Algebra 1

Vid Drobnič

Kazalo

1 Vektorji v trirazsežnem prostoru

$\mathcal{P}$ - prostor
$T \in \mathcal{P}$ - točka

$A, B \in \mathcal{P}$
$\overrightarrow{AB}$ - usmerjena daljica

Formalno: $\overrightarrow{AB} = (A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ (urejen par)

Ekvivalentnost usmerjenih daljic:

$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$, kadar je $\overrightarrow{AB}$ z vzporednim premikom mogoče premakniti v $\overrightarrow{CD}$.

- $|AB| = |CD|$ (dolžini daljic sta enaki)
- imata isto smer (če potegnemo premico čez izhodišca daljic (AC), morata biti točki B in D na istem "bregu" te premice)
- $AB \parallel CD$ (premici skozi točke sta vzporedni)

$$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

Def: Vektor $\vec{AB}$ je množica $\vec{AB} = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}$ (usmerjene daljice ekvivalentne daljici $\overrightarrow{AB}$)

- ničelni vektor: $\vec{AA} = \vec{0}$
- nasprotni vektor vektorja $\vec{AB}$ je $\vec{BA}$ ($\vec{BA} = -\vec{AB}$)

Dodatna oznaka: $\vec{a}$, $-\vec{a}$ nasprotni vektor

$V = \{\vec{v} : \vec{v} \text{ vektor}\}$ - vektorski prostor.

$O \in \mathcal{P}$; O fiksiramo (izberemo si neko točko v prostoru, ki jo fiksiramo)

$$f : \mathcal{P} \to V$$
$$f(T) = \vec{OT}$$

f je bijekcija (vsaki točki priredi natanko en vektor).
$\vec{a} = \vec{OT}$

1.1 Operacije z vektorji

Seštevanje:

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$
$$\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{BC}$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$$
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Lastnosti:[1]

(1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ asociativnost

(2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ komutativnost

(3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

(4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Za lastnosti od (1) do (4) = $(V, +)$ **Abelova grupa**.

Razliko dveh vektorjev definiramo tako:

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

Množenje s skalarjem

Skalar je realno število.

$$\vec{a}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha\vec{a}$ je vektor.

- ima isto smer kot $\vec{a}$ za $\alpha > 0$
- ima nasprotno smer kot $\vec{a}$ za $\alpha < 0$
- $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$

[1] Dokaz lastnosti (1) in (2) s skico.

$$\vec{a} = \vec{OA} \neq \vec{0}$$

$$\alpha\vec{a} = \vec{OT}, O, A, T \text{ so na isti premici}$$

S tem uvedemo koordinatni sistem na premici OA.

Lastnosti:

(5) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

(6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

(7) $\alpha(\vec{a}\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

(8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

$V, +$ in množenje s skalaji je **vektorski prostor**: veljajo lastnosti od (1) do (8).

1.2 Linearna neodvisnost

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

$\vec{a}, \vec{b}$ sta linearno odvisna kadar je:
bodisi $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ za ustrezen $\alpha \in \mathbb{R}$,
bodisi $\vec{a} = \beta\vec{b}$ za ustrezen $\beta \in \mathbb{R}$.

V nasprotnem primeru sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna.

$$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$$

1. $\vec{OA}$ in $\vec{OB}$ sta linearno odvisna $\Leftrightarrow$ O, A, B kolinearne (ležijo na isti premici).
2. $\vec{a}, \vec{b}$ sta linearno neodvisna $\Leftrightarrow$ $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$

Privzamemo da sta $\vec{a}, \vec{b}$ linearno neodvisna:

$$\{T : \vec{OT} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{R}$$

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ - linearna kombinacija
$\mathcal{R}$ - ravnina določena z O, A, B (z vektorji $\vec{a}, \vec{b}$) in točko O.

$$\vec{r}=\vec{OT}, T \in \mathcal{R}$$
$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$

Pri tem sta α in β enolično določena skalarja.

V $\mathcal{R}$ smo z vektorjema $\vec{a}, \vec{b}$ vpeljali koordinatni sistem.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ so linearno odvisni, kadar je vsaj eden od njih linearna kombinacija drugih dveh.
npr: $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$

V nasprotnem primeru so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni.

