

# Analiza 1

Vid Drobnič

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Števila</b>	<b>4</b>
1.1	Naravna števila . . . . .	4
1.2	Cela števila . . . . .	5
1.3	Racionalna števila . . . . .	5
1.4	Dedekindov aksiom in Realna števila . . . . .	12
1.5	Posledice Dedekindovega aksioma . . . . .	19
1.6	Intervali . . . . .	20
1.7	Decimalni ulomki . . . . .	21
1.8	Absolutna vrednost . . . . .	24
1.9	Kompleksna števila . . . . .	25
1.9.1	Lastnosti . . . . .	28
1.9.2	Geometrijska interpretacija . . . . .	29
1.9.3	Polarni zapis . . . . .	30
<b>2</b>	<b>O množicah in preslikavah</b>	<b>32</b>
<b>3</b>	<b>Številska zaporedja</b>	<b>34</b>
3.1	Monotona zaporedja . . . . .	40
3.2	Podzaporedja . . . . .	42
3.3	Računanje z zaporedji . . . . .	43
3.4	Cauchyjev pogoj . . . . .	48
3.5	Potence z realnimi eksponenti . . . . .	53
3.6	Zgornja in spodnja limita . . . . .	58
3.7	O zaporedjih kompleksnih števil . . . . .	61

<b>4</b>	<b>Številске vrste</b>	<b>62</b>
4.1	Vrte z nenegativnimi členi . . . . .	67
4.2	Absolutna konvergenca . . . . .	75
4.3	O preureditvah vrst . . . . .	77
4.4	Množenje vrst . . . . .	79
4.5	Dvakratne vrste . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Funkcije realne spremenljivke</b>	<b>82</b>
5.1	Operacije s funkcijami . . . . .	84
5.2	Zveznost . . . . .	87
5.2.1	Opis zveznosti z zaporedji . . . . .	88
5.2.2	Lastnosti zveznih funkcij . . . . .	93
5.3	Monotone zvezne funkcije . . . . .	95
5.4	Zveznost posebnih funkcij . . . . .	96
5.5	Trigonometrične funkcije . . . . .	99
5.6	Ciklometrične funkcije . . . . .	99
5.7	Limita funkcije . . . . .	100
5.8	Odvod . . . . .	104
5.9	Diferencial . . . . .	106
5.10	Pravila za odvajanje . . . . .	108
5.11	Odводи elementarnih funkcij . . . . .	111
5.12	Odводи višjega reda . . . . .	114
5.13	Rollov in Lagrangeev izrek . . . . .	116
5.14	Iskanje ekstremov odvedljive funkcije na $[a, b]$ . . . . .	120
5.15	Konveksnost in konkavnost . . . . .	122

5.16	L'Hôpitalovi izreki . . . . .	125
5.17	Uporaba odvoda v geometriji . . . . .	129
5.17.1	Podajanje krivulj . . . . .	129
5.18	Integral . . . . .	133
5.18.1	Primitivna funkcija in nedoločen integral . . . . .	133
5.18.2	Pravila za integriranje . . . . .	135
5.18.3	Določeni integral . . . . .	137
5.18.4	Darbouxove vsote . . . . .	140
5.18.5	Lastnosti določenega integrala . . . . .	148
5.18.6	Povprečna vrednost . . . . .	151
5.18.7	Osnovni izrek analize . . . . .	152
5.18.8	Uvedba nove spremenljivke in integracija po delih v določenem integralu . . . . .	155

# 1 Števila

## 1.1 Naravna števila

- Z njimi štejemo: 1, 2, 3
- Množico naravnih števil označimo z  $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- Vsako naravno število  $n$  ima naslednika  $n^+$  ( $n^+ = n + 1$ )

### Peanovi aksiomi:

$\mathbb{N}$  je množica skupaj s pravilom, ki vsakemu naravnemu številu  $n$  dodeli njegovega naslednika  $n^+ \in \mathbb{N}$  in velja:

1. za vse  $m, n \in \mathbb{N}$  če  $m^+ = n^+$ , potem  $m = n$
2. obstaja  $1 \in \mathbb{N}$ , ki ni naslednik nobenega naravnega števila
3. Če je  $A \subset \mathbb{N}$  in če je  $1 \in A$ <sup>1</sup> in če velja: če  $n \in A$ , potem  $n^+ \in A$ <sup>2</sup>, potem  $A = \mathbb{N}$

Aksiom (3) se imenuje **aksiom popolne indukcije**.

- Naravna števila lahko **seštevamo, množimo**.
- $\mathbb{N}$  so urejena po velikosti 1, 2, 3, 4, 5, ...

$$\{3, 5, 6, 10\} \subset \mathbb{N}$$

$$\{3, 5, 7, 16, 23, \dots\} \subset \mathbb{N}$$

- Vsaka neprazna podmnožica  $\mathbb{N}$  ima najmanjši element.
- V splošnem ne velja<sup>3</sup>, da ima vsaka neprazna podmnožica  $\mathbb{N}$  največji element.

---

<sup>1</sup>indukcijska baza

<sup>2</sup>indukcijski korak

<sup>3</sup>ne velja za vse (množice)

## 1.2 Cela števila

Označimo jih z  $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

- Seštevanje in množenje se iz  $\mathbb{N}$  razširita na  $\mathbb{Z}$ .
- Poleg tega je definiramo **odštevanje**.
- Množico celih števil uredimo na običajen način.
- Ni res, da bi imela vsaka neprazna podmnožica  $\mathbb{Z}$  najmanjši element.
- V splošnem deljenje ni definirano  $\left(\frac{3}{2}\right)$

## 1.3 Racionalna števila

Racionalna števila so kvocienti celih števil. Bolj natančno: kvocienti celih in naravnih števil.

Dva ulomka  $\frac{m}{n}, \frac{k}{l}$  predstavljata isto racionalno število če:  $ml = nk$  lahko naredimo:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

Množico  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  razdelimo na razrede: urejena para  $(m, n)$  in  $(k, l)$  sta v istem razredu, če velja  $ml = nk$ .

Racionalno število je razred urejenih parov in ga označimo z  $\frac{m}{n}$ .

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

**Seštevanje v  $\mathbb{Q}$ :**

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}$$

Seštevanje ulomkov je *dobro definirano*:

če je:  $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}, \frac{k'}{l'} = \frac{k}{l}$

potem je:  $\frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'} = \frac{m}{n} + \frac{k}{l}$

vemo:  $m'n = mn'$  in  $k'l = kl'$

*Dokaz:*

$$\begin{aligned}\frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'} &=_{(def)} \frac{m'l' + n'k'}{n'l'} \cdot \frac{mk}{mk} = \\ &= \frac{m'l'mk + n'k'mk}{n'ml'k} = \\ &= \frac{m'mk'l + m'nk'k}{m'nk'l} = \frac{ml + nk}{nl} =_{(def)} \frac{m}{n} + \frac{k}{l}\end{aligned}$$

**Množenje v  $\mathbb{Q}$ :**

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}$$

Množenje je dobro definirano (izpeljava doma).

**Deljenje v  $\mathbb{Q}$ :**

$$\frac{m}{n} : \frac{k}{l} = \frac{ml}{nk}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}, k \neq 0$$

## Lastnosti seštevanja

Naj bo  $A$  (številska) množica z operacijama  $+$  in  $\cdot$ .

Osnovne lastnosti računskih operacij bomo imenovali **aksiomi**. Druge lastnosti izpeljemo iz aksiomov.

### **A1 asociativnost seštevanja**

Za vse  $a, b, c \in A$  velja  $(a + b) + c = a + (b + c)$

### **A2 komutativnost seštevanja**

Za vse  $a, b \in A$  velja da  $a + b = b + a$

### **A3 obstoj enote za seštevanje**

Obstaja za element  $0 \in A$  za katerega velja da:  $0 + a = a$  za vse  $a \in A$

#### A4 obstoj nasprotnega števila (elementa)

Za vsak  $a \in A$  obstaja nasprotno število  $-a \in A$  za katerega velja:  
 $(-a) + a = 0$

*Opomba:* Množica  $A$  za operacijo  $+$ , ki ustreza aksiomom od A1 do A4 je **Abelova grupa** za  $+$ .

*Trditev:* Naj  $(A, +)$  ustreza aksiomom od A1 do A4.

- (1)  $\forall a \in A$  ima eno samo nasprotno število
- (2) **Pravilo krajšanja:** za vse  $a, x, y \in A$  velja:  $a + x = a + y \Rightarrow x = y$
- (3)  $-0 = 0$

*Dokaz:*

- (1) izberemo poljubno število  $a \in A$ . Dokazujemo da ima  $a$  natanko 1 nasprotni element.

Po A4 nasprotno število obstaja. Denimo, da sta  $b, c \in A$  nasprotni števili od  $a$ .

$$\begin{aligned} b + a = 0 \text{ in } c + a = 0 \\ (a + b) + c &\stackrel{A2}{=} (b + a) + c \stackrel{\text{predp.}}{=} 0 + c \stackrel{A2}{=} c \\ (a + b) + c &\stackrel{A2}{=} (b + a) + c \stackrel{A1}{=} b + (a + c) \stackrel{A2}{=} b + (c + a) \stackrel{\text{predp.}}{=} b + 0 \stackrel{A2}{=} 0 + b \stackrel{A3}{=} b \\ c &= b \end{aligned}$$

- (2)

$$\begin{aligned} a + x = a + y &\stackrel{A4}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow (-a) + (a + x) &= (-a) + (a + y) \stackrel{A1}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow ((-a) + a) + x &= ((-a) + a) + y \stackrel{A4}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow 0 + x = 0 + y &\stackrel{A3}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

- (3)  $-0 = 0$

$$0 \stackrel{A4}{=} (-0) + 0 \stackrel{A2}{=} 0 + (-0) \stackrel{A3}{=} -0$$



*Odštevanje v A*: razlika števil  $a$  in  $b$  je vsota  $a$  in nasprotnega elementa od  $b$ .

$$a - b := a + (-b)$$

$b - a$  je rešitev enačbe  $a + x = b$

*Pozor*: odštevanje ne ustreza aksiomom od A1 do A4.

## Lastnosti množenja

### A5 asociativnost množenja

Za vse  $a, b, c \in A$  velja:  $(ab)c = a(bc)$

### A6 komutativnost množenja

Za vse  $a, b, c \in A$  velja:  $ab = ba$

### A7 obstoj enote za množenje

$\exists 1 \in A : 1 \cdot a = a$ , za  $\forall a \in A$

### A8 obstoj obratnega števila (elementa)

Vsak  $a \in A, a \neq 0$ , ima obratni element, tj.:  $a^{-1} \in A : a^{-1} \cdot a = 1$

Množici  $A$  z operacijo  $+$ , ki ustreza A1-A4, rečemo **grupa za seštevanje** (Abelova grupa).

Množica  $A \setminus \{0\}$  z operacijo  $\cdot$ , ki ustreza A5-A8 je **grupa za množenje**.

Podobno kot za seštevanje lahko izpeljemo:

*Trditve*: veljajo:

(1) Vsak  $a \in A \setminus \{0\}$  ima eno samo obratno število

(2) (pravilo krajšanja za množenje)

Za vsak  $a, x, y \in A$  velja:  $ax = ay \Rightarrow x = y$

(3)  $1^{-1} = 1$

### A9 Števili 0 in 1 sta različni $0 \neq 1$

## A10 Distributivnost

Za vsake  $a, b, c \in A$  velja:

$$(a + b)c = ac + bc$$

*Def:* Množico  $A$  z operacijama  $+$  in  $\cdot$ , ki ustreza aksiomom A1-A10, imenujemo **komutativen<sup>4</sup> obseg** ali **polje**.

*Primer:*  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  so polje.

V  $A$  vpeljemo urejenost z dvema aksiomoma:

**A11:** Za vsak  $a \in A \setminus \{0\}$  velja, da je natanko eno od števil  $a$ ,  $-a$  pozitivno. Število 0 ni niti pozitivno niti negativno. (Število  $a$  je negativno, če je število  $-a$  pozitivno).

**A12:** Za vsaka  $a, b \in A$  velja: če sta  $a$  in  $b$  pozitivni števili, potem sta tudi  $a + b$  in  $a \cdot b$  pozitivni števili.

*Def:* Če ima obseg  $(A, +, \cdot)$  urejenost, ki izpolnjuje A11 in A12,  $A$  imenujemo **urejen obseg** (urejeno polje).

*Primer:*  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  z običajno urejenostjo je urejen obseg.

$\frac{m}{n}$  je pozitiven, če  $m \cdot n > 0$

*Def:* Naj bo  $A$  urejen obseg. Za poljubna  $a, b \in A$  definiramo:

Pišemo  $a > b$  natanko tedaj, kadar je  $a - b$  pozitivno število.

V tem primeru pišemo tudi  $b < a$

V posebnem primeru pišemo  $a > 0$ , kadar je  $a$  pozitivno število.

*Def:* Naj bo  $A$  urejen obseg. Za poljubna  $a, b \in A$

$a \leq b$  natanko takrat, kadar  $a < b$  ali  $a = b$

*Trditev:* V urejenem obsegu  $A$  velja:

(1) Za poljubni števili  $a, b \in A$  velja natanko ena od možnosti:

$$a < b, a = b, a > b$$

Sledi iz A11 uporabljen za  $a - b$ .

---

<sup>4</sup>komutativnost se nanaša na komutativnost množenja

- (2) Za poljubne  $a, b, c \in A$  velja:  
če je  $a > b \wedge b > c$ , potem  $a > c$  (tranzitivnost)
- (3) Za poljubne  $a, b, c \in A$  velja:  
če je  $a > b$ , potem  $a + c > b + c$
- (4) Za poljubne  $a, b, c, \in A, c > 0$ :  
če je  $a > b$ , potem je  $ac > bc$
- (5) Za poljubne  $a, b, c, d, \in A$ :  
če je  $a > b > 0$  in  $c > d > 0$ , potem je  $ac > bd$

*Dokaz:*

- (2)  $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

Po definiciji:  $a - b > 0$  in  $b - c > 0$

Zato po A12:

$$\begin{aligned}(a - b) + (b - c) &> 0 \\ a + (-b) + b + (-c) &> 0 \\ a + 0 + (-c) &> 0 \\ a - c &> 0\end{aligned}$$

zato  $a > c$

- (3) denimo, da je  $a > b$

dokazujemo, da je  $a + b > b + c$ , tj:  $(a + c) - (b + c) > 0$

$$\begin{aligned}(a + c) - (b + c) &= a + c + (-(b + c)) = \\ &= a + c + (-b) + (-c) = \\ &= (a + (-b)) + (c + (-c)) = \\ &= a + (-b) = a - b\end{aligned}$$

Dokaz da  $-(b + c) = (-b) + (-c)$ :

$-(b + c)$  je nasprotni element od  $b + c$ , kar pomeni da je njuna vsota enaka 0. Če velja  $-(b + c) = (-b) + (-c)$ , mora biti tudi  $b + c + (-b) + (-c) = 0$ :

$$b + c + (-b) + (-c) \stackrel{A2, A1}{=} (b + (-b)) + (c + (-c)) \stackrel{A4}{=} 0 + 0 \stackrel{A3}{=} 0$$

Če  $a > b$  je  $a - b > 0$ , zato je  $(a + c) - (b + c) > 0$ , kar pomni  $a + c > b + c$ .

(5)  $a > b > 0$  in  $c > d > 0$

Dokazujemo  $ac > bd$ :

$$a > b \stackrel{A4}{\Rightarrow} ac > bc \quad (c > 0)$$

$$c > d \stackrel{A4}{\Rightarrow} bc > bd \quad (b > 0)$$

Z upoštevanjem tranzitivnosti (2) dobimo:  $ac > bd$   $\square$

Racionalna števila predstavimo na številski premici.

Racionalna števila so na številski premici **povsod gosta** tj: na vsakem nepraznem odprtem intervalu leži racionalno število.

Racionalna števila ne pokrijejo številske premice

*Trditev:* rešitev enačbe  $x^2 = 2, x > 0$  ni racionalno število. ( $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ )

*Dokaz:* Dokazujemo da  $x$  ni ulomek.

Dokazujemo s protislovjem.

- privzamemo, da tisto kar dokazujemo ni res. (predpostavimo, da  $x$  je ulomek)
- sklepamo
- skepi nas privedejo v protislovje s predpostavko

$$x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$$

Če je  $x$  ulomek, ga lahko zapišemo kot okrajšan ulomek, zato sta  $m$  in  $n$  tuji

si števili.

$$\begin{aligned}
 x^2 = 2 &\Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \\
 \frac{m^2}{n^2} &= 2 \\
 m^2 &= 2n^2 \\
 2|m^2 &\Rightarrow 2|m \\
 \exists l \in \mathbb{N} : m &= 2l \\
 4l^2 &= 2n^2 \\
 2l^2 &= n^2 \\
 2|n^2 &\Rightarrow 2|n \\
 &\rightarrow \leftarrow
 \end{aligned}$$

Dokaz da  $2|m^2 \Rightarrow 2|m$ :

Če je  $m$  liho, potem  $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
 m &= 2k + 1 \\
 m^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\
 m^2 &\text{ je lih}
 \end{aligned}$$

## 1.4 Dedekindov aksiom in Realna števila

Radi bi skonstruirali številsko množico, ki bo vsaj urejen obseg in, ki zapolni številsko premico.

### Dedekindov pristop

*Def:* **Rez** je podmnožica  $A \subset \mathbb{Q}$ , za katero velja:

- (i)  $A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{Q}$
- (ii) Če je  $p \in A$ , potem za vsak  $q \in \mathbb{Q}$  in  $q < p$ , velja  $q \in A$
- (iii) za vsak  $p \in A$  obstaja  $q \in A, q > p$  ( $A$  nima največjega elementa)

*Def:* Množica realnih števil je množica vseh rezov, označimo jo s  $\mathbb{R}$

*Primer:* 16 ustreza rez:  $\{p \in \mathbb{Q}; p < 16\} = B$

*Trditev:* Preslikava  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  in je definirana s predpisom:

$$q \mapsto \{p \in \mathbb{Q}; p < q\} = p^*$$

vloži množico racionalnih števil v množico realnih števil.

Vpeljimo računski operaciji v  $\mathbb{R}$ .

*Def:* Naj bosta  $A$  in  $B$  reza. Vsota rezov  $A$  in  $B$  je

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$$

*Opomba:* Želimo si, da velja  $(p + q)^* = p^* + q^*$

*Trditev:* Če sta  $A$  in  $B$  reza, potem je tudi  $A + B$  rez.

*Dokaz(trditev):* Denimo da sta  $A$  in  $B$  reza.

Dokazujemo da je  $A + B$  rez:

(i)  $\underline{A + B} \neq \emptyset$

Ker sta  $A$  in  $B$  reza, po lastnosti (i) obstaja  $a \in A$  in  $b \in B$ . Potem je  $a + b \in A + B$ . Sledi  $A + B \neq \emptyset$   $\square$

$\underline{A + B} \neq \mathbb{Q}$

Obstaja  $c \in \mathbb{Q}, c \notin A$  in obstaja  $d \in \mathbb{Q}, d \notin B$ .

$$c + d \notin A + B$$

Denimo, da je  $c + d \in A + B$ .

Potem velja, da je  $c + d = a + b$  za  $a \in A, b \in B$ .

Iz (ii) sledi:  $c > a$  in  $d > b \Rightarrow a + b < c + d \rightarrow \leftarrow$

(ii) Denimo:  $p \in A + B$ , dokazujemo da za  $q \in \mathbb{Q}, q < p$  velja  $\underline{q \in A + B}$

Obstajata  $a \in A$  in  $b \in B$ , da  $p = a + b$

$$q = a + q - a$$

Če je  $q - a < b$ , potem  $q - a \in B$

$$q < a + b$$

$$q < p$$

$\square$

(iii)  $A + B$  nima največjega elementa.

izberimo  $p \in A + B$

iščemo  $q \in A + B, q > p$

Obstajata  $a \in A, b \in B$ , da je  $p = a + b$

Obstaja  $a' \in A, a' > a$

$$q := a' + b \in A + B$$

$$q > p$$

□

Ni težko preveriti, da za  $(\mathbb{R}, +)$  veljajo A1-A4.

Asociativnost in komutativnost se dokaže z operacijami na elementih reza.

$0^*$  je enota za seštevanje.

Nasprotni rez od  $A$ :

$$-A = \{r \in \mathbb{Q}, \text{ obstaja } r' \in \mathbb{Q}, r' > r \text{ in } r' + p < 0 \text{ za vse } p \in A\}$$

(i)  $-A \neq \emptyset$

$$\underline{-A \neq \mathbb{Q}}$$

$$q + a < 0 \text{ za vse } q \in \mathbb{Q}$$

$$q = -a$$

(ii)  $q \in -A : r < q$

$$q + a < 0 \text{ za vse } a \in A$$

$$r + a < q + a \text{ za vse } a \in A \text{ po tranzitivnosti: } r + a < 0$$

(iii) Izberemo poljuben  $r \in A$ . Iščemo  $q \in A, q > r$ .

$$q := \frac{r + r'}{2} (r' > r, r' \in \mathbb{Q} : r' + p < 0 \text{ za vse } p \in \mathbb{Q})$$

$$q \in \mathbb{Q}, r' > q$$

*Def:* Pravimo da je  $A$  pozitiven, če je  $0^* \in A, A \neq 0^*$ . Denimo da sta  $A$  in  $B$  pozitivna reza:

$$A \cdot B = \{q \in \mathbb{Q}, \text{ obstajata } a \in A, a > 0 \text{ in } b \in B, b > 0, \text{ da je } q < ab\}$$

Želimo  $(pq)^* = p^* \cdot q^*, p, q \in \mathbb{Q}$

*Def:* Naj bosta  $A$  in  $B$  poljubna reza.

$$A \cdot B = \begin{cases} A \cdot B & A > 0 \wedge B > 0 \\ -A \cdot (-B) & A > 0 \wedge B < 0 \\ -(-A) \cdot B & A < 0 \wedge B > 0 \\ (-A) \cdot (-B) & A < 0 \wedge B < 0 \end{cases}$$

Če je vsaj eden od rezov enak  $0^*$ , potem  $A \cdot B = 0^*$ .

Ni težko preveriti, da množenje rezov izpolnjuje A5-A8 in A9, A10.

Enota za množenje je  $1^*$ .

Urejenost izpolnjuje A11 in A12.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$  je **urejen obseg** in vsebuje  $\mathbb{Q}$  kot **urejen podobseg**.

*Cilj:* Obseg  $\mathbb{R}$  izpolnjuje še dodaten aksiom A13 (**Dedekindov aksiom**), ki pove, da  $\mathbb{R}$  zapolnjuje številsko premico.

Aksioma A13 obseg  $\mathbb{Q}$  ne izpolnjuje.

*Def:* Naj bo  $B$  urejen obseg in  $A \subset B$ . Pravimo, da je  $A$  navzgor omejena, če obstaja  $M \in B$ , da velja:

$$\forall a \in A : a \leq M$$

$\forall M$  s to lastnostjo pravimo zgornja meja množice  $A$ . Če je  $A \subset \mathbb{Q}$  (ali  $\mathbb{R}$ ) in je množica navzgor omejena, potem ima  $A$  neskončno zgornjih mej.

