

Algebra 1

Vid Drobnič

Kazalo

1	Vektorji v trirazsežnem prostoru	2
1.1	Operacije z vektorji	3
1.2	Linearna neodvisnost	4
1.3	Skalarni produkt	8
1.4	Vektorski produkt	9
1.5	Mešani produkt	12
1.6	Dvojni vektorski produkt	13
2	Analitična geomterija v \mathbb{R}^3	13
2.1	Premica	13
2.2	Ravnina	14
2.3	Razdalja med mimobežnima premicama	16
3	Osnovne algebrske strukture	17
3.1	Preslikave in relacije	17
3.2	Operacije	21

1 Vektorji v trirazsežnem prostoru

\mathcal{P} - prostor

$T \in \mathcal{P}$ - točka

$A, B \in \mathcal{P}$

\overrightarrow{AB} - usmerjena daljica

Formalno: $\overrightarrow{AB} = (A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ (urejen par)

Ekvivalentnost usmerjenih daljic:

$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$, kadar je \overrightarrow{AB} z vzporednim premikom mogoče premakniti v \overrightarrow{CD} .

- $|AB| = |CD|$ (dolžini daljic sta enaki)
- imata isto smer (če potegnemo premico čez izhodišča daljic (AC), morata biti točki B in D na istem "bregu" te premice)
- $AB \parallel CD$ (premici skozi točke sta vzporedni)

$$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

Def: Vektor \vec{AB} je množica $\vec{AB} = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}$ (usmerjene daljice ekvivalentne daljici \overrightarrow{AB})

- ničelni vektor: $\vec{AA} = \vec{0}$
- nasprotni vektor vektorja \vec{AB} je \vec{BA} ($\vec{BA} = -\vec{AB}$)

Dodatna oznaka: $\vec{a}, -\vec{a}$ nasprotni vektor

$V = \{\vec{v} : \vec{v} \text{ vektor}\}$ - vektorski prostor.

$O \in \mathcal{P}$; O fiksiramo (izberemo si neko točko v prostoru, ki jo fiksiramo)

$$f : \mathcal{P} \rightarrow V$$

$$f(T) = \vec{OT}$$

f je bijekcija (vsaki točki priredi natanko en vektor).

$$\vec{a} = \vec{OT}$$

1.1 Operacije z vektorji

Seštevanje:

$$\begin{aligned}\vec{a}, \vec{b} &\in V \\ \vec{a} &= \vec{AB}, \vec{b} = \vec{BC} \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{AC} \\ \vec{AB} + \vec{BC} &= \vec{AC}\end{aligned}$$

Lastnosti:¹

- (1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ asociativnost
- (2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ komutativnost
- (3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- (4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Za lastnosti od (1) do (4) $(V, +)$ **Abelova grupa**.

Razliko dveh vektorjev definiramo tako:

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

Množenje s skalarjem

Skalar je realno število.

$$\vec{a}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha\vec{a}$ je vektor.

- ima isto smer kot \vec{a} za $\alpha > 0$
- ima nasprotno smer kot \vec{a} za $\alpha < 0$
- $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$

¹Dokaz lastnosti (1) in (2) s skico.

$$\vec{a} = \vec{OA} \neq \vec{0}$$

$$\alpha\vec{a} = \vec{OT}, O, A, T \text{ so na isti premici}$$

S tem uvedemo koordinatni sistem na premici OA .

Lastnosti:

$$(5) \quad \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

$$(6) \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$(7) \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$(8) \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$V, +$ in množenje s skalaji je **vektorski prostor**: veljajo lastnosti od (1) do (8).

1.2 Linearna neodvisnost

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

\vec{a}, \vec{b} sta linearno odvisna kadar je:

bodisi $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ za ustrezen $\alpha \in \mathbb{R}$,

bodisi $\vec{a} = \beta\vec{b}$ za ustrezen $\beta \in \mathbb{R}$.

V nasprotnem primeru sta \vec{a} in \vec{b} linearno neodvisna.

$$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$$

1. \vec{OA} in \vec{OB} sta linearno odvisna $\Leftrightarrow O, A, B$ kolinearne (ležijo na isti premici).

2. \vec{a}, \vec{b} sta linearno neodvisna $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$

Privzamemo da sta \vec{a}, \vec{b} linearno neodvisna:

$$\{T : \vec{OT} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{R}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ - linearna kombinacija

\mathcal{R} - ravnina določena z O, A, B (z vektorji \vec{a}, \vec{b}) in točko O .

$$\vec{r} = \vec{OT}, T \in \mathcal{R}$$

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Pri tem sta α in β enolično določena skalarja.

