Algebra 1

Vid Drobnič

Kazalo

1 Vektorji v trirazsežnem prostoru

$\mathcal{P}$ - prostor
$T \in \mathcal{P}$ - točka

$A, B \in \mathcal{P}$
$\overrightarrow{AB}$ - usmerjena daljica

Formalno: $\overrightarrow{AB} = (A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ (urejen par)

Ekvivalentnost usmerjenih daljic:

$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$, kadar je $\overrightarrow{AB}$ z vzporednim premikom mogoče premakniti v $\overrightarrow{CD}$.

- $|AB| = |CD|$ (dolžini daljic sta enaki)
- ista smer (če potegnemo premico čez izhodišca daljic (AC), morata biti točki B in D na istem "bregu" te premice)
- $AB \parallel CD$

$$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

Def: Vektor $\vec{AB}$ je množica $\vec{AB} = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}$ (usmerjene daljice ekvivalentne daljici $\overrightarrow{AB}$)

- ničelni vektor: $\vec{AA} = \vec{0}$
- nasprotni vektor vektorja $\vec{AB}$ je $\vec{BA}$ ($\vec{BA} = -\vec{AB}$)

Dodatna oznaka: $\vec{a}$, $-\vec{a}$ nasprotni vektor

$V = \{\vec{v} : \vec{v} \text{ vektor}\}$ - vektorski prostor.

$O \in \mathcal{P}$; O fiksiramo

$$f : \mathcal{P} \to V$$
$$f(T) = \vec{OT}$$

f je bijekcija (vsaki točki priredi natanko en vektor).
$\vec{a} = \vec{OT}$

1.1 Operacije z vektorji

Seštevanje:

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$
$$\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{BC}$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$$
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Lastnosti:[1]

(1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ asociativnost

(2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ komutativnost

(3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

(4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Za lastnosti od (1) do (4) = $(V, +)$ **Abelova grupa**.

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

Množenje s skalarjem

Skalar je realno število.

$$\vec{a}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha\vec{a}$ je vektor.

- ima isto smer kot $\vec{a}$ za $\alpha > 0$
- ima nasprotno smer kot $\vec{a}$ za $\alpha < 0$
- $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$

[1] Dokaz lastnosti (1) in (2) s skico.

$$\vec{a} = \vec{OA} \neq \vec{0}$$
$$\alpha\vec{a} = \vec{OT}, O, A, T \text{ so na isti premici}$$

S tem uvedemo koordinatni sistem na premici OA.

<u>Lastnosti:</u>

(5) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

(6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

(7) $\alpha(\vec{a}\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

(8) $1\vec{a} = \vec{a}$

$V, +$ in množenje s skalaji je **vektorski prostor**: veljajo lastnosti od (1) do (8).

1.2 Linearna neodvisnost

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

$\vec{a}, \vec{b}$ sta linearno odvisna kadar je:
bodisi $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ za ustrezen $\alpha \in \mathbb{R}$,
bodisi $\vec{a} = \beta\vec{b}$ za ustrezen $\beta \in \mathbb{R}$.

V nasprotnem primeru sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna.

$$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$$

1. $\vec{OA}$ in $\vec{OB}$ sta linearno odvisna $\Leftrightarrow$ O, A, B kolinearne (ližijo na isti premici).

2. $\vec{a}, \vec{b}$ sta linearno neodvisna $\Leftrightarrow$ $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$

Privzamemo da sta $\vec{a}, \vec{b}$ linearno neodvisna:

$$\{T : \vec{OT} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{R}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ - linearna kombinacija
$\mathcal{R}$ - ravnina določena z O, A, B (z vektorji $\vec{a}, \vec{b}$) in točko O.

$$\vec{r} = \vec{OT}, T \in \mathcal{R}$$
$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Pri tem sta α in β enolična določena skalarja.

V $\mathcal{R}$ smo z vektorjema $\vec{a}, \vec{b}$ vpeljali koordinatni sistem.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ so linearno odvisni, kadar je vsaj eden od njih linearna kombinacija drugih dveh.
npr: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

V nasprotnem primeru so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni.

