

Algebra 1

Vid Drobnič

Kazalo

1	Vektorji v trirazsežnem prostoru	4
1.1	Operacije z vektorji	5
1.2	Linearna neodvisnost	6
1.3	Skalarni produkt	10
1.4	Vektorski produkt	11
1.5	Mešani produkt	14
1.6	Dvojni vektorski produkt	15
2	Analitična geomterija v \mathbb{R}^3	15
2.1	Premica	15
2.2	Ravnina	16
2.3	Razdalja med mimobežnima premicama	18
3	Osnovne algebrske strukture	19
3.1	Preslikave in relacije	19
3.2	Operacije	23
3.3	Grupe	24
3.4	Abelove grupe	34
3.5	Homomorfizmi	38
3.6	Kolobar	41
4	Vektorski prostori	43
4.1	Nekaj osnovnih lastnosti vektorskih prostorov	45
4.2	Vektorski podprostor	45

4.3	Linearna ogrinjača	47
4.4	Kvocietni vektorski prostor	49
4.5	Linearne preslikave	50
4.5.1	Slika in jedro linearnih preslikav	51
4.6	Vektorski prostor linearnih preslikav	53
4.7	Končno razsežni vektorski prostori	55
4.8	Linearne preslikave na končno razsežnih V.P.	64
4.8.1	Poseben primer	65
4.8.2	Splošna situacija	68
4.8.3	Množenje matrik	70
4.8.4	Poseben primer	70
4.8.5	Rang linearne preslikave in matrike	71
4.8.6	Sistemi linearnih enačb	76
4.8.7	Gaussov algoritem za reševanje sistema	78
4.8.8	Simultano reševanje sistemov z isto matriko koeficientov	80
4.8.9	Sprememba baze	80
4.8.10	Ekivalentnost matrik	82
4.8.11	Podobnost matrik	84
4.8.12	Diagonalne matrike in diagonalizacija	85
4.8.13	Iskanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev	87
4.8.14	Determinante	88
4.8.15	Lastnosti determinante	92
4.8.16	Determinanta endomorfizma	97
4.8.17	Karakteristični polinom in minimalni polinom	98

4.8.18	Invariantni podprostor	103
4.8.19	Endomorfizmi z eno samo lastno vrednostjo	106
4.8.20	Funkcije matrik	109
4.9	Vektorski prostori s skalarnim produktom	111
4.9.1	Koti:	113
4.9.2	Linearne preslikave na vektorskih prostorih s skalarnim produktom	121
4.9.3	Hermitsko adjungirani endomorfizmi	122
4.9.4	Prehod na matrike	125
4.9.5	Normalni endomorfizmi	126
4.9.6	Matrična verzija	129
4.9.7	Unitarni endomorfizmi	131
4.9.8	Sebi adjungirani endomorfizmi	133
4.9.9	Pozitivno semidefinitni endomorfizmi	135
4.9.10	Bilinearni in kvadratni funkcionali	138

5 Krivulje drugega reda

141

1 Vektorji v trirazsežnem prostoru

\mathcal{P} - prostor

$T \in \mathcal{P}$ - točka

$A, B \in \mathcal{P}$

\overrightarrow{AB} - usmerjena daljica

FORMALNO: $\overrightarrow{AB} = (A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ (urejen par)

Ekvivalentnost usmerjenih daljic:

$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$, kadar je \overrightarrow{AB} z vzporednim premikom mogoče premakniti v \overrightarrow{CD} .

- $|AB| = |CD|$ (dolžini daljic sta enaki)
- imata isto smer (če potegnemo premico čez izhodišča daljic (AC), morata biti točki B in D na istem "bregu" te premice)
- $AB \parallel CD$ (premici skozi točke sta vzporedni)

$$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

DEF: Vektor \vec{AB} je množica $\vec{AB} = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}$ (usmerjene daljice ekvivalentne daljici \overrightarrow{AB})

- ničelni vektor: $\vec{AA} = \vec{0}$
- nasprotni vektor vektorja \vec{AB} je \vec{BA} ($\vec{BA} = -\vec{AB}$)

Dodatna oznaka: $\vec{a}, -\vec{a}$ nasprotni vektor

$V = \{\vec{v} : \vec{v} \text{ vektor}\}$ - vektorski prostor.

$O \in \mathcal{P}$; O fiksiramo (izberemo si neko točko v prostoru, ki jo fiksiramo)

$$f : \mathcal{P} \rightarrow V$$

$$f(T) = \vec{OT}$$

f je bijekcija (vsaki točki priredi natanko en vektor).

$$\vec{a} = \vec{OT}$$

1.1 Operacije z vektorji

Seštevanje:

$$\begin{aligned}\vec{a}, \vec{b} &\in V \\ \vec{a} &= \vec{AB}, \vec{b} = \vec{BC} \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{AC} \\ \vec{AB} + \vec{BC} &= \vec{AC}\end{aligned}$$

LASTNOSTI:¹

- (1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ asociativnost
- (2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ komutativnost
- (3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- (4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Za lastnosti od (1) do (4) $(V, +)$ **Abelova grupa**.

Razliko dveh vektorjev definiramo tako:

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

Množenje s skalarjem

Skalar je realno število.

$$\vec{a}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha\vec{a}$ je vektor.

- ima isto smer kot \vec{a} za $\alpha > 0$
- ima nasprotno smer kot \vec{a} za $\alpha < 0$
- $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$

¹Dokaz lastnosti (1) in (2) s skico.

$$\vec{a} = \vec{OA} \neq \vec{0}$$

$$\alpha\vec{a} = \vec{OT}, O, A, T \text{ so na isti premici}$$

S tem uvedemo koordinatni sistem na premici OA .

LASTNOSTI:

$$(5) \quad \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

$$(6) \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$(7) \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$(8) \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$V, +$ in množenje s skalaji je **vektorski prostor**: veljajo lastnosti od (1) do (8).

1.2 Linearna neodvisnost

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

\vec{a}, \vec{b} sta linearno odvisna kadar je:

bodisi $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ za ustrezen $\alpha \in \mathbb{R}$,

bodisi $\vec{a} = \beta\vec{b}$ za ustrezen $\beta \in \mathbb{R}$.

V nasprotnem primeru sta \vec{a} in \vec{b} linearno neodvisna.

$$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$$

1. \vec{OA} in \vec{OB} sta linearno odvisna $\Leftrightarrow O, A, B$ kolinearne (ležijo na isti premici).

2. \vec{a}, \vec{b} sta linearno neodvisna $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$

Privzamemo da sta \vec{a}, \vec{b} linearno neodvisna:

$$\{T : \vec{OT} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{R}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ - linearna kombinacija

\mathcal{R} - ravnina določena z O, A, B (z vektorji \vec{a}, \vec{b}) in točko O .

$$\vec{r} = \vec{OT}, T \in \mathcal{R}$$

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Pri tem sta α in β enolično določena skalarja.

V \mathcal{R} smo z vektorjema \vec{a}, \vec{b} vpeljali koordinatni sistem.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ so linearno odvisni, kadar je vsaj eden od njih linearna kombinacija drugih dveh.

npr: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

V nasprotnem primeru so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni.

1. $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$ so linearno odvisni $\Leftrightarrow O, A, B, C$ koplanarne (ležijo na isti ravnini)

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0)$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni

$$\vec{a} = \vec{OA}$$

$$\vec{b} = \vec{OB}$$

$$\vec{c} = \vec{OC}$$

$$V = \{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

V - množica vseh vektorjev prostora \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{R \in \mathcal{P} : \vec{OR} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

DODATEK: V zapisu vektorja $\vec{r} \in V$: $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, so koeficienti α, β, γ enolično določeni.

DOKAZ: Recimo, da lahko vektor \vec{r} izrazimo na 2 različna načina:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \\ \vec{r} &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\ \Rightarrow \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\ (\alpha - \alpha_1) \vec{a} + (\beta - \beta_1) \vec{b} + (\gamma - \gamma_1) \vec{c} &= \vec{0} \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ linearno neodvisni} &\Rightarrow \alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1 = \gamma - \gamma_1 = 0 \\ \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1\end{aligned}$$

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ je **baza** vektorskega prostora V . $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni.

$R \in \mathcal{P}$ (O - fiksirana točka) $\vec{OR} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$

$$R \mapsto (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Urejena trojica (α, β, γ) je s točko R enolično določena.

α, β, γ so koordinate točke R glede na koordinaten sistem, ki je določen z bazo $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ in točko O (izhodišče koordinatnega sistema).

Imena koordinat: abscisa, ordinata, aplikata

$$\begin{aligned}\varphi : V &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{r} &\mapsto (\alpha, \beta, \gamma); \vec{r} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}\end{aligned}$$

φ je bijekcija.

S φ prenesemo operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorjev s skalarji iz V v \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}\vec{r}_1, \vec{r}_2 &\in V \\ \vec{r}_1 &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\ \vec{r}_2 &= \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b} + \gamma_2 \vec{c} \\ \varphi(\vec{r}_1) &= (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \\ \varphi(\vec{r}_2) &= (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \\ \vec{r}_1 + \vec{r}_2 &= (\alpha_1 + \alpha_2) \vec{a} + (\beta_1 + \beta_2) \vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2) \vec{c} \\ \varphi(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) &= (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)\end{aligned}$$

Torej velja:

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$$

seštevanje je definirano po komponentah.

Podobno velja za množenje s skalarji:

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$$

\mathbb{R}^3 je za te operaciji **vektorski prostor** (zadošča A1-A8).

$$\varphi(\vec{a}) = (1, 0, 0)$$

$$\varphi(\vec{b}) = (0, 1, 0)$$

$$\varphi(\vec{c}) = (0, 0, 1)$$

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

je **standardna baza** vektorskega prostora \mathbb{R}^3 .

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

OZNAKE:

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

Dodatna zahteva za standardno bazo vektorskega prostora \mathbb{R}^3 : baza je **ortonormirana**, torej:

- $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ so paroma pravokotni.

Opomba: Po dogovoru je trojica $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pozitivno orientirana (pri določanju orientacije si v 3D koordinatnem sistemu pomagamo z pravilom desnega vijaka).

1.3 Skalarni produkt

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

Kot med njima je $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\text{DEFINICIJA } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

V **identificiramo**² z \mathbb{R}^3 (glede na standardno bazo in dano izhodišče O).

$$O = (0, 0, 0)$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \vec{OA}$$

$$|\vec{a}| = |OA| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Kosinusni izrek:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$\Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

LASTNOSTI:

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0 \text{ (enačaj le za } \vec{a} = \vec{0})$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

²Prej smo vse izpeljevali za splošen vektorski prostor, sedaj pa za V vzamemo \mathbb{R}^3 .

$$(3) \quad (\alpha \vec{a}) \vec{b} = \alpha(\vec{a} \vec{b})$$

$$(4) \quad \vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \\ \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

PRIMER:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\equiv \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ \vec{a} &= (a_1, a_2, 0) \\ \vec{a} \text{ v } \mathbb{R}^2 : \vec{a} &= (a_1, a_2) \\ \vec{a} \vec{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

p - ploščina paralelograma

p si želimo izraziti z a_1, a_2, b_1, b_2

$$p = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \vec{a}' &\perp \vec{a} \\ |\vec{a}'| &= |\vec{a}| \end{aligned}$$

\vec{a}, \vec{a}' pozitivno orientirana

$$\vec{a}' = (-a_2, a_1)$$

$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ali $\varphi - \frac{\pi}{2}$ če je orientacija (\vec{a}, \vec{b}) pozitivna.

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \vec{a}' \vec{b} = (-a_2, a_1) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$p = a_1 b_2 - a_2 b_1$, če je orientacija \vec{a}, \vec{b} pozitivna, če pa je negativna velja:

$$p = -(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

1.4 Vektorski produkt

Vzamemo vektorja \vec{a}, \vec{b} iz prostora. Njun vektorski produkt označimo:

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na \vec{a} in \vec{b} .
- (2) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga določata \vec{a} in \vec{b} . ($= 0$, kadar sta \vec{a} in \vec{b} linearno odvisna)
- (3) Urejena trojica $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ je pozitivno orientirana.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{a} \times \vec{b} &= (x, y, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{k} &= (0, 0, 1) \\ z &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{k} = \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{k}| \cos \delta = \\ &= p \cos \delta\end{aligned}$$

p - ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja \vec{a} in \vec{b}
 δ - kot med ravninama, ki ju določata osi (1),(2) in vektorja \vec{a}, \vec{b} .

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= (a_1, a_2, 0) \\ \vec{b}' &= (b_1, b_2, 0) \\ p' &= \pm(a_1 b_2 - a_2 b_1)\end{aligned}$$

p' je ploščina paralelograma, ki ga določata pravokotni projekciji vektorjev \vec{a} in \vec{b} na ravnino (\vec{i}, \vec{j}) , tj. ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja \vec{a}' in \vec{b}' .

p' ima predznak $+$, kadar sta \vec{a}' in \vec{b}' pozitivno orientirana, ter $-$, kadar sta negativno orientirana.

$$p' = \pm p \cos \delta$$

$+$ kadar: $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$
 $-$ kadar: $\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \pi$

$$z = \pm p' = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

\pm se izniči, ker se predznak, ki nastane zaradi \cos in predznak, ki nastane pri izračunu ploščine paralelograma z vektorjema ujemata.

$$\begin{aligned}x &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ y &= a_3 b_1 - a_1 b_3\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

determinanta (reda 2)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Lastnosti:

- $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

\vec{a}, \vec{b} linearno neodvisna $\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ je baza.

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b})$$

Poseben primer:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 (\vec{a} \perp \vec{b})$$

$\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ je ortonormirana baza.

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b}) / \cdot \vec{a} \text{ (ali } \vec{b}, \vec{c})$$

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = \alpha$$

$$\vec{r} \cdot \vec{b} = \beta$$

$$\vec{r} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \gamma$$

$$\begin{aligned}
(|\vec{a} \times \vec{b}|)^2 &= (|\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi)^2 \\
(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi)^2 \\
\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2
\end{aligned}$$

1.5 Mešani produkt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Paralelepiped je prizma, ki ima za osnovno ploskev paralelogram. V - prostornina paralelepipeda

$$\begin{aligned}
P &= |\vec{a} \times \vec{b}| \\
V &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot v \\
v &= \pm |\vec{c}| \cos \delta \\
V &= \pm |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \delta = \\
&= \pm (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \pm V
\end{aligned}$$

+: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ pozitivno orientirani

–: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ negativno orientirani $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno odvisni $\Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = 0$.

Orientacija se pri cikličnih zamenjavah ohrani:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} &= (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} = \vec{a} (\vec{b} \times \vec{c}) \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} &= \vec{a} (\vec{b} \times \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]
\end{aligned}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \equiv a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

1.6 Dvojni vektorski produkt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{e} = ?$$

$$\vec{e} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{e} \perp \vec{c}$$

\vec{a}, \vec{b} linearno neodvisna $\Rightarrow \vec{e} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$.

$$\vec{e} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\alpha(\vec{a}\vec{c}) + \beta(\vec{b}\vec{c}) = 0$$

$$\beta = \lambda \vec{a}\vec{c}$$

$$\alpha = -\lambda \vec{b}\vec{c}$$

$$\vec{e} = \lambda(\vec{b}\vec{c})\vec{a} + \lambda(\vec{a}\vec{c})\vec{b}$$

$$\vec{e} = \lambda(-(\vec{b}\vec{c})\vec{a} + (\vec{a}\vec{c})\vec{b})$$

Če razpišemo po komponentah dobimo $\lambda = 1$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -(\vec{b}\vec{c})\vec{a} + (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$$

2 Analitična geometrija v \mathbb{R}^3

2.1 Premica

p podana s točko R_0 na njej in *smernim vektorjem* \vec{e} .

$$\vec{r}_0 = \vec{OR}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$R \in p$$

$$\vec{r} = \vec{OR} = (x, y, z)$$

Koordinatizirali smo premico.

$$\vec{R_0R} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{e}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Enačba premice p (vektorska parametrična) (λ je parameter)

$$\vec{e} = (a, b, c)$$

$$x = x_0 + \lambda a$$

$$y = y_0 + \lambda b$$

$$z = z_0 + \lambda c$$

(Parametrična) enačba premice.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

enačba premice (brez parametra)

$a = 0$?

$$\frac{x - x_0}{0} \equiv (x = x_0 \text{ ali } ax - x_0 = 0)$$

Podobno za $b = 0$ in $c = 0$.

$R_0 \vec{R}, \vec{e}$ linearno odvisna $\Leftrightarrow R \in p$

To je kadar: $R_0 \vec{R} \times \vec{e} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{e} = \vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0}$
(vektorska enačba premice)

Če imamo točko R_1 izven premice, je razdalja med premico p in to točko enaka:

$$\Delta = |\vec{r}_1 - \vec{r}_0| \sin \varphi$$

To enačbo lahko preoblikujemo da dobimo:

$$\Delta = \frac{|\vec{e} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{e}|}$$

To je posebej ugodno, kadar $|\vec{e}| = 1$, saj iz tega sledi $\Delta = |\vec{e} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|$.

Razdaljo med točko in premico lahko zapišemo tudi kot: $\Delta = d(R_1, p)$.

2.2 Ravnina

Da določimo ravnino Σ , potrebujemo točko $R_0 \in \Sigma$ in vektor normale \vec{n} , kjer $\vec{n} \perp \Sigma$ in $\vec{n} \neq \vec{0}$.

Da določimo kdaj točka leži na ravnini zapišemo:

$$R \in \Sigma \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

To pomeni da nam ravnino Σ določa enačba:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Če zapišemo vektorje \vec{r}_0, \vec{r} in \vec{n} kot:

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= (x_0, y_0, z_0) \\ \vec{r} &= (x, y, z) \\ \vec{n} &= (a, b, c)\end{aligned}$$

lahko zapišemo enačbo ravnine kot:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

To enačbo lahko naprej pretvorimo v *implicitno obliko*:

$$ax + by + cz + d = 0$$

kjer je $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Če imamo podane točke R_0, R_1 in R_2 , lahko izračunamo vektor normale kot:

$$\vec{n} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)$$

če to vstavimo v enačbo ravnine, dobimo da lahko ravnino Σ zapišemo kot:

$$((\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Opazimo, da nam ta enačba predstavlja mešani produkt kar lahko zapišemo z determinanto reda 3:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

kjer je vektor \vec{r}_n zapisan kot: $\vec{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$.

Če imamo točko R_1 , ki ni na ravnini, lahko zapišemo razdaljo te točke do ravnine kot:

$$\Delta = \pm |\vec{r}_1 - \vec{r}_0| \cos \varphi \quad (1)$$

To enačbo lahko s pomočjo enačbe ravnine preoblikujemo v:

$$\Delta = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}$$

v števcu lahko uprabimo absolutno vrednost s katero se znebimo predznaka, ki se pojavi v (1), ker je razdalja vedno pozitivna.

Razdaljo med ravnino Σ in točko R_1 lahko zapišemo tudi kot:

$$\Delta = d(R_1, \Sigma)$$

Če si pomagamo z že izpeljano implicitno enačbo ravnine, se lahko znebimo vektorjev in dobimo naslednjo enačbo:

$$d(R_1, \Sigma) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

kjer $\vec{OR}_1 = \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

2.3 Razdalja med mimobežnima premicama

p_1 : e_1 je smerni vektor; $R_1 \in p_1, r_1$

p_2 : e_2 je smerni vektor; $R_2 \in p_2, r_2$

Da sta premici mimobežni imamo dva pogoja:

- $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \neq \vec{0} (p_1 \nparallel p_2)$
- $p_1 \cap p_2 = \emptyset$ (ne sekata se)

$$d(p_1, p_2) = \min\{d(T_1, T_2) : T_1 \in p_1, T_2 \in p_2\}$$

Z pomočjo skice in premisleka opazimo, da je najmanjša razdalja takrat, ko $S_1 S_2 \perp p_1, p_2$. To pomeni:

$$\begin{aligned} S_1 \vec{S}_2 &\perp \vec{e}_1, \vec{e}_2 \\ S_1 \vec{S}_2 &= \lambda \vec{e}_1 \times \vec{e}_2, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tu je spet v veliko pomoč skica. Ideja je, da z vzporednim premikom premaknemo vektor \vec{e}_2 v izhodišče vektorja \vec{e}_1 . S tem lahko naredimo ravnino Σ_1 , ki jo tvorita ta dva vektorja. Nato naredimo ravnino Σ_2 na podoben način – z vzporednim premikom premaknemo vektor \vec{e}_1 v izhodišče vektorja \vec{e}_2 . Velja $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$. Ker sta si ravnini vzporedni lahko premico p_1 z vzporednim premikom premaknemo iz Σ_1 v Σ_2 in dobimo premico p_1^* , ki se seka s premico p_2 v točko S_2 . Podobno lahko premaknemo premico p_2 v ravnino Σ_1 in dobimo točko S_1 kjer se sekata p_1 in p_2^* . Opazimo, da je daljica S_1S_2 pravokotna na premici p_1 in p_2 in je tudi najkrajša razdalja med tema premicama. To pomeni, da je dolžina daljice S_1S_2 razdalja med premicama p_1 in p_2 .

Z nadaljnim premislekom in zelo natančno narisano skico opazimo, da vektorji \vec{e}_1, \vec{e}_2 in $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ tvorijo paralelepiped, katerega višina je enaka daljici S_1S_2 . To pomeni, da lahko uporabimo naše znanje o mešanem produktu in naredimo naslednje:

$$\begin{aligned} V &= |[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2]| \\ V &= |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| \cdot \Delta \end{aligned}$$

kjer je $\Delta = |S_1S_2|$.

To lahko izenačimo in dobimo:

$$\Delta = \frac{|[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2]|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}$$

3 Osnovne algebrske strukture

3.1 Preslikave in relacije

A, B sta neprazni množici.

Preslikavo, ki slika iz A v B lahko zapišemo kot $f : A \rightarrow B$ ali $A \xrightarrow{f} B$.

$\forall x \in A$ predpis f določi natanko en element, ki je iz množice B . Množici A rečemo domena (včasih tudi definicijsko območje), množici B pa rečemo kodomena. $f(x)$ pravimo slika elementa x . ($x \mapsto f(x)$)

Zaloga (vrednosti) preslikave $f : A \rightarrow B$ je množica $\{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.

$f : A \rightarrow B$ je *surjektivna* (surjekcija), kadar je njena zaloga B .

$$\forall y \in B \exists x \in A : y = f(x)$$

$f : A \rightarrow B$ je *injektivna* (injekcija), kadar velja sklep:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Za preverjanje uporabimo:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, x_1, x_2 \in A$$

$f : A \rightarrow B$ je *bijektivna* (bijekcija), kadar je injektivna in hkrati surjektivna. Če je $f : A \rightarrow B$ bijekcija, obstaja točno določena preslikava $g : B \rightarrow A$, da velja:

$$(\forall x \in A : g(f(x)) = x) \wedge (\forall y \in B : f(g(y)) = y)$$

Preslikavo $g : B \rightarrow A$ imenujemo *inverz* preslikave $f : A \rightarrow B$ in jo označimo z:

$$g = f^{-1}$$

Kompozitum preslikav $f : A \rightarrow B$ in $g : B \rightarrow C$ je:

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ ali } gf \\ g \circ f : A \rightarrow C \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

za vsak $x \in A$.

Preslikavo $A \rightarrow A$ imenujemo *identična preslikava* ali *identiteta*:

$$\begin{aligned} id_A : A \rightarrow A \\ \forall x \in A : id_A(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : A \rightarrow B \text{ bijekcija} \\ g : B \rightarrow A \\ g \circ f = id_A \\ f \circ g = id_B \end{aligned}$$

$f : A \rightarrow B$ je bijekcija in $g : B \rightarrow A$ je inverzana preslikava $f \iff (g \circ f = id_A \wedge f \circ g = id_B)$

Graf preslikave $f : A \rightarrow B$ je množica:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

$$G(f) \subseteq A \times B$$

Relacija med elementi množice A in elementi množice B je podmnožica množice $A \times B$.

$R \subseteq A \times B$ (R je relacija)

$(x, y) \in R \equiv xRy$

Primeri kjer $A = B$ (relacija $R \subseteq A \times A$ je *binarna relacija* na množici A).

(1) $A = \mathbb{R}$

R relacija na \mathbb{R} : \leq

$$(x, y) \in R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \iff x \leq y$$

$$R = \leq$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$$

(2) $A = \{p : p \text{ - premica v prostoru}\}$

R relacija vzporednosti

$$p, q \in A \quad pRq \equiv p \parallel q$$

(3) $M \neq \emptyset, \quad A = \mathcal{P}M$ R relacija *inkluzije* \subseteq

$$x, y \in A \quad (x \subseteq A, y \subseteq A)$$

$$xRy \equiv x \subseteq y$$

Definicije:

(1) Relacija R nad A je *refleksivna*, kadar velja xRx za vsak $x \in A$.

(2) Relacija R nad A je *tranzitivna*, kadar velja sklep:

$$(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

(3) Relacija R nad A je *antisimetrična*, kadar velja sklep:

$$(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$$

(4) Relacija R nad A je *simetrična*, kadar velja sklep:

$$xRy \Rightarrow yRx$$

(5) R je relacija *delne urejenosti*, kadar je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna ($R \equiv \leq$).

(6) R je relacija *ekvivalence* (ali ekvivalenčna relacija), kadar je refleksivna, simetrična in tranzitivna ($R \equiv \sim$).

Naj bo A neprazna množica, \sim ekvivalenčna relacija na A in $a \in A$.

$$[a] = \{x \in A : x \sim a\}$$

$[a]$ je *ekvivalenčni razred* elementa a .

$$a \sim a \Rightarrow a \in [a]$$

a je predstavnik tega ekvivalenčnega razreda.

$$[a] = [b]?$$

Predpostavimo $b \sim a$ (zaradi simetričnosti sledi $a \sim b$).

$$x \in [a] \Rightarrow x \sim a \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b]$$

Torej velja:

$$[a] \subseteq [b]$$

$$[b] \subseteq [a]$$

Zato $[a] = [b]$.

Velja tudi $[a] = [b] \Rightarrow a \sim b$

$$[a] = [b] \Rightarrow a \in [a] \Rightarrow a \in [b] \Rightarrow a \sim b$$

$$a \sim b \iff [a] = [b]$$

Naj velja $[a] \cap [b] \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} \exists c \in [a] \cap [b] \\ \Rightarrow c \sim a \wedge c \sim b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a] \cap [b] \neq \emptyset &\Rightarrow [a] = [b] \\ [a] \neq [b] &\Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset \end{aligned}$$

$A/\sim = \{[a] : a \in A\}$ je *kvocientna* ali *faktorska* množica glede na ekvivalenčno relacijo \sim .

$A = \cup[a]$ pravimo *razčlenitev* A -ja.

Primeri:

(1) $A = \{\overrightarrow{MN} : M, N - \text{točki v prostoru}\}$

\overrightarrow{MN} je usmerjena daljica

$\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{MN} \iff$ obstaja translacija, ki XY prenese v MN . \sim je ekvivalenčna relacija.

$$[\overrightarrow{MN}] = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{MN}\} = \vec{MN}$$

(2) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

$$\sim : (m, n) \sim (p, q) \iff mq = np$$

\sim je ekvivalenčna relacija

$$A/\sim = \mathbb{Q}$$

$$[(m, n)] = \{(p, q) : (p, q) \sim (m, n)\}$$

3.2 Operacije

$$M \neq \emptyset$$

Operacija na M je preslikava $M \times M \rightarrow M, (a, b) \mapsto a \circ b$

$a \circ b$ je *kompozitum* elementov a in b .

PRIMERI:

1) $M = \mathbb{N}$ ali \mathbb{Z} ali \mathbb{Q} ali \mathbb{R} .

◦ je lahko $+$ ali \cdot .

2) $A \neq \emptyset$

$$M = \{f : A \rightarrow A\} \equiv F(A)$$

◦ je kompozitum preslikav

M z dano operacijo ◦ je *grupoid* (M, \circ) .

Zapis operacije brez znaka $(a, b) \mapsto ab$ je *multiplikativen* zapis operacije.

Imamo grupoid (M, \sim, \circ) . Radi bi prenesli ◦ v M/\sim .

Operacija ◦ je usklajena z ekvivalenčno relacijo \sim , kadar velja sklep:

$$(m_1 \sim m \wedge n_1 \sim n) \Rightarrow m_1 \circ n_1 \sim m \circ n$$

kjer $m, n, m_1, n_1 \in M$.

PRIMER: $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

\sim iz primera (2)

$$(p_1, q_1) \sim (p, q) \wedge (m_1, n_1) \sim (m, n) \Rightarrow (p_1, q_1) + (m_1, n_1) \sim (p, q) + (m, n) \\ (p, q) + (m, n) := (pn + mq, nq)$$

v $+$ iz $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ lahko prenesemo na $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\sim$.

