITEV: $\mathcal{A} = \mathcal{L}(V, U)$

1. \mathcal{A} je injektivna $\iff \text{rang } \mathcal{A} = \dim V$
2. \mathcal{A} je surjektivna $\iff \text{rang } \mathcal{A} = \dim U$
3. \mathcal{A} je bijektivna $\iff \dim V = \dim U = \text{rang } \mathcal{A}$

DOKAZ:

1. vemo: \mathcal{A} injektivna $\iff \ker \mathcal{A} = \{0\}$

$$\ker \mathcal{A} = \{0\} \iff \dim(\ker \mathcal{A}) = 0$$

2. vemo: \mathcal{A} surjektivna $\iff \text{im} \mathcal{A} = U$

$$\text{im} \mathcal{A} = U \iff \underbrace{\dim(\text{im} \mathcal{A})}_{\text{rang } \mathcal{A}} = \dim U$$

3. kombiniramo 1 in 2.

TRDITEV: Za $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ so ekvivalentne naslednje izjave:

1. \mathcal{A} je bijekcija
2. \mathcal{A} je surjekcija
3. \mathcal{A} je injekcija
4. $\text{rang } \mathcal{A} = \dim V$

DOKAZ: $U = V$ v prejšnji trditvi \Rightarrow

$$\Rightarrow [(1) \iff (4), (2) \iff (4), (3) \iff (4)]$$

POSLEDICA: Matrika $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$ je obrnljiva natanko takrat, kadar je $\text{rang } A = n$.

DOKAZ: V prejšnji trditvi vzamemo $V = \mathcal{O}^n$ in A razumemo kot endomorfizem vektorskih prostorov \mathcal{O}^n .

A obrnljiva $\iff A$ bijekcija, t.j.: (1) \iff (4) po prejšnji trditvi.

TRDITEV: Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$ in A matrika, ki pripada \mathcal{A} glede na dai baz $\mathcal{V} \in V, \mathcal{U} \in U$. Potem velja:

$$\text{rang } \mathcal{A} = \text{rang } A$$

DOKAZ: Narišemo si diagram in opazimo, da komutira.

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{U}} \mathcal{A} &= A \Phi_{\mathcal{V}} \\ (\underbrace{\Phi_{\mathcal{U}} \mathcal{A}}_{\text{im } \mathcal{A}}) V &= (A \underbrace{\Phi_{\mathcal{V}}}_{\mathcal{O}^n}) V \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Phi_{\mathcal{U}}(\text{im } \mathcal{A}) = \text{im } A \end{aligned}$$

$\Phi_{\mathcal{U}}$ je izomorfizem, zato je

$$\begin{aligned} \dim(\text{im } \mathcal{A}) &= \dim(\text{im } A) \\ \text{rang } \mathcal{A} &= \text{rang } A \end{aligned}$$

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{m \times n} \equiv \mathcal{L}(\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m)$. Velja

$$\begin{aligned} \text{im } A &= \{Ax : x \in \mathcal{O}^n\} = \\ &= \{A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) : x \in \mathcal{O}^n\} = \\ &= \{x_1 A e_1 + \dots + x_n A e_n\} = \\ &= \{x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)} : x_j \in \mathcal{O}^{\forall j}\} = \\ &= \text{Lin}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} \end{aligned}$$

TRDITEV: Stolpci matrike A tvorijo ogrodje vektorskega prostora $\text{im } A$.

POSLEDICA: Rang matrike A je največje število linearno neodvisnih stolpcev te matrike.

Operacije na matrkah, ki ohranjujejo rang:

S1) med sabo zamenjamo dva stolpca

S2) stolpec pomnožimo z neničelnim skalarjem

S3) Stolpci prištejemo večkratnik kakšnega drugega stolpca

V1, V2, V3 so analogne operacije na vrsticah.

TRDITEV: S1, S2, S3 in V1, V2, V3 ohranjajo rang.

DOKAZ:

S1) očitno

S2) Dokazati moramo, da velja

$$L1 = \text{Lin}\{\alpha A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\} = \text{Lin}\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\} = L2$$

Torej morajo biti vsi vektorji, ki so linearne kombinacije vektorjev L1 tudi linearne kombinacije vektorjev L2 in obratno. Zadošča

$$A^{(1)} = \alpha^{-1}(\alpha A^{(1)})$$

To velja, ker $\alpha \neq 0$. Torej lahko vsak vektor, ki je zapisan z linearno kombinacijo L1 pretvorimo v linearno kombinacijo vektorjev L2 in obratno, zato se ohranja slika preslikave A in posledično tudi rang.

S3) Dokazati moramo

$$\text{Lin}\{A^{(1)} + \alpha A^{(2)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\} = \text{Lin}\{A^{(2)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\}$$

Velja podoben razmislek kot pri S2, zato zadošča

$$A^{(1)} = (A^{(1)} + \alpha A^{(2)}) + (-\alpha)A^{(2)}$$

V1, V2, V3 ohranjajo ker A

$$x \in \ker A \iff Ax = 0 \iff A_i x = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

V1) očitno iz zgornje enakosti

V2)

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{bmatrix}$$

Pokazati moramo, da $\alpha A_{(1)}x = 0 \quad \forall x \in \mathcal{O}^n$. Ker $\alpha \neq 0$, velja

$$\alpha A_{(1)}x = 0 \iff A_{(1)}x = 0$$

Torej operacija ohranja ker A .

V3)

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} A_{(1)} + \alpha A_{(2)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{bmatrix}$$

Pokazati moramo

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_{(1)} + \alpha A_{(2)})x = 0 \\ A_{(2)}x = 0 \\ \dots \\ A_{(n)}x = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} A_{(1)}x = 0 \\ A_{(2)}x = 0 \\ \dots \\ A_{(n)}x = 0 \end{array} \right\}$$

(\Leftarrow) očitno

(\Rightarrow) vemo $(A_{(1)} + \alpha A_{(2)})x = 0$. Dokazati moramo, da je $A_{(1)}x = 0$.

$$\begin{aligned} (A_{(1)} + \alpha A_{(2)})x &= 0 \\ A_{(1)}x + \underbrace{\alpha A_{(2)}x}_0 &= 0 \\ \Rightarrow A_{(1)}x &= 0 \end{aligned}$$

Ker se ohranja jedro, se ohranja rang ($= n - \dim(\ker A)$).

TRDITEV: Naj bo $A \in \mathcal{O}^{m \times n}$. Z uporabo operacij S1 - S3, V1 - V3 lahko postopoma pridemo iz matrike A , do matrike A_0 oblike

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^{m \times n}$$

Kjer je rang A število stolpcev z eno enico. Natančna shema postopka je v zvezku.

PRIMER

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_0$$

Torej je rang $A = \text{rang } A_0 = 2$.