V \mathcal{R} smo z vektorjema \vec{a}, \vec{b} vpeljali koordinatni sistem.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ so linearno odvisni, kadar je vsaj eden od njih linearna kombinacija drugih dveh.

npr: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

V nasprotnem primeru so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni.

1. $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$ so linearno odvisni $\Leftrightarrow O, A, B, C$ koplanarne (ležijo na isti ravnini)

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0)$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni

$$\vec{a} = \vec{OA}$$

$$\vec{b} = \vec{OB}$$

$$\vec{c} = \vec{OC}$$

$$V = \{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

V - množica vseh vektorjev prostora \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{R \in \mathcal{P} : \vec{OR} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Dodatek: V zapisu vektorja $\vec{r} \in V$: $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, so koeficienti α, β, γ enolično določeni.

Dokaz: Recimo, da lahko vektor \vec{r} izrazimo na 2 različna načina:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \\ \vec{r} &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\ \Rightarrow \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\ (\alpha - \alpha_1) \vec{a} + (\beta - \beta_1) \vec{b} + (\gamma - \gamma_1) \vec{c} &= \vec{0} \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ linearno neodvisni} &\Rightarrow \alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1 = \gamma - \gamma_1 = 0 \\ \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1\end{aligned}$$

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ je **baza** vektorskega prostora V . $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni.

$R \in \mathcal{P}$ (O - fiksirana točka) $\vec{OR} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$

$$R \mapsto (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Urejena trojica (α, β, γ) je s točko R enolično določena.

α, β, γ so koordinate točke R glede na koordinaten sistem, ki je določen z bazo $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ in točko O (izhodišče koordinatnega sistema).

Imena koordinat: abscisa, ordinata, aplikata

$$\begin{aligned}\varphi : V &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{r} &\mapsto (\alpha, \beta, \gamma); \vec{r} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}\end{aligned}$$

φ je bijekcija.

S φ prenesemo operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorjev s skalarji iz V v \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}\vec{r}_1, \vec{r}_2 &\in V \\ \vec{r}_1 &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\ \vec{r}_2 &= \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b} + \gamma_2 \vec{c} \\ \varphi(\vec{r}_1) &= (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \\ \varphi(\vec{r}_2) &= (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \\ \vec{r}_1 + \vec{r}_2 &= (\alpha_1 + \alpha_2) \vec{a} + (\beta_1 + \beta_2) \vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2) \vec{c} \\ \varphi(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) &= (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)\end{aligned}$$

Torej velja:

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$$

seštevanje je definirano po komponentah.

Podobno velja za množenje s skalarji:

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$$

\mathbb{R}^3 je za te operaciji **vektorski prostor** (zadošča A1-A8).

$$\varphi(\vec{a}) = (1, 0, 0)$$

$$\varphi(\vec{b}) = (0, 1, 0)$$

$$\varphi(\vec{c}) = (0, 0, 1)$$

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

je **standardna baza** vektorskega prostora \mathbb{R}^3 .

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

Oznake:

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

Dodatna zahteva za standardno bazo vektorskega prostora \mathbb{R}^3 : baza je **ortonormirana**, torej:

- $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ so paroma pravokotni.

Opomba: Po dogovoru je trojica $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pozitivno orientirana (pri določanju orientacije si v 3D koordinatnem sistemu pomagamo z pravilom desnega vijaka).

1.3 Skalarni produkt

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

Kot med njima je $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$

Def: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$

V **identificiramo**² z \mathbb{R}^3 (glede na standardno bazo in dano izhodišče O).

$$O = (0, 0, 0)$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \vec{OA}$$

$$|\vec{a}| = |OA| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Kosinusni izrek:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$\Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Lastnosti:

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0 \text{ (enačaj le za } \vec{a} = \vec{0})$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

²Prej smo vse izpeljevali za splošen vektorski prostor, sedaj pa za V vzamemo \mathbb{R}^3 .

$$(3) (\alpha \vec{a}) \vec{b} = \alpha(\vec{a} \vec{b})$$

$$(4) \vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \cos \varphi = 0 (0 \leq \varphi \leq \pi) \\ \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