(M, \sim, \circ) , \sim in ◦ usklajeni.

V M/\sim lahko uvedemo operacijo $\tilde{\circ}$ s predpisom:

$$[a] \tilde{\circ} [b] = [a \circ b]$$

Definicija je dobra zaradi uklajenosti operacije ◦ z relacijo \sim :

$$[a_1] = [a] \text{ in } [b_1] = [b] \Rightarrow [a_1 \circ b_1] = [a \circ b]$$

3.3 Grupe

DEFINICIJE:

- (M, \circ) grupoid

$e \in M$ je *enota* ali *neutralni element* grupoida (M, \circ) kadar velja:

$$\forall a \in M : a \circ e = e \circ a = a$$

Če enota obstaja je ena sam

$e_1, e_2 \in M$ sta enoti. Sledi:

$$e_1 \circ e_2 = e_2$$

če upoštevamo da je e_1 enota,

$$e_1 \circ e_2 = e_1$$

če upoštevamo da je e_2 enota

$$\Rightarrow e_1 = e_2$$

□

- Grupoid (M, \circ) je *polgrupa*, kadar je opracije \circ *asociativna*:

$$\forall a, b, c \in M : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

V polgrupi oklepaji niso potrebni: $a \circ b \circ c$.

- Naj bo (M, \circ) polgrupa z enoto e .

Element $b \in M$ je *inverz* elementa $a \in M$, kadar velja:

$$a \circ b = b \circ a = e$$

Kadar ima element $a \in M$ inverz, pravimo, da je a *invertabilen* ali *obrnljiv*.

Če ima $a \in M$ inverz, je ta en sam

b_1, b_2 inverza elementa a .

$$a \circ b_1 = b_1 \circ a = e$$

$$a \circ b_2 = b_2 \circ a = e$$

$$\Rightarrow b_1 = b_1 \circ e = b_1 \circ (a \circ b_2) = (b_1 \circ a) \circ b_2 = e \circ b_2 = b_2$$

□

Če je $a \in M$ obrnljiv, njegov inverz zaznamujemo (v splošnem) z a^{-1} .

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

- Polgrupa z enoto, v kateri je vsak element obrnljiv se imenuje *grupa*.

Z multiplikativnim zapisom: (G, \circ) je grupa, kadar velja:

$$(1) \quad \forall a, b, c \in G : (ab)c = a(bc)$$

$$(2) \quad \exists e \in G \forall a \in G : ae = ea = a$$

$$(3) \quad \forall a \in G \exists b \in G : ab = ba = e$$

- (M, \circ) grupoid je *komutativen*, kadar velja:

$$\forall a, b \in M : a \circ b = b \circ a$$

PRIMERI:

(1) $(\mathbb{N}, +)$ polgrupa brez enote (če $0 \notin \mathbb{N}$).

(2) (\mathbb{N}, \cdot) polgrupa z enoto 1

(3) $(\mathbb{Z}, +)$ grupa

(4) (\mathbb{Z}, \cdot) polgrupa z enoto 1

(5) $A \neq \emptyset, M = F(A) = \{f : A \rightarrow A\}$

operacija: komponiranje preslikave

(M, \circ) je polgrupa z enoto $e = id$

(6) $M = S(A) = \{f : A \mapsto A, f \text{ je bijekcija}\}$

(M, \circ) je grupa

Prejšen primer lahko nekoliko spremenimo in dobimo:

$$A = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$S(A) \equiv S_n$$

S_n je *simetrična grupa*.

$$\pi \in S_n$$

$$\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

Če preslikamo vse elemente s preslikavo π dobimo:

$$\{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$$

Pravimo, da je π *permutacija* in jo zapišemo kot:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Zapis $\pi(k)$ je raltivno dolg, zato ga skrajšamo na:

$$\pi(k) = i_k$$

S tem lahk permutacijo π zapišemo kot:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

Zelo lahko je izplejati, da S_n ima $n!$ elementov.

Ker so permutacije elementi grupe, ki ima za operacijo komponiranje preslikav (kompozitum), lahko z njimi računamo. Poglejmo si primer:

$$\begin{aligned} \rho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kjer $\rho, \sigma \in S_3$

$$\begin{aligned} \rho\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \sigma\rho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Opazimo, da $\rho\sigma \neq \sigma\rho$.

Poglejmo si, kako lahko v grupi krajšamo. Naj bo (G, \cdot) grupa.

$$\begin{aligned} ab &= ac \\ a^{-1}(ab) &= a^{-1}(ac) \\ (a^{-1}a)b &= (a^{-1}a)c \\ eb &= ec \\ b &= c \end{aligned}$$

Pozorni moramo biti na vrstni red, ker v grupi ni obvezno da velja komutativnost. Pri tem primeru smo na obeh straneh enačbe a imeli na levi strani.

Analogno bi lahko pravilo krajšanja izpeljali, če bi bil a na desni strani, vendar ne če je na eni strani enačbe desni, na drugi pa levi člen. To pomeni da v grupi vlejajo naslednje trditve:

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

$$ab = ca \nRightarrow b = c$$

$$b \neq c \Rightarrow ab \neq ac$$

GRUPA S TREMI ELEMENTI JE SAMO ENA

Naj bo G grupa s tremi elementi.

$$G = \{e, a, b\}$$

kjer je e enota.

Zapišimo naslednjo tabelo:

	e	a	b
e			
a			
b			

Prva vrstica in prvi stolpec sta trivialna, saj imamo na eni strani enoto. Tabelo lahko dopolnimo in dobimo:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

Potrebujemo premisliti drugo vrstico. Vemo že, da $ae = a$, potrebujemo pa se odločiti, kaj bomo zapisali pri aa in pri ab .

Zgoraj smo zapisali pravilo, ki nam pravi naslednje: $b \neq c \Rightarrow ab \neq ac$. V grupi so trije različni elementi, to pomeni: $e \neq a \neq b \Rightarrow ae \neq aa \neq ab$. Drugače povedano, v vsaki vrstici bo vsak element nastopil natanko enkrat in tudi v vsakem stolpcu bo vsak element nastopil natanko enkrat. To si lahko predstavljamo kot nekakšen sudoku.

Če se vrnemo na prejšnji problem - odločitev kaj je aa in kaj ab . Sedaj vemo da imamo dve možnosti:

1) $ab = b \Rightarrow a = e \rightarrow \leftarrow$ ni možno, ker bi potem a bil enota, vemo pa da mora biti različen od enote.

2) $ab = e$

Torej se odločimo da bo veljalo $ab = e$. Za aa nam torej ostane samo ena možnost, to je: $aa = b$. Tabelo lahko še nekoliko dopolnimo:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b		

Za izpolniti nam ostane samo še ba in bb . Zapisali smo že, da se mora v vsaki vrstici vsak element nahajati natanko enkrat. Torej lahko samo dopolnimo tabelo do konca in dobimo:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Definirajmo potence. To bomo naredili podobno kot pri analizi. Za pozitivne cele eksponente torej velja:

$$\begin{aligned} aa &= a^2 \\ aaa &= a^3 \\ \underbrace{aa \dots a}_n &= a^n \end{aligned}$$

Za negativne cele eksponente velja podobno:

$$\begin{aligned} a^{-1}a^{-1} &= a^{-2} \\ a^{-1}a^{-1}a^{-1} &= a^{-3} \\ \underbrace{a^{-1}a^{-1} \dots a^{-1}}_n &= a^{-n} \end{aligned}$$

Definirati moramo še a^0 . To naredimo na sledeč način:

$$a^0 \equiv e$$

Sedaj lahko zapišemo G kot $G = \{e, a, a^2\}$. Vemo tudi, da $a^3 = e$.

Primer take je grupe je podmnožica kompleksnih števil kjer je opracija množenje:

$$\begin{aligned} G &\subseteq \mathbb{C} \\ G &= \{1, a, a^2\} \\ a &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Za katerikoli n obstaja grupa. Zgornji grupi G pravimo tudi *ciklična grupa*.

DEFINICIJA transpozicije:

Naj bosta $j, k \in \{1, \dots, n\}, j \neq k$

$$\begin{aligned} \tau &\in S_n \\ \tau(j) &= k \\ \tau(k) &= j \\ \tau(i) &= i \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j, k\} \end{aligned}$$

τ je *transpozicija*.

Vsaka permutacija je kompozitum samih transpozicij.

PRIMER:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Lahko si naredimo diagram, kjer v vsakem koraku premaknemo en element na pravo mesto. Začnemo z 1, nato 2 in tako naprej. Nato samo komponiramo transpozicije, ki smo jih uporabili. Skica takega postopka je v zvezku. Če je ni, potem lahko poizkusiš izumiti toplo vodo, lahko pa vprašaš kakšnega študenta, ki je bolj priden od tebe in ima to skico v zvezku. Torej lahko permutacijo π zapišemo kot kompozitum transpozicij na naslednj način:

$$\pi = (4, 5)(2, 4)(1, 3)$$

Strategija velja v vsaki simetrični grupi S_n . Zelo lahko je opzaiti, da lahko vsako permutacijo zapišemo kot kompozitum največ $n - 1$ transpozicij.

Definirajmo inverzijo. Naj bo

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n \\ &1 \leq j < k \leq n \end{aligned}$$

DEFINICIJA: Par (j, k) tvori *inverzijo* v permutaciji π , kadar v vrstici i_1, i_2, \dots, i_n k nastopa pred j (z leve proti desni). Drugače povedano: indeks mesta elementa i_k je manjši od indeksa elementa i_j .

$$\text{inv}\pi = \text{število inverzij v } \pi$$

PRIMER:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Inverzije v π so:

$$\begin{aligned} &(1, 3), (1, 5) \\ &(2, 3), (2, 5) \\ &(4, 5) \end{aligned}$$

$$\text{inv}\pi = 5$$

Definirajmo naslednjo funkcijo:

$$s(\pi) = (-1)^{\text{inv}\pi} = \begin{cases} 1 & \pi \text{ ima sodo inverzij} \\ -1 & \pi \text{ ima liho inverzij} \end{cases}$$

Pravimo da:

$$\pi \text{ je soda} \iff s(\pi) = 1$$

$$\pi \text{ je liha} \iff s(\pi) = -1$$

TRDITEV: Naj bo $\tau \in S_n$ transpozicija. Potem $\forall \rho \in S_n$ velja:

$$s(\tau\rho) = -s(\rho)$$

DOKAZ:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

$$1) \tau = (i_k, i_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \text{inv}(\tau\rho) &= \text{inv}(\rho) \pm 1 \\ \Rightarrow s(\tau\rho) &= -s(\rho) \end{aligned}$$

$$2) \tau(i_k, i_{k+p}), p > 1$$

τ dosežemo s produktom transpozicij podobni tisti v primeru (1). To pomeni, da najprej element i_k premikamo v desno proti i_{k+p} , vsakič za

eno mesto, nato pa še element i_{k+p} premikamo nazaj na prvotno mesto elementa i_k . Če znamo vsaj malo algoritmov, se lahko spomnimo na bubble sort. Za ostale, ki ne znajo algoritmov pa obstaja skica, ki se žal ponovno nahaja samo v zvezku in domišljiji bralca.

Torej potrebujemo p transpozicij, da premakno element i_k na mesto elementa i_{k+p} . V tem trenutku, je i_{k+p} , že premaknjen eno mesto proti ciljni poziciji, zato potrebujemo samo še $p - 1$ transpozicij, da ga damo na mesto elementa i_k . Torej je skupno število potrebnih transpozicij:

$$p + p - 1 = 2p - 1$$

Vemo, da se na vsakem koraku predznak permutacije zamenja, zato velja:

$$s(\tau\rho) = (-1)^{2p-1}s(\rho) = -s(\rho)$$

saj je $2p - 1$ liho število. □

IZREK: Naj bo $\pi \in S_n$ in naj velja:

$$\pi = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$$

kjer so τ_i transpozicije.

Potem je π soda (oziroma liha) natanko takrat, kadar je število k sodo (oziroma liho).

DOKAZ: $s(e) = 1$ kjer je $e = id_{\{1, \dots, n\}}$ enota grupa S_n . Z uporabo prejšnje trditve lahko naredimo naslednje:

$$\begin{aligned} s(\pi) &= s(\underbrace{\tau_1}_{\tau} \underbrace{\tau_2 \dots \tau_k}_{\rho} e) = \\ &= (-1)s(\tau_2 \dots \tau_k e) = (-1)^2 s(\tau_3 \dots \tau_k e) = \dots \\ &= (-1)^k s(e) = (-1)^k \end{aligned}$$

Naj bo $A_n = \{\pi \in S_n : \pi \text{ soda}\}$, $e \in A_n$

$$(1) \quad \rho, \sigma \in A_n \Rightarrow \rho\sigma \in A_n$$

ρ, σ zapišemo kot produkt samih transpozicij. Nato uporabimo prejšnji izrek.

Opomba: to velja samo za sode permutacije. Produkt 2 lihih permutacij je soda permutacija.

$$(2) \rho \in A_n \Rightarrow \rho^{-1} \in A_n$$

$$\begin{aligned}\rho &= \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{k-1} \tau_k \\ \rho^{-1} &= \tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_2 \tau_1\end{aligned}$$

kjer τ_i transpozicija in k je sodo.

$$\rho \rho^{-1} = \tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_2 \tau_1 \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{k-1} \tau_k$$

Ker je S_n grupa velja asociativnost, torej lahko začnemo v sredini: $\tau_1 \tau_1 = e$, nato $\tau_2 \tau_2 = e$ in tako naprej.

$A_n \subseteq S_n, e \in A_n$. Torej je A_n zaprta za množenje in zaprta za invertiranje. Zato je A_n grupa. Pravimo ji *alternirajoča grupa*.

Naj bo τ transpozicija, $\rho \in A_n \Rightarrow \tau \rho$ je liha

Naj bosta $\rho_1 \rho_2 \in A_n, \rho_1 \neq \rho_2$. Sledi $\tau \rho_1 \neq \tau \rho_2$.

$n > 1$ število lihih permutacij je enako številu sodih permutacij. Torej ima A_n $\frac{n!}{2}$ elementov.

DEFINIRAJMO podgrupo:

Naj bo (G, \cdot) grupa in $H \subseteq G, H \neq \emptyset$. H naj izpolnjuje pogoja:

$$(1) a, b \in H \Rightarrow ab \in H$$

Temu pravimo *zaprtost za množenje*

$$(2) a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

Temu pravimo *zaprtost za invertiranje*

Potem je H za operacijo iz G grupa.

$$\begin{aligned}a \in H &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} a^{-1} \in H \\ a, a^{-1} \in H &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} e = aa^{-1} \in H\end{aligned}$$

e enota grupa G leži v H in je enota v H . Pravimo, da je H *podgrupa* grupe G .

PRIMERI:

- (1) A_n je podgrupa S_n
- (2) G grupa, G je podgrupa v G .
 $\{e\}$ je *trivialna podgrupa* G
- (3) (G, \cdot) je grupa

$$\begin{aligned}
 a &\in G \\
 H &= \{a^m; m \in \mathbb{Z}\} \\
 H &= \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, a^3, \dots\}
 \end{aligned}$$

H je najmanjša podgrupa grupe G , ki vsebuje a .

$$H \equiv \langle a \rangle$$

Recimo, da velja $a^{m_1} = a^{m_2}$ za celi števili $m_1 < m_2$.

$$\begin{aligned}
 a^m a^{-m_1} &= a^{m_2} a^{-m_1} = a^{m_2 - m_1} \\
 k &= m_2 - m_1 \in \mathbb{N}, k \geq 1 \\
 \exists k \in \mathbb{N} : a^k &= e
 \end{aligned}$$

Naj bo $k \in \mathbb{N}$ najmanjše naravno število, ki izpolnjuje pogoj $a^k = e$. Pona-
 vljal se bo vzorec:

$$e, a, a^2, \dots, a^{k-1}$$

in veja:

$$\begin{aligned}
 a^{k+1} &= a^k a = a \\
 a^{k+2} &= a^k a^2 = a^2
 \end{aligned}$$

$$H = \{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$$

H ima k elementov. Pravimo, da je H *ciklična grupa reda* k .

3.4 Ablove grupe

Pravimo jim tudi *komutativne grupe*.

$(G, +)$ je grupa in je komutativna:

$$\forall a, b \in G : a + b = b + a$$

PRIMERI: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$

Naj bo (G, \cdot) grupa (ne nujno komutativna).

$$a \in G, \langle a \rangle = \{a^m : m \in \mathbb{Z}\}$$

$\langle a \rangle$ je abelova grupa:

$$a^i a^j = a^{i+j} = a^j a^i$$

Oznake v abelovi grupi:

- 0 -enota Abelove grupe
- $-a$ nasprotni element od a
- $\underbrace{a + a + \dots + a}_{n, n \in \mathbb{N}} \equiv na, n \in \mathbb{N}$
- $(-n)a \equiv -(na) = \underbrace{(-a) + (-a) + \dots + (-a)}_n, n \in \mathbb{N}$
- $0a \equiv 0$

Opomba: na levi strani je 0 število 0, na desni pa je enota grupe

- $a, b \in GG$

$$a - b \equiv a + (-b)$$

Naj bo $(G, +)$ Abelova grupa in $H \subseteq G, H \neq \emptyset, H$ podgrupa

$$(1) \ a, b \in H \Rightarrow a + b \in H$$

$$(2) \ a \in H \Rightarrow -a \in H$$

$$(1) \ \& \ (2) \iff (a, b \in H \Rightarrow a - b \in H)$$

PRIMER: $(G, +) = (\mathbb{Z}, +)$, $+$ je običajno seštevanje.

$$n \in \mathbb{N}$$

$$H = \{kn : k \in \mathbb{Z}\} = \{m \in \mathbb{Z} : n|m\}$$

H je podgrupa grupe $(\mathbb{Z}, +)$ in je množica večkratnikov n . Pišemo:

$$H \equiv n\mathbb{Z}$$

Naj bo $(G, +)$ Abelova grupa, $H \subseteq G$, H podgrupa.

$$a, b \in G : a \sim b \stackrel{\text{def}}{\iff} a - b \in H$$

\sim je ekvivalenčna relacija

(1) *refleksivnost*: $\forall a \in G : a \sim a$

$$a \sim a \iff \underbrace{a - a}_{\text{enota } H} \in H$$

(2) *simetričnost* $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

$$a \sim b \Rightarrow a - b \in H \Rightarrow b - a = -(a - b) \in H$$

Dokazati je potrebno korak $b - a = -(a - b)$:

$$(b - a) + (a - b) = b + (-a) + a + (-b) = 0$$

(3) *tranzitivnost* $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

$$a - b \in H$$

$$b - c \in H$$

Po definiciji $a, b \in H : a + b \in H$, torej v našem primeru:

$$(a - b) + (b - c) = b - c \in H \Rightarrow a \sim c$$

□

Seštevanje in ekvivalenčna relacija \sim sta usklajeni: $x \sim a, y \sim b \Rightarrow x + y \sim a + b$

$$x - a \in H$$

$$y - b \in H$$

Po definiciji relacije potrebuje veljati: $(x + y) - (a + b) \in H$

$$(x + y) - (a + b) = \underbrace{x - a}_{\in H} + \underbrace{y - b}_{\in H} \in H$$

□

Zato lahko operacijo $+$ prenesemo na kvocientno množico:

$$G/\sim = \{[a] : a \in G\}$$

$$\forall a, b \in G : [a] + [b] = [a + b]$$

$(G/\sim, +)$ je Abelova grupa

Opomba: $+$ je operacija med ekvivalenčnimi razredi in je različna od operacije med elementi

OZNAKA: G/H (namesto G/\sim , ker \sim definiramo s pomočjo H)

Komutativnost in asociativnost se hitro preveri. Za enoto vzamemo $[0]$. Nasprotni element definiramo kot $-[a] = [-a]$

Naj bo $(G, +)$ Abelova grupa in H njena podgrupa. Velja:

$$G/H = \{[q] : q \in G\}$$

$$[q] = \{x \in G : x - q \in H\} = \{q + h : h \in H\}$$

Uvedemo novi oznaki:

$$[q] \equiv q + H$$

$$[0] = H$$

PRIMER: $G = \mathbb{Z}$ z običajnim seštevanjem. Naj bo $n \in \mathbb{N}$; $H = n\mathbb{Z}$ podgrupa \mathbb{Z} . Ekvivalenčni razred torej zaznamujemo kot:

$$[m] = m + n\mathbb{Z}$$

Če si narišemo skico za npr. $n = 4$ opazimo, da je $[0] = [4]$ Torej je kvocientna grupa:

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

V splošnem zapišemo:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$$

To da je m v nekem ekvivalenčnem razredu, lahko povemo kot:

$$m \in [j], j \in 0, 1, \dots, n \iff m \text{ pri deljenju z } n \text{ da ostanek } j$$

Običajno skrajšamo zapis in pišemo:

$$[j] \equiv j$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}_n$$

Pravimo, da je \mathbb{Z}_n grupa ostankov pri deljenju z n . To lahko narišemo v tabelo. Poglejmo si, kako bi izgledala tabela za grupo

$$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

Tabela 1: Tabela za \mathbb{Z}_4

+	1	2	3
1	2	3	0
2	3	0	1
3	0	1	2

3.5 Homomorfizmi

DEFINICIJA: Naj bosta $(G_1, \circ), (G_2, \circ)$ grupoida. Preslikava $f : G_1 \rightarrow G_2$ je *homomorfizem*, kadar velja:

$$\forall x, y \in G_1 : f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$$

Z besedami: “Slika kompozituma je kompozitum slik”.

Če je $G_2 = G_1$ in $f : G_1 \rightarrow G_2$ homomorfizem, potem je f *endomorfizem*.

DEFINICIJA: Preslikava $f : G_1 \rightarrow G_2$ je *izomorfizem*, kadar je f bijektivna in sta f ter f^{-1} homomorfizma.

TRDITEV: Bijektven homomorfizem je izomorfizem.

DOKAZ: Naj bo $f : G_1 \rightarrow G_2$ bijektiven homomorfizem, kjer sta G_1 in G_2 grupoida. Trdimo, da je $f^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$ homomorfizem. Naj bosta $u, v \in G_2$. Ker je f surjektivna velja: $u = f(x)$ in $v = f(y)$. Torej lahko zapišemo:

$$f^{-1}(u \circ v) = f^{-1}(f(x) \circ f(y)) = f^{-1}(f(x \circ y)) = x \circ y = f^{-1}(u) \circ f^{-1}(v)$$

Zadnji enačaj velja, ker je f injektivna. □

PRIMERI:

(1) $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$, (G, \circ) grupa, $a \in G$. Predpis f definiramo kot $f(m) = a^m$.

f je homomorfizem med grupama $(\mathbb{Z}, +)$ in (G, \circ)

$$f(m_1 + m_2) = a^{m_1+m_2} = a^{m_1}a^{m_2} = f(m_1)f(m_2)$$

G nadomestimo s podgrupo $\langle a \rangle = \{a^m, m \in \mathbb{Z}\}$ in ohranimo isti predpis:

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \langle a \rangle$$

f je surjektiven homomorfizem.

Opazimo, da je f izomorfizem natanko takrat, ko $\langle a \rangle$ ni končna:

$$a^{m_1} = a^{m_2} \Rightarrow m_1 = m_2$$

(2) $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow C_n$ kjer:

$$C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$$

imamo $(C_n, \circ), (\mathbb{Z}_n, +)$. Predpis od f definiramo kot:

$$f(j) = z_0^j, z_0 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

f je homomorfizem

$$f(j+k) = z_0^{j+k} = z_0^j z_0^k = f(j)f(k)$$

f je surjekcija in injekcija $\Rightarrow f$ je izomorfizem.

(3) $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^+, \circ)$, kjer:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

$$f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \circ)$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Predpis definiramo kot:

$$f(x) = 2^x$$

f je homomorfizem

$$f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x 2^y = f(x)f(y)$$

f je bijekcija z inverzom:

$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$

Torej je f izomorfizem.

TRDITEV: Kompozitum (dveh) homomorfizmov je homomorfizem. Kompozitum izomorfizmov je izomorfizem.

DOKAZ:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x \circ y) &= \\ &= f(g(x \circ y)) = f(g(x) \circ g(y)) = f(g(x)) \circ f(g(y)) = \\ &= (f \circ g)(x) \circ (f \circ g)(y)\end{aligned}$$

Naj bosta G_1, G_2 grupi z multiplikativnim zapisom in $f : G_1 \rightarrow G_2$ homomorfizem. Potem velja:

- (1) f enoto grupe G_1 preslika v enoto grupe G_2
- (2) $\text{im} f = \{f(x) : x \in G_1\}$ (zaloga vrednosti) je podgrupa v G_2 ³
- (3) $\ker f = \{x \in G_1 : f(x) = e_2\}$ (e_2 je enota grupe G_2) je podgrupa v G_1 ⁴

DOKAZ: e_1 enota G_1 , e_2 enota G_2

- (1) $f(e_1) = f(e_2)$

$$f(e_1) = f(e_1 e_1) = f(e_1) f(e_1)$$

Označimo

$$f(e_1) = x \in G_2$$

Dobili smo:

$$\begin{aligned}x &= xx \\ xx^{-1} &= (xx)x^{-1} = x(xx^{-1})\end{aligned}$$

Torej:

$$e_2 = x$$

Sklep: $f(e_1) = e_2$

□

- (2) $\text{im} f$ je podgrupa G_2

Naj bosta $u, v \in \text{im} f$. Velja:

$$\exists x, y \in G_1 : u = f(x), v = f(y)$$

³ $\text{im} f$ je slika (image) od f

⁴ $\ker f$ je jedro (kernel) od f

Velja:

$$uv = f(x)f(y) = f(xy)$$

Torej $uv \in \text{im} f$.

Podgrupa potrebuje tudi zaprtost za invertiranje:

$$\underline{u \in \text{im} f \Rightarrow u^{-1} \in \text{im} f}$$

$$u = f(x) \Rightarrow f(x^{-1}) = u^{-1}$$

To je potrebno še dokazati in naj bi bilo doma za vajo. Iz tega sledi:

$$u^{-1} \in \text{im} f$$

3.6 Kolobar

DEFINICIJA: Kolobar je množica K skupaj z operacijama $+$ in \cdot na K . ($+$ je seštevanje, \cdot je množenje), kadar je $(K, +)$ Abelova grupa, (K, \cdot) je podgrupa. Operaciji povezujeta distributivnostna zakona:

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(b + c)a = ba + ca$$

PRIMERI:

(1) Številski kolobarji $(+, \cdot)$ običajni operaciji

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$$

(2) $\mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}$ Kolobar ostankov pri deljenju z n

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Množenje definiramo podobno kot seštevanje:

$$i, j \in \mathbb{Z}_n; ij = k - \text{ostanek pri deljenju običajnega produkta } ij \text{ z } n$$

Primer množenja v \mathbb{Z}_6 :

$$3 \cdot 5 = 3$$

$$3 \cdot 4 = 0$$

$$(3) \quad K = \mathbb{R}^2$$

$$\oplus \quad (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

$$\odot \quad (x, y) \cdot (u, v) = (xu, xv)$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ je kolobar.

$$(4) \quad K = \mathbb{R}^3$$

$$\oplus \quad (x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w)$$

$$\odot \quad (x, y, z) \cdot (u, v, w) = (xu, xv + yw, zw)$$

$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ je kolobar.

$$(5) \quad M \neq \emptyset, K = \{f : M \rightarrow R\} = \mathbb{R}^M$$

$$\oplus \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \forall x \in M (f, g \in K)$$

$$\odot \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \forall x \in M (f, g \in K)$$

Opomba: Pravimo, da operaciji definiramo po točkah.

K je *kolobar z enoto* (ali *enico*) e , kadar je e enota za množenje.

$$\forall a \in K : ea = ae = a$$

K je *komutativen kolobar*, kadar je množenje komutativno.

$$\forall a, b \in K : ab = ba$$

PRIMERI: (nanašajo se na primere za kolobarje)

	ima enoto	komutativen
1	✓	✓
2	✓	✓
3	✗	✗
4	✗	✓
5	✓	✓

DEFINICIJA: Naj bo $(K, +, \cdot)$ kolobar in $a, b \in K \setminus \{0\}$. Če velja $ab = 0$, sta a in b *delitelja nič*. Pravimo, da je a *levi delitelj nič* in b *desni delitelj nič*.

DEFINICIJA: Kolobar z enoto (enko) 1 je *obseg*, kadar je $1 \neq 0$ in vsak $a \in K \setminus \{0\}$ obrnljiv (v polgrupi (K, \cdot)). S simbolnim zapisom je to:

$$\forall a \in K \setminus \{0\} \exists b \in K : ab = ba = 1$$

Posledica je, da je $(K \setminus \{0\}, +, \cdot)$ grupa.