POSLEDICA Rang matrike je enak rangu njene *transponirane*.

$$\text{rang } A = \text{rang } A^T$$

Če je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{O}^{m \times n}$, transponiranko $B = A^\top$, t.j.: $B = [b_{ij}] \in \mathcal{O}^{n \times m}$ tvorimo na nasleden način:

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

DOKAZ: Očitno je, da če na matriki A izvedemo operaijo Si , se bo ta pretvorila v Vi na matriki A^\top . Analogno za operacije Vi .

POSLEDICA: Največje število linearno neodvisnih stolpcev matrike je enako največjemu številu njenih linearno neodvisnih vrstic.

4.8.6 Sistemi linearnih enačb

Naj bo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

sistem linearnih enačb. Zapišemo lahko $A \in \mathcal{O}^{m \times n}$, $A = [a_{ij}]$. Za b lahko zapišemo

$$b \in \mathcal{O}^m, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Podobno lahko x zapišemo kot

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^n$$

Iščemo $x \in \mathcal{O}^n$, da bo veljalo

$$Ax = b$$

Če gledamo na A kot na preslikavo, velja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m)$. Naj bo \mathcal{R} množica vseh rešitev sistema $Ax = b$, t.j.:

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathcal{O}^n : Ax = b\}$$

$[A|b] \in \mathcal{O}^{m \times (n+1)}$ je *razširjena matrika* sistema $Ax = b$.

Če je $b = 0$, potem imamo *homogen sistem* $Ax = 0$, potem

$$\mathcal{R} = \ker A$$

Če je $b \neq 0$, imamo *nehomogen sistem* $Ax = b$. Sistem je *protisloven*, kadar je $\mathcal{R} = \emptyset$, sicer pa je *neprotisloven*. Naj bo sistem $Ax = b$ neprotisloven in w ena od rešitev ($w \in \mathcal{R}$). Pravimo, da je w *partikularna rešitev*.

Naj bo

$$\begin{aligned} Aw = b, \quad x \in \mathcal{R} &\Rightarrow Ax = b \\ \Rightarrow A(x - w) &= \underbrace{Ax}_b - \underbrace{Aw}_b = 0 \Rightarrow x - w \in \ker A \\ &\Rightarrow x \in w + \ker A \end{aligned}$$

Torej velja $\mathcal{R} \subseteq w + \ker A$.

Naj bo $x \in w + \ker A$. Potem je $x = w + y, y \in \ker A$.

$$\Rightarrow Ax = A(w + y) = \underbrace{Aw}_b + \underbrace{Ay}_0 = b \Rightarrow x \in \mathcal{R}$$

Torej velja $w + \ker A \subset \mathcal{R}$

Iz (1)&(2) sledi

$$\mathcal{R} = w + \ker A$$

TRDITEV: Če je w partikularna rešitev sistema $Ax = b$, je

$$\mathcal{R} = w + \ker A$$

IZREK (Kronecker, Capelli): $\mathcal{R} \neq \emptyset$ natanko takrat, kadar je

$$\text{rang}[A|b] = \text{rang}[A]$$

DOKAZ: $\mathcal{R} \neq \emptyset \iff b \in \text{im} A$ ($\ker Ax = b$ pomeni, da je $b \in \text{im} A$)

$$\text{im}[A|b] = \text{Lin}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b\}$$

$$\text{im} A = \text{Lin}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}$$

$$\dim(\text{im}[A|b]) = \dim(\text{im} A) \iff \text{im} A = \text{im}[A|b] \iff b \in \text{im} A$$

$\ker \text{im} A \subseteq \text{im}[A|b]$, preveriti je treba še $\text{im}[A|b] \subseteq \text{im} A \iff b \in \text{im} A$.

4.8.7 Gaussov algoritem za reševanje sistema

Dovoljene operacije so V1 - V3 in S1. S1 je dovoljena operacija samo za prvih n stolpcev in paziti je treba, da med seboj ustrezno zamenjamo spremenljivke. S temi operacijami bo množica rešitev ostala ista.

Skica poteka je v zvezku. Na začetku leta sem opozoril, da tu ne bo skic. Če si pričakoval spremembo toplo priporočam da znizaš pričakovanja. Ko pridemo do končne matrike, katere skica nje je v prej omenjenem zvezku, velja

$$\begin{aligned}
 Ax = b &\iff \\
 1x_{i1} + 0x_{i2} + \cdots + 0x_{ir} + *x_{ir+1} + \cdots + *x_{in} &= * \\
 0x_{i1} + 1x_{i2} + \cdots + 0x_{ir} + *x_{ir+1} + \cdots + *x_{in} &= * \\
 &\vdots \\
 0x_{i1} + 0x_{i2} + \cdots + 1x_{ir} + *x_{ir+1} + \cdots + *x_{in} &= * \\
 0x_{i1} + 0x_{i2} + \cdots + 0x_{ir} + 0x_{ir+1} + \cdots + 0x_{in} &= \delta
 \end{aligned}$$

Če je $\delta = 1$, je sistem protisloven, če pa je $\delta = 0$, ima sistem $n - r$ parametrično družino rešitev. Parametri so

$$\begin{aligned}
 x_{ir+1} &= \alpha_1 \\
 &\vdots \\
 x_{in} &= \alpha_{n-r}
 \end{aligned}$$

rešitve enačbe pa so

$$\begin{aligned}
 x_{i1} &= * + *\alpha_1 + \cdots + *\alpha_{n-r} \\
 x_{i2} &= * + *\alpha_1 + \cdots + *\alpha_{n-r} \\
 &\vdots \\
 x_{ir} &= * + *\alpha_1 + \cdots + *\alpha_{n-r}
 \end{aligned}$$

PRIMER: Obravnavaj sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\
 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -1 \\
 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= p
 \end{aligned}$$

glede na realen parameter p .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & | & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & | & p \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 1 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & | & -6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & | & p-3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & | & p-3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & p-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & p-1 \end{bmatrix}$$

Sistem je neprotisloven natanko takrat, kadar je $p - 1 = 0$, torej $p = 1$.

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 - 2x_4 &= -1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_3 &= \alpha_1 \\ x_4 &= \alpha_2 \end{aligned}$$

Za $p = 1$ torej velja:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ x_2 &= 1 - 2\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ x_3 &= \alpha_1 \\ x_4 &= \alpha_2 \end{aligned}$$

kjer sta α_1 in α_2 realna parametra.

V resnici rešujemo sistem $Ax = b$, kjer je $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

Spomnimo se, da za množico rešitev R velja $R = w + \ker A$, kjer je w partikularna rešitev. Torej velja

$$x \in R \iff x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{Lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ tvorita bazo jedra } \ker A.$$

4.8.8 Simultano reševanje sistemov z isto matriko koeficientov

$$AX^{(1)} = B^{(1)}$$

$$AX^{(2)} = B^{(2)}$$

$$\dots$$

$$AX^{(p)} = B^{(p)}$$

Zapišemo lahko

$$X = \begin{bmatrix} X^{(1)} & \dots & X^{(p)} \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^{n \times p}$$

$$B = \begin{bmatrix} B^{(1)} & \dots & B^{(p)} \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^{m \times p}$$

Torej rešujemo sistem $AX = B$.

