Logika in Množice

Vid Drobnič

Kazalo

1 Množice

A - množica
$x \in A$ - x je element A

Načelo ekstenzionalnosti:

Če imata množici iste elemte, sta enaki.

Končna množica: $\{a, b, c, ...z\}$, primer:

$$A = \{1, 2, 5\}$$

$$B = \{2, 1, 1, 5\}$$
$$A = B$$

Prazna množica: $\{\}$ oznaka $\varnothing$

Enojec: $\{a\}$

Dvojec ali neurejeni par: $\{a, b\}$ za katerikoli a in b $\Rightarrow$ lahko sta enaka $\Rightarrow$ enojec je posebni primer dvojca.

$$\{c, c\} = \{c\}$$

Standardni enojec: $1 = \{()\}$

2 Preslikava ali Funkcija

(1) **domena**: množica A

(2) **kodomena**: množica B

(3) **prirejanje**: pove kako elementom iz A priredimo elemnte iz B

- **Celovitost:** vsakemu elementu iz A priredi vsaj 1 element iz B
- **Enoličnost:** če sta elementu x prirejena y_1 in y_2, potem velja $y_1 = y_2$

$A \to B$ (brezimna)preslikava iz A v B
A - domena
B - kodomena

$f : A \to B$ funkcija (preslikava) poimenovana f
$A \xrightarrow{f} B$

Funkcijski predpis

$$x \mapsto 1 + x^2$$

x se slika v $1 + x^2$

$$f : x \mapsto 1 + x^2$$
$$f(x) = 1 + x^2$$

Opomba: funkciji manjka še domena in kodomena.

$$\{1, 2, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, ...10\}$$
$$x \mapsto 1 + x^2$$

$g(2)$: g uporabimo ali apliciramo na argumentu 2

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: predpis
g: preslikava
$g(3)$: število
$g(x)$: število

(1) $x \mapsto ax + b$ (x je vezana spremenljivka, a in b sta parametra)

(2) $a \mapsto ax + b$

(3) $y \mapsto ay + b$

(1) in (2) sta isti preslikavi.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = 1 + x^3$$
$$g(7) = 1 + 7^3$$

Opomba: ni treba izračunati.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 + x^3$$
$$(x \mapsto 1 + x^3)(7) = 1 + 7^3$$
$$(x \mapsto ax + b)(7) = 7x + b$$

Uporaba funkcije - **aplikacija.**

Preslikave $\varnothing \to A$?

$$\varnothing \to \{1, 2, 3\}$$

Prirejanje "vsi elemtni domene se presliakjo v 1".

$$x \mapsto 1$$
$$x \mapsto 2$$

Preslikavi sta enaki.

Sklep: iz $\varnothing \to A$ imamo natanko eno preslikavo.

Opomba: Za vse elemte prazne množice velja karkoli.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x \cdot x$$
$$x \mapsto x \cdot x + x - x$$

Preslikavi sta enaki.

Načelo ekstenzionalnosti preslikav:

Če imata preslkavi enaki domeni in enaki kodomeni, ter prirejata elementom domene enake vrednosti, potem sta enaki.

$$f : A \to B$$
$$g : C \to D$$

Če $A = C$ in $B = D$ in za vsak $x \in A$ velja $f(x) = g(x)$, potem $f = g$.

Drugače povedano (se izpelje):
Če $A = C$ in $B = D$ in za vsak $x_1, x_2 \in A$ velja, da iz $x_1 = x_2$ sledi: $f(x_1) = g(x_2)$, potem $f = g$.

3 Aritmetika Množic

3.1 Kartezični produkt ali zmnožek

A in B množici
$A \times B$ zmnožek

Elementi $A \times B$ so urejeni pari (a, b), kjer sta $a \in A$ in $b \in B$.

Projekciji:

$$\pi_1 : A \times B \to A$$

$$\pi_2 : A \times B \to B$$

Enačbe:

Za vse $a \in A$ in $b \in B$ velja:

$$\pi_1(a, b) = a$$

$$\pi_2(a, b) = b$$

Ekstanzionalnost za zmnožke:

Za vse $p, q \in A \times B$, če $\pi_1(p) = \pi_1(q)$ in $\pi_2(p) = \pi_2(q)$, potem $p = q$

$$f : A \times B \to C$$

$$f : p \mapsto ...$$

$$f : (x, y) \mapsto ...x...y...$$

$$g : A \to B \times C$$

$$g : a \mapsto (...a..., ...a...)$$

Kaj je $\varnothing \times A$? $\varnothing \times A = \varnothing$

3.2 Eksponentna množica

Če sta A in B množici, je B^A množica vseh preslikav z domeno A in kodomeno B.

3.3 Vsota množic

Če sta A in B množici je vsota $A + B$ množica.

Za vsak $a \in A$ je $\iota_1(a) \in A + B$

Za vsak $b \in B$ je $\iota_2(b) \in A + B$

Elementa u in v iz $A + B$ sta enaka, če bodisi obstaja $a \in A$ da je $u = \iota_1(a)$ in $v = \iota_1(a)$, bodisi obstaja $b \in B$ da je $u = \iota_2(b)$ in $v = \iota_2(b)$.

$$\{1, 2\} + \{1, 2\} = \{\iota_1(1), \iota_1(2), \iota_2(1), \iota_2(2)\}$$

3.4 Izomorfni množici

Def.: Izomorfizem je preslikava $f : A \to B$, za katero obstaja preslikava $g : B \to A$, da je:

- za vsak $x \in A$ je $g(f(x)) = x$ in
- za vsak $y \in B$ je $f(g(y)) = y$

Pravimo da je g inverz f.

Če obstaja izomorfizem $X \to Y$, pravimo, da sta X in Y **izomorfni**, pišemo $X \cong Y$