PRIMERI:

- (1) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ za običajna $+$ in \cdot .
- (2) \mathbb{Z}_n je obseg, kadar je n praštevilo.

Naj bo \mathcal{O} obseg in $a, b, c \in \mathcal{O}$. Linearne enačbe lahko rešujemo na naslednji način:

$$ax + b = c$$

predpostavimo $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$$\begin{aligned} ax &= c - b \\ a^{-1}ax &= a^{-1}(c - b) \\ x &= a^{-1}(c - b) \end{aligned}$$

Ker komutativnost ni obvezna, moramo biti pozorni iz katere smeri pomnožimo enačbo z a^{-1} .

DEFINICIJA: Naj bosta K_1 in K_2 kolobarja. Preslikava $f : K_1 \rightarrow K_2$ je homomorfizem kolobarjev, kadar za vse $a, b \in K_1$ velja:

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + f(b) \\ f(ab) &= f(a)f(b) \end{aligned}$$

Če je $f : K_1 \rightarrow K_2$ bijektiven homomorfizem kolobarjev, je $f^{-1} : K_2 \rightarrow K_1$ homomorfizem kolobarjev. V tem primeru je f izomorfizem med kolobarjema K_1 in K_2 .

4 Vektorski prostori

DEFINICIJA: *Vektorski prostor* na obsegu \mathcal{O} je Abelova grupa $(V, +)$ skupaj z *zunanjo operacijo*

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

ki ustreza naslednjim pogojem:

1. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}, \forall v \in V$
2. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ $\forall \alpha \in \mathcal{O}, \forall u, v \in V$
3. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}, \forall v \in V$
4. $1v = v$ $\forall v \in V$

Elemente iz \mathcal{O} imenujemo *skalarji*, elemente iz V imenujemo *vektorji*, zunanjo operacijo pa imenujemo *množenje z skalarji*.

PRIMER:

- (1) $V = \mathbb{R}^3, \mathcal{O} = \mathbb{R}$ običajen trirazsežen vektorski prostor
- (2) $V = \mathcal{O}^n, \mathcal{O}$ - obseg

Naj bosta x in y naslednja vektorja:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}^n (x_i \in \mathcal{O} \forall i) \\ y &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{O}^n (y_i \in \mathcal{O} \forall i) \end{aligned}$$

Operaciji definiramo sledeče:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathcal{O}^n \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in \mathcal{O}^n \end{aligned}$$

Za ti dve operaciji je \mathcal{O}^n vektorski prostor na obsegom \mathcal{O} . Ničelni element je

$$0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathcal{O}^n$$

Nasprotni element je:

$$-(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathcal{O}^n$$

- (3) $M \neq \emptyset \quad \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^M = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}\}$

Operaciji definiramo po točkah:

$$\begin{aligned} (\alpha f)(t) &= \alpha f(t) & \forall t \in M (\alpha \in \mathbb{R}) \\ (f + g)(t) &= f(t) + g(t) & \forall t \in M \end{aligned}$$

$$V = \mathbb{R}^M, \mathcal{O} = \mathbb{R}$$

V je vektorski prostor nad \mathbb{R} .

4.1 Nekaj osnovnih lastnosti vektorskih prostorov

Naj bo V vektorski prostor nad \mathcal{O} . Velja:

$$(1) \quad 0v = 0 \qquad \qquad \qquad \forall v \in V$$

$$(2) \quad \alpha 0 = 0 \qquad \qquad \qquad \forall \alpha \in \mathcal{O}$$

$$(3) \quad \alpha v = 0 \Rightarrow (\alpha = 0 \vee v = 0)$$

$$(4) \quad (-1)v = -v \qquad \qquad \qquad \forall v \in V$$

DOKAZ:

(1)

$$\begin{aligned} 0v = x \in V &\Rightarrow \\ x + x &= 0v + 0v = (0 + 0)v = 0v = x \\ &\Rightarrow x + x = x \Rightarrow x = 0 \\ &\Rightarrow 0v = 0 \end{aligned}$$

(2) Podoben dokaz kot za (1).

(3) $\alpha v = 0$. Če $\alpha = 0$ optem velja (2). Drugače:

$$\begin{aligned} \alpha \neq 0 &\Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in \mathcal{O} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}0 = 0 \\ &\quad \underbrace{(\alpha^{-1}\alpha)}_1 v = 1v = v \\ &\Rightarrow v = 0 \end{aligned}$$

(4)

$$(-1)v + v = (-1)v + 1v = (-1 + 1)v = 0v = 0$$

4.2 Vektorski podprostor

DEFINICIJA: Naj bo V vektorski prostor nad \mathcal{O} in $U \subseteq V, U \neq \emptyset$. U je vektorski poprostor vektorskega prostora V , kadar velja:

$$(1) \ x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$$

$$(2) \ x \in U \Rightarrow \alpha x \in U \qquad \forall \alpha \in \mathcal{O}$$

Obe zahtevi lahko združimo v eno:

$$(1) \wedge (2) \iff (x, y \in U \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in U : \alpha x + \beta y \in U)$$

$(U, +)$ je podgrupa grupe $(V, +)$.

PRIMERI:

$$(1) \ V = \mathbb{R}^3, \ U \text{ je ravnina skozi } 0 \text{ v } \mathbb{R}^3$$

$$(2)$$

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^3 \\ U &= \mathbb{R}[x] \end{aligned}$$

$$(3)$$

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}[x] \\ U &= \mathbb{R}_m[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{stp}(x) \leq m\} \end{aligned}$$

Če je V vektorski prostor nad \mathcal{O} in $U \subseteq V$ podprostor, uporabljamo oznako:

$$U \leq V$$

Vsak podprostor vsebuje ničlo:

$$x \in U \Rightarrow 0x = 0 \in U$$

Nasprotni element je element podprostora:

$$x, y \in U \Rightarrow x - y = x + (-1) \in U$$

Ker velja $\alpha x \in U$ in $\beta y \in U$, lahko zapišemo:

$$\alpha x + \beta y \in U$$

Zapišemo lahko:

$$x_1, x_2, \dots, x_k \in U \Rightarrow \underbrace{\alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_k}_{\text{linearna kombinacija vektorjev } x_1, \dots, x_k} \in U$$

4.3 Linearna ogrinjača

DEFINICIJA: Naj bo $M \in V, M \neq \emptyset$. *Linearno ogrinjača množice* M je

$$\text{Lin}M = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k : x_1, \dots, x_k \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathcal{O}, k \in \mathbb{N}\}$$

Velja:

$$M \subseteq U \leq V \Rightarrow \text{Lin}M \subseteq U$$

LinM je vektorski podprostor vektorskega prostora V ($\text{Lin}M \leq V$)

- Zaprtost za seštevanje:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \in \text{Lin}M$$

$$\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n y_n \in \text{Lin}M$$

Opazimo, da so po definiciji $\text{Lin}M$ posamečni členi $\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_k x_k \in \text{Lin}M$ in $\beta_1 y_1, \dots, \beta_n y_n \in \text{Lin}M$, torej je tudi vsota vseh členov $\in \text{Lin}M$.

- Zaprtost za množenje s skalarjem:

$$\begin{aligned} \beta(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) &= (\beta \alpha_1) x_1 + \dots + (\beta \alpha_k) x_k \in \text{Lin}M \\ x_1, \dots, x_k &\in M \end{aligned}$$

□

Iz tega sledi, da je $\text{Lin}M$ najmanjši vektorski podprostor, ki vsebuje M . Simbolno za malo naprednejše:

$$M \subseteq U \leq V \Rightarrow \text{Lin}M \subseteq U$$

Za prazno množico velja:

$$\text{Lin}\emptyset = \{0\}$$

Poglejmo si, kako je s preseki in unijami. Za preseke velja:

$$V_i \leq V \forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} V_i \leq V$$

To je očitno. Zaprtost za seštevanje velja, ker če sta neka dva vektorja x, y v $\bigcap_{i \in I} V_i$, potem se nahajata v vseh V_i . Ker so V_i vektorski podprostor, v njih tudi velja zaprtost za seštevanje. Zato je vsota $x + y$ tudi v vseh V_i ,

torej je tudi v $\bigcap_{i \in I} V_i$. Podobno lahko naredimo za zaprtost za množenje s skalarjem.

Malo več je za videti pri uniji. $V_1, V_2 \leq V \Rightarrow \text{Lin}(V_1 \cup V_2)$ je najmanjši vektorski podprostor, ki vsebuje V_1 in V_2 . Primer na katerem se lahko predstavljamo, sta dve premici. Unija dveh premic, ki se sekata ni vektorski podprostor, zato okoli naredimo linearno ogrinjačo. Poglejmo si eno zanimivost:

$$x \in \text{Lin}(V_1 \cup V_2)$$

$$x = \underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k}_{\in V_1} + \underbrace{\beta_1 y_1 + \dots + \beta_n y_n}_{\in V_2} = u + v$$

Torej velja:

$$x \in \text{Lin}(V_1 \cup V_2) \iff x = u + v, u \in V_1, v \in V_2$$

Zapišemo:

$$V_1 + V_2 = \{u + v : u \in V_1, v \in V_2\}$$

Torej velja:

$$\text{Lin}(V_1 \cup V_2) = V_1 + V_2$$

Analogno naredimo za več sumandov:

$$\text{Lin}(V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k) = V_1 + V_2 + \dots + V_k$$

$$V_i \leq V \forall i$$

$$V_1 + \dots + V_k = \{x_1 + \dots + x_k : x_i \in V_i \forall i\}$$

DEFINICIJA: $V_1 + \dots + V_k$ je *prema* ali *direktna*, kadar za vsak $x \in V_1 + \dots + V_k$ obstajajo in so z x enolično določeni taki vektorji $x_i \in V_i (i = 1, \dots, k)$, da je $x = x_1 + \dots + x_k$. Ozaničimo:

$$V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

TRDITEV: Vsota $V_1 + V_2$ vektorskih podprostorov V_1 in V_2 je direktna natanko takrat, kadar je $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

DOKAZ:

(\Rightarrow) Naj bo vsota $V_1 + V_2$ direktna ($V_1 \oplus V_2$). Vzemimo $x \in V_1 \cup V_2$.

$$x = \underbrace{x}_{\in V_1} + \underbrace{0}_{\in V_2} = \underbrace{0}_{\in V_1} + \underbrace{x}_{\in V_2} \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow V_1 \cup V_2 = \{0\}$$

(\Leftarrow) Naj bo $V_1 \cup V_2 = \{0\}$.

$$\begin{aligned}
 x &\in V_1 + V_2 \\
 x &= x_1 + x_2, x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \\
 x &= x'_1 + x'_2, x'_1 \in V_1, x'_2 \in V_2 \\
 x_1 + x_2 &= x'_1 + x'_2 \\
 \underbrace{x_1 - x'_1}_{\in V_1} &= \underbrace{x_2 - x'_2}_{\in V_2} = z
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$$

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'_1 = x_1 \wedge x'_2 = x_2$$

$$V_1 \oplus V_2$$

□

4.4 Kvocientni vektorski prostor

Naj bo U vektorski prostor nad \mathcal{O} , $U \leq V$. Definiramo:

$$v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in U$$

kjer je \sim ekvivalenčna relacija. U je Abelova podgrupa Abelove grupe V . V/U je torej Abelova grupa in velja:

$$\begin{aligned}
 [x] + [y] &= [x + y] \forall x, y \in V \\
 [z] &= z + U \forall z \in V
 \end{aligned}$$

V V/U uvedemo množenje s skalarji:

$$\alpha[x] := [\alpha x], \alpha \in \mathcal{O}, x \in V$$

Definicija je dobra če velja:

$$\begin{aligned}
 y \sim x &\Rightarrow \alpha x \sim \alpha y \\
 y - x \in U &\Rightarrow \underbrace{\alpha y - \alpha x}_{\alpha(y-x)=z} \in U
 \end{aligned}$$

Ker je U podprostor zaprt za množenje s skalarjem, vemo:

$$z \in U \Rightarrow \alpha z \in U \forall \alpha \in \mathcal{O}$$

□

Sledi, da je V/U vektorski prostor nad \mathcal{O} . Elementi so $x + U, x \in V$.

PRIMER: U premica skozi 0 v $V = \mathbb{R}^3$. Elementi $V/U : x + U, x \in \mathbb{R}^3$ so premice vzporedne premici U .

4.5 Linearne preslikave

So neke vrste homomorfizmi vektorskih prostorov.

DEFINICIJA: Naj bosta V in U vektorska prostora nad istim \mathcal{O} . Preslikava $\mathcal{A} : V \rightarrow U$ je *linearne* (= homomorfizem vektorskih prostorov), kadar velja:

$$(1) \quad \mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y \quad \forall x, y \in V$$

$$(2) \quad \mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}, \forall x \in V$$

Pogoju (1) pravimo, da je \mathcal{A} *aditivna*, pogoju (2) pa pravimo, da je \mathcal{A} *homogena*.

Nekaj lastnosti:

- $\mathcal{A}0 = 0$ (pride iz Abelove grupe)

- $\mathcal{A}(-x) = -\mathcal{A}x$ (pride iz Abelove grupe) $\forall x \in V$

- $\mathcal{A}(x - y) = \mathcal{A}x - \mathcal{A}y$ $\forall x, y \in V$

$$(3) \quad \mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \mathcal{A}(\alpha x) + \mathcal{A}(\beta y) = \alpha \mathcal{A}x + \beta \mathcal{A}y \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}$$

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}x + \beta \mathcal{A}y$$

Ta lastnost sledi iz pogojev (1) in (2). Iz te lastnosti lahko dobimo nazaj pogoj (1) in (2).

$$((1) \wedge (2)) \iff (3)$$

SPLOŠNO:

$$\mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \alpha_2 \mathcal{A}x_2 + \cdots + \alpha_n \mathcal{A}x_n$$

DEFINICIJA: $\mathcal{A}V \rightarrow U$ je *izomorfizem* vektorskega prostora, kadar je \mathcal{A} bijektivna in sta \mathcal{A} in \mathcal{A}^{-1} linearni preslikavi. **Velja:** bijektivna linearna preslikava je izomorfizem vektorskega prostora.

Naj bo $\mathcal{A} : V \rightarrow U$ linearna bijekcija. $\mathcal{A}^{-1} : U \rightarrow V$ je linearna

Aditivnost sledi iz dejstva, da je \mathcal{A} izomorfizem Abelovih grup $(V, +)$, $(U, +)$.

$$\mathcal{A}^{-1}(\alpha u) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha \mathcal{A}v) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(\alpha v)) = \alpha v = \alpha \mathcal{A}^{-1}u$$

kjer upoštevamo, da $\exists v \in V : u = \mathcal{A}v$ ($v = \mathcal{A}^{-1}u$)

$\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ je homogena

□

PRIMERI:

(1) $V = U = \mathbb{R}^3$

- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija na ravnino skozi 0.
- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zasuk za določen kot okrog dane osi skozi 0.

(2) $\mathcal{A} : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, \mathcal{A} odvajanje.

(3) $\mathcal{A} : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{A} je določeno integriranje.

4.5.1 Slika in jedro linearnih preslikav

DEFINICIJA: Naj bo $\mathcal{A} : V \rightarrow U$ linearna preslikava. Definiramo:

- $\text{im}\mathcal{A} = \{\mathcal{A}x : x \in V\}$ slika preslikave \mathcal{A}
- $\text{ker}\mathcal{A} = \{x \in V : \mathcal{A}x = 0\}$ jedro preslikave \mathcal{A}

VELJA: $\text{im}\mathcal{A} \leq U$ in $\text{ker}\mathcal{A} \leq V$

DOKAZ: za $\text{im}\mathcal{A}$: $u_1, u_2 \in \text{im}\mathcal{A} \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in \text{im}\mathcal{A}$

$$\exists x_1, x_2 \in V : u_1 = \mathcal{A}x_1, u_2 = \mathcal{A}x_2$$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \alpha_2 \mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in \text{im}\mathcal{A}$$

DEFINICIJA: Naj bo $\mathcal{A} : V \rightarrow U$. Velja:

(1) \mathcal{A} je surjektivna $\iff \text{im}\mathcal{A} = U$

(2) \mathcal{A} je injektivna $\iff \ker \mathcal{A} = \{0\}$

DOKAZ za (2):

(\Rightarrow) \mathcal{A} je injektivna. Vemo $\mathcal{A}0 = 0$. Zanima nas, za katere x velja $\mathcal{A}x = 0$.
 \ker je injektivna je $x = 0 \Rightarrow \ker \mathcal{A} = \{0\}$.

(\Leftarrow) $\ker \mathcal{A} = \{0\}$ Naj bosta $\mathcal{A}x = \mathcal{A}y$, $x, y \in V$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \underbrace{\mathcal{A}x - \mathcal{A}y}_{\mathcal{A}(x-y)=0} = 0 \\ &\Rightarrow x - y \in \ker \mathcal{A} = \{0\} \\ &\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

□

IZREK: Naj bo $\mathcal{A} : V \rightarrow U$ linearna preslikava. Potem obstaja izomorfizem med vektorskima prostoroma $V/\ker \mathcal{A}$ in $\text{im}\mathcal{A}$. Izomorfizem deluje s predpisom:

$$\hat{\mathcal{A}} : [x] \mapsto \mathcal{A}x$$

DOKAZ:

- Predpis je dober t.j.: $[x] = [y] \Rightarrow \mathcal{A}x = \mathcal{A}y$.

$$x \sim y \Rightarrow x - y \in \ker \mathcal{A} \Rightarrow \underbrace{\mathcal{A}(x - y)}_{\mathcal{A}x - \mathcal{A}y = 0} = 0 \Rightarrow \mathcal{A}x = \mathcal{A}y$$

- $\hat{\mathcal{A}}$ je linearna

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}(\underbrace{\alpha[x]}_{[\alpha x]} + \underbrace{\beta[y]}_{[\beta y]}) &= \\ &= \hat{\mathcal{A}}(\alpha x + \beta y) = \mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}x + \beta \mathcal{A}y = \\ &= \alpha \hat{\mathcal{A}}([x]) + \beta \hat{\mathcal{A}}([y]) \end{aligned}$$

- $\hat{\mathcal{A}}$ je surjektivna – sledi neposredno iz definicije $\hat{\mathcal{A}}$

- $\hat{\mathcal{A}}$ je injektivna

$$\begin{aligned} \underbrace{\hat{\mathcal{A}}([x])}_{\mathcal{A}x} &= \underbrace{\hat{\mathcal{A}}([y])}_{\mathcal{A}y} \\ \Rightarrow \mathcal{A}(x - y) &= \mathcal{A}x - \mathcal{A}y = 0 \\ \Rightarrow x - y &\in \ker \mathcal{A} \Rightarrow \\ \Rightarrow x \sim y &\Rightarrow [x] = [y] \end{aligned}$$

$\Rightarrow \hat{\mathcal{A}}$ je linearne in bijektivna $\Rightarrow \hat{\mathcal{A}} : V/\ker \mathcal{A} \rightarrow \text{im} \mathcal{A}$ je izomorfizem vektorskih prostorov. \square

POSLEDICI: Naj bo $\mathcal{A} : V \rightarrow U$ linearne preslikava

- (1) Če je \mathcal{A} surjektivna, je vektorski prostor $V/\ker \mathcal{A}$ izomorfen U .
- (2) Če je \mathcal{A} injektivna, je vektorski prostor V izomorfen vektorskemu prostoru $\text{im} \mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \text{ injektivna} \Rightarrow \ker \mathcal{A} = \{0\} \Rightarrow V/\{0\} = V$$

4.6 Vektorski prostor linearnih preslikav

V, U naj bosta vektorska prostora nad komutativnim obsegom \mathcal{O} .

$$\mathcal{L}(V, U) = \{\mathcal{A} : V \rightarrow U; \mathcal{A} \text{ je linearne}\}$$

Ničelna preslikava 0 je element te množice $0 \in \mathcal{L}(V, U)$.

V $\mathcal{L}(V, U)$ uvedemo operavijo $+$ (seštevanje) po točkah:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}, \mathcal{B} &\in \mathcal{L}(V, U) \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) &= \mathcal{A}x + \mathcal{B}x, \forall x \in V \end{aligned}$$

Velja $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, U)$. Preverimo homogenost (aditivnost za DN):

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x + \alpha \mathcal{B}x = \alpha(\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) = \alpha((\mathcal{A} + \mathcal{B})x)$$

VELJA:

- $(\mathcal{L}(V, U), +)$ je Abelova grupa

- 0 (ničelna preslikava) je ničelni element
- $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U); -\mathcal{A} = -\mathcal{A}x \forall x \in V$

$$\begin{aligned} (-\mathcal{A})x &= -\mathcal{A}x, \forall x \in V \\ (\mathcal{A} + (-\mathcal{A}))x &= \mathcal{A}x + (-\mathcal{A})x = \mathcal{A}x + (-\mathcal{A})x = 0(\in U), \forall x \in V \\ &\Rightarrow \mathcal{A} + (-\mathcal{A}) = 0 \end{aligned}$$

Množenje s skalarji definiramo po točkah:

$$\begin{aligned} (\alpha A)x &= \alpha(Ax), \forall x \in V, \alpha \in \mathcal{O} \\ \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U) &\Rightarrow \alpha A \in \mathcal{L}(V, U) \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(V, U)$ postane z obema operacijama vektorski prostor nad \mathcal{O} . **Poseben primer** $U = V$

$\mathcal{L}(V, V) \equiv \mathcal{L}(V)$ – množica vseh endomorfizmov vektorskega prostora V . V množico $\mathcal{L}(V)$ uvedemo že množenje (= komponiranje preslikav).

$$\begin{aligned} \mathcal{A}, \mathcal{B} &\in \mathcal{L}(V) \\ (\mathcal{AB})x &= A(Bx), \forall x \in V \end{aligned}$$

Množenje je operacija na $\mathcal{L}(V) : \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V) \Rightarrow \mathcal{AB} \in \mathcal{L}(V)$.

$(\mathcal{L}(V), \cdot)$ je polgrupa (množenje je asociativno) in velja

- $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$
- $(\mathcal{B} + \mathcal{C})\mathcal{A} = \mathcal{BA} + \mathcal{CA}$

$(\mathcal{L}(V), +, \cdot)$ je kolobar. Velja še:

$$(\alpha\mathcal{A})(\beta\mathcal{B}) = (\alpha\beta)(\mathcal{AB})$$

Pravimo, da je $\mathcal{L}(V)$ *algebra* nad \mathcal{O} .

DEFINICIJA: \mathcal{A} je *algebra* nad komutativnim obsegom \mathcal{O} , kadar je \mathcal{A} vektorski prostor nad \mathcal{O} , v katerem je dano množenje

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad ((a, b) \mapsto ab)$$

ki ustreza pogojem:

- $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ je kolobar
- $(\alpha a)(\beta b) = (\alpha\beta)(ab) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$

PRIMERI:

- (1) $\mathcal{L}(V)$ je algebra
- (2) $(\mathbb{R}^M) \equiv \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ za operacije definirane po točkah je algebra
- (3) $\mathbb{R}[x]$ algebra polinomov z realnimi koeficienti, kjer so operacije definirane po točkah

$id_V \in \mathcal{L}(V)$ je enota algebre $\mathcal{L}(V)$

$$id_V(x) = x \quad \forall x \in V$$

4.7 Končno razsežni vektorski prostori

DEFINICIJA: Naj bo V vektorski prostor nad \mathcal{O} in $M \subseteq V$. M je *ogrodje* vektorskega prostora V , kadar velja $\text{Lin} M = V$

$M \neq \emptyset$ je ogrodje vektorskega prostora V , kadar za vsak $x \in V$ velja

$$\exists v_1, \dots, v_m \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{O} : x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

DEFINICIJA: Vektorski prostor V je *končno razsežen*, kadar ima kakšno končno ogrodje.

$$M = \{v_1, \dots, v_m\} \text{ ogrodje v.p. } V$$

$$x \in V \Rightarrow x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{O}$$

Poglejmo si kako je z enolišnostjo zapisa. Naj bo

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_m$$

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

Če je zapis enoličen, velja sklep

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

Poglejmo si še, kako je v obratno smer. Naj velja prejšnji sklep

$$\begin{aligned}x &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \\x &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m \\ \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_m - \beta_m)v_m &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_m - \beta_m &= 0 \\ \Rightarrow \beta_j = \alpha_j \quad \forall j = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Torej velja enoličnost zapisa.

DEFINICIJA: Vektorji v_1, \dots, v_m so *linearno neodvisni*, kadar velja sklep

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$$

Če je $M = \{v_1, \dots, v_m\}$ ogrodje vektorskega prostora V , potem vsak $x \in V$ lahko zapišemo v obliki $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$, pri čemer so $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ enolično določeni z x natanko takrat, kadar so v_1, \dots, v_m linearno neodvisni.

Če so v_1, \dots, v_m linearno neodvisni, potem so različni ($i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$). Naj bo $v_1 = v_2$. Zapišemo lahko:

$$\underbrace{1}_{\neq 0} v_1 + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_m = 0$$

\Rightarrow vektorji niso neodvisni.

DEFINICIJA: Naj bo $M \subseteq V$. M je linearno neodvisna, kadar je vsaka njena končna podmnožica linearno neodvisna.

DEFINICIJA: Naj bo $M \subseteq V$. M je *baza* vektorskega prostora V , kadar je linearno neodvisna in hkrati ogrodje vektorskega prostora V .

PRIMERI:

1) Baze v \mathbb{R}^3 so oblike $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, kjer so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ linearno neodvisni.

2) $V = \mathcal{O}^n$

$$e_j(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-to mesto}}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{O}^n$$

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ je *standardna baza* \mathcal{O}^n .

$$x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{O}^n \Rightarrow x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

3) $V = \mathbb{R}[x]$

$$p(x) \in \mathbb{R}[x]$$

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

Baza tega prostora je

$$\{p_j(x) = x^j : j = 0, 1, \dots\} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$$

DEFINICIJA: Vektorji v_1, \dots, v_m so *linearno odvisni*, kadar niso linearno neodvisni.

Naj bodo v_1, \dots, v_m linearno odvisni ($m > 1$). Potem obstajajo tudi skalarji $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{O}$, da niso vsi enako 0, vendar pa je

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

Recimo, da $\alpha_1 \neq 0$, Potem je

$$v_1 = \underbrace{(-\alpha_1^{-1}\alpha_2)}_{\beta_2} v_2 + \cdots + \underbrace{(-\alpha_1^{-1}\alpha_m)}_{\beta_m} v_m$$

v_1 je linearna kombinacija elementov v_2, \dots, v_m .

Potem obstaja tak $j \in \{2, \dots, m\}$, da je v_j linearna kombinacija vektorjev

$$v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m$$

Obratno: Če velja prejšnja trditev, potem so v_1, \dots, v_m linearno odvisni

$$v_1 = \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_m v_m$$

$$1v_1 + (-\beta_2)v_2 + \cdots + (-\beta_m)v_m = 0$$

TRDITEV: Naj bodo v_1, \dots, v_m linearno odvisni in $v_1 \neq 0$, $m > 1$. Potem obstaja tak $k > 1$, $k \leq m$, da je v_k linearna kombinacija vektorjev v_1, \dots, v_{k-1} .

DOKAZ: Naj bo $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$, pri čemer niso vsi $\alpha_j = 0$.

$$\exists \alpha_j \neq 0 : j > 1$$

$$k = \max\{j : \alpha_j \neq 0\} \quad (k > 1)$$

$$\Rightarrow v_k = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1}$$

□

TRDITEV: Naj vektorji x_1, \dots, x_m tvorijo ogrodje vektorskega prostora V . Če obstaja $j \in \{1, \dots, m\}$, da je x_j linearna kombinacija vektorjev $x_i, i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$, potem vektorji $\{x_i : i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}\}$ sestavljajo ogrodje vektorskega prostora V .

DOKAZ: Smemo vzeti $j = 1$, ker lahko spremenimo indekse.

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m \\ v &\in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m = \\ &= \beta_1 (\alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m) + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m = \\ &= (\beta_1 \alpha_2 + \beta_2) x_2 + \dots + (\beta_1 \alpha_m + \beta_m) x_m \end{aligned}$$

Torej x_2, \dots, x_m sestavljajo ogrodje vektorskega prostora V .

□

TRDITEV: Iz vsakega končnega ogrodja vektorskega prostora $V \neq \{0\}$, lahko izberemo bazo.

DOKAZ: Iz ogrodja postopoma odstanjujemo vektorje, ki so linearna kombinacija drugih. Na koncu ostane baza. (Predpostavimo lahko, da so vektorji v ogrodju različni).

POSLEDICA: Vsak netrivialen končno razsežen vektorski prostor ima bazo.

TRDITEV: Naj vektorji $x_1 \dots x_m$ sestavljajo ogrodje vektorskega prostora V , vektorji y_1, \dots, y_n pa naj bodo linearno neodvisni. Potem je $m \geq n$.