Z Gaussom dobimo $\begin{bmatrix} A & | & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A' & | & B' \end{bmatrix}$.

POSEBEN PRIMER:

$A \in \mathcal{O}^{n \times n}$, A obrnljiva ($\Rightarrow \text{rang } A = n$).

$$A' = I.$$

$$AX = B \iff IX = B' \Rightarrow B' = X = A^{-1}B$$

$$B' = A^{-1}B$$

Vzamemo $B = I$, dobimo $B' = A^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} A & | & I \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I & | & A^{-1} \end{bmatrix}$$

4.8.9 Sprememba baze

V v.p. nad \mathcal{O} .

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ urejena baza

$\mathcal{V}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ urejena baza

$$v'_j = p_{1j}v_1 + p_{2j}v_2 + \dots + p_{nj}v_n$$

$$P = [p_{ij}] \quad i, j = 1, \dots, n \quad \in \mathcal{O}^{n \times n}$$

P je prehodna matrika med \mathcal{V} in \mathcal{V}' .

Skica, ki naj bi bila v zvezku zelo pomaga pri naslednjem sklepu

$$P = \Phi_{\mathcal{V}}(\Phi'_{\mathcal{V}})^{-1}$$

$$id_V v'_j = v'_j = p_{1j}v_1 + \dots + p_{nj}v_n$$

POSEBEN PRIMER:

$$V = \mathcal{O}^n$$

$\mathcal{V} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ standardna baza

P - prehodna matrika

$$\Rightarrow v'_j = p_{1j}e_1 + p_{2j}e_2 + \dots + p_{nj}e_n = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} = P^{(j)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}' = \{P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(n)}\}$$

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$ in naj bosta $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ bazi V in $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ bazi U . Naj $A \in \mathcal{O}^{m \times n}$ pripada \mathcal{A} glede na \mathcal{V}, \mathcal{U} in naj $\mathcal{A}' \in \mathcal{O}^{m \times n}$ pripada \mathcal{A} glede na $\mathcal{V}', \mathcal{U}'$.

P naj bo prehodna matrika med \mathcal{V} in \mathcal{V}' , Q pa naj bo prehodna matrika med \mathcal{U} in \mathcal{U}' .

$$P \in \mathcal{O}^{n \times n}, \quad Q \in \mathcal{O}^{m \times m}$$

Zanima nas zveza med A' in A .

V zvezku na tem mestu stoji (ali pa leži, odvisno v kakšni poziciji bereš zvezek) en velik diagram, ki komutira. Iz tega diagrama razberemo

$$A' = Q^{-1}AP$$

POSEBEN PRIMER:

$\mathcal{A} = A$, \mathcal{V}, \mathcal{U} standardni bazi v $V = \mathcal{O}^n$ in $U = \mathcal{O}^m$

$\Rightarrow A' = Q^{-1}AP$ je matrika, ki pripada A glede na urejeni bazi $\mathcal{V}' = \{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\}$ in $\mathcal{U} = \{Q^{(1)}, \dots, Q^{(m)}\}$

4.8.10 Ekivalentnost matrik

Naj bosta $A, B \in \mathcal{O}^{m \times n}$

DEFINICIJA: B je *ekvivalentna* A ($B \sim A$), kadar obstajata taki obrnljivi matriki P, Q , da velja

$$B = Q^{-1}AP$$

\sim je ekvivalenčna relacija:

- $A \sim A$ (refleksivnost) (za Q, P vzamemo I)
- $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (simetričnost) ($B = Q^{-1}AP \Rightarrow A = \underbrace{QBP^{-1}}_{(Q^{-1})^{-1}B(P^{-1})}$)
- $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (tranzitivnost) (dokaz za DN)

TRDITEV: Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$. Potem obstajata v V in U taki urejeni bazi, da ima matrika, ki pripada \mathcal{A} v teh dveh bazah obliko

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{bmatrix}$$

kjer je $r = \text{rang } \mathcal{A}$.

DOKAZ: Iščemo bazi $\{v_1, \dots, v_n\}$ v V in $\{u_1, \dots, u_n\}$ v U , tako da bo veljalo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}v_1 &= u_1 \\ \mathcal{A}v_2 &= u_2 \\ &\dots \\ \mathcal{A}v_r &= u_r \\ \mathcal{A}v_{r+1} &= 0 \\ &\dots \\ \mathcal{A}v_n &= 0 \end{aligned}$$

V $\text{im } \mathcal{A}$ izberemo bazo $\{u_1, \dots, u_r\}$. Izberemo še praslke teh elementov $\{v_1, \dots, v_r\} \in V$. Velja $\mathcal{A}v_j = u_j$ za $j = 1, \dots, r$.

Razširimo $\{u_1, \dots, u_r\}$ do baze $\{u_1, \dots, u_r, \dots, u_m\}$ v. p. U .

Spomnimo se: $\dim(\ker \mathcal{A}) = n - \dim(\operatorname{im} \mathcal{A}) = n - r$.

Izberemo bazo $\ker \mathcal{A} : \underbrace{\{v_{r+1}, \dots, v_n\}}_{n-r \text{ vektorjev}}$.

Trdimo, da je $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza V . Zadošča ugotoviti, da so ti vektorji linearno neodvisni (ker je $\dim V = n$).

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\ \alpha_1 \underbrace{\mathcal{A}v_1}_{u_1} + \dots + \alpha_r \underbrace{\mathcal{A}v_r}_{u_r} + \alpha_{r+1} \underbrace{\mathcal{A}v_{r+1}}_0 + \dots + \alpha_n \underbrace{\mathcal{A}v_n}_0 &= 0 \quad (*) \\ \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0 \end{aligned}$$

Če to vstavimo v (*) dobimo:

$$\alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$$

Torej so v_1, \dots, v_n res linearno neodvisni.

□

POSLEDICA: Vsaka matrika je ekvivalentna matriki oblike A_0 .

DOKAZ: A razumemo kot prelikavo. Matrika, ki pripada A glede na bazi $\{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\}$ in $\{Q^{(1)}, \dots, Q^{(m)}\}$, naj bo A_0 . Ker je $A_0 = Q^{-1}AP$, sta matriki A in A_0 ekvivalentni.

