

# Analiza 1

Vid Drobnič

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Števila</b>	<b>2</b>
1.1	Naravna števila . . . . .	2
1.2	Cela števila . . . . .	3
1.3	Racionalna števila . . . . .	3
1.4	Dedekindov aksiom in Realna števila . . . . .	10
1.5	Posledice Dedekindovega aksioma . . . . .	17
1.6	Intervali . . . . .	18
1.7	Decimalni ulomki . . . . .	19
1.8	Absolutna vrednost . . . . .	22
1.9	Kompleksna števila . . . . .	23
1.9.1	Lastnosti . . . . .	26
1.9.2	Geometrijska interpretacija . . . . .	27
1.9.3	Polarni zapis . . . . .	28
<b>2</b>	<b>O množicah in preslikavah</b>	<b>30</b>
<b>3</b>	<b>Številska zaporedja</b>	<b>32</b>
3.1	Monotona zaporedja . . . . .	38
3.2	Podzaporedja . . . . .	40
3.3	Računanje z zaporedji . . . . .	41

# 1 Števila

## 1.1 Naravna števila

- Z njimi štejemo: 1, 2, 3
- Množico naravnih števil označimo z  $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- Vsako naravno število  $n$  ima naslednika  $n^+$  ( $n^+ = n + 1$ )

### Peanovi aksiomi:

$\mathbb{N}$  je množica skupaj s pravilom, ki vsakemu naravnemu številu  $n$  dodeli njegovega naslednika  $n^+ \in \mathbb{N}$  in velja:

1. za vse  $m, n \in \mathbb{N}$  če  $m^+ = n^+$ , potem  $m = n$
2. obstaja  $1 \in \mathbb{N}$ , ki ni naslednik nobenega naravnega števila
3. Če je  $A \subset \mathbb{N}$  in če je  $1 \in A$ <sup>1</sup> in če velja: če  $n \in A$ , potem  $n^+ \in A$ <sup>2</sup>, potem  $A = \mathbb{N}$

Aksiom (3) se imenuje **aksiom popolne indukcije**.

- Naravna števila lahko **seštevamo, množimo**.
- $\mathbb{N}$  so urejena po velikosti 1, 2, 3, 4, 5, ...

$$\{3, 5, 6, 10\} \subset \mathbb{N}$$

$$\{3, 5, 7, 16, 23, \dots\} \subset \mathbb{N}$$

- Vsaka neprazna podmnožica  $\mathbb{N}$  ima najmanjši element.
- V splošnem ne velja<sup>3</sup>, da ima vsaka neprazna podmnožica  $\mathbb{N}$  največji element.

---

<sup>1</sup>indukcijska baza

<sup>2</sup>indukcijski korak

<sup>3</sup>ne velja za vse (množice)

## 1.2 Cela števila

Označimo jih z  $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

- Seštevanje in množenje se iz  $\mathbb{N}$  razširita na  $\mathbb{Z}$ .
- Poleg tega je definiramo **odštevanje**.
- Množico celih števil uredimo na običajen način.
- Ni res, da bi imela vsaka neprazna podmnožica  $\mathbb{Z}$  najmanjši element.
- V splošnem deljenje ni definirano  $\left(\frac{3}{2}\right)$

## 1.3 Racionalna števila

Racionalna števila so kvocienti celih števil. Bolj natančno: kvocienti celih in naravnih števil.

Dva ulomka  $\frac{m}{n}, \frac{k}{l}$  predstavljata isto racionalno število če:  $ml = nk$  lahko naredimo:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

Množico  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  razdelimo na razrede: urejena para  $(m, n)$  in  $(k, l)$  sta v istem razredu, če velja  $ml = nk$ .

Racionalno število je razred urejenih parov in ga označimo z  $\frac{m}{n}$ .

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

**Seštevanje v  $\mathbb{Q}$ :**

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}$$

Seštevanje ulomkov je *dobro definirano*:

če je:  $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}, \frac{k'}{l'} = \frac{k}{l}$

potem je:  $\frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'} = \frac{m}{n} + \frac{k}{l}$

vemo:  $m'n = mn'$  in  $k'l = kl'$

*Dokaz:*

$$\begin{aligned}\frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'} & \stackrel{(def)}{=} \frac{m'l' + n'k'}{n'l'} \cdot \frac{mk}{mk} = \\ & = \frac{m'l'mk + n'k'mk}{n'ml'k} = \\ & = \frac{m'mk'l + m'nk'k}{m'nk'l} = \frac{ml + nk}{nl} \stackrel{(def)}{=} \frac{m}{n} + \frac{k}{l}\end{aligned}$$

**Množenje v  $\mathbb{Q}$ :**

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}$$

Množenje je dobro definirano (izpeljava doma).

**Deljenje v  $\mathbb{Q}$ :**

$$\frac{m}{n} : \frac{k}{l} = \frac{ml}{nk}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}, k \neq 0$$

## Lastnosti seštevanja

Naj bo  $A$  (številsko) množica z operacijama  $+$  in  $\cdot$ .

Osnovne lastnosti računskih operacij bomo imenovali **aksiomi**. Druge lastnosti izpeljemo iz aksiomov.

### A1 asociativnost seštevanja

Za vse  $a, b, c \in A$  velja  $(a + b) + c = a + (b + c)$

### A2 komutativnost seštevanja

Za vse  $a, b \in A$  velja da  $a + b = b + a$

### A3 obstoj enote za seštevanje

Obstaja za element  $0 \in A$  za katerega velja da:  $0 + a = a$  za vse  $a \in A$

#### A4 obstoj nasprotnega števila (elementa)

Za vsak  $a \in A$  obstaja nasprotno število  $-a \in A$  za katerega velja:  
 $(-a) + a = 0$

*Opomba:* Množica  $A$  za operacijo  $+$ , ki ustreza aksiomom od A1 do A4 je **Abelova grupa** za  $+$ .

*Trditev:* Naj  $(A, +)$  ustreza aksiomom od A1 do A4.

- (1)  $\forall a \in A$  ima eno samo nasprotno število
- (2) **Pravilo krajšanja:** za vse  $a, x, y \in A$  velja:  $a + x = a + y \Rightarrow x = y$
- (3)  $-0 = 0$

*Dokaz:*

- (1) izberemo poljubno število  $a \in A$ . Dokazujemo da ima  $a$  natanko 1 nasprotni element.

Po A4 nasprotno število obstaja. Denimo, da sta  $b, c \in A$  nasprotni števili od  $a$ .

$$\begin{aligned} b + a = 0 \text{ in } c + a = 0 \\ (a + b) + c \stackrel{A2}{=} (b + a) + c \stackrel{\text{predp.}}{=} 0 + c \stackrel{A2}{=} c \\ (a + b) + c \stackrel{A2}{=} (b + a) + c \stackrel{A1}{=} b + (a + c) \stackrel{A2}{=} b + (c + a) \stackrel{\text{predp.}}{=} b + 0 \stackrel{A2}{=} 0 + b \stackrel{A3}{=} b \\ c = b \end{aligned}$$

- (2)

$$\begin{aligned} a + x = a + y &\stackrel{A4}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow (-a) + (a + x) &= (-a) + (a + y) \stackrel{A1}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow ((-a) + a) + x &= ((-a) + a) + y \stackrel{A4}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow 0 + x = 0 + y &\stackrel{A3}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

- (3)  $-0 = 0$

$$0 \stackrel{A4}{=} (-0) + 0 \stackrel{A2}{=} 0 + (-0) \stackrel{A3}{=} -0$$

*Odštevanje v  $A$ :* razlika števil  $a$  in  $b$  je vsota  $a$  in nasprotnega elementa od  $b$ .

$$a - b := a + (-b)$$

$b - a$  je rešitev enačbe  $a + x = b$

*Pozor:* odštevanje ne ustreza aksiomom od A1 do A4.

## Lastnosti množenja

### A5 asociativnost množenja

Za vse  $a, b, c \in A$  velja:  $(ab)c = a(bc)$

### A6 komutativnost množenja

Za vse  $a, b, c \in A$  velja:  $ab = ba$

### A7 obstoj enote za množenje

$\exists 1 \in A : 1 \cdot a = a$ , za  $\forall a \in A$

### A8 obstoj obratnega števila (elementa)

Vsak  $a \in A, a \neq 0$ , ima obratni element, tj.:  $a^{-1} \in A : a^{-1} \cdot a = 1$

Množici  $A$  z operacijo  $+$ , ki ustreza A1-A4, rečemo **grupa za seštevanje** (Abelova grupa).

Množica  $A \setminus \{0\}$  z operacijo  $\cdot$ , ki ustreza A5-A8 je **grupa za množenje**.

