

# Algebra 1

Vid Drobnič

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Vektorji v trirazsežnem prostoru</b>	<b>2</b>
1.1	Operacije z vektorji . . . . .	3
1.2	Linearna neodvisnost . . . . .	4

# 1 Vektorji v trirazsežnem prostoru

$\mathcal{P}$  - prostor

$T \in \mathcal{P}$  - točka

$A, B \in \mathcal{P}$

$\overrightarrow{AB}$  - usmerjena daljica

Formalno:  $\overrightarrow{AB} = (A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$  (urejen par)

**Ekvivalentnost usmerjenih daljic:**

$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ , kadar je  $\overrightarrow{AB}$  z vzporednim premikom mogoče premakniti v  $\overrightarrow{CD}$ .

- $|AB| = |CD|$  (dolžini daljic sta enaki)
- ista smer (če potegnemo premico čez izhodišča daljic ( $AC$ ), morata biti točki  $B$  in  $D$  na istem "bregu" te premice)
- $AB \parallel CD$

$$\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

Def: Vektor  $\vec{AB}$  je množica  $\vec{AB} = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}$  (usmerjene daljice ekvivalentne daljici  $\overrightarrow{AB}$ )

- ničelni vektor:  $\vec{AA} = \vec{0}$
- nasprotni vektor vektorja  $\vec{AB}$  je  $\vec{BA}$  ( $\vec{BA} = -\vec{AB}$ )

Dodatna oznaka:  $\vec{a}$ ,  $-\vec{a}$  nasprotni vektor

$V = \{\vec{v} : \vec{v} \text{ vektor}\}$  - vektorski prostor.

$O \in \mathcal{P}$ ;  $O$  fiksiramo

$$f : \mathcal{P} \rightarrow V$$

$$f(T) = \vec{OT}$$

$f$  je bijekcija (vsaki točki priredi natanko en vektor).

$$\vec{a} = \vec{OT}$$

## 1.1 Operacije z vektorji

Seštevanje:

$$\begin{aligned}\vec{a}, \vec{b} &\in V \\ \vec{a} &= \vec{AB}, \vec{b} = \vec{BC} \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{AC} \\ \vec{AB} + \vec{BC} &= \vec{AC}\end{aligned}$$

Lastnosti:<sup>1</sup>

- (1)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  asociativnost
- (2)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  komutativnost
- (3)  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- (4)  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Za lastnosti od (1) do (4)  $(V, +)$  **Abelova grupa**.

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

### Množenje s skalarjem

Skalar je realno število.

$$\vec{a}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha\vec{a}$  je vektor.

- ima isto smer kot  $\vec{a}$  za  $\alpha > 0$
- ima nasprotno smer kot  $\vec{a}$  za  $\alpha < 0$
- $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$

---

<sup>1</sup>Dokaz lastnosti (1) in (2) s skico.

$$\vec{a} = \vec{OA} \neq \vec{0}$$

$$\alpha\vec{a} = \vec{OT}, O, A, T \text{ so na isti premici}$$

S tem uvedemo koordinatni sistem na premici  $OA$ .

Lastnosti:

$$(5) \quad \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

$$(6) \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$(7) \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$(8) \quad 1\vec{a} = \vec{a}$$

$V, +$  in množenje s skalaji je **vektorski prostor**: veljajo lastnosti od (1) do (8).

## 1.2 Linearna neodvisnost

$$\vec{a}, \vec{b} \in V$$

$\vec{a}, \vec{b}$  sta linearno odvisna kadar je:

bodisi  $\vec{b} = \alpha\vec{a}$  za ustrezen  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

bodisi  $\vec{a} = \beta\vec{b}$  za ustrezen  $\beta \in \mathbb{R}$ .

V nasprotnem primeru sta  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  linearno neodvisna.

$$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$$

1.  $\vec{OA}$  in  $\vec{OB}$  sta linearno odvisna  $\Leftrightarrow O, A, B$  kolinearne (ližijo na isti premici).

2.  $\vec{a}, \vec{b}$  sta linearno neodvisna  $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$

Privzamemo da sta  $\vec{a}, \vec{b}$  linearno neodvisna:

$$\{T : \vec{OT} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{R}$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$  - linearna kombinacija

$\mathcal{R}$  - ravnina določena z  $O, A, B$  (z vektorji  $\vec{a}, \vec{b}$ ) in točko  $O$ .

$$\vec{r} = \vec{OT}, T \in \mathcal{R}$$

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Pri tem sta  $\alpha$  in  $\beta$  enolična določena skalarja.

V  $\mathcal{R}$  smo z vektorjema  $\vec{a}, \vec{b}$  vpeljali koordinatni sistem.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$  so linearno odvisni, kadar je vsaj eden od njih linearna kombinacija drugih dveh.

npr:  $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

V nasprotnem primeru so  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  linearno neodvisni.

1.  $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$  so linearno odvisni  $\Leftrightarrow O, A, B, C$  koplanarne (ležijo na isti ravnini)
2.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  so linearno neodvisni  $\Leftrightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0)$