Opomba:

$$\begin{aligned} A_0 &= Q^{-1}AP \iff AP = QA_0 \\ AP &= [Q^{(1)}, \dots, Q^{(r)}, 0, \dots, 0] \\ [AP^{(1)}, \dots, AP^{(r)}, \dots, AP^{(n)}] &= [Q^{(1)}, \dots, Q^{(r)}, 0, \dots, 0] \\ \iff AP^{(j)} &= Q^{(j)} \text{ za } j = 1, \dots, r \\ AP^{(j)} &= 0 \text{ za } j = r+1, \dots, n \end{aligned}$$

TRDITEV: Matriki $A, B \in \mathcal{O}^{m \times n}$ sta ekvivalentni natanko takrat, kadar velja

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$$

DOKAZ:

(\Rightarrow) Naj bosta A, B ekvivalentni. Vemo, da velja

$$B = Q^{-1}AP$$

kjer sta P in Q obrnljivi matriki. Torej B pripada preslikavi $A : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{O}^m$ glede na bazi $\{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\}$ in $\{Q^{(1)}, \dots, Q^{(m)}\}$. Po neki trditvi velja $\text{rang } B = \text{rang } A$.

(\Leftarrow) Naj velja $\text{rang } A = \text{rang } B = r$. Vemo, da je A ekvivalentna A_0 . Prav tako je B ekvivalentna B_0 . Ker $A, B \in \mathcal{O}^{m \times n}$ imata isti rang, zato je $A_0 = B_0$. Torej velja $A \sim A_0 = B_0 \sim B$. Iz tranzitivnosti sledi $A \sim B$.

□

4.8.11 Podobnost matrik

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$. In naj bosta $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ urejeni bazi V , ter P prehodna matrika. Matrika $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$ naj pripada preslikavi \mathcal{A} glede na bazo \mathcal{V} , matrika $A' \in \mathcal{O}^{n \times n}$ pa naj pripada preslikavi \mathcal{A} glede na bazo \mathcal{V}' . Vemo, da je zveza med A' in A

$$A' = P^{-1}AP$$

DEFINICIJA: Matrika $B \in \mathcal{O}^{n \times n}$ je *podobna* matriki $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$, kadar obstaja taka obrnljiva matrika $P \in \mathcal{O}^{n \times n}$, da velja

$$B = P^{-1}AP$$

Označimo z $B \stackrel{p}{\sim} A$.

Relacija podobnosti je ekvivalenčna relacija

- refleksivnost: $A \stackrel{p}{\sim} A$, za P vzamemo I .
- simetričnost $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$
- tranzitivnost: $B \stackrel{p}{\sim} A, B \stackrel{p}{\sim} C \Rightarrow A = P^{-1}BP, B = Q^{-1}CQ \Rightarrow A = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}C(QP) \Rightarrow A \stackrel{p}{\sim} C$

Vse matrike, ki pripadajo danemu endomorfizmu so med seboj podobne.

4.8.12 Diagonalne matrike in diagonalizacija

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$, $A = [a_{ij}]$ $i, j = 1, \dots, n$. Pravimo, da je A *diagonalna*, kadar je $a_{ij} = 0$ za vsak $i \neq j$. Oblika A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & a_{44} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Zapis: $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Velja:

$$\begin{aligned} \text{diag}(a_1, \dots, a_n) + \text{diag}(b_1, \dots, b_n) &= \text{diag}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \text{diag}(b_1, \dots, b_n) &= \text{diag}(a_1 b_1, \dots, a_n b_n) \end{aligned}$$

DEFINICIJA: Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ se da *diagonalizirati*, kadar obstaja taka baza $\mathcal{V} \in V$, da je matrika A , ki pripada \mathcal{A} v tej bazi, diagonalna.

Naj preslikavi \mathcal{A} v bazi \mathcal{V} pripada matrika $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ in naj bo $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Takrat velja:

$$\mathcal{A}v_j = 0v_1 + 0v_2 + \dots + a_j v_j + \dots + 0v_n = a_j v_j \quad j = 1, \dots, n$$

Torej velja:

$$\mathcal{A}v_j = a_j v_j \quad \forall j$$

DEFINICIJA: Vektor $x \in V \setminus \{0\}$ imenujemo *lastni vektor* endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, kadar velja

$$\mathcal{A}x = \lambda x$$

za kakšen $\lambda \in \mathcal{O}$. Velja, da je λ enolično določen z \mathcal{A} in lastnim vektorjem x . λ imenujemo *lastna vrednost* endomorfizma \mathcal{A} , ki pripada danemu vektorju x .

DOKAZ enoličnosti λ :

Naj velja $\mathcal{A}x = \lambda x$ in $\mathcal{A}x = \mu x$. Potem velja

$$\lambda x = \mu x \Rightarrow (\lambda - \mu) \underbrace{x}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$$

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \mathcal{O}$. λ je lastna vrednost end. \mathcal{A} , kadar obstaja kakšen lasten vektor x , da je

$$\mathcal{A}x = \lambda x$$

Poglejmo si množico $\{x \in V : \mathcal{A}x = \lambda x\}$ za fiksiran $\lambda \in \mathcal{O}$.

$$\{x \in V : \mathcal{A}x = \lambda x\} = \{x \in V : (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})x = 0\} = \ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$$

kjer je $\mathcal{I} = id_V$.

$\ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$ se imenuje *lastni podprostor* end. \mathcal{A} , ki pripada l. vrednosti λ .

Če je x lastni vektor (za \mathcal{A} in λ), potem je αx lastni vektor, če je $\alpha \neq 0$.

V $\ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$ so vsi lastni vektorji end. \mathcal{A} , ki pripadajo l. vrednosti λ , poleg njih pa še vektor 0.

TRDITEV: Endomorfizem \mathcal{A} se da diagonalizirati natanko takrat, kadar obstaja baza v. p. V , sestavljena iz lastnih vektorjev end. \mathcal{A} . Pripadajoča diagonalna matrika ima na diagonalni lastne vrednosti \mathcal{A} .

DOKAZ: Naj se da \mathcal{A} diagonalizirati v $\{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow \mathcal{A}v_j = a_j v_j \quad \forall j$.

$$A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

v_j je l. vektor $\forall j (v_j \neq 0)$. a_j je lastna vrednost za \mathcal{A} in v_j .

Obratno: $\{v_1, \dots, v_n\}$ je baza iz l. vektorjev $\mathcal{A}v_j = \lambda_j v_j$. $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

TRDITEV: Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ različne lastne vrednosti endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ in x_1, \dots, x_h pripadajoči vektorji. Potem so x_1, \dots, x_h linearno neodvisni.