Podobno kot za seštevanje lahko izpeljemo:

*Trditev:* veljajo:

(1) Vsak  $a \in A \setminus \{0\}$  ima eno samo obratno število

(2) (pravilo krajšanja za množenje)

Za vsak  $a, x, y \in A$  velja:  $ax = ay \Rightarrow x = y$

(3)  $1^{-1} = 1$

### A9 Števili 0 in 1 sta različni $0 \neq 1$

## A10 Distributivnost

Za vsake  $a, b, c \in A$  velja:

$$(a + b)c = ac + bc$$

*Def:* Množico  $A$  z operacijama  $+$  in  $\cdot$ , ki ustreza aksiomom A1-A10, imenujemo **komutativen<sup>4</sup> obseg** ali **polje**.

*Primer:*  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  so polje.

V  $A$  vpeljemo urejenost z dvema aksiomoma:

**A11:** Za vsak  $a \in A \setminus \{0\}$  velja, da je natanko eno od števil  $a$ ,  $-a$  pozitivno. Število 0 ni niti pozitivno niti negativno. (Število  $a$  je negativno, če je število  $-a$  pozitivno).

**A12:** Za vsaka  $a, b \in A$  velja: če sta  $a$  in  $b$  pozitivni števili, potem sta tudi  $a + b$  in  $a \cdot b$  pozitivni števili.

*Def:* Če ima obseg  $(A, +, \cdot)$  urejenost, ki izpolnjuje A11 in A12,  $A$  imenujemo **urejen obseg** (urejeno polje).

*Primer:*  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  z običajno urejenostjo je urejen obseg.

$\frac{m}{n}$  je pozitiven, če  $m \cdot n > 0$

*Def:* Naj bo  $A$  urejen obseg. Za poljubna  $a, b \in A$  definiramo:

Pišemo  $a > b$  natanko tedaj, kadar je  $a - b$  pozitivno število.

V tem primeru pišemo tudi  $b < a$

V posebnem primeru pišemo  $a > 0$ , kadar je  $a$  pozitivno število.

*Def:* Naj bo  $A$  urejen obseg. Za poljubna  $a, b \in A$

$a \leq b$  natanko takrat, kadar  $a < b$  ali  $a = b$

*Trditev:* V urejenem obsegu  $A$  velja:

(1) Za poljubni števili  $a, b \in A$  velja natanko ena od možnosti:

$$a < b, a = b, a > b$$

Sledi iz A11 uporabljen za  $a - b$ .

---

<sup>4</sup>komutativnost se nanaša na komutativnost množenja



- (2) Za poljubne  $a, b, c \in A$  velja:  
če je  $a > b \wedge b > c$ , potem  $a > c$  (tranzitivnost)
- (3) Za poljubne  $a, b, c \in A$  velja:  
če je  $a > b$ , potem  $a + c > b + c$
- (4) Za poljubne  $a, b, c, \in A, c > 0$ :  
če je  $a > b$ , potem je  $ac > bc$
- (5) Za poljubne  $a, b, c, d, \in A$ :  
če je  $a > b > 0$  in  $c > d > 0$ , potem je  $ac > bd$

*Dokaz:*

- (2)  $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

Po definiciji:  $a - b > 0$  in  $b - c > 0$

Zato po A12:

$$\begin{aligned}(a - b) + (b - c) &> 0 \\ a + (-b) + b + (-c) &> 0 \\ a + 0 + (-c) &> 0 \\ a - c &> 0\end{aligned}$$

zato  $a > c$

- (3) denimo, da je  $a > b$

dokazujemo, da je  $a + b > b + c$ , tj:  $(a + c) - (b + c) > 0$

$$\begin{aligned}(a + c) - (b + c) &= a + c + (-(b + c)) = \\ &= a + c + (-b) + (-c) = \\ &= (a + (-b)) + (c + (-c)) = \\ &= a + (-b) = a - b\end{aligned}$$

Dokaz da  $-(b + c) = (-b) + (-c)$ :

$-(b + c)$  je nasprotni element od  $b + c$ , kar pomeni da je njuna vsota enaka 0. Če velja  $-(b + c) = (-b) + (-c)$ , mora biti tudi  $b + c + (-b) + (-c) = 0$ :

$$b + c + (-b) + (-c) \stackrel{A2, A1}{=} (b + (-b)) + (c + (-c)) \stackrel{A4}{=} 0 + 0 \stackrel{A3}{=} 0$$

Če  $a > b$  je  $a - b > 0$ , zato je  $(a + c) - (b + c) > 0$ , kar pomni  $a + c > b + c$ .

(5)  $a > b > 0$  in  $c > d > 0$

Dokazujemo  $ac > bd$ :

$$a > b \stackrel{A4}{\Rightarrow} ac > bc \quad (c > 0)$$

$$c > d \stackrel{A4}{\Rightarrow} bc > bd \quad (b > 0)$$

Z upoštevanjem tranzitivnosti (2) dobimo:  $ac > bd$   $\square$

Racionalna števila predstavimo na številski premici.

Racionalna števila so na številski premici **povsod gosta** tj: na vsakem nepraznem odprtem intervalu leži racionalno število.

Racionalna števila ne pokrijejo številske premice

*Trditev:* rešitev enačbe  $x^2 = 2, x > 0$  ni racionalno število. ( $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ )

*Dokaz:* Dokazujemo da  $x$  ni ulomek.

Dokazujemo s protislovjem.

- privzamemo, da tisto kar dokazujemo ni res. (predpostavimo, da  $x$  je ulomek)
- sklepamo
- skepi nas privedejo v protislovje s predpostavko

$$x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$$

Če je  $x$  ulomek, ga lahko zapišemo kot okrajšan ulomek, zato sta  $m$  in  $n$  tuji

si števili.

$$\begin{aligned}
 x^2 = 2 &\Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \\
 \frac{m^2}{n^2} &= 2 \\
 m^2 &= 2n^2 \\
 2|m^2 &\Rightarrow 2|m \\
 \exists l \in \mathbb{N} : m &= 2l \\
 4l^2 &= 2n^2 \\
 2l^2 &= n^2 \\
 2|n^2 &\Rightarrow 2|n \\
 &\rightarrow \leftarrow
 \end{aligned}$$

Dokaz da  $2|m^2 \Rightarrow 2|m$ :

Če je  $m$  liho, potem  $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
 m &= 2k + 1 \\
 m^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\
 m^2 &\text{ je lih}
 \end{aligned}$$

## 1.4 Dedekindov aksiom in Realna števila

Radi bi skonstruirali številsko množico, ki bo vsaj urejen obseg in, ki zapolni številsko premico.

### Dedekindov pristop

*Def:* **Rez** je podmnožica  $A \subset \mathbb{Q}$ , za katero velja:

- (i)  $A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{Q}$
- (ii) Če je  $p \in A$ , potem za vsak  $q \in \mathbb{Q}$  in  $q < p$ , velja  $q \in A$
- (iii) za vsak  $p \in A$  obstaja  $q \in A, q > p$  ( $A$  nima največjega elementa)

*Def:* Množica realnih števil je množica vseh rezov, označimo jo s  $\mathbb{R}$

*Primer:* 16 ustreza rez:  $\{p \in \mathbb{Q}; p < 16\} = B$

*Trditev:* Preslikava  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  in je definirana s predpisom:

$$q \mapsto \{p \in \mathbb{Q}; p < q\} = p^*$$

vloži množico racionalnih števil v množico realnih števil.

Vpeljimo računski operaciji v  $\mathbb{R}$ .

*Def:* Naj bosta  $A$  in  $B$  reza. Vsota rezov  $A$  in  $B$  je

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$$

*Opomba:* Želimo si, da velja  $(p + q)^* = p^* + q^*$

*Trditev:* Če sta  $A$  in  $B$  reza, potem je tudi  $A + B$  rez.

*Dokaz(trditev):* Denimo da sta  $A$  in  $B$  reza.

Dokazujemo da je  $A + B$  rez:

(i)  $\underline{A + B} \neq \emptyset$

Ker sta  $A$  in  $B$  reza, po lastnosti (i) obstaja  $a \in A$  in  $b \in B$ . Potem je  $a + b \in A + B$ . Sledi  $A + B \neq \emptyset$   $\square$

$\underline{A + B} \neq \mathbb{Q}$

Obstaja  $c \in \mathbb{Q}, c \notin A$  in obstaja  $d \in \mathbb{Q}, d \notin B$ .

$$c + d \notin A + B$$

Denimo, da je  $c + d \in A + B$ .

Potem velja, da je  $c + d = a + b$  za  $a \in A, b \in B$ .

Iz (ii) sledi:  $c > a$  in  $d > b \Rightarrow a + b < c + d \rightarrow \leftarrow$

(ii) Denimo:  $p \in A + B$ , dokazujemo da za  $q \in \mathbb{Q}, q < p$  velja  $\underline{q \in A + B}$

Obstajata  $a \in A$  in  $b \in B$ , da  $p = a + b$

$$q = a + q - a$$

Če je  $q - a < b$ , potem  $q - a \in B$

$$q < a + b$$

$$q < p$$

$\square$

(iii)  $A + B$  nima največjega elementa.

izberimo  $p \in A + B$

iščemo  $q \in A + B, q > p$

Obstajata  $a \in A, b \in B$ , da je  $p = a + b$

Obstaja  $a' \in A, a' > a$

$$q := a' + b \in A + B$$

$$q > p$$

□

Ni težko preveriti, da za  $(\mathbb{R}, +)$  veljajo A1-A4.