1. $\vec{a}=\vec{OA}, \vec{b}=\vec{OB}, \vec{c}=\vec{OC}$ so linearno odvisni $\Leftrightarrow O, A, B, C$ koplanarne (ležijo na isti ravnini)
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0)$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni

$\vec{a}=\vec{OA}$
$\vec{b}=\vec{OB}$
$\vec{c}=\vec{OC}$

$$V=\{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}: \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

V - množica vseh vektorjev prostora $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}=\{R \in \mathcal{P}: \vec{OR}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

<u>Dodatek:</u> V zapisu vektorja $\vec{r} \in V$: $\vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, so koeficienti α, β, γ enolično določeni.

Dokaz: Recimo, da lahko vektor $\vec{r}$ izrazimo na 2 različna načina:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \\
\vec{r} &= \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c} \\
\Rightarrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} &= \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}
\end{aligned}$$

$$(\alpha-\alpha_1)\vec{a} + (\beta-\beta_1)\vec{b} + (\gamma-\gamma_1)\vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ linearno neodvisni } \Rightarrow \alpha-\alpha_1 = \beta-\beta_1 = \gamma-\gamma_1 = 0$$

$$\alpha=\alpha_1, \beta=\beta_1, \gamma=\gamma_1$$

$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ je **baza** vektorskega prostora V. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ so linearno neodvisni.

$R \in \mathcal{P}$ (O - fiksirana točka) $\vec{OR} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

$$R \mapsto (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,x \in \mathbb{R}\}$$

Urejena trojica (α,β,γ) je s točko R enolično določena.
α,β,γ so koordinate točke R glede na koordinaten sistem, ki je določen z bazo $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ in točko O (izhodišče koordinatnega sistema).

Imena koordinat: abscisa, ordinata, aplikata

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{r} \mapsto (\alpha,\beta,\gamma); \vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

φ je bijekcija.

S φ prenesemo operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorjev s skalarji iz V v $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
&\vec{r_1}, \vec{r_2} \in V \\
&\quad \vec{r_1} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c} \\
&\quad \vec{r_2} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \gamma_2\vec{c} \\
&\varphi(\vec{r_1}) = (\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) \\
&\varphi(\vec{r_2}) = (\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)
\end{aligned}$$

$$\vec{r_1}+\vec{r_2} = (\alpha_1+\alpha_2)\vec{a} + (\beta_1+\beta_2)\vec{b} + (\gamma_1+\gamma_2)\vec{c}$$
$$\varphi(\vec{r_1}+\vec{r_2}) = (\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2, \gamma_1+\gamma_2)$$

Torej velja:

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$$

seštevanje je definirano po komponentah.

Podobno velja za množenje s skalarji:

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$$

$\mathbb{R}^3$ je za te operaciji **vektorski prostor** (zadošča A1-A8).

$$\varphi(\vec{a}) = (1, 0, 0)$$
$$\varphi(\vec{b}) = (0, 1, 0)$$
$$\varphi(\vec{c}) = (0, 0, 1)$$

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

je **standardna baza** vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$.

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

<u>Oznake:</u>

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$
$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$
$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

Dodatna zahteva za standardno bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$: baza je **ortonormirana**, torej:

- $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ so paroma pravokotni.

Opomba: Po dogovoru je trojica $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pozitivno orientirana (pri določanju orientacije si v 3D koordinatnem sistemu pomagamo z pravilom desnega vijaka).

1.3 Skalarni produkt

$\vec{a}, \vec{b} \in V$
Kot med njima je $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$

<u>Def:</u> $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$

V **identificiramo**[2] z $\mathbb{R}^3$ (glede na standardno bazo in dano izhodišče O).

$$
\begin{aligned}
O &= (0,0,0)\\
\vec{i} &= (1,0,0)\\
\vec{j} &= (0,1,0)\\
\vec{k} &= (0,0,1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3\\
\vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= ?\\
\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) &= \vec{OA}\\
|\vec{a}| = |OA| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\\
d(A,B) &= \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2}
\end{aligned}
$$

Kosinusni izrek:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

$$(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$
$$\Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

<u>Lastnosti:</u>

(1) $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$ (enačaj le za $\vec{a} = \vec{0}$)

(2) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$

[2] Prej smo vse izpeljevali za splošen vektorski prostor, sedaj pa za V vzamemo $\mathbb{R}^3$.