DOKAZ: Recimo, da so x_1, \dots, x_h linearno odvisni. Izberemo najmanjši $j > 1$, tako da je $x_j = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{j-1} x_{j-1}$. Preslikamo z \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x_j &= \alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \dots + \alpha_{j-1} \mathcal{A}x_{j-1} \\ \Rightarrow \lambda_j x_j &= \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_{j-1} \lambda_{j-1} x_{j-1} \end{aligned}$$

Velja tudi:

$$\lambda_j x_j = \lambda_j \alpha_1 x_1 + \dots + \lambda_j \alpha_{j-1} x_{j-1}$$

Če te enačbi odštejemo dobimo:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \lambda_1 - \lambda_j \alpha_1) x_1 + \dots + (\alpha_{j-1} \lambda_{j-1} - \lambda_j \alpha_{j-1}) x_{j-1} &= 0 \\ \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_j) x_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_j) x_2 + \dots + \alpha_{j-1} (\lambda_{j-1} - \lambda_j) x_{j-1} &= 0 \end{aligned}$$

Zaradi izbire j (minimalnost) so x_1, \dots, x_{j-1} linearno neodvisni.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_j)}_{\neq 0} &= \dots = \alpha_{j-1} \underbrace{(\lambda_{j-1} - \lambda_j)}_{\neq 0} = 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 &= \dots = \alpha_{j-1} = 0 \end{aligned}$$

Torej je $x_j = 0 \rightarrow \leftarrow$.

Zato so x_1, \dots, x_h linearno neodvisni.

POSLEDICA: Če ima endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ n različnih lastnih vrednosti, kjer je $n = \dim(V)$, potem se da \mathcal{A} diagonalizirati.

DOKAZ: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ različne lastne vrednosti.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x_j &= \lambda_j x_j, & j &= 1, \dots, n \\ x_j &\neq 0 & \forall j \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ je baza V sestavljena iz lastnih vektorjev. Zato se da \mathcal{A} diagonalizirati.

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n \times n} = \mathcal{L}(\mathcal{O}^n)$. A se da diagonalizirati, kadar je A podobna diagonalni matriki:

$$\exists P \in \mathcal{O}^{n \times n} \text{ obrnljiva} : P^{-1}AP = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

Velja:

$$\begin{aligned} AP &= PD \\ \Rightarrow AP^{(j)} &= PD^{(j)} & j &= 1, \dots, n \\ PD^{(j)} &= P(d_j e_j) = d_j P e_j \\ \Rightarrow AP^{(j)} &= d_j P^{(j)} & \forall j \end{aligned}$$

$\Rightarrow P^{(1)}, \dots, P^{(n)}$ so lastni vektorji matrike A . d_1, \dots, d_n so pripadajoče lastne vrednosti.

4.8.13 Iskanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$

$$Ax = \lambda x \iff x \in \ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$$

λ je lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A} \iff \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) \neq \{0\} \iff \mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ ni bijekcija (nima inverza) $\iff \text{rang}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) < n$.

PRIMER: $n = 3$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}$. Kdaj je $\text{rang}(A - \lambda I) < 3$?

\iff stolpci oziroma vrstice matrike $A - \lambda I$ so linearno odvisni

\iff mešani produkt vseh vrstic matrike $A - \lambda I$ je enak 0

$\iff \det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3$$

Hitro lahko razberemo, da je $a_3 = -1$. Torej je λ lastna vrednost $A \iff \Delta_A(\lambda) = 0$, kjer je

$$\Delta_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 - \lambda^3$$

Niče polinoma $\Delta_A(\lambda)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so lastne vrednosti matrike A . Pravimo, da je $\Delta_A(\lambda)$ *karakteristični polinom* matrike A .

4.8.14 Determinante

Naj bosta V in U vektorska prostora nad \mathcal{O} . Definiramo

$$V^n = \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_n$$

Velja

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, \dots, v_n) &\in V^n \\ \forall j \quad v_j &\in V \end{aligned}$$

DEFINICIJA: $F : V^n \rightarrow U$ je *n-linear*, kadar so za vsak $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ preslikave $F_j : V \rightarrow U$ ($j = 1, \dots, n$), definirane s predpisom

$$F_j(x) = F(v_1, \dots, v_{j-1}, x, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

linearne.

Če je $n = 2$ pravimo da je preslikava *bilinear*, če je $n = 3$ pa pravimo, da je preslikava *trilinear*.

PRIMERI:

(1) Skalarni produkt na \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ V = \mathbb{R}^3, \quad U &= \mathbb{R} \\ F(\vec{a}, \vec{b}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

F je bilinearna preslikava

$$F_1(\vec{x}) = F(\vec{x}, \vec{b}) = \vec{x} \cdot \vec{b} F_1(\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{b} = \vec{x} \cdot \vec{b} + \vec{y} \cdot \vec{b} = F_1(\vec{x}) + F_1(\vec{y})$$

Torej je F_1 aditivna. Podobno hitro se preveri, da je tudi homogena. Zato je F_1 linearna. Podobno velja tudi za F_2 , zato je F bilinearna.

(2) Vektroski produkt v \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ V = \mathbb{R}^3, \quad U &= \mathbb{R}^3 \\ F(\vec{a}, \vec{b}) &= \vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

Podobno kot v prvem primeru preverimo linearnost preslikav F_1 in F_2 in opazimo, da je tudi v tem primeru F bilinearna.

(3) Mešani produkt v \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ V = \mathbb{R}^3, \quad U &= \mathbb{R} \\ F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

Podobno kot v prvih dveh primerih preverimo linearnost preslikav F_1, F_2 in F_3 in opazimo, da je F trilinearna preslikava.

PRIMER RAČUNANJA: Naj bo $F : V^2 \rightarrow U$ bilinearna

$$\begin{aligned} F(u, w) &= F(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n) = \\ &= \alpha_1 F(v_1, w) + \alpha_2 F(v_2, w) + \cdots + \alpha_n F(v_n, w) = \\ &= \alpha_1 F(v_1, \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n) + \cdots = \\ &= \alpha_1 (\beta_1 F(v_1, w_1) + \beta_2 F(v_1, w_2) + \cdots + \beta_n F(v_1, w_n)) = \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i \beta_j F(v_i, w_j) \end{aligned}$$

DEFINICIJA: $F : V^n \rightarrow U$ je *antisimetrična*, kadar velja za vsak $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ enakost

$$F(v_1, \dots, v_j, \dots, v_k, \dots, v_n) = -F(v_1, \dots, v_k, \dots, v_j, \dots, v_n)$$

PRIMERA: Vektorski in mešani produkt.

Naj bo \mathcal{O} obseg, kjer $1 + 1 \neq 0$. Potem je $F(v_1, \dots, v_n) = 0$, če je $v_j = v_k$ za kakšen $j \neq k$.

$$\begin{aligned} F(v_1, \dots, v_n) &= -F(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \\ 2F(v_1, \dots, v_n) &= 0 \Rightarrow F(v_1, \dots, v_n) = 0 \end{aligned}$$

Naj bo $\pi \in S_n$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ Potem velja:

$$F(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}) = s(\pi)F(v_1, \dots, v_n)$$

Kjer je

$$s(\pi) = \begin{cases} 1 & \pi \text{ soda} \\ -1 & \pi \text{ liha} \end{cases}$$

Determinanta reda 3 je trilinearna in antisimetrična. Če želimo to posplošiti, iščemo n -linearen antisimetričen funkcional.