Asociativnost in komutativnost se dokaže z operacijami na elementih reza.

$0^*$  je enota za seštevanje.

Nasprotni rez od  $A$ :

$$-A = \{r \in \mathbb{Q}, \text{ obstaja } r' \in \mathbb{Q}, r' > r \text{ in } r' + p < 0 \text{ za vse } p \in A\}$$

(i)  $-A \neq \emptyset$

$$\underline{-A \neq \mathbb{Q}}$$

$$q + a < 0 \text{ za vse } q \in \mathbb{Q}$$

$$q = -a$$

(ii)  $q \in -A : r < q$

$$q + a < 0 \text{ za vse } a \in A$$

$$r + a < q + a \text{ za vse } a \in A \text{ po tranzitivnosti: } r + a < 0$$

(iii) Izberemo poljuben  $r \in A$ . Iščemo  $q \in A, q > r$ .

$$q := \frac{r + r'}{2} (r' > r, r' \in \mathbb{Q} : r' + p < 0 \text{ za vse } p \in \mathbb{Q})$$

$$q \in \mathbb{Q}, r' > q$$

*Def:* Pravimo da je  $A$  pozitiven, če je  $0^* \in A, A \neq 0^*$ . Denimo da sta  $A$  in  $B$  pozitivna reza:

$$A \cdot B = \{q \in \mathbb{Q}, \text{ obstajata } a \in A, a > 0 \text{ in } b \in B, b > 0, \text{ da je } q < ab\}$$

Želimo  $(pq)^* = p^* \cdot q^*, p, q \in \mathbb{Q}$

*Def:* Naj bosta  $A$  in  $B$  poljubna reza.

$$A \cdot B = \begin{cases} A \cdot B & A > 0 \wedge B > 0 \\ -A \cdot (-B) & A > 0 \wedge B < 0 \\ -(-A) \cdot B & A < 0 \wedge B > 0 \\ (-A) \cdot (-B) & A < 0 \wedge B < 0 \end{cases}$$

Če je vsaj eden od rezov enak  $0^*$ , potem  $A \cdot B = 0^*$ .

Ni težko preveriti, da množenje rezov izpolnjuje A5-A8 in A9, A10.

Enota za množenje je  $1^*$ .

Urejenost izpolnjuje A11 in A12.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$  je **urejen obseg** in vsebuje  $\mathbb{Q}$  kot **urejen podobseg**.

*Cilj:* Obseg  $\mathbb{R}$  izpolnjuje še dodaten aksiom A13 (**Dedekindov aksiom**), ki pove, da  $\mathbb{R}$  zapolnjuje številsko premico.

Aksioma A13 obseg  $\mathbb{Q}$  ne izpolnjuje.

*Def:* Naj bo  $B$  urejen obseg in  $A \subset B$ . Pravimo, da je  $A$  navzgor omejena, če obstaja  $M \in B$ , da velja:

$$\forall a \in A : a \leq M$$

$\forall M$  s to lastnostjo pravimo zgornja meja množice  $A$ . Če je  $A \subset \mathbb{Q}$  (ali  $\mathbb{R}$ ) in je množica navzgor omejena, potem ima  $A$  neskončno zgornjih mej.

*Def:* Naj bo  $A$  navzgor omejena množica. Če obstaja najmanjša od vseh zgornjih mej množice  $A$  v  $B$ , jo imenuje natančna zgornja meja množice  $A$ .

Torej je  $\alpha \in B$  natančna zgornja meja množice  $A$ , če velja:

(i)  $\alpha$  je zgornja meja  $\forall a \in A : a \leq \alpha$

(ii) Če  $b \in B, b < \alpha$ , potem  $b$  ni zgornja meja množice  $A$ , t.j.:  $\exists a \in A : a > b$

Natančno zgornjo mejo množice  $A$  imenujemo tudi **supremum** množice  $A$  in jo označimo z  $\sup A$ .

*Def:* Če obstaja največji element množice  $A$ , ga imenujemo **maksimum** množice  $A$  in označimo z  $\max A$ .

Če ima  $A$  maksimum, potem velja:

$$\max A \in A \wedge \forall a \in A : a \leq \max A$$

Če ima  $A$  maksimum, potem  $\max A = \sup A$ . (Za  $a$  v (2) lastnosti definicije supremuma vzamemo  $\max A$ )

*Dokaz:*

- (1)  $\max A$  je zgornja meja  $A$  (po definiciji maksimuma).
- (2) če  $b < \max A$ , potem  $b$  ni zgornja meja (ker je  $\max A \in A$ ,  $b$  pa je manjši, velja da  $b$  ni zgornja meja od  $A$ , ker obstaja nek element is  $A$ , ki je večji od  $b$ ).

*Primeri:*

1.  $A = \{x \in \mathbb{Q}, x < 0\} \subset \mathbb{Q}$

4 je zgornja meja množice  $A$ , ker  $x \in A, x < 0, 0 < 4 \Rightarrow x < 4$

$\Rightarrow A$  je navzgor omejena.

0 je natančna zgornja meja množice  $A$

(a)  $x \in A, x < 0$

(b) Izberemo poljuben  $b \in \mathbb{Q}, b < 0$  in dokazujemo, da  $b$  ni zgornja meja.

$$b < \frac{b}{2} < 0; \frac{b}{2} \in A, \frac{b}{2} > b$$

Množica  $A$  nima maksimuma:  $0 \notin A$ .

2.  $C = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$

$C$  je navzgor omejena z 2.

$$x \in C : x^2 < 2 \wedge 2 < 4 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x < 2$$

(a) Vsako število  $p \in \mathbb{Q}, p^2 > 2$  je zgornja meja množice  $C$ .

(b) Nobeno racionalno število  $q \in \mathbb{Q}, q^2 < 2$  ni zgornja meja množice  $C$ .

Vemo: Rešitev enačbe  $x^2 = 2, x > 0, x \notin \mathbb{Q}$ .

Sledi:  $C \subset \mathbb{Q}$  nima natančne zgornje meje.

*Dokaz:*

(a)

$$x^2 < 2 < p^2$$

sledi:  $x^2 < p^2 \Rightarrow x < p$  za vse  $x \in C$   $\square$

(b) Iščemo  $c \in C$ , da je  $c > q, c^2 < 2$

$$c := \frac{2q+2}{q+2} = q + \frac{2q+2-q^2-2q}{q+2} = q + \frac{2-q^2}{q+2} > 0$$

( $q^2 < 2$ )

$$c^2 = \left(\frac{2q+2}{q+2}\right)^2 = \frac{4(q^2+2q+1)}{q^2+4q+4}$$

$$c^2 - 2 = \frac{4q^2+8q+4-2q^2-8q-8}{(q+2)^2} = \frac{2q^2-4}{(q+2)^2} = \frac{2(q^2-2)}{(q+2)^2} > 0$$

$$q^2 < 2$$

Podobno kot zgornjo mejo, navzgor omejeno množico, supremum in maksimum, definiramo spodnjo mejo, navzdol omejeno množico, infimum in minimum.

**A13 (Dedekindov aksiom):** Vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica v množici  $A$  ima supremum (v množici  $A$ ).

**Def:** Če množica  $(A, +, \cdot, <)$  izpolnjuje aksiome A1-A13 jo imenujem *poln urejen obseg* (poln se nanaša na A13).

**Trditev:**  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$  je urejen obseg, ki ne izpolnjuje A13.

**Izrek:** vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica v  $\mathbb{R}$  ima natančno določeno zgornjo mejo. ( $\mathbb{R}$  izpolnjuje A13)

**Posledica:**  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  je poln urejen obseg.

**Posledica:** Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica  $\mathbb{R}$  ima natančno spodnjo mejo.

$A$  neprazna navzdol omejena.

$$-A = \{x; -x \in A\}$$



$-A$  je neprazna, navzgor omejena (če  $m$  spodnja meja od  $A$ , je  $-m$  zgornja meja od  $-A$ ).  $\Rightarrow -A$  ima supremum in velja:  $-\sup A = \inf A$

**Dokaz (izrek):** Izberemo poljubno neprazno navzgor omejeno podmnožico  $\mathcal{A}$  v  $\mathbb{R}$ .

$$C = \cup A, A \in \mathcal{A}$$

Dokazati je treba:

1.  $C$  je rez
2.  $C = \sup \mathcal{A}$

1. (i)  $C \neq \emptyset$

Ker  $\mathcal{A}$  ni prazna  $\exists A \in \mathcal{A}$ . Torej velja  $A \subset C$ , torej  $C \neq \emptyset$ .

$$C \neq \mathbb{Q}$$

Ker je  $\mathcal{A}$  omejena, obstaja zgornja meja  $M$  množice  $\mathcal{A}$ , velja:

$$\forall A \in \mathcal{A} : A \leq M$$

$$\forall A \in \mathcal{A} : A \subset M$$

Sledi:  $C \subset M$ , zato  $C \neq \mathbb{Q}$  (ker  $M \neq \mathbb{Q}/M$  je rez).