Primer:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\equiv \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ \vec{a} &= (a_1, a_2, 0) \\ \vec{a} \text{ v } \mathbb{R}^2 : \vec{a} &= (a_1, a_2) \\ \vec{a} \vec{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

p - ploščina paralelograma

p si želimo izraziti z a_1, a_2, b_1, b_2

$$p = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \vec{a}' &\perp \vec{a} \\ |\vec{a}'| &= |\vec{a}| \end{aligned}$$

\vec{a}, \vec{a}' pozitivno orientirana

$$\vec{a}' = (-a_2, a_1)$$

$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ali $\varphi - \frac{\pi}{2}$ če je orientacija (\vec{a}, \vec{b}) pozitivna.

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \vec{a}' \vec{b} = (-a_2, a_1) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$p = a_1 b_2 - a_2 b_1$, če je orientacija \vec{a}, \vec{b} pozitivna, če pa je negativna velja:

$$p = -(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

1.4 Vektorski produkt

Vzamemo vektorja \vec{a}, \vec{b} iz prostora. Njun vektorski produkt označimo:

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na \vec{a} in \vec{b} .
- (2) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga določata \vec{a} in \vec{b} . ($= 0$, kadar sta \vec{a} in \vec{b} linearno odvisna)
- (3) Urejena trojica $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ je pozitivno orientirana.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{a} \times \vec{b} &= (x, y, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{k} &= (0, 0, 1) \\ z &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{k} = \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{k}| \cos \delta = \\ &= p \cos \delta\end{aligned}$$

p - ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja \vec{a} in \vec{b}
 δ - kot med ravninama, ki ju določata osi (1),(2) in vektorja \vec{a}, \vec{b} .

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= (a_1, a_2, 0) \\ \vec{b}' &= (b_1, b_2, 0) \\ p' &= \pm(a_1 b_2 - a_2 b_1)\end{aligned}$$

p' je ploščina paralelograma, ki ga določata pravokotni projekciji vektorjev \vec{a} in \vec{b} na ravnino (\vec{i}, \vec{j}) , tj. ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja \vec{a}' in \vec{b}' .

p' ima predznak $+$, kadar sta \vec{a}' in \vec{b}' pozitivno orientirana, ter $-$, kadar sta negativno orientirana.

$$p' = \pm p \cos \delta$$

$+$ kadar: $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$
 $-$ kadar: $\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \pi$

$$z = \pm p' = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

\pm se izniči, ker se predznak, ki nastane zaradi \cos in predznak, ki nastane pri izračunu ploščine paralelograma z vektorjema ujemata.

$$\begin{aligned}x &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ y &= a_3 b_1 - a_1 b_3\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

determinanta (reda 2)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Lastnosti:

- $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

\vec{a}, \vec{b} linearno neodvisna $\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ je baza.

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b})$$

Poseben primer:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 (\vec{a} \perp \vec{b})$$

$\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ je ortonormirana baza.

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b}) / \cdot \vec{a} \text{ (ali } \vec{b}, \vec{c})$$

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = \alpha$$

$$\vec{r} \cdot \vec{b} = \beta$$

$$\vec{r} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \gamma$$

$$\begin{aligned}
(|\vec{a} \times \vec{b}|)^2 &= (|\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi)^2 \\
(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi)^2 \\
\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2
\end{aligned}$$

1.5 Mešani produkt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Paralelepiped je prizma, ki ima za osnovno ploskev paralelogram. V - prostornina paralelepipeda

$$\begin{aligned}
P &= |\vec{a} \times \vec{b}| \\
V &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot v \\
v &= \pm |\vec{c}| \cos \delta \\
V &= \pm |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \delta = \\
&= \pm (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \pm V
\end{aligned}$$

+: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ pozitivno orientirani

–: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ negativno orientirani $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno odvisni $\Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = 0$.