Naj bo $V = \mathcal{O}^n$, $U = \mathcal{O}$ in naj bo $F : V^n \rightarrow U$, to je $F : (\mathcal{O}^n)^n \rightarrow \mathcal{O}$. Poglejmo si $(\mathcal{O}^n)^n$.

$$(\mathcal{O}^n)^n = \underbrace{\mathcal{O}^n \times \mathcal{O}^n \times \dots \times \mathcal{O}^n}_n$$

Torej lahko matriko $\mathcal{O}^{n \times n}$ identificiramo z $(\mathcal{O}^n)^n$, to je $(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \equiv A$.

Torej iščemo n -linearen antisimetričen funkcional $F : \mathcal{O}^{n \times n} \equiv (\mathcal{O}^n)^n \rightarrow \mathcal{O}$. Recimo, da je F tak funkcional.

$$\begin{aligned} F(A) &= F(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) = \\ &= F(\underbrace{a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n}_{A^{(1)}}, \underbrace{a_{12}e_1 + \dots + a_{n2}e_n}_{A^{(2)}}, \dots, \underbrace{a_{1n}e_1 + \dots + a_{nn}e_n}_{A^{(n)}}) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq n} F(a_{i_1 1}e_{i_1}, a_{i_2 2}e_{i_2}, \dots, a_{i_n n}e_{i_n}) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq n} a_{i_1 1}a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} F(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{i_1 1}a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} F(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

kjer je $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$. i_1, i_2, \dots, i_n so različni. Ostali sumandi so $s_0 = 0$ zaradi antisimetričnosti.

Determinatno definiramo kot

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

kjer je $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$. Torej je

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{O}^{n \times n} &\rightarrow \mathcal{O} \\ A &\mapsto \det A \end{aligned}$$

Ugotovili smo, da če je $F : \mathcal{O}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{O}$ n -linearen antisimetričen funkcional, potem velja

$$F(A) = F(I) \cdot \det A$$

TRDITEV: $\det : \mathcal{O}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{O}$ je n -linearen antisimetričen funkcional.

DOKAZ:

- n -linearnost (na prvem faktorju, ker zaradi antisimetričnosti velja na ostalih)

Homogenost:

$$\begin{aligned} \det(\alpha A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) &= \\ &= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) (\alpha a_{i_1 1}) a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \\ &= \alpha \det A \end{aligned}$$

Aditivnost:

$$\begin{aligned} \det(B^{(1)} + C^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) &= \\ &= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) (b_{i_1 1} + c_{i_1 1}) a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) b_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} + \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) c_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \\ &= \det(B^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) + \det(C^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) \end{aligned}$$

- antisimetričnost:

$$\begin{aligned}
\det(A^{(2)}, A^{(1)}, A^{(3)}, \dots, A^{(n)}) &= \\
&= \sum_{\pi \in S_n} a_{i_1 2} a_{i_2 1} a_{i_3 3} \cdots a_{i_n n} = \\
&= \sum_{\pi \in S_n} a_{i_2 1} a_{i_1 2} a_{i_3 3} \cdots a_{i_n n} = \\
&= \sum_{\rho \in S_n} s(\rho) a_{i_2 1} a_{i_1 2} a_{i_3 3} \cdots a_{i_n n} = -\det A
\end{aligned}$$

kjer je $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_2 & i_1 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$, torej je $s(\rho) = -s(\pi)$.

Torej so n -linearni antisimetrični funkcionali $F : \mathcal{O}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{O}$ točno vsi funkcionali oblike $F(A) = \alpha \det(A)$, kjer je $\alpha \in \mathcal{O}$. Pri tem je $\alpha = F(I)$.

4.8.15 Lastnosti determinante

1. Velja $\det(A^\top) = \det A$.

DOKAZ: Naj bo $B = A^\top, B = [b_{ij}]$ kjer je $b_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j$.

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} = \\
&= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n} = \sum_{\rho \in S_n} s(\rho) a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}
\end{aligned}$$

Ustrezna permutacija $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ je enaka $\rho = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \pi^{-1}$. Ker velja $s(\rho) = s(\pi)$, dobimo

$$\det B = \det A$$

Torej je

$$\det A^\top = \det A$$

2. Determinanta in operacije za računanje ranga

- Pri medsebojni zamenjavi dveh stolpcev (vrstic), se determinanta pomnoži z -1 zaradi antisimetričnosti. Za vrstice velja $\det A^\top = \det A$.

- Pri množenju stolpca (vrstice) z α , se determinanta pomnoži z α , ker je n -linearen funkcional.
- Če stolpcu prištejemo večkratnik kakega drugega stolpca (analogno za vrstice), se determinanta ohrani.

$$\begin{aligned} \det(A^{(1)} + \alpha A^{(2)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) &= \\ = \det(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) + \alpha \det(A^{(2)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) &= \det A \end{aligned}$$

Iz definicije determinante sledi, da če ima A kak stolpec (ali vrstico) enak 0, je $\det A = 0$.

Če stolpcu prištejemo linearno kombinacijo drugih stolpcev, se determinanta ohrani.

Recimo, da so stolpci matrike A linearno odvisni. Npr $A^{(1)} = \alpha_2 A^{(2)} + \dots + \alpha_n A^{(n)}$. $A^{(1)}$ prištejemo $(-\alpha_2)A^{(2)} + \dots + (-\alpha_n)A^{(n)}$ in dobimo stolpec 0. Ker se determinanta ohrani, je $\det A = 0$.

TRDITEV: Če matrika ni obrnljiva je $\det A = 0$ ($\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$).

DOKAZ: A ni obrnljiva $\Rightarrow \text{rang } A < n \Rightarrow$ stolpci matrike A so linearno odvisni $\Rightarrow \det A = 0$.

Naj bo A zgornje ali spodnje trikotna matrika. Potem velja

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

To hitro vidimo, če si narišemo shemo matrike, kar je v zvezku.

Če je v zgornje trikotni matriki $a_{ii} \neq 0$ za $i = 1, \dots, n$, je ta matrika obrnljiva.

3. Multiplikativnost Za $A, B \in \mathcal{O}^{n \times n}$ velja

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

DOKAZ: Naj bo $F : \mathcal{O}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{O}$ in $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$. F definiramo kot

$$F(X) = \det(AX)$$

F je n -linearna antisimetrična preslikava. Velja

$$F(X) = F(X^{(1)}, \dots, X^{(n)}) = \det(AX^{(1)}, \dots, AX^{(n)})$$

Vemo, da velja

$$\begin{aligned} F(X) &= F(I) \det X \\ F(I) &= \det(AI) = \det A \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\det(AX) = (\det A)(\det X)$$

□

Recimo, da je A obrnljiva. Potem velja

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \underbrace{\det(AA^{-1})}_{(\det A)(\det A^{-1})} = \det I = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

Torej velja, da če je A obrnljiva, je $\det A \neq 0$. Vemo že, da velja obratno, torej velja

$$\exists A^{-1} \iff \det A \neq 0$$

4. Razvoj determinante

DEFINICIJA: Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$ in $n > 0$. $A_{ij} \in \mathcal{O}^{(n-1) \times (n-1)}$ dobimo tako, da iz A odstranimo i -to vrstico in j -ti stolpec. Pravimo, da je A_{ij} *podmatrika*.