*Def:* Naj bo  $A$  navzgor omejena množica. Če obstaja najmanjša od vseh zgornjih mej množice  $A$  v  $B$ , jo imenuje natančna zgornja meja množice  $A$ .

Torej je  $\alpha \in B$  natančna zgornja meja množice  $A$ , če velja:

(i)  $\alpha$  je zgornja meja  $\forall a \in A : a \leq \alpha$

(ii) Če  $b \in B, b < \alpha$ , potem  $b$  ni zgornja meja množice  $A$ , t.j.:  $\exists a \in A : a > b$

Natančno zgornjo mejo množice  $A$  imenujemo tudi **supremum** množice  $A$  in jo označimo z  $\sup A$ .



*Def:* Če obstaja največji element množice  $A$ , ga imenujemo **maksimum** množice  $A$  in označimo z  $\max A$ .

Če ima  $A$  maksimum, potem velja:

$$\max A \in A \wedge \forall a \in A : a \leq \max A$$

Če ima  $A$  maksimum, potem  $\max A = \sup A$ . (Za  $a$  v (2) lastnosti definicije supremuma vzamemo  $\max A$ )

*Dokaz:*

- (1)  $\max A$  je zgornja meja  $A$  (po definiciji maksimuma).
- (2) če  $b < \max A$ , potem  $b$  ni zgornja meja (ker je  $\max A \in A$ ,  $b$  pa je manjši, velja da  $b$  ni zgornja meja od  $A$ , ker obstaja nek element is  $A$ , ki je večji od  $b$ ).

*Primeri:*

1.  $A = \{x \in \mathbb{Q}, x < 0\} \subset \mathbb{Q}$

4 je zgornja meja množice  $A$ , ker  $x \in A, x < 0, 0 < 4 \Rightarrow x < 4$

$\Rightarrow A$  je navzgor omejena.

0 je natančna zgornja meja množice  $A$

(a)  $x \in A, x < 0$

(b) Izberemo poljuben  $b \in \mathbb{Q}, b < 0$  in dokazujemo, da  $b$  ni zgornja meja.

$$b < \frac{b}{2} < 0; \frac{b}{2} \in A, \frac{b}{2} > b$$

Množica  $A$  nima maksimuma:  $0 \notin A$ .

2.  $C = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$

$C$  je navzgor omejena z 2.

$$x \in C : x^2 < 2 \wedge 2 < 4 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x < 2$$

(a) Vsako število  $p \in \mathbb{Q}, p^2 > 2$  je zgornja meja množice  $C$ .

(b) Nobeno racionalno število  $q \in \mathbb{Q}, q^2 < 2$  ni zgornja meja množice  $C$ .

Vemo: Rešitev enačbe  $x^2 = 2, x > 0, x \notin \mathbb{Q}$ .

Sledi:  $C \subset \mathbb{Q}$  nima natančne zgornje meje.

*Dokaz:*

(a)

$$x^2 < 2 < p^2$$

sledi:  $x^2 < p^2 \Rightarrow x < p$  za vse  $x \in C$   $\square$

(b) Iščemo  $c \in C$ , da je  $c > q, c^2 < 2$

$$c := \frac{2q+2}{q+2} = q + \frac{2q+2-q^2-2q}{q+2} = q + \frac{2-q^2}{q+2} > 0$$

( $q^2 < 2$ )

$$c^2 = \left(\frac{2q+2}{q+2}\right)^2 = \frac{4(q^2+2q+1)}{q^2+4q+4}$$

$$c^2 - 2 = \frac{4q^2+8q+4-2q^2-8q-8}{(q+2)^2} = \frac{2q^2-4}{(q+2)^2} = \frac{2(q^2-2)}{(q+2)^2} > 0$$

$$q^2 < 2$$

Podobno kot zgornjo mejo, navzgor omejeno množico, supremum in maksimum, definiramo spodnjo mejo, navzdol omejeno množico, infimum in minimum.

**A13 (Dedekindov aksiom):** Vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica v množici  $A$  ima supremum (v množici  $A$ ).

**Def:** Če množica  $(A, +, \cdot, <)$  izpolnjuje aksiome A1-A13 jo imenujem *poln urejen obseg* (poln se nanaša na A13).

**Trditev:**  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$  je urejen obseg, ki ne izpolnjuje A13.

**Izrek:** vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica v  $\mathbb{R}$  ima natančno določeno zgornjo mejo. ( $\mathbb{R}$  izpolnjuje A13)

**Posledica:**  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  je poln urejen obseg.

**Posledica:** Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica  $\mathbb{R}$  ima natančno spodnjo mejo.

$A$  neprazna navzdol omejena.

$$-A = \{x; -x \in A\}$$

$-A$  je neprazna, navzgor omejena (če  $m$  spodnja meja od  $A$ , je  $-m$  zgornja meja od  $-A$ ).  $\Rightarrow -A$  ima supremum in velja:  $-\sup A = \inf A$

**Dokaz (izrek):** Izberemo poljubno neprazno navzgor omejeno podmnožico  $\mathcal{A}$  v  $\mathbb{R}$ .

$$C = \cup A, A \in \mathcal{A}$$

Dokazati je treba:

1.  $C$  je rez
2.  $C = \sup \mathcal{A}$

1. (i)  $C \neq \emptyset$

Ker  $\mathcal{A}$  ni prazna  $\exists A \in \mathcal{A}$ . Torej velja  $A \subset C$ , torej  $C \neq \emptyset$ .

$$C \neq \mathbb{Q}$$

Ker je  $\mathcal{A}$  omejena, obstaja zgornja meja  $M$  množice  $\mathcal{A}$ , velja:

$$\forall A \in \mathcal{A} : A \leq M$$

$$\forall A \in \mathcal{A} : A \subset M$$

Sledi:  $C \subset M$ , zato  $C \neq \mathbb{Q}$  (ker  $M \neq \mathbb{Q}/M$  je rez).

- (ii)  $p \in C, q \in \mathbb{Q}, q < p \Rightarrow q \in C$

$p \in C \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}$ , da je  $p \in A$ . Ker je  $A$  rez, za  $q \in \mathbb{Q}, q < p$  velja  $q \in A$ .

Sledi:  $q \in C$ .

- (iii)  $p \in C \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, q > p : q \in C$   $p \in C \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}$ , da je  $p \in A$ .

Ker je  $A$  rez,  $\exists q \in A, q > p$ .

Sledi:  $q \in C$ .

2. (i)  $C$  je zgornja meja  $\mathcal{A}$

Ker je  $A \subset C$  za vse  $A \in \mathcal{A}$ , velja  $A \leq C$  za vse  $A \in \mathcal{A}$ . t.j.:  $C$  je zgornja meja.

- (ii)  $C$  je natančna zgornja meja  $\mathcal{A}$

Izberimo poljuben  $D < C$ . Dokazujemo, da  $D$  ni zgornja meja  $\mathcal{A}$ .

Ker je  $D < C, D \subset C$  in  $D \neq C$ , obstaja  $p \in \mathbb{Q}, p \in C$  in  $p \notin D$ .

Ker je  $p \in C$ , obstaja  $A \in \mathcal{A}$ , da je  $p \in A$ .

Velja:  $A > D$  in  $A \in \mathcal{A}$  (vemo da sta vsaka reza primerljiva po velikosti.)

Sledi:  $D$  ni zgornja meja.  $\square$

*Za radovedne:* Poleg Dedekinda je realna števila definiral tudi Cantor. Ta je to naredil s Cauchyjevimi zaporedji.

*Opomba:* Med obsegoma  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  je še veliko obsegov.

**Definicija:** Pravimo, da je  $x$  iracionalno število, če  $x \notin \mathbb{Q}$ .

Rešitvam polinomskih enačb s celimi koeficienti rečemo *algebraična števila*.

*Primer:*  $\sqrt{2} : x^2 - 2 = 0$

Niso vsa iracionalna števila algebraična:  $\pi, e$ . Tem pravimo *transcendentna števila*.

## 1.5 Posledice Dedekindovega aksioma

- Množica  $\mathbb{Z}$  ni navzgor omejena v  $\mathbb{R}$ .

*Dokaz:* Denimo, da je  $\mathbb{Z}$  navzgor omejena v  $\mathbb{R}$ . Potem obstaja  $M \in \mathbb{R}$ , da  $M = \sup \mathbb{Z}$ . Torej  $M - 1$  ni zgornja meja  $\mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \exists a \in \mathbb{Z}, a > M - 1 \\ a + 1 > M, a + 1 \in \mathbb{Z} \rightarrow \leftarrow \end{aligned}$$

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{Z} : a < b$

*Dokaz:* če to ne bi bilo res, bi bilo število  $a$  zgornja meja  $\mathbb{Z}$ . To pa ni res (prejšnja posledica).

- *Arhimedska lastnost:* Naj bosta  $a, b \in \mathbb{R}^+$ . Potem obstaja  $n \in \mathbb{N} : na > b$ .

*Dokaz:* Obstajati mora  $n \in \mathbb{N} : n > \frac{b}{a} \therefore$  Po prejšnji posledici tak  $n$  obstaja.  $\square$

- Naj bo  $a \in \mathbb{R}^+$ . Potem obstaja  $n \in \mathbb{N}$ , da  $\frac{1}{n} < a$ .

*Dokaz:* uporabimo arhimedsko lastnost za  $n = 1$ .

- Naj bosta  $a, b$  poljubni  $\mathbb{R}, a < b$ . Obstaja  $q \in \mathbb{Q}$ , da velja  $a < q < b$ .

*Dokaz:* če je  $b - a > 1$ , potem obstaja  $m \in \mathbb{Z}, a < m < b$

$\{n \in \mathbb{Z}, n \leq a\}$  je navzdol omejena neprazna.

$$\sup\{n \in \mathbb{Z}, n \leq a\} = x, x \in \mathbb{Z}$$

$$m := x + 1$$

$$b > m > 0$$

$$b - a > 0$$

$$\exists n \in \mathbb{N} : n(b - a) > 1$$

Obstaja  $m \in \mathbb{Z} : an < m < nb$ .

$$a < \frac{m}{n} < b \quad \square$$

Rečemo tudi:  $\mathbb{Q}$  so v  $\mathbb{R}$  *povsod gosta*.

## 1.6 Intervali

**Def:** Naj bosta  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

1.  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$  *zaprti interval*
2.  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$  *odprti interval*
3.  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$  *polodprti interval*  
 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
4.  $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$   
 $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$   
 $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$   
 $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$   
 $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

**Def:** Naj bo  $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ . Interval  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  imenujemo  $\varepsilon$ -*okolica* števila  $a$ .

*Okolica točke*  $a$  je vsaka taka podmnožica v  $\mathbb{R}$ , ki vsebuje kakšno  $\varepsilon$ -okolico točke  $a$ .

## 1.7 Decimalni ulomki

Vsako  $\mathbb{R}$  število lahko zapišemo kot *decimalni ulomek*.

Naj bo  $x \in \mathbb{R}^+$  in naj bo  $n \in \mathbb{N}_0$  največje število, ki ne presega  $x$ :

$$n \leq x < n + 1$$

Interval  $[n, n+1]$  razdelimo na 10 enakih delov. Nato poiščemo  $n_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , da velja:

$$n + \frac{n_1}{10} \leq x < n + \frac{n_1 + 1}{10}$$

Postopek nadaljujemo in na ta način sestavimo zaporedje decimalnih približkov za  $x$ .

$$\mathcal{A} = \{n, n + \frac{n_1}{10}, n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100}, \dots\}$$

*Trditev:*  $x = \sup \mathcal{A}$

*Dokaz:*

(i)  $x$  je zgornja meja množice  $\mathcal{A}$

Velja po konstrukciji:  $\forall a \in \mathcal{A} : a \leq x$ .

(ii)  $x$  je najmanjša zgornja meja

Denimo da to ni res:

$$y := \sup \mathcal{A} < x$$

$$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq x - y$$

$$\exists p \in \mathbb{N} : \frac{1}{10^p} < \frac{1}{n} < x - y$$

$$y + \frac{1}{10^p} < x$$

$$\begin{aligned} n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \dots + \frac{n_p}{10^p} &\leq y \\ n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \dots + \frac{n_p + 1}{10^p} &\leq y + \frac{1}{10^p} < x \end{aligned}$$

Trditev utemelji, da  $x$  lahko zapišemo, kot neskončni decimalni ulomek.

$$x = n_0 + \frac{n_1}{10} + \dots + \frac{n_p}{10^p} + \dots = n_0, n_1 n_2 \dots n_p \dots$$

*Trditev:* Naj bosta  $x, y \in \mathbb{R}^+$

(1) Denimo, da obstaja  $k \in \mathbb{N}_0$ , za katerega velja:

$$\begin{aligned} x &= n_0, n_1 n_2 \dots n_{k-1} n_k 99 \dots \\ y &= n_0, n_1 n_2 \dots n_{k-1} (n_k + 1) 00 \dots \end{aligned}$$

in  $n_k \neq 9$ , potem  $x = y$ .

(2) Za dva različna decimalna zapisa  $x \in \mathbb{R}^+$  velja (1).

*Dokaz:* Naj bo  $\mathcal{A}$  množica decimalnih preslikav za  $x$ .

(1)

$$\forall a \in \mathcal{A} : y \geq a \text{ (} y \text{ je zgornja meja)}$$

Zato  $y \geq x$  ( $x$  je  $\sup \mathcal{A}$ )

Dokazujemo  $y$  je natančna zgornja meja od  $\mathcal{A}$

Naj bo  $l > k$  in  $a_l$   $l$ -ti decimalni približek za  $x$ .

$$\begin{aligned} y - a_l &= \frac{1}{10^l} \\ y - \frac{1}{10^l} &= a_l \\ y - \frac{1}{10^l} &\leq a_l < a_{l+1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow y - \frac{1}{10^l}$  ni zgornja meja za noben  $l$ , torej je  $y$  natančna zgornja meja.

(2)  $x$  naj ima dva decimalna zapisa:

$$\begin{aligned} x &= n_0, n_1 n_2 \dots \\ x &= m_0, m_1 m_2 \dots \end{aligned}$$

Obstaja najmanjši indeks  $k \in \mathbb{N} : n_k \neq m_k$ .

Predpostavimo, da je  $m_k > n_k$

$m_0, m_1 m_2 \dots m_k$  je zgornja meja množice decimalnih približkov za  $x$ .

$$m_0, m_1 m_2 \dots m_k > m_0, m_1 m_2 \dots m_{k-1} n_k n_{k+1} n_{k+2} \dots$$

Če bi veljajo  $n_k < m_k - 1$  (dokazujemo, da je razlika lahko največ 1, t.j. morajo se ponavljati 9-ke)

$$x \leq n_0, n_1 n_2 \dots n_{k-1} (n_k + 1) < m_0, m_1 \dots m_{k-1} m_k \leq x \rightarrow \leftarrow$$

( $x < x$  ni možno)

Če bi bil  $m_{k+1} \neq 0$  (ali za indeks  $l > k$ ):

$$x \leq m_0, m_1 m_2 \dots m_k < m_0, m_1 \dots m_k m_{k+1} \leq x \rightarrow \leftarrow$$

Na podoben način dokažemo, da velja:

$$\forall l \in \mathbb{N} : n_{k+l} = 9$$

Podobno velja tudi za druge osnove. Primer v dvojiškem sistemu bi bil:

$$1101,011 = 1101,010\bar{1}$$

*Trditev:* Naj bo  $x \in \mathbb{R}$ .  $x$  ima periodičen decimalni zapis natanko tedaj, kadar  $x \in \mathbb{Q}$  (tudi končen decimalni zapis je periodičen).

*Dokaz:* denimo, da je  $x \in \mathbb{Q}^+$ .

$$x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$$

$m$  delimo z  $n$  pisno. To pomeni da podpisujemo ostanke. Ker imamo na voljo  $n$  različnih ostankov:  $o_j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , se bo med  $n+1$  zaporednimi ostanki vsaj eden zagotovo ponovil. Ko se ostanek ponovi, se ponovi tudi cel zapis, kar je perioda.

Denimo, da ima  $x$  periodičen decimalni zapis:

$$\begin{aligned} x &= d, d_1 d_2 \dots d_n \overline{d_{n+1} d_{n+2} \dots d_{n+k}} \\ 10^k x &= d \cdot 10^k + d_1 d_2 \dots d_k, d_{k+1} \dots d_n \dots d_{n+k} \overline{d_{n+1} \dots d_{n+k}} \\ 10^k x - x &\text{ ima končen decimalni zapis } = p \in \mathbb{Q} \\ x &= \frac{p}{10^k - 1} \in \mathbb{Q} \quad \square \end{aligned}$$



## 1.8 Absolutna vrednost

*Def:* če je  $x \in \mathbb{R}$ , potem

$$|x| = \begin{cases} x & \text{če } x \geq 0 \\ -x & \text{če } x < 0 \end{cases}$$

Število  $|x|$  imenujemo *absolutna vrednost realnega števila*  $x$ .

*Trditev:* Naj bo  $x \in \mathbb{R}$ . Veljajo:

- (i)  $|x| \geq 0$
- (ii)  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (iii)  $|x| = |-x|$
- (iv)  $-|x| \leq x \leq |x|$
- (v)  $|x|$  je razdalja  $x$  do 0 na številski premici
- (vi) *Trikotniška neenakost:*  $|x + y| \leq |x| + |y|$  za vse  $x, y \in \mathbb{R}$
- (vii)  $|xy| = |x| \cdot |y|$  za vse  $x, y \in \mathbb{R}$

*Dokaz:*

(vi) pregledamo vse možnosti glede na predznak

(1)  $x \geq 0, y \geq 0$

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|$$

(2)  $x < 0, y < 0$

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y = |x| + |y|$$

(3)  $x \geq 0, y < 0$

$$|x| = x, |y| = -y$$

$$x + y = |x| - |y|$$

$$|x + y| = \begin{cases} |x| - |y| & \text{če } |x| \geq |y|, \\ |y| - |x| & \text{če } |x| < |y| \end{cases}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(4) simetrična (3)

*Posledica:*

- 1)  $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$  za vse  $x, y \in \mathbb{R}$
- 2)  $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$  za vse  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

*Dokaz:*

- 1) Za  $+$  je desna neenakost trikotniška neenakost.

Leva neenakost:

$$\begin{aligned} |x| &= |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y| \\ |x| - |y| &\leq |x + y| \end{aligned}$$

Podobno velja:  $|y| - |x| \leq |x + y|$

Iz tega sledi:  $||x| - |y|| \leq |x + y|$   $\square$

## 1.9 Kompleksna števila

Motivacija za kompleksna števila je, da bi lahko rešili enačbo:

$$x^2 = -a, a \in \mathbb{R}^+$$

*Definicija:* Kompleksno število je urejeni par realnih števil: množica vseh kompleksnih števil je množica vseh urejenih parov realnih števil, t.j.:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  in jo označimo s  $\mathbb{C}$ .

$$\mathbb{C} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$$

Opomba (kdaj sta dve kompleksni števili enaki):

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha = (a, b), \beta = (c, d) : \alpha = \beta \iff a = c \wedge b = d$$

V množico kompleksnih števil vpeljemo računski operaciji:

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha = (a, b), \beta = (c, d) \text{ kjer } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a + c, b + d) \\ \alpha \cdot \beta &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

*Izrek:*  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  je komutativen obseg. Enota za seštevanje je  $(0, 0)$ , enota za množenja pa  $(1, 0)$ . V  $\mathbb{C}$  se ne da vpeljati urejenosti, da bi bil urejen obseg. Drugače povedano: izraz kot npr.  $z > 0$  je nesmislen.

*Dokaz:* (veljavnosti nekaterih aksiomov)

$$(A3) \quad \alpha + (0, 0) = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = \alpha \quad \square$$

$$(A4) \quad \alpha = (a, b) \in \mathbb{C} \quad -\alpha = (-a, -b)$$

$$(a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0) = 0 \quad \square$$

$$(A7) \quad (a, b) \cdot (1, 0) = (1a - 0b, 0a + 1b) = (a, b) \quad \square$$

$$(A8) \quad \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0 \quad \alpha = (a, b)$$

$$\begin{aligned}\alpha^{-1} &= \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \\ \alpha \alpha^{-1} &= \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) = 1 \quad \square\end{aligned}$$

*Opomba:* Kompleksni števili  $(0, 0) \equiv 0$ ,  $(1, 0) \equiv 1$  poimenujemo 0 in 1.

*Opomba:* Preslikava  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definirana s predpisom  $a \mapsto (a, 0)$  inducira vložitev realnih števil v kompleksnem in je usklajena z računskima operacijama.

$$\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0) \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab - 0 \cdot 0, 0a + 0b) = (ab, 0)\end{aligned}$$

Poleg te vložitve, bi si lahko zamislili tudi kakšno drugo, vendar ne bi bila dobra. Npr:  $a \mapsto (a, 1)$  ni dobra vložitev, ker že pri seštevanju “pademo ven” iz realnih vrednosti  $((a, 1) + (b, 1) + (a + b, 2))$ .

Torej lahko kompleksna števila  $(a, 0)$  *identificiramo* z realnimi:  $(a, 0) = a$ .

*Definicija:* Kompleksno število  $(0, 1)$  označimo z  $i$  in ga imenujemo *imaginarna enota*.

$$\begin{aligned}i^2 &= (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \\ (a, b) &= (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi\end{aligned}$$

Od tu naprej bomo kompleksna števila obravnavali kot

$$\mathbb{C} = \{a + bi, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Definirani računski operaciji inducirata običajno računanje s kompleksnimi števili

*Definicija:* Naj bo  $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

- število  $a$  je realni del kompleksnega števila  $\alpha$  in ga označimo:  $a = \Re\alpha$
- število  $b$  je imaginarni del kompleksnega števila  $\alpha$  in ga označimo:  $b = \Im\alpha$ . Opomba:  $\Im\alpha \in \mathbb{R}$ .
- številu  $a - bi$  rečemo *konjugirano število* številu  $\alpha$  in ga označimo z  $\bar{\alpha}$
- šteilo  $\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$  imenujemo *absolutna vrednost* kompleksnega števila  $\alpha$  in označimo  $|\alpha|$

*Opomba:*  $\alpha = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{(a^2 - abi + abi + b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R} \geq 0$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$

To pojasni, zakaj lahko uporabljamo enako oznako za absolutno vrednost kompleksnega števila, kot za absolutno vrednost realnega števila.

