

Analiza 1

Vid Drobnič

Kazalo

1	Števila	2
1.1	Naravna števila	2
1.2	Cela števila	3
1.3	Racionalna števila	3

1 Števila

1.1 Naravna števila

- Z njimi štejemo: 1, 2, 3
- Množico naravnih števil označimo z \mathbb{N}

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- Vsako naravno število n ima naslednika n^+ ($n^+ = n + 1$)

Peanovi aksiomi:

\mathbb{N} je množica skupaj s pravilom, ki vsakemu naravnemu številu n dodeli njegovega naslednika $n^+ \in \mathbb{N}$ in velja:

1. za vse $m, n \in \mathbb{N}$ če $m^+ = n^+$, potem $m = n$
2. obstaja $1 \in \mathbb{N}$, ki ni naslednik nobenega naravnega števila
3. Če je $A \subset \mathbb{N}$ in če je $1 \in A$ ¹ in če velja: če $n \in A$, potem $n^+ \in A$ ², potem $A = \mathbb{N}$

Aksiom (3) se imenuje **aksiom popolne indukcije**.

- Naravna števila lahko **seštevamo, množimo**.
- \mathbb{N} so urejena po velikosti 1, 2, 3, 4, 5, ...

$$\{3, 5, 6, 10\} \subset \mathbb{N}$$

$$\{3, 5, 7, 16, 23, \dots\} \subset \mathbb{N}$$

- Vsaka neprazna podmnožica \mathbb{N} ima najmanjši element.
- V splošnem ne velja³, da ima vsaka neprazna podmnožica \mathbb{N} največji element.

¹indukcijska baza

²indukcijski korak

³ne velja za vse (množice)

1.2 Cela števila

Označimo jih z \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

- Seštevanje in množenje se iz \mathbb{N} razširita na \mathbb{Z} .
- Poleg tega je definirano **odštevanje**.
- Množico celih števil uredimo na običajen način.
- Ni res, da bi imela vsaka neprazna podmnožica \mathbb{Z} najmanjši element.
- V splošnem deljenje ni definirano ($\frac{3}{2}$)

1.3 Racionalna števila

Racionalna števila so kvocienti celih števil. Bolj natančno: kvocienti celih in naravnih števil.

Dva ulomka $\frac{m}{n}, \frac{k}{l}$ predstavljata isto racionalno število če: $ml = nk$ lahko naredimo:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

Množico $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ razdelimo na razrede: urejena para (m, n) in (k, l) sta v istem razredu, če velja $ml = nk$.

Racionalno število je razred urejenih parov in ga označimo z $\frac{m}{n}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Seštevanje v \mathbb{Q} :

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}$$

Seštevanje ulomkov je dobro definirano:

če je: $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}, \frac{k'}{l'} = \frac{k}{l}$

potem je: $\frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'} = \frac{m}{n} + \frac{k}{l}$

vemo: $m'n = mn'$ in $k'l = kl'$

Dokaz:

$$\begin{aligned}\frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'} & \stackrel{(def)}{=} \frac{m'l' + n'k'}{n'l'} \cdot \frac{mk}{mk} = \\ & = \frac{m'l'mk + n'k'mk}{n'm'l'k} = \\ & = \frac{m'mk'l + m'nk'k}{m'nk'l} = \frac{ml + nk}{nl} \stackrel{(def)}{=} \frac{m}{n} + \frac{k}{l}\end{aligned}$$

Množenje v \mathbb{Q} :

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}$$

Množenje je dobro definirano (izpeljava doma).

Deljenje v \mathbb{Q} :

$$\frac{m}{n} : \frac{k}{l} = \frac{ml}{nk}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}, k \neq 0$$

Naj bo A (številska) množica z operacijama $+$ in \cdot .

Osnovne lastnosti računskih operacij bomo imenovali **aksiomi**. Druge lastnosti izpeljemo iz aksiomov.

A1 asociativnost seštevanja

Za vse $a, b, c \in A$ velja $(a + b) + c = a + (b + c)$

A2 komutativnost seštevanja

Za vse $a, b \in A$ velja da $a + b = b + a$

A3 obstoj enote za seštevanje

Obstaja za element $0 \in A$ za katerega velja da: $0 + a = a$ za vse $a \in A$

A4 obstoj nasprotnega števila

Za vsak $a \in A$ obstaja nasprotno število $-a \in A$ za katerega velja:
 $(-a) + a = 0$

Opomba: Množica A za operacijo $+$, ki ustreza aksiomom od A1 do A4 je **Abelova grupa** za $+$.

Trditev: Naj $(A, +)$ ustreza aksiomom od A1 do A4.

- (1) $\forall a \in A$ ima eno samo nasprotno število
- (2) **Pravilo krajšanja:** za vse $a, x, y \in A$ velja: $a + x = a + y \Rightarrow x = y$
- (3) $-0 = 0$

Dokaz:

- (1) izberemo poljubno število $a \in A$. Dokazujemo da ima a natanko 1 nasprotni element.

Po A4 nasprotno število obstaja. Denimo, da sta $b, c \in A$ nasprotni števili od a .

$$\begin{aligned} b + a = 0 \text{ in } c + a = 0 \\ (a + b) + c \stackrel{A2}{=} (b + a) + c \stackrel{\text{predp.}}{=} 0 + c \stackrel{A2}{=} c \\ (a + b) + c \stackrel{A2}{=} (b + a) + c \stackrel{A1}{=} b + (a + c) \stackrel{A2}{=} b + (c + a) \stackrel{\text{predp.}}{=} b + 0 \stackrel{A2}{=} 0 + b \stackrel{A3}{=} b \\ c = b \end{aligned}$$

- (2)

$$\begin{aligned} a + x = a + y &\stackrel{A4}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow (-a) + (a + x) &= (-a) + (a + y) \stackrel{A1}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow ((-a) + a) + x &= ((-a) + a) + y \stackrel{A4}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow 0 + x = 0 + y &\stackrel{A3}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

- (3) $-0 = 0$

$$0 \stackrel{A4}{=} (-0) + 0 \stackrel{A2}{=} 0 + (-0) \stackrel{A3}{=} -0$$

Odštevanje v A : razlika števil a in b je vsota a in nasprotnega elementa od b .

$$a - b := a + (-b)$$

$b - a$ je rešitev enačbe $a + x = b$

Pozor: odštevanje ne ustreza aksiomom od A1 do A4.