- (ii)  $p \in C, q \in \mathbb{Q}, q < p \Rightarrow q \in C$

$p \in C \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}$ , da je  $p \in A$ . Ker je  $A$  rez, za  $q \in \mathbb{Q}, q < p$  velja  $q \in A$ .

Sledi:  $q \in C$ .

- (iii)  $p \in C \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, q > p : q \in C$   $p \in C \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}$ , da je  $p \in A$ .

Ker je  $A$  rez,  $\exists q \in A, q > p$ .

Sledi:  $q \in C$ .

2. (i)  $C$  je zgornja meja  $\mathcal{A}$

Ker je  $A \subset C$  za vse  $A \in \mathcal{A}$ , velja  $A \leq C$  za vse  $A \in \mathcal{A}$ . t.j.:  $C$  je zgornja meja.

- (ii)  $C$  je natančna zgornja meja  $\mathcal{A}$

Izberimo poljuben  $D < C$ . Dokazujemo, da  $D$  ni zgornja meja  $\mathcal{A}$ .

Ker je  $D < C, D \subset C$  in  $D \neq C$ , obstaja  $p \in \mathbb{Q}, p \in C$  in  $p \notin D$ .

Ker je  $p \in C$ , obstaja  $A \in \mathcal{A}$ , da je  $p \in A$ .

Velja:  $A > D$  in  $A \in \mathcal{A}$  (vemo da sta vsaka reza primerljiva po velikosti.)

Sledi:  $D$  ni zgornja meja.  $\square$

*Za radovedne:* Poleg Dedekinda je realna števila definiral tudi Cantor. Ta je to naredil s Cauchyjevimi zaporedji.

*Opomba:* Med obsegoma  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  je še veliko obsegov.

**Definicija:** Pravimo, da je  $x$  iracionalno število, če  $x \notin \mathbb{Q}$ .

Rešitvam polinomskih enačb s celimi koeficienti rečemo *algebraična števila*.

*Primer:*  $\sqrt{2} : x^2 - 2 = 0$

Niso vsa iracionalna števila algebraična:  $\pi, e$ . Tem pravimo *transcendentna števila*.

## 1.5 Posledice Dedekindovega aksioma

- Množica  $\mathbb{Z}$  ni navzgor omejena v  $\mathbb{R}$ .

*Dokaz:* Denimo, da je  $\mathbb{Z}$  navzgor omejena v  $\mathbb{R}$ . Potem obstaja  $M \in \mathbb{R}$ , da  $M = \sup \mathbb{Z}$ . Torej  $M - 1$  ni zgornja meja  $\mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \exists a \in \mathbb{Z}, a > M - 1 \\ a + 1 > M, a + 1 \in \mathbb{Z} \rightarrow \leftarrow \end{aligned}$$

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{Z} : a < b$

*Dokaz:* če to ne bi bilo res, bi bilo število  $a$  zgornja meja  $\mathbb{Z}$ . To pa ni res (prejšnja posledica).

- *Arhimedska lastnost:* Naj bosta  $a, b \in \mathbb{R}^+$ . Potem obstaja  $n \in \mathbb{N} : na > b$ .

*Dokaz:* Obstajati mora  $n \in \mathbb{N} : n > \frac{b}{a} \therefore$  Po prejšnji posledici tak  $n$  obstaja.  $\square$

- Naj bo  $a \in \mathbb{R}^+$ . Potem obstaja  $n \in \mathbb{N}$ , da  $\frac{1}{n} < a$ .

*Dokaz:* uporabimo arhimedsko lastnost za  $n = 1$ .

- Naj bosta  $a, b$  poljubni  $\mathbb{R}, a < b$ . Obstaja  $q \in \mathbb{Q}$ , da velja  $a < q < b$ .

*Dokaz:* če je  $b - a > 1$ , potem obstaja  $m \in \mathbb{Z}, a < m < b$

$\{n \in \mathbb{Z}, n \leq a\}$  je navzdol omejena neprazna.

$$\sup\{n \in \mathbb{Z}, n \leq a\} = x, x \in \mathbb{Z}$$

$$m := x + 1$$

$$b > m > 0$$

$$b - a > 0$$

$$\exists n \in \mathbb{N} : n(b - a) > 1$$

Obstaja  $m \in \mathbb{Z} : an < m < nb$ .

$$a < \frac{m}{n} < b \quad \square$$

Rečemo tudi:  $\mathbb{Q}$  so v  $\mathbb{R}$  *povsod gosta*.

## 1.6 Intervali

**Def:** Naj bosta  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

1.  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$  *zaprti interval*
2.  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$  *odprti interval*
3.  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$  *polodprti interval*  
 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
4.  $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$   
 $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$   
 $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$   
 $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$   
 $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

**Def:** Naj bo  $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ . Interval  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  imenujemo  $\varepsilon$ -*okolica* števila  $a$ .

*Okolica točke*  $a$  je vsaka taka podmnožica v  $\mathbb{R}$ , ki vsebuje kakšno  $\varepsilon$ -okolico točke  $a$ .

## 1.7 Decimalni ulomki

Vsako  $\mathbb{R}$  število lahko zapišemo kot *decimalni ulomek*.

Naj bo  $x \in \mathbb{R}^+$  in naj bo  $n \in \mathbb{N}_0$  največje število, ki ne presega  $x$ :

$$n \leq x < n + 1$$

Interval  $[n, n+1]$  razdelimo na 10 enakih delov. Nato poiščemo  $n_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , da velja:

$$n + \frac{n_1}{10} \leq x < n + \frac{n_1 + 1}{10}$$

Postopek nadaljujemo in na ta način sestavimo zaporedje decimalnih približkov za  $x$ .

$$\mathcal{A} = \{n, n + \frac{n_1}{10}, n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100}, \dots\}$$

*Trditev:*  $x = \sup \mathcal{A}$

*Dokaz:*

(i)  $x$  je zgornja meja množice  $\mathcal{A}$

Velja po konstrukciji:  $\forall a \in \mathcal{A} : a \leq x$ .

(ii)  $x$  je najmanjša zgornja meja

Denimo da to ni res:

$$y := \sup \mathcal{A} < x$$

$$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq x - y$$

$$\exists p \in \mathbb{N} : \frac{1}{10^p} < \frac{1}{n} < x - y$$

$$y + \frac{1}{10^p} < x$$

$$\begin{aligned} n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \dots + \frac{n_p}{10^p} &\leq y \\ n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \dots + \frac{n_p + 1}{10^p} &\leq y + \frac{1}{10^p} < x \end{aligned}$$

Trditev utemelji, da  $x$  lahko zapišemo, kot neskončni decimalni ulomek.

$$x = n_0 + \frac{n_1}{10} + \dots + \frac{n_p}{10^p} + \dots = n_0, n_1 n_2 \dots n_p \dots$$

*Trditev:* Naj bosta  $x, y \in \mathbb{R}^+$

(1) Denimo, da obstaja  $k \in \mathbb{N}_0$ , za katerega velja:

$$\begin{aligned} x &= n_0, n_1 n_2 \dots n_{k-1} n_k 99 \dots \\ y &= n_0, n_1 n_2 \dots n_{k-1} (n_k + 1) 00 \dots \end{aligned}$$

in  $n_k \neq 9$ , potem  $x = y$ .

(2) Za dva različna decimalna zapisa  $x \in \mathbb{R}^+$  velja (1).

*Dokaz:* Naj bo  $\mathcal{A}$  množica decimalnih preslikav za  $x$ .

(1)

$$\forall a \in \mathcal{A} : y \geq a \text{ (} y \text{ je zgornja meja)}$$

Zato  $y \geq x$  ( $x$  je  $\sup \mathcal{A}$ )

Dokzujemo  $y$  je natančna zgornja meja od  $\mathcal{A}$

Naj bo  $l > k$  in  $a_l$   $l$ -ti decimalni približek za  $x$ .

$$\begin{aligned} y - a_l &= \frac{1}{10^l} \\ y - \frac{1}{10^l} &= a_l \\ y - \frac{1}{10^l} &\leq a_l < a_{l+1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow y - \frac{1}{10^l}$  ni zgornja meja za noben  $l$ , torej je  $y$  natančna zgornja meja.

(2)  $x$  naj ima dva decimalna zapisa:

$$\begin{aligned} x &= n_0, n_1 n_2 \dots \\ x &= m_0, m_1 m_2 \dots \end{aligned}$$

Obstaja najmanjši indeks  $k \in \mathbb{N} : n_k \neq m_k$ .