DOKAZ: Predpostavimo, da je $n > m$. Imamo dve vrsti vektorjev:

$$x_1, \dots, x_m \quad y_1, \dots, y_n$$

Premaknemo y_1 v bazo in dobimo

$$y_1, x_1, \dots, x_m$$

To je ogrodje, vektorji y_1, x_1, \dots, x_m pa so linearno odvisni. Torej obstaja tak vektor, ki je linearna kombinacija predhodnih. To je eden od vektorjev x_1, \dots, x_m . Tega odstranimo in ostane ogrodje

$$y_1, x'_1, \dots, x'_{m-1}$$

Postopem ponovimo še enkrat in dobimo

$$y_2, y_1, x'_1, \dots, x'_{m-1}$$

Ti vektorji sestavljajo ogrodje in so linearno odvisni. Odstranimo vektor, ki je linearna kombinacija predhodnih. To je eden od vektorjev x'_1, \dots, x'_{m-1} , ker so y_i linearno neodvisni. Dobimo ogrodje

$$y_2, y_1, x''_1, \dots, x''_{m-2}$$

Postopoma izpodrinemo vse x -e in dobimo ogrodje y_m, y_{m-1}, \dots, y_1 . Zato je y_{m+1} linearna kombinacija vektorjev y_1, \dots, y_m . $\rightarrow \leftarrow$ (y_1, \dots, y_n so linearno neodvisni).

Sklep: $m \geq n$ □

Posledica: Vse baze netrivialnega končno razsežnega vektorskoga prostora imajo enako elementov.

DEFINICIJA: Število elementov v bazi končno razsežnega vektorskega prostora imenujemo *razsežnost* ali *dimenzija* tega vektorskega prostora. **Oznaka:** $\dim V$

DOKAZ POSLEDICE: $V \neq \{0\}$. Naj bosta

$$\begin{aligned} X &= \{x_1, \dots, x_m\} \\ Y &= \{y_1, \dots, y_n\} \end{aligned}$$

bazi vektorskega prostora V in velja $x_i \neq x_j \forall i \neq j$ in $y_i \neq y_j \forall i \neq j$. Potem velja:

X je ogrodje, Y niz linearno neodvisnih vektorjev $\Rightarrow m \geq n$

Y je ogrodje, X niz linearno neodvisnih vektorjev $\Rightarrow n \geq m$

$\Rightarrow m = n$

IZREK: Naj bo V n -razsežen vektorski prostor nad \mathcal{O} (komutativen), $N \in \mathbb{N}$. Potem je vektorski prostor V izomorfen vektorskemu prostoru \mathcal{O}^n .

DOKAZ: Naj bo $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ baza V (*urejena*, t.j., določen vrstni red).

$$\begin{aligned} x \in V, x &\mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{O}^n \\ x &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \end{aligned}$$

ker je $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza, so $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ enolično določeni. Zapišemo lahko preslikavo

$$\begin{aligned}\Phi_v : V &\rightarrow \mathcal{O}^n \\ \Phi_v(x) &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\end{aligned}$$

Φ_v je odvisen od vrstnega reda baze in je izomorfen. Zapišemo lahko tudi preslikavo

$$\begin{aligned}\Psi_v : \mathcal{O}^n &\rightarrow V \\ \Psi_v(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\end{aligned}$$

Ψ_v je inverz preslikave $\Phi_v \Rightarrow \Psi_v, \Phi_v$ sta bijekciji. Zadoš'ca dokazati, da je Ψ linearna. Torej je potrebno dokazati homogenost in aditivnost. Oboje je očitno, zato nismo napisali dokaza. Lahko ga napišeš za vajo doma (ni težek, saj je očiten).

IZREK: Končno razsežna vektorska prostora nad istim obsegom sta izomorfna natanko takrat, kadar imata enako dimenzijo.

DOKAZ: Smemo privzeti, da sta V, U netrivialna. Kot se je izrazil profesor: „če sta V in U trivialna, je tudi dokaz trivialen.”

(\Leftarrow) $\dim V = \dim U = n \Rightarrow$ obstajata izomorfizma Φ, Ψ :

$$\begin{aligned}\Phi : V &\rightarrow \mathcal{O}^n \\ \Psi : \mathcal{O}^n &\rightarrow U\end{aligned}$$

$\Rightarrow \Psi\Phi : V \rightarrow U$ je izomorfizem

(\Rightarrow) Naj bo $F : V \rightarrow U$ izomorfizem vektorskih prostorov in $\dim V = n, n \in \mathbb{N}$, ter $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza V . Trdimo, da je $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ baza U .

1. linearna neodvisnost

$$\begin{aligned}\alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_n F(v_n) &= 0 \\ F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) &= F(0) \\ \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n &= 0\end{aligned}$$

2. $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ je ogrodje

$$\begin{aligned}u \in U &\Rightarrow \exists v \in V : F(v) = u \\ v &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \Rightarrow \\ \Rightarrow u = f(v) = F(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) &= \\ = \beta_1 F(v_1) + \dots + \beta_n F(v_n)\end{aligned}$$

□

TRDITEV: Naj bo $V \neq \{0\}$ končno razsežen vektorski prostor. Če so $v_1, \dots, v_m \in V$ linearno neodvisni, obstaja baza V , ki vsebuje v_1, \dots, v_m .

DOKAZ: u_1, \dots, u_n naj tvorijo ogrodje V .

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n\}$ je ogrodje V . Postopoma iz tega ogrodja odtranjamo vektorje, ki so linearna kombinacija vektorjev pred njimi. Vsi vektorji v_1, \dots, v_m ostanejo, ker so linearno neodvisni. Ostane nam baza, ki vsebuje $\{v_1, \dots, v_m\}$.

TRDITEV: Naj bo V končno razsežen vektorski prostor in U njegov vektorski podprostor. Potem je $\dim U \leq \dim V$, pri čemer velja enačaj le v primeru $U = V$.

DOKAZ: $V \neq \{0\}, \dim V = n \in \mathbb{N}$.

$U \subseteq V, U \neq \{0\}$

$u_1, \dots, u_m \in U$ linearno neodvisni v U (\Rightarrow v V), zato je $m \leq n$. Naj bo m maksimalen. Trdimo, da je potem $\{u_1, \dots, u_m\}$ baza U . Zadošča dokaz, da je $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_m\}$ ogrodje U .

Če \mathcal{U} ni ogrodje vektorskega prostora U , obstaja tak $u \in U$ da u ni linearna kombinacija vektorjev u_1, \dots, u_m ($u \notin \text{Lin}\mathcal{U}$). Potem so vektorji u_1, \dots, u_m, u linearno neodvisni, to pa je protislovje z maksimalnostjo števila m . Torej je \mathcal{U} ogrodje vektorskega prostora U , zato je baza U in $\dim U = m (\leq n)$. Če je $\dim U = n$, je U baza V , zato $U = V$.

□

TRDITEV: Naj bo V končno razsežen vektorski prostor in U njegov vektorski podprostor. Potem obstaja tak vektorski podprostor $W \subset V$, da velja $V = U \oplus W$.

DOKAZ: $U = \{0\}, W = V$. Bolj zanimivo je, če $U \neq \{0\}, \{u_1, \dots, u_m\}$ baza U . Dopolnimo jo do baze V

$$\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_{m+k}\}$$

Postavimo $W = \text{Lin}\{u_{m+1}, \dots, u_{m+k}\}$. Če dopolnimo tako, da nič ne dopol-

nimo potem:

$$\begin{aligned} W &= \text{Lin}\{\} = \{0\} \\ U &= V \end{aligned}$$

Trdimo, da je $V = U \oplus W$

$$\begin{aligned} v \in V \Rightarrow v &= \underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m}_{x \in U} + \underbrace{\alpha_{m+1} u_{m+1} + \dots + \alpha_{m+k} u_{m+k}}_{y \in W} \\ v &= x + y, x \in U, y \in W \\ \Rightarrow V &= U + W \end{aligned}$$

$$U \cap W = \{0\}$$

$$\begin{aligned} z &\in U \cap W \\ z &= \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = \beta_1 u_{m+1} + \dots + \beta_{m+k} u_{m+k} \\ \beta_1 u_1 + \dots + (-\beta_{m+k}) u_{m+k} &= 0 \\ \Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_{m+k} &= 0 \Rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = U \oplus W$$

□

Tej trditvi pravimo *trditev o eksistenci direktnega komplementa*.

TRDITEV: Naj bo V končno razsežen vektorski prostor in U, W njegova vektorska podprostora. Če je $U \cap W = \{0\}$, potem velja $\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$.

DOKAZ: U, W sta netrivialna, drugače je očitno. Naj bosta

$$\begin{aligned} \{u_1, \dots, u_m\} &\text{ baza } U, \dim U = m \\ \{w_1, \dots, w_n\} &\text{ baza } W, \dim W = n \end{aligned}$$

Trdimo, da je $\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\}$ baza $U \oplus W$.

1. linearna neodvisnost

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n &= 0 \\ z = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m}_{\in U} &= \underbrace{(-\beta_1) w_1 + \dots + (-\beta_n) w_n}_{\in W} \\ z \in U \cap W = \{0\} &\Rightarrow z = 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m &= 0, \\ \beta_1 = \dots = \beta_n &= 0 \end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow u_1 \dots u_m, w_1 \dots w_n$ so različni

$$2. \operatorname{Lin}\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\} = U \oplus W$$

Očitno je, da je $\operatorname{Lin}\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\} \subseteq U \oplus W$. Dokazati je treba še obratno smer (\supseteq).

$$\begin{aligned} x &\in U \oplus W \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= u + w, u \in U, w \in W \\ u &= \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m \\ w &= \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \\ \Rightarrow x &= \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \end{aligned}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \dim U \oplus W = m + n = \dim U + \dim W$$

TRDITEV: Naj bo V končno razsežen vektorski prostor in $U \leq V, W \leq V$. Ptem velja enakost (= *dimeznisjska formula*):

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

OSNOVNA IDEJA DOKAZA: Vzamemo bazo vektorskega prostora $U \cap W$. V W najdemo vektorje s katerimi razširimo $U \cap W$. Linearno ogrinjačo teh vektorjev označimo z Z . Velja $U + W = U \oplus Z$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dim(U + W) &= \dim U + \dim Z \text{ in} \\ W &= (U \cap W) \oplus Z \Rightarrow \dim W = \dim(U \cap W) + \dim Z \end{aligned}$$

Iz tega sledi zgornja formula.

TRDITEV: Naj bo $V = U \oplus W, \dim V < \infty$. Potem je vektorski prostor V/U izomorfen W , vektorski prsotor V/W , pa je izomorfen U .

DOKAZ:

$$\begin{aligned} f &: W \rightarrow V/U \\ f(w) &= [w] = w + U \end{aligned}$$

f je linearna preslikava

$$f(w_1 + w_2) = [w_1 + w_2] = [w_1] + [w_2] = f(w_1) + f(w_2)$$

$\Rightarrow f$ je aditivna. Podobno dokažemo homogenost.

f je injektivna

$$\begin{aligned}
 f(w_1) = f(w_2) &\Rightarrow \\
 \Rightarrow [w_1] = [w_2] &\Rightarrow \\
 \Rightarrow w_1 \sim w_2 &\Rightarrow \\
 \Rightarrow w_1 - w_2 \in U & \\
 w_1 - w_2 \in W & \\
 \Rightarrow w_1 - w_2 \in U \cap W = \{0\} &\Rightarrow w_1 - w_2 = 0 \\
 \Rightarrow w_1 = w_2 &
 \end{aligned}$$

f je surjektivna:

$$\begin{aligned}
 [v] \in V/U, v \in V \\
 v = u + w, u \in U, w \in W
 \end{aligned}$$

$$f(w) = [v]$$

$$\begin{aligned}
 f(w) &= w \\
 v = u + w &\Rightarrow u = v - w \in U \Rightarrow w \sim v
 \end{aligned}$$

□

Naj bo $V = V_1 \oplus V_2 \Rightarrow V/V_1 \cong V_2 \wedge V/V_2 \cong V_1$

TRDITEV: Naj bo V končno razsežen vektorski prostor in U njegov vektorski podprostor. Potem je

$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

DOKAZ: Poiščimo $W \leq V$, da je $V = U \oplus W$. Ker je $V/U \cong W$, velja $\dim V/U = \dim W$. Vemo:

$$\dim V = \dim U + \dim W$$

Zato je

$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

4.8 Linearne preslikave na končno razsežnih V. P.

Naj bosta V, U končno razsežna vektorska prostora nad \mathcal{O} in naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$ linearna.

Naj bo $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ baza V . Če poznamo slike $\mathcal{A}v_1, \dots, \mathcal{A}v_n$, poznamo \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} x \in V, \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{O} : \\ x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \\ \Rightarrow \mathcal{A}x = \mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \mathcal{A}v_1 + \dots + \alpha_n \mathcal{A}v_n \end{aligned}$$

4.8.1 Poseben primer

$$\begin{aligned} V = \mathcal{O}^n, \quad U = \mathcal{O}^m \\ A = \mathcal{L}(\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m) \\ \{e_1, \dots, e_n\} \text{ standardna baza } \mathcal{O}^n \end{aligned}$$

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$x \in \mathcal{O}^n, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Poznamo $Ae_1, \dots, Ae_n \Rightarrow$ poznamo A .

$$\begin{aligned} Ae_j \in \mathcal{O}^m \\ Ae_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^m \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = m \times n \text{ matrika, ki predstavlja linearno preslikavo } A$$

a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) je člen matrike A . a_{ij} leži v i -ti vrstici in j -tem stolpcu.

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = j\text{-ti stolpec matrike}$$

$$A_{(i)} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

$$A = [a_{ij}]$$

$$A : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{O}^m$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^n$$

$$A = [a_{ij}]$$

$$Ax = y$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

y izračunamo kot:

$$\begin{aligned} y = Ax &= A(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = \\ &= x_1Ae_1 + x_2Ae_2 + \cdots + x_nAe_n = \\ &= x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \cdots + x_nA^{(n)} \\ \Rightarrow y_i &= x_1a_{i1} + x_2a_{i2} + \cdots + x_na_{in} = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

PRIMER: $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zasuk za kot φ okrog z -osi. Kaj je matrika A in kam A preslika točko $(1, 2, 3)$?

$$Ae_1 = A\vec{i} = A^{(1)}$$

$$Ae_2 = A\vec{j} = A^{(2)}$$

$$Ae_3 = A\vec{k} = A^{(3)}$$

$$\begin{aligned}
A^{(3)} &= A\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
A^{(1)} &= A\vec{i} = \begin{bmatrix} \cos \varphi'' \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\
A^{(2)} &= A\vec{j} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\
A &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Izračunajmo sliko točke $(1, 2, 3)$:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 2 \sin \varphi \\ \sin \varphi + 2 \cos \varphi \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m) \equiv \mathcal{O}^{m \times n}$ je množica vseh $m \times n$ matrik s členi \mathcal{O} . Preslikave smo *identificirali* (poistovetili) z matrikami.

$\mathcal{L}(\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m)$ je vektorski prostor nad \mathcal{O} . $\mathcal{O}^{m \times n}$ postane vektorski prostor nad \mathcal{O} .

Naj bosta $A, B \in \mathcal{O}^{m \times n}$.

$$\begin{aligned}
(A + B)x &= Ax + Bx \quad \forall x \in \mathcal{O}^n \\
(\underbrace{A + B}_{C \in \mathcal{O}^{m \times n}})e_j &= Ae_j + Be_j = A^{(j)} + B^{(j)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow C^{(j)} &= Ce_j = A^{(j)} + B^{(j)} \\
\Rightarrow c_{ij} &= a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j
\end{aligned}$$

\Rightarrow v $\mathcal{O}^{m \times n}$ seštevamo po členih. Podobno je z množenjem s skalarji.

4.8.2 Splošna situacija

Naj bosta V, U vektorska prostora nad \mathcal{O} .

$$\dim V = n$$

$$\dim U = m$$

$$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ urejena baza } V$$

$$\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_m\} \text{ urejena baza } U$$

$\mathcal{A} = \mathcal{L}(V, U)$, \mathcal{A} poznamo, če poznamo slike $\mathcal{A}v_j$, $j = 1, \dots, n$.

$$\Phi_{\mathcal{V}} : V \rightarrow \mathcal{O}^n \text{ izomorfizem}$$

$$v \in V$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$v \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Phi_{\mathcal{V}}(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{\mathcal{V}}(v_j) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_j$$

Podobno velja za izomorfizem $\Phi_{\mathcal{U}} : U \rightarrow \mathcal{O}^m$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{A}} & U \\ \Phi_{\mathcal{V}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{U}} \\ \mathcal{O}^n & \xrightarrow{A} & \mathcal{O}^m \end{array}$$

Slika 1: Diagram preslikave

Diagram *komutira* $\Phi_{\mathcal{U}}\mathcal{A} = A\Phi_{\mathcal{V}}$

$$(\Phi_{\mathcal{U}}\mathcal{A})v_j = (A\Phi_{\mathcal{V}})v_j = Ae_j = A^{(j)}$$

$$(\Phi_{\mathcal{U}}\mathcal{A})v_j = \Phi_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}v_j) = \Phi_{\mathcal{U}}(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}v_j = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m$$

$$\Rightarrow A^{(j)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_i = a_{ij} \quad \forall i, j$$

$$\mathcal{A}v_j = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{mj}u_m$$

Linearni preslikavi $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$ priredimo (glede na bazi \mathcal{U}, \mathcal{V}) matriko $A \in \mathcal{O}^{m \times n}$.

$$F : \mathcal{L}(V, U) \rightarrow \mathcal{O}^{m \times n}$$

$$\mathcal{A} \mapsto A = F(\mathcal{A})$$

$$F(\mathcal{A}) = \Phi_{\mathcal{U}}\mathcal{A}(\Phi_{\mathcal{V}})^{-1}$$

F je izomorfizem med $\mathcal{L}(V, U)$ in $\mathcal{O}^{m \times n}$

- aditivnost in homogenost sta očitni
- iz diagrama hitro dobimo inverz $F^{-1} = (\Phi_{\mathcal{U}})^{-1} A \Phi_{\mathcal{V}}$

$$\dim \mathcal{L}(V, U) = \dim \mathcal{O}^{m \times n} = ?$$

Standardna baza $\mathcal{O}^{m \times n}$ je sestavljena iz *elementarnih matrik*. V elementarni matriki se nahaja ena 1, ostali členi so 0.

$$E_{pq} = [e_{ij}] \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & i = p \wedge j = q \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

4.8.3 Množenje matrik

Naj bodo U, V in W vektorski prostori, linearna preslikava $\mathcal{B} : W \rightarrow V$, $\mathcal{A} : V \rightarrow U$ in $\mathcal{C} : W \rightarrow U$, t.j.: $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$.

\mathcal{U} je urejena baza v.p. U , \mathcal{V} urejena baza V , \mathcal{W} , pa urejena baza W .

Poznamo $\Phi_{\mathcal{V}} : V \rightarrow \mathcal{O}^n$, $\Phi_{\mathcal{U}} : U \rightarrow \mathcal{O}^m$ in $\Phi_{\mathcal{W}} : W \rightarrow \mathcal{O}^p$. in poznamo preslikavi $A : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{O}^m$, ter $B : \mathcal{O}^p \rightarrow \mathcal{O}^n$. Zanima nas $C = AB$.

$$\begin{aligned} A &= [a_{ij}] \in \mathcal{O}^{m \times n} \\ B &= [b_{ij}] \in \mathcal{O}^{n \times p} \\ C &= [c_{ij}] \in \mathcal{O}^{m \times p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= AB \\ C^{(j)} &= Ce_j = (AB)e_j = A(Be_j) = AB^{(j)} \Rightarrow \\ C^{(j)} &= AB^{(j)} \quad \forall j \\ \Rightarrow C_{ij} &= A_{(i)}B^{(j)} \\ C_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

4.8.4 Poseben primer

Naj bo $U = V = W$, in $m = n = p$.

$$A, B \in \mathcal{O}^{n \times n} \Rightarrow C = AB \in \mathcal{O}^{n \times n}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{O}^n) \equiv \mathcal{O}^{n \times n}$ je *algebra kvadratnih matrik*. Naj bodo baze U, V, W enake, to je $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{W}$. Skonstruiramo preslikavo

$$\begin{aligned} F : \mathcal{L}(V) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{O}^n) \equiv \mathcal{O}^{n \times n} \\ \mathcal{A} &\mapsto A \\ F(\mathcal{A}) &= \Phi_{\mathcal{V}} \mathcal{A} \Phi_{\mathcal{V}}^{-1} \end{aligned}$$

Vemo: F je izomorfizem vektorskih prostorov $\mathcal{L}(V)$ in $\mathcal{O}^{n \times n}$.

TRDITEV: F je izomorfizem med algebrama $\mathcal{L}(V)$ in $\mathcal{O}^{n \times n}$.

DOKAZ: Zadošča ugotoviti, da F ohranja množenje $F(\mathcal{A}\mathcal{B}) = F(\mathcal{A})F(\mathcal{B})$

$$F(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \Phi_V(\mathcal{A}\mathcal{B})\Phi_V^{-1}$$

$$F(\mathcal{A})F(\mathcal{B}) = \Phi_V\mathcal{A}\Phi_V^{-1}\Phi_V\mathcal{B}\Phi_V^{-1} = \Phi_V\mathcal{A}\mathcal{B}\Phi_V^{-1}$$

□

id_V je enota algebre $\mathcal{L}(V)$. $F(id_V)$ je enota algebre $\mathcal{O}^{n \times n}$

$$F(id_V) = id_{\mathcal{O}^{n \times n}} = I$$

I je *enotska* (ali identična) matrika. Velja:

$$I^{(j)} = Ie_j = e_j$$

torej

$$I = [e_1, e_1, \dots, e_n]$$

Zapišemo lahko tudi kot

$$I = [\delta_{ij}] \quad i, j = 1, \dots, n$$

kjer je δ_{ij} *Kroneckerjeva delta*, za katero velja predpis

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

DEFINICIJA: Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ bijekcija ($\exists \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V) : \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = id_V$). Pravimo, da je $F(\mathcal{A}) = A$ *obrnljiva*:

$$\exists B \in \mathcal{O}^{n \times n} : AB = BA = I$$

A obrnljiva $\Rightarrow B$ je enolično določena. Označimo:

$$B = A^{-1}$$

4.8.5 Rang linearne preslikave in matrike

Naj bosta V, U končno razsežna vektorska prostora nad \mathcal{O} in $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$.

IZREK: Za \mathcal{A} velja formula

$$\dim(\text{im } \mathcal{A}) + \dim(\ker \mathcal{A}) = \dim V \quad (2)$$

DOKAZ: Vemo, da sta vektorska prostora $V_{\ker \mathcal{A}}$ in $\text{im} \mathcal{A}$ izomorfna. Zato je $\dim V / \ker \mathcal{A} = \dim(\text{im} \mathcal{A})$. Vemo $\dim V / \ker \mathcal{A} = \dim V - \dim(\ker \mathcal{A})$. $\Rightarrow 2$.

□

DEFINICIJA: Rang preslikave \mathcal{A} je $\dim(\text{im} \mathcal{A})$. Oznaka $\text{rang } \mathcal{A} = \dim(\text{im} \mathcal{A})$.

TRDITEV: $\mathcal{A} = \mathcal{L}(V, U)$

1. \mathcal{A} je injektivna $\iff \text{rang } \mathcal{A} = \dim V$
2. \mathcal{A} je surjektivna $\iff \text{rang } \mathcal{A} = \dim U$
3. \mathcal{A} je bijektivna $\iff \dim V = \dim U = \text{rang } \mathcal{A}$

DOKAZ:

1. vemo: \mathcal{A} injektivna $\iff \ker \mathcal{A} = \{0\}$

$$\ker \mathcal{A} = \{0\} \iff \dim(\ker \mathcal{A}) = 0$$

2. vemo: \mathcal{A} surjektivna $\iff \text{im} \mathcal{A} = U$

$$\text{im} \mathcal{A} = U \iff \underbrace{\dim(\text{im} \mathcal{A})}_{\text{rang } \mathcal{A}} = \dim U$$

3. kombiniramo 1 in 2.

TRDITEV: Za $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ so ekvivalentne naslednje izjave:

1. \mathcal{A} je bijekcija
2. \mathcal{A} je surjekcija
3. \mathcal{A} je injekcija
4. $\text{rang } \mathcal{A} = \dim V$

DOKAZ: $U = V$ v prejšnji trditvi \Rightarrow

$$\Rightarrow [(1) \iff (4), (2) \iff (4), (3) \iff (4)]$$

POSLEDICA: Matrika $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$ je obrnljiva natanko takrat, kadar je $\text{rang } A = n$.

DOKAZ: V prejšnji trditvi vzamemo $V = \mathcal{O}^n$ in A razumemo kot endomorfizem vektorskih prostorov \mathcal{O}^n .

A obrnljiva $\iff A$ bijekcija, t.j.: (1) \iff (4) po prejšnji trditvi.

TRDITEV: Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$ in A matrika, ki pripada \mathcal{A} glede na dai baz $\mathcal{V} \in V, \mathcal{U} \in U$. Potem velja:

$$\text{rang } \mathcal{A} = \text{rang } A$$

DOKAZ: Narišemo si diagram in opazimo, da komutira.

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{U}} \mathcal{A} &= A \Phi_{\mathcal{V}} \\ (\underbrace{\Phi_{\mathcal{U}} \mathcal{A}}_{\text{im } \mathcal{A}}) V &= (A \underbrace{\Phi_{\mathcal{V}}}_{\mathcal{O}^n}) V \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Phi_{\mathcal{U}}(\text{im } \mathcal{A}) = \text{im } A \end{aligned}$$

$\Phi_{\mathcal{U}}$ je izomorfizem, zato je

$$\begin{aligned} \dim(\text{im } \mathcal{A}) &= \dim(\text{im } A) \\ \text{rang } \mathcal{A} &= \text{rang } A \end{aligned}$$

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{m \times n} \equiv \mathcal{L}(\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m)$. Velja

$$\begin{aligned} \text{im } A &= \{Ax : x \in \mathcal{O}^n\} = \\ &= \{A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) : x \in \mathcal{O}^n\} = \\ &= \{x_1 A e_1 + \dots + x_n A e_n\} = \\ &= \{x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)} : x_j \in \mathcal{O}^{\forall j}\} = \\ &= \text{Lin}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} \end{aligned}$$

TRDITEV: Stolpci matrike A tvorijo ogrodje vektorskega prostora $\text{im } A$.

POSLEDICA: Rang matrike A je največje število linearno neodvisnih stolpcev te matrike.

Operacije na matrkah, ki ohranjujejo rang:

S1) med sabo zamenjamo dva stolpca

S2) stolpec pomnožimo z neničelnim skalarjem

S3) Stolpci prištejemo večkratnik kakšnega drugega stolpca

V1, V2, V3 so analogne operacije na vrsticah.

TRDITEV: S1, S2, S3 in V1, V2, V3 ohranjajo rang.

DOKAZ:

S1) očitno

S2) Dokazati moramo, da velja

$$L1 = \text{Lin}\{\alpha A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\} = \text{Lin}\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\} = L2$$

Torej morajo biti vsi vektorji, ki so linearne kombinacije vektorjev L1 tudi linearne kombinacije vektorjev L2 in obratno. Zadošča

$$A^{(1)} = \alpha^{-1}(\alpha A^{(1)})$$

To velja, ker $\alpha \neq 0$. Torej lahko vsak vektor, ki je zapisan z linearno kombinacijo L1 pretvorimo v linearno kombinacijo vektorjev L2 in obratno, zato se ohranja slika preslikave A in posledično tudi rang.

S3) Dokazati moramo

$$\text{Lin}\{A^{(1)} + \alpha A^{(2)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\} = \text{Lin}\{A^{(2)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\}$$

Velja podoben razmislek kot pri S2, zato zadošča

$$A^{(1)} = (A^{(1)} + \alpha A^{(2)}) + (-\alpha)A^{(2)}$$

V1, V2, V3 ohranjajo ker A

$$x \in \ker A \iff Ax = 0 \iff A_i x = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

V1) očitno iz zgornje enakosti

V2)

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{bmatrix}$$

Pokazati moramo, da $\alpha A_{(1)}x = 0 \quad \forall x \in \mathcal{O}^n$. Ker $\alpha \neq 0$, velja

$$\alpha A_{(1)}x = 0 \iff A_{(1)}x = 0$$

Torej operacija ohranja ker A .