*Trditev:* Za  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  velja:

$$(i) \quad \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$$

$$(ii) \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\Re\alpha &= \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha}) \\ \Im\alpha &= \frac{1}{2i}(\alpha - \bar{\alpha})\end{aligned}$$

$$(iv) \quad \alpha\bar{\alpha} = (\Re\alpha)^2 + (\Im\alpha)^2$$

$$(v) \quad \bar{\bar{\alpha}} = \alpha$$

*Dokaz:*(ii)  $\alpha = a + bi, \quad \beta = c + di, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta} &= \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd + (ad + bc)i)} = \\ &= ac - bd - (ad + bc)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} &= \overline{(a + bi)(c + di)} = (a - bi)(c - di) = \\ &= ac - bd - (ad + bc)i \quad \square\end{aligned}$$

### 1.9.1 Lastnosti

Za vse  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  velja:

- (i)  $|\alpha| \geq 0$
- (ii)  $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$
- (iii)  $|\alpha| = |\overline{\alpha}|$
- (iv)  $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$
- (v)  $|\Re\alpha| \leq |\alpha|$   
 $|\Im\alpha| \leq |\alpha|$
- (vi)  $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$   
 $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

*Dokaz*

$$(iv) \quad |\alpha\beta|^2 = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = \alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\beta} = |\alpha|^2|\beta|^2$$

Ker je  $|\alpha| \geq 0$ , enakost sledi.

$$\begin{aligned}(vi) \quad |\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) = \\ &= \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = \\ &= |\alpha|^2 + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} + |\beta|^2\end{aligned}$$

$$(|\alpha| + |\beta|)^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$$

Dovolj je dokazati  $\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} \leq 2|\alpha||\beta|$

$$\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} = \alpha\bar{\beta} + \overline{\overline{\alpha\bar{\beta}}} = \alpha\bar{\beta} + \overline{\alpha\beta} = 2\Re(\alpha\bar{\beta})$$

$$2\Re(\alpha\bar{\beta}) \leq 2|\alpha||\beta|$$

$$|\alpha\bar{\beta}| = |\alpha||\bar{\beta}| = |\alpha||\beta|$$

Neenakost velja zaradi (v).

### 1.9.2 Geometrijska interpretacija

Pri učenju geometrijske interpretacije toplo priporočam zvezek s skicami. Kot piše v datoteki README.md, skic v teh zapiskih ni in jih verjetno tudi ne bo. Če misliš, da imaš dovolj dobro domišljijo in se znajdeš samo iz tekstovnega opisa, potem pa kar pogumno, čeprav te pogum ne bo pripeljal do znanja.

Kompleksno število  $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$  predstavimo s točko  $(a, b)$  v izbranem koordinatnem sistemu. Te točki nam lahko predstavljata tudi krajevna vektorja in ker kompleksna števila seštevamo po komponentah, se to ujema s seštevanjem vektorjev.

Tako kot nam absolutna vrednost realnega števila predstavlja oddaljenost števila od 0, nam tudi tu absolutna vrednost kompleksnega števila predstavlja oddaljenost števila od izhodišča koordinatnega sistema. Drugače povedano: predstavlja nam "dolžino" tega števila. To lahko vidimo tudi iz enačbe  $|\alpha| = \sqrt{(\Re\alpha)^2 + (\Im\alpha)^2}$ , ki nam pravzaprav predstavlja pitagorov izrek.

Če si narišemo dve števili  $\alpha$  in  $\beta$  v koordinatni sistem in nato vanj vrišemo še njuno vsoto  $\alpha + \beta$  po paralelogramskem pravilu za seštevanje vektorjev, opazimo, da dobimo trikotnik s stranicami  $\alpha, \beta$  in  $\alpha + \beta$ . Za trikotnik pa vemo, da je vsota dolžin dveh stranic v trikotniku večja od dolžine tretje stranice. Iz tu izhaja ime trikotniška neenakost.

### 1.9.3 Polarni zapis

Lego točke v koordinatnem sistemu lahko podamo s poltrakom skozi izhodišče, na katerem leži točka in z razdaljo od izhodišča.

Poltrak je določen s kotom od pozitivnega poltraka abscisne osi do danega poltraka, meren v pozitivni smeri.

Kota  $\varphi$  in  $\varphi + 2k\pi$  določata isti poltrak.

Če  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , potem  $\varphi$  imenujemo *argument* kompleksnega števila.

Če zapišemo  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x &= |z| \cos \varphi & |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\y &= |z| \sin \varphi & \tan \varphi = \frac{x}{y} \Rightarrow \varphi &= \arctan \frac{x}{y} + k\pi, k \in \{0, 1\}\end{aligned}$$

$k = 1$  za kompleksna števila v II in III kvadrantu, sicer  $k = 0$ .

*Polarni zapis:*  $z = x + iy = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$|\cos \varphi + i \sin \varphi| = 1$$

$\cos \varphi + i \sin \varphi$  leži na *enotski krožnici* (krožnica s polmerom 1 in središčem v izhodišču).

#### Množenje v polarnem:

$$\begin{aligned}z &= |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\w &= |w|(\cos \psi + i \sin \psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}zw &= |z||w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) = \\&= |z||w|(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + i \sin \varphi \cos \psi + i \sin \psi \cos \varphi) = \\&= |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))\end{aligned}$$

Pri množenju z kompleksnimi števili se absolutni vrednosti zmnožita, kota pa seštejeta

## Konjugirana vrednost

$$\bar{z} = |z|(\cos \varphi - i \sin \varphi) = |z|(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

## Potenciranje

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Formuli pravimo *Moiivreova formula* (beremo "moavrova") in jo dokažemo z indukcijo.

## Korenjenje

Korenjenje nam predstavlja reševanje enačbe  $w^n = z$ , kjer  $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ . Rešitvam te enačbe pravimo  $n$ -ti koreni kompleksnega števila  $z$ .

Za reševanje najprej število  $z$  zapišemo v polarni obliki:  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . To storimo tudi s številom  $w$ :  $w = r(\cos \psi + i \sin \psi)$ .

To vstavimo v začetno enačbo:

$$r^n = (\cos n\psi + i \sin n\psi) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Kompleksni števili sta enaki, če sta enako oddaljena od izhodišča:

$$r^n = |z|$$

in ležita na istem poltraku. Ustrezna kota se razlikujeta kvečjemu za večkratnik  $2\pi$ :

$$n\psi = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

To pomeni, da dobimo:

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right), k \in \mathbb{Z}$$



$$\frac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi] \text{ za } k \in 0, 1, \dots, n.$$

*Dokaz:*

$$k \geq n \Rightarrow k = ln + o, l, o \in \mathbb{N}_0$$

$$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi ln}{n} + \frac{2\pi o}{n} = 2l\pi + \frac{2\pi o}{n}$$

To pomeni, da so različni  $n$ -ti koreni:  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ , če je  $z \neq 0$ .

*Opomba:* Oznake za koren ni, ker ni enolične rešitve.

Geometrijsko nam rešitve predstavljajo oglišča pravilnega  $n$ -kotnika, ki je včrtan krožnici s polmerom  $\sqrt[n]{|z|}$ .

Rešitvam enačbe  $w^n = 1$  rečemo  $n$ -ti koreni enote in ležijo na enotski krožnici.

*Osnovni izrek algebre:* Vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti ima kompleksno ničlo.

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, a_j \in \mathbb{C}$$

## 2 O množicah in preslikavah

*Definicija:* Naj bosta  $A$  in  $B$  množici.

Preslikava  $f$  iz množice  $A$  v množico  $B$  je predpis, ki vsakemu elementu iz množice  $A$  priredi natanko en element iz množice  $B$ .

Pišemo  $f : A \rightarrow B$

$$a \in A : a \mapsto f(a) \in B$$

$A$  imenujemo *domena* ali *definijsko območje*,  $B$  pa imenujemo *kodomena*.

Zaloga vrednosti je množica  $\{f(a); a \in A\} = Z_f$ .

*Definicija:* Naj bosta  $A$  in  $B$  množici in  $f : A \rightarrow B$  preslikava.

Pravimo, da je  $f$  *surjektivna*, če je  $B = Z_f$ .

Pravimo, da je  $f$  *injektivna*, če velja:

$$\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Ro lahko zapišemo tudi kot:

$$\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Pravimo, da je  $f$  *bijektivna* (*povratno enolična*), kadar je surjektivna in injektivna.

*Definicija:* Naj bosta  $A$  in  $B$  množici,  $f : A \rightarrow B$  bijektivna preslikava.

*Inverzna* preslikava  $f^{-1} : B \rightarrow A$  vsakemu elementu  $b \in B$  priredi tisti element  $a \in A$ , za katerega velja  $f(a) = b$ .

$f^{-1}$  je dobro definirana

$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$ , ker je  $f$  surjektivna. Ta  $a$  je enolično določen, ker je  $f$  injektivna;  $f(a_1) = f(a) \Rightarrow a_1 = a$ .

*Definicija:* Naj bosta  $A$  in  $B$  množici.

Pravim, da sta množici *ekvipolentni* ali enako močni, kadar obstaja bijektivna preslikava  $f : A \rightarrow B$ .

*Opomba:* če je  $f : A \rightarrow B$  bijektivna, potem je  $f^{-1} : B \rightarrow A$  bijekcija.

*Opomba:* končni množici imata enako moč, kadar imata enako število elementov.

*Definicija:* Če ima množica  $A$  enako moč kot  $\mathbb{N}$ , pravimo, da je  $A$  *števno neskončna*.

Če je  $A$  števno neskončna, potem obstaja  $\mathbb{N} \rightarrow A; n \mapsto f(n) = a_n$ .

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$$

pri čemer velja:  $j \neq k : a_j \neq a_k$ .

*Trditev:*  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  so števno neskončna.

Dokaz za  $\mathbb{Z}$ :  $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

Pri  $\mathbb{Q}$  je dovolj, da dokažemo za nenegativna števila, nato sledi podobno kot za  $\mathbb{Z}$ . Za pozitivna števila naredimo tabelo 1.

	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$

Tabela 1: Dokaz da so  $\mathbb{Q}$  števno neskončna

Nato števila povežemo po diagonalah  $(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2})$  in izločimo števila ko so se že ponovila (npr:  $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$ ).

*Izrek:*  $\mathbb{R}$  ni števno neskončna

*Dokaz:* Denimo da je. Potem  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \mathbb{R}$ .

$a_j$  zapišemo kot decimalni ulomek:

$$a_1 = d'_1 d_{11} d_{12} d_{13} \dots$$

$$a_2 = d'_2 d_{21} d_{22} d_{23} \dots$$

$$a_3 = d'_3 d_{31} d_{32} d_{33} \dots$$

$$x := 0'x_1x_2x_3\dots \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = 1, \text{ če je } d_{11} = 0, \text{ sicer } x_1 = 0x_2 = 1, \text{ če je } d_{22} = 0, \text{ sicer } x_2 = 0$$

Skonstruirali smo  $x \notin \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \rightarrow \leftarrow$ .

### 3 Številska zaporedja

DEFINICIJA: Zaporedje realnih števil je preslikava  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Zapis je:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) \text{ označimo z } a_n$$

Preslikava  $f$  je podana z  $a_1, a_2, a_3, \dots$

Zaporedje realnih števil podamo s *členi*  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , kar krajše zapišemo  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{a_n\}$ ,  $(a_n)_{n=1}^\infty$  ali pa kar zaporedje  $a_n$ .

OPOMBA: zaporedje  $\{a_n\}$  ni množica  $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ .

PRIMER:

1)  $a_n = 1, n \in \mathbb{N}$  *konstantno zaporedje*

To zaporedje ustreza preslikavi  $f(n) = 1, n \in \mathbb{N}$

- 2)  $b_n = n, n \in \mathbb{N}$  Takemu zaporedju pravimo, da je podan s splošnim členom. Narišemo lahko njegov graf  $\{(n, b_n); n \in \mathbb{N}\}$
- 3)  $d_1 = 1, d_2 = 1, d_{n+2} = d_n + d_{n+1}, n \in \mathbb{N}$  je *rekurzivno podano*. Predstavlja Fibonaccijevo zaporedje.
- 4) *aritmetično aporedje*

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, n \in \mathbb{N}$$

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$$

To lahko zapišemo tudi z rekurzivno zvezo:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N} \\ a_1 = a_1 \end{cases}$$

- 5) *geometrijsko zaporedje*

$$a_n = a_1 q^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

$$a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots$$

Zapisano z rekurzivno zvezo:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n q, n \in \mathbb{N} \\ a_1 = a_1 \end{cases}$$

DEFINICIJA:

- Zaporedje  $a_n$  je *navzgor omejeno* če je zaloga vrednosti preslikave  $n \mapsto a_n$  navzgor omejena, t.j.:

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$$

- *Natančna zgornja meja* zaporedja  $a_n$  je natančna zgornja meja zaloge vrednosti preslikave  $n \mapsto a_n$  in jo označimo s  $\sup a_n$ .
- Število  $M$  imenujemo *zgornja meja* zaporedja  $a_n$ .
- Analogno definiramo navzdol omejeno, natančno spodnjo mejo  $\inf a_n$ ,  $\max$  in  $\min$ .

PRIMER:

$$a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

navzgor omejeno z 1:  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq 1$

navzdol omejeno z 0:  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \geq 0$

$\sup \frac{1}{n} = 1$ , ker je 1 zgornja meja in  $a_1 = 1$ .

$\inf \frac{1}{n} = 0$  je spodnja meja.

Izberemo  $\varepsilon > 0$ . Dokazujemo da  $\varepsilon$  ni spodnja meja. Po arhimedski lastnosti:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\max \frac{1}{n} = 1$$

$\min \frac{1}{n}$  ne obstaja.

DEFINICIJA: Zaporedje  $a_n$  konvergira proti  $a \in \mathbb{R}$ , če:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Število  $a$  imenujemo *limita zaporedja* in označimo z:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Če zaporedje  $a_n$  konvergira, je  $a_n$  *konvergentno zaporedje*. Sicer je *divergentno zaporedje*.

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Zunaj  $\varepsilon$ -te okolice je kvečjemo končnomnogo čelnov.

Zapis  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  pomeni, da zaporedje konvergira in njegova limita je  $a$ . To ne velja, če zaporedje divergira, ali pa njegova konvergira in njegova limita ni  $a$ .

PRIMERI:

1)  $a_n = 1, n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0 : |a_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$  za vse  $n \in \mathbb{N}$ .

2)  $b_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Po arhimedski lastnosti:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists m : \frac{1}{m} < \varepsilon$$

$$n \geq m : \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$$

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m : \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

3)  $c_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

ker:

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

po prejšnjem primeru

4)  $d_n = (-1)^n$

zaporedje divergira

Denimo, da je  $x$  limita tega zaporedja:

- če  $x = -1 : \varepsilon = 1$ , zunaj  $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon) = (-2, 0)$  ležijo vsi sodi členi zaporedja, ki jih je neskončno, zato -1 ni limita.
- Analogno za  $x = 1$ .
- $x \neq 1 \wedge x \neq -1$

$$d = \min\{|x - 1|, |x + 1|\}$$

velja:

$$1 \notin (x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2})$$

$$-1 \notin (x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2})$$

Vsi členi zaporedja ležijo izven tega intervala, zato  $x$  ni limita. Sledi:  $d_n$  divergira.

TRDITEV: Konvergentno zaporedje ima eno samo limito.

DOKAZ: Denimo da sta  $a$  in  $b$  limiti zaporedja  $a_n$ .

Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$  :

$$\exists n_a \forall n : n > n_a \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\exists n_b \forall n : n > n_b \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$$

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 : |a - b| < 2\varepsilon \Rightarrow |a - b| = 0 \Rightarrow a = b$$

TRDITEV: Konvergentno zaporedje je omejeno

DOKAZ: Denimo, da je  $a_n$  konvergentno zaporedje z limito  $a$ . Izberemo  $\varepsilon = 1$  in po definiciji velja:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon = 1$$

Lahko konstruiramo množico členov, ki so izven  $\varepsilon$ -te okolice  $a$ . Tej množici dodamo tudi zgornjo mejo okolice  $a + \varepsilon = a + 1$ . Ker je izven okolice končnomnogo členov, ima ta množica maksimum:

$$\max \{a + 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\} = M$$

Za vsak  $n$  velja:  $a_n \leq M$ , ker če  $n \leq n_0 - 1$ , je  $a_n$  v zgornji množici, ki smo ji določili maksimum, če  $n \geq n_0$  je  $a_n$  v okolici  $a$ , to pomeni  $a_n < a + 1$ ,  $a + 1$  je v zgornji množici, ki smo ji določili maksimum.

Analogno lahko naredimo za spodnjo mejo. □

Ni vsako omejeno zaporedje konvergentno. Primer:  $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ .

DEFINICIJA: Naj bo  $a_n$  zaporedje. Število  $s$  je *stekališče zaporedja*  $a_n$ , če v vsaki okolici  $s$  leži neskončno členov zaporedja.

PRIMER:  $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

Vemo, da ni konvergentno. -1 in 1 sta stekališči  $a_n$ , ker vsi členi z lihimi indeksi ležijo na  $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$  za  $\varepsilon > 0$ . Analogno za 1 in sode člene.

OPOMBI:

- 1)  $s$  je stekališče  $\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$  je  $|a_n - s| < \varepsilon$  izpolnjen za neskončno mnogo indeksov  $n$ .
- 2) Če je zaporedje  $a_n$  konvergentno z limito  $a$ , potem je  $a$  edino stekališče zaporedja  $a_n$ , ker na  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  ležijo vsi, razen končno mnogo členov.

PRIMERI:

- 1) Zaporedje s 3 stekališči:  $a_n = n \bmod 3$ .
- 2) Zaporedje z 2 stekališčama, ki ima same različne člene:  $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
- 3) Zaporedje z neskončno stekališči:

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Stekališča zaporedja so vsa naravna števila.

- 4) Ali ima zaporedje neštavno stekališč? Da.

Obstaja bijekcija  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ .

$$\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Stekališča zaporedja  $a_n : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$  na  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  leži neskončno mnogo  $\mathbb{Q}$  števil, torej neskončno mnogo členov zaporedja. Zato je  $x$  stekališče.

- 5) Divergentno zaporedje brez stekališč:  $a_n = n$ .

TRDITEV: Če vsaka okolica števila  $s \in \mathbb{R}$  vsebuje člen zaporedja  $a_n$ ,  $a_n \neq s$ , potem je  $s$  stekališče  $a_n$ .

DOKAZ: Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$ . Obstaja  $n_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1} \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ ,  $a_{n_1} \neq s$ . Definiramo razdaljo:  $d_1 = |s - a_{n_1}|$ . Obstaja  $n_2 : a_{n_2} \in (s - d_1, s + d_1)$ ,  $a_{n_2} \neq s$ ,  $n_1 \neq n_2$ . Postopek nadaljujemo  $\square$ .

IZREK: Vsako omejeno zaporedje ima stekališče.

DOKAZ: Ker je zaporedje  $a_n$  omejeno, ima spodnjo mejo  $m$  in zgornjo mejo  $M$ .

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}; a_n < u \text{ je izpolnjeno za končno mnogo členov zaporedja}\}$$

$$m \in \mathcal{U}, M + 1 \notin \mathcal{U}$$

$\Rightarrow \mathcal{U}$  je navzgor omejena in neprazna, torej obstaja  $\sup \mathcal{U} = s$ .

Izberemo  $\varepsilon > 0$ :



- $s + \varepsilon \notin \mathcal{U} : a_n < s + \varepsilon$  je izpolnjena za neskončno mnogo členov.
- $s - \varepsilon : \exists u \in (s - \varepsilon, s] \cap \mathcal{U}$ . Ker  $u \in \mathcal{U}$ ,  $s - \varepsilon < u$ , je  $s - \varepsilon \in \mathcal{U}$ , zato velja da  $a_n < s - \varepsilon$  velja za končno mnogo členov zaporedja.

Sledi: na  $[s - \varepsilon, s + \varepsilon)$  leži neskončno mnogo členov zaporedja.  $s$  je stekališče.

□

### 3.1 Monotona zaporedja

DEFINICIJA:

- Zaporedje  $a_n$  je *naraščajaoče*, če velja:  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$ .
- Zaporedje  $a_n$  je *padajaoče*, če velja:  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$ .
- Zaporedje  $a_n$  je *strogo naraščajaoče*, če velja:  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ .
- Zaporedje  $a_n$  je *strogo padajaoče*, če velja:  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ .
- Zaporedje  $a_n$  je *monotono*, če je zaporedje bodisi naraščajaoče, ali padajaoče.
- Zaporedje  $a_n$  je *strogo monotono*, če je zaporedje bodisi strogo naraščajaoče, ali strogo padajaoče.

PRIMER:

- 1)  $a_n = -n$  (strogo) padajaoče
- 2)  $a_n = 1$  naraščajaoče ali padajaoče
- 3)  $a_n = \frac{1}{n}$  je padajaoče in navzdol omejeno
- 4)  $a_n = (-1)^n$  ni ne padajaoče ne naraščajaoče

TRDITEV: Monotono zaporedje je konvergentno natanko tedaj, kadar je omejeno. Če je zaporedje  $a_n$  naraščajaoče in navzgor omejeno potem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n$$

Če je zaporedje  $a_n$  padajoče in navzdol omejeno potem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf a_n$$

Dokaz za v eno stran že vemo.

DOKAZ: (v drugo stran ekvivalence)

Denimo, da je zaporedje  $a_n$  naraščajoče in navzgor omejeno. Ker je  $a_n$  navzgor omejeno:  $\exists a := \sup a_n$ .

Dokazujemo  $a_n$  konjugira proti  $a$

Izberemo poljubene  $\varepsilon > 0$ . Ker  $a - \varepsilon$  ni zgornja meja zaporedja:  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$ . Ker je zaporedje  $a_n$  naraščajoče in navzgor omejeno z  $a$  velja:

$$\begin{aligned} n \geq n_0 : a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a \\ \forall n \geq n_0 a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{aligned}$$

Sledi:  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

□

Analogno za navzdol omejeno padajoče zaporedje.

PRIMER:  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}$

Najprej dokažemo, da je  $a_n$  padajoče zaporedje, t.j:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}} &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \sqrt{n} &\leq \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

Vemo, da je navzdol omejeno z 0. Ker je padajoče in navzdol omejeno, je konvergentno.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Vemo:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf a_n = a$

Vemo, da  $a$  ni negativen, ker so vsi členi zaporedja zaporedja pozitivni. Če bi  $a > 0$ :

$$\begin{aligned} a_n &\geq a \\ \frac{1}{\sqrt{n}} &\geq a \\ \frac{1}{n} &\geq a^2 > 0 \text{ za vse } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Zaradi arhimedske lastnosti vemo, da to ni res.  $\rightarrow \leftarrow$

Torej  $a$  ni negativen in  $a$  ni pozitivne, torej  $a = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

## 3.2 Podzaporedja

Podzaporedje zaporedja  $a_n$  je zaporedje, ki vsebuje samo nekatere člene zaporedja  $a_n$  v enakem vrstnem redu.

$$a_1, \cancel{a_2}, \cancel{a_3}, a_4, \dots$$

DEFINICIJA: Naj bo  $a_n$  zaporedje in naj bo  $n_j$  strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Zaporedje  $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$  je podzaporedje  $(a_n)_{n=1}$ .

PRIMERI:

1)  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  zaporedje

podzaporedje  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

2)  $b_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$  ni konvergentno, ima dve stekališči

$b_{2n-1} = -1$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ :  $b_1, b_3, b_5, \dots$  je podzaporedje lihih členov.

Podobno lahko naredimo podzaporedje sodih členov. Podzaporedja lihih in sodih členov sta konvergentna.