Predpostavimo, da je  $m_k > n_k$

$m_0, m_1 m_2 \dots m_k$  je zgornja meja množice decimalnih približkov za  $x$ .

$$m_0, m_1 m_2 \dots m_k > m_0, m_1 m_2 \dots m_{k-1} n_k n_{k+1} n_{k+2} \dots$$

Če bi veljajo  $n_k < m_k - 1$  (dokazujemo, da je razlika lahko največ 1, t.j. morajo se ponavljati 9-ke)

$$x \leq n_0, n_1 n_2 \dots n_{k-1} (n_k + 1) < m_0, m_1 \dots m_{k-1} m_k \leq x \rightarrow \leftarrow$$

( $x < x$  ni možno)

Če bi bil  $m_{k+1} \neq 0$  (ali za indeks  $l > k$ ):

$$x \leq m_0, m_1 m_2 \dots m_k < m_0, m_1 \dots m_k m_{k+1} \leq x \rightarrow \leftarrow$$

Na podoben način dokažemo, da velja:

$$\forall l \in \mathbb{N} : n_{k+l} = 9$$

Podobno velja tudi za druge osnove. Primer v dvojiškem sistemu bi bil:

$$1101, 011 = 1101, 010\bar{1}$$

*Trditev:* Naj bo  $x \in \mathbb{R}$ .  $x$  ima periodičen decimalni zapis natanko tedaj, kadar  $x \in \mathbb{Q}$  (tudi končen decimalni zapis je periodičen).

*Dokaz:* denimo, da je  $x \in \mathbb{Q}^+$ .

$$x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$$

$m$  delimo z  $n$  pisno. To pomeni da podpisujemo ostanke. Ker imamo na voljo  $n$  različnih ostankov:  $o_j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , se bo med  $n+1$  zaporednimi ostanki vsaj eden zagotovo ponovil. Ko se ostanek ponovi, se ponovi tudi cel zapis, kar je perioda.

Denimo, da ima  $x$  periodičen decimalni zapis:

$$\begin{aligned} x &= d, d_1 d_2 \dots d_n \overline{d_{n+1} d_{n+2} \dots d_{n+k}} \\ 10^k x &= d \cdot 10^k + d_1 d_2 \dots d_k, d_{k+1} \dots d_n \dots d_{n+k} \overline{d_{n+1} \dots d_{n+k}} \\ 10^k x - x &\text{ ima končen decimalni zapis } = p \in \mathbb{Q} \\ x &= \frac{p}{10^k - 1} \in \mathbb{Q} \quad \square \end{aligned}$$

## 1.8 Absolutna vrednost

*Def:* če je  $x \in \mathbb{R}$ , potem

$$|x| = \begin{cases} x & \text{če } x \geq 0 \\ -x & \text{če } x < 0 \end{cases}$$

Število  $|x|$  imenujemo *absolutna vrednost realnega števila*  $x$ .

*Trditev:* Naj bo  $x \in \mathbb{R}$ . Veljajo:

- (i)  $|x| \geq 0$
- (ii)  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (iii)  $|x| = |-x|$
- (iv)  $-|x| \leq x \leq |x|$
- (v)  $|x|$  je razdalja  $x$  do 0 na številski premici
- (vi) *Trikotniška neenakost:*  $|x + y| \leq |x| + |y|$  za vse  $x, y \in \mathbb{R}$
- (vii)  $|xy| = |x| \cdot |y|$  za vse  $x, y \in \mathbb{R}$

*Dokaz:*

(vi) pregledamo vse možnosti glede na predznak

(1)  $x \geq 0, y \geq 0$

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|$$

(2)  $x < 0, y < 0$

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y = |x| + |y|$$

(3)  $x \geq 0, y < 0$

$$|x| = x, |y| = -y$$

$$x + y = |x| - |y|$$

$$|x + y| = \begin{cases} |x| - |y| & \text{če } |x| \geq |y|, \\ |y| - |x| & \text{če } |x| < |y| \end{cases}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(4) simetrična (3)

*Posledica:*

- 1)  $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$  za vse  $x, y \in \mathbb{R}$
- 2)  $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$  za vse  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

*Dokaz:*

- 1) Za  $+$  je desna neenakost trikotniška neenakost.

Leva neenakost:

$$\begin{aligned} |x| &= |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y| \\ |x| - |y| &\leq |x + y| \end{aligned}$$

Podobno velja:  $|y| - |x| \leq |x + y|$

Iz tega sledi:  $||x| - |y|| \leq |x + y|$   $\square$

## 1.9 Kompleksna števila

Motivacija za kompleksna števila je, da bi lahko rešili enačbo:

$$x^2 = -a, a \in \mathbb{R}^+$$

*Definicija:* Kompleksno število je urejeni par realnih števil: množica vseh kompleksnih števil je množica vseh urejenih parov realnih števil, t.j.:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  in jo označimo s  $\mathbb{C}$ .

$$\mathbb{C} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$$

Opomba (kdaj sta dve kompleksni števili enaki):

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha = (a, b), \beta = (c, d) : \alpha = \beta \iff a = c \wedge b = d$$

V množico kompleksnih števil vpeljemo računski operaciji:

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha = (a, b), \beta = (c, d) \text{ kjer } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$



$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a + c, b + d) \\ \alpha \cdot \beta &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

*Izrek:*  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  je komutativen obseg. Enota za seštevanje je  $(0, 0)$ , enota za množenja pa  $(1, 0)$ . V  $\mathbb{C}$  se ne da vpeljati urejenosti, da bi bil urejen obseg. Drugače povedano: izraz kot npr.  $z > 0$  je nesmislen.

*Dokaz:* (veljavnosti nekaterih aksiomov)

$$(A3) \quad \alpha + (0, 0) = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = \alpha \quad \square$$

$$(A4) \quad \alpha = (a, b) \in \mathbb{C} \quad -\alpha = (-a, -b)$$

$$(a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0) = 0 \quad \square$$

$$(A7) \quad (a, b) \cdot (1, 0) = (1a - 0b, 0a + 1b) = (a, b) \quad \square$$

$$(A8) \quad \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0 \quad \alpha = (a, b)$$

$$\begin{aligned}\alpha^{-1} &= \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \\ \alpha \alpha^{-1} &= \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) = 1 \quad \square\end{aligned}$$

*Opomba:* Kompleksni števili  $(0, 0) \equiv 0$ ,  $(1, 0) \equiv 1$  poimenujemo 0 in 1.

*Opomba:* Preslikava  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definirana s predpisom  $a \mapsto (a, 0)$  inducira vložitev realnih števil v kompleksnem in je usklajena z računskima operacijama.

$$\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0) \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab - 0 \cdot 0, 0a + 0b) = (ab, 0)\end{aligned}$$

Poleg te vložitve, bi si lahko zamislili tudi kakšno drugo, vendar ne bi bila dobra. Npr:  $a \mapsto (a, 1)$  ni dobra vložitev, ker že pri seštevanju “pademo ven” iz realnih vrednosti  $((a, 1) + (b, 1) + (a + b, 2))$ .

Torej lahko kompleksna števila  $(a, 0)$  *identificiramo* z realnimi:  $(a, 0) = a$ .

*Definicija:* Kompleksno število  $(0, 1)$  označimo z  $i$  in ga imenujemo *imaginarna enota*.

$$\begin{aligned}i^2 &= (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \\ (a, b) &= (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi\end{aligned}$$

Od tu naprej bomo kompleksna števila obravnavali kot

$$\mathbb{C} = \{a + bi, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Definirani računski operaciji inducirata običajno računanje s kompleksnimi števili

*Definicija:* Naj bo  $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

- število  $a$  je realni del kompleksnega števila  $\alpha$  in ga označimo:  $a = \Re\alpha$
- število  $b$  je imaginarni del kompleksnega števila  $\alpha$  in ga označimo:  $b = \Im\alpha$ . Opomba:  $\Im\alpha \in \mathbb{R}$ .
- številu  $a - bi$  rečemo *konjugirano število* številu  $\alpha$  in ga označimo z  $\bar{\alpha}$
- šteilo  $\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$  imenujemo *absolutna vrednost* kompleksnega števila  $\alpha$  in označimo  $|\alpha|$

*Opomba:*  $\alpha = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{(a^2 - abi + abi + b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R} \geq 0$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$

To pojasni, zakaj lahko uporabljamo enako oznako za absolutno vrednost kompleksnega števila, kot za absolutno vrednost realnega števila.

