

Algebra 1

Vid Drobnič

Kazalo

1	Vektorji v trirazsežnem prostoru	2
1.1	Operacije z vektorji	3
1.2	Linearna neodvisnost	4
1.3	Skalarni produkt	8
1.4	Vektorski produkt	10

1 Vektorji v trirazsežnem prostoru

\mathcal{P} - prostor

$T \in \mathcal{P}$ - točka

$A, B \in \mathcal{P}$

\overrightarrow{AB} - usmerjena daljica

Formalno: $\overrightarrow{AB} = (A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ (urejen par)

Ekvivalentnost usmerjenih daljic:

$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$, kadar je \overrightarrow{AB} z vzporednim premikom mogoče premakniti v \overrightarrow{CD} .

- $|AB| = |CD|$ (dolžini daljic sta enaki)
- ista smer (če potegnemo premico čez izhodišča daljic (AC), morata biti točki B in D na istem "bregu" te premice)
- $AB \parallel CD$

$$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

Def: Vektor \vec{AB} je množica $\vec{AB} = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}$ (usmerjene daljice ekvivalentne daljici \overrightarrow{AB})

- ničelni vektor: $\vec{AA} = \vec{0}$
- nasprotni vektor vektorja \vec{AB} je \vec{BA} ($\vec{BA} = -\vec{AB}$)

Dodatna oznaka: \vec{a} , $-\vec{a}$ nasprotni vektor

$V = \{\vec{v} : \vec{v} \text{ vektor}\}$ - vektorski prostor.

$O \in \mathcal{P}$; O fiksiramo

$$f : \mathcal{P} \rightarrow V$$

$$f(T) = \vec{OT}$$

f je bijekcija (vsaki točki priredi natanko en vektor).

$$\vec{a} = \vec{OT}$$

1.1 Operacije z vektorji

Seštevanje:

$$\begin{aligned}\vec{a}, \vec{b} &\in V \\ \vec{a} &= \vec{AB}, \vec{b} = \vec{BC} \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{AC} \\ \vec{AB} + \vec{BC} &= \vec{AC}\end{aligned}$$

Lastnosti:¹

- (1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ asociativnost
- (2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ komutativnost
- (3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- (4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Za lastnosti od (1) do (4) $(V, +)$ **Abelova grupa**.

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

Množenje s skalarjem

Skalar je realno število.

$$\vec{a}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha\vec{a}$ je vektor.

- ima isto smer kot \vec{a} za $\alpha > 0$
- ima nasprotno smer kot \vec{a} za $\alpha < 0$
- $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$

¹Dokaz lastnosti (1) in (2) s skico.

$$\vec{a} = \vec{OA} \neq \vec{0}$$

$$\alpha\vec{a} = \vec{OT}, O, A, T \text{ so na isti premici}$$

S tem uvedemo koordinatni sistem na premici OA .

Lastnosti:

$$(5) \quad \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

$$(6) \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$(7) \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$(8) \quad 1\vec{a} = \vec{a}$$

$V, +$ in množenje s skalaji je **vektorski prostor**: veljajo lastnosti od (1) do (8).

1.2 Linearna neodvisnost

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

\vec{a}, \vec{b} sta linearno odvisna kadar je:

bodisi $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ za ustrezen $\alpha \in \mathbb{R}$,

bodisi $\vec{a} = \beta\vec{b}$ za ustrezen $\beta \in \mathbb{R}$.

V nasprotnem primeru sta \vec{a} in \vec{b} linearno neodvisna.

$$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$$

1. \vec{OA} in \vec{OB} sta linearno odvisna $\Leftrightarrow O, A, B$ kolinearne (ležijo na isti premici).

2. \vec{a}, \vec{b} sta linearno neodvisna $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$

Privzamemo da sta \vec{a}, \vec{b} linearno neodvisna:

$$\{T : \vec{OT} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{R}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ - linearna kombinacija

\mathcal{R} - ravnina določena z O, A, B (z vektorji \vec{a}, \vec{b}) in točko O .

$$\vec{r} = \vec{OT}, T \in \mathcal{R}$$

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Pri tem sta α in β enolično določena skalarja.

V \mathcal{R} smo z vektorjema \vec{a}, \vec{b} vpeljali koordinatni sistem.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ so linearno odvisni, kadar je vsaj eden od njih linearna kombinacija drugih dveh.

npr: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

V nasprotnem primeru so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni.

1. $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$ so linearno odvisni $\Leftrightarrow O, A, B, C$ koplanarne (ležijo na isti ravnini)

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0)$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni

$$\vec{a} = \vec{OA}$$

$$\vec{b} = \vec{OB}$$

$$\vec{c} = \vec{OC}$$

$$V = \{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

V - množica vseh vektorjev prostora \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{R \in \mathcal{P} : \vec{OR} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Dodatek: V zapisu vektorja $\vec{r} \in V$: $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, so koeficienti α, β, γ enolično določeni.