TRDITEV Naj bo  $a_n$  zaporedje. Če je  $a_n$  konvergentno, potem je konvergentno tudi vsako njegovo podzaporedje  $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$  in velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j}$$

DOKAZ: Naj bo  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$ . Vemo:  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

Potem velja:

$$j \geq n_0 : |a_{n_j} - a| < \varepsilon$$

ker je  $n_j \geq n_{n_0} \geq n_0$

OPOMBA: Če neko podzaporedje danega zaporedja konvergira, ni nujno, da je dano zaporedje konvergentno. Primer:  $(-1)^n$ .

DEFINICIJA: *Rep zaporedja* je zaporedje, ki ga dobimo iz danega zaporedja tako, da izpustimo prvih končno mnogo členov.

Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, kadar je konvergenten njegov rep.

PRIMER:  $1, 2, 4, 16, 36, 16, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

### 3.3 Računanje z zaporedji

TRDITEV: Naj bosta  $a_n$  in  $b_n$  konvergentni zaporedji. Tedaj konvergirajo tudi naslednja zaporedja:

- $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots$
- $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n, \dots$
- $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n, \dots$

in velja:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

DOKAZ

Vsota: Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0 : a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq 2\varepsilon \text{ za } n \geq \max\{n_a, n_b\}$$

□

Produkt:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| = |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \leq |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)|$$

Ker je  $b_n$  konvergentno, je omejeno:  $\exists M_b \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < M_b$

$$\leq M_b |a_n - a| + |a| |b_n - b| \leq \varepsilon \text{ če } n \geq \max\{n_a, n_b\}$$

ker vemo:  $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2M_b}$  za  $n \geq n_a$  in  $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2|a|}$  za  $n \geq n_b$ .

□

POSLEDICA: Če je  $a_n$  konvergentno zaporedje in  $\lambda \in \mathbb{R}$ , potem je zaporedje  $\lambda a_1, \lambda a_2, \dots$  konvergentno in velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Dokaz je enak kot dokaz za produkt limit, kjer  $b_n = \lambda$ .

Ker veljajo pravila za dva člena, veljajo tudi za končno mnogo.

TRDITEV: Naj bo  $a_n$  konvergentno zaporedje in  $\forall n \in \mathbb{N} a_n \neq 0$  in  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . Potem je zaporedje

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$$

konvergentno in velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

DOKAZ:  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - a_n}{a_n a} \right| = \frac{|a - a_n|}{|a| |a_n|} \leq \frac{|a - a_n|}{|a| \eta} < \varepsilon \text{ za dovolj velike } n$$

$|a_n|$  lahko omejimo stran od 0, t.j.:  $\exists \eta > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \geq \eta$

Konstrukcija  $\eta$ : Zunaj  $\left( a - \frac{|a|}{2}, a + \frac{|a|}{2} \right)$  leži končno mnogo členov zaporedja.

$$\eta := \min \left\{ \left| a - \frac{|a|}{2} \right|, \left| a + \frac{|a|}{2} \right|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}| \right\}$$

POSLEDICA: Naj bosta  $a_n$  in  $b_n$  konvergentni zaporedji,  $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ . Potem je zaporedje  $\frac{a_n}{b_n}$  konvergentno in velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

IZREK O SENDVIČU: Naj bodo  $a_n, b_n, c_n$  taka zaporedja, da

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n$$

Če sta zaporedji  $a_n$  in  $c_n$  konvergentni in  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ , potem je  $b_n$  konvergentno in velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

PRIMER:  $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ 0 &\leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}\end{aligned}$$

ker  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$  in  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

DOKAZ IZREKA:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

Vzamemo poljuben  $\varepsilon > 0$ :

$$\exists n_a : n \geq n_a \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\exists n_c : n \geq n_c \rightarrow |c_n - L| < \varepsilon$$

Če vzamemo  $n \geq \max\{n_a, n_c\} : L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$ .

Torej  $b_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  za vse  $n \geq \max\{n_a, n_c\}$ . Zato  $b_n$  konvergira proti  $L$ .

TRDITEV: Naj bosta  $a_n$  in  $b_n$  konvergetni zaporedji. Če  $a_n \leq b_n$  za vse  $n \in \mathbb{N}$ , potem velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . **Opomba:** Trditev s strogimi neenačaji v splošnem ne velja.

$$\begin{aligned}a_n &= 0, b_n = \frac{1}{n}, a_n < b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n\end{aligned}$$

PRIMER: Obravnavaj konvergenco zaporedja (Newtnova formula):

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}\end{aligned}$$

Zaporedje je s to rekurzivno zvezo dobro definirano, t.j.:  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} > 0$$

Če  $x_n \neq 0$  potem  $x_{n+1} \neq 0$ . To lahko preverimo tudi z indukcijo.

Dokažemo lahko, da:  $x_n$  je padajoče

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

Če je  $\frac{x_n^2 - 2}{2x_n} > 0$ , potem je padajoče. Dovolj je dokazati, da je  $x_n^2 - 2 \geq 0$ , ker tedaj iz rekurzivne zveze sledi:  $x_{n+1} \leq x_n$ .

$$x_{n+1}^2 = \left( \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \right)^2 - 2 = \frac{x_n^4 + 4x_n^2 + 4 - 8x_n^2}{4x_n^2} = \frac{x_n^4 - 4x_n^2 + 4}{4x_n^2} = \frac{(x_n^2 - 2)^2}{4x_n^2} \geq 0$$

$x_n$  je padajoče in navzdol omejeno, zato je konvergentno. Torej lahko izračunamo limito. Velja:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \\ 2x_n x_{n+1} &= x_n^2 + 2 \end{aligned}$$

in vemo:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: x$$

Ker je  $x_{n+1}$  rep zaporedja  $x_n$ , je konvergentno in ima isto limito kot  $x_n$ . Ker s konvergentnimi zaporedji lahko računamo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n x_{n+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + 2) \\ 2x^2 &= x^2 + 2 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

vemo  $x \geq 0$ , torej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$$

IZREK: Naj bo  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $a_n < b_n$  zaporedje vloženih zaprtih intervalov, t.j.:

$$\forall n \in \mathbb{N} : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$$

Denimo, da zaporedje njihovih dolžin konvergira proti nič:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

Tedaj obstaja natanko eno število  $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

DOKAZ:  $a_n$  je naraščajoče zaporedje,  $b_n$  je padajoče zaporedje. Obe zaporedji sta omejeni (navzdol z  $a_1$  in navzgor z  $b_1$ ). Zato sta obe konvergentni. Zato  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: c \\ \forall n \in \mathbb{N} : c &\in I_n \\ c &= \sup a_n : a_n \leq c \\ c &= \inf b_n : c \leq b_n \\ c &\in [a_n, b_n] \end{aligned}$$

Dokaz, da je število  $c$  eno samo doma. □

IZREK: Naj bo  $a_n$  zaporedje. Število  $b$  je stekališče zaporedja  $a_n$  natanko tedaj, kadar obstaja podzaporedje zaporedja  $a_n$ , ki konvergira proti  $s$ .

DOKAZ:

( $\Leftarrow$ ) Denimo, da podzaporedje  $a_{n_j}$  konvergira proti  $s$ . Dokazujemo, da je  $s$  stekališče  $a_n$ .

Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$ . Obstaja  $j_0$ , da za vsak  $j \geq j_0$  velja:

$$a_{n_j} \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$$

Torej je na  $s - \varepsilon, s + \varepsilon$  neskončno členov zaporedja. Zato je  $s$  stekališče.

( $\Rightarrow$ ) Denimo, da je  $s$  stekališče zaporedja  $a_n$ . Za dokaz bomo skonstruirali tako zaporedje, da bo konvergiralo proti  $s$ . Naj bo

$$U_m = (s - \frac{1}{m}, s + \frac{1}{m})$$

Na  $U_1$  obstaja neskončno mnogo členov zaporedja, zato lahko izberemo  $a_{n_1} \in U_1$ .

Na  $U_2$  obstaja neskončno mnogo členov zaporedja, zato obstaja:

$$n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} \in U_2$$

Ta postopek induktivno nadaljujemo. Recimo, da že imamo:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \text{ da } n_1 < n_2 < \dots < n_k \text{ in vsak } a_{n_j} \in U_j$$

Na intervalu  $U_{k+1}$  obstaja neskončno členov zaporedja, zato obstaja  $n_{k+1} > n_k$  in  $a_{n_{k+1}} \in U_{k+1}$

Podzaporedje  $a_{n_1}$  konvergira proti  $s$  po konstrukciji. □



### 3.4 Cauchyjev pogoj

Zanima nas opis konvergence brez sklicevanja na limito.  $a_n$  je konvergentno, če obstaja  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

DEFINICIJA: Zaporedje  $a_n$  izpolnjuje *Cauchyjev pogoj*, če velja:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Če zaporedje izpolnjuje Cauchyjev pogoj, pravimo, da je zaporedje *Cauchyjevo*.

IZREK: Zaporedje realnih števil  $a_n$  je konvergentno natanko tedaj, kadar je Cauchyjevo.

**Opomba:** Za zaporedje racionalnih števil ta izrek ne velja. Obstaja zaporedje  $q_n, q_n \in \mathbb{Q}$ ,  $q_n$  je Cauchyjevo ni pa konvergentno v  $\mathbb{Q}$ . Npr. zaporedje racionalnih približkov za  $\sqrt{2}$ .

DOKAZ:

( $\Rightarrow$ ) Denimo, da zaporedje  $a_n$  konvergira proti  $a$ . Za poljuben  $\varepsilon > 0$  po definiciji konvergence velja:

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Za  $n, m \geq n_0$  velja:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < 2\varepsilon$$

Torej je zaporedje Cauchyjevo.

( $\Leftarrow$ ) Denimo, da je  $a_n$  Cauchyjevo.

Potem je  $a_n$  omejeno

$$\exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < 1 = \varepsilon$$

Zato je  $|a_n - a_{n_0}| < 1$  za vse  $n \geq n_0$ . (Namesto  $m$  vzamemo  $n_0$ , saj vstreza pogojem)

Torej vsi členi razen  $a_1, a_2, \dots, a_{n_1}$  ležijo na  $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1)$ . Zato je  $a_n$  omejeno.

Vemo, da ima vsako omejeno zaporedje stekališče  $s$ . Trdimo  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$ . Denimo, da je zunaj  $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$  neskončno členov zaporedja. Potem bi zunaj  $s - \varepsilon, s + \varepsilon$  obstajalo omejeno podzaporedje zaporedja  $a_n$ , zato ima to podzaporedje stekališče  $t, t \neq s$ .  $t$  je stekališče  $a_n$ .

Cauchyjevo stekališče nima nikoli dveh različnih stekališč.

Denimo, da sta  $s$  in  $t$  stekališči.

$$d = |s - t|$$

Na  $(s - \frac{d}{3}, s + \frac{d}{3})$  leži neskončno členov zaporedja.

Na  $(t - \frac{d}{3}, t + \frac{d}{3})$  leži neskončno členov zaporedja.

Če bi bilo zaporedje Cauchyjevo,  $\exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \frac{d}{3}$ .

Pridemo v protislovje s prejšnjima dvema izjavama.  $\rightarrow \leftarrow$

□

**IZREK:** Vsako omejeno zaporedje, ki ima eno stekališče je konvergentno (v dokazu prejšnjega izreka (če si naredil domačo nalogo, tudi na dolgo)).

**Opomba:** Izrek (zelo očitno) ne velja za neomejena zaporedja.

**DEFINICIJA:** Naj bo  $a_n$  zaporedje. Pravimo, da zaporedje  $a_n$  *konvergira proti neskončno*, če velja:

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n \geq M$$

V tem primeru pišemo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Zaporedje, ki konvergira proti neskončno **ni** konvergentno. Z drugimi besedami: zaporedij, ki konvergirajo proti  $\infty$  **ne** štejemo med konvergentna zaporedja.

Podobno definiramo tudi  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ :

$$\forall m \in \mathbb{R} \exists n_0 \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n \leq m$$

**PRIMER:**  $a_n$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

$b_n = n^{(-1)^n}$  ne konvergira proti neskončno.

### Nekaj posebnih zaporedij:

TRDITEV: Naj bo  $a \in \mathbb{R}$

- 1)  $|a| < 1 \Rightarrow a^n$  konvergentno z limito 0
- 2)  $a > 1 \Rightarrow a^n$  konvergira proti  $\infty$

DOKAZ:

- 1)  $a \in (0, 1)$  zaporedje  $a^n$  je padajoče:  $a^{n+1} < a^n$  in navzdol omejeno z 0, zato je konvergentno.

Naj bo  $b_n = a^n$  in  $b_{n+1} = a^{n+1} = ab_n$ . Vemo:

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Torej:

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (ab_n) = a \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab$$
$$b(1 - a) = 0$$

Ker  $a \neq 1$  velja  $b = 0$ .

Če  $a \in (-1, 0)$  velja:

$$-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n$$

Za  $|a|^n$  velja zgoren dokaz. Nato lahko uporabimo izrek o sendviču, zaradi katerega velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

- 2)  $a > 1 : a^n$  je naraščajoče

Če bi bilo omejeno, bi bilo konvergentno. Po prejšnjem dokazu bi dobili  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , kar ni mogoče, ker je zaporedje naraščajoče in so vsi členi pozitivni. Torej  $a_n$  ni omejeno.

Zato  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$

Ker je  $a_n$  neomejeno, za  $M \in \mathbb{R}$  obstaja  $n_0 : a^{n_0} \geq M$ . Ker je naraščajoče velja:

$$\forall n \geq n_0 : a^n \geq M$$

TRDITEV: Za vsak  $a > 0$  in vsak  $m \in \mathbb{N}$  obstaja natanko en  $x_0$ , ki reši enačbo  $x^m = a$ . To rešitev označimo z  $\sqrt[m]{a}$ . Veljajo osnovne lastnosti za  $\sqrt[m]{\cdot}$ :

$a, b > 0, m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sqrt[m]{ab} &= \sqrt[m]{a} \sqrt[m]{b} \\ \sqrt[n]{a^m} &= (\sqrt[n]{a})^m \\ \sqrt[nm]{a} &= \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \\ \sqrt[np]{a^{nq}} &= \sqrt[p]{a^q} \\ \sqrt[p]{a^q} \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[pn]{a^{qn}} \sqrt[pn]{a^{mp}} = \sqrt[pn]{a^{qn+mp}}\end{aligned}$$

DEFINICIJA: Naj bo  $a > 0, a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$ . Pišemo  $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

$$\begin{aligned}a^0 &= 1 \\ a^{-\frac{n}{m}} &= \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}\end{aligned}$$

Naj bo  $q \in \mathbb{Q}$ . Obstajata  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} : q = \frac{m}{n}$ .

$$a^q = a^{\frac{m}{n}}$$

**Opomba:** Je dobro definirano, ker ni odvisno od izbire ulomka (ena izmed lastnosti nam dovoljuje "krajšanje")

TRDITEV: Naj bo  $a \in \mathbb{R}, a > 0, p, q \in \mathbb{Q}$ . Velja:

$$\begin{aligned}a^{pq} &= (a^p)^q \\ a^p a^q &= a^{p+q} \\ a^p b^p &= (ab)^p\end{aligned}$$

TRDITEV: Za  $a \in \mathbb{R}, a > 0$  velja:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

DOKAZ:  $a > 1$ :

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} &\geq \sqrt[n+1]{a} \\ a^{n+1} &\geq a^n\end{aligned}$$

Zaporedje je padajoče. Ker je navzdol omejeno z 0 (tudi z 1), je konvergetno in njegova limiti  $\geq 1$ .

Denimo, da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = L > 1$ :

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} &\geq L > 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : a &\geq L^n\end{aligned}$$

Ker je  $L > 1$ ,  $L^n$  konvergira proti  $\infty$ , kar pomeni, da bo presegel  $a$ . Torej protislovje  $\longleftrightarrow$ .

Zato je  $L = 1$ .

Za  $a < 1$  je podoben dokaz (DN). □

TRDITEV:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

DOKAZ:

$$\begin{aligned} n &= \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + 1\right)^n = \\ &= 1 + \binom{n}{1} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \binom{n}{2} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + \dots \geq \\ &\geq \binom{n}{2} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 = \frac{n(n-1)}{2} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \end{aligned}$$

Dobili smo:

$$0 \leq \frac{n(n-1)}{2} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \leq n$$

torej velja:

$$0 \leq \frac{n-1}{2} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \leq 1$$

za  $n \geq 2$ .

Po izeku o sendviču velja:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$  □

IZREK: Zaporedje  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  je konvergentno. Njegovo limito označimo z:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

DOKAZ:  $a_n$  je naraščajoče

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{nnnn\dots n} \end{aligned}$$

Ker je v števu in imenolacu tega ulomka enako števil, lahko naredimo rečemo:

$$\frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{nnnn\dots n} = \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{k-1}$$

Torej velja:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}(\dots)$$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}(\dots) + \frac{1}{(n+1)!}(\dots)$$

Prva dva člena sta enaka, nato pa se začnejo razlikovati v oklepajih:

$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n+1}$$

Prav tako ima zaporedje  $a_{n+1}$  en člen več kot zaporedje  $a_n$ . Iz tega sledi:  
 $a_n \leq a_{n+1}$

$a_n$  je navzgor omejeno

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

Sledi, da je  $a_n$  konvergentno.

### 3.5 Potence z realnimi eksponenti

$$a > 0, x \in \mathbb{R}, a^x \qquad r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x, r_n \in \mathbb{Q}$$

- Če  $r_n$  konvergira, potem  $a^{r_n}$  konvergira.
- Če  $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x, s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x, r_n, s_n \in \mathbb{Q}$ , potem velja:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}, \text{ kjer } r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty}, r_n \in \mathbb{Q}$$

TRDITEV: Naj bo  $a \in \mathbb{R}, a > 0$ . Potem:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in \mathbb{Q}, |h| < \delta : |a^h - 1| < \varepsilon$$

DOKAZ:  $a > 0, \varepsilon > 0$ ,

Vemo:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ . Če  $\sqrt[n]{a}$  zapišemo kot  $a^{\frac{1}{n}}$ , potem po definiciji limite velja:

Za  $\varepsilon > 0 \exists n_0 : |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$  za vse  $n \geq n_0$ .

Naj bo  $h \in \mathbb{Q}, 0 < h \leq \frac{1}{n}$ . Za  $a > 1$  velja:

$$0 < a^h - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

in za  $a < 1$  velja:

$$0 < 1 - a^h < 1 - a^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

Spomnimo se: če  $a < 1$  in  $n, m \in \mathbb{Q}, n < m$  potem velja:  $a^m < a^n$ . V našem primeru to pomeni:

$$h < \frac{1}{n} : a^{\frac{1}{n}} < a^h$$

Zato pri  $1 - a^{\frac{1}{n}}$  od 1 odštejemo več, kot pri  $1 - a^h$ , torej neenakost velja.

Sklep zgornjih dveh dokazov je:

$$\forall h \in \left(0, \frac{1}{n}\right) : |a^h - 1| < \varepsilon$$

Podobno lahko dokažemo za  $h < 0$ . □

**TRDITEV:** Naj bo  $a > 0$  in naj bo  $r_n$  konvergentno zaporednje racionalnih števil z limito  $r \in \mathbb{R}$ . Potem velja naslednje:

- (1) Zaporedje  $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots$  konvergira.
- (2) Če je  $r \in \mathbb{Q}$ , potem je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^r$ .

**DOKAZ:**

- (1) za primer  $a > 1$ :

$a^{r_n}$  je omejeno zaporedje za primer  $a > 1$ .

$r_n$  je omejeno zaporedje, ker je konvergentno: obstaja  $M \in \mathbb{Q}$ , da velja:

$$\forall n \in \mathbb{N} : r_n \leq M$$

iz tega sledi:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a^{r_n} \leq a^M$$

$a^{r_n}$  je Cauchyjevo zaporedje (od tod sledi, da je konvergentno)

Naj bo  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |a^{r_n} - a^{r_m}| &= \\ &= |a^{r_m}(a^{r_n-r_m} - 1)| = |a^{r_m}| \cdot |a^{r_n-r_m} - 1| \leq \\ &\leq a^M |a^{r_n-r_m} - 1| < \varepsilon \end{aligned}$$

Velja, ker po prejšnji trditvi obstaja  $\delta > 0$ , tako da velja:

$$|\underbrace{r_n - r_m}_h| < \delta \Rightarrow |a^{\overbrace{r_n - r_m}^h} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^M}$$

Ker je  $r_n$  konvergentno, je Cauchyjevo, zato obstaja  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tako da velja

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 : |r_n - r_m| < \delta$$

Podobno naredimo za  $a < 1$ .

(2) Če je  $r \in \mathbb{Q}$ :

$$|a^r - a^{r_n}| = |a^r(1 - a^{r_n-r})| = |a^r| |1 - a^{r_n-r}| < \varepsilon$$

za  $\varepsilon > 0$ . Torej mora veljati:

$$|1 - a^{r_n-r}| < \frac{\varepsilon}{a^r}$$

Po trditvi od prej:

$$\exists \delta > 0 \forall h \in \mathbb{Q}, |h| < \delta : |a^h - 1| < \frac{\varepsilon}{a^r}$$

Ker  $r_n$  konvergira proti  $r$ , obstaja  $n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |r_n - r| < \delta$

□

TRDITEV: Naj bo  $a > 0$  in naj bosta  $r_n$  in  $s_n$  zaporedji racionalnih števil z isto limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Potem velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$$

DOKAZ: ideja dokaza je:

$$1 = a^0 = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} r_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n} = \frac{a^{\lim_{n \rightarrow \infty} r_n}}{a^{\lim_{n \rightarrow \infty} s_n}}$$



To še ni dokaz, ker ne vemo kaj je  $a^{\lim_{n \rightarrow \infty} r_n}$ , saj se lahko zgodi, da je limita zaporedja  $r_n$  iracionalno število, za kar še nismo definirali potenciranja.

**Vemo:**  $a^{r_n - s_n} = \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}}$  za vse  $n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n - s_n) = 0$ , zato  $1 = a^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n - s_n}$ . Ta neenakost velja zaradi prejšnje trditve. Ker je  $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n - s_n)$  racionalno število, velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n - s_n} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n - s_n)} = a^0$

$$1 = a^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n - s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}}$$

**Sklep:**

$$1 = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$$

To seveda velja, samo če  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} \neq 0$ .

Ker je  $s_n$  konvergentno, je omejeno:

$$\exists M \in \mathbb{N} : |s_n| < M \Rightarrow a^{-M} \leq a^{s_n} \leq a^M$$

zato za  $a > 1$  velja:

$$a^{-M} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} \leq a^M$$

za  $0 < a < 1$  velja podobno:

$$a^M \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} \leq a^{-M}$$

torej je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$  pozitivno število.

□

**DEFINICIJA:** Naj bo  $a > 0$  in  $r \in \mathbb{R}$ . Denimo, da zaporedje  $r_n$  racionalnih števil konvergira proti  $r$ . Potem definiramo:

$$a^r = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$$

**OPOMBE:**

- 1) Definicija je dobra, ko za različni konvergentni zaporedji racionalnih števil z isto limito, zaporedji  $a^{r_n}$  in  $a^{s_n}$  konvergirata k istemu številu.

- 2) Če je  $r \in \mathbb{Q}$ , se nova definicija ujema z definicijo za racionalne potence.
- 3) Računska pravila za računanje z racionalnimi eksponenti se prenesejo na računanje z realnimi eksponenti.