(3) $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$

(4) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \varphi \frac{\pi}{2}, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 (0 \leq \varphi \leq \pi)$$
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Primer:

$$\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$
$$\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$$
$$\vec{a} \text{ v } \mathbb{R}^2 : \vec{a} = (a_1, a_2)$$
$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

p - ploščina paralelograma
p si želimo izraziti z a_1, a_2, b_1, b_2

$$p = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$$

$$\vec{a'} \perp \vec{a}$$
$$|\vec{a'}| = |\vec{a}|$$

$\vec{a}, \vec{a'}$ pozitivno orientirana
$\vec{a'} = (-a_2, a_1)$
$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ali $\varphi - \frac{\pi}{2}$ če je orienacija $(\vec{a}, \vec{b})$ pozitivna.

$$|\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = \vec{a'}\vec{b} = (-a2, a_1) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$p = a_1 b_2 - a_2 b_1$, če je orientacija $\vec{a}, \vec{b}$ pozitivna, če pa je negativna velja: $p = -(a_1 b_2 - a_2 b_1)$

1.4 Vektorski produkt

Vzamemo vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ iz prostora. Njun vektorski produkt označimo:

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

(2) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$. ($= 0$, kadar sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna)

(3) Urejena trojica $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ je pozitivno orientirana.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3)\\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3)\\ \vec{a} \times \vec{b} &= (x, y, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{k} &= (0, 0, 1)\\ z &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{k} =\\ &= |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{k}| \cos\delta =\\ &= p \cos\delta\end{aligned}$$

p - ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$
δ - kot med ravninama, ki ju določata osi (1),(2) in vektorja $\vec{a}, \vec{b}$.

$$\begin{aligned}\vec{a'} &= (a_1, a_2, 0)\\ \vec{b'} &= (b_1, b_2, 0)\\ p' &= \pm(a_1 b_2 - a_2 b_1)\end{aligned}$$

p' je ploščina paralelograma, ki ga določata pravokotni projekciji vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ na ravnino $(\vec{i}, \vec{j})$, tj. ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja $\vec{a'}$ in $\vec{b'}$.

p' ima predznak $+$, kadar sta $\vec{a'}$ in $\vec{b'}$ pozitivno orientirana, ter $-$, kadar sta negativno orientirana.

$$p' = \pm p \cos\delta$$

$+$ kadar: $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$
$-$ kadar: $\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \pi$

$$z = \pm p' = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$\pm$ se izniči, ker se predznak, ki nastane zaradi cos in predznak, ki nastane pri izračunu ploščine paralelograma z vektorjema ujemata.

$$\begin{aligned}x &= a_2 b_3 - a_3 b_2\\ y &= a_3 b_1 - a_1 b_3\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

determinanta (reda 2)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Lastnosti:

- $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$\vec{a}, \vec{b}$ linearno neodvisna $\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ je baza.

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b})$$

Poseben primer:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 (\vec{a} \perp \vec{b})$$

$\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ je ortonormirana baza.

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b}) / \cdot \vec{a} \text{ (ali } \vec{b}, \vec{c})$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{a} &= \alpha \\ \vec{r} \cdot \vec{b} &= \beta \\ \vec{r} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \gamma \end{aligned}$$

$$(|\vec{a}\times\vec{b}|)^2 = (|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi)^2$$
$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = (|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi)^2$$
$$\Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$$

1.5 Mešani produkt

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

Paralelepiped je prizma, ki ima za osnovno ploskev paralelogram. V - prostornina pralelepipeda

$$\begin{aligned} P &= |\vec{a}\times\vec{b}| \\ V &= |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot v \\ v &= \pm|\vec{c}|\cos\delta \\ V &= \pm|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\delta = \\ &= \pm(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} &= \pm V \end{aligned}$$

$+$: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ pozitivno orienirani
$-$: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ negativno orientirani $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linearno odvisni $\Leftrightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = 0$.

Orientacija se pri cikličnih zamenjavah ohrani:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\vec{a} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{c} &= (c_1, c_2, c_3) \end{aligned}$$

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 =$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \equiv a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

1.6 Dvojni vektorski produkt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{e} = ?$$

$$\vec{e} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$
$$\vec{e} \perp \vec{c}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ linearno neodvisna $\Rightarrow \vec{e} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.
$\vec{e} \cdot \vec{c} = 0$

$$\alpha(\vec{a}\vec{c}) + \beta(\vec{b}\vec{c}) = 0$$

$$\beta = \lambda\vec{a}\vec{c}$$
$$\alpha = -\lambda\vec{b}\vec{c}$$

$$\vec{e} = \lambda(\vec{b}\vec{c})\vec{a} + \lambda(\vec{a}\vec{c})\vec{b}$$
$$\vec{e} = \lambda(-(\vec{b}\vec{c})\vec{a} + (\vec{a}\vec{c})\vec{b})$$

Če razpišemo po komponentah dobimo $\lambda = 1$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -(\vec{b}\vec{c})\vec{a} + (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$$

2 Analitična geomterija v $\mathbb{R}^3$

2.1 Premica

p podana s točko R_0 na njej in *smernim vektorjem* $\vec{e}$.