1. $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$ so linearno odvisni $\Leftrightarrow O, A, B, C$ koplanarne (ležijo na isti ravnini)
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0)$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni

$\vec{a} = \vec{OA}$
$\vec{b} = \vec{OB}$
$\vec{c} = \vec{OC}$

$$V = \{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

V - množica vseh vektorjev prostora $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{R \in \mathcal{P} : \vec{OR} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

<u>Dodatek:</u> V zapisu vektorja $\vec{r} \in V$: $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, so koeficienti α, β, γ enolično določeni.

Dokaz:

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$
$$\vec{r} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$$
$$\Rightarrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$$
$$(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} + (\gamma - \gamma_1)\vec{c} = \vec{0}$$
$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ linearno neodvisni } \Rightarrow \alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1 = \gamma - \gamma_1 = 0$$
$$\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$$

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ je **baza** vektorskega prostora V. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni.

$R \in \mathcal{P}$ (O - fiksirana točka) $\vec{OR} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

$$R \mapsto (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, x \in \mathbb{R}\}$$

α, β, γ je z R enolično določena.
α, β, γ so koordinate točke R glede na koordinaten sistem, ki je določen z bazo $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ in točko O (izhodišče koordinatnega sistema).

Imena koordinat: dfabscisa, ordinata, aplikata

$$\varphi : V \to \mathbb{R}$$
$$\vec{r} \mapsto (\alpha, \beta, \gamma); \vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

φ je bijekcija.

S φ prenesemo operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorjev s skalarji iz V v $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{r_1}, \vec{r_2} \in V$$
$$\vec{r_1} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$$
$$\vec{r_2} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \gamma_2\vec{c}$$
$$\varphi(\vec{r_1}) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$$
$$\varphi(\vec{r_2}) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

$$\vec{r_1} + \vec{r_2} = (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 + \beta_2)\vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2)\vec{c}$$
$$\varphi(\vec{r_1} + \vec{r_2}) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$$

Torej velja:

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$$

seštevanje je definirano po komponentah.

Podobno velja za množenje s skalarji:

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$$

$\mathbb{R}^3$ je za te operaciji **vektorski prostor** (zadošča A1-A8).

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{a}) &= (1,0,0) \\ \varphi(\vec{b}) &= (0,1,0) \\ \varphi(\vec{c}) &= (0,0,1) \end{aligned}$$

$$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

je **standardna baza** vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$.

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$$

<u>Oznake:</u>

$$\begin{aligned} \vec{i} &= (1,0,0) \\ \vec{j} &= (0,1,0) \\ \vec{k} &= (0,0,1) \end{aligned}$$

Dodatna zahteva za standardno bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$: baza je **ortonormirana**, torej:

- $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ so paroma pravokotni.

1.3 Skalarni produkt

$\vec{a}, \vec{b} \in V$
Kot med njima je $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$

<u>Def:</u> $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$

V **identificiramo** z $\mathbb{R}^3$ (glede na standardno bazo in dano izhodišče O).

$$\begin{aligned} O &= (0,0,0) \\ \vec{i} &= (1,0,0) \\ \vec{j} &= (0,1,0) \\ \vec{k} &= (0,0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &=? \\ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) &= \vec{OA} \\ |\vec{a}| = |OA| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ d(A,B) &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} \end{aligned}$$

Kosinusni izrek:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$\Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

<u>Lastnosti:</u>

(1) $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$ (enačaj le za $\vec{a} = \vec{0}$)

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$

(3) $(\alpha\vec{a})\vec{b}=\alpha(\vec{a}\vec{b})$

(4) $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\varphi\frac{\pi}{2},\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$$
$$\varphi=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\cos\varphi=0(0\leq\varphi\leq\pi)$$
$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

Primer:

$$\mathbb{R}^3\equiv\mathbb{R}^2\times\{0\}$$
$$\vec{a}=(a_1,a_2,0)$$
$$\vec{a}\text{ v }\mathbb{R}^2:\vec{a}=(a_1,a_2)$$
$$\vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

p - ploščina paralelograma
p izraziti z a_1,a_2,b_1,b_2

$$p=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$$

$$\vec{a'}\perp\vec{a}$$
$$|\vec{a'}|=|\vec{a}|$$

$\vec{a},\vec{a'}$ pozitivno orientirana
$\vec{a'}=(-a_2,a_1)$
$\psi=\frac{\pi}{2}-\varphi$ ali $\varphi-\frac{\pi}{2}$ če je orienacija $(\vec{a},\vec{b})$ pozitivna.