TRDITEV: Naj bo  $\alpha > 0$ . Potem je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ .

DOKAZ: za domačo nalogo. Če si priden si ga naredil, če si pridna se učiš iz svojih zapiskov, ker znate ženske brati za sabo (naredimo se fizike in zanemarimo, da zna Nik brati za sabo kljub temu, da ni ženskega spola<sup>5</sup>)).

TRDITEV: Naj bo  $q \in \mathbb{Q}, q > 1$  in  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Potem je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$$

DOKAZ:

$$a_n = \frac{n^\alpha}{q^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^\alpha}{q^{n+1}} = \frac{(n+1)^\alpha}{q n^\alpha} \frac{n^\alpha}{q^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{q} a_n$$

Vemo, da  $\frac{1}{q} < 1$

Sledi:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q} < 1$$

Zato bo od nekod naprej  $a_{n+1} < a_n$ .

Ker je  $\forall n \in \mathbb{N} : 0a_n > 0$ , je  $a_n$  konvergentno. Torej obstaja

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

in velja:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q} a_n \right) = \frac{1}{q} L$$

Torej lahko poračunamo  $L$ :

$$L = \frac{1}{q} L$$

$$L - \frac{1}{q} L = 0$$

$$L(1 - \frac{1}{q}) = 0$$

---

<sup>5</sup>lahko se sam odločiš ali zanemarimo njegov obstoj, ali pa samo njegov spol

Ker  $1 - \frac{1}{q} \neq 1$ , velja  $L = 0$

□

### 3.6 Zgornja in spodnja limita

DEFINICIJA: Naj bo  $a_n$  omejeno zaporedje in  $\mathcal{S}$  množica njegovih stekališč. Natančno zgornjo mejo množice  $\mathcal{S}$  imenujemo *zgornja limita* ali *limes superior* in pišemo:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sup \mathcal{S}$$

*Spodnja limita* ali *limes inferior* je natančna spodnja meja od  $\mathcal{S}$  in pišemo

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \inf \mathcal{S}$$

OPOMBI:

- Ker je zaporedje  $a_n$  omejeno,  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ .
- Množica  $\mathcal{S}$  je omejena, ker je zaporedje omejeno (z zgornjo in spodnjo mejo zaporedja).

DEFINICIJA:

(1) Če je zaporedje  $a_n$  navzgor neomejeno, potem definiramo:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

(2) Če je zaporedje  $a_n$  navzdol neomejeno, potem definiramo:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

(3) Denimo, da je  $a_n$  navzgor neomejeno in navzdol omejeno. Če je množica njegovih stekališč  $\mathcal{S}$  neprazna, potem definiramo:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \mathcal{S}$$

sicer:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

- (4) Denimo, da je  $a_n$  navzdol neomejeno in navzgor omejeno. Če je množica njegovih stekališč  $\mathcal{S}$  neprazna, potem definiramo:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \mathcal{S}$$

sicer:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

PRIMERI:

1)  $a_n = (-1)^n$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

2)  $b_n$  konvergentno z limito  $b$

$$b = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

3)  $c_n = n^{(-1)^n} : 1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \dots$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

4)  $d_n = 1, 2, 3, \dots$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$$

TRDITEV Naj bo  $a_n$  omejeno zaporedje in  $\mathcal{S}$  množica njegovih stekališč. Tedaj je

$$s = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \mathcal{S}$$

natanko tedaj, kadar za vsak  $\varepsilon > 0$  velja:

$$a_n > s + \varepsilon \text{ kvečjemu za končno indeksov } n$$

$$a_n > s - \varepsilon \text{ za neskončno indeksov } n$$

POSLEDICA Naj bo  $a_n$  omejeno zaporedje. Potem je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  največje stekališče  $a_n$ .

DOKAZ

( $\Rightarrow$ ) Naj bo  $s = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \mathcal{S}$ . Denimo, da bi za nek  $\varepsilon > 0$

$$a_n > s + \varepsilon$$

veljalo za neskončno indeksov  $n$ . Sledi, da obstaja omejeno podzaporedje  $a_{n_j}$ , da je

$$\forall j a_{n_j} > s + \varepsilon$$

Ker je omejeno, ima stekališče  $\geq s + \varepsilon \rightarrow \leftarrow$

( $\Leftarrow$ )  $\forall \varepsilon > 0$  na intervalu  $(s - \varepsilon, s + \varepsilon]$  leži neskončno mnogo členov zaporedja, zato je stekališče. Dokazujemo  $s = \sup \mathcal{S}$

dovolj je dokazati, da  $a_n$  nima stekališča  $x, x > s$

Denimo, da je  $x > s$  stekališče  $a_n$ .

$$d = x - s$$

Na  $\left(x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2}\right)$  leži neskončno mnogo členov zaporedja. Torej  $a_n > s + \frac{d}{2}$  izpolnjena za neskončno mnogo indeksov  $n$ .  $\rightarrow \leftarrow$

□

TRDITEV: Naj bo  $a_n$  omejeno zaporedje. Tedaj velja:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n (\sup_{k \geq n} a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} a_k) = b$$

SKICA DOKAZA:

$$b_n = \sup_{k \geq n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \geq b_{n+1} = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$$

$b_n$  je padajoče in je omejen (ker je  $a_n$  omejeno). Torej je konvergentno. Njegova limita je njegova spodnja meja.

$\varepsilon > 0 : a_n > b + \varepsilon$  končno mnogo indeksov

$a_n > b - \varepsilon$  za neskončno indeksov

TRDITEV: Naj bosta  $a_n$  in  $b_n$  omejeni zaporedji. Če velja  $a_n \leq b_n$  za  $\forall n \in \mathbb{N}$  potem:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

### 3.7 O zaporedjih kompleksnih števil

DEFINICIJA: Zaporedje kompleksnih števil je preslikava  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ . Pišemo:

$$z_n = f(n)$$

Teko kot pri realnih zaporedjih rečemo zaporedje  $z_n$ .

DEFINICIJA: Zaporedje kompleksnih števil  $z_n$  konvergira proti  $z \in \mathbb{C}$ , če:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_o \in \mathbb{N} \forall n \geq n_o : |z_n - z| < \varepsilon$$

Pišemo:

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

PRIMER:  $z_n = \frac{1}{3n} + i \frac{2n-1}{n}$  zaporedje kompleksnih števil podano s splošnim "lenom.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 2i$$

TRDITEV: Zaporedje kompleksnih števil  $z_n$  konvergira proti  $z \in \mathbb{C}$  natanko takrat, ko zaporedje  $\Re z_n$  konvergira proti  $\Re z$  in zaporedje  $\Im z_n$  konvergira proti  $\Im z$ .

DOKAZ:

$$|z_n - z|^2 = (\Re z_n - \Re z)^2 + (\Im z_n - \Im z)^2 \quad (1)$$

( $\Rightarrow$ ) Denimo, da  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$

$$\varepsilon > 0 : \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |z - z_n| < \varepsilon$$

Iz 1 sledi:

$$|\Re z_n - \Re z| \leq |z_n - z| \leq \varepsilon$$

$$|\Im z_n - \Im z| \leq |z_n - z| \leq \varepsilon$$

$$(\Leftarrow) \Re z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Re z \text{ in } \Im z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Im z$$

za  $\varepsilon > 0$ :

$$\exists n_{Re} : |\Re z_n - \Re z| < \varepsilon \text{ za } n \geq n_{Re}$$

$$\exists n_{Im} : |\Im z_n - \Im z| < \varepsilon \text{ za } n \geq n_{Im}$$

Iz 1 sledi:

$$|z - z_n|^2 \leq \varepsilon^2 + \varepsilon^2$$

$$|z - z_n| \leq \sqrt{2}\varepsilon$$

TRDITEV: Za konvergentni zaporedji kompleksnih števil  $z_n$  in  $w_n$  velja, da so zaporedja  $z_n + w_n$ ,  $z_n - w_n$  in  $z_n w_n$  konvergentna in velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n - \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

Če  $w_n \neq 0$  za  $\forall n \in \mathbb{N}$  in je  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \neq 0$ , potem  $\frac{z_n}{w_n}$  konvergira.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n}$$

Dokaže se tako, da s pomočjo prejšnje trditve pretvorimo na vsoto, razliko, zmnožek in kvocient realnih zaporedji.

IZREK: Zaporedje kompleksnih števil  $z_n$  je konvergentno natanko takrat, kadar izpolnjuje Cauchyjev pogoj.

Dokaz ponovno tako, da pretvorimo na realna zaporedja s pomočjo prejšnje trditve.

## 4 Številске vrste

DEFINICIJA: Naj bo  $a_n$  realno zaporedje. Neksončno formalno vrsto

$$a_1 + a_2 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

imenujemo *številsko vrsto*. Člen  $a_n$  imenujemo splošni člen številske vrste. Označimo:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

PRIMERI:

1) geometrijska vrsta

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

**Osnovna lastnost:** kvocijent zaporednih členov je konstanten

2)

$$1 - 1 + 1 - 1 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

DEFINICIJA: Dana je številsko vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Zaporedje

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_n = \sum_{j=1}^n a_j$$

imenujemo *zaporedje delnih vsot*. Če zaporedje delnih vsot konvergira, pravimo, da vrsta konvergira. V tem primeru limito zaporedja delnih vsot  $s$  imenujemo *vsota vrste* in pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Če zaporedje delnih vsot divergira, rečemo, da vrsta divergira.

**Opomba:** Zapis  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$  pomeni:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira
2. njena vsota je  $s$

PRIMERI:



1) Obrovnavaj konvergenco geometrijske vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Velja za  $q \neq 1$ . Oklepaj smo razrešili po formuli, ki smo jo našli v spominu:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}$$

Če  $|q| < 1 \Rightarrow q^n \rightarrow 0$

Za  $q > 1$  :  $a \frac{1 - q^n}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  vrsta ne konvergira.

Za  $q < -1$  :  $a \frac{1 - q^n}{1 - q}$  ne konvergira

Za  $q = -1$  :  $a \frac{1 - (-1)^n}{2}$  ima dve stekališči, zato divergira.

Za  $q = 1$  :  $s_n = na$  divergira (ker konvergira proti  $\pm\infty$ ).

Geiom vrsta  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$  konvergira natanko takrat, kadar  $|q| < 1$ . V tem primeru velja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1 - q}$$

2) Obravnavaj konvergenco  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira po definiciji natanko takrat, kadar zaporedje  $s_n$  konvergira.

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Razceptimo na delne ulomke:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1}$$

Razpišemo  $s_n$  in dobimo:

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \dots - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

Torej velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Vrsta je konvergentna in  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

3) Obravnavaj konvergenco  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$

Vrsta divergira, ker  $s_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n$  divergira.

OPOMBA: Naj bo vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergentna. Potem je zaporedje  $a_n$  konvergentno in  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

DOKAZ: Če je vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergentna, je zaporedje delnih vsot  $s_n$  konvergentno.

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ s_{n+1} &= a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

Torej:

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

$\Rightarrow a_{n+1}$  je konvergentno in velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$$

TRDITEV: (Cauchyjev pogoj za vrste) Vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira natanko tedaj, kadar velja:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \forall k \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

DOKAZ:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira po definiciji natanko takrat, kadar zaporedje delnih vsot  $s_n$  konvergira. Po definiciji je zaporedje  $s_n$  Cauchyjevo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0, n, m \in \mathbb{N} : |s_n - s_m| < \varepsilon$$

Naj bo  $m \geq n$ :

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon$$

Lahko si izberemo  $k = m - n$  in trditev velja.

TRDITEV: Dana je številsko vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(1) Če vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira, potem  $\forall m \in \mathbb{N}$  konvergira vrsta  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ .

- (2) Če za nek  $m \in \mathbb{N}$  vrsta  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  konvergira, potem konvergira vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

IDEJA DOKAZA:

$$\sum a_n \text{ konvergira} \Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ konvergira.}$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n \rightsquigarrow t_n = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{m+n}$$

$$s_{m+k} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}}_A + \underbrace{a_m + \dots + a_{m+k}}_{t_{k+1}}$$

$$s_{m+k} = A + t_{k+1}$$

Če konvergira eno zaporedje, konvergira tudi drugo zaporedje.

TRDITEV: Denimo, da sta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  in  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergentni vrsti,  $c \in \mathbb{R}$ . Potem konvergirajo tudi:  $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  in  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$  ter velja:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} ca_n &= c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \end{aligned}$$

**Opomba:** Konvergentne vrste sestavljajo vektorski prostor (nad obsegom).

DOKAZ: Če  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira, konvergira tudi njeno zaporedje delnih vsot  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , zato konvergira  $cs_n = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n$  in velja ustrezna zveza za limito.

PRIMER: Obravnavaj konvergenco vrsto  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (*harmonična vrsta*).

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergira.

$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  je neomejeno

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$s_8 = s_4 + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\frac{1}{8}} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Opazimo vzorec:

$$s_{2^k} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(k-1)$$

To formulo lahko dokažemo z indukcijo.  $s_k$  je neomejeno in vrsta divergira.

## 4.1 Vrte z nenegativnimi členi

**DEFINICIJA:** Denimo, da je  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vrsta z nenegativnimi členi. Potem je zaporedje delnih vsot  $s_n$  naraščajoče ( $s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$ )

**TRDITEV:** Vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  z nenegativnimi členi konvergira natanko takrat, kadar je njeno zaporedje delnih vsot  $s_n$  navzgor omejeno.

**IZREK:** (primerjalni kriterij za konvergenco vrst): Naj bosta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  in  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  vrsti z nenegativnimi členi in naj velja:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$$

(1) Če vsota  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergira, potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.

(2) Če vsota  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira, potem  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergira.

**Opomba:** Pravimo, da je  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  *majoranta* za  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**PRIMER:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ali konvergira?

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} \geq \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$  konvergira po primerjalnem kriteriju. Ker je to rep zaporedja  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergira.

DOKAZ trditve:

$$\begin{aligned}s_n &= a_1 + \dots + a_n \\ t_n &= b_1 + \dots + b_n\end{aligned}$$

Po predpostavki  $s_n \leq t_n$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ .

- (1) Če vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergira, zaporedje  $t_n$  konvergir, t.j.:  $t_n$  je navzgor omejeno:

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : t_n \leq M$$

Sledi:  $s_n \leq M$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ , torej  $s_n$  in s tem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.

- (2) Če  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira, potem je zaporedje  $s_n$  navzgor neomejeno. Ker  $s_n \leq t_n$  je tudi  $t_n$  navzgor neomejeno, zato  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergira.

PRIMER: Obravnavaj konvergenco  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  v odvisnosti od  $p \in \mathbb{R}$ .

$p = 1$  Vemo, da je harmonična vrsta in divergira.

$p \leq 1$   $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$  odtod po primerjalnem kriteriju sledi, da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  divergira.

$p > 1$   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  konvergira

Podoben dokaz kot pri harmonični vrsti (samo druge ocene)

$$\begin{aligned}s_4 &= \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \underbrace{\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}}_{\leq 2 \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}} \\ s_8 &= s_4 + \underbrace{\frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p}}_{\leq 4 \frac{1}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}}} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \dots + \frac{1}{(2^{k-1})^{p-1}} \leq \\ &\leq \underbrace{1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \dots + \frac{1}{(2^{k-1})^{p-1}} + \dots}_{\text{zgornja meja}}\end{aligned}$$

Opazimo, da je od nekega člena naprej to geometrijska vrsta z  $q = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$ , kar pomeni, da ima vsoto. Torej je  $s_{2^k}$  navzgor omejeno, ker je naraščajoče je tudi  $s_n$  navzgor omejeno in je zato  $s_n$  konvergentno.

**IZREK:** (*kvocientni kriterij ali d'Alembertov kriterij*) Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vrsta s pozitivnimi členi. Sestavimo zaporedje:

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- 1) Če obstaja  $q \in (0, 1)$ , da velja  $d_n \leq q \forall n \in \mathbb{N}$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- 2) Če velja  $d_n \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.

Če obstaja  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d$ , potem velja:

- 1') Če je  $d < 1$ , potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- 2') Če je  $d > 1$ , potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.

### Opombi:

- Če je  $d = 1$ , kriterij ne da odgovora.
- Če je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n < 1$ , potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.

**PRIMER:**

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}n!}{(n+1)!2^n} = \frac{2}{n+1}$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow$  vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$  konvergira.

- Obravnavaj konvergenco vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ,  $x > 0$

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \frac{(n+1)x}{n}$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)x}{n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = x$$

- Če  $x < 1$  vrsta konvergira.
- Če  $x > 1$  vrsta divergira.
- Če  $x = 1$  :  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  divergira (ker členi ne konvergirajo proti 0).

DOKAZ:

- 1) Denimo, da je  $d_n \leq q < 1$  za vse  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \forall n$$

$$a_{n+1} \leq qa_n \leq q \cdot qa_{n-1} \leq q^3 a_{n-2} \leq \dots \leq q^n a_1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n a_1$$

Po primerjalnem kriteriju vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$  konvergira  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.

- 2)  $d_n \geq q \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Zaporedje  $d_n$  je naraščajoče zaporedje pozitivnih števil. Zato členi  $a_n$  ne konvergirajo proti 0. Torej vrsta divergira.

Iz 1 sledi 1', iz 2 sledi 2'. Dokaz je bil za DN. Si naredil/a?

IZREK: (*korenski* kriter ali *Cauchyjev* kriterij) Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vrsta z nenegativnimi členi. Sestavimo zaporedje

$$c_n = \sqrt[n]{a_n}$$

Tedaj velja:

- 1) Če obstaja  $q \in (0, 1)$ , da velja  $c_n \leq q$  za vse  $n \in \mathbb{N}$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- 2) Če velja  $c_n \geq 1 \forall n$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.

Če obstaja  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ , potem velja:

- 1') Če je  $c < 1$ , potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- 2') Če je  $c > 1$ , potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.

### Opombi:

- Če je  $c = 1$ , kriterij ne da odgovora.
- Če je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n < 1$ , potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.

### DOKAZ:

- 1) Naj bo  $q \in (0, 1)$ ,  $c_n \leq q \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} c_n &\leq q \\ \sqrt[n]{c_n} &\leq q \\ a_n &\leq q^n \end{aligned}$$

Členi v vrsti  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  so majonirani s členi konvergentne geometrijske vrste  $q^n$ , zato  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira po primerjalnem kriteriju.

- 2) Naj bo  $c_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} c_n &\geq 1 \\ \sqrt[n]{a_n} &\geq 1 a_n && \geq 1^n \end{aligned}$$

Vrsta divergira, ker členi ne konvergirajo proti 0.

Tako kot pri prejšnjem primeru iz 1 sledi 1' in iz 2 sledi 2'. Ponovno je bil dokaz za DN.

### PRIMER:



- Obravnavaj konvergenco vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ ,  $x > 0$

$$c_n = \sqrt[n]{\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{x}{n}$$

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Po korenskem kriteriju vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$  konvergira za vse  $x > 0$ .

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Že od prej vemo, da konvergira, ampak si vseeno pogledjmo kvocientni in korenski kriterij.

– **Kvocienčni kriterij:**

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

– **Korenski kriterij:**

$$c_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

IZREK: (*Raabejev* kriterij) Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vrsta s pozitivnimi členi. Sestavimo zaporedje:

$$r_n = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

- 1) Če obstaja  $r > 1$ , da velja  $r_n > r \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- 2) Če velja  $r_n \leq 1 \forall n$ , potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.

Če obstaja  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = R$ , potem velja:

- 1') Če je  $R > 1$ , potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- 2') Če je  $R < 1$ , potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.

**Opombi:**

- Če je  $R = 1$  kriterij ne da odgovora.
- Če je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n > 1$ , potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.

DOKAZ:

1) Naj bo  $r_n \geq r > 1 \quad \forall n$

$$\begin{aligned} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &\geq r \\ \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 &\geq \frac{r}{n} \\ \frac{a_n}{a_{n+1}} &\geq \frac{r}{n} + 1 \end{aligned}$$

**Trditve:** Če je  $s \in \mathbb{Q} \quad 1 < s < r$ , potem velja  $1 + \frac{r}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s$

**Dokaz trditve:**  $s = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{r}{n} &> \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}} \\ \left(1 + \frac{r}{n}\right)^q &> \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \\ \left(1 + \frac{r}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p &= \\ &= 1 + q\frac{r}{n} + \frac{1}{n^2}(\dots) - \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{1}{n^2}(\dots)\right) = \frac{1}{n}(qr - p) + \frac{1}{n^2}(\dots) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} \underbrace{((qr - p) + \frac{1}{n}(\dots))}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

$qr - p > 0$ , ker  $r > \frac{p}{q} \Rightarrow qr > p$ .  $\frac{1}{n}(\dots) > 0$  za dovolj velik  $n$ , ker je

limita tega člena 0.

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &\geq 1 + \frac{r}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \\
a_{n+1} &\leq a_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \text{ za dovolj velik } n \\
a_{n_0+1} &\leq a_{n_0} \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^s \\
a_{n_0+2} &\leq a_{n_0+1} \left(\frac{n_0+1}{n_0+2}\right)^s < a_{n_0} \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^s \cdot \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^s = a_{n_0} \frac{n_0^s}{(n_0+2)^s} \\
a_{n_0+3} &\leq a_{n_0+2}(\cdots) < a_{n_0} \frac{n_0^s}{(n_0+3)^s} \\
a_{n_0+k} &\leq a_{n_0} \frac{n_0^s}{(n_0+k)^s} \quad \forall k \in \mathbb{N} \\
\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0} \frac{n_0^s}{(n_0+k)^s} &= a_{n_0} n_0^s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n_0+k)^s}
\end{aligned}$$

Ta vrsta konvergira, ker je  $s > 1$  in je ostanek vrste  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ . Torej po primerjalnem kriteriju konvergira tudi vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

2) Naj bo  $r_n \leq 1$  za vse  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &\leq 1 \\
\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 &\leq \frac{1}{n} \\
\frac{a_n}{a_{n+1}} &\leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \\
a_{n+1} &\geq \frac{n}{n+1} a_n \\
a_{n+2} &\geq \frac{n+1}{n+2} a_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} a_n = \frac{n}{n+2} a_n \\
a_{n+k} &\geq \frac{n}{n+k} a_n \\
a_{k+1} &\geq \frac{1}{k+1} a_1 \\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_1 &= a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Je harmonična vrsta, ki divergira. Po primerjalnem kriteriju divergira tudi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

PRIMER: Obravnavaj konvergenco  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}, x > 0$ .

• **Kvocietni:**

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(x+1)\dots(x+n)(n+1)!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)n!} = \frac{n+1}{x+n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1$  in kriterij ne da odgovora

• **Raabejev:**

$$r_n = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left( \frac{x+n+1}{n+1} - 1 \right) = \frac{nx}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$$

- Če je  $x > 1$ , potem vrsta konvergira.
- Če je  $x < 1$ , potem vrsta divergira.
- Če je  $x = 1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 3 \cdot n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  divergira.

## 4.2 Absolutna konvergenca

DEFINICIJA: Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  številska vrsta. Pravimo, da vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  *absolutno konvergira*, če konvergira vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

**Opomba:** Za vrste z nenegativnimi členi, je absolutna konvergenca isto kot konvergenca.

IZREK: Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  številska vrsta. Če  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolutno konvergira, potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.