Orientacija se pri cikličnih zamenjavah ohrani:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} &= (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} = \vec{a} (\vec{b} \times \vec{c}) \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} &= \vec{a} (\vec{b} \times \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]
\end{aligned}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \equiv a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

1.6 Dvojni vektorski produkt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{e} = ?$$

$$\vec{e} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{e} \perp \vec{c}$$

\vec{a}, \vec{b} linearno neodvisna $\Rightarrow \vec{e} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$.

$$\vec{e} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\alpha(\vec{a}\vec{c}) + \beta(\vec{b}\vec{c}) = 0$$

$$\beta = \lambda \vec{a}\vec{c}$$

$$\alpha = -\lambda \vec{b}\vec{c}$$

$$\vec{e} = \lambda(\vec{b}\vec{c})\vec{a} + \lambda(\vec{a}\vec{c})\vec{b}$$

$$\vec{e} = \lambda(-(\vec{b}\vec{c})\vec{a} + (\vec{a}\vec{c})\vec{b})$$

Če razpišemo po komponentah dobimo $\lambda = 1$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -(\vec{b}\vec{c})\vec{a} + (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$$

2 Analitična geometrija v \mathbb{R}^3

2.1 Premica

p podana s točko R_0 na njej in *smernim vektorjem* \vec{e} .

$$\vec{r}_0 = \vec{OR}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$R \in p$$

$$\vec{r} = \vec{OR} = (x, y, z)$$

Koordinatizirali smo premico.

$$\vec{R_0R} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{e}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Enačba premice p (vektorska parametrična) (λ je parameter)

$$\vec{e} = (a, b, c)$$

$$x = x_0 + \lambda a$$

$$y = y_0 + \lambda b$$

$$z = z_0 + \lambda c$$

(Parametrična) enačba premice.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

enačba premice (brez parametra)

$a = 0$?

$$\frac{x - x_0}{0} \equiv (x = x_0 \text{ ali } ax - x_0 = 0)$$

Podobno za $b = 0$ in $c = 0$.

$R_0 \vec{R}, \vec{e}$ linearno odvisna $\Leftrightarrow R \in p$

To je kadar: $R_0 \vec{R} \times \vec{e} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{e} = \vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0}$
(vektorska enačba premice)

Če imamo točko R_1 izven premice, je razdalja med premico p in to točko enaka:

$$\Delta = |\vec{r}_1 - \vec{r}_0| \sin \varphi$$

To enačbo lahko preoblikujemo da dobimo:

$$\Delta = \frac{|\vec{e} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{e}|}$$

To je posebej ugodno, kadar $|\vec{e}| = 1$, saj iz tega sledi $\Delta = |\vec{e} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|$.

Razdaljo med točko in premico lahko zapišemo tudi kot: $\Delta = d(R_1, p)$.

2.2 Ravnina

Da določimo ravnino Σ , potrebujemo točko $R_0 \in \Sigma$ in vektor normale \vec{n} , kjer $\vec{n} \perp \Sigma$ in $\vec{n} \neq \vec{0}$.

Da določimo kdaj točka leži na ravnini zapišemo:

$$R \in \Sigma \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

To pomeni da nam ravnino Σ določa enačba:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Če zapišemo vektorje \vec{r}_0, \vec{r} in \vec{n} kot:

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

lahko zapišemo enačbo ravnine kot:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

To enačbo lahko naprej pretvorimo v *implicitno obliko*:

$$ax + by + cz + d = 0$$

kjer je $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Če imamo podane točke R_0, R_1 in R_2 , lahko izračunamo vektor normale kot:

$$\vec{n} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)$$

če to vstavimo v enačbo ravnine, dobimo da lahko ravnino Σ zapišemo kot:

$$((\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Opazimo, da nam ta enačba predstavlja mešani produkt kar lahko zapišemo z determinanto reda 3:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

kjer je vektor \vec{r}_n zapisan kot: $\vec{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$.

Če imamo točko R_1 , ki ni na ravnini, lahko zapišemo razdaljo te točke do ravnine kot:

$$\Delta = \pm |\vec{r}_1 - \vec{r}_0| \cos \varphi \quad (1)$$

To enačbo lahko s pomočjo enačbe ravnine preoblikujemo v:

$$\Delta = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}$$

v števcu lahko uprabimo absolutno vrednost s katero se znebimo predznaka, ki se pojavi v (1), ker je razdalja vedno pozitivna.