V3)

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} A_{(1)} + \alpha A_{(2)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{bmatrix}$$

Pokazati moramo

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_{(1)} + \alpha A_{(2)})x = 0 \\ A_{(2)}x = 0 \\ \dots \\ A_{(n)}x = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} A_{(1)}x = 0 \\ A_{(2)}x = 0 \\ \dots \\ A_{(n)}x = 0 \end{array} \right\}$$

(\Leftarrow) očitno

(\Rightarrow) vemo $(A_{(1)} + \alpha A_{(2)})x = 0$. Dokazati moramo, da je $A_{(1)}x = 0$.

$$\begin{aligned} (A_{(1)} + \alpha A_{(2)})x &= 0 \\ A_{(1)}x + \underbrace{\alpha A_{(2)}x}_0 &= 0 \\ \Rightarrow A_{(1)}x &= 0 \end{aligned}$$

Ker se ohranja jedro, se ohranja rang ($= n - \dim(\ker A)$).

TRDITEV: Naj bo $A \in \mathcal{O}^{m \times n}$. Z uporabo operacij S1 - S3, V1 - V3 lahko postopoma pridemo iz matrike A , do matrike A_0 oblike

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^{m \times n}$$

Kjer je rang A število stolpcev z eno enico. Natančna shema postopka je v zvezku.

PRIMER

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_0$$

Torej je rang $A = \text{rang } A_0 = 2$.

POSLEDICA Rang matrike je enak rangu njene *transponirane*.

$$\text{rang } A = \text{rang } A^T$$

Če je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{O}^{m \times n}$, transponiranko $B = A^\top$, t.j.: $B = [b_{ij}] \in \mathcal{O}^{n \times m}$ tvorimo na nasleden način:

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

DOKAZ: Očitno je, da če na matriki A izvedemo operaijo Si , se bo ta pretvorila v Vi na matriki A^\top . Analogno za operacije Vi .

POSLEDICA: Največje število linearno neodvisnih stolpcev matrike je enako največjemu številu njenih linearno neodvisnih vrstic.

4.8.6 Sistemi linearnih enačb

Naj bo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

sistem linearnih enačb. Zapišemo lahko $A \in \mathcal{O}^{m \times n}$, $A = [a_{ij}]$. Za b lahko zapišemo

$$b \in \mathcal{O}^m, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Podobno lahko x zapišemo kot

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^n$$

Iščemo $x \in \mathcal{O}^n$, da bo veljalo

$$Ax = b$$

Če gledamo na A kot na preslikavo, velja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{O}^n, \mathcal{O}^m)$. Naj bo \mathcal{R} množica vseh rešitev sistema $Ax = b$, t.j.:

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathcal{O}^n : Ax = b\}$$

$[A|b] \in \mathcal{O}^{m \times (n+1)}$ je *razširjena matrika* sistema $Ax = b$.

Če je $b = 0$, potem imamo *homogen sistem* $Ax = 0$, potem

$$\mathcal{R} = \ker A$$

Če je $b \neq 0$, imamo *nehomogen sistem* $Ax = b$. Sistem je *protisloven*, kadar je $\mathcal{R} = \emptyset$, sicer pa je *neprotisloven*. Naj bo sistem $Ax = b$ neprotisloven in w ena od rešitev ($w \in \mathcal{R}$). Pravimo, da je w *partikularna rešitev*.

Naj bo

$$\begin{aligned} Aw = b, \quad x \in \mathcal{R} &\Rightarrow Ax = b \\ \Rightarrow A(x - w) &= \underbrace{Ax}_b - \underbrace{Aw}_b = 0 \Rightarrow x - w \in \ker A \\ &\Rightarrow x \in w + \ker A \end{aligned}$$

Torej velja $\mathcal{R} \subseteq w + \ker A$.

Naj bo $x \in w + \ker A$. Potem je $x = w + y, y \in \ker A$.

$$\Rightarrow Ax = A(w + y) = \underbrace{Aw}_b + \underbrace{Ay}_0 = b \Rightarrow x \in \mathcal{R}$$

Torej velja $w + \ker A \subset \mathcal{R}$

Iz (1)&(2) sledi

$$\mathcal{R} = w + \ker A$$

TRDITEV: Če je w partikularna rešitev sistema $Ax = b$, je

$$\mathcal{R} = w + \ker A$$

IZREK (Kronecker, Capelli): $\mathcal{R} \neq \emptyset$ natanko takrat, kadar je

$$\text{rang}[A|b] = \text{rang}[A]$$

DOKAZ: $\mathcal{R} \neq \emptyset \iff b \in \text{im}A$ ($\ker Ax = b$ pomeni, da je $b \in \text{im}A$)

$$\text{im}[A|b] = \text{Lin}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b\}$$

$$\text{im}A = \text{Lin}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}$$

$$\dim(\text{im}[A|b]) = \dim(\text{im}A) \iff \text{im}A = \text{im}[A|b] \iff b \in \text{im}A$$

$\ker \text{im}A \subseteq \text{im}[A|b]$, preveriti je treba še $\text{im}[A|b] \subseteq \text{im}A \iff b \in \text{im}A$.

4.8.7 Gaussov algoritem za reševanje sistema

Dovoljene operacije so V1 - V3 in S1. S1 je dovoljena operacija samo za prvih n stolpcev in paziti je treba, da med seboj ustrezno zamenjamo spremenljivke. S temi operacijami bo množica rešitev ostala ista.

Skica poteka je v zvezku. Na začetku leta sem opozoril, da tu ne bo skic. Če si pričakoval spremembo toplo priporočam da znizaš pričakovanja. Ko pridemo do končne matrike, katere skica nje je v prej omenjenem zvezku, velja

$$\begin{aligned}
 Ax = b &\iff \\
 1x_{i1} + 0x_{i2} + \dots + 0x_{ir} + *x_{ir+1} + \dots + *x_{in} &= * \\
 0x_{i1} + 1x_{i2} + \dots + 0x_{ir} + *x_{ir+1} + \dots + *x_{in} &= * \\
 &\vdots \\
 0x_{i1} + 0x_{i2} + \dots + 1x_{ir} + *x_{ir+1} + \dots + *x_{in} &= * \\
 0x_{i1} + 0x_{i2} + \dots + 0x_{ir} + 0x_{ir+1} + \dots + 0x_{in} &= \delta
 \end{aligned}$$

Če je $\delta = 1$, je sistem protisloven, če pa je $\delta = 0$, ima sistem $n - r$ parametrično družino rešitev. Parametri so

$$\begin{aligned}
 x_{ir+1} &= \alpha_1 \\
 &\vdots \\
 x_{in} &= \alpha_{n-r}
 \end{aligned}$$

rešitve enačbe pa so

$$\begin{aligned}
 x_{i1} &= * + *\alpha_1 + \dots + *\alpha_{n-r} \\
 x_{i2} &= * + *\alpha_1 + \dots + *\alpha_{n-r} \\
 &\vdots \\
 x_{ir} &= * + *\alpha_1 + \dots + *\alpha_{n-r}
 \end{aligned}$$

PRIMER: Obravnavaj sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\
 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -1 \\
 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= p
 \end{aligned}$$

glede na realen parameter p .

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & p \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & p-3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & p-3 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Sistem je neprotisloven natanko takrat, kadar je $p-1=0$, torej $p=1$.

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 - 2x_4 &= -1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_3 &= \alpha_1 \\ x_4 &= \alpha_2 \end{aligned}$$

Za $p=1$ torej velja:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ x_2 &= 1 - 2\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ x_3 &= \alpha_1 \\ x_4 &= \alpha_2 \end{aligned}$$

kjer sta α_1 in α_2 realna parametra.

V resnici rešujemo sistem $Ax = b$, kjer je $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

Spomnimo se, da za množico rešitev R velja $R = w + \ker A$, kjer je w partikularna rešitev. Torej velja

$$\begin{aligned} x \in R &\iff x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ R &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{Lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ tvorita bazo jedra } \ker A.$$

4.8.8 Simultano reševanje sistemov z isto matriko koeficientov

$$AX^{(1)} = B^{(1)}$$

$$AX^{(2)} = B^{(2)}$$

$$\dots$$

$$AX^{(p)} = B^{(p)}$$

Zapišemo lahko

$$X = \begin{bmatrix} X^{(1)} & \dots & X^{(p)} \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^{n \times p}$$

$$B = \begin{bmatrix} B^{(1)} & \dots & B^{(p)} \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^{m \times p}$$

Torej rešujemo sistem $AX = B$.

Z Gaussom dobimo $\begin{bmatrix} A & | & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A' & | & B' \end{bmatrix}$.

POSEBEN PRIMER:

$A \in \mathcal{O}^{n \times n}$, A obrnljiva ($\Rightarrow \text{rang } A = n$).

$$A' = I.$$

$$AX = B \iff IX = B' \Rightarrow B' = X = A^{-1}B$$

$$B' = A^{-1}B$$

Vzamemo $B = I$, dobimo $B' = A^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} A & | & I \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I & | & A^{-1} \end{bmatrix}$$

4.8.9 Sprememba baze

V v.p. nad \mathcal{O} .

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ urejena baza

$\mathcal{V}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ urejena baza

$$v'_j = p_{1j}v_1 + p_{2j}v_2 + \dots + p_{nj}v_n$$

$$P = [p_{ij}] \quad i, j = 1, \dots, n \quad \in \mathcal{O}^{n \times n}$$

P je prehodna matrika med \mathcal{V} in \mathcal{V}' .

Skica, ki naj bi bila v zvezku zelo pomaga pri naslednjem sklepu

$$P = \Phi_{\mathcal{V}}(\Phi'_{\mathcal{V}})^{-1}$$

$$id_V v'_j = v'_j = p_{1j}v_1 + \dots + p_{nj}v_n$$

POSEBEN PRIMER:

$$V = \mathcal{O}^n$$

$\mathcal{V} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ standardna baza

P - prehodna matrika

$$\Rightarrow v'_j = p_{1j}e_1 + p_{2j}e_2 + \dots + p_{nj}e_n = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} = P^{(j)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}' = \{P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(n)}\}$$

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$ in naj bosta $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ bazi V in $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ bazi U . Naj $A \in \mathcal{O}^{m \times n}$ pripada \mathcal{A} glede na \mathcal{V}, \mathcal{U} in naj $\mathcal{A}' \in \mathcal{O}^{m \times n}$ pripada \mathcal{A} glede na $\mathcal{V}', \mathcal{U}'$.

P naj bo prehodna matrika med \mathcal{V} in \mathcal{V}' , Q pa naj bo prehodna matrika med \mathcal{U} in \mathcal{U}' .

$$P \in \mathcal{O}^{n \times n}, \quad Q \in \mathcal{O}^{m \times m}$$

Zanima nas zveza med A' in A .

V zvezku na tem mestu stoji (ali pa leži, odvisno v kakšni poziciji bereš zvezek) en velik diagram, ki komutira. Iz tega diagrama razberemo

$$A' = Q^{-1}AP$$

POSEBEN PRIMER:

$\mathcal{A} = A$, \mathcal{V}, \mathcal{U} standardni bazi v $V = \mathcal{O}^n$ in $U = \mathcal{O}^m$

$\Rightarrow A' = Q^{-1}AP$ je matrika, ki pripada A glede na urejeni bazi $\mathcal{V}' = \{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\}$ in $\mathcal{U} = \{Q^{(1)}, \dots, Q^{(m)}\}$

4.8.10 Ekivalentnost matrik

Naj bosta $A, B \in \mathcal{O}^{m \times n}$

DEFINICIJA: B je *ekvivalentna* A ($B \sim A$), kadar obstajata taki obrnljivi matriki P, Q , da velja

$$B = Q^{-1}AP$$

\sim je ekvivalenčna relacija:

- $A \sim A$ (refleksivnost) (za Q, P vzamemo I)
- $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (simetričnost) ($B = Q^{-1}AP \Rightarrow A = \underbrace{QBP^{-1}}_{(Q^{-1})^{-1}B(P^{-1})}$)
- $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (tranzitivnost) (dokaz za DN)

TRDITEV: Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, U)$. Potem obstajata v V in U taki urejeni bazi, da ima matrika, ki pripada \mathcal{A} v teh dveh bazah obliko

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{bmatrix}$$

kjer je $r = \text{rang } \mathcal{A}$.

DOKAZ: Iščemo bazi $\{v_1, \dots, v_n\}$ v V in $\{u_1, \dots, u_n\}$ v U , tako da bo veljalo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}v_1 &= u_1 \\ \mathcal{A}v_2 &= u_2 \\ &\dots \\ \mathcal{A}v_r &= u_r \\ \mathcal{A}v_{r+1} &= 0 \\ &\dots \\ \mathcal{A}v_n &= 0 \end{aligned}$$

V $\text{im } \mathcal{A}$ izberemo bazo $\{u_1, \dots, u_r\}$. Izberemo še praslke teh elementov $\{v_1, \dots, v_r\} \in V$. Velja $\mathcal{A}v_j = u_j$ za $j = 1, \dots, r$.

Razširimo $\{u_1, \dots, u_r\}$ do baze $\{u_1, \dots, u_r, \dots, u_m\}$ v. p. U .

Spomnimo se: $\dim(\ker \mathcal{A}) = n - \dim(\operatorname{im} \mathcal{A}) = n - r$.

Izberemo bazo $\ker \mathcal{A} : \underbrace{\{v_{r+1}, \dots, v_n\}}_{n-r \text{ vektorjev}}$.

Trdimo, da je $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza V . Zadošča ugotoviti, da so ti vektorji linearno neodvisni (ker je $\dim V = n$).

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n &= 0 \\ \alpha_1 \underbrace{\mathcal{A}v_1}_{u_1} + \dots + \alpha_r \underbrace{\mathcal{A}v_r}_{u_r} + \alpha_{r+1} \underbrace{\mathcal{A}v_{r+1}}_0 + \dots + \alpha_n \underbrace{\mathcal{A}v_n}_0 &= 0 \quad (*) \\ \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0 \end{aligned}$$

Če to vstavimo v (*) dobimo:

$$\alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$$

Torej so v_1, \dots, v_n res linearno neodvisni.

□

POSLEDICA: Vsaka matrika je ekvivalentna matriki oblike A_0 .

DOKAZ: A razumemo kot prelikavo. Matrika, ki pripada A glede na bazi $\{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\}$ in $\{Q^{(1)}, \dots, Q^{(m)}\}$, naj bo A_0 . Ker je $A_0 = Q^{-1}AP$, sta matriki A in A_0 ekvivalentni.

Opomba:

$$\begin{aligned} A_0 &= Q^{-1}AP \iff AP = QA_0 \\ AP &= [Q^{(1)}, \dots, Q^{(r)}, 0, \dots, 0] \\ [AP^{(1)}, \dots, AP^{(r)}, \dots, AP^{(n)}] &= [Q^{(1)}, \dots, Q^{(r)}, 0, \dots, 0] \\ \iff AP^{(j)} &= Q^{(j)} \text{ za } j = 1, \dots, r \\ AP^{(j)} &= 0 \text{ za } j = r+1, \dots, n \end{aligned}$$

TRDITEV: Matriki $A, B \in \mathcal{O}^{m \times n}$ sta ekvivalentni natanko takrat, kadar velja

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$$

DOKAZ:

(\Rightarrow) Naj bosta A, B ekvivalentni. Vemo, da velja

$$B = Q^{-1}AP$$

kjer sta P in Q obrnljivi matriki. Torej B pripada preslikavi $A : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{O}^m$ glede na bazi $\{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\}$ in $\{Q^{(1)}, \dots, Q^{(m)}\}$. Po neki trditvi velja $\text{rang } B = \text{rang } A$.

(\Leftarrow) Naj velja $\text{rang } A = \text{rang } B = r$. Vemo, da je A ekvivalentna A_0 . Prav tako je B ekvivalentna B_0 . Ker $A, B \in \mathcal{O}^{m \times n}$ imata isti rang, zato je $A_0 = B_0$. Torej velja $A \sim A_0 = B_0 \sim B$. Iz tranzitivnosti sledi $A \sim B$.

□

4.8.11 Podobnost matrik

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$. In naj bosta $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ urejeni bazi V , ter P prehodna matrika. Matrika $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$ naj pripada preslikavi \mathcal{A} glede na bazo \mathcal{V} , matrika $A' \in \mathcal{O}^{n \times n}$ pa naj pripada preslikavi \mathcal{A} glede na bazo \mathcal{V}' . Vemo, da je zveza med A' in A

$$A' = P^{-1}AP$$

DEFINICIJA: Matrika $B \in \mathcal{O}^{n \times n}$ je *podobna* matriki $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$, kadar obstaja taka obrnljiva matrika $P \in \mathcal{O}^{n \times n}$, da velja

$$B = P^{-1}AP$$

Označimo z $B \stackrel{p}{\sim} A$.

Relacija podobnosti je ekvivalenčna relacija

- refleksivnost: $A \stackrel{p}{\sim} A$, za P vzamemo I .
- simetričnost $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$
- tranzitivnost: $B \stackrel{p}{\sim} A, B \stackrel{p}{\sim} C \Rightarrow A = P^{-1}BP, B = Q^{-1}CQ \Rightarrow A = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}C(QP) \Rightarrow A \stackrel{p}{\sim} C$

Vse matrike, ki pripadajo danemu endomorfizmu so med seboj podobne.

4.8.12 Diagonalne matrike in diagonalizacija

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$, $A = [a_{ij}]$ $i, j = 1, \dots, n$. Pravimo, da je A *diagonalna*, kadar je $a_{ij} = 0$ za vsak $i \neq j$. Oblika A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & a_{44} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Zapis: $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Velja:

$$\begin{aligned} \text{diag}(a_1, \dots, a_n) + \text{diag}(b_1, \dots, b_n) &= \text{diag}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \text{diag}(b_1, \dots, b_n) &= \text{diag}(a_1 b_1, \dots, a_n b_n) \end{aligned}$$

DEFINICIJA: Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ se da *diagonalizirati*, kadar obstaja taka baza $\mathcal{V} \in V$, da je matrika A , ki pripada \mathcal{A} v tej bazi, diagonalna.

Naj preslikavi \mathcal{A} v bazi \mathcal{V} pripada matrika $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ in naj bo $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Takrat velja:

$$\mathcal{A}v_j = 0v_1 + 0v_2 + \dots + a_j v_j + \dots + 0v_n = a_j v_j \quad j = 1, \dots, n$$

Torej velja:

$$\mathcal{A}v_j = a_j v_j \quad \forall j$$

DEFINICIJA: Vektor $x \in V \setminus \{0\}$ imenujemo *lastni vektor* endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, kadar velja

$$\mathcal{A}x = \lambda x$$

za kakšen $\lambda \in \mathcal{O}$. Velja, da je λ enolično določen z \mathcal{A} in lastnim vektorjem x . λ imenujemo *lastna vrednost* endomorfizma \mathcal{A} , ki pripada danemu vektorju x .

DOKAZ enoličnosti λ :

Naj velja $\mathcal{A}x = \lambda x$ in $\mathcal{A}x = \mu x$. Potem velja

$$\lambda x = \mu x \Rightarrow (\lambda - \mu) \underbrace{x}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$$

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \mathcal{O}$. λ je lastna vrednost end. \mathcal{A} , kadar obstaja kakšen lasten vektor x , da je

$$\mathcal{A}x = \lambda x$$

Poglejmo si množico $\{x \in V : \mathcal{A}x = \lambda x\}$ za fiksiran $\lambda \in \mathcal{O}$.

$$\{x \in V : \mathcal{A}x = \lambda x\} = \{x \in V : (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})x = 0\} = \ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$$

kjer je $\mathcal{I} = id_V$.

$\ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$ se imenuje *lastni podprostor* end. \mathcal{A} , ki pripada l. vrednosti λ .

Če je x lastni vektor (za \mathcal{A} in λ), potem je αx lastni vektor, če je $\alpha \neq 0$.

V $\ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$ so vsi lastni vektorji end. \mathcal{A} , ki pripadajo l. vrednosti λ , poleg njih pa še vektor 0.

TRDITEV: Endomorfizem \mathcal{A} se da diagonalizirati natanko takrat, kadar obstaja baza v. p. V , sestavljena iz lastnih vektorjev end. \mathcal{A} . Pripadajoča diagonalna matrika ima na diagonalni lastne vrednosti \mathcal{A} .

DOKAZ: Naj se da \mathcal{A} diagonalizirati v $\{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow \mathcal{A}v_j = a_j v_j \quad \forall j$.

$$A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

v_j je l. vektor $\forall j (v_j \neq 0)$. a_j je lastna vrednost za \mathcal{A} in v_j .

Obratno: $\{v_1, \dots, v_n\}$ je baza iz l. vektorjev $\mathcal{A}v_j = \lambda_j v_j$. $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

TRDITEV: Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ različne lastne vrednosti endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ in x_1, \dots, x_h pripadajoči vektorji. Potem so x_1, \dots, x_h linearno neodvisni.

DOKAZ: Recimo, da so x_1, \dots, x_h linearno odvisni. Izberemo najmanjši $j > 1$, tako da je $x_j = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{j-1} x_{j-1}$. Preslikamo z \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x_j &= \alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \dots + \alpha_{j-1} \mathcal{A}x_{j-1} \\ \Rightarrow \lambda_j x_j &= \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_{j-1} \lambda_{j-1} x_{j-1} \end{aligned}$$

Velja tudi:

$$\lambda_j x_j = \lambda_j \alpha_1 x_1 + \dots + \lambda_j \alpha_{j-1} x_{j-1}$$

Če te enačbi odštejemo dobimo:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \lambda_1 - \lambda_j \alpha_1) x_1 + \dots + (\alpha_{j-1} \lambda_{j-1} - \lambda_j \alpha_{j-1}) x_{j-1} &= 0 \\ \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_j) x_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_j) x_2 + \dots + \alpha_{j-1} (\lambda_{j-1} - \lambda_j) x_{j-1} &= 0 \end{aligned}$$

Zaradi izbire j (minimalnost) so x_1, \dots, x_{j-1} linearno neodvisni.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_j)}_{\neq 0} &= \dots = \alpha_{j-1} \underbrace{(\lambda_{j-1} - \lambda_j)}_{\neq 0} = 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 &= \dots = \alpha_{j-1} = 0 \end{aligned}$$

Torej je $x_j = 0 \rightarrow \leftarrow$.

Zato so x_1, \dots, x_h linearno neodvisni.

POSLEDICA: Če ima endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ n različnih lastnih vrednosti, kjer je $n = \dim(V)$, potem se da \mathcal{A} diagonalizirati.

DOKAZ: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ različne lastne vrednosti.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x_j &= \lambda_j x_j, & j &= 1, \dots, n \\ x_j &\neq 0 & \forall j \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ je baza V sestavljena iz lastnih vektorjev. Zato se da \mathcal{A} diagonalizirati.

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n \times n} = \mathcal{L}(\mathcal{O}^n)$. A se da diagonalizirati, kadar je A podobna diagonalni matriki:

$$\exists P \in \mathcal{O}^{n \times n} \text{ obrnljiva} : P^{-1}AP = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

Velja:

$$\begin{aligned} AP &= PD \\ \Rightarrow AP^{(j)} &= PD^{(j)} & j &= 1, \dots, n \\ PD^{(j)} &= P(d_j e_j) = d_j P e_j \\ \Rightarrow AP^{(j)} &= d_j P^{(j)} & \forall j \end{aligned}$$

$\Rightarrow P^{(1)}, \dots, P^{(n)}$ so lastni vektorji matrike A . d_1, \dots, d_n so pripadajoče lastne vrednosti.

4.8.13 Iskanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$

$$Ax = \lambda x \iff x \in \ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$$

λ je lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A} \iff \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) \neq \{0\} \iff \mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ ni bijekcija (nima inverza) $\iff \text{rang}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) < n$.

PRIMER: $n = 3$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}$. Kdaj je $\text{rang}(A - \lambda I) < 3$?

\iff stolpci oziroma vrstice matrike $A - \lambda I$ so linearno odvisni

\iff mešani produkt vseh vrstic matrike $A - \lambda I$ je enak 0

$\iff \det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3$$

Hitro lahko razberemo, da je $a_3 = -1$. Torej je λ lastna vrednost $A \iff \Delta_A(\lambda) = 0$, kjer je

$$\Delta_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 - \lambda^3$$

Ničle polinoma $\Delta_A(\lambda)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so lastne vrednosti matrike A . Pravimo, da je $\Delta_A(\lambda)$ *karakteristični polinom* matrike A .

4.8.14 Determinante

Naj bosta V in U vektorska prostora nad \mathcal{O} . Definiramo

$$V^n = \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_n$$

Velja

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, \dots, v_n) &\in V^n \\ \forall j \quad v_j &\in V \end{aligned}$$

DEFINICIJA: $F : V^n \rightarrow U$ je *n-linear*, kadar so za vsak $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ preslikave $F_j : V \rightarrow U$ ($j = 1, \dots, n$), definirane s predpisom

$$F_j(x) = F(v_1, \dots, v_{j-1}, x, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

linearne.

Če je $n = 2$ pravimo da je preslikava *bilinear*, če je $n = 3$ pa pravimo, da je preslikava *trilinear*.

PRIMERI:

(1) Skalarni produkt na \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ V = \mathbb{R}^3, \quad U &= \mathbb{R} \\ F(\vec{a}, \vec{b}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

F je bilinearna preslikava

$$F_1(\vec{x}) = F(\vec{x}, \vec{b}) = \vec{x} \cdot \vec{b} F_1(\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{b} = \vec{x} \cdot \vec{b} + \vec{y} \cdot \vec{b} = F_1(\vec{x}) + F_1(\vec{y})$$

Torej je F_1 aditivna. Podobno hitro se preveri, da je tudi homogena. Zato je F_1 linearna. Podobno velja tudi za F_2 , zato je F bilinearna.

(2) Vektroski produkt v \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ V = \mathbb{R}^3, \quad U &= \mathbb{R}^3 \\ F(\vec{a}, \vec{b}) &= \vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

Podobno kot v prvem primeru preverimo linearnost preslikav F_1 in F_2 in opazimo, da je tudi v tem primeru F bilinearna.

(3) Mešani produkt v \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ V = \mathbb{R}^3, \quad U &= \mathbb{R} \\ F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

Podobno kot v prvih dveh primerih preverimo linearnost preslikav F_1, F_2 in F_3 in opazimo, da je F trilinearna preslikava.

PRIMER RAČUNANJA: Naj bo $F : V^2 \rightarrow U$ bilinearna

$$\begin{aligned} F(u, w) &= F(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n) = \\ &= \alpha_1 F(v_1, w) + \alpha_2 F(v_2, w) + \cdots + \alpha_n F(v_n, w) = \\ &= \alpha_1 F(v_1, \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n) + \cdots = \\ &= \alpha_1 (\beta_1 F(v_1, w_1) + \beta_2 F(v_1, w_2) + \cdots + \beta_n F(v_1, w_n)) = \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i \beta_j F(v_i, w_j) \end{aligned}$$

DEFINICIJA: $F : V^n \rightarrow U$ je *antisimetrična*, kadar velja za vsak $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ enakost

$$F(v_1, \dots, v_j, \dots, v_k, \dots, v_n) = -F(v_1, \dots, v_k, \dots, v_j, \dots, v_n)$$

PRIMERA: Vektorski in mešani produkt.

Naj bo \mathcal{O} obseg, kjer $1 + 1 \neq 0$. Potem je $F(v_1, \dots, v_n) = 0$, če je $v_j = v_k$ za kakšen $j \neq k$.

$$\begin{aligned} F(v_1, \dots, v_n) &= -F(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \\ 2F(v_1, \dots, v_n) &= 0 \Rightarrow F(v_1, \dots, v_n) = 0 \end{aligned}$$

Naj bo $\pi \in S_n$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ Potem velja:

$$F(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}) = s(\pi)F(v_1, \dots, v_n)$$

Kjer je

$$s(\pi) = \begin{cases} 1 & \pi \text{ soda} \\ -1 & \pi \text{ liha} \end{cases}$$

Determinanta reda 3 je trilinearna in antisimetrična. Če želimo to posplošiti, iščemo n -linearen antisimetričen funkcional.

Naj bo $V = \mathcal{O}^n$, $U = \mathcal{O}$ in naj bo $F : V^n \rightarrow U$, to je $F : (\mathcal{O}^n)^n \rightarrow \mathcal{O}$. Poglejmo si $(\mathcal{O}^n)^n$.

$$(\mathcal{O}^n)^n = \underbrace{\mathcal{O}^n \times \mathcal{O}^n \times \dots \times \mathcal{O}^n}_n$$

Torej lahko matriko $\mathcal{O}^{n \times n}$ identificiramo z $(\mathcal{O}^n)^n$, to je $(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \equiv A$.