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \\
\vec{r} &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\
\Rightarrow \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\
(\alpha - \alpha_1) \vec{a} + (\beta - \beta_1) \vec{b} + (\gamma - \gamma_1) \vec{c} &= \vec{0} \\
\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ linearno neodvisni} &\Rightarrow \alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1 = \gamma - \gamma_1 = 0 \\
\alpha &= \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1
\end{aligned}$$

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ je **baza** vektorskega prostora V . $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni.

$R \in \mathcal{P}$ (O - fiksirana točka) $\vec{OR} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$

$$R \mapsto (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

α, β, γ je z R enolično določena.

α, β, γ so koordinate točke R glede na koordinaten sistem, ki je določen z bazo $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ in točko O (izhodišče koordinatnega sistema).

Imena koordinat: dfabscisa, ordinata, aplikata

$$\begin{aligned}
\varphi : V &\rightarrow \mathbb{R} \\
\vec{r} &\mapsto (\alpha, \beta, \gamma); \vec{r} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}
\end{aligned}$$

φ je bijekcija.

S φ prenesemo operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorjev s skalarji iz V v \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1, \vec{r}_2 &\in V \\
\vec{r}_1 &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \\
\vec{r}_2 &= \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b} + \gamma_2 \vec{c} \\
\varphi(\vec{r}_1) &= (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \\
\varphi(\vec{r}_2) &= (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \\
\vec{r}_1 + \vec{r}_2 &= (\alpha_1 + \alpha_2) \vec{a} + (\beta_1 + \beta_2) \vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2) \vec{c} \\
\varphi(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) &= (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)
\end{aligned}$$

Torej velja:

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$$

seštevanje je definirano po komponentah.

Podobno velja za množenje s skalarji:

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$$

\mathbb{R}^3 je za te operaciji **vektorski prostor** (zadošča A1-A8).

$$\varphi(\vec{a}) = (1, 0, 0)$$

$$\varphi(\vec{b}) = (0, 1, 0)$$

$$\varphi(\vec{c}) = (0, 0, 1)$$

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

je **standardna baza** vektorskega prostora \mathbb{R}^3 .

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

Oznake:

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

Dodatna zahteva za standardno bazo vektorskega prostora \mathbb{R}^3 : baza je **ortonormirana**, torej:

- $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ so paroma pravokotni.

1.3 Skalarni produkt

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

Kot med njima je $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$

Def: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$

V **identificiramo** z \mathbb{R}^3 (glede na standardno bazo in dano izhodišče O).

$$O = (0, 0, 0)$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \vec{OA}$$

$$|\vec{a}| = |OA| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Kosinusni izrek:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$\Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Lastnosti:

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0 \text{ (enačaj le za } \vec{a} = \vec{0})$$

$$(2) \quad (\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$$

$$(3) \quad (\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$$

$$(4) \quad \vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \\ \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0\end{aligned}$$

Primer:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &\equiv \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ \vec{a} &= (a_1, a_2, 0) \\ \vec{a} \text{ v } \mathbb{R}^2 : \vec{a} &= (a_1, a_2) \\ \vec{a}\vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2\end{aligned}$$

p - ploščina paralelograma

p izraziti z a_1, a_2, b_1, b_2

$$p = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi$$

$$\begin{aligned}\vec{a}' &\perp \vec{a} \\ |\vec{a}'| &= |\vec{a}|\end{aligned}$$

\vec{a}, \vec{a}' pozitivno orientirana

$$\vec{a}' = (-a_2, a_1)$$

$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ali $\varphi - \frac{\pi}{2}$ če je orientacija (\vec{a}, \vec{b}) pozitivna.

$$|\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = \vec{a}'\vec{b} = (-a_2, a_1) \cdot (b_1, b_2) = a_1b_2 - a_2b_1$$

$p = a_1b_2 - a_2b_1$, če je orientacija \vec{a}, \vec{b} pozitivna, če pa je negativna velja:

$$p = -(a_1b_2 - a_2b_1)$$

1.4 Vektorski produkt

$$\vec{a}, \vec{b}$$
$$\vec{a} \times \vec{b}$$

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na \vec{a} in \vec{b} .
- (2) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga določata \vec{a} in \vec{b} . (= 0, kadar sta \vec{a} in \vec{b} linearno odvisna)
- (3) Urejena trojica $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ je pozitivno orientirana.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = (x, y, z)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$
$$z = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{k} =$$
$$= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{k}| \cos \delta =$$
$$= p \cos \delta$$

p - ploščina paralelograma.

δ - kot med ravninama, ki ju določata osi (1),(2) in vektorja \vec{a}, \vec{b} .

$$\vec{a}' = (a_1, a_2, 0)$$
$$\vec{b}' = (b_1, b_2, 0)$$
$$p' = \pm(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

p' ima predznak +, kadar sta \vec{a}' in \vec{b}' pozitivno orientirana, ter –, kadar sta negativno orientirana.

$$p' = \pm p \cos \delta$$

+ kadar: $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$
 – kadar: $\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \pi$

$$z = \pm p' = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

\pm se izniči, ker se predznak, ki nastane zaradi \cos in predznak, ki nastane pri izračunu ploščine paralelograma z vektorjema ujemata.

$$\begin{aligned} x &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ y &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

determinanta (reda 2)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$