Razdaljo med ravnino Σ in točko R_1 lahko zapišemo tudi kot:

$$\Delta = d(R_1, \Sigma)$$

Če si pomagamo z že izpeljano implicitno enačbo ravnine, se lahko znebimo vektorjev in dobimo naslednjo enačbo:

$$d(R_1, \Sigma) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

kjer $\vec{OR}_1 = \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

2.3 Razdalja med mimobežnima premicama

p_1 : e_1 je smerni vektor; $R_1 \in p_1, r_1$

p_2 : e_2 je smerni vektor; $R_2 \in p_2, r_2$

Da sta premici mimobežni imamo dva pogoja:

- $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \neq \vec{0} (p_1 \nparallel p_2)$
- $p_1 \cap p_2 = \emptyset$ (ne sekata se)

$$d(p_1, p_2) = \min\{d(T_1, T_2) : T_1 \in p_1, T_2 \in p_2\}$$

Z pomočjo skice in premisleka opazimo, da je najmanjša razdalja takrat, ko $S_1 S_2 \perp p_1, p_2$. To pomeni:

$$\begin{aligned} S_1 \vec{S}_2 &\perp \vec{e}_1, \vec{e}_2 \\ S_1 \vec{S}_2 &= \lambda \vec{e}_1 \times \vec{e}_2, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tu je spet v veliko pomoč skica. Ideja je, da z vzporednim premikom premaknemo vektor \vec{e}_2 v izhodišče vektorja \vec{e}_1 . S tem lahko naredimo ravnino Σ_1 , ki jo tvorita ta dva vektorja. Nato naredimo ravnino Σ_2 na podoben način – z vzporednim premikom premaknemo vektor \vec{e}_1 v izhodišče vektorja \vec{e}_2 . Velja $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$. Ker sta si ravnini vzporedni lahko premico p_1 z vzporednim premikom premaknemo iz Σ_1 v Σ_2 in dobimo premico p_1^* , ki se seka s premico p_2 v točko S_2 . Podobno lahko premaknemo premico p_2 v ravnino Σ_1 in dobimo točko S_1 kjer se sekata p_1 in p_2^* . Opazimo, da je daljica S_1S_2 pravokotna na premici p_1 in p_2 in je tudi najkrajša razdalja med tema premicama. To pomeni, da je dolžina daljice S_1S_2 razdalja med premicama p_1 in p_2 .

Z nadaljnim premislekom in zelo natančno narisano skico opazimo, da vektorji \vec{e}_1, \vec{e}_2 in $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ tvorijo paralelepiped, katerega višina je enaka daljici S_1S_2 . To pomeni, da lahko uporabimo naše znanje o mešanem produktu in naredimo naslednje:

$$\begin{aligned} V &= |[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2]| \\ V &= |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| \cdot \Delta \end{aligned}$$

kjer je $\Delta = |S_1S_2|$.

To lahko izenačimo in dobimo:

$$\Delta = \frac{|[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2]|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}$$

3 Osnovne algebrske strukture

3.1 Preslikave in relacije

A, B sta neprazni množici.

Preslikavo, ki slika iz A v B lahko zapišemo kot $f : A \rightarrow B$ ali $A \xrightarrow{f} B$.

$\forall x \in A$ predpis f določi natanko en element, ki je iz množice B . Množici A rečemo domena (včasih tudi definicijsko območje), množici B pa rečemo kodomena. $f(x)$ pravimo slika elementa x . ($x \mapsto f(x)$)

Zaloga (vrednosti) preslikave $f : A \rightarrow B$ je množica $\{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.

$f : A \rightarrow B$ je *surjektivna* (surjekcija), kadar je njena zaloga B .

$$\forall y \in B \exists x \in A : y = f(x)$$

$f : A \rightarrow B$ je *injektivna* (injekcija), kadar velja sklep:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Za preverjanje uporabimo:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, x_1, x_2 \in A$$

$f : A \rightarrow B$ je *bijektivna* (bijekcija), kadar je injektivna in hkrati surjektivna. Če je $f : A \rightarrow B$ bijekcija, obstaja točno določena preslikava $g : B \rightarrow A$, da velja:

$$(\forall x \in A : g(f(x)) = x) \wedge (\forall y \in B : f(g(y)) = y)$$

Preslikavo $g : B \rightarrow A$ imenujemo *inverz* preslikave $f : A \rightarrow B$ in jo označimo z:

$$g = f^{-1}$$

Kompozitum preslikav $f : A \rightarrow B$ in $g : B \rightarrow C$ je:

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ ali } gf \\ g \circ f : A \rightarrow C \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

za vsak $x \in A$.