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a'}\vec{b}=(-a2,a_1)\cdot(b_1,b_2)=a_1b_2-a_2b_1$$

$p=a_1b_2-a_2b_1$, če je orientacija $\vec{a},\vec{b}$ pozitivna, če pa je negativna velja: $p=-(a_1b_2-a_2b_1)$

1.4 Vektorski produkt

$$\vec{a}, \vec{b}$$
$$\vec{a} \times \vec{b}$$

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

(2) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$. ($= 0$, kadar sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna)

(3) Urejena trojica $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ je pozitivno orientirana.

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\
\vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\
\vec{a} \times \vec{b} &= (x, y, z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{k} &= (0, 0, 1) \\
z &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{k} = \\
&= |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{k}| \cos \delta = \\
&= p \cos \delta
\end{aligned}$$

p - ploščina paralelograma.
δ - kot med ravninama, ki ju določata osi (1),(2) in vektorja $\vec{a}, \vec{b}$.

$$\begin{aligned}
\vec{a'} &= (a_1, a_2, 0) \\
\vec{b'} &= (b_1, b_2, 0) \\
p' &= \pm(a_1 b_2 - a_2 b_1)
\end{aligned}$$

p' ima predznak $+$, kadar sta $\vec{a'}$ in $\vec{b'}$ pozitivno orientirana, ter $-$, kadar sta negativno orientirana.

$$p' = \pm p \cos \delta$$

+ kadar: $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$
− kadar: $\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \pi$

$$z = \pm p' = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$\pm$ se izniči, ker se predznak, ki nastane zaradi cos in predznak, ki nastane pri izračunu ploščine paralelograma z vektorjema ujemata.

$$x = a_2 b_3 - a_3 b_2$$
$$y = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

determinanta (reda 2)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Lastnosti:

- $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}), \forall a \in \mathbb{R}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

- $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$\vec{a}, \vec{b}$ linearno neodvisna $\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ je baza.

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b})$$

Poseben primer:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 (\vec{a} \perp \vec{b})$$

$\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ je ortonormirana baza.

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b}) / \cdot \vec{a} \text{ (ali } \vec{b}, \vec{c})$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{a} &= \alpha \\ \vec{r} \cdot \vec{b} &= \beta \\ \vec{r} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (|\vec{a} \times \vec{b}|)^2 &= (|\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi)^2 \\ (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (|\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi)^2 \\ \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

1.5 Mešani produkt

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Paralelepiped je prizma, ki ima za osnovno ploskev paralelogram. V - prostornina pralelepipeda

$$\begin{aligned} P &= |\vec{a} \times \vec{b}| \\ V &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot v \\ v &= \pm|\vec{c}| \cos\delta \\ V &= \pm|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos\delta = \\ &= \pm(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$$

$+$: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ pozitivno orienirani
$-$: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ negativno orientirani

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno odvisni $\Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$.

Orientacija se pri cikličnih zamenjavah ohrani:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{c} &= (c_1, c_2, c_3) \end{aligned}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 =$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \equiv a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

1.6 Dvojni vektorski produkt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{e} = ?$$

$$\begin{aligned} &\vec{e} \perp \vec{a} \times \vec{b} \\ &\vec{e} \perp \vec{c} \end{aligned}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ linearno neodvisna $\Rightarrow \vec{e} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.
$\vec{e} \cdot \vec{c} = 0$

$$\alpha(\vec{a}\vec{c}) + \beta(\vec{b}\vec{c}) = 0$$

$$\beta = \lambda\vec{a}\vec{c}$$
$$\alpha = -\lambda\vec{b}\vec{c}$$

$$\vec{e} = \lambda(\vec{b}\vec{c})\vec{a} + \lambda(\vec{a}\vec{c})\vec{b}$$
$$\vec{e} = \lambda(-(\vec{b}\vec{c})\vec{a} + (\vec{a}\vec{c})\vec{b})$$

Če razpišemo po komponentah dobimo $\lambda = 1$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -(\vec{b}\vec{c})\vec{a} + (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$$

2 Analitična geomterija v $\mathbb{R}^3$

2.1 Premica

p podan s točko R_0 na njej in *smernim vektorjem* $\vec{e}$.