Torej iščemo n -linearen antisimetričen funkcional $F : \mathcal{O}^{n \times n} \equiv (\mathcal{O}^n)^n \rightarrow \mathcal{O}$. Recimo, da je F tak funkcional.

$$\begin{aligned} F(A) &= F(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) = \\ &= F(\underbrace{a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n}_{A^{(1)}}, \underbrace{a_{12}e_1 + \dots + a_{n2}e_n}_{A^{(2)}}, \dots, \underbrace{a_{1n}e_1 + \dots + a_{nn}e_n}_{A^{(n)}}) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq n} F(a_{i_1 1}e_{i_1}, a_{i_2 2}e_{i_2}, \dots, a_{i_n n}e_{i_n}) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq n} a_{i_1 1}a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} F(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{i_1 1}a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} F(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

kjer je $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$. i_1, i_2, \dots, i_n so različni. Ostali sumandi so $s_0 = 0$ zaradi antisimetričnosti.

Determinatno definiramo kot

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

kjer je $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$. Torej je

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{O}^{n \times n} &\rightarrow \mathcal{O} \\ A &\mapsto \det A \end{aligned}$$

Ugotovili smo, da če je $F : \mathcal{O}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{O}$ n -linearen antisimetričen funkcional, potem velja

$$F(A) = F(I) \cdot \det A$$

TRDITEV: $\det : \mathcal{O}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{O}$ je n -linearen antisimetričen funkcional.

DOKAZ:

- n -linearnost (na prvem faktorju, ker zaradi antisimetričnosti velja na ostalih)

Homogenost:

$$\begin{aligned} \det(\alpha A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) &= \\ &= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) (\alpha a_{i_1 1}) a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \\ &= \alpha \det A \end{aligned}$$

Aditivnost:

$$\begin{aligned} \det(B^{(1)} + C^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) &= \\ &= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) (b_{i_1 1} + c_{i_1 1}) a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) b_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} + \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) c_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \\ &= \det(B^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) + \det(C^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) \end{aligned}$$

- antisimetričnost:

$$\begin{aligned}
\det(A^{(2)}, A^{(1)}, A^{(3)}, \dots, A^{(n)}) &= \\
&= \sum_{\pi \in S_n} a_{i_1 2} a_{i_2 1} a_{i_3 3} \cdots a_{i_n n} = \\
&= \sum_{\pi \in S_n} a_{i_2 1} a_{i_1 2} a_{i_3 3} \cdots a_{i_n n} = \\
&= \sum_{\rho \in S_n} s(\rho) a_{i_2 1} a_{i_1 2} a_{i_3 3} \cdots a_{i_n n} = -\det A
\end{aligned}$$

kjer je $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_2 & i_1 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$, torej je $s(\rho) = -s(\pi)$.

Torej so n -linearni antisimetrični funkcionali $F : \mathcal{O}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{O}$ točno vsi funkcionali oblike $F(A) = \alpha \det(A)$, kjer je $\alpha \in \mathcal{O}$. Pri tem je $\alpha = F(I)$.

4.8.15 Lastnosti determinante

1. Velja $\det(A^\top) = \det A$.

DOKAZ: Naj bo $B = A^\top, B = [b_{ij}]$ kjer je $b_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j$.

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} = \\
&= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n} = \sum_{\rho \in S_n} s(\rho) a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}
\end{aligned}$$

Ustrezna permutacija $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ je enaka $\rho = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \pi^{-1}$. Ker velja $s(\rho) = s(\pi)$, dobimo

$$\det B = \det A$$

Torej je

$$\det A^\top = \det A$$

2. Determinanta in operacije za računanje ranga

- Pri medsebojni zamenjavi dveh stolpcev (vrstic), se determinanta pomnoži z -1 zaradi antisimetričnosti. Za vrstice velja $\det A^\top = \det A$.

- Pri množenju stolpca (vrstice) z α , se determinanta pomnoži z α , ker je n -linearen funkcional.
- Če stolpcu prištejemo večkratnik kakega drugega stolpca (analogno za vrstice), se determinanta ohrani.

$$\begin{aligned} \det(A^{(1)} + \alpha A^{(2)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) &= \\ = \det(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) + \alpha \det(A^{(2)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) &= \det A \end{aligned}$$

Iz definicije determinante sledi, da če ima A kak stolpec (ali vrstico) enak 0, je $\det A = 0$.

Če stolpcu prištejemo linearno kombinacijo drugih stolpcev, se determinanta ohrani.

Recimo, da so stolpci matrike A linearno odvisni. Npr $A^{(1)} = \alpha_2 A^{(2)} + \dots + \alpha_n A^{(n)}$. $A^{(1)}$ prištejemo $(-\alpha_2)A^{(2)} + \dots + (-\alpha_n)A^{(n)}$ in dobimo stolpec 0. Ker se determinanta ohrani, je $\det A = 0$.

TRDITEV: Če matrika ni obrnljiva je $\det A = 0$ ($\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$).

DOKAZ: A ni obrnljiva $\Rightarrow \text{rang } A < n \Rightarrow$ stolpci matrike A so linearno odvisni $\Rightarrow \det A = 0$.

Naj bo A zgornje ali spodnje trikotna matrika. Potem velja

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

To hitro vidimo, če si narišemo shemo matrike, kar je v zvezku.

Če je v zgornje trikotni matriki $a_{ii} \neq 0$ za $i = 1, \dots, n$, je ta matrika obrnljiva.

3. Multiplikativnost Za $A, B \in \mathcal{O}^{n \times n}$ velja

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

DOKAZ: Naj bo $F : \mathcal{O}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{O}$ in $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$. F definiramo kot

$$F(X) = \det(AX)$$

F je n -linearna antisimetrična preslikava. Velja

$$F(X) = F(X^{(1)}, \dots, X^{(n)}) = \det(AX^{(1)}, \dots, AX^{(n)})$$

Vemo, da velja

$$\begin{aligned} F(X) &= F(I) \det X \\ F(I) &= \det(AI) = \det A \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\det(AX) = (\det A)(\det X)$$

□

Recimo, da je A obrnljiva. Potem velja

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \underbrace{\det(AA^{-1})}_{(\det A)(\det A^{-1})} = \det I = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

Torej velja, da če je A obrnljiva, je $\det A \neq 0$. Vemo že, da velja obratno, torej velja

$$\exists A^{-1} \iff \det A \neq 0$$

4. Razvoj determinante

DEFINICIJA: Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$ in $n > 0$. $A_{ij} \in \mathcal{O}^{(n-1) \times (n-1)}$ dobimo tako, da iz A odstranimo i -to vrstico in j -ti stolpec. Pravimo, da je A_{ij} *podmatrika*.

Poddeterminanto matrike A definiramo kot

$$(-1)^{i+j} \det A_{ij} \equiv \widetilde{a}_{ij}$$

Matrika $\widetilde{A} = [\widetilde{a}_{ij}]$ $i, j = 1, \dots, n \in \mathcal{O}^{n \times n}$ je *prirejenka* matrike A .

Poglejmo si naslednjo determinanto

$$\det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & A^{(n-1)} & e_n \end{bmatrix} = \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_{n-1} n-1} = \sum_{\rho \in S_{n-1}} s(\rho) a_{i_1 1} \dots a_{i_{n-1} n-1} = \det A_{nn}$$

Kjer je $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{n-1} & n \end{pmatrix}$, ker je drugače $a_{i_n n} = 0$. ρ definiramo kot $\rho = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-1 \\ i_1 & \dots & i_{n-1} \end{pmatrix} \in S_{n-1}$. Velja $s(\pi) = s(\rho)$.

Poglejmo si še

$$\det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & e_i & \dots & A^{(n)} \end{bmatrix}$$

Kjer je e_i na j -tem mestu. Želeli bi si matriko preoblikovati v takšno obliko, kot smo jo obravnavali v prejšnjem primeru. Žal ne moremo kar zamenjati i -te in n -te vrstice, ter j -tega in n -tega stolpca, ker bi s tem spremenili vrstni red stolpcev in vrstic v matriki. Lahko pa postopoma premikamo stolpec/vrstico, tako da delamo neke vrste transpozicije (skica v zvezku). S tem pridemo podmatriko A_{ij} , ki ima v zadnjem

stolpcu enotski vektor e_n . Zaradi antisimetričnosti se nam spremeni predznak determinante. Torej dobimo

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & e_i & \dots & A^{(n)} \end{bmatrix} &= \\ &= (-1)^{(n-i)+(n-j)} \det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \widetilde{a}_{ij}\end{aligned}$$

Poglejmo si, *razvoj* determinante po j -tem stolpcu.

$$\begin{aligned}\det A &= \det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & \underbrace{a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n}_{A^{(j)}} & \dots & A^{(n)} \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & e_i & \dots & A^{(n)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ij}\end{aligned}$$

Torej velja

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ij} = \det A \quad \forall j$$

Če zamenjamo A z A^T , dobimo podobno formulo za razvoj determinante po i -ti vrstici

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ij} = \det A \quad \forall i$$

Za $j \neq k$ velja

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ik} = \det \begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & \underbrace{A^{(j)}}_{j\text{-to mesto}} & \dots & \underbrace{A^{(j)}}_{k\text{-to mesto}} & \dots & A^{(n)} \end{bmatrix} = 0$$

Torej velja

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ik} = 0 \quad \forall j, k : j \neq k$$

Če A zamenjamo z A^T dobimo podobno za vrstice

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{kj} = 0 \quad \forall i, k : i \neq k$$

Te formule lahko združimo v naslednje

$$A\widetilde{A}^T = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A)I$$

Podobno lahko zapišemo

$$\tilde{A}^\top A = (\det A)I$$

To dvojje lahko združimo v

$$\tilde{A}^\top A = A\tilde{A}^\top = (\det A)I$$

POSLEDICA: Če je $\det A \neq 0$ velja

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \tilde{A}^\top$$

DETERMINANTE NEKATIRH MATRIK POSEBNE OBLIKE:

$$\det \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B)$$

kjer sta A in B kvadratni matriki.

OSNOVNA IDEJA DOKAZA:

Delamo indukcijo glede na velikost matirke A in razvoj determinante po prvem stolpcu.

Za $k = 1$ velja:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & * \\ 0 & B \end{bmatrix} = a_{11} \det B$$

Za $k = 2$ veja:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & \\ & & B \end{bmatrix} &= a_{11}(a_{22} \det B) - a_{21}(a_{12} \det B) = \\ &= \det B(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (\det A)(\det B) \end{aligned}$$

Sorodno naredimo za $k \rightsquigarrow k + 1$.

Če imamo bločno zgornje trikotno matriko velja

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} = (\det A_1)(\det A_2) \cdots (\det A_k)$$

Podobno velja tudi za bločno spodnje trikotne.

Bločno diagonalno matriko lahko zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$$

in velja

$$\det(\text{diag}(A_1, \dots, A_k)) = (\det A_1) \cdots (\det A_k)$$

4.8.16 Determinanta endomorfizma

Naj bo preslikava $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ in naj bosta A, A' matriki, ki pripada preslikavi \mathcal{A} . Ker sta si A in A' podobni, velja

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP \\ PA' &= AP \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} \det(PA') &= \det(AP) \\ (\det P)(\det A') &= (\det A)(\det P) \\ \exists P^{-1} &\Rightarrow \det P \neq 0 \\ &\Rightarrow \det A' = \det A \end{aligned}$$

Podobni matriki imata enako determinanto. Zato je smiselno definirati

$$\det \mathcal{A} = \det A$$

(neodvisno od izbire baze v V)

CRAMERJEVA FORMULA:

Naj bo $Ax = b, A \in \mathcal{O}^{n \times n}$ sistem enačb innaj bo $\det A \neq 0$. Vemo, da je

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \text{ Definiramo}$$

$$A_j = [A^{(1)}, \dots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}]$$

Cramerjeva formula pravi, da velja

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, \dots, n$$

DOKAZ:

Ker $\det A \neq 0$, obstaja A^{-1} . Vemo, da velja

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^\top$$

Zato velja

$$\begin{aligned} Ax = b &\Rightarrow x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^\top b \Rightarrow \\ \Rightarrow x_j &= \frac{1}{\det A} (\tilde{A}^\top b)_j = \frac{1}{\det A} \underbrace{(\widetilde{a_{1j}}b_1 + \widetilde{a_{2j}}b_2 + \cdots + \widetilde{a_{nj}}b_n)}_{\text{razvoj determinante po } j\text{-tem stolpcu}} = \\ &= \frac{1}{\det A} \det [A^{(1)}, \dots, b, \dots, A^{(n)}] \end{aligned}$$

4.8.17 Karakteristični polinom in minimalni polinom

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$. Potem je

$$\Delta_A(\delta) = \det(A - \lambda I)$$

karakteristični polinom matrike A (glej $A \in \mathbb{R}^3$). $\Delta_A(\delta)$ je polinom n -te stopnje s koeficienti v \mathcal{O} .

$$\begin{aligned} \Delta_A(\delta) &= \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + \underbrace{p(\lambda)}_{\text{st} \leq n-2} = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n \end{aligned}$$

Iz tega zapisa lahko hitro razberemo, da veljajo naslednje enačbe

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1} \overbrace{(a_{nn} + a_{22} + \cdots + a_{nn})}^{slA} \\ a_0 &= \det A \end{aligned}$$

IZREK: Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$ in $\Delta_A(\delta)$ njen karakteristični polinom. Potem je $\alpha \in \mathcal{O}$ lastna vrednost matrike A natanko takrat, kadar je

$$\Delta_A(\alpha) = 0$$

DOKAZ: $\alpha \in \mathcal{O}$:

α je lastna vrednost $A \iff A - \alpha I$ ni obrnljiva $\iff \det(A - \alpha I) = 0 \iff \Delta_A(\alpha) = 0$

□

Za lastne vektorje rešujemo homogen sistem $(A - \alpha I)x = 0$.

Naj bo preslikava $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ in naj ji pripadata matriki A, A' . Vemo $A' = P^{-1}AP$. Velja

$$\begin{aligned} \Delta_{A'} &= \det(A' - \lambda I) = \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \\ &= \underbrace{(\det(P^{-1}))}_{(\det P)^{-1}} \det(A - \lambda I) (\det P) = \\ &= \det(A - \lambda I) = \Delta_A \end{aligned}$$

Torej velja

$$\Delta_{A'}(\lambda) = \Delta_A(\lambda)$$

Zato je smiselno definirati

$$\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = \Delta_A(\lambda)$$

Torej je α lastna vrednost endomorfizma \mathcal{A} natanko takrat, ko je $\Delta_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$.

POLINOM Z MATRIČNIMI KOEFICIENTI

Naj bo

$$p(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \cdots + A_k\lambda^k, \quad A_j \in \mathcal{O}^{n \times n}$$

To lahko zapišemo v matriko kot

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} p_{11}(\lambda) & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & p_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} = [p_{ij}(\lambda)], \quad i, j = 1, \dots, n$$

kjer je $p_{ij}(\lambda)$ polinom s koeficienti v \mathcal{O} in stopnja $p_{ij}(\lambda) \leq k$.

Naj bo $B \in \mathcal{O}^{n \times n}$. Potem je

$$p(B) = A_0 + A_1B + A_2B^2 + \cdots + A_kB^k$$

in B je ničla polinoma $p(\lambda)$, če je $p(B) = 0$.

Naj bo

$$q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_k\lambda^k$$

in $a_i \in \mathcal{O}$, $i = 0, 1, \dots, k$. Naj bo $B \in \mathcal{O}^{n \times n}$. Potem je

$$q(B) = a_0I + a_1B + a_2B^2 + \cdots + a_kB^k$$

B je ničla polinoma $q(\lambda)$, če je $q(B) = 0$.

IZREK (Cayley, Hamilton): Kvadratna matrika je ničla svojega karakterističnega polinoma.

DOKAZ:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)(\widetilde{A - \lambda I})^\top &= (\det(A - \lambda I))I \\ (\widetilde{A - \lambda I})^\top &= [p_{ij}(\lambda)] \quad i, j = 1, \dots, n \\ &= B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1} \\ \Rightarrow (A - \lambda I)(B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) &= \\ &= \Delta_A(\lambda)I = (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n)I \end{aligned}$$

Zmnožimo in uredimo po potencah λ , nato izenačimo koeficiente:

$$\begin{aligned} AB_0 &= a_0I \\ AB_1 - B_0 &= a_1I && \cdot A \\ AB_2 - B_1 &= a_2I && \cdot A^2 \\ &\vdots \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1}I && \cdot A^{n-1} \\ -B_{n-1} &= a_nI && \cdot A^n \end{aligned}$$

Če te enačbe šestejemo, dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n}_{\Delta_A(A)} \\ &\Rightarrow \Delta_A(A) = 0 \end{aligned}$$

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$. Označimo

$$P = \{p(\lambda) : p(A) = 0\}$$

in velja $\Delta(\lambda) \in P$.

DEFINICIJA: *Minimalni polinom* matrike A :

$$m_A(\lambda) \in P$$

Vodilni koeficient $m_A(\lambda)$ je 1 in velja

$$\text{st } m_A(\lambda) \leq \text{st } p(\lambda), \quad p \in P \setminus \{0\}$$

Lastnosti:

$$(1) \quad m_A(\lambda) | \Delta_A(\lambda) \quad (\exists q(\lambda) : \Delta_A(\lambda) = q(\lambda) \cdot m_A(\lambda))$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \Delta_A(\lambda) &= q(\lambda)m_A(\lambda) + o(\lambda) \\ \text{st } o(\lambda) &< \text{st } m_A(\lambda) \end{aligned}$$

λ zamenjamo z A in dobimo

$$\underbrace{\Delta_A(A)}_0 = q(A) \underbrace{m_A(A)}_0 + o(A)$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} &\Rightarrow o(A) = 0 \\ &\Rightarrow o(\lambda) = 0 \quad \text{drugače protislovje z def. } m_A(\lambda) \\ &\Rightarrow \Delta_A(\lambda) = q(\lambda)m_A(\lambda) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \alpha \in \mathcal{O} : m_A(\alpha) = 0 \iff \Delta_A(\alpha) = 0$$

Dokaz:

(\Rightarrow) Uporabimo (1).

(\Leftarrow) $\Delta_A(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ je lastna vrednost A , zato obstaja $x \in \mathcal{O}^n, x \neq 0$, ki je lasten vektor matrike A , to je, $Ax = \alpha x$. Torej velja

$$\begin{aligned} m_A(\lambda) &= q(\lambda)(\lambda - \alpha) + m_A(\alpha) \\ \lambda &\leftrightarrow A \\ \underbrace{m_A(A)}_0 &= q(A)(A - \alpha I) + m_A(\alpha)I \quad | \cdot x \\ &\Rightarrow 0 = q(A) \underbrace{(A - \alpha I)x + m_A(\alpha)x}_{Ax - \alpha x = 0} \\ &\Rightarrow m_A(\alpha)x = 0 \Rightarrow m_A(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

□

Poglejmo si obseg kompleksni števil $\mathcal{O} = \mathbb{C}$.

$$\Delta_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ so različne ničle $\Delta_A(\lambda)$ in so edine lastne vrednosti matrike A . n_j je *algebrajska kratnost* lastne vrednosti λ_j . Zapišemo lahko

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

in velja $1 \leq m_j \leq n_j \quad \forall j$.

PRIMER:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Torej sta i in $-i$ kompleksni lastni vrednosti matrike A .

TRDITEV: Podobni matriki imata isti minimalni polinom.

DOKAZ:

$$B = P^{-1}AP$$

$$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$$

$$B^j = \underbrace{(P^{-1}AP) \dots (P^{-1}AP)}_j = P^{-1}A^jP$$

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_k\lambda^k$$

$$p(B) = a_0I + a_1B + \dots + a_kB^k = P^{-1}(a_0I + a_1A + \dots + a_kA^k)P = P^{-1}p(A)P$$

$$\Rightarrow p(B) = P^{-1}p(A)P$$

$$\Rightarrow p(B) = 0 \iff p(A) = 0$$

$$\Rightarrow m_B(\lambda) = m_A(\lambda)$$

Zato definiramo minimalni polinom endomorfizma \mathcal{A} s predpisom

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = m_A(\lambda)$$

kjer A pripada \mathcal{A} v katerikoli bazi.

Velja

$$m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$$

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + \lambda^k$$

$$m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = a_0id_V + a_1\mathcal{A} + \dots + \mathcal{A}^k = 0$$

4.8.18 Invariantni podprostori

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, vektorski podprostor $U \subseteq V$ je *invarianten* za \mathcal{A} , kadar velja

$$x \in U \Rightarrow \mathcal{A}x \in U$$

λ - lastna vrednost \mathcal{A}

$\ker(\mathcal{A} - \lambda I)$ - lastni podprostor endomorfizma \mathcal{A}

$\ker(\mathcal{A} - \lambda I)$ je invarianten za \mathcal{A}

$$\begin{aligned} x \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I) &\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda I)(\mathcal{A}x) = \\ &= (\mathcal{A}^2 - \lambda \mathcal{A})x = \underbrace{\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda I)x}_0 = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{A}x \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I) \end{aligned}$$

Naj bo U invarianten za \mathcal{A} . Potem lahko definiramo preslikavo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_U : U &\rightarrow U \\ \mathcal{A}_U x &= \mathcal{A}x \quad \forall x \in U \end{aligned}$$

\mathcal{A}_U je zožitev \mathcal{A} na U in $\mathcal{A}_U \in \mathcal{L}(U)$.

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ Potem je

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$$

kjer je V_j invarianten za \mathcal{A} za vse $j = 1, \dots, k$. Označimo

$$\mathcal{A}_j := \mathcal{A}_{V_j} \in \mathcal{L}(V_j)$$

To zapišemo v obliki

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_k$$

Naj bodo $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_k$ urejene baze V_1, V_2, \dots, V_k in A_j matrika, ki pripada endomorfizmu \mathcal{A}_j v bazi \mathcal{B}_j . Potem je

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

urejena baza prostora V , ker $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ za vsak $i \neq j$.

Naj bo A matirka, ki pripada endomorfizmu \mathcal{A} v bazi \mathcal{B} . Velja

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$$

Ker dokaz vsebuje veliko skica in je relativno očiten, obstaja samo v zvezku.

Naj bo V kompleksen končno razsežen vektorski prostor.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\in \mathcal{L}(V) \quad (\mathcal{O} \in \mathbb{C}) \\ \Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \\ m_{\mathcal{A}}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}\end{aligned}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ so različne lastne vrednosti \mathcal{A} in velja $1 \leq m_j \leq n_j$ za vsak j .

$$W_j = \ker(\mathcal{A} - \lambda_j I)^{m_j} \quad j = 1, \dots, k$$

W_j je *korenski podprostor* endomorfizma \mathcal{A} (pripada lastni vrednost λ_j).

IZREK: Korenski podprostor $W_j, j = 1, \dots, k$ so invariantni za \mathcal{A} , poleg tega pa velja

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

DOKAZ: invariantnost

$$\begin{aligned}x \in W_j &\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda_j I)^{m_j} \mathcal{A}x = \underbrace{\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda_j I)^{m_j} x}_0 = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{A}x \in W_j\end{aligned}$$

Naj bo

$$p_j(\lambda) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$

$p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_k(\lambda)$ so tuji, ker nimajo nobene skupne ničle. Potem obstajajo taki polinomi $q_1(\lambda), q_2(\lambda), \dots, q_k(\lambda)$, da velja

$$p_1(\lambda)q_1(\lambda) + p_2(\lambda)q_2(\lambda) + \cdots + p_k(\lambda)q_k(\lambda) = 1$$

Torej velja

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k p_i(\mathcal{A})q_i(\mathcal{A}) &= \mathcal{I} \quad (\mathcal{I} = id_V) \\ x \in V &\Rightarrow x = \mathcal{I}x = \sum_{i=1}^k \underbrace{p_i(\mathcal{A})q_i(\mathcal{A})x}_{x_i} = \sum_{i=1}^k x_i\end{aligned}$$

Trdimo, da je $x_i \in W_i$ (od tod sledi $V = W_1 + \cdots + W_k$).

$$\begin{aligned}x_i &\in \ker(\mathcal{A} - \lambda_i I)^{m_i} \quad ? \\ (\mathcal{A} - \lambda_i I)^{m_i} x_i &= 0 \quad ? \\ m_{\mathcal{A}}(\lambda) &= p_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{m_i} \\ \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda_i I)^{m_i} p_i(\mathcal{A})}_{m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=0} q_i(\mathcal{A}) x &= 0\end{aligned}$$

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \quad \text{„direktnost“}$$

$$x \in V$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, \quad x_i \in W_i \forall i \quad (\text{vemo})$$

$$x = x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_k \quad x_i \in W_i \forall i$$

$$\Rightarrow x_i = x'_i \forall i \quad ?$$

$$\underbrace{(x_1 - x'_1)}_{\in W_1} + \cdots + \underbrace{(x_k - x'_k)}_{\in W_k} = 0$$

$$y_i = x_i - x'_i \in W_i \quad \forall i$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = 0$$

$$\Rightarrow y_i = 0 \quad \forall i \quad ?$$

$$y_i \in W_i \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda_i I)^{m_i} y_i = 0$$

$$p_j(\lambda) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$

$$j \neq i \Rightarrow p_j(\lambda) \text{ vsebuje faktor } (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$

$$\Rightarrow p_j(\mathcal{A}) y_i = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = 0$$

$$\Rightarrow p_j(\mathcal{A})(y_1 + y_2 + \cdots + y_k) = 0$$

$$\Rightarrow p_j(\mathcal{A}) y_j = 0$$

$$y_j = \mathcal{I} y_j = \left(\sum_{i=1}^k p_i(\mathcal{A}) q_i(\mathcal{A}) \right) y_j = \sum_{i=1}^k q_i(\mathcal{A}) p_i(\mathcal{A}) y_j = 0 \quad \forall j$$

□

Torej velja

$$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V) \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_k$$

$$\mathcal{A}_j := \mathcal{A}_{W_j}$$

IZREK: Za zožitve $\mathcal{A}_j \in \mathcal{L}(W_j)$, $j = 1, \dots, k$, veljajo še naslednje lastnosti:

(i) λ_j je edina lastna vrednost \mathcal{A}_j

(ii) $\Delta_{\mathcal{A}_j}(\lambda) = (-1)^{n_j} (\lambda - \lambda_j)^{n_j}$

(iii) $m_{\mathcal{A}_j}(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$

POSLEDICA:

$$\dim W_j = n_j \quad \forall j$$

DOKAZ:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_j - \lambda_j \mathcal{I}_j)^{m_j} x &= (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{m_j} x = 0 \\ \Rightarrow (\mathcal{A}_j - \lambda_j \mathcal{I}_j)^{m_j} &= 0 \Rightarrow \mathcal{A}_j \text{ je ničla polinoma } (\lambda - \lambda_j)^{m_j} \end{aligned}$$

Zato je $m_{\mathcal{A}_j}(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{t_j}, t_j \leq m_j \quad \forall j$.

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{A}_j}(\lambda) &= (-1)^{s_j} (\lambda - \lambda_j)^{s_j}, s_j \geq t_j \quad \forall j \\ \Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) &= \Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(A_1 - \lambda I_1) \cdots \det(A_k - \lambda I_k) = \\ &= \Delta_{\mathcal{A}_1}(\lambda) \cdots \Delta_{\mathcal{A}_k}(\lambda) \\ (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} &= (-1)^{s_1} (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdots (-1)^{s_k} (\lambda - \lambda_k)^{s_k} \\ &\Rightarrow s_i = n_i \quad \forall i \\ m_{\mathcal{A}_j}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_j)^{t_j} \quad t_j \leq m_j \\ r(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{t_k} \\ \text{st}(r) &= t_1 + t_2 + \cdots + t_k \leq m_1 + m_2 + \cdots + m_k = \text{st}(m_{\mathcal{A}}(\lambda)) \end{aligned}$$

Ker je $(\mathcal{A}_j - \lambda_j \mathcal{I}_j)^{t_j} = 0$, velja

$$r(\mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I}_1)^{t_1} \cdots (\mathcal{A} - \lambda_k \mathcal{I}_k)^{t_k} = 0$$

Zato je $t_1 + \cdots + t_k = m_1 + \cdots + m_k$. Od tod dobimo $t_j = m_j \quad \forall j$.