*Trditev:* Za  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  velja:

$$(i) \quad \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$$

$$(ii) \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$$

(iii)

$$\Re\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha})$$

$$\Im\alpha = \frac{1}{2i}(\alpha - \bar{\alpha})$$

$$(iv) \quad \alpha\bar{\alpha} = (\Re\alpha)^2 + (\Im\alpha)^2$$

$$(v) \quad \bar{\bar{\alpha}} = \alpha$$

*Dokaz:*(ii)  $\alpha = a + bi, \quad \beta = c + di, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta} &= \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd + (ad + bc)i)} = \\ &= ac - bd - (ad + bc)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} &= \overline{(a + bi)(c + di)} = (a - bi)(c - di) = \\ &= ac - bd - (ad + bc)i \quad \square\end{aligned}$$

### 1.9.1 Lastnosti

Za vse  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  velja:

- (i)  $|\alpha| \geq 0$
- (ii)  $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$
- (iii)  $|\alpha| = |\overline{\alpha}|$
- (iv)  $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$
- (v)  $|\Re\alpha| \leq |\alpha|$   
 $|\Im\alpha| \leq |\alpha|$
- (vi)  $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$   
 $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

*Dokaz*

$$(iv) \quad |\alpha\beta|^2 = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = \alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\beta} = |\alpha|^2|\beta|^2$$

Ker je  $|\alpha| \geq 0$ , enakost sledi.

$$\begin{aligned}(vi) \quad |\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) = \\ &= \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = \\ &= |\alpha|^2 + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} + |\beta|^2\end{aligned}$$

$$(|\alpha| + |\beta|)^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$$

Dovolj je dokazati  $\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} \leq 2|\alpha||\beta|$

$$\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} = \alpha\bar{\beta} + \overline{\bar{\alpha}\beta} = \alpha\bar{\beta} + \overline{\alpha\beta} = 2\Re(\alpha\bar{\beta})$$

$$2\Re(\alpha\bar{\beta}) \leq 2|\alpha||\beta|$$

$$|\alpha\bar{\beta}| = |\alpha||\bar{\beta}| = |\alpha||\beta|$$

Neenakost velja zaradi (v).

### 1.9.2 Geometrijska interpretacija

Pri učenju geometrijske interpretacije toplo priporočam zvezek s skicami. Kot piše v datoteki README.md, skic v teh zapiskih ni in jih verjetno tudi ne bo. Če misliš, da imaš dovolj dobro domišljijo in se znajdeš samo iz tekstovnega opisa, potem pa kar pogumno, čeprav te pogum ne bo pripeljal do znanja.

Kompleksno število  $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$  predstavimo s točko  $(a, b)$  v izbranem koordinatnem sistemu. Te točki nam lahko predstavljata tudi krajevna vektorja in ker kompleksna števila seštevamo po komponentah, se to ujema s seštevanjem vektorjev.

Tako kot nam absolutna vrednost realnega števila predstavlja oddaljenost števila od 0, nam tudi tu absolutna vrednost kompleksnega števila predstavlja oddaljenost števila od izhodišča koordinatnega sistema. Drugače povedano: predstavlja nam "dolžino" tega števila. To lahko vidimo tudi iz enačbe  $|\alpha| = \sqrt{(\Re\alpha)^2 + (\Im\alpha)^2}$ , ki nam pravzaprav predstavlja pitagorov izrek.

Če si narišemo dve števili  $\alpha$  in  $\beta$  v koordinatni sistem in nato vanj vrišemo še njuno vsoto  $\alpha + \beta$  po paralelogramskem pravilu za seštevanje vektorjev, opazimo, da dobimo trikotnik s stranicami  $\alpha, \beta$  in  $\alpha + \beta$ . Za trikotnik pa vemo, da je vsota dolžin dveh stranic v trikotniku večja od dolžine tretje stranice. Iz tu izhaja ime trikotniška neenakost.

### 1.9.3 Polarni zapis

Lego točke v koordinatnem sistemu lahko podamo s poltrakom skozi izhodišče, na katerem leži točka in z razdaljo od izhodišča.

Poltrak je določen s kotom od pozitivnega poltraka abscisne osi do danega poltraka, meren v pozitivni smeri.

Kota  $\varphi$  in  $\varphi + 2k\pi$  določata isti poltrak.

Če  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , potem  $\varphi$  imenujemo *argument* kompleksnega števila.

Če zapišemo  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x &= |z| \cos \varphi & |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\y &= |z| \sin \varphi & \tan \varphi = \frac{x}{y} &\Rightarrow \varphi = \arctan \frac{x}{y} + k\pi, k \in \{0, 1\}\end{aligned}$$

$k = 1$  za kompleksna števila v II in III kvadrantu, sicer  $k = 0$ .

*Polarni zapis:*  $z = x + iy = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$|\cos \varphi + i \sin \varphi| = 1$$

$\cos \varphi + i \sin \varphi$  leži na *enotski krožnici* (krožnica s polmerom 1 in središčem v izhodišču).

#### Množenje v polarnem:

$$\begin{aligned}z &= |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\w &= |w|(\cos \psi + i \sin \psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}zw &= |z||w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) = \\&= |z||w|(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + i \sin \varphi \cos \psi + i \sin \psi \cos \varphi) = \\&= |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))\end{aligned}$$

Pri množenju z kompleksnimi števili se absolutni vrednosti zmnožita, kota pa seštejeta

## Konjugirana vrednost

$$\bar{z} = |z|(\cos \varphi - i \sin \varphi) = |z|(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

## Potenciranje

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Formuli pravimo *Moiivreova formula* (beremo "moavrova") in jo dokažemo z indukcijo.

## Korenjenje

Korenjenje nam predstavlja reševanje enačbe  $w^n = z$ , kjer  $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ . Rešitvam te enačbe pravimo  $n$ -ti koreni kompleksnega števila  $z$ .

Za reševanje najprej število  $z$  zapišemo v polarni obliki:  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . To storimo tudi s številom  $w$ :  $w = r(\cos \psi + i \sin \psi)$ .

To vstavimo v začetno enačbo:

$$r^n = (\cos n\psi + i \sin n\psi) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Kompleksni števili sta enaki, če sta enako oddaljena od izhodišča:

$$r^n = |z|$$

in ležita na istem poltraku. Ustrezna kota se razlikujeta kvečjemu za večkratnik  $2\pi$ :

$$n\psi = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

To pomeni, da dobimo:

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi] \text{ za } k \in 0, 1, \dots, n.$$

*Dokaz:*

$$k \geq n \Rightarrow k = ln + o, l, o \in \mathbb{N}_0$$

$$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi ln}{n} + \frac{2\pi o}{n} = 2l\pi + \frac{2\pi o}{n}$$

To pomeni, da so različni  $n$ -ti koreni:  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ , če je  $z \neq 0$ .

*Opomba:* Oznake za koren ni, ker ni enolične rešitve.

Geometrijsko nam rešitve predstavljajo oglišča pravilnega  $n$ -kotnika, ki je včrtan krožnici s polmerom  $\sqrt[n]{|z|}$ .

Rešitvam enačbe  $w^n = 1$  rečemo  $n$ -ti koreni enote in ležijo na enotski krožnici.

*Osnovni izrek algebre:* Vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti ima kompleksno ničlo.

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, a_j \in \mathbb{C}$$

## 2 O množicah in preslikavah

*Definicija:* Naj bosta  $A$  in  $B$  množici.

Preslikava  $f$  iz množice  $A$  v množico  $B$  je predpis, ki vsakemu elementu iz množice  $A$  priredi natanko en element iz množice  $B$ .

Pišemo  $f : A \rightarrow B$

$$a \in A : a \mapsto f(a) \in B$$

$A$  imenujemo *domena* ali *definijsko območje*,  $B$  pa imenujemo *kodomena*.

Zaloga vrednosti je množica  $\{f(a); a \in A\} = Z_f$ .

*Definicija:* Naj bosta  $A$  in  $B$  množici in  $f : A \rightarrow B$  preslikava.

Pravimo, da je  $f$  *surjektivna*, če je  $B = Z_f$ .

Pravimo, da je  $f$  *injektivna*, če velja:

$$\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Ro lahko zapišemo tudi kot:

$$\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Pravimo, da je  $f$  *bijektivna (povratno enolična)*, kadar je surjektivna in injektivna.

*Definicija:* Naj bosta  $A$  in  $B$  množici,  $f : A \rightarrow B$  bijektivna preslikava.

*Inverzna* preslikava  $f^{-1} : B \rightarrow A$  vsakemu elementu  $b \in B$  priredi tisti element  $a \in A$ , za katerega velja  $f(a) = b$ .

$f^{-1}$  je dobro definirana

$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$ , ker je  $f$  surjektivna. Ta  $a$  je enolično določen, ker je  $f$  injektivna;  $f(a_1) = f(a) \Rightarrow a_1 = a$ .

*Definicija:* Naj bosta  $A$  in  $B$  množici.

Pravim, da sta množici *ekvipolentni* ali enako močni, kadar obstaja bijektivna preslikava  $f : A \rightarrow B$ .

*Opomba:* če je  $f : A \rightarrow B$  bijektivna, potem je  $f^{-1} : B \rightarrow A$  bijekcija.

*Opomba:* končni množici imata enako moč, kadar imata enako število elementov.

*Definicija:* Če ima množica  $A$  enako moč kot  $\mathbb{N}$ , pravimo, da je  $A$  *števno neskončna*.

Če je  $A$  števno neskončna, potem obstaja  $\mathbb{N} \rightarrow A; n \mapsto f(n) = a_n$ .