$\vec{r_0} = \vec{OR_0} = (x_0, y_0, z_0)$
$R \in p$
$\vec{r} = \vec{OR} = (x, y, z)$

Koorinatizirali smo premico.

$$\vec{R_0R} = \vec{r} - \vec{r_0}$$
$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{e}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Enačba premice p (vektorska parametrična) (λ je parameter)

$$\vec{e} = (a, b, c)$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a \\ y &= y_0 + \lambda b \\ z &= z_0 + \lambda c \end{aligned}$$

(Parametrična) enačba premice.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

enačba premice (brez parametra)

$a = 0$?

$$\frac{x - x_0}{0} \equiv (x = x_0 \text{ ali a}x - x_0 = 0)$$

Podobno za $b = 0$ in $c = 0$.

$\overrightarrow{R_0R}, \vec{e}$ linearno odvisna $\Leftrightarrow R \in p$

To je kadar: $\overrightarrow{R_0R} \times \vec{e} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r_0}) \times \vec{e} = \vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r_0}) = \vec{0}$
(vektorska enačba premice)

Če imamo točko R_1 izven premice, je razdalja med premico p in to točko enaka:

$$\Delta = |\vec{r_1} - \vec{r_0}| \sin \varphi$$

To enačbo lahko preoblikujemo da dobimo:

$$\Delta = \frac{|\vec{e} \times (\vec{r_1} - \vec{r_0})|}{|\vec{e}|}$$

To je posebej ugodno, kadar $|\vec{e}| = 1$, saj iz tega sledi $\Delta = |\vec{e} \times (\vec{r_1} - \vec{r_0})|$.

Razdaljo med točko in premico lahko zapišemo tudi kot: $\Delta = d(R_1, p)$.

2.2 Ravnina

Da določimo ravnino Σ, potrebujemo točko $R_0 \in \Sigma$ in vektor normale $\vec{n}$, kjer $\vec{n} \perp \Sigma$ in $\vec{n} \neq \vec{0}$.

Da določimo kdaj točka leži na ravnini zapišemo:

$$R \in \Sigma \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r_0} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

To pomeni da nam ravnino Σ določa enačba:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

Če zapišemo vektorje $\vec{r_0}, \vec{r}$ in $\vec{n}$ kot:

$$\begin{aligned} \vec{r_0} &= (x_0, y_0, z_0) \\ \vec{r} &= (x, y, z) \\ \vec{n} &= (a, b, c) \end{aligned}$$

lahko zapišemo enačbo ravnine kot:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

To enačbo lahko naprej pretvorimo v *implicitno obliko*:

$$ax + by + cz + d = 0$$

kjer je $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Če imamo podane točke R_0, R_1 in R_2, lahko izračunamo vektor normale kot:

$$\vec{n} = (\vec{r_1} - \vec{r_0}) \times (\vec{r_2} - \vec{r_0})$$

če to vstavimo v en"acbo ravnine, dobimo da lahko ravnino Σ zapišemo kot:

$$((\vec{r_1} - \vec{r_0}) \times (\vec{r_2} - \vec{r_0})) \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

Opazimo, da nam ta enačba predstavlja mešani produkt kar lahko zapišemo z determinanto reda 3:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

kjer je vektor $\vec{r_n}$ zapisan kot: $\vec{r_n} = (x_n, y_n, z_n)$.

Če imamo točko R_1, ki ni na ravnini, lahko zapišemo razdaljo te točke do ravnine kot:

$$\Delta = \pm|\vec{r_1} - \vec{r_0}| \cos\varphi \tag{1}$$

To enačbo lahko s pomočjo enačbe ravnine preoblikujemo v:

$$\Delta = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r_1} - \vec{r_0})|}{|\vec{n}|}$$

v števcu lahko uprabimo absolutno vrednost s katero se znebimo predznaka, ki se pojavi v (1), ker je razdalja vedno pozitivna.