4.8.19 Endomorfizmi z eno samo lastno vrednostjo

(na $\mathcal{O} = \mathbb{C}$)

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ in $\rho \in \mathbb{C}$ edina lastna vrednost \mathcal{A} . Potem je

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) &= (-1)^n (\lambda - \rho)^n \\ m_{\mathcal{A}}(\lambda) &= (\lambda - \rho)^r, \quad 1 \leq r \leq n \end{aligned}$$

Po definiciji minimalnega polinoma velja

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \rho \mathcal{I})^r &= 0 \\ (\mathcal{A} - \rho \mathcal{I})^{r-1} &\neq 0 \end{aligned}$$

Definiramo

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \rho \mathcal{I}$$

kjer je $\mathcal{B}^r = 0$ in $\mathcal{B}^{r-1} \neq 0$. Pravimo, da je \mathcal{B} *nilpotent* in r *indeks nilpotentnosti*. Potem velja

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{B}}(\lambda) &= (-1)^n \lambda^n \\ m_{\mathcal{B}}(\lambda) &= \lambda^r\end{aligned}$$

Označimo

$$V_i = \ker \mathcal{B}^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

in velja $\mathcal{B}^0 = \mathcal{I}$. Če $i \geq r$, potem $V_i = V$. in $V_0 = \{0\}$. Velja

$$x \in V_i \Rightarrow B^i x = 0 \Rightarrow B^{i+1} x = B(B^i x) = 0 \Rightarrow x \in V_{i+1}$$

zato velja

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_r = V$$

Lastnosti:

$$1. \quad x \in V_i \iff Bx \in V_{i-1}$$

DOKAZ:

$$x \in V_i \iff B^i x = 0 \iff B^{i-1}(Bx) = 0 \iff Bx \in V_{i-1}$$

$$2. \quad \text{Če so } v_1, \dots, v_p \in V_i \text{ linearno neodvisni in velja } \text{Lin}\{v_1, \dots, v_p\} \cap V_{i-1} = \{0\}, \text{ potem so tudi } \mathcal{B}v_1, \dots, \mathcal{B}v_p \in V_{i-1} \text{ linearno neodvisni in velja } \text{Lin}\{\mathcal{B}v_1, \dots, \mathcal{B}v_p\} \cap V_{i-2} = \{0\}.$$

DOKAZ:

$$\begin{aligned}y &\in \text{Lin}\{\mathcal{B}v_1, \dots, \mathcal{B}v_p\} \cap V_{i-2} \\ y &= \alpha_1 \mathcal{B}v_1 + \dots + \alpha_p \mathcal{B}v_p = \mathcal{B}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) \in V_{i-2} \\ &\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p \in V_{i-1} \cap \text{Lin}\{v_1, \dots, v_p\} \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0 \\ &\Rightarrow y = 0\end{aligned}$$

iz dokaza sledi tudi $\mathcal{B}v_1, \dots, \mathcal{B}v_p$ so linearno neodvisni.

Iz skice v zvezku sledi, da je baza vektorskega prostora W

$$\mathcal{W} = \{\mathcal{B}^{q-1}x, \mathcal{B}^{q-2}x, \dots, x\}$$

W invarianten za \mathcal{B} , za kar zadošča opaziti $\mathcal{B}w \subseteq W$.

J_q je matrika, ki pripada zožitvi \mathcal{B} na W glede na urejeno bazo \mathcal{W} .

$$J_q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{q \times q}$$

Pravimo, da je J_q *Jordanova celica*.

Zapišemo lahko Jordanovo bazo za \mathcal{B} :

$$\{v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_1^{(r)}, v_2^{(1)}, \dots, v_2^{(*)}, \dots, v_{s_1}^{(1)}, \dots, v_{s_1}^{(*)}\}$$

$J(B)$ je matrika, ki pripada \mathcal{B} v Jordanovi bazi. Je bločno diagonalna, bloki pa so Jordanove celice

$$J(B) = \text{diag}(J_r, \dots, J_t)$$

Splošna situacija

$$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \\ m_{\mathcal{A}}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \end{aligned}$$

Vemo

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \tag{3}$$

$$W_j = \ker(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{m_j} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Vemo tudi, da je W_j invarianten za \mathcal{A} in $\mathcal{A}_j := \mathcal{A}|_{W_j} \in \mathcal{L}(W_j)$.

Poiščemo Jordanove baze za endomorfizme \mathcal{A}_j in jih razvrstimo po vrsti v bazo v.p. V . Dobimo Jordanovo bazo endomorfizma \mathcal{A} . $J(\mathcal{A})$ je Jordanova matrika endomorfizma \mathcal{A} , ki pripada \mathcal{A} v Jordanovi bazi.

$$J(\mathcal{A}) = \text{diag}(J(\mathcal{A}_1), \dots, J(\mathcal{A}_k))$$

Pravimo, da je n_j *algebrajska kratnost* λ_j .

$$J(\mathcal{A}_j) = \text{diag}(J_{r_1}(\lambda_j), \dots, J_{r_p}(\lambda_j))$$

kjer je $r_1 = m_j$ in $p = \dim(\ker(\mathcal{A}_j - \lambda_j \mathcal{I}_j)) = \dim(\ker(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}))$. Pravimo, da je p *geometrična kratnost* λ_j .

Jordanova matrika je do vrstenga reda blokov z isto lastno vrednostjo na diagonali enolično določena.

MATRIČNA VERZIJA

$J(A)$ je Jordanova matrika za A (Jordanova kanonična forma matirke A). Jordanova baza za A je

$$\{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\}$$

in velja zveza

$$P^{-1}AP = J(A)$$

4.8.20 Funkcije matrik

Vemo, da je $J = \rho I + N$. Zelo hitro se razbere

$$\begin{aligned} N^j e_1 &= 0 \\ &\vdots \\ N^j e_j &= 0 \\ N^j e_{j+1} &= e_1 \\ &\vdots \\ N^j e_r &= e_{r-r} \end{aligned}$$

Vemo že

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_s \lambda^s \\ p(N) &= a_0 I + a_1 N + \dots + a_s N^s \\ p(N) &= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_s & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & a_1 \\ & & & & & a_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

„Taylor” za polinom $p(\lambda)$:

$$p(\lambda) = p(\rho) + p'(\rho)(\lambda - \rho) + \frac{p''(\rho)}{2}(\lambda - \rho)^2 + \dots + \frac{p^{(j)}(\rho)}{j!}(\lambda - \rho)^j + \dots$$

Vemo $J - \rho I = N$. Od tod sledi

$$p(J) = p(\rho)I + p'(\rho)N + \frac{p''(\rho)}{2}N^2 + \dots + \frac{p^{(j)}(\rho)}{j!}N^j + \dots$$

Naj bo f povsod definirana in odvodljiva. Potem velja

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\rho)(\lambda - \rho)^j$$

Od tod sledi:

$$f(J) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\rho)N^j$$

Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Potem je $J(A)$ Jordanova matrika za A . Potem je

$$J(A) = \text{diag}(J_*, \dots, J_*)$$

kjer so J_* Jordanove celice. Definiramo

$$f(J(A)) := \text{diag}(f(J_*), \dots, f(J_*))$$

f se da razviti v Taylorjevo vrsto v okolici *spektra* matrike A .

$$\text{sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$$

Vemo $P^{-1}AP = J(A)$. Torej velja $A = PJ(A)P^{-1}$. Za polinome velja

$$p(A) = Pp(J(A))P^{-1}$$

Definicijo je smiselno razširiti na vse funkcije in velja

$$f(A) := Pf(J(A))P^{-1}$$

IZREK O PRESLIKAVI SPEKTRA: Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in $\text{sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Potem velja

$$\text{sp } f(A) = \{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_k)\} = f(\text{sp } A)$$

Naj bo

$$\mathcal{F}(A) = \{f : D_f \rightarrow \mathbb{C}, D_f \text{ odprta okolica } \text{sp } A, f \text{ analitična}\}$$

Torej $f \in \mathcal{F}(A) \Rightarrow \exists f(A)$. Velja, da je $(\mathcal{F}(A), +, \cdot)$ za $+, \cdot$ po točkah in množenje s skalarji po točkah algebra. Definirajmo preslikavo

$$\begin{aligned} F : \mathcal{F}(A) &\rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} \\ f &\mapsto f(A) \end{aligned}$$

Velja, da je F homomorfizem med algebrama $\mathcal{F}(A)$ in $\mathbb{C}^{n \times n}$.

1. $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$
2. $(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$
3. $(\alpha f)(A) = \alpha f(A), \quad \alpha \in \mathbb{C}$
4. $1_{\mathbb{C}}(A) = I$
5. $id_{\mathbb{C}}(A) = A$

PRIMER: Na $\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda = 1$ uporabimo F in dobimo

$$\sin^2 A + \cos^2 A = I$$

Naj bo $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ analitična na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (punktirana ravnina) in naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ter $0 \notin \text{sp } A (\iff \exists A^{-1})$. Potem velja

$$\exists f(A) = A^{-1}$$

Vemo da velja

$$f(\lambda) \cdot id_{\mathbb{C}}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \lambda = 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Uporabimo F in dobimo

$$f(A) \cdot A = I \Rightarrow f(A) = A^{-1}$$

4.9 Vektorski prostori s skalarnih produktom

V realnem ali kompleksnem prostoru. Označimo \mathbb{F} obseg kompleksnih ali realnih števil.

DEFINICIJA: *Skalarni produkt* na V je preslikava

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow \mathbb{F} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

ki ustreza pogojem

- (i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ $\forall x, y, z \in V$
- (ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall x, y \in V$
- (iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ $\forall x, y \in V$
- (iv) $\langle x, x \rangle > 0$ $\forall x \in V \setminus \{0\}$

PRIMERI

1. Običajni skalarni produkt v \mathbb{R}^n .
2. Standardni skalarni produkt v \mathbb{F}^n :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

3. $V = C[a, b] \quad a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$f \in V : f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je zvezna

V realen vektorski prostor. $f, g \in V$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \bar{g}(t) dt$$

je standardni skalarni produkt na V .

V v.p. s s.p. veljata lastnosti

- (i*) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ $\forall x, y, z \in V$
- (ii*) $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$ $\forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \forall x, y \in V$

Dokaz (i*):

$$\langle x, y + z \rangle = \overline{\langle y + z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

Dokaz (ii*):

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$$

PRIMER:

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, \gamma u + \delta v \rangle &= \\ &= \langle \alpha x, \gamma u \rangle + \langle \alpha x, \delta v \rangle + \langle \beta y, \gamma u \rangle + \langle \beta y, \delta v \rangle = \\ &= \alpha \bar{\gamma} \langle x, u \rangle + \alpha \bar{\delta} \langle x, v \rangle + \beta \bar{\gamma} \langle y, u \rangle + \beta \bar{\delta} \langle y, v \rangle \end{aligned}$$

DEFINICIJA: Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $x \in V$. Norma določena s skalarnim produktom je

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

in velja

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

kjer je d metrika na V .

LASTNOSTI:

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| (1) $\ x\ > 0$ | $\forall x \in V \setminus \{0\}$ |
| (2) $\ \alpha x\ = \alpha \ x\ $ | $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ |
| (3) $\ x + y\ \leq \ x\ + \ y\ $ | $\forall x, y \in V$ |

Dokaz (2):

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2$$

4.9.1 Koti:

Naj bosta $x, y \in V \setminus \{0\}$. Želeli bi si, da bi veljalo podobno kot v \mathbb{R}^3 , torej

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

Denimo, da je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Ali velja

$$\begin{aligned} \left| \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right| &\leq 1 \\ |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

IZREK (Cauchy, Bunjakovski, Schwarz): V vektorskem prostoru s skalarnim produktom velja neenakost

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

pri čemer velja enačaj natanko tedaj, kadar sta x in y linearno odvisna.

DOKAZ: Vemo, da velja

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = \\ &= \alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle x, y \rangle + \beta \bar{\alpha} \langle y, x \rangle + \beta \bar{\beta} \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

Za

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle y, y \rangle \geq 0 \\ \beta &= -\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

v zgornji enačba enaka

$$\begin{aligned} \langle y, y \rangle \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle &= \\ &= \underbrace{\langle y, y \rangle}_{\|y\| \geq 0} (\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Torej mora biti $y = 0$ ali pa

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Če je $y = 0$, potem $\langle x, y \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$ in $\|x\| \|y\| = \|x\| 0 = 0$.

Enačaj velja $\iff (y = 0 \text{ ali } \alpha x + \beta y = 0 \text{ za } \alpha = \langle y, y \rangle \text{ in } \beta = -\langle x, y \rangle)$
 $\iff (y = 0 \text{ ali } x = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y) \iff x, y \text{ sta linearno odvisna.}$

Naj bo $x = \alpha y$. Potem velja

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle \alpha y, y \rangle| = |\alpha \langle y, y \rangle| = |\alpha| \|y\|^2$$

in

$$\|x\| \|y\| = \|\alpha y\| \|y\| = |\alpha| \|y\| \|y\| = |\alpha| \|y\|^2$$

DOKAZ trikotniške neenakosti $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2\Re \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

□

DEFINICIJA: Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $x, y \in V$. Pravimo, da sta x in y *pravokotna* oziroma *ortogonalna* natanko takrat, kadar velja

$$\langle x, y \rangle = 0$$

in označimo $x \perp y$.

LASTNOSTI:

- $x \perp 0$ $\forall x \in V$
- $x \perp y \iff y \perp x$
- $x \perp x \iff x = 0$

TRDITEV: Če so vektorji x_1, \dots, x_k paroma pravokotni in različni od 0, potem so linearno neodvisni.

DOKAZ:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0$$

Skalarno pomnožimo z x_j , $j \in \{1, \dots, k\}$.

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k, x_j \rangle &= \langle 0, x_j \rangle = 0 \\ \alpha_1 \langle x_1, x_j \rangle + \dots &= \alpha_k \langle x_k, x_j \rangle = \alpha_j \langle x_j, x_j \rangle \end{aligned}$$

Velja

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_j \rangle &= 0 \\ \langle x_2, x_j \rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \langle x_j, x_j \rangle &> 0 \\ &\vdots \\ \langle x_k, x_j \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Sledi

$$\alpha_j \underbrace{\langle x_j, x_j \rangle}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$$

Torej so x_1, \dots, x_k linearno neodvisni.

DEFINICIJA: Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $M \subseteq V$. Pravimo, da je M *ortogonalna*, kadar velja sklep

$$\forall x, y \in M : x \neq y \Rightarrow x \perp y$$

Če je M ortogonalna in $0 \notin M$, potem je M linearno neodvisna.

DEFINICIJA: Pravimo, da je M *ortonormirana*, kadar je ortogonalna in za vsak $x \in M$ velja

$$\|x\| = 1$$

Naj bo $\{v_1, \dots, v_n\}$ ONB v.p. V s s.p. Za $x \in V$ velja

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Koeficient α_j izračnamo na sledeč način

$$\begin{aligned} \langle x, v_j \rangle &= \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_j \rangle = \\ &= \alpha_1 \langle v_1, v_j \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_j \rangle = \alpha_j \end{aligned}$$

Ker je $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormirana baza, velja

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

Torej velja

$$x = \sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle v_j$$

ORTOGONALIZACIJA (Gramm-Schmidt): Naj bodo x_1, \dots, x_m linearno neodvisni. Želimo najti y_1, \dots, y_m , ki so paroma pravokotni in velja

$$\text{Lin}\{x_1, \dots, x_k\} = \text{Lin}\{y_1, \dots, y_k\}$$

kjer je $k = 1, \dots, m$.

Poglejmo si induksijsko bazo $m = 2$. Naj bosta $x_1, x_2 \in V$ in iščemo y_1, y_2 , da velja $\langle y_1, y_2 \rangle = 0$. Vemo, da bo y_2 oblike

$$y_2 = x_2 + \alpha y_1$$

Enačbo skalarno pomnožimo z y_1 in dobimo

$$\underbrace{\langle y_2, y_1 \rangle}_0 = \langle x_2, y_1 \rangle + \alpha \langle y_1, y_1 \rangle$$

Od tod sledi

$$\alpha = -\frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$$

Za splošen indukcijski korak naredimo podoben postopek:

Recimo, da poznamo y_1, \dots, y_{k-1} in iščemo y_k . Vemo, da bo y_k oblike

$$y_k = x_k + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}$$

in iščemo $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$. Želimo si da velja

$$\langle y_k, y_i \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, k-1$$

Zgornjo enačbo skalarno pomnožimo z y_j in dobimo

$$\underbrace{\langle y_k, y_j \rangle}_0 = \langle x_k, y_j \rangle + \alpha_j \langle y_j, y_j \rangle$$

Od tod sledi

$$\alpha_j = -\frac{\langle x_k, y_j \rangle}{\langle y_j, y_j \rangle}$$

Torej velja

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle x_k, y_j \rangle}{\langle y_j, y_j \rangle} y_j \quad (6)$$

Z indukcijo dokažemo, da zaporedje y_1, \dots, y_m ustreza pogojem za GS-ortogonalizacijo. Za $m = 2$ že vemo, dokazujemo še indukcijski korak $k-1 \rightsquigarrow k$. Po indukcijski predpostavki y_1, \dots, y_{k-1} ustrezajo pogojem in trdimo, da y_1, \dots, y_{k-1}, y_k ustrezajo pogojem:

$$1. \langle y_i, y_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

Velja zaradi indukcijske predpostavke in izbire koeficientov $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$.

$$2. \text{Lin}\{x_1, \dots, x_j\} = \text{Lin}\{y_1, \dots, y_j\} \text{ za } j = 1, \dots, k$$

Za $j = 1, \dots, k-1$ vemo po indukcijski predpostavki. Dokazati moramo

$$\text{Lin}\{x_1, \dots, x_k\} = \text{Lin}\{y_1, \dots, y_k\}$$

Ker vemo, da so y_1, \dots, y_{k-1} linearna kombinacija x_1, \dots, x_{k-1} in obratno, je dovolj dokazati, da je x_k linearna kombinacija vektorjev y_1, \dots, y_k in da je y_k linearna kombinacija vektorjev x_1, \dots, x_k .

- x_k linearna kombinacija y_1, \dots, y_k
Neposredno iz formule 6.
- y_k linearna kombinacija x_1, \dots, x_k
Ker je $\text{Lin}\{y_1, \dots, y_{k-1}\} = \text{Lin}\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$, so y_1, \dots, y_{k-1} linearna kombinacija vektorjev x_1, \dots, x_{k-1} . Nato uporabimo formulo 6.

Dodatek:

$$z_j = \frac{y_j}{\|y_j\|} \quad j = 1, \dots, m$$

Vektorji z_1, \dots, z_m ustrezajo pogoejm GS-ortogonalizacije, poleg tega pa velja $\|z_j\| = 1$ za vsak j . Torej velja

$$\langle z_i, z_j \rangle = \delta_{ij}$$

in

$$\text{Lin}\{x_1, \dots, x_j\} = \text{Lin}\{z_1, \dots, z_j\} \quad j = 1, \dots, m$$

Za $i \neq j$ velja

$$\langle z_i, z_j \rangle = \left\langle \frac{y_i}{\|y_i\|}, \frac{y_j}{\|y_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|y_i\|} \frac{1}{\|y_j\|} \overbrace{\langle y_i, y_j \rangle}^0 = 0$$

Za $i = j$ velja

$$\langle z_i, z_i \rangle = \left\langle \frac{y_i}{\|y_i\|}, \frac{y_i}{\|y_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|y_i\|^2} \langle y_i, y_i \rangle = \frac{1}{\|y_i\|^2} \|y_i\|^2 = 1$$

POSLEDICA: Vsak netrivialen končno razsežen vektorski prostor s skalarnim produktom ima ortonormirano bazo.

DOKAZ: Naj bodo $\{x_1, \dots, x_n\}$ baza V . Z GS-ortogonalizacijo in normiranje dobimo $\{z_1, \dots, z_n\}$, za katere vemo, da so ortonormirana baza prostora V .

Naj bodo $\{v_1, \dots, v_n\}$ ONB V in $x, y \in V$. Zapišemo lahko

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$y = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$$

kjer je $\alpha_i = \langle x, v_i \rangle$ in $\beta_j = \langle y, v_j \rangle$. Potem velja

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle \alpha_i v_i, \beta_j v_j \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i} \end{aligned}$$

Pravimo, da je

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i}$$

standardni skalarni produkt vektorskega prostora \mathbb{F}^n .

Naj bo $\Phi : V \rightarrow \mathbb{F}^n$ preslikava s predpisom:

$$\Phi(x) = \Phi \left(\sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle v_i \right) = \begin{bmatrix} \langle x, v_1 \rangle \\ \langle x, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, v_n \rangle \end{bmatrix} = \alpha$$

Φ je izomorfizem vektorskih prostorov in velja

$$\langle x, y \rangle = \underbrace{\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle}_{\text{standardni s.p. v } \mathbb{F}^n}$$

DEFINICIJA: Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $M, N \subseteq V$ podmnožici. Velja

$$M \perp N \iff x \perp y \quad \forall x \in M \quad \forall y \in N$$

Pravimo, da je

$$M^\perp = \{x \in V : x \perp y \quad \forall y \in M\}$$

ortogonalni komplement množice M v V .

DEFINICIJA: Naj bosta V_1, V_2 podprostora v vektorskem prostoru V . Pravimo, da je vsota $V_1 + V_2$ *ortogonalna*, kadar je $V_1 \perp V_2$.

TRDITEV: Ortogonalna vsota je direktna. Označimo z $V_1 \boxplus V_2$.

DOKAZ: Vaja za DN.

TRDITEV: Če je $V = V_1 \boxplus V_2$, potem je $V_2 = V_1^\perp$ in $V_1 = V_2^\perp$.

DOKAZ: Prav tako vaja za DN.

IZREK: Naj bo U vektorski podprostor vektorskega prostora V . Potem je

$$V = U \oplus U^\perp$$

DOKAZ: Če je $U = \{0\}$ velja $U^\perp = V$. Naj bo $U \neq \{0\}$ in $\{v_1, \dots, v_k\}$ ortonormirana baza U . Za $x \in V$ lahko definiramo

$$\sum_{j=1}^k \langle x, v_j \rangle v_j \in U$$

Velja

$$x = y + z \quad z = x - y$$

Trdimo $z \in U^\perp$

$$\begin{aligned} \langle z, v_i \rangle &= \langle x - y, v_i \rangle = \langle x, v_i \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^k \langle x, v_j \rangle v_j, v_i \right\rangle = \\ &= \langle x, v_i \rangle - \sum_{j=1}^k \langle x, v_j \rangle \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{\delta_{ij}} = \langle x, v_i \rangle - \langle x, v_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

Torej je $\langle z, v_i \rangle = 0$ za $i = 1, \dots, k$.

Za $u \in U$ velja

$$u = \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j$$

Torej je

$$\langle z, u \rangle = \left\langle z, \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^k \overline{\alpha_j} \underbrace{\langle z, v_j \rangle}_0 = 0$$

Po definiciji sledi, da je $z \in U^\perp$.

Opomba: y je pravokotna projekcija x na U .

Naj bo $\{v_1, \dots, v_k\}$ ortonormirana baza vektorskega podprostora U , v v.p.s s.p. V . Naj bo endomorfizem $P \in \mathcal{L}(V)$, $P : V \rightarrow V$ definiran s predpisom

$$\begin{aligned} x &\mapsto y \\ Px &= \sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle v_i \end{aligned}$$

Pravimo, da je P *pravokotni projektor* na U in velja

$$\begin{aligned}\operatorname{im} P &= U \\ \ker P &= U^\perp \\ P^2 &= P\end{aligned}$$

Za $x \in V$ velja

$$x = \underbrace{y}_{Px} + z$$

Od tod sledi

$$z = x - Px = \underbrace{(\mathcal{I} - P)}_Q x$$

$Q = \mathcal{I} - P$ je pravokotna projekcija na U^\perp .

4.9.2 Linearne preslikave na vektorskih prostorih s skalarnim produktom

DEFINICIJA: Naj bo $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}$ linearna. Pravimo, da je φ *linearen funkcional*.

Naj bo $y \in V$. $\varphi_y : V \rightarrow \mathbb{F}$ definiramo s predpisom

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle$$

φ_y je linearen funkcional, ker je skalaren produkt linearen v prvem faktorju.

TRDITEV: Naj bosta $y, z \in V$ in $y \neq z$. Potem velja, da je $\varphi_y \neq \varphi_z$.

DOKAZ: Dokazujemo v obratno smer, t.j.: $\varphi_y = \varphi_z \Rightarrow y = z$. Če je $\varphi_y = \varphi_z$, potem sta preslikavi enaki za vsak $x \in V$ in velja

$$\begin{aligned}\varphi_y(x) &= \varphi_z(x) \\ \langle x, y \rangle &= \langle x, z \rangle\end{aligned}$$

Torej velja

$$\langle x, y - z \rangle = 0 \quad \forall x \in V$$

Ker velja za vsak x , si lahko izberemo $x = y - z$. Potem velja

$$\langle y - z, y - z \rangle = 0$$

torej je $y = z$.

□

Označimo:

$$\mathcal{L}(V, \mathbb{F}) \equiv V^*$$

in pravimo, da je V^* *dualni prostor* vektorskega prostora V .

IZREK (Reisz-ov izrek o reprezentaciji linearnih funkcionalov): Za vsak $\varphi \in V^*$ obstaja natanko en $y \in V$, tako da je $\varphi = \varphi_y$, t.j.:

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in V$$

DOKAZ: Naj bo $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormirana baza V in $\varphi \in V^*$. Iščemo y , da bo $\varphi = \varphi_y$. Za $x \in V$ velja

$$x = \sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle v_j$$

Od tod sledi:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi \left(\sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle v_j \right) = \sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle \varphi(v_j) = \sum_{j=1}^n \langle x, \overline{\varphi(v_j)} v_j \rangle = \\ &= \left\langle x, \underbrace{\sum_{j=1}^n \overline{\varphi(v_j)} v_j}_y \right\rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi = \varphi_y$. Enoličnost smo že dokazali v zgornjem dokazu.

□

Definirajmo preslikavo

$$F : V \rightarrow V^*$$

$$y \mapsto \varphi_y$$

F je aditivna in *antihomogena*⁵ ($F(\alpha y) = \overline{\alpha} F(y)$) in je bijekcija po Reisz-ovem izreku o reprezentaciji.

4.9.3 Hermitsko adjungirani endomorfizmi

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ in $y \in V$. Preslikava φ naj bo definirana s predpisom

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow \mathbb{F} \\ x &\mapsto \langle \mathcal{A}x, y \rangle \end{aligned}$$

⁵Nekateri pravijo tudi *poševno linearna*.

$\varphi \in V^*$, ker je A linearna. Po Reiszovem izreku obstaja $z \in V$, da velja $\varphi = \varphi_z$, t.j.:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in V$$

kjer je z odvisen od y . Torej lahko zapišemo

$$z = f(y) \quad f : V \rightarrow V$$

Torej velja

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x \in V$$

TRDITEV: f je linearna preslikava, t.j.: $f \in \mathcal{L}(V)$.

DOKAZ:

- **aditivnost**

$$\begin{aligned} \langle x, f(\overbrace{y_1 + y_2}^u) \rangle &= \langle Ax, y_1 + y_2 \rangle = \langle Ax, y_1 \rangle + \langle Ax, y_2 \rangle = \\ &= \langle x, f(y_1) \rangle + \langle x, f(y_2) \rangle = \langle x, \underbrace{f(y_1) + f(y_2)}_v \rangle \end{aligned}$$

Torej velja

$$\begin{aligned} \langle x, u \rangle &= \langle x, v \rangle \quad \forall x \in V \\ \langle x, u - v \rangle &= 0 \quad \forall x \in V \end{aligned}$$

Ker velja za vsak x si lahko izberemo $x = u - v$. Od tod sledi

$$\langle u - v, u - v \rangle = 0 \Rightarrow u = v$$

Torej velja

$$f(y_1 + y_2) = f(y_1) + f(y_2)$$

- **homogenost**

$$\langle x, \underbrace{f(\alpha y)}_u \rangle = \langle Ax, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle Ax, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, f(y) \rangle = \langle x, \underbrace{\alpha f(y)}_v \rangle$$

Po enakem premisleku kot prej velja $u = v$, torej

$$f(\alpha y) = \alpha f(y)$$

□

Označimo

$$f \equiv \mathcal{A}^*$$

in pravimo, da je \mathcal{A}^* *hermitsko adjungirani endomorfizem*. Torej velja

$$\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

TRDITEV: Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ in $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V)$ in naj velja:

$$\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Potem velja

$$\langle x, \mathcal{A}y \rangle = \langle \mathcal{A}^*x, y \rangle$$

DOKAZ:

$$\langle x, \mathcal{A}y \rangle = \overline{\langle \mathcal{A}y, x \rangle} = \overline{\langle y, \mathcal{A}^*x \rangle} = \langle \mathcal{A}^*x, y \rangle$$

□

TRDITEV: Za preslikavo, ki slika $\mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V)$ s predpisom $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$ velja

1. $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$ *involucija*
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
3. $(\alpha\mathcal{A})^* = \bar{\alpha}\mathcal{A}^*$
4. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$ *antimultiplikativnost*
5. $0^* = 0, \quad \mathcal{I}^* = \mathcal{I}$

LEMA: Naj bosta $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{L}(V)$ Če je

$$\langle \mathcal{C}_1 x, y \rangle = \langle \mathcal{C}_2 x, y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

potem je $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$. Analogno velja za $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ pri drugem faktorju.