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$$

pri čemer velja:  $j \neq k : a_j \neq a_k$ .

*Trditev:*  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  so števno neskončna.

Dokaz za  $\mathbb{Z}$ :  $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

Pri  $\mathbb{Q}$  je dovolj, da dokažemo za nenegativna števila, nato sledi podobno kot za  $\mathbb{Z}$ . Za pozitivna števila naredimo tabelo 1.



	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$

Tabela 1: Dokaz da so  $\mathbb{Q}$  števno neskončna

Nato števila povežemo po diagonalah  $(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2})$  in izločimo števila ko so se že ponovila (npr:  $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$ ).

*Izrek:*  $\mathbb{R}$  ni števno neskončna

*Dokaz:* Denimo da je. Potem  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \mathbb{R}$ .

$a_j$  zapišemo kot decimalni ulomek:

$$a_1 = d'_1 d_{11} d_{12} d_{13} \dots$$

$$a_2 = d'_2 d_{21} d_{22} d_{23} \dots$$

$$a_3 = d'_3 d_{31} d_{32} d_{33} \dots$$

$$x := 0'x_1x_2x_3\dots \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = 1, \text{ če je } d_{11} = 0, \text{ sicer } x_1 = 0x_2 = 1, \text{ če je } d_{22} = 0, \text{ sicer } x_2 = 0$$

Skonstruirali smo  $x \notin \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \rightarrow \leftarrow$ .

### 3 Številska zaporedja

DEFINICIJA: Zaporedje realnih števil je preslikava  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Zapis je:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) \text{ označimo z } a_n$$

Preslikava  $f$  je podana z  $a_1, a_2, a_3, \dots$

Zaporedje realnih števil podamo s *členi*  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , kar krajše zapišemo  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{a_n\}$ ,  $(a_n)_{n=1}^\infty$  ali pa kar zaporedje  $a_n$ .

OPOMBA: zaporedje  $\{a_n\}$  ni množica  $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ .

PRIMER:

1)  $a_n = 1, n \in \mathbb{N}$  *konstantno zaporedje*

To zaporedje ustreza preslikavi  $f(n) = 1, n \in \mathbb{N}$

- 2)  $b_n = n, n \in \mathbb{N}$  Takemu zaporedju pravimo, da je podan s splošnim členom. Narišemo lahko njegov graf  $\{(n, b_n); n \in \mathbb{N}\}$
- 3)  $d_1 = 1, d_2 = 1, d_{n+2} = d_n + d_{n+1}, n \in \mathbb{N}$  je *rekurzivno podano*. Predstavlja Fibonaccijevo zaporedje.
- 4) *aritmetično aporedje*

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, n \in \mathbb{N}$$

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$$

To lahko zapišemo tudi z rekurzivno zvezo:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N} \\ a_1 = a_1 \end{cases}$$

- 5) *geometrijsko zaporedje*

$$a_n = a_1 q^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

$$a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots$$

Zapisano z rekurzivno zvezo:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n q, n \in \mathbb{N} \\ a_1 = a_1 \end{cases}$$

DEFINICIJA:

- Zaporedje  $a_n$  je *navzgor omejeno* če je zaloga vrednosti preslikave  $n \mapsto a_n$  navzgor omejena, t.j.:

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$$

- *Natančna zgornja meja* zaporedja  $a_n$  je natančna zgornja meja zaloge vrednosti preslikave  $n \mapsto a_n$  in jo označimo s  $\sup a_n$ .
- Število  $M$  imenujemo *zgornja meja* zaporedja  $a_n$ .
- Analogno definiramo navzdol omejeno, natančno spodnjo mejo  $\inf a_n$ ,  $\max$  in  $\min$ .

PRIMER:

$$a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

navzgor omejeno z 1:  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq 1$

navzdol omejeno z 0:  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \geq 0$

$\sup \frac{1}{n} = 1$ , ker je 1 zgornja meja in  $a_1 = 1$ .

$\inf \frac{1}{n} = 0$  je spodnja meja.

Izberemo  $\varepsilon > 0$ . Dokazujemo da  $\varepsilon$  ni spodnja meja. Po arhimedski lastnosti:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\max \frac{1}{n} = 1$$

$\min \frac{1}{n}$  ne obstaja.

DEFINICIJA: Zaporedje  $a_n$  konvergira proti  $a \in \mathbb{R}$ , če:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Število  $a$  imenujemo *limita zaporedja* in označimo z:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Če zaporedje  $a_n$  konvergira, je  $a_n$  *konvergentno zaporedje*. Sicer je *divergentno zaporedje*.

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Zunaj  $\varepsilon$ -te okolice je kvečjemo končnomnogo čelnov.

Zapis  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  pomeni, da zaporedje konvergira in njegova limita je  $a$ . To ne velja, če zaporedje divergira, ali pa njegova konvergira in njegova limita ni  $a$ .

PRIMERI:

$$1) \ a_n = 1, n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0 : |a_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$  za vse  $n \in \mathbb{N}$ .

$$2) \ b_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Po arhimedski lastnosti:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists m : \frac{1}{m} < \varepsilon$$

$$n \geq m : \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$$

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m : \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$3) \ c_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

ker:

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

po prejšnjem primeru

$$4) \ d_n = (-1)^n$$

zaporedje divergira

Denimo, da je  $x$  limita tega zaporedja:

- če  $x = -1 : \varepsilon = 1$ , zunaj  $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon) = (-2, 0)$  ležijo vsi sodi členi zaporedja, ki jih je neskončno, zato -1 ni limita.
- Analogno za  $x = 1$ .
- $x \neq 1 \wedge x \neq -1$

$$d = \min\{|x - 1|, |x + 1|\}$$

velja:

$$1 \notin (x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2})$$

$$-1 \notin (x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2})$$

Vsi členi zaporedja ležijo izven tega intervala, zato  $x$  ni limita. Sledi:  $d_n$  divergira.

TRDITEV: Konvergentno zaporedje ima eno samo limito.

DOKAZ: Denimo da sta  $a$  in  $b$  limiti zaporedja  $a_n$ .

Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$  :

$$\exists n_a \forall n : n > n_a \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\exists n_b \forall n : n > n_b \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$$

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 : |a - b| < 2\varepsilon \Rightarrow |a - b| = 0 \Rightarrow a = b$$

TRDITEV: Konvergentno zaporedje je omejeno

DOKAZ: Denimo, da je  $a_n$  konvergentno zaporedje z limito  $a$ . Izberemo  $\varepsilon = 1$  in po definiciji velja:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon = 1$$

Lahko konstruiramo množico členov, ki so izven  $\varepsilon$ -te okolice  $a$ . Tej množici dodamo tudi zgornjo mejo okolice  $a + \varepsilon = a + 1$ . Ker je izven okolice končnomnogo členov, ima ta množica maksimum:

$$\max \{a + 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\} = M$$

Za vsak  $n$  velja:  $a_n \leq M$ , ker če  $n \leq n_0 - 1$ , je  $a_n$  v zgornji množici, ki smo ji določili maksimum, če  $n \geq n_0$  je  $a_n$  v okolici  $a$ , to pomeni  $a_n < a + 1$ ,  $a + 1$  je v zgornji množici, ki smo ji določili maksimum.

Analogno lahko naredimo za spodnjo mejo. □

Ni vsako omejeno zaporedje konvergentno. Primer:  $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ .

DEFINICIJA: Naj bo  $a_n$  zaporedje. Število  $s$  je *stekališče zaporedja*  $a_n$ , če v vsaki okolici  $s$  leži neskončno členov zaporedja.

PRIMER:  $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

Vemo, da ni konvergentno. -1 in 1 sta stekališči  $a_n$ , ker vsi členi z lihimi indeksi ležijo na  $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$  za  $\varepsilon > 0$ . Analogno za 1 in sode člene.

OPOMBI:

- 1)  $s$  je stekališče  $\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$  je  $|a_n - s| < \varepsilon$  izpolnjen za neskončno mnogo indeksov  $n$ .
- 2) Če je zaporedje  $a_n$  konvergentno z limito  $a$ , potem je  $a$  edino stekališče zaporedja  $a_n$ , ker na  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  ležijo vsi, razen končno mnogo členov.

PRIMERI:

- 1) Zaporedje s 3 stekališči:  $a_n = n \bmod 3$ .
- 2) Zaporedje z 2 stekališčama, ki ima same različne člene:  $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
- 3) Zaporedje z neskončno stekališči:

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Stekališča zaporedja so vsa naravna števila.

- 4) Ali ima zaporedje neštverno stekališč? Da.

Obstaja bijekcija  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ .

$$\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Stekališča zaporedja  $a_n : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$  na  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  leži neskončno mnogo  $\mathbb{Q}$  števil, torej neskončno mnogo členov zaporedja. Zato je  $x$  stekališče.

- 5) Divergentno zaporedje brez stekališč:  $a_n = n$ .

TRDITEV: Če vsaka okolica števila  $s \in \mathbb{R}$  vsebuje člen zaporedja  $a_n$ ,  $a_n \neq s$ , potem je  $s$  stekališče  $a_n$ .