Razdaljo med ravnino Σ in točko R_1 lahko zapišemu tudi kot:

$$\Delta = d(R_1, \Sigma)$$

Če si pomagamo z že izpeljano implicitno enačbo ravnine, se lahko znebimo vektorjev in dobimo naslednjo ena"bo:

$$d(R_1, \Sigma) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

kjer $\vec{OR_1} = \vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$.

2.3 Razdalja med mimobežnima premicama

p_1: e_1 je smerni vektor; $R_1 \in p_1, r_1$
p_2: e_2 je smerni vektor; $R_2 \in p_2, r_2$

Da sta premici mimobežni imamo dva pogoja:

- $\vec{e_1} \times \vec{e_2} \neq \vec{0} (p_1 \nparallel p_2)$
- $p_1 \cap p_2 = \varnothing$ (ne sekata se)

$$d(p_1, p_2) = \min\{d(T_1, T_2) : T_1 \in p_1, T_2 \in p_2\}$$

Z pomočjo skice in premisleka opazimo, da je najmanjša razdalja takrat, ko $S_1S_2 \perp p_1, p_2$. To pomeni:

$$\vec{S_1S_2} \perp \vec{e_1}, \vec{e_2}$$
$$\vec{S_1S_2} = \lambda \vec{e_1} \times \vec{e_2}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Tu je spet v veliko pomoč skica. Ideja je, da z vzporednim premikom premaknemo vektor $\vec{e_2}$ v izhodišče vektorja $\vec{e_1}$. S tem lahko naredimo ravnino Σ_1, ki jo tvorita ta dva vektorja. Nato naredimo ravnino Σ_2 na podoben način – z vzporednim premikom premaknemo vektor $\vec{e_1}$ v izhošče vektorja $\vec{e_2}$. Velja $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$. Ker sta si ravnini vzporedni lahko premico p_1 z vzporednim premikom premaknemo iz Σ_1 v Σ_2 in dobimo premico p_1^*, ki se seka s premico p_2 v točko S_2. Podobno lahko premaknemo premico p_2 v ranino Σ_1 in dobimo točko S_1 kjer se sekata p_1 in p_2^*. Opazimo, da je daljica S_1S_2 pravokotna na premici p_1 in p_2 in je tudi najkrajša razdalja med tema premicama. To pomeni, da je dolžina daljice S_1S_2 razdalja med premicama p_1 in p_2.

Z nadaljnim premislekom in zelo natančno narisano skico opazimo, da vektorji $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ in $\vec{r_1} - \vec{r_2}$ tvorijo paralelepiped, kateregа višina je enaka daljici S_1S_2. To pomeni, da lahko uporabimo naše znanje o mešanem produktu in naredimo naslednje:

$$V = |[\vec{r_1} - \vec{r_2}, \vec{e_1}, \vec{e_2}]$$
$$V = |\vec{e_1} \times \vec{e_2}| \cdot \Delta$$

kjer je $\Delta = |S_1S_2|$.

To lahko izenačimo in dobimo:

$$\Delta = \frac{|[\vec{r_1} - \vec{r_2}, \vec{e_1}, \vec{e_2}]|}{|\vec{e_1} \times \vec{e_2}|}$$

3 Osnovne algebrske strukture

3.1 Preslikave in relacije

A, B sta neprazni množici.

Preslikavo, ki slika iz A v B lahko zapišemo kot $f : A \to B$ ali $A \xrightarrow{f} B$.

$\forall x \in A$ predpis f določi natanko en element, ki je iz množice B. Množici A rečemo domena (včasih tudi definicijsko območje), množici B pa rečemo kodomena. $f(x)$ pravimo slika elementa x. $(x \mapsto f(x))$

Zaloga (vrednosti) preslikave $f : A \to B$ je množica $\{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.

$f : A \to B$ je *surjektivna* (surjekcija), kadar je njena zaloga B.

$$\forall y \in B \ \exists x \in A : y = f(x)$$

$f : A \to B$ je *injektivna* (injekcija), kadar velja sklep:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Za preverjanje uporabimo:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, x_1, x_2 \in A$$

$f : A \to B$ je *bijektivna* (bijekcija), kadar je injektivna in hkrati surjektivna. Če je $f : A \to B$ bijekcija, obstaja točno določena preslikava $g : B \to A$, da velja:

$$(\forall x \in A : g(f(x)) = x) \wedge (\forall y \in B : f(g(y)) = y)$$

Preslikavo $g : B \to A$ imenujemo *inverz* preslikave $f : A \to B$ in jo označimo z:

$$g = f^{-1}$$

Kompozitum preslikav $f : A \to B$ in $g : B \to C$ je:

$$\begin{aligned} g \circ f &\text{ ali } gf \\ g \circ f &: A \to C \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \end{aligned}$$

za vsak $x \in A$.