Poddeterminanto matrike A definiramo kot

$$(-1)^{i+j} \det A_{ij} \equiv \widetilde{a}_{ij}$$

Matrika $\widetilde{A} = [\widetilde{a}_{ij}]$ $i, j = 1, \dots, n \in \mathcal{O}^{n \times n}$ je *prirejenka* matrike A .

Poglejmo si naslednjo determinanto

$$\det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & A^{(n-1)} & e_n \end{bmatrix} = \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_{n-1} n-1} = \sum_{\rho \in S_{n-1}} s(\rho) a_{i_1 1} \dots a_{i_{n-1} n-1} = \det A_{nn}$$

Kjer je $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{n-1} & n \end{pmatrix}$, ker je drugače $a_{i_n n} = 0$. ρ definiramo kot $\rho = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-1 \\ i_1 & \dots & i_{n-1} \end{pmatrix} \in S_{n-1}$. Velja $s(\pi) = s(\rho)$.

Poglejmo si še

$$\det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & e_i & \dots & A^{(n)} \end{bmatrix}$$

Kjer je e_i na j -tem mestu. Želeli bi si matriko preoblikovati v takšno obliko, kot smo jo obravnavali v prejšnjem primeru. Žal ne moremo kar zamenjati i -te in n -te vrstice, ter j -tega in n -tega stolpca, ker bi s tem spremenili vrstni red stolpcev in vrstic v matriki. Lahko pa postopoma premikamo stolpec/vrstico, tako da delamo neke vrste transpozicije (skica v zvezku). S tem pridemo podmatriko A_{ij} , ki ima v zadnjem

stolpcu enotski vektor e_n . Zaradi antisimetričnosti se nam spremeni predznak determinante. Torej dobimo

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & e_i & \dots & A^{(n)} \end{bmatrix} &= \\ &= (-1)^{(n-i)+(n-j)} \det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \widetilde{a}_{ij}\end{aligned}$$

Poglejmo si, *razvoj* determinante po j -tem stolpcu.

$$\begin{aligned}\det A &= \det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & \underbrace{a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n}_{A^{(j)}} & \dots & A^{(n)} \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & e_i & \dots & A^{(n)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ij}\end{aligned}$$

Torej velja

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ij} = \det A \quad \forall j$$

Če zamenjamo A z A^T , dobimo podobno formulo za razvoj determinante po i -ti vrstici

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ij} = \det A \quad \forall i$$

Za $j \neq k$ velja

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ik} = \det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & \underbrace{A^{(j)}}_{j\text{-to mesto}} & \dots & \underbrace{A^{(j)}}_{k\text{-to mesto}} & \dots & A^{(n)} \end{bmatrix} = 0$$

Torej velja

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ik} = 0 \quad \forall j, k : j \neq k$$

Če A zamenjamo z A^T dobimo podobno za vrstice

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{kj} = 0 \quad \forall i, k : i \neq k$$

Te formule lahko združimo v naslednje

$$A\widetilde{A}^T = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A)I$$

Podobno lahko zapišemo

$$\tilde{A}^\top A = (\det A)I$$

To dvojje lahko združimo v

$$\tilde{A}^\top A = A\tilde{A}^\top = (\det A)I$$

POSLEDICA: Če je $\det A \neq 0$ velja

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \tilde{A}^\top$$

DETERMINANTE NEKATIRH MATRIK POSEBNE OBLIKE:

$$\det \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B)$$

kjer sta A in B kvadratni matriki.

OSNOVNA IDEJA DOKAZA:

Delamo indukcijo glede na velikost matirke A in razvoj determinante po prvem stolpcu.

Za $k = 1$ velja:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & * \\ 0 & B \end{bmatrix} = a_{11} \det B$$

Za $k = 2$ veja:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & \\ & & B \end{bmatrix} &= a_{11}(a_{22} \det B) - a_{21}(a_{12} \det B) = \\ &= \det B(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (\det A)(\det B) \end{aligned}$$

Sorodno naredimo za $k \rightsquigarrow k + 1$.

Če imamo bločno zgornje trikotno matriko velja

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} = (\det A_1)(\det A_2) \cdots (\det A_k)$$

Podobno velja tudi za bločno spodnje trikotne.

Bločno diagonalno matriko lahko zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$$

in velja

$$\det(\text{diag}(A_1, \dots, A_k)) = (\det A_1) \cdots (\det A_k)$$

4.8.16 Determinanta endomorfizma

Naj bo preslikava $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ in naj bosta A, A' matriki, ki pripada preslikavi \mathcal{A} . Ker sta si A in A' podobni, velja

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP \\ PA' &= AP \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} \det(PA') &= \det(AP) \\ (\det P)(\det A') &= (\det A)(\det P) \\ \exists P^{-1} &\Rightarrow \det P \neq 0 \\ &\Rightarrow \det A' = \det A \end{aligned}$$

Podobni matriki imata enako determinanto. Zato je smiselno definirati

$$\det \mathcal{A} = \det A$$

(neodvisno od izbire baze v V)

CRAMERJEVA FORMULA:

Naj bo $Ax = b, A \in \mathcal{O}^{n \times n}$ sistem enačb innaj bo $\det A \neq 0$. Vemo, da je

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \text{ Definiramo}$$

$$A_j = [A^{(1)}, \dots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}]$$

Cramerjeva formula pravi, da velja

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, \dots, n$$

DOKAZ:

Ker $\det A \neq 0$, obstaja A^{-1} . Vemo, da velja

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^\top$$

Zato velja

$$\begin{aligned} Ax = b &\Rightarrow x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^\top b \Rightarrow \\ \Rightarrow x_j &= \frac{1}{\det A} (\tilde{A}^\top b)_j = \frac{1}{\det A} \underbrace{(\widetilde{a_{1j}}b_1 + \widetilde{a_{2j}}b_2 + \cdots + \widetilde{a_{nj}}b_n)}_{\text{razvoj determinante po } j\text{-tem stolpcu}} = \\ &= \frac{1}{\det A} \det [A^{(1)}, \dots, b, \dots, A^{(n)}] \end{aligned}$$

4.8.17 Karakteristični polinom in minimalni polinom

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$. Potem je

$$\Delta_A(\delta) = \det(A - \lambda I)$$

karakteristični polinom matrike A (glej $A \in \mathbb{R}^3$). $\Delta_A(\delta)$ je polinom n -te stopnje s koeficienti v \mathcal{O} .