$\vec{r_0} = \vec{OR_0} = (x_0, y_0, z_0)$
$R \in p$
$\vec{r} = \vec{OR} = (x, y, z)$

Koorinatizirali smo premico.

$$\vec{R_0R} = \vec{r} - \vec{r_0}$$
$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{e}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Enačba premice p (vektorska parametrična) (λ je paramter)

$$\vec{e} = (a, b, c)$$

$$x = x_0 + \lambda a$$
$$y = y_0 + \lambda b$$
$$z = z_0 + \lambda c$$

(Parametrična) enačba premice.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

enačba premice (brez parametra)

$a = 0$?

$$\frac{x - x_0}{0} \equiv (x = x_0 \text{ ali a}x - x_0 = 0)$$

Podobno za $b = 0$ in $c = 0$.

$\vec{R_0R}, \vec{e}$ linearno odvisna $\Leftrightarrow R \in p$

To je kadar: $\vec{R_0R} \times \vec{e} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r_0}) \times \vec{e} = \vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r_0}) = \vec{0}$
(vektorska enačba premice)

Če imamo točko R_1 izven premice, je razdalja med premico p in to točko enaka:

$$\Delta = |\vec{r_1} - \vec{r_0}| \sin \varphi$$

To enačbo lahko preoblikujemo da dobimo:

$$\Delta = \frac{|\vec{e} \times (\vec{r_1} - \vec{r_0})|}{|\vec{e}|}$$

To je posebej ugodno, kadar $|\vec{e}| = 1$, saj iz tega sledi $\Delta = |\vec{e} \times (\vec{r_1} - \vec{r_0})|$.

Razdaljo med točko in premico lahko zapišemo tudi kot: $\Delta = d(R_1, p)$.

2.2 Ravnina

Da določimo ravnino Σ, potrebujemo točko $R_0 \in \Sigma$ in vektor normale $\vec{n}$, kjer $\vec{n} \perp \Sigma$ in $\vec{n} \neq \vec{0}$.

Da določimo kdaj točka leži na ravnini zapišemo:

$$R \in \Sigma \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r_0} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

To pomeni da nam ravnino Σ določa enačba:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

Če zapišemo vektorje $\vec{r_0}, \vec{r}$ in $\vec{n}$ kot:

$$\begin{aligned} \vec{r_0} &= (x_0, y_0, z_0) \\ \vec{r} &= (x, y, z) \\ \vec{n} &= (a, b, c) \end{aligned}$$

lahko zapišemo enačbo ravnine kot:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

To enačbo lahko naprej pretvorimo v *implicitno obliko*:

$$ax + by + cz + d = 0$$

kjer je $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Če imamo podane točke R_0, R_1 in R_2, lahko izračunamo vektor normale kot:

$$\vec{n} = (\vec{r_1} - \vec{r_0}) \times (\vec{r_2} - \vec{r_0})$$

če to vstavimo v en"acbo ravnine, dobimo da lahko ravnino Σ zapišemo kot:

$$((\vec{r_1} - \vec{r_0}) \times (\vec{r_2} - \vec{r_0})) \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

Opazimo, da nam ta enačba predstavlja mešani produkt kar lahko zapišemo z determinanto reda 3:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

kjer je vektor $\vec{r_n}$ zapisan kot: $\vec{r_n} = (x_n, y_n, z_n)$.

Če imamo točko R_1, ki ni na ravnini, lahko zapišemo razdaljo te točke do ravnine kot:

$$\Delta = \pm|\vec{r_1} - \vec{r_0}| \cos\varphi \tag{1}$$

To enačbo lahko s pomočjo enačbe ravnine preoblikujemo v:

$$\Delta = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r_1} - \vec{r_0})|}{|\vec{n}|}$$

v števcu lahko uprabimo absolutno vrednost s katero se znebimo predznaka, ki se pojavi v (1), ker je razdalja vedno pozitivna.

Razdaljo med ravnino Σ in točko R_1 lahko zapišemu tudi kot:

$$\Delta = d(R_1, \Sigma)$$