Preslikavo $A \rightarrow A$ imenujemo *identična preslikava* ali *identiteta*:

$$\begin{aligned} id_A : A \rightarrow A \\ \forall x \in A : id_A(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : A \rightarrow B \text{ bijekcija} \\ g : B \rightarrow A \\ g \circ f = id_A \\ f \circ g = id_B \end{aligned}$$

$f : A \rightarrow B$ je bijekcija in $g : B \rightarrow A$ je inverzana preslikava $f \iff (g \circ f = id_A \wedge f \circ g = id_B)$

Graf preslikave $f : A \rightarrow B$ je množica:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

$$G(f) \subseteq A \times B$$

Relacija med elementi množice A in elementi množice B je podmnožica množice $A \times B$.

$R \subseteq A \times B$ (R je relacija)

$(x, y) \in R \equiv xRy$

Primeri kjer $A = B$ (relacija $R \subseteq A \times A$ je *binarna relacija* na množici A).

(1) $A = \mathbb{R}$

R relacija na \mathbb{R} : \leq

$$(x, y) \in R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \iff x \leq y$$

$$R = \leq$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$$

(2) $A = \{p : p \text{ - premica v prostoru}\}$

R relacija vzporednosti

$$p, q \in A \quad pRq \equiv p \parallel q$$

(3) $M \neq \emptyset, \quad A = \mathcal{P}M$ R relacija *inkluzije* \subseteq

$$x, y \in A \quad (x \subseteq A, y \subseteq A)$$

$$xRy \equiv x \subseteq y$$

Definicije:

(1) Relacija R nad A je *refleksivna*, kadar velja xRx za vsak $x \in A$.

(2) Relacija R nad A je *tranzitivna*, kadar velja sklep:

$$(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

(3) Relacija R nad A je *antisimetrična*, kadar velja sklep:

$$(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$$

(4) Relacija R nad A je *simetrična*, kadar velja sklep:

$$xRy \Rightarrow yRx$$

(5) R je relacija *delne urejenosti*, kadar je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna ($R \equiv \leq$).

(6) R je relacija *ekvivalence* (ali ekvivalenčna relacija), kadar je refleksivna, simetrična in tranzitivna ($R \equiv \sim$).

Naj bo A neprazna množica, \sim ekvivalenčna relacija na A in $a \in A$.

$$[a] = \{x \in A : x \sim a\}$$

$[a]$ je *ekvivalenčni razred* elementa a .

$$a \sim a \Rightarrow a \in [a]$$

a je predstavnik tega ekvivalenčnega razreda.

$$[a] = [b]?$$

Predpostavimo $b \sim a$ (zaradi simetričnosti sledi $a \sim b$).

$$x \in [a] \Rightarrow x \sim a \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b]$$

Torej velja:

$$[a] \subseteq [b]$$

$$[b] \subseteq [a]$$

Zato $[a] = [b]$.

Velja tudi $[a] = [b] \Rightarrow a \sim b$

$$[a] = [b] \Rightarrow a \in [a] \Rightarrow a \in [b] \Rightarrow a \sim b$$

$$a \sim b \iff [a] = [b]$$

Naj velja $[a] \cap [b] \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} \exists c \in [a] \cap [b] \\ \Rightarrow c \sim a \wedge c \sim b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a] \cap [b] \neq \emptyset &\Rightarrow [a] = [b] \\ [a] \neq [b] &\Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset \end{aligned}$$

$A/\sim = \{[a] : a \in A\}$ je *kvocientna* ali *faktorska* množica glede na ekvivalenčno relacijo \sim .

$A = \cup[a]$ pravimo *razčlenitev* A -ja.

Primeri:

(1) $A = \{\overrightarrow{MN} : M, N - \text{točki v prostoru}\}$

\overrightarrow{MN} je usmerjena daljica

$\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{MN} \iff$ obstaja translacija, ki XY prenese v MN . \sim je ekvivalenčna relacija.

$$[\overrightarrow{MN}] = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{MN}\} = \overrightarrow{MN}$$

(2) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

$$\sim : (m, n) \sim (p, q) \iff mq = np$$

\sim je ekvivalenčna relacija

$$A/\sim = \mathbb{Q}$$

$$[(m, n)] = \{(p, q) : (p, q) \sim (m, n)\}$$

3.2 Operacije

$$M \neq \emptyset$$

Operacija na M je preslikava $M \times M \rightarrow M, (a, b) \mapsto a \circ b$

$a \circ b$ je *kompozitum* elementov a in b .

PRIMERI:

1) $M = \mathbb{N}$ ali \mathbb{Z} ali \mathbb{Q} ali \mathbb{R} .

\circ je lahko $+$ ali \cdot .