DOKAZ: x fiksiramo in označimo

$$\mathcal{C}_1 x = u \qquad \mathcal{C}_2 x = v$$

Po predpostavki velja

$$\langle u, y \rangle = \langle v, y \rangle \quad \forall y \in V$$

Po istem premisleku ko smo ga že naredili velja $u = v$. Torej velja

$$\mathcal{C}_1 x = \mathcal{C}_2 x \quad \forall x \in V$$

Zato je $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.

DOKAZ LASTNOSTI (4):

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{AB})^* x, y \rangle &= \langle x, (\mathcal{AB})y \rangle = \langle x, \mathcal{A}(\mathcal{B}y) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{A}^* x, y \rangle = \langle \mathcal{B}^* \mathcal{A}^* x, y \rangle \quad \forall x, y \in V \end{aligned}$$

Po lemi torej velja

$$(\mathcal{AB})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$$

□

4.9.4 Prehod na matrike

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ in $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormirana baza V . Preslikavi \mathcal{A} priredimo matriko $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ v bazi \mathcal{V} . Velja

$$\mathcal{A}v_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{nj}v_n$$

Enačbo skalarno pomnožimo z v_i in dobimo

$$\langle \mathcal{A}v_j, v_i \rangle = a_{1j} \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_{\delta_{1i}} + a_{2j} \underbrace{\langle v_2, v_i \rangle}_{\delta_{2i}} + \dots + a_{nj} \underbrace{\langle v_n, v_i \rangle}_{\delta_{ni}} = a_{ij}$$

Torej velja

$$a_{ij} = \langle \mathcal{A}v_j, v_i \rangle \quad \forall i, j$$

Zanima nas kakšno matriko $B = [b_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ v bazi \mathcal{V} ima preslikava \mathcal{A}^* .

$$b_{ij} = \langle \mathcal{A}^* v_j, v_i \rangle = \langle v_j, \mathcal{A}v_i \rangle = \overline{\langle \mathcal{A}v_i, v_j \rangle} = \overline{a_{ji}}$$

Torej velja

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

Matrika B je torej oblike

$$B = \overline{A}^T = A^H$$

in pravimo, da je A^H *hermitsko transponirana*.

S tem smo dokazali naslednjo trditev

TRDITEV: Če endomorfizmu $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ v ortonormirana baza \mathcal{V} pripada matrika A , potem endomorfizmu \mathcal{A}^* v tej bazi pripada A^H .

4.9.5 Normalni endomorfizmi

DEFINICIJA: Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Pravimo, da je \mathcal{A} *normalen*, kadar velja

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$$

LASTNOSTI:

1. \mathcal{A} je normalen $\iff \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle = \langle \mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y \rangle \quad \forall x, y \in V$
2. $\|\mathcal{A}x\| = \|\mathcal{A}^*x\| \quad \forall x \in V$
3. $\ker \mathcal{A} = \ker \mathcal{A}^*$
4. $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ je normalen $\quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$
5. $\mathcal{A}x = \lambda x \iff \mathcal{A}^*x = \bar{\lambda}x$
6. $(\mathcal{A}x = \lambda x \wedge \mathcal{A}y = \mu y \wedge \lambda \neq \mu) \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$

DOKAZ:

1. (\Rightarrow)

$$\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle = \langle \mathcal{A}^*\mathcal{A}x, y \rangle = \langle \mathcal{A}\mathcal{A}^*x, y \rangle = \langle \mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y \rangle$$

(\Leftarrow)

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{A}^*x, y \rangle = \langle \mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y \rangle = \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle = \langle \mathcal{A}^*\mathcal{A}x, y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Po Lemi velja $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

2.

$$\|\mathcal{A}x\|^2 = \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}x \rangle = \langle \mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x \rangle = \|\mathcal{A}^*x\|^2$$

3.

$$\begin{aligned} x \in \ker \mathcal{A} &\iff \mathcal{A}x = 0 \iff \|\mathcal{A}x\| = 0 \iff \|\mathcal{A}^*x\| = 0 \iff \\ &\iff \mathcal{A}^*x = 0 \iff x \in \ker \mathcal{A}^* \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^* &= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{I}) = \\ &= \mathcal{A}\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + \lambda\bar{\lambda}\mathcal{I} = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{A} - \bar{\lambda}\lambda\mathcal{I} = \\ &= (\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^*(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}x = \lambda x &\iff (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0 \iff x \in \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) \stackrel{(3),(4)}{\iff} \\
&\iff x \in \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^* \iff x \in \ker(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{I}) \iff \\
&\iff (\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{I})x = 0 \iff \mathcal{A}^*x = \bar{\lambda}x
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\lambda\langle x, y \rangle &= \langle \lambda x, y \rangle = \langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*y \rangle \stackrel{(5)}{=} \langle x, \bar{\mu}y \rangle = \mu\langle x, y \rangle \\
&\Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0
\end{aligned}$$

□

Opombe:

- Lastnost (5) nam pove sp $\mathcal{A}^* = \overline{\text{sp } \mathcal{A}}$
- Iz (6) sledi

$$\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) \perp \ker(\mathcal{A} - \mu\mathcal{I}) \quad \forall \lambda \neq \mu$$

TRDITEV: Naj bo $\dim V = n$, normalen endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ pa naj ima n različnih lastnih vrednosti. Potem se da \mathcal{A} diagonalizirati v ONB.

DOKAZ: Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ različne lastne vrednosti. Velja

$$\mathcal{A}x_j = \lambda_j x_j \quad j = 1, \dots, n$$

za $x_j \neq 0$. Iz lastnosti normalnih endomorfizmov (6) sledi $x_i \perp x_j \forall i \neq j$. Torej lahko definiramo vektorje

$$y_j = \frac{x_j}{\|x_j\|} \quad \forall j \Rightarrow \mathcal{A}y_j = \lambda_j y_j$$

ki tvorijo ONB $\{y_1, \dots, y_n\}$.

□

TRDITEV: Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ in U v. podprostor v.p. V . Potem velja

$$\mathcal{A}U \subseteq U \Rightarrow \mathcal{A}^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$$

DOKAZ: Naj bo $x \in U$ in $y \in U^\perp$. Velja

$$\langle \mathcal{A}^*x, y \rangle = \underbrace{\langle x, \mathcal{A}y \rangle}_{\substack{\in U^\perp \\ \in U}} = 0$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{A}^*x &\in U^\perp \quad \forall x \in U^\perp \\ \Rightarrow \mathcal{A}^*(U^\perp) &\subseteq U^\perp \end{aligned}$$

□

IZREK: Naj bo \mathcal{A} normalen endomorfizem na V . Če je V kompleksen ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) ali če je V realen in ima karakteristični polinom vse ničle realne, se da \mathcal{A} diagonalizirati v ONB.

DOKAZ: Z uporabo indukcije glede na $\dim V = n$. Za $n = 1$ je očitno. Dokazujemo indukcijski korak $n - 1 \rightsquigarrow n > 1$.

Poiščemo lastni vektor (obstaja zaradi predpostavk) z normo 1.

$$\mathcal{A}v_1 = \lambda v_1, \quad \|v_1\| = 1$$

$\mathbb{F}v_1$ je invarianten za \mathcal{A} .

Ker je $\mathcal{A}^*v_1 = \bar{\lambda}v_1$ je $\mathbb{F}v_1$ invarianten za \mathcal{A}^* .

Po prejšnji trditvi je $(\mathbb{F}v_1)^\perp$ invarianten za \mathcal{A}^* in za $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$.

$$W = (\mathbb{F}v_1)^\perp = \{v_1\}^\perp \equiv v_1^\perp$$

W je invarianten za \mathcal{A} in \mathcal{A}^* . Torej sta zožitvi \mathcal{A} in \mathcal{A}^* na W endomorfizma W in $\mathcal{A}_W \in \mathcal{L}(W)$ je normalen endomorfizem na W , t.j.:

$$(\mathcal{A}^*)_W = (\mathcal{A}_W)^*$$

Velja

$$\underbrace{(\mathbb{F}v_1)}_{\dim=1} \oplus \underbrace{(\mathbb{F}v_1)^\perp}_{\dim=n-1} = \underbrace{V}_{\dim=n}$$

Po indukcijski predpostavki se da \mathcal{A}_W diagonalizirati v ONB vektorskega prostora W , t.j.:

$$\{v_2, \dots, v_n\}$$

tvorijo ONB W in

$$\mathcal{A}_W v_j = \lambda_j v_j \quad j = 2, \dots, n$$

Od tod sledi

$$\mathcal{A}v_j = \mathcal{A}_W v_j = \lambda_j v_j \quad j = 2, \dots, n$$

Od prej vemo $\mathcal{A}v_1 = \lambda_1 v_1$. Ker je $W = (\mathbb{F} v_1)^\perp$ velja

$$v_j \in W = (\mathbb{F} v_1)^\perp \Rightarrow \langle v_j, v_1 \rangle = 0 \quad \forall j \geq 2$$

Torej je

$$\{v_1, \dots, v_n\}$$

ONB iz lastnih vektorjev endomorfizma \mathcal{A} .

4.9.6 Matrična verzija

DEFINICIJA: Naj bo $A \in \mathbb{F}^{n \times n} = \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ in \mathbb{F}^n s standardnim skalarnim produktom. Pravimo, da je A *normalna*, kadar je kot endomorfizem A normalen, t.j.: A je normalna natanko takrat, kadar velja

$$AA^H = A^H A$$

Opomba: Vsi izreki za normalne endomorfizme držijo za normalne matrike.

Če je A normalen in $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se da A diagonalizirati v ONB \mathbb{C}^n . Če je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in ima $\Delta_A(\lambda)$ vse ničle realne, se da A diagonalizirati v ONB \mathbb{R}^n .

Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Potem obstaja obrnljiva matrika $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$, da velja

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

kjer so $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ lastne vrednosti A . Vemo da so stolpci matrike P lastni vektorji A in ker je A normalna, je

$$\{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\}$$

ortonormirana baza \mathbb{C}^n , t.j.:

$$\langle P^{(i)}, P^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$$

kjer je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt.

Naj bosta $x, y \in \mathbb{C}^n$. Potem velja

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j} = y^H x$$

kjer sta

$$y^H = [\overline{y_1}, \quad \dots \quad \overline{y_n}] \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Torej velja

$$(P^{(j)})^H P^{(i)} = \delta_{ij}$$

od koder sledi

$$P^H P = I$$

Potem velja

$$P^H P = I \iff \{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\} \text{ je ONB } \mathbb{C}^n$$

DEFINICIJA: Pravimo, da je P *unitarna matrika*, kadar velja sklep:

$$P^H P = I \iff \{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\} \text{ je ONB } \mathbb{C}^n$$

Če je P unitarna matrika, potem velja

$$P^H = P^{-1}$$

Torej velja

$$P P^H = P^H P = I$$

in

$$P^H A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Pravimo, da je $P^H A P$ *unitarno podobna* A . Drugače povedano: normalna kompleksna matrika je unitarno podobna diagonalni matriki.

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ normalna s standardnim skalarnim produktom v \mathbb{R}^n in naj bodo vse ničle $\Delta_A(\lambda)$ relane. Potem obstaja obrnljiva matrika $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ da velja

$$P^{-1} A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

kjer so $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ lastne vrednosti matrike A . Vemo, da so stolpci matrike P lastni vektorji A in ker je A normalna, vektorji

$$\{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\}$$

tvorijo ONB v \mathbb{R}^n . Po podobnem premisleku kot prej velja

$$P^T P = I \iff \{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\} \text{ tvorijo ONB v } \mathbb{R}^n$$

Pravimo, da je P *ortogonalna* matrika in velja

$$PP^T = P^T P = I$$

in

$$P^T = P^{-1}$$

Velja tudi

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

in pravimo, da je $P^T A P$ *ortogonalno podobna* A . Drugače povedano: Normalna realna matrika, katere karakteristični polinom ima vse ničle realne, je ortogonalno podobna diagonalni matriki.

4.9.7 Unitarni endomorfizmi

DEFINICIJA: Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Pravimo, da je \mathcal{A} *unitaren*, kadar velja

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$$

kjer je $\mathcal{I} = id_V$.

Unitarna matrika $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je unitaren endomorfizem na \mathbb{C}^n , ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je unitaren endomorfizam na \mathbb{R}^n .

LASTNOSTI:

1. \mathcal{A} je unitaren $\iff \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V$
 \mathcal{A} ohranja skalarni produkt in pravimo, da je \mathcal{A} *avtomorfizem* v.p. V s s.p.

DOKAZ:

(\Rightarrow)

$$\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle = \langle \mathcal{A}^* \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

(\Leftarrow)

$$\langle \mathcal{A}^* \mathcal{A}x, y \rangle = \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle \mathcal{I}x, y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Po Lemi velja

$$\mathcal{A}^* \mathcal{A} = \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1} \Rightarrow \mathcal{A}^* \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{A}^* = \mathcal{I}$$

2. \mathcal{A} ohranja dolžine, je *izometrija*, t.j.:

$$\|\mathcal{A}x\| = \|x\|$$

DOKAZ:

$$\|\mathcal{A}x\|^2 = \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

Velja tudi v obratno smer: \mathcal{A} izometrija $\Rightarrow \mathcal{A}$ je unitarna.

DOKAZ:

$$\|\mathcal{A}x\|^2 = \|x\|^2 \iff \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}x \rangle = \langle x, x \rangle$$

Po lastnosti (1), je \mathcal{A} unitaren.

3. \mathcal{A} unitaren natanko takrat, kadar \mathcal{A} ONB presika v ONB.

DOKAZ:

(\Rightarrow) Naj bo \mathcal{A} unitaren in $\{v_1, \dots, v_n\}$ ONB. Potem velja

$$\langle \mathcal{A}v_i, \mathcal{A}v_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

Torej so vektorji v množici $\{\mathcal{A}v_1, \dots, \mathcal{A}v_n\}$ ortonormirani (in linearno neodvisni), zato tvorijo ortonormirano bazo.

(\Leftarrow) Naj bo $\{v_1, \dots, v_n\}$ ONB in $\{\mathcal{A}v_1, \dots, \mathcal{A}v_n\}$ ONB. Dokazujemo, da je \mathcal{A} unitarna.

Naj bosta $x, y \in V$ in

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$y = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$$

Potem velja

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$$

in

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle &= \left\langle \mathcal{A} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right), \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{A}v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \mathcal{A}v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \underbrace{\langle \mathcal{A}v_i, \mathcal{A}v_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \end{aligned}$$

Torej je

$$\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

in po lastnosti (1) je \mathcal{A} unitaren.

□

4. A unitaren in $\mathcal{A}x = \lambda x \Rightarrow |\lambda| = 1$, t.j.: lastne vrednosti ležijo na enotski krožnici v \mathbb{C} .

DOKAZ: Uporabimo, da je \mathcal{A} izometrija in dobimo

$$\|x\| = \|\mathcal{A}x\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$$

Torej je $|\lambda| = 1$.

PRIMERI: zasuki, zrcaljenja v $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Potem velja

- $\mathbb{F} = \mathbb{C}$: A unitarna natanko takrat, kadar A unitaren endomorfizem $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.
- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: A ortogonalna natanko takrat, kadar A unitaren endomorfizem $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

OPOMBA: Unitarni endomorfizmi so normalni.

4.9.8 Sebi adjungirani endomorfizmi

DEFINICIJA: Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Pravimo, da je \mathcal{A} *sebi adjungiran*, kadar velja

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

Za matrike:

- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in velja $A^H = A$, pravimo, da je A *hermitska*.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in velja $A^T = A$, pravimo, da je A *simetrična*.

Opomba: $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}, A = A^T$, potem je A kompleksna simetrična (ni pa nunnno sebi adjungirana).

LASTNOSTI:

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \iff \langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}y \rangle \quad \forall x, y \in V.$

DOKAZ:

(\Rightarrow)

$$\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*y \rangle = \langle x, \mathcal{A}y \rangle$$

(\Leftarrow)

$$\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}y \rangle = \langle \mathcal{A}^*x, y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Po Lemi velja $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$.

2. $(\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \wedge \mathcal{A}x = \lambda x \wedge x \neq 0) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

DOKAZ:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}x, x \rangle &= \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \\ \langle \mathcal{A}x, x \rangle &= \langle x, \mathcal{A}x \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle \\ &\Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Rightarrow \Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)$ ima vse ničle realne.

DOKAZ:

- $\mathbb{F} = \mathbb{C}$: ničle $\Delta_{\mathcal{A}}$ so lastne vrednosti \mathcal{A} , zato (3) sledi iz (2).
- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: Preslikavi \mathcal{A} priredimo matriko A v ONB, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in velja

$$A = A^T = A^H$$

Gledamo $\mathbb{R}^{n \times n}$ kot podmnožico $\mathbb{C}^{n \times n}$, torej

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}, A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n), A = A^H$$

$\Rightarrow A$ je sebi adjungiran endomorfizem $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, zato ima $\Delta_A(\lambda)$ vse ničle realne. Za endomorfizme vemo

$$\Delta_A(\lambda) = \Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)$$

IZREK: Sebi adjungiran endomorfizem se da diagonalizirati v ONB. Hermitska matrika je unitarno podobna realni diagonalni matriki. Realna simetrična matrika je ortogonalno podobna diagonalni matriki.

DOKAZ: Uporabimo izrek normalnih endomorfizmov in lastnost (3). Za drugi del izreka uporabimo matrično verzijo izreka o diagonalizaciji normalnih endomorfizmov.

4.9.9 Pozitivno semidefinitni endomorfizmi

DEFINICIJA: Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Pravimo, da je \mathcal{A} *pozitivno semidefiniten*, kadar je $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ in velja

$$\langle \mathcal{A}x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$$

\mathcal{A} je *pozitivno definiten*, kadar je $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ in velja

$$\langle \mathcal{A}x, x \rangle > 0 \quad \forall x \in V \setminus \{0\}$$

LASTNOSTI:

1. Naj bo \mathcal{A} sebi adjungiran. \mathcal{A} je pozitivno semidefiniten natanko takrat, kadar $\text{sp } \mathcal{A} \subset [0, \infty)$ in pozitivno definiten natanko takrat, kadar $\text{sp } \mathcal{A} \subset (0, \infty)$

DOKAZ:

(\Rightarrow) Naj bo $\lambda \in \text{sp } \mathcal{A}$. Potem obstaja $x \neq 0 : \mathcal{A}x = \lambda x$. Velja

$$\underbrace{\langle \mathcal{A}x, x \rangle}_{\geq 0} = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, x \rangle}_{> 0}$$

Sledi $\lambda \geq 0$ za pozitivno semidefiniten \mathcal{A} in $\lambda > 0$ za pozitivno definiten \mathcal{A} .

(\Leftarrow) Naj bo \mathcal{A} sebi adjungiran in $\text{sp } \mathcal{A} \subset (0, \infty)$ ali $[0, \infty)$. Ker je \mathcal{A} sebi adjungiran, se ga da diagonalizirati v ONB $\{v_1, \dots, v_n\}$, kjer so v_1, \dots, v_n lastni vektorji. Torej velja

$$\mathcal{A}v_j = \lambda_j v_j \quad \forall j$$

in $\lambda_j \in \text{sp } \mathcal{A}$, zato je $\lambda_j > 0$ za vsak j (ali $\lambda_j \geq 0$).

Naj bo $x \in V \setminus \{0\}$. Potem lahko x razvijemo po bazi

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

in velja

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}x, x \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{A}v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \lambda_i \overline{\alpha_j} \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \overline{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \end{aligned}$$

Velja

$$\langle \mathcal{A}x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 > 0 \quad \forall x \in V$$

če $\text{sp } \mathcal{A} \subset (0, \infty)$ in

$$\langle \mathcal{A}x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \geq 0 \quad \forall x \in V$$

če $\text{sp } \mathcal{A} \subset [0, \infty)$.

□

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Kdaj je A pozitivno definitna?

- $A = A^T$ je potreben pogoj (A kot preslikava sebi adjungiran endomorfizem)
- $\langle Ax, x \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Naj bo $x = e_j$ (iz standardne baze). Velja

$$\langle Ae_j, e_j \rangle = \langle A^{(j)}, e_j \rangle = a_{jj} > 0$$

Potreben pogoj je torej $a_{jj} > 0$ za vsak j .

- Poglejmo si karakteristični polinom

$$\begin{aligned} \Delta_A(\lambda) &= a_0 + a_1\lambda + \dots + (-1)^n \lambda^n = \\ &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

$A = A^T$ je pozitivno definiten natanko takrat, kadar $\lambda_j > 0$ za $j = 1, \dots, n$ (vemo za sebi adjungirane endomorfizme).

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) &= \\ \lambda^n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \left(\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \right) \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n \end{aligned}$$

Ta polinom pomnožimo z $(-1)^n$ in dobimo a_0, \dots, a_n izražene z $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ker $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, členi a_0, a_1, \dots, a_n alternirajo po predznaku, t.j.:

$$a_0 > 0, a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0, \dots$$

To lahko zapišemo kot

$$(-1)^j a_j > 0 \quad \forall j$$

Pogoj je tudi zadosten ($A = A^T$ in karakteristični polinom alternira).

DOKAZ: Naj bo $\Delta_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$ in $(-1)^j a_j > 0$ za $j = 0, \dots, n$ in $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Vemo, da so vse ničle $\Delta_A(\lambda)$ realne (ker je A sebi ajdungen endomorfizem). Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq 0$. Potem velja

$$\Delta_A(\alpha) = \underbrace{a_0}_{>0} + \underbrace{\overbrace{a_1}^{<0} \overbrace{\alpha}^{\leq 0}}_{\leq 0} + \underbrace{\overbrace{a_2}^{>0} \overbrace{\alpha^2}^{\geq 0}}_{\leq 0} + \dots + \underbrace{a_n \alpha^n}_{\geq 0}$$

Torej je $\Delta_A(\alpha) \geq a_0 > 0$, zato $\Delta_A(\lambda)$ nima ničel $\alpha \leq 0$. Torej so vse ničle $\Delta_A(\lambda)$ večje od 0, zato je A pozitivno definitna.

- Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oblike $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$. Definiramo

$$A_k = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,k} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad k = 1, \dots, n$$

in velja

$$A_n = A$$

A pozitivno definitna $\Rightarrow A_k$ pozitivno definitna za vsak k

Naj bo $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Velja

$$\langle A_k x, x \rangle = \langle A \hat{x}, \hat{x} \rangle > 0$$

kjer je

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ničel je $n - k$ in $\hat{x} \neq 0$, ker $x \neq 0$).

Če je A pozitivno definitna, je $\det A = a_0 > 0$, torej je

$$\det A_k > 0 \quad k = 1, \dots, n$$

IZREK: Realna simetrična $n \times n$ matrika A je pozitivno definitna natanko takrat, kadar je $\det A_k > 0$ za $k = 1, \dots, n$.

4.9.10 Bilinearni in kvadratni funkcionali

Naj bo $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *bilinearen* funkcional, ki slika s predpisom

$$(x, y) \mapsto B(x, y)$$

Za $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ in $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, kjer je $\{e_1, \dots, e_n\}$ standardna baza \mathbb{R}^n velja

$$\begin{aligned} B(x, y) &= B\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n B(x_i e_i, y_j e_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \underbrace{B(e_i, e_j)}_{a_{ij}} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j \end{aligned}$$

Za $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ velja

$$\begin{aligned} \langle x, Ay \rangle &= \left\langle \sum_i x_i e_i, A \left(\sum_j y_j e_j \right) \right\rangle = \left\langle \sum_i x_i e_i, \sum_j y_j A e_j \right\rangle = \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \langle e_i, A e_j \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \underbrace{\langle e_i, A^{(j)} \rangle}_{a_{ij}} = \sum_{i,j} x_i y_j a_{ij} \end{aligned}$$

Sklep:

$$B(x, y) = \langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$$

DEFINICIJA: Preslikavi $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $K(x) = B(x, x)$, kjer je B bilinearen funkcional, pravimo *kvadratni funkcional*.

K lahko izrazimo z matriko

$$K(x) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ji} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$$

V matriki A lahko spreminjamo člene a_{ij} in a_{ji} , kjer $j \neq i$, če je vsota $a_{ij} + a_{ji}$ nespremenjena, ne da bi se $K(x)$ spremenil. Torej lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je A simetrična in velja $A = A^T \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$. Tako lahko prejšnjo enačbo nadaljujemo in dobimo

$$K(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j$$

Opomba: Ker je A simetrična, je vseeno ali pišemo $K(x) = \langle Ax, x \rangle$ ali $K(x) = \langle x, Ax \rangle$.

Diagonalizacija

Naj bo $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ker je A sebi adjungirana, obstaja ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da velja

$$Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Naj bo $x \in \mathbb{R}^n$ in naredimo substitucijo

$$x = Qy \Rightarrow y = Q^T x$$

Tedaj velja

$$K_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle AQy, Qy \rangle = \langle Q^T A T y, y \rangle = \langle Dy, y \rangle = K_D(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

Recimo, da je $x = Py$ in P obrnljiva, torej $y = P^{-1}x$. Po istem računu kot prej, dobimo

$$K_A(x) = K_{P^T A P}(y)$$

Ker je A sebi adjungirana, vemo da obstaja ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da velja

$$D = Q^T A Q$$

kjer je D diagonalna matrika. Naj bo R simetrična metrika. Potem velja

$$R^T D R = \underbrace{R^T Q^T}_{P^T} A \underbrace{Q R}_P = P^T A P$$

Naj bo R diagonalna. Potem sta D in R oblik

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{bmatrix}$$

in velja

$$R^T D R = D R^2 = \text{diag}(\lambda_1 r_1^2, \dots, \lambda_n r_n^2)$$

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo sledeče

$$\begin{aligned} \lambda_1, \dots, \lambda_p &> 0 \\ \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q} &< 0 \\ \lambda_j &= 0 \quad j > p+q \end{aligned}$$

Tedaj si lahko izberemo take r_i , da velja

$$\begin{aligned}\lambda_i r_i^2 &= 1 & i = 1, \dots, p &\Rightarrow r_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \\ \lambda_i r_i^2 &= -1 & i = p+1, \dots, p+q &\Rightarrow r_i = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} \\ i &> p+q & &r_i = 1\end{aligned}$$

Torej je

$$R = \text{diag} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}}_p, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+q}}}}_q, 1, \dots, 1 \right)$$

Ker je R obrnljiva, je $P = QR$ obrnljiva. Torej velja

$$P^T A P = R^T D R = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, 0, \dots, 0)$$

kjer je $P = QR$.

DEFINICIJA: $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *kongluentna* matriki $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kadar obstaja taka obrnljiva matrika $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je

$$B = P^T A P$$

IZREK (Sylvester): Vsaka realan simetrična matrika je kongluentna matridki oblike

$$\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, 0, \dots, 0)$$

kjer je p število pozitivnih lastnih vrednosti, q pa število negativnih lastnih vrednosti.

POSLEDICA:

$$K(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2$$

Do enakega rezultata lahko pridemo na Lagrangeev način:

$$K(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + K_1(x_2, \dots, x_n)$$

1. $a_{11} \neq 0$:

$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + K_2(x_2, \dots, x_n)$$

in ta postopek nadaljujemo.

2. $a_{ii} = 0 \forall i$: npr. $n = 2$ in

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Potem dobimo

$$K(x_1, x_2) = x_1x_2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 = y_1^2 - y_2^2$$

kjer je

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

V splošnem obstaja $a_{ij} \neq 0$ za $i \neq j$ in na podoben način kot zgoraj preoblikujemo $a_{ij}(x_ix_j)$ v $a_{ij}(y_1^2 - y_2^2)$, nato lahko nadaljujemo z metodo (1).

5 Krivulje drugega reda

Splošna enačba krivulje

$$\overbrace{ax^2 + 2bxy + cy^2}^{\text{kvadratni del}} + \overbrace{dx + ey}^{\text{linearni del}} + f = 0$$

kjer so $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ in velja $|a| + |b| + |c| > 0$

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \text{ ustrezata zgornjem pogoju}\}$$

Naredimo substitucijo za kvadratni del in zamenjamo (x, y) z (x_1, x_2) , t.j.:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = K(x_1, x_2) = K(x, y)$$

Za $K_A(x, y)$ je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

A je simetrična, zato obstaja Q ortogonalna, da velja

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

in $\{Q^{(1)}, Q^{(2)}\}$ sta ONB za \mathbb{R}^2 sestavljena iz lastnih vektorjev matrike A .

Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma, ki je

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2$$

Naredimo substitucijo

$$(x_1, x_2) = Q(y_1, y_2)$$

in velja

$$K_A(x_1, x_2) = K_{Q^T A Q}(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

Če (y_1, y_2) zamenjamo z (u, v) dobimo

$$(x, y) = Q(u, v) \quad (u, v) = Q^T(x, y)$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} x &= *u + *v \\ y &= *u + *v \end{aligned}$$

Kvadratni del enačbe smo torej spremenili v

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$$

Torej lahko celotno enačbo spremenimo v

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \rightarrow \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + pu + qv + r = 0$$