DOKAZ: Vemo:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira natanko takrat, ko  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  izpolnjuje Cauchyjev pogoj. Spomnimo se Cauchyjevega pogoja za vrste:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall k \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

Naj vsota  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergira, zato izpolnjuje Cauchyjev pogoj. Dokažimo, da  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  izpolnjuje Cauchyjev pogoj.

Izberemo  $\varepsilon$ .

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| \leq \underbrace{|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}|}_{||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}|| < \varepsilon} < \varepsilon$$

□

PRIMER: Ugotovi ali vrsta konvergira

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$  konvergira. Vemo  $|\sin n| \leq 1$ :

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergira}$$

Po primerjalnem kriteriju  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$  konvergira.

IZREK: (*Leibnizov kriterij* za alternirajoče vrste) Naj bo  $a_n$  padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito 0. Tedaj vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergira. Velja ocena:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n a_n \right| \leq a_m$$

PRIMER:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  alternirajoča harmonična vrsta.  $a_n = \frac{1}{n}$  ustreza pogoju, zato vrsta konvergira. Ne konvergira absolutno (ker harmonična vrsta divergira).

DEFINICIJA: naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  številna vrsta. Če je  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergentna, ni pa absolutna konvergentna, potem rečemo, da je *pogojno konvergentna*.

DOKAZ:

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} \\ s_{2n+1} &= \underbrace{(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots)}_{s_{2n-1}} - \underbrace{a_{2n-1} + a_{2n}}_{>0} \leq s_{2n-1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow s_{2n+1}$  je padajoče

$$s_{2n+2} = \underbrace{(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots)}_{s_{2n}} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{>0} \geq s_{2n}$$

$\Rightarrow s_{2n}$  je naraščajoča

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \geq 0 \\ s_{2n+2} &= a_0 + (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \cdots + (-a_{2n-1} + a_{2n}) - a_{2n+1} \leq a_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow s_{2n+1}$  je navzdol omejeno

$\Rightarrow s_{2n+2}$  je navzgor omejeno

$\Rightarrow s_{2n+1}, s_{2n+2}$  sta konvergentni podzaporedji v  $s_n$ .

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n}}_{\rightarrow 0}$$

Zato velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$ . Zato je  $s_n$  konvergentno  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergira.

$$|s_{m+k} - s_m| = |(-1)^m|a_m + (-a_{m+1} + a_{m+2}) + (-\dots) + (-1)^{k-1}a_{m+k-1}| \leq a_m$$

$$k \rightarrow \infty : |s - s_m| \leq a_m \quad \square$$

### 4.3 O preureditvah vrst

Zamenjava vrstnega reda seštevanja.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijekcija

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \dots + a_{\pi(n)} + \dots$$

IZREK: Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolutno konvergentna vrsta in  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektivna preslikava. Potem je  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$  konvergentna in velja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

DOKAZ:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Dokazujemo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = s$

$$\left| s - \sum_{k=1}^m a_{\pi(k)} \right| = \left| s - s_n - \underbrace{\sum_{k=1}^m a_{\pi(k)}}_{\text{razen } \pi(k) \in \{1 \dots n\}} \right| \leq |s - s_n| + \sum_{k=1}^m |a_{\pi(k)}| \leq |s - s_n| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

- $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ , ker  $\exists n_0 \forall n \geq n_0$  to velja.

- $\exists m_0 \forall n \geq m_0 : \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$
- $\exists m \in \mathbb{N} : \{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \supset \{1, 2, \dots, n\}$

IZREK:(Reimann) Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  pogojno konvergenta. Potem  $\forall A \in \mathbb{R}$  obstaja bijekcija  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , da je  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A$ . Obstaja še dve bijekciji  $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_{\pi_1(n)} = \infty$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_{\pi_2(n)} = -\infty$$

DOKAZ: Predpostaviti smemo, da  $a_n \neq 0 \forall n$ .

$$s_n = a_1 + \dots + a_n = P_{k(n)} - Q_{m(n)}$$

Pri čemer so v  $P_{k(n)}$  sešteti vsi pozitivni členi, med  $a_1$  in  $a_n$ , v  $Q_{m(n)}$  pa nasprotno vrednosti vseh negativnih členov med  $a_1$  in  $a_n$ .

$$P_{k(n)} = p_1 + p_2 + \dots + p_{k(n)}$$

$$Q_{m(n)} = q_1 + q_2 + \dots + q_{m(n)}$$

Velja tudi  $k(n) + m(n) = n$ .

$$P_{k(n)} + Q_{m(n)} = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  in  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$  divergirata

- Če bi obe konvergirali, bi  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergirala  $\rightarrow \leftarrow$
- Če bi ena konvergirala, druga pa ne: iz  $s_n = P_{k(n)} - Q_{m(n)}$  sledi, da če bi ena od vrst konvergirala bi tudi druga, ker  $s_n$  konvergira.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$$

Vemo: ker  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira, je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  $p_n$  je podaporedje v  $a_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ . Podobno velja za  $q_n$ . Torej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$$

Sedaj lahko sestavimo, tako zaporedje, ki konvergira proti  $A \in \mathbb{R}$ . Obstaja najmanjši  $k_1 \in \mathbb{N}$ , da velja

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} &> A \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1-1} &\leq A \end{aligned}$$

Obstaja najmanjši  $k_2 \in \mathbb{N}$ , da velja:

$$\begin{aligned} p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{k_2} &< A \\ p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{k_2-1} &\geq A \end{aligned}$$

Postopek nadaljujemo. Ker je  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ , bo preurejena vrsta konvergentna z vsoto  $A$ . Dobili smo bijektivno preslikavo po konstrukciji.

Če želimo skonstruirati vrsto, ki konvergira proti neskončno  $A = \infty$  naredimo sledeče

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} &> 1 \\ p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_2} &> 2 \end{aligned}$$

□

## 4.4 Množenje vrst

Naj bosta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  in  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  številske vrste.

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) &= \\ &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_1 b_n + \\ &+ a_2 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_2 b_n + \cdots \end{aligned}$$

To lahko zapišemo v tabelo, podobno kot urejenost racionalnih števil. Vsota iz vseh produktov je vrsta oblike

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s}$$

kjer je  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  bijektivna preslikava s predpisom  $s \mapsto (i_s, k_s)$ . *Cauchyjev produkt*

$$c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1$$



je produkt kontra diagonal v tabeli. Vsota produktov je

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

IZREK: Naj bosta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  in  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  absolutno konvergentni številske vrsti. Potem je vrsta, ki je sestavljena iz vseh produktov konvergentna in njena vsota je

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

Natančneje, za vsako bijektivno preslikavo  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , je vrsta

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{\varphi_1(s)} b_{\varphi_2(s)}$$

konvergentna in velja:

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{\varphi_1(s)} b_{\varphi_2(s)} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

DOKAZ: dokazujemo absolutno konvergenco vrste iz vseh produktov.  $\sum_{s=1}^{\infty} |a_{\varphi_1(s)} b_{\varphi_2(s)}|$  je konvergentna

Zaporedje delnih vsot:

$$|a_{\varphi_1(1)} b_{\varphi_2(1)}| + |a_{\varphi_1(2)} b_{\varphi_2(2)}| + \cdots + |a_{\varphi_1(m)} b_{\varphi_2(m)}|$$

Obstaja  $n_0 = \max\{\varphi_1(1), \varphi_1(2), \dots, \varphi_1(m)\}$  in  $k_0 = \max\{\varphi_2(1), \varphi_2(2), \dots, \varphi_2(m)\}$ , tako da lahko zgornjo vsoto omejimo navzgor in dobimo

$$\begin{aligned} |a_{\varphi_1(1)} b_{\varphi_2(1)}| + |a_{\varphi_1(2)} b_{\varphi_2(2)}| + \cdots + |a_{\varphi_1(m)} b_{\varphi_2(m)}| &\leq \\ &\leq (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0}|) (|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_{k_0}|) \leq \\ &\leq \underbrace{\left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \right)}_{\text{število}} \end{aligned}$$

Ker  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolutno konvergira,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergira. Podobno velja za  $|b_n|$ .

Zaporedje delnih vsot  $\sum_{s=1}^{\infty} |a_{\varphi_1(s)} b_{\varphi_2(s)}|$  je navzgor omejeno, zato je vrsta z nenegativnimi členi konvergentna.

Vosta vrste je neodvisna od izbire vrstnega reda členov, zato izberemo vrstni red „po kvadratih”.

$$s_{m^2} = \left( \sum_{n=1}^m a_n \right) \left( \sum_{n=1}^m b_n \right)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{m^2} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

Vsako podzaporedje konvergentnega zaporedja konvergira proti limiti zaporedja, zato tudi  $s_m$  konvergira k temu številu.

□

PRIMER:  $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  konvergira po Leibnizevem kriteriju, vendar ne konvergira absolutno. Izračunajmo produkt vrst s Cauchyjevo ureditvijo

$$c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 =$$

$$= (-1) \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^2 \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-1)^{n-2} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (-1) \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$$

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(k+1)}_{\leq n} \underbrace{(n+1-k)}_{\leq n}}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \geq \frac{n-1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  divergira, ker členi ne gredo proti 0.

## 4.5 Dvakratne vrste

Imamo neskončno matriko  $[a_{ij}]$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

Formalni vrsti

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right)$$

in

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right)$$

imenujemo *dvakratni vrsti*, če  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$  konvergira za vsak  $i$ , oziroma če  $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$  konvergira za vsak  $j$ .

Naj bo  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  bijektivna preslikava. Elemente  $[a_{ij}]$  s  $\varphi$  uredimo v zaporedje in sestavimo številsko vrsto.

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{\varphi(s)} \quad (2)$$

VELJA:

- 1) Če 2 absolutno konvergira, potem dvakratni vrsti konvergirata in vse tri imajo enako vsoto.
- 2) Če dvakratna vrsta konvergira, ko njene člene nadomestimo z absolutnimi vrednostmi, potem 2 konvergira in vsote so enake.

## 5 Funkcije realne spremenljivke

DEFINICIJA: Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}$ . (*Realna*) *funkcija* (*realne spremenljivke*) je preslikava

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Spomnimo se, da je preslikava predpis, za katerega velja

$$\forall x \in D \exists! y \in \mathbb{R} : y = f(x)$$

OPOMBI:

1. V pojmu funkcija sta združena dve predpostavki:
  - definicijsko območje
  - predpis

2. Funkciji  $f$  in  $g$  sta enki, če imata enako definicijsko območje in predpis.

DOGOVOR: Funkcijo lahko podamo samo s predpisom. V tem primeru vzamemo za definicijsko območje množico vseh  $x$ , za katero ima predpis smisel.

PRIMER:

1)  $f(x) = \sqrt{x}$     $D_f = [0, \infty)$

2) Ali sta funkciji, ki sta dani s predpisoma

$$f(x) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$$

$$g(x) = \ln(x^2 - 1)$$

enaki?

$$D_f = (1, \infty)$$

$$D_g = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Nista enaki, vendar data enake vrednosti na preseku definicijskih območji.

$$\forall x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$$

DEFINICIJA: Naj bosta  $f$  in  $g$  funkciji. Če velja  $D_f \subset D_g$  in če velja  $f(x) = g(x)$  za vse  $x \in D_f$ , potem rečemo, da je funkcija  $g$  *razširitev* funkcije  $f$  in da je  $f$  *zožitev* funkcije  $g$ . Zožitev zapišemo kot

$$g|_{D_f} = f$$

DEFINICIJA: Naj bo  $f$  funkcija. Množico

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2$$

imenujemo *graf funkcije*.

OPOMBA:

1. Funkcija  $f$  je s svojim grafom natančno določena.

2. Katere podmnožice  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  so grafi funkcij? Presek vsake navpične premice z množico  $S$  je točka ali prazna množica.

## 5.1 Operacije s funkcijami

DEFINICIJA: Naj bosta  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  in  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  funkciji. Če je  $Z_f \subset D_g$ , potem lahko definiramo *kompozitum funkcij*

$$g \circ f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

s predpisom:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Ni nujno, da bi bila  $g \circ f$  in  $f \circ g$  v kakšni zvezi.

PRIMER:

1)  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = \ln x^2$ .  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x^2) = \ln^2 x^2 + 1 = 4 \ln^2 |x| + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \ln(x^2 + 1)^2 = 2 \ln(x^2 + 1)$$

2)  $f(x) = x^2$  ni injektivna

$$f|_{[0, \infty)} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

je injektivna. Naredimo lahko inverzno funkcijo  $f^{-1} : Z_f \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

DEFINICIJA: Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  injektivna funkcija z zalogo vrednosti  $Z_f$ . Inverzno preslikavo  $f^{-1} : Z_f \rightarrow \mathbb{R}$  imenujemo *inverzna funkcija*. Njen predpis je znan že iz poglavja o preslikavah

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$$

PRIMER: Funkcija  $f$  je dana s predpisom:

$$f(x) = \frac{2x + 3}{3x - 1}$$

Določi inverzno funkcijo, če obstaja.

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} \\ y &= \frac{2x + 3}{3x - 1} \\ y(3x - 1) &= 2x + 3 \\ 3xy - 2x &= 3 + y \\ x(3y - 2) &= 3 + y \\ x &= \frac{3 + y}{3y - 2} \end{aligned}$$

Iz računa sledi: če je  $y \neq \frac{2}{3}$ , potem obstaja natanko en  $x$  za katerega velja  $f(x) = y$ . Torej je  $Z_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ ,  $f$  je injektivna in  $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{3y-2}$ .

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \{(x, f(x)) : x \in D_f\} = \{(f^{-1}(y), y) : y \in Z_f\} \\ \Gamma_{f^{-1}} &= \{(y, f^{-1}(y)) : y \in Z_f\}\end{aligned}$$

Zato je  $\Gamma_{f^{-1}}$  dobljen iz  $\Gamma_f$  z zrcaljenjem preko simetrane lihih kvadrantov.

DEFINICIJA: Naj bo  $f$  funkcija.

- Pravimo, da je  $f$  navzgor omejena, če je  $Z_f$  navzgor omejena, t.j.:

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in D_f : f(x) \leq M$$

- Pravimo, da je  $f$  navzdol omejena, če je  $Z_f$  navzdol omejena, t.j.:

$$\exists m \in \mathbb{R} \forall x \in D_f : f(x) \geq m$$

- Funkcija  $f$  je omejena, kadar je navzgor in navzdol omejena.
- Če je  $f$  navzgor omejena, potem je supremum funkcije  $f$  natančna zgornja meja zaloge vrednosti

$$\sup f := \sup Z_f$$

- Če je  $f$  navzdol omejena, potem je infimum funkcije  $f$  natančna spodnja meja zaloge vrednosti

$$\inf f := \inf Z_f$$

- Če obstaja maksimum zaloge vrednosti, velja

$$\max f := \max Z_f$$

- Če obstaja minimum zaloge vrednosti, velja

$$\min f := \min Z_f$$

DEFINICIJA: Naj bo  $f$  funkcija. Pravimo, da je  $x \in D_f$  ničla funkcije  $f$ , če

$$f(x) = 0$$

DEFINICIJA: Naj bosta  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkciji. Funkcije  $f + g, f - g, f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$  definiramo s predpisi:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\end{aligned}$$

Če  $\forall x \in D, g(x) \neq 0$ , potem definiramo  $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

DEFINICIJA: Naj bosta  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkciji. Funkciji  $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} : D \rightarrow \mathbb{R}$  definiramo s predpisoma:

$$\begin{aligned}\max\{f, g\}(x) &:= \max\{f(x), g(x)\} \\ \min\{f, g\}(x) &:= \min\{f(x), g(x)\}\end{aligned}$$

DEFINICIJA: Naj bo  $\Gamma$  množica in naj bo za vsak  $\gamma \in \Gamma$

$$f_\gamma : D \rightarrow \mathbb{R}$$

funkcija. Če je  $\{f_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\}$  navzgor omejena za vsak  $x \in D$ , potem lahko definiramo funkcijo

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma : D \rightarrow \mathbb{R}$$

s predpisom

$$\left(\sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma\right)(x) = \sup\{f_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\}$$

Podobno definiramo

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma : D \rightarrow \mathbb{R}$$

PRIMER:  $f_\gamma(x) = \frac{1}{1 + \gamma x^2}, \gamma \in (0, \infty), D_{f_\gamma} = \mathbb{R}$

$\left\{\frac{1}{1 + \gamma x^2} : \gamma \in (0, \infty)\right\}$  je navzgor omejena z 1 in navzdol omejena z 0

## 5.2 Zveznost

Zvezna funkcija je funkcija, kjer „majhna” sprememba neodvisne spremenljivke povzroči „majhno” spremembo odvisne spremenljivke.

PRIMERA

- $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ : V 0 ni definirana, zato ne moremo govoriti v zveznosti. Lahko določimo  $g(0) = 0$ , vendar ne glede na vrednost, ki jo določimo v 0,  $g$  ne bo zvezna.
- $h(x) = x \sin \frac{1}{x}$ . Če določimo  $h(0) = 0$ , potem je  $h$  zvezna.

DEFINICIJA: Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija in  $a \in D$  točka. Funkcija  $f$  je *zvezna v točki*  $a \in D$ , če velja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Opomba:**  $\delta$  je odvisna od  $\varepsilon$ . Najprej si izberemo  $\varepsilon$ , nato pa določimo  $\delta$ .

PRIMERI:

- 1)  $C \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = C$   $f$  je zvezna v  $a \in \mathbb{R}$

Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$ . Vemo  $f(a) = C$ . Če si izberemo  $\delta = 1$ , velja:

$$|x - a| < 1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

- 2)  $g(x) = x$   $g$  je zvezna v  $a \in \mathbb{R}$

Izberemo  $\varepsilon > 0$ . Dokazujemo

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Naj bo  $\delta := \varepsilon$ . Velja:

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$$

ker  $|x - a| < \delta$  in  $\varepsilon = \delta$

- 3)  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$   $f$  ni zvezna v 0



Negacija definicije je:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

Naj bo  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Izberemo poljuben  $\delta > 0$ . Naj bo  $x_\delta = \frac{\delta}{2}$ .  $x_\delta$  je v okolici točke 0, ker

$$|0 - x_\delta| = |0 - \frac{\delta}{2}| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

Funkcijske slike niso v  $\varepsilon$ -ti okolici točke  $f(0)$ , ker:

$$|f(0) - f(x_\delta)| = |0 - 1| = 1 \geq \varepsilon = \frac{1}{2}$$

DEFINICIJA: Naj bo  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in D$ . Množico  $(a - \delta, a + \delta) \cap D$  imenujemo  $\delta$  okolice točk  $a$  v  $D$ . Množica  $U \subset \mathbb{R}$  je okolica točke  $a$  v  $D$ , če vsebuje kakšno  $\delta$ -okolico točke  $a$  v  $D$ .

EKVIVALENTNI DEFINICIJA ZVEZNOSTI

- Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija in  $a \in D$ . Potem je  $f$  zvezna v točki  $a$  natanko tedaj, kadar velja, da za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$ , da  $f$  preslika  $\delta$ -okolico točke  $a$  v  $\varepsilon$ -to okolico točke  $f(a)$ .
- Funkcija  $f$  je zvezna v točki  $a$  natanko tedaj, če za vsako okolico  $V$  točk  $f(a)$ , obstaja taka okolica  $U$  točke  $a$ , da velja  $f(U) \subset V$ .

### 5.2.1 Opis zveznosti z zaporedji

Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna v  $a \in D$ . Izberemo poljubno konvergentno zaporedje  $x_n \in D$  z limito  $a$ . Opazujemo  $f(x_n)$ . Trdimo  $f(x_n)$  konvergira proti  $f(a)$ .

Izberemo  $\varepsilon > 0$ . Ker je  $f$  zvezna v  $a$ , obstaja  $\delta > 0$ , da za  $x \in D$  velja, če  $|x - a| < \delta$  sledi  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . Ker  $x_n$  konvergira proti  $a$ , obstaja  $n_0 \in \mathbb{N}$ , da velja  $|x_n - a| < \delta$  za vse  $n \geq n_0$ . Potem velja  $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$  za vse  $n \geq n_0$ .  $\square$

IZREK: Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija in  $a \in D$ .  $f$  je zvezna v  $a \in D$  natanko tedaj, kadar za **vsako** zaporedje  $x_n \in D$ , ki konvergira proti  $a$ , zaporedje  $f(x_n)$  konvergira proti  $f(a)$ .

DOKAZ:

( $\Rightarrow$ ) Že dokazano.

( $\Leftarrow$ ) Denimo, da  $f$  ni zvezna v točki  $a$ . Potem velja:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

Torej za vsak  $n$  velja:

$$x_n \in D : |x_n - a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

kjer je  $\frac{1}{n} = \delta$ .

Zaporedje  $x_n$  konvergira proti  $a$ , ker  $|x_n - a| < \frac{1}{n}$  za vsak  $n$ . Zaporedje  $f(x_n)$  ne konvergira proti  $f(a)$ , ker  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$  za vsak  $n$ .

□

PRIMERI:

$$1) f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{Dirichletova funkcija}$$

Ni zvezna v nobeni točki. Naj bo  $a \in \mathbb{R}$ . Velja

$$\exists q_n \in \mathbb{Q}, q_n \rightarrow a$$

$$\exists a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, a_n \rightarrow a$$

Torej je  $f(q_n) = 1$  za vsak  $n$  in  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = 1$ . Vemo tudi, da  $f(a_n) = 0$  za vsak  $n$  in  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$ . Torej  $f$  ni zvezna v  $a$ .

2)

$$g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & x = \frac{m}{k} \text{ okrajšan ulomek} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$g$  ni zvezna v  $\mathbb{Q}$  točkah.

IZREK: Naj bosta  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezni funkciji v točki  $a \in D$ . Potem so funkcije  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  zvezne v točki  $a$ . Če je  $g(a) \neq 0$ , potem je  $\frac{f}{g}$  zvezna v točki  $a$ .

**DOKAZ** Vemo, da je  $f$  zvezna v  $a \in D \iff$  za vsako zaporedje  $x_n$  v  $D$ , ki konvergira proti  $a$ , zaporedje  $f(x_n)$  konvergira proti  $f(a)$ . Izberemo poljubno zaporedje  $x_n \in D$ , ki konvergira proti  $a$ . Dokazujemo  $(f + g)(x_n)$  konvergira proti  $(f + g)(a)$ .

$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$  ker sta  $f$  in  $g$  zvezni,  $f(x_n)$  konvergira proti  $f(a)$  in  $g(x_n)$  konvergira proti  $g(a)$ . Torej  $f(x_n) + g(x_n)$  konvergira proti  $f(a) + g(a) = (f + g)(a)$ .

Če  $g(a) \neq 0$ , potem je  $\frac{f}{g}$  definirana na okolici točke  $a \in D$ . Obstaja  $\delta > 0$ , da za

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D$$

velja  $g(x) \neq 0$ . Torej lahko izberemo poljubno zaporedje  $x_n \in (a - \delta, a + \delta) \cap D$ , ki konvergira proti  $a$ . Tedaj je zaporedje  $\left(\frac{f}{g}\right)(x_n)$  dobro definirano in konvergira proti  $\left(\frac{f}{g}\right)(a)$  (podoben sklep kot prej).