2) $A \neq \emptyset$

$$M = \{f : A \rightarrow A\} \equiv F(A)$$

\circ je kompozitum preslikav

M z dano operacijo \circ je *grupoid* (M, \circ) .

Zapis operacije brez znaka $(a, b) \mapsto ab$ je *multiplikativen* zapis operacije.

Imamo grupoid (M, \sim, \circ) . Radi bi prenesli \circ v M/\sim .

Operacija \circ je usklajena z ekvivalenčno relacijo \sim , kadar velja sklep:

$$(m_1 \sim m \wedge n_1 \sim n) \Rightarrow m_1 \circ n_1 \sim m \circ n$$

kjer $m, n, m_1, n_1 \in M$.

PRIMER: $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

\sim iz primera (2)

$$(p_1, q_1) \sim (p, q) \wedge (m_1, n_1) \sim (m, n) \Rightarrow (p_1, q_1) + (m_1, n_1) \sim (p, q) + (m, n) \\ (p, q) + (m, n) := (pn + mq, nq)$$

v $+$ iz $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ lahko prenesemo na $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\sim$.

(M, \sim, \circ) , \sim in \circ usklajeni.

V M/\sim lahko uvedemo operacijo $\tilde{\circ}$ s predpisom:

$$[a] \tilde{\circ} [b] = [a \circ b]$$

Definicija je dobra zaradi uklajenosti operacije \circ z relacijo \sim :

$$[a_1] = [a] \text{ in } [b_1] = [b] \Rightarrow [a_1 \circ b_1] \sim [a \circ b]$$

DEFINICIJE:

- (M, \circ) grupoid

$e \in M$ je *enota* ali *neutralni element* grupoida (M, \circ) kadar velja:

$$\forall a \in M : a \circ e = e \circ a = a$$

Če enota obstaja je ena sam

$e_1, e_2 \in M$ sta enoti. Sledi:

$$e_1 \circ e_2 = e_2$$

če upoštevamo da je e_1 enota,

$$e_1 \circ e_2 = e_1$$

če upoštevamo da je e_2 enota

$$\Rightarrow e_1 = e_2$$

□

- Grupoid (M, \circ) je *polgrupa*, kadar je opracije \circ *asociativna*:

$$\forall a, b, c \in M : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

V polgrupi oklepaji niso potrebni: $a \circ b \circ c$.

- Naj bo (M, \circ) polgrupa z enoto e .

Element $b \in M$ je *inverz* elementa $a \in M$, kadar velja:

$$a \circ b = b \circ a = e$$

Kadar ima element $a \in M$ inverz, pravimo, da je a *invertabilen* ali *obrnljiv*.

Če ima $a \in M$ inverz, je ta en sam

b_1, b_2 inverza elementa a .

$$a \circ b_1 = b_1 \circ a = e$$

$$a \circ b_2 = b_2 \circ a = e$$

$$\Rightarrow b_1 = b_1 \circ e = b_1 \circ (a \circ b_2) = (b_1 \circ a) \circ b_2 = e \circ b_2 = b_2$$

□

Če je $a \in M$ obrnljiv, njegov inverz zaznamujemo (v splošnem) z a^{-1} .

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

- Polgrupa z enoto, v kateri je vsak element obrnljiv se imenuje *grupa*.

Z multiplikativnim zapisom: (G, \circ) je grupa, kadar velja:

- (1) $\forall a, b, c \in G : (ab)c = a(bc)$
- (2) $\exists e \in G \forall a \in G : ae = ea = a$
- (3) $\forall a \in G \exists b \in G : ab = ba = e$

- (M, \circ) grupoid je *komutativen*, kadar velja:

$$\forall a, b \in M : a \circ b = b \circ a$$

PRIMERI:

- (1) $(\mathbb{N}, +)$ polgrupa brez enote (če $0 \notin \mathbb{N}$).
- (2) (\mathbb{N}, \cdot) polgrupa z enoto 1
- (3) $(\mathbb{Z}, +)$ grupa
- (4) (\mathbb{Z}, \cdot) polgrupa z enoto 1
- (5) $A \neq \emptyset, M = F(A) = \{f : A \rightarrow A\}$
 operacija: komponiranje preslikave
 (M, \circ) je polgrupa z enoto $e = id$
- (6) $M = S(A) = \{f : A \mapsto A, f \text{ je bijekcija}\}$
 (M, \circ) je grupa