DOKAZ: Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$ . Obstaja  $n_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1} \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ ,  $a_{n_1} \neq s$ . Definiramo razdaljo:  $d_1 = |s - a_{n_1}|$ . Obstaja  $n_2 : a_{n_2} \in (s - d_1, s + d_1)$ ,  $a_{n_2} \neq s$ ,  $n_1 \neq n_2$ . Postopek nadaljujemo  $\square$ .

IZREK: Vsako omejeno zaporedje ima stekališče.

DOKAZ: Ker je zaporedje  $a_n$  omejeno, ima spodnjo mejo  $m$  in zgornjo mejo  $M$ .

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}; a_n < u \text{ je izpolnjeno za končno mnogo členov zaporedja}\}$$

$$m \in \mathcal{U}, M + 1 \notin \mathcal{U}$$

$\Rightarrow \mathcal{U}$  je navzgor omejena in neprazna, torej obstaja  $\sup \mathcal{U} = s$ .

Izberemo  $\varepsilon > 0$ :

- $s + \varepsilon \notin \mathcal{U} : a_n < s + \varepsilon$  je izpolnjena za neskončno mnogo členov.
- $s - \varepsilon : \exists u \in (s - \varepsilon, s] \cap \mathcal{U}$ . Ker  $u \in \mathcal{U}$ ,  $s - \varepsilon < u$ , je  $s - \varepsilon \in \mathcal{U}$ , zato velja da  $a_n < s - \varepsilon$  velja za končno mnogo členov zaporedja.

Sledi: na  $[s - \varepsilon, s + \varepsilon)$  leži neskončno mnogo členov zaporedja.  $s$  je stekališče.

□

### 3.1 Monotona zaporedja

DEFINICIJA:

- Zaporedje  $a_n$  je *naraščajaoče*, če velja:  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$ .
- Zaporedje  $a_n$  je *padajaoče*, če velja:  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$ .
- Zaporedje  $a_n$  je *strogo naraščajaoče*, če velja:  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ .
- Zaporedje  $a_n$  je *strogo padajaoče*, če velja:  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ .
- Zaporedje  $a_n$  je *monotono*, če je zaporedje bodisi naraščajaoče, ali padajaoče.
- Zaporedje  $a_n$  je *strogo monotono*, če je zaporedje bodisi strogo naraščajaoče, ali strogo padajaoče.

PRIMER:

- 1)  $a_n = -n$  (strogo) padajaoče
- 2)  $a_n = 1$  naraščajaoče ali padajaoče
- 3)  $a_n = \frac{1}{n}$  je padajaoče in navzdol omejeno
- 4)  $a_n = (-1)^n$  ni ne padajaoče ne naraščajaoče

TRDITEV: Monotono zaporedje je konvergentno natanko tedaj, kadar je omejeno. Če je zaporedje  $a_n$  naraščajaoče in navzgor omejeno potem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n$$

Če je zaporedje  $a_n$  padajoče in navzdol omejeno potem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf a_n$$

Dokaz za v eno stran že vemo.

DOKAZ: (v drugo stran ekvivalence)

Denimo, da je zaporedje  $a_n$  naraščajoče in navzgor omejeno. Ker je  $a_n$  navzgor omejeno:  $\exists a := \sup a_n$ .

Dokazujemo  $a_n$  konjugira proti  $a$

Izberemo poljubne  $\varepsilon > 0$ . Ker  $a - \varepsilon$  ni zgornja meja zaporedja:  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$ . Ker je zaporedje  $a_n$  naraščajoče in navzgor omejeno z  $a$  velja:

$$\begin{aligned} n \geq n_0 : a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a \\ \forall n \geq n_0 a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{aligned}$$

Sledi:  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

□

Analogno za navzdol omejeno padajoče zaporedje.

PRIMER:  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}$

Najprej dokažemo, da je  $a_n$  padajoče zaporedje, t.j:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}} &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \sqrt{n} &\leq \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

Vemo, da je navzdol omejeno z 0. Ker je padajoče in navzdol omejeno, je konvergentno.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Vemo:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf a_n = a$

Vemo, da  $a$  ni negativen, ker so vsi členi zaporedja zaporedja pozitivni. Če bi  $a > 0$ :

$$\begin{aligned} a_n &\geq a \\ \frac{1}{\sqrt{n}} &\geq a \\ \frac{1}{n} &\geq a^2 > 0 \text{ za vse } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$



Zaradi arhimedske lastnosti vemo, da to ni res.  $\rightarrow \leftarrow$

Torej  $a$  ni negativen in  $a$  ni pozitivne, torej  $a = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

## 3.2 Podzaporedja

Podzaporedje zaporedja  $a_n$  je zaporedje, ki vsebuje samo nekatere člene zaporedja  $a_n$  v enakem vrstnem redu.

$$a_1, \cancel{a_2}, \cancel{a_3}, a_4, \dots$$

DEFINICIJA: Naj bo  $a_n$  zaporedje in naj bo  $n_j$  strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Zaporedje  $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$  je podzaporedje  $(a_n)_{n=1}$ .

PRIMERI:

1)  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  zaporedje

podzaporedje  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

2)  $b_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$  ni konvergentno, ima dve stekališči

$b_{2n-1} = -1$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ :  $b_1, b_3, b_5, \dots$  je podzaporedje lihih členov.

Podobno lahko naredimo podzaporedje sodih členov. Podzaporedja lihih in sodih členov sta konvergentna.

TRDITEV Naj bo  $a_n$  zaporedje. Če je  $a_n$  konvergentno, potem je konvergentno tudi vsako njegovo podzaporedje  $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$  in velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j}$$

DOKAZ: Naj bo  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$ . Vemo:  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

Potem velja:

$$j \geq n_0 : |a_{n_j} - a| < \varepsilon$$

ker je  $n_j \geq n_{n_0} \geq n_0$

OPOMBA: Če neko podzaporedje danega zaporedja konvergira, ni nujno, da je dano zaporedje konvergentno. Primer:  $(-1)^n$ .

DEFINICIJA: *Rep zaporedja* je zaporedje, ki ga dobimo iz danega zaporedja tako, da izpustimo prvih končno mnogo členov.

Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, kadar je konvergenten njegov rep.

PRIMER:  $1, 2, 4, 16, 36, 16, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

### 3.3 Računanje z zaporedji

TRDITEV: Naj bosta  $a_n$  in  $b_n$  konvergentni zaporedji. Tedaj konvergirajo tudi naslednja zaporedja:

- $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots$
- $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n, \dots$
- $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n, \dots$

in velja:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

DOKAZ

Vsota: Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0 : a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq 2\varepsilon \text{ za } n \geq \max\{n_a, n_b\}$$

□

Produkt:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| = |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \leq |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)|$$

Ker je  $b_n$  konvergentno, je omejeno:  $\exists M_b \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < M_b$

$$\leq M_b |a_n - a| + |a| |b_n - b| \leq \varepsilon \text{ če } n \geq \max\{n_a, n_b\}$$

ker vemo:  $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2M_b}$  za  $n \geq n_a$  in  $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2|a|}$  za  $n \geq n_b$ .

□

POSLEDICA: Če je  $a_n$  konvergentno zaporedje in  $\lambda \in \mathbb{R}$ , potem je zaporedje  $\lambda a_1, \lambda a_2, \dots$  konvergentno in velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Dokaz je enak kot dokaz za produkt limit, kjer  $b_n = \lambda$ .

Ker veljajo pravila za dva člena, veljajo tudi za končno mnogo.

TRDITEV: Naj bo  $a_n$  konvergentno zaporedje in  $\forall n \in \mathbb{N} a_n \neq 0$  in  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . Potem je zaporedje

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$$

konvergentno in velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

DOKAZ:  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - a_n}{a_n a} \right| = \frac{|a - a_n|}{|a| |a_n|} \leq \frac{|a - a_n|}{|a| \eta} < \varepsilon \text{ za dovolj velike } n$$

$|a_n|$  lahko omejimo stran od 0, t.j.:  $\exists \eta > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \geq \eta$

Konstrukcija  $\eta$ : Zunaj  $\left( a - \frac{|a|}{2}, a + \frac{|a|}{2} \right)$  leži končno mnogo členov zaporedja.

$$\eta := \min \left\{ \left| a - \frac{|a|}{2} \right|, \left| a + \frac{|a|}{2} \right|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}| \right\}$$

POSLEDICA: Naj bosta  $a_n$  in  $b_n$  konvergentni zaporedji,  $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ . Potem je zaporedje  $\frac{a_n}{b_n}$  konvergentno in velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

IZREK O SENDVIČU: Naj bodo  $a_n, b_n, c_n$  taka zaporedja, da

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n$$

Če sta zaporedji  $a_n$  in  $c_n$  konvergentni in  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ , potem je  $b_n$  konvergentno in velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

PRIMER:  $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$\ker \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$  in  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$