**IZREK:** Naj bosta  $f$  in  $g$  funkciji, za kateri velja  $Z_f \subseteq D_g$ . Če je  $f$  zvezna v  $a$  in  $g$  zvezna v  $f(a)$ , potem je  $g \circ f$  zvezna v  $a$ .

**DOKAZ:** Izberemo poljubno konvergentno zaporedje  $x_n \in D_f$  z limito  $a$ . Ker je  $f$  zvezna v  $a$ , zaporedje  $f(x_n)$  konvergira proti  $f(a)$ . Ker je  $g$  zvezna v  $f(a)$ , zaporedje  $g(f(x_n))$  konvergira proti  $g(f(a))$ .

**DEFINICIJA:** Naj bo  $f : D \rightarrow R$  funkcija. Pravimo, da je  $f$  *zvezna funkcija*, če je zvezna v vsaki točki  $a \in D$ .

**PRIMERI:**

- 1) Konstante so zvezne funkcije. Polinome in racionalne funkcije lahko dobimo z deljenjem in množenjem linearnih funkcij. Posledica je, da so polinomi in racionalne funkcije zvezne.

**DEFINICIJA:** Naj bo  $f : D \rightarrow R$  funkcija. Pravimo, da je  $f$  *enakomerno zvezna* na  $D$ , če velja:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in D : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

**Opomba:** Če je  $f$  enakomerno zvezna na  $D$ , potem je  $f$  zvezna na  $D$ .  $f$  je zvezna na  $D$  ( $f$  je zvezna na vsaki točki  $a \in D$ ):

$$\forall a \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$f(x) = \frac{1}{x}$  ni enakomerna zvezna na  $(0, \infty)$

Naj bo  $0 < a < \frac{1}{2}$ . Velja:

$$|f(a) - f(2a)| = \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} \right| = \frac{1}{2a}$$

Za  $\varepsilon = 1$  izveremo poljuben  $\delta > 0$ . Obstaja  $a$ , da velja:  $\frac{1}{2a} > 1$  in  $2a \in (0, \delta)$ .

$$|a - 2a| = a < \delta \wedge |f(a) - f(2a)| \geq 1$$

**Lema o pokritjih:** Dan je nek zaprt interval  $[a, b]$  in za vsak  $x \in [a, b]$  imamo  $\delta(x) > 0$ . Označimo  $O_x = (x - \delta(x), x + \delta(x))$  okolica točke  $x$ . Tedaj v družini okolic  $\{O_x; x \in [a, b]\}$  obstaja končno število okolic, ki pokrijejo  $[a, b]$ , t.j. obstaja  $n \in \mathbb{N}$  in obstaja  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ , da velja  $[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^n O_{x_j}$

DOKAZ:  $O_a$  pokrije vsak interval  $[a, c]$ , kjer je  $c < a + \delta(a)$ .

$S = \{c \in [a, b], \text{interval } [a, c] \text{ je mogoče pokriti s končno mnogo okolicami iz družine } O_x\}$

Vemo  $S \neq \emptyset$  in  $S \subset [a, b]$ . Torej je  $S$  neprazna navzgor omejena množica in ima  $\sup S := M$ .

Dokazujemo  $M \in S$

Vemo  $M \in [a, b]$ . Ker je  $M - \delta(M) < M$ , obstaja  $c > M - \delta(M), c \in S$ . Velja

$$\begin{aligned} [a, c] &\subset O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \dots \cup O_{x_k} \\ [a, M] &\subset O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \dots \cup O_{x_k} \cup O_M \end{aligned}$$

$\Rightarrow M \in S$

Če  $M \neq b$  potem zgornji interval pokrije  $[a, M + \delta(M)) \cap [a, b]$ , kar je več kot  $[a, M]$ . To je v protislovju s tem, da  $M = \sup S$ .  $\rightarrow \leftarrow$

$\Rightarrow M = b$

POSLEDICA: Naj bo  $K = [a, b]$ . Iz vsakega pokritja  $K$  z odprtimi intervali je mogoče izbrati končno podpokritje. To pomeni:  $\{I_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  družina odprtih intervalov, za katero velja:

$$K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$$

Obstaja  $m \in \mathbb{N}$  in  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m \in \Gamma$ , da velja:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m I_{\gamma_i}$$

DOKAZ POSLEDICE Za  $x \in [a, b]$  velja  $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_{\gamma}$ .

Obstaja  $\gamma \in \Gamma : x \in I_{\gamma}$ .

Obstaja  $\delta(x) > 0 : (x - \delta(x), x + \delta(x)) \subset I_{\gamma}$

Na ta način dobimo pokritje  $[a, b]$  z  $O_x$ . Po lemi o pokritjih obstaja  $m \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_m \in [a, b]$

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^m O_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^m I_{\gamma_i}$$

ker  $O_{x_i} \subset I_{\gamma_i}$  za ustrežno izbrane  $\gamma$ . □

IZREK: Naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija. Potem je  $f$  enakomerna zvezna na  $[a, b]$

$c \in [a, b] : f$  je zvezna v točki  $c$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a, b] : |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

$f$  je enakomerno zvezna na  $[a, b]$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in [a, b] : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

DOKAZ: Ker je  $f$  zvezna na  $[a, b]$  je za  $x \in [a, b]$   $f$  zvezna v  $x$ . Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$ . Obstaja  $\delta(x) > 0$ , za katerega velja

$$x' \in [a, b] : |x' - x| < 2\delta(x) \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

$$O_x = (x - \delta(x), x + \delta(x)) : \{O_x : x \in [a, b]\}$$

je odprto pokritje  $[a, b]$  in po lemi o pokritjih obstaja končno podpokritje:

$$m \in \mathbb{N} : x_1, \dots, x_m \in [a, b]$$

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^m O_{x_i}$$

$$\delta := \min\{\delta(x_1), \dots, \delta(x_m)\}$$

Naj bosta  $x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta$ .

Obstaja  $i \in 1, \dots, m : x \in (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i))$ :

$$|x' - x_i| = |x' - x + x - x_i| \leq |x' - x| + |x - x_i| < 2\delta(x_i)$$

Po (3) sledi:

$$|x - x_i| < \delta(x_i) < 2\delta(x_i) \Rightarrow |f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x' - x_i| < 2\delta(x_i) \Rightarrow |f(x') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(x) - f(x')| = |f(x) - f(x_i) + f(x_i) - f(x')| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x')| < \varepsilon$$

□

### 5.2.2 Lastnosti zveznih funkcij

**IZREK:** (*bisekcija*) Naj bo  $f$  zvezna funkcija na  $[a, b]$ . Če ima  $f$  v krajiščih intervala  $[a, b]$  nasprotno predznačeni vrednosti, potem ima  $f$  na  $[a, b]$  ničlo.

$$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow (\exists c \in [a, b] : f(c) = 0)$$

**DOKAZ:**  $c_1 = \frac{a+b}{2}$ . Če je  $f(c_1) = 0$ , potem končamo.

Sicer označimo z  $[a_1, b_1]$  tistega od podintervalov  $[a, c_1], [c_1, b]$ , na katerem ima  $f$  v krajiščih nasprotno predznačeni vrednosti.

Nadaljujemo podobno  $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \dots$ . Če se postopek ni ustavil.

Na ta način konstruiramo zaporedje vloženih intervalov:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a) \quad \text{in} \quad f(a_n)f(b_n) < 0$$

Po izreku obstaja natanko ena točka  $c$ , ki je vsebovana v vseh intervalih

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Ker je  $f$  zvezna, velja:

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Ker velja  $f(a_n)f(b_n) < 0$

$$(f(c))^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0 \Rightarrow f(c) = 0$$

□

**Opomba:** Metoda bisekcije je metoda za numerično iskanje ničel

IZREK: Naj bo  $f$  zvezna funkcija na  $[a, b]$ . Potem je  $f$  omejena. Ozaničimo:

$$m = \inf_{[a,b]} f \quad \text{in} \quad M = \sup_{[a,b]} f$$

Obstajata  $x_m, x_M \in [a, b]$ , za kateri velja

$$f(x_m) = m \quad \text{in} \quad f(x_M) = M$$

**Opomba:** Zvezna funkcija na zaprtem intervalu doseže minimum in maksimum.

DOKAZ: Denimo, da  $f$  ni omejena. Recimo, da ni navzgor omejena. Torej velja:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$$

Zaporedje  $x_n$  je omejeno, zato ima stekališče  $s$ . Torej obstaja konvergentno podzaporedje  $x_{n_k} \rightarrow s$ . Ker je  $f$  zvezna, je  $f(x_{n_k})$  konvergentna z limito  $f(s)$ . Pridemo do protislovja, ker mora biti  $f(x_{n_k}) > n$  neomejeno.  $\rightarrow \leftarrow$

Naj bo  $M = \sup f$ . Vemo  $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq M$ . Recimo, da funkcija  $f$  ne zadodoseže vrednosti  $M$ .

$$M - f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$M - f$  je zvezna na  $[a, b]$ , zato  $\frac{1}{M-f}$  zvezna na  $[a, b]$  Po pravkar dokazanem je  $\frac{1}{M-f}$  omejena. Torej

$$\exists A \in \mathbb{R}, A > 0 : \frac{1}{M-f} \leq A \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\frac{1}{A} \leq M - f(x)$$

$$f(x) \leq M - \frac{1}{A} \quad \forall x \in [a, b]$$

Pridemo do protislovja, ker  $M = \sup f \rightarrow \leftarrow$ .

Torej obstaja  $x_M \in [a, b] : f(x_M) = M$

□

POSLEDICA: Naj bo  $f$  zvezna funkcija na  $[a, b]$ . Označimo  $m = \min f$ ,  $M = \max f$ . Potem funkcija  $f$  doseže vse vrednosti med  $m$  in  $M$ .

$$\forall c \in [m, M] \exists x_c \in [a, b] : f(x_c) = c$$

DOKAZ: Če je  $m = M$  je  $f$  konstantna.

Če  $m \neq M$ : naj bo  $c \in (m, M)$ . Definiramo  $g(x) = f(x) - c$ .  $g$  je definirana na  $[a, b]$  in je zvezna. Obstajata  $x_m$  in  $x_M$  :  $f(x_m) = m, f(x_M) = M$ .  $g$  zožimo med  $x_m$  in  $x_M$ .  $g$  ima na tem intervalu v krajiščih nasprotno predznačeni vrednosti:  $m - c < 0$  in  $M - c > 0$ . Zato obstaja  $x_c$  :  $g(x_c) = 0$ . Velja:  $f(x_c) = c$ .

□

### 5.3 Monotone zvezne funkcije

DEFINICIJA: Naj bo  $I \subset \mathbb{R}$  interval in  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Pravimo, da je  $f$  *naraščajoča funkcija* (na  $I$ ), če velja

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Pravimo, da je  $f$  *strogo naraščajoča* (na  $I$ ), če

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Podobno definiramo padajočo in strogo padajočo funkcijo.

Funkcija je (strogo) *monotona*, če je ali (strogo) naraščajoča, ali (strogo) padajoča.

IZREK: Naj bo  $f$  strogo monotona funkcija na  $[a, b]$ . Če je  $f$  zvezna, potem je njena inverzna funkcija  $f^{-1}$  zvezna.

DOKAZ: Denimo, da je  $f$  strogo naraščajoča. Ker je  $f$  strogo naraščajoča, je injektivna, zato inverzna funkcija obstaja.

Vemo: Ker je  $f$  zvezna, je njena zaloga vrednosti zaprt interval od najmanjše do največje vrednosti, t.j.:  $[f(a), f(b)]$ .

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$$

Dokazujemo, da je  $f^{-1}$  zvezna  $\forall y_0 \in [f(a), f(b)]$ .



Izberimo  $\varepsilon > 0$ . Obstaja natanko en  $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = y_0$  ( $f^{-1}(y_0) = x_0$ ).

Ker je  $f$  strogo naraščajoča:

$$f(x_0 - \varepsilon) < \underbrace{y_0}_{f(x_0)} < f(x_0 + \varepsilon)$$

Izberemo

$$\delta = \min\{f(x_0 + \varepsilon) - y_0, y_0 - f(x_0 - \varepsilon)\} > 0$$

Če  $|y - y_0| < \delta : f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$

Ker je  $f^{-1}$  strogo naraščajoča:

$$\begin{aligned} x_0 - \varepsilon &< f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \\ |f^{-1}(y) - \underbrace{x_0}_{f^{-1}(y_0)}| &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

## 5.4 Zveznost posebnih funkcij

Vemo, da so polinomi in racionalne funkcije zvezne.

PRIMER  $f(x) = x^n$  je zvezna funkcija

- $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  liho, potem je  $f$  strogo naraščajoča na  $\mathbb{R}$ . Po izreku  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  zvezna funkcija na  $\mathbb{R}$ .
- $n$  sodo:  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  je zvezna funkcija na  $[0, \infty)$ .

Zato so *algebraične* funkcije zvezne.

Eksponentna funkcija  $a > 0, a \neq 1$ . Definirali smo že  $a^x, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} \\ x \in \mathbb{R}, x &= \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \\ a^x &:= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} \end{aligned}$$

Iz pravil za računanje z racionalnimi potencami sledi:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

**IZREK:** Eksponentna funkcija  $x \mapsto a^x$  je zvezna na  $\mathbb{R}$ , njena zaloga vrednosti je  $(0, \infty)$ .

Če je  $a > 1$ , potem je eksponentna funkcija naraščajoča, če je  $a < 1$ , potem je padajoča.

**DOKAZ:** Za  $a > 1$ , za  $a < 1$  je podobno.  $x \mapsto a^x$  strogo naraščajoča

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

$$a^{x_2} = a^{x_1 + (x_2 - x_1)} = a^{x_1} \cdot \underbrace{a^{x_2 - x_1}}_{>1} > a^{x_1}$$

Zveznost: Vemo že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in \mathbb{Q}, |h| < \delta \Rightarrow |a^h - 1| < \varepsilon$$

Ker je  $x \mapsto a^x$  strogo naraščajoča, velja zgornja trditev tudi če  $\mathbb{Q}$  zamenjamo z  $\mathbb{R}$ .

$$h > 0 : \exists h_1 \in (h, \delta) : 0 < h < h_1 < \delta \Rightarrow a^0 < a^h < a^{h_1}$$

ker je  $|a^{h_1} - a^0| < \varepsilon$  je tudi  $|a^h - a^0| < \varepsilon$ .

Podobno lahko naredimo za  $h < 0$ .

Torej je  $x \mapsto a^x$  zvezna v točki 0.

Naj bo  $x_0 \in \mathbb{R}$  in dokažimo zveznost v  $x_0$ . Izberemo  $\varepsilon > 0$  in iščemo  $\delta > 0$ :

$$\begin{aligned} |a^x - a^{x_0}| &= a^{x_0} |a^{x-x_0} - 1| \\ |a^{x-x_0} - 1| &< \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} \end{aligned}$$

Ker je zvezna v točki 0, obstaja  $\delta > 0$ :

$$|h| = |x - x_0| < \delta \Rightarrow |a^h - 1| < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a^n &= \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} &= 0 \end{aligned}$$

Na  $[-n, n]$   $a^x$  doseže vse vrednosti od  $[a^{-n}, a^n]$ . Za  $a^x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a^{-n}, a^n] = (0, \infty)$

**Posledica:** Naj bo  $a > 0, a \neq 1$ . Potem velja:

$$(a^x)^y = a^{xy}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

DOKAZ: (skica)

$$\begin{aligned} p_n &\in \mathbb{Q}, & p_n &\rightarrow x \\ q_m &\in \mathbb{Q}, & q_m &\rightarrow y \end{aligned}$$

$(a^{p_n})^{q_m} = a^{p_n q_m}$  za  $\forall n, m$  (ker so racionalne potence)

$a^{p_n q_m} = a^{x q_m}$ , ko gre  $n \rightarrow \infty$  po definiciji.  $a^{x q_m} = a^{x y}$ , ko gre  $m \rightarrow \infty$  po definiciji.

$(a^{p_n})^{q_m} = (a^x)^{q_m}$ , ko gre  $n \rightarrow \infty$ , ker je  $x \mapsto x^{q_m}$  zvezna.  $(a^x)^{q_m} = (a^x)^y$ , ko gre  $m \rightarrow \infty$ , zaradi zveznosti.

DEFINICIJA: Naj bo  $a > 0, a \neq 1$  inverzno funkcijo eksponentne funkcije  $x \mapsto a^x$  imenujemo *logaritemska funkcija* z osnovo  $a$  in označimo z  $\log_a$ . Logaritem z osnovo  $e$  označimo z  $\ln$  in imenujemo *naravni logaritem*.

**Opomba:**

- $\log$  obstaja (po nekem izreku)
- $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  slika bijektivno

Po definiciji inverzne funkcije je

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

IZREK: Funkcija  $\log_a$  je zvezna na  $(0, \infty)$ . Če je  $a > 1$ , potem je strogo naraščajoča, če je  $a < 1$ , potem je strogo padajoča. **Velja:**

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y & \forall x, y > 0 \\ \log_a x^\lambda &= \lambda \log_a x & \forall x > 0, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

DOKAZ: Vse razen lastnosti so posledica prejšnjih izrekov

$$\begin{aligned} c = \log_a x \quad \text{in} \quad d = \log_a y \\ \Rightarrow a^c = x \quad \text{in} \quad a^d = y \\ \Rightarrow \underbrace{a^c \cdot a^d}_{a^{c+d}} = xy \\ \Rightarrow c + d = \log_a(xy) \\ \Rightarrow \log_a x + \log_a y = \log_a(xy) \end{aligned}$$

□

## 5.5 Trigonometrične funkcije

Iz prosminarja vemo

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \varphi$$
$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi$$

zato je za študij osnovnih lastnosti dovolj obravnati le eno funkcijo.

**IZREK:** Sinus je zvezna funkcija  $\mathbb{R}$ .

**DOKAZ:** Narišemo si enotsko krožnico in v njo vrišemo kot  $\varphi_0$  in  $\varphi$ , kjer  $\varphi_0 < \varphi$ . Ozaničimo trikotnik  $ABC$ , tako da je  $A(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$ , in  $B(\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Vemo, da je  $ABC$  pravokotni trikotnik, in je dolčina loka  $AB = l$ . Velja  $l > AB > AC, BC$ .

Vemo:  $\overline{BC} = |\sin \varphi - \sin \varphi_0|$  in dolžina loka  $AB = |\varphi - \varphi_0|$ . Velja  $|\sin \varphi - \sin \varphi_0| \leq |\varphi - \varphi_0|$ .

sinus je zvezna v točki  $\varphi_0$

Izberemo  $\varepsilon > 0$  in iščemo  $\delta$ . Velja

$$|\sin \varphi - \sin \varphi_0| \leq |\varphi - \varphi_0| \varepsilon$$

Izberemo  $\delta := \varepsilon$ : če je  $|\varphi - \varphi_0| < \delta = \varepsilon$ , potem je  $|\sin \varphi - \sin \varphi_0| \leq |\varphi - \varphi_0| < \delta = \varepsilon$ .

□

## 5.6 Ciklometrične funkcije

. Večino znamo že iz proseminarja. Vemo, da je arcsin inverzna funkcija  $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ . Posledica izreka je, da so arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens in arkus kotangens zvezna funkcije.

*Elementarne funkcije* so funkcije, ki jih dobimo iz osnovnih tipov (polinomi, racionalne funkcije, algebrائيčne funkcije, eksponentne, trigonometrične) z uporabo aritmetičnih opracij, kompozituma in invertiranja. **Primer:**

$$\ln(\arcsin(\sqrt{x^2 + 6x + e^x}))$$

Elementarne funkcije so zvezne.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 16 & x \leq 0 \end{cases}$$

ni zvezna funkcija (ni elementarna funkcija). Pravimo ji *zlepek*.

## 5.7 Limita funkcije

Radi bi opisali lokalno obnašanje funkcije: imamo funkcijo, ki je definiran v okolici točke  $a$  in ne nujno v  $a$ .

DEFINICIJA: Naj bo funkcija  $f$  definirana v *prebodeni okolici* točke  $a$ , t.j.: obstaja  $r > 0$ , da je  $f$  definirana na  $(a - r, a + r) \setminus \{a\}$ . Število  $L \in \mathbb{R}$  imenujemo *limita* funkcije  $f$ , ko gre  $x$  proti  $a$ , če

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

TRDITEV: Naj bo  $f$  definirana v okolici točke  $a$ . Funkcija  $f$  je zvezna v točki  $a$  natanko tedaj, kadar je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

to pomeni:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  obstaja in je enaka  $f(a)$ .

DOKAZ: napišemo obe definiciji in je očitno, zato je bil za DN.

POSLEDICA: Naj bo funkcija  $f$  definirana v prebodeni okolici  $D_f$  točke  $a$ . Če obstaja  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , potem je funkcija

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \setminus \{a\} \\ L & x = a \end{cases}$$

zvezna funkcija v točki  $a$ .

$$\text{DOKAZ: } \lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \tilde{f}(a)$$

IZREK: Naj bo funkcija  $f$  definirana v prebodeni okolici  $\mathcal{U}$  točke  $a$ . Potem obstaja  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  natanko tedaj, kadar za vsako zaporedje  $x_n \in \mathcal{U}$ , ki konvergira proti  $a$ , zaporedje  $f(x_n)$  konvergira proti  $L$ .

DOKAZ: Posledica trditve (zvezna  $\Rightarrow$  po izreku za zveznost).

IZREK: Naj bosta  $f$  in  $g$  definirani v prebodeni okolici točke  $a$  in denimo, da obstaja  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  in  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Potem obstajajo  $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} (f-g)(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$  in velja:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) &= \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)\end{aligned}$$

Če je  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ , potem obstaja  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  in velja

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

DOKAZ: Imamo zveznost po trditvi in delamo z zaporedji.

DEFINICIJA: Naj bo funkcija  $f$  definirana na  $(a-r, a)$  za nek  $r > 0$ . Pravimo, da je  $L \in \mathbb{R}$  *leva limita* funkcije  $f$ , ko gre  $x$  proti  $a$  če

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f : x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

**Oznaka:**

$$L = \lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a-) = \lim_{x \uparrow a} f(x)$$

Podobno definiramo *desno limito* in označimo

$$D = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a+) = \lim_{x \downarrow a} f(x)$$

TRDITEV: Naj bo  $f$  definirana v prebodeni okolici točke  $a$ . Limita funkcije  $f$  ko gre  $x$  proti  $a$  obstaja natanko tedaj, kadar obstajata leva in desna limita in sta enaki.

DOKAZ: Potrebno je lepo zložiti definicije, zato je bil dokaz za DN.

IZREK: Naj bo  $f$  monotona funkcija na  $[a, b]$ . Potem za vsak  $c \in (a, b)$  obstajata  $f(c-)$  in  $f(c+)$ . Funkcija  $f$  je zvezna v točki  $c$  natanko tedaj, kadar  $f(c-) = f(c+)$ . Če je naraščajoča, potem je  $f(c-) \leq f(c) \leq f(c+)$ . Če je  $f$  padajoča, potem je  $f(c+) \leq f(c) \leq f(c-)$ .

DEFINICIJA: Če monotona funkcija  $f$  na  $[a, b]$  ni zvezna v točki  $c$ , potem  $f(c+) - f(c-)$  imenujemo *skok* funkcije  $f$  v točki  $c$ .

DOKAZ: (izreka) Naj bo  $f$  naraščajoča,  $c \in (a, b)$ . Vemo

$$\forall x \in [a, c] : f(x) \leq f(c)$$

Množica  $\{f(x) : x \in [a, c)\}$  je navzgor omejena, zato ima supremum  $S$ . Dokazujemo  $\underline{f(c-)} = S$

Izberemo  $\varepsilon > 0$ . Obstaja  $x_0 \in [a, c)$ , da je  $f(x_0) > S - \varepsilon$ .

Za  $x \in [x_0, c)$  velja: ker je  $f$  naraščajoča:  $S - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq S$ . Torej  $f(x) \in (S - \varepsilon, S + \varepsilon)$ . Vzamemo  $\delta := c - x_0$ . Podobno naredimo za desno limito in padajoče zaporedje.

□

IZREK: Monotona funkcija  $f$  na  $[a, b]$  ima kvečjemo števno mnogo točk nezveznosti.

DOKAZ: Vemo: v točkah nezveznosti ima funkcija monotona skok. Naj bo

$$\mathcal{N} = \text{množica točk nezveznosti}$$

Velja

$$\forall c \in \mathcal{N} \exists f(c-), f(c+) : f(c-) \neq f(c+)$$

Če je  $f$  naraščajoča: obstaja  $r_c \in (f(c-), f(c+)) \cap \mathbb{Q}$ . Naj bo

$$g : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{Q} \quad g(c) = r_c$$

$g$  je injektivna, zato je  $\mathcal{N}$  kvečjemu števna.

□

DEFINICIJA: Naj bo funkcija  $f$  definirana na  $(a, \infty)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Število  $L \in \mathbb{R}$  je limita funkcije  $f$ , ko pošljemo  $x$  čez vse meje, če velja:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R}, M > a \forall x \in \mathbb{R} : x \geq M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

V tem primeru pišemo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

Podobno definiramo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

DEFINICIJA: Naj bo funkcija  $f$  definirana na prebodeni okolici točke  $a$ . Pravimo, da  $f$  izpolnjuje *Cauchyjev pogoj* pri  $a$ , če

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} : |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

TRDITEV: Naj bo funkcija  $f$  definirana na prebodeni okolici točke  $a$ . Funkcija  $f$  izpolnjuje Cauchyjev pogoj pri  $a$  natanko takrat, kadar obstaja limita funkcije  $f$ , ko gre  $x$  proti  $a$ .

DOKAZ: Za DN.

**Opomba:** Cauchyjev pogoj ima smisel tudi pri  $a = \pm\infty$  in trditev velja tudi pri  $a = \pm\infty$ .

DEFINICIJA: Naj bo funkcija  $f$  definirana v prebodeni okolici točke  $a$ . Pravimo, da je limita funkcije  $f$ , ko gre  $x$  proti  $a$  enaka neskončno če

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0, \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} : f(x) > M$$

Označimo z  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Podobno definiramo:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

PRIMER:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Če si narišemo krožni izsek enotske krožnice, lahko z malo geometrije pridemo do ocene  $\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \tan x$ . Nato izraz nekoliko preuredimo in dobimo  $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ . Uporabimo lahko izrek o sendviču in pridemo do končnega rezultata.

2)  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$

Vemo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$



Za  $x \in [n, n+1)$  velja:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Po izreku o sendviču torej velja  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$

$$3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$a^h = 1 + \frac{1}{x}$$

$$h > 0 : h \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$$

$$h < 0 : h \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty$$

$$h = \log_a \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{1}{x \log_a \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\log_a \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} \rightarrow \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

## 5.8 Odvod

DEFINICIJA: Naj bo funkcija  $f$  definirana v okolici točke  $a$ . Če obstaja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

jo imenujemo *odvod* funkcije  $f$  v točki  $a$  in jo označimo s  $f'(a)$  in pravimo, da je  $f$  *odvodljiva* v točki  $a$ .

**Opomba:** Če je  $f$  odvodljiva v točki  $a$ :  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$$\Delta f = f(x) - f(a)$$

$$\Delta x = x - a$$

razliki ali *diferenca*.  $x = a + h$ ,  $h = x - a$

Kvoceint  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  se imenuje *diferenčni kvoecient*.

GEOMETRIJSKI POMEN: Naklonski koeficient sekante skozi  $(a, f(a)), (x, f(x))$  je  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ . V limiti  $x \rightarrow a$  dobimo naklonski koeficient tangente.

PRIMER:  $f(x) = x^2 + 1$ . Izračunaj  $f'(2)$ .

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = 4$$

IZREK: Naj bo funkcija  $f$  definirana v okolici točke  $a$ . Če je  $f$  *odvadjiva* v točki  $a$ , potem je  $f$  zvezna v točki  $a$ .

DOKAZ: Denimo, da je  $f$  odvadjiva v točki  $a$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left( f(a) + (f(x) - f(a)) \frac{x-a}{x-a} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a) \end{aligned}$$

PRIMER:

1)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  je zvezna na  $\mathbb{R}$ . Ali je odvadjiva v 0?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\frac{2}{3}} = \infty$$

ni odvadjiva.

2)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$$

ne obstaja

3)  $g(x) = |x|$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

ne obstaja, ker  $\lim_{h \downarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1$ ,  $\lim_{h \uparrow 0} \frac{|h|}{h} = -1$

DEFINICIJA: Naj bo funkcija  $f$  definirana na  $[a, a + r)$  za nek  $r > 0$ . Če obstaja  $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , jo imenujemo *desni odvod* funkcije  $f$  v točki  $a$ . Podobno definiramo *levi odvod*.

TRDITEV: Naj bo funkcija  $f$  definirana v okolici točke  $a$ . Funkcija  $f$  je odvajljiva v točki  $a$  natanko tedaj, kadar obstaja levi in desni odvod funkcije  $f$  v točki  $a$  in sta enaka.

DEFINICIJA: Pravimo, da je funkcija  $f$  odvajljiva na  $(a, b)$ , če je  $f$  odvajljiva v vsaki točki iz  $(a, b)$ .

Funkcija  $f$  je odvajljiva na  $[a, b]$ , če je  $f$  odvajljiva na  $(a, b)$ , v krajišču  $a$  ima desni odvod in v krajišču  $b$  ima levi odvod.

DEFINICIJA: Naj bo funkcija  $f$  definirana na intervalu  $I$  in naj bo  $f$  odvedljiva vsaj v kakšni točki iz  $I$ . Označimo z

$$I' = \{x \in I : f \text{ je odvedljiva v točki } x\}$$

Funkcijo  $f' : I' \rightarrow \mathbb{R}$  in je definirana s predpisom  $x \mapsto f'(x)$  imenujemo *odvod* funkcije  $f$ .

DEFINICIJA: Naj bo funkcija  $f$  definirana na intervalu  $I$ .

Pravimo, da je  $f$  *zvezno odvedljiva* na  $I$ , če je  $f$  odvedljiva na  $I$  in je njen odvod  $f'$  zvezna funkcija na  $I$ .

DEFINICIJA: Naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija. Pravimo, da je  $f$  *odsekoma zvezno odvedljiva*, če je odvedljiva povsod, razen v končno mnogo točkah  $c_1, \dots, c_k$ ,  $a < c_1 < \dots < c_k < b$  v katerih ima  $f$  levi in desni odvod, na vsakem podintervalu  $[a, c_1], [c_1, c_2], \dots, [c_k, b]$ , pa je  $f$  zvezno odvedljiva.

Primer:  $f(x) = |x|$ .

## 5.9 Diferencial

Naj bo  $f$  odvajljiva v točki  $a$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Velja:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h} = 0$$

Označimo števec  $o(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$ , kjer je  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ .

Velja:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h)$$

Izpeljali smo, da je odvodljivo funkcijo v točki  $a$  v okolici točke  $a$  mogoče „dobro“ aproksimirati z „linearno“ funkcijo.

**DEFINICIJA:** Naj bo funkcija  $f$  definirana v okolici točke  $a$ . Pravimo, da je  $f$  *diferenciabilna* v točki  $a$ , če obstaja linearna preslikava  $\mathcal{L} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero velja

$$f(a+h) - f(a) = \mathcal{L}(h) + o(h)$$

kjer je  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ . Linearno preslikavo  $\mathcal{L}$  imenujemo *diferencial* funkcije  $f$  v  $a$  in jo označimo  $df(a)$ .

**Opombe:**

1. Če je  $f$  odvedljiva v točki  $a$ , potem je  $f$  diferenciabilna v točki  $a$  in  $\mathcal{L}(h) = f'(a)h$ .
2. Vse linearne preslikave  $\mathcal{L} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  so oblike  $h \mapsto kh, k \in \mathbb{R}$ .

**IZREK:** Naj bo funkcija  $f$  definirana v okolici točke  $a$ . Potem je  $f$  diferenciabilna v točki  $a$  natanko tedaj, kadar je  $f$  odvedljiva v točki  $a$ . V tem primeru velja  $df(a)h = f'(a)h$ .

**DOKAZ:**

( $\Leftarrow$ ) že vemo

( $\Rightarrow$ ) Po predpostavki obstaja  $\mathcal{L} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  linearna preslikava, da je

$$f(a+h) - f(a) = \mathcal{L}(h) + o(h)$$

kjer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ .

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathcal{L}(h)}{h}$$

Ker je  $\mathcal{L}$  linearna, obstaja  $a \in \mathbb{R} : \mathcal{L}(h) = ah, \quad \forall h \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathcal{L}(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - ah}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - a \end{aligned}$$

Po pravilih za računanje z limitami torej obstaja  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  in je enaka  $a$ .

ZAPIS: Naj bo  $f$  odvedljiva v  $x$   $h = \Delta x$ .

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\text{kjer je } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Vemo  $df(x)\Delta x = f'(x)\Delta x$ . Vzamemo  $f(x) = x$   $dx = \Delta x$ .  $df = f'dx$   $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ .

## 5.10 Pravila za odvajanje

1.  $f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

2. Če sta  $f$  in  $g$  odvedljivi funkciji v točki  $a$ , potem so tudi  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  odvedljive v točki  $a$  in velja

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a) \\ (fg)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \end{aligned}$$

Če je  $g(a) \neq 0$ , potem je  $\frac{f}{g}$  odvedljiva v  $a$  in velja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

DOKAZ:

$$\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h)}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \\
&= g(a)f'(a) + f(a)g'(a)
\end{aligned}$$

POSLEDICA: Če je  $f$  odvedljiva v točki  $a$  in  $\lambda \in \mathbb{R}$ , potem velja

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

Dokaz z uporabo formule za produkt in  $g(x) = \lambda$ .

POSLEDICA: Če so funkcije  $f_1, \dots, f_n$  odvedljive v točki  $a$ , potem velja

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)'(a) = f_1'(a) f_2(a) \cdots f_n(a) + f_1(a) f_2'(a) f_3(a) \cdots f_n(a) + \cdots + f_1(a) \cdots f_n'(a)$$

Dokaz z indukcijo in formulo za produkt.

### 3. Odvod kompozituma

Naj bo funkcija  $f$  odvedljiva v točki  $a$  in naj bo  $g$  odvedljiva v točki  $f(a)$ . Potem je  $g \circ f$  odvedljiva v točki  $a$  in velja

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

DOKAZ: Ker je  $f$  odvedljiva v točki  $a$ , je  $f$  diferenciable v točki  $a$  in velja:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o_f(h) \quad \text{kjer} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_f(h)}{h} = 0 \quad (4)$$

Podobno za  $g$ :

$$g(f(a)+k) = g(f(a)) + kg'(f(a)) + o_g(k) \quad \text{kjer} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{o_g(k)}{k} = 0 \quad (5)$$

Po definiciji velja:

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h}$$

Če razpišemo z zgornjima dvema enčabama dobimo:

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &\stackrel{(4)}{=} g(f(a) + \underbrace{hf'(a) + o_f(h)}_k) \stackrel{(5)}{=} \\ &= g(f(a)) + (hf'(a) + o_f(h)) + g'(f(a)) + o_g(k(h)) = \\ &= g(f(a)) + hg'(f(a)) \cdot f'(a) + o_f(h)g'(f(a)) + o_g(k(h)) \end{aligned}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} &= g'(f(a))f'(a) + \underbrace{\frac{o_f(h)}{h}g'(f(a))}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} + \frac{o_g(k(h))}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_g(k(h))}{h} &= \lim_{k \rightarrow 0} \underbrace{\frac{o_g(k(h))}{k(h)}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{k(h)}{h}}_{\rightarrow f'(a)} = 0 \end{aligned}$$

ker:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} k(h) \lim_{h \rightarrow 0} \left( hf'(a) + \frac{o_f(h)h}{h} \right) &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf'(a) + o_f(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( f'(a) + \frac{o_f(h)}{h} \right) = f'(a) \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} &= g'(f(a)) \cdot f'(a) = (g \circ f)'(a) \end{aligned}$$

□

**IZREK:** Naj bo  $f$  zvezna, strogo monotona na  $[a, b]$ ,  $c \in (a, b)$  in denimo, da je  $f$  odvedljiva v točki  $c$ . Če je  $f'(c) \neq 0$ , potem je inverzna funkcija  $f^{-1}$  odvedljiva v točki  $f(c) = d$  in velja:

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}$$

**DOKAZ:** Za strogo naraščajoče:

$f^{-1}$  je zvezna na  $[f(a), f(b)]$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow d} \frac{\overbrace{f^{-1}(y)}^x - \overbrace{f^{-1}(d)}^c}{y - d} &= \text{ker je } f^{-1} \text{ zvezna, gre } x \rightarrow c, \text{ ko gre } y \rightarrow d \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{x - c}{f(x) - f(c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}} = \\ &= \frac{1}{f'(c)} \end{aligned}$$

**Geometrijski pomen:** graf  $f^{-1}$  dobimo z zrcaljenjem grafa  $f$  preko simetrane lihih kvadrantov. Če prezrcalimo premico preko simetrane lihih kvadrantov, je koeficient zrcaljenja premice obratna vrednost koeficienta dane premice.

**Opomba:** Če vemo, da je  $f^{-1}$  odveljiva, potem izpeljano formulo dobimo tudi takole:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \\ (f^{-1})'(f(x))f'(x) &= 1 \\ (f^{-1})'(\underbrace{f(x)}_y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \end{aligned}$$

## 5.11 Odvodi elementarnih funkcij

- $f(x) = x^n$  Za  $n \in \mathbb{N}$ :

$$f'(x) = (xx \dots x)' = 1x^{n-1} + x1x^{n-1} + xx1x^{n-3} + \dots + x^{n-1}1 = nx^{n-1}$$

Za cela števila nastavimo  $f(x) = x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$



$f$	$f'$	Dokaz
$c$	$0$	po definiciji
$x$	$1$	po definiciji
$x^n$	$nx^{n-1}$	(1)
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$	(2)
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(\log_a x)'$ s prehodom na novo osnovo
$a^x$	$a^x \ln a$	(3)
$e^x$	$e^x$	Uporabimo pravilo za $a^x$
$\sin x$	$\cos x$	(4)
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ , odvajamo kompozitum
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , odvajamo ulomek
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(5)
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Uporabimo zvezo $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	(6)

Tabela 2: Tabela odvodov

Za racionaln števila si najprej pogledjmo  $f(x) = x^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$ . Če je  $n$  sod, je odvedljiva na  $(0, \infty)$ , če je  $n$  lih, je odvedljiva na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
 (f(x))^n &= x \\
 n(f(x))^{n-1} f'(x) &= 1 \\
 f'(x) &= \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}
 \end{aligned}$$

$f(x) = x^{\frac{m}{n}}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$  lahko zapišemo kot:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left( \left( x^{\frac{1}{n}} \right)^m \right)' = \\
 &= m \left( x^{\frac{1}{n}} \right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - 1} = \\
 &= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}
 \end{aligned}$$

Če poznamo odvod potenčne funkcije, lahko naredimo še za realne eksponente. Naj bo  $h(x) = x^r, r \in \mathbb{R}, x > 0$ :

$$\begin{aligned}
 x^r &= e^{\ln x^r} = e^{r \ln x} \\
 (x^r)' &= (e^{r \ln x})' = e^{r \ln x} r \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^{r-1}
 \end{aligned}$$

- $\log_a x$

$$\begin{aligned}
 (\log_a x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left( \frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \log_a \lim_{h \rightarrow 0} \left( \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{1}{x}} = \\
 &= \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \frac{\ln e}{\ln a} = \\
 &= \frac{1}{x \ln a}
 \end{aligned}$$

- $a^x$  je inverzna funkcija strogo monotone funkcije  $\log_a x$ , ki ima povsod neničelen odvod, zato je odvedljiva.

$$\begin{aligned}
 \log_a(a^x) &= x \\
 \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x^x} (a^x)' &= 1 \\
 (a^x)' &= (\ln a) a^x = a^x \ln a
 \end{aligned}$$

- $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \\
 &= \cos x
 \end{aligned}$$

- $f(x) = \arcsin x$  je inverzna funkcija  $\sin x|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ , ki je strogo monotona, odvedljiva z neničelnim odvodom na  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Zato je arcsin odvedljiva na  $(-1, 1)$ .

$$\begin{aligned}
 \sin(\arcsin x) &= x \\
 \cos(\arcsin x)(\arcsin x)' &= 1 \\
 (\arcsin x)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
 \end{aligned}$$

- $\arctan x$  je inverz strogo naraščajoče odveljive funkcije  $\tan x$  z neničelnim odvodom, zato je odvedljiva.

$$\begin{aligned}\tan(\arctan x) &= x \\ \frac{1}{\cos(\arctan x)}(\arctan x)' &= 1 \\ (\arctan x)' &= \cos^x(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}\end{aligned}$$

## 5.12 Odvodi višjega reda

Denimo, da je  $f$  odvedljiva funkcija na intervalu  $I$ . Potem za  $x \in I$  poznamo  $f'(x)$ , kar nam definira funkcijo:

$$\begin{aligned}f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x)\end{aligned}$$

Če je funkcija  $f'$  odvedljiva na  $I$ , potem njen odvod označimo z  $f''$  in imenujemo *drugi odvod* funkcije  $f$  na  $I$ .

Višje odvode definiramo induktivno. Torej,  $n$ -ti odvod funkcije  $f$  je odvod  $(n-1)$ -tega odvoda

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

OZNAKE: Naj bo  $I$  (zaprti) interval:

- $C(I) = C^0(I)$  množica vseh zveznih funkcij na  $I$ .
- $C^1(I)$  množica vseh zvezno odveljivih funkcij na  $I$ , to so funkcije, ki so odveljive na  $I$  in je njihov odvod  $f'$  zvezna funkcija na  $I$ .
- $C^r(I)$  množica vseh  $r$ -krat zvezno odvedljivih funkcij na  $I$ , to so funkcije, ko so  $r$ -krat odvedljive in je  $f^{(r)}$  zvezna funkcija na  $I$ .
- $C^\infty(I) = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} C^r(I)$  neskončnokrat odvedljive funkcije

**Vemo:**  $f, g \in C^r(I)$ , potem  $f + g, \lambda f \in C^r(I)$  za vsak  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Torej je  $C^r(I)$  *vektorski prostor*.

Oglejmo si preslikavo:

$$\begin{aligned}D : f &\mapsto f' \\ C^r(I) &\rightarrow C^{r-1}(I)\end{aligned}$$

TRDITEV:  $D$  je linearna preslikava

DOKAZ: Doma. Ni težak, še posebej če si v zadnjem mesecu bil/a prisoten na algebri.

OZNAKA:

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} \qquad D^k = \frac{d^k}{dx^k}$$

PRIMERI:

1.  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \tilde{f} \in C(\mathbb{R})$$

Za  $x \neq 0$ :

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

Za  $x = 0$ :

$$\tilde{f}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(h) - \tilde{f}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h}$$

ne obstaja.

$\Rightarrow \tilde{f}$  v točki 0 ni odvedljiva. torej  $\tilde{f} \in C^1(I)$ , če  $0 \notin I$ , sicer  $\tilde{f} \notin C^1(I)$ .

2.  $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ .

Za  $x \neq 0$ :

$$g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Za  $x = 0$ :

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = 0$$

Torej:

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$g'$  je gotovo zvezna na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  $g'$  je zvezna v 0  $\iff \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = g'(0)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(2x \sin \frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{oscilira}} \quad \text{ne obstaja}$$

$g'$  ni zvezna v 0. Torej je  $g$  odvedljiva na  $\mathbb{R}$ , njen odvod  $g'$  pa ni zvezna funkcija na  $\mathbb{R}$ .

### 5.13 Rollov in Lagrangeev izrek

DEFINICIJA: Naj bo  $S \subset \mathbb{R}$  in naj bo  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Pravimo, da ima  $f$  v točki  $c \in S$  *lokalni maksimum*, če:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in S : |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(c)$$

Funkcija  $f$  ima v točki  $c \in S$  *lokalni minimum*, če:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in S : |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(c)$$

*Lokalni ekstrem* je skupno ime za lokalni minimum in lokalni maksimum.

TRDITEV: Naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  odvedljiva v točki  $c \in (a, b)$ . Če je  $c$  lokalni ekstrem od  $f$ , potem velja

$$f'(c) = 0$$

DOKAZ: Recimo, da je  $c$  lokalni maksimum. Poglejmo si sekante skozi  $(c, f(c))$ . Vzemimo  $\delta$  iz definicije lokalnega maksimuma. Potem velja

$$|x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(c)$$

Ločimo primera:

- $x > c$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (*)$$

- $x < c$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (**)$$

Poglejmo si odvod:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Iz (\*) sledi:

$$\lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Iz (\*\*) sledi:

$$\lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Torej velja  $f'(c) = 0$ .

DEFINICIJA: Naj bo funkcija  $f$  odvedljiva na intervalu  $I$ . Če je za nek  $c \in I$   $f'(c) = 0$ , imenujemo  $c$  *stacionarna točka* funkcije  $f$ .

Trditev pove, da so lokalni ekstremi stacionarne točke funkcije  $f$ .

ROLLOV IZREK: Naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, odvedljiva na  $(a, b)$  in  $f(a) = f(b)$ . Potem obstaja  $c \in (a, b)$ , da velja  $f'(c) = 0$ .

DOKAZ: Ker je  $f$  zvezna na  $[a, b]$  doseže minimum in maksimum. Označimo z  $x_m \in [a, b]$  točke, v katerih doseže minimum in z  $x_M \in [a, b]$  točke v katerih doseže maksimum.

- Če je  $f(x_m) = f(x_M)$ , potem je  $f$  konstanta, zato je  $f' \equiv 0$ .
- Če je  $f(x_m) \neq f(x_M)$ :  
Ker je  $f(a) = f(b)$ , vsaj ena od točk  $x_m, x_M$  ni krajišče intervala  $[a, b]$ . Označimo jo s  $c$ . V  $c$  je dosežen lokalni ekstrem, zato je po prejšnji trditvi  $f'(c) = 