Preslikavo $A \to A$ imenujemo *identična preslikava* ali *identiteta*:

$$\begin{aligned} id_A &: A \to A \\ \forall x \in A &: id_A(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &: A \to B \text{ bijekcija} \\ g &: B \to A \\ g \circ f &= id_A \\ f \circ g &= id_B \end{aligned}$$

$f : A \to B$ je bijekcija in $g : B \to A$ je inverzana preslikava $f \iff (g \circ f = id_A \wedge f \circ g = id_B)$

Graf preslikave $f : A \to B$ je množica:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$
$$G(f) \subseteq A \times B$$

Relacija med elementi množice A in elementi množice B je podmnožica množice $A \times B$.

$R \subseteq A \times B$ (R je relacija)
$(x, y) \in R \equiv xRy$

Primeri kjer $A = B$ (relacija $R \subseteq A \times A$ je *binarjna relacija* na množici A).

(1) $A = \mathbb{R}$

R relacija na $\mathbb{R}$: $\leq$

$$(x, y) \in R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \iff x \leq y$$
$$R = \leq$$
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$$

(2) $A = \{p : p$ - premica v prostoru$\}$

R relacija vzporednosti

$$p, q \in A \qquad pRq \equiv p \parallel q$$

(3) $M \neq \varnothing, \qquad A = \mathcal{P}M$ R relacija *inkluzije* $\subseteq$

$$x, y \in A \qquad (x \subseteq A, y \subseteq A)$$
$$xRy \equiv x \subseteq y$$

Definicije:

(1) Relacija R nad A je *refleksivna*, kadar velja xRx za vsak $x \in A$.

(2) Relacija R nad A je *tranzitivna*, kadar velja sklep:

$$(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

(3) Relacija R nad A je *antisimetrična*, kadar velja sklep:

$$(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$$

(4) Relacija R nad A je *simetrična*, kadar velja sklep:

$$xRy \Rightarrow yRx$$

(5) R je relacija *delne urejenosti*, kadar je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna ($R \equiv \leq$).

(6) R je relacija *ekvivalence* (ali ekvivalenčna relacija), kadar je refleksivna, simetrična in tranzitivna ($R \equiv \sim$).

Naj bo A neprazna množica, $\sim$ ekvivalenčna relacija na A in $a \in A$.

$$[a] = \{x \in A : x \sim a\}$$

$[a]$ je *ekvivalenčni razred* elementa a.

$$a \sim a \Rightarrow a \in [a]$$

a je predstavnik tega ekvivalnečnega razreda.

$$[a] = [b]?$$

Predpostavimo $b \sim a$ (zaradi simetričnosti sledi $a \sim b$).

$$x \in [a] \Rightarrow x \sim a \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b]$$

Torej velja:

$$[a] \subseteq [b]$$
$$[b] \subseteq [a]$$

Zato $[a] = [b]$.

Velja tudi $[a] = [b] \Rightarrow a \sim b$

$$[a] = [b] \Rightarrow a \in [a] \Rightarrow a \in [b] \Rightarrow a \sim b$$

$$a \sim b \iff [a] = [b]$$

Naj velja $[a] \cap [b] \neq \varnothing$:

$$\begin{aligned} &\exists c \in [a] \cap [b] \\ &\Rightarrow c \sim a \wedge c \sim b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[a] \cap [b] \neq \varnothing \Rightarrow [a] = [b] \\ &[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \varnothing \end{aligned}$$

$A/_{\sim} = \{[a] : a \in A\}$ je *kvocientna* ali *faktorska* množica glede na ekvivalenčno relacijo $\sim$.

$A = \cup [a]$ pravimo *razčlenitev* A-ja.

Primera:

(1) $A = \{\overrightarrow{MN} : M, N - \text{točki v prostoru}\}$
$\overrightarrow{MN}$ je usmerjena daljica
$\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{MN} \iff$ obstaja translacija, ki XY prenese v MN. $\sim$ je ekvivalenčna relacija.

$$\left[\overrightarrow{MN}\right] = \left\{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{MN}\right\} = \vec{MN}$$