$$\begin{aligned} \Delta_A(\delta) &= \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + \underbrace{p(\lambda)}_{\text{st} \leq n-2} = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n \end{aligned}$$

Iz tega zapisa lahko hitro razberemo, da veljajo naslednje enačbe

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1} \overbrace{(a_{nn} + a_{22} + \cdots + a_{nn})}^{slA} \\ a_0 &= \det A \end{aligned}$$

IZREK: Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$ in $\Delta_A(\delta)$ njen karakteristični polinom. Potem je $\alpha \in \mathcal{O}$ lastna vrednost matrike A natanko takrat, kadar je

$$\Delta_A(\alpha) = 0$$

DOKAZ: $\alpha \in \mathcal{O}$:

α je lastna vrednost $A \iff A - \alpha I$ ni obrnljiva $\iff \det(A - \alpha I) = 0 \iff \Delta_A(\alpha) = 0$

□

Za lastne vektorje rešujemo homogen sistem $(A - \alpha I)x = 0$.

Naj bo preslikava $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ in naj ji pripadata matriki A, A' . Vemo $A' = P^{-1}AP$. Velja

$$\begin{aligned} \Delta_{A'} &= \det(A' - \lambda I) = \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \\ &= \underbrace{(\det(P^{-1}))}_{(\det P)^{-1}} \det(A - \lambda I) (\det P) = \\ &= \det(A - \lambda I) = \Delta_A \end{aligned}$$

Torej velja

$$\Delta_{A'}(\lambda) = \Delta_A(\lambda)$$

Zato je smiselno definirati

$$\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = \Delta_A(\lambda)$$

Torej je α lastna vrednost endomorfizma \mathcal{A} natanko takrat, ko je $\Delta_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$.

POLINOM Z MATRIČNIMI KOEFICIENTI

Naj bo

$$p(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \cdots + A_k\lambda^k, \quad A_j \in \mathcal{O}^{n \times n}$$

To lahko zapišemo v matriko kot

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} p_{11}(\lambda) & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & p_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} = [p_{ij}(\lambda)], \quad i, j = 1, \dots, n$$

kjer je $p_{ij}(\lambda)$ polinom s koeficienti v \mathcal{O} in stopnja $p_{ij}(\lambda) \leq k$.

Naj bo $B \in \mathcal{O}^{n \times n}$. Potem je

$$p(B) = A_0 + A_1B + A_2B^2 + \cdots + A_kB^k$$

in B je ničla polinoma $p(\lambda)$, če je $p(B) = 0$.

Naj bo

$$q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_k\lambda^k$$

in $a_i \in \mathcal{O}$, $i = 0, 1, \dots, k$. Naj bo $B \in \mathcal{O}^{n \times n}$. Potem je

$$q(B) = a_0I + a_1B + a_2B^2 + \cdots + a_kB^k$$

B je ničla polinoma $q(\lambda)$, če je $q(B) = 0$.

IZREK (Cayley, Hamilton): Kvadratna matrika je ničla svojega karakterističnega polinoma.

DOKAZ:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)(\widetilde{A - \lambda I})^\top &= (\det(A - \lambda I))I \\ (\widetilde{A - \lambda I})^\top &= [p_{ij}(\lambda)] \quad i, j = 1, \dots, n \\ &= B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1} \\ \Rightarrow (A - \lambda I)(B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) &= \\ &= \Delta_A(\lambda)I = (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n)I \end{aligned}$$

Zmnožimo in uredimo po potencah λ , nato izenačimo koeficiente:

$$\begin{aligned} AB_0 &= a_0I \\ AB_1 - B_0 &= a_1I && \cdot A \\ AB_2 - B_1 &= a_2I && \cdot A^2 \\ &\vdots \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1}I && \cdot A^{n-1} \\ -B_{n-1} &= a_nI && \cdot A^n \end{aligned}$$

Če te enačbe šestejemo, dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n}_{\Delta_A(A)} \\ &\Rightarrow \Delta_A(A) = 0 \end{aligned}$$

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$. Označimo

$$P = \{p(\lambda) : p(A) = 0\}$$

in velja $\Delta(\lambda) \in P$.

DEFINICIJA: *Minimalni polinom* matrike A :

$$m_A(\lambda) \in P$$

Vodilni koeficient $m_A(\lambda)$ je 1 in velja

$$\text{st } m_A(\lambda) \leq \text{st } p(\lambda), \quad p \in P \setminus \{0\}$$

Lastnosti:

$$(1) \quad m_A(\lambda) | \Delta_A(\lambda) \quad (\exists q(\lambda) : \Delta_A(\lambda) = q(\lambda) \cdot m_A(\lambda))$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \Delta_A(\lambda) &= q(\lambda)m_A(\lambda) + o(\lambda) \\ \text{st } o(\lambda) &< \text{st } m_A(\lambda) \end{aligned}$$

λ zamenjamo z A in dobimo

$$\underbrace{\Delta_A(A)}_0 = q(A) \underbrace{m_A(A)}_0 + o(A)$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} &\Rightarrow o(A) = 0 \\ &\Rightarrow o(\lambda) = 0 \quad \text{drugače protislovje z def. } m_A(\lambda) \\ &\Rightarrow \Delta_A(\lambda) = q(\lambda)m_A(\lambda) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \alpha \in \mathcal{O} : m_A(\alpha) = 0 \iff \Delta_A(\alpha) = 0$$

Dokaz:

(\Rightarrow) Uporabimo (1).

(\Leftarrow) $\Delta_A(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ je lastna vrednost A , zato obstaja $x \in \mathcal{O}^n, x \neq 0$, ki je lasten vektor matrike A , to je, $Ax = \alpha x$. Torej velja

$$\begin{aligned} m_A(\lambda) &= q(\lambda)(\lambda - \alpha) + m_A(\alpha) \\ \lambda &\leftrightarrow A \\ \underbrace{m_A(A)}_0 &= q(A)(A - \alpha I) + m_A(\alpha)I \quad | \cdot x \\ &\Rightarrow 0 = q(A) \underbrace{(A - \alpha I)x + m_A(\alpha)x}_{Ax - \alpha x = 0} \\ &\Rightarrow m_A(\alpha)x = 0 \Rightarrow m_A(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

□

Poglejmo si obseg kompleksni števil $\mathcal{O} = \mathbb{C}$.

$$\Delta_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ so različne ničle $\Delta_A(\lambda)$ in so edine lastne vrednosti matrike A . n_j je *algebrajska kratnost* lastne vrednosti λ_j . Zapišemo lahko

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

in velja $1 \leq m_j \leq n_j \quad \forall j$.

PRIMER:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Torej sta i in $-i$ kompleksni lastni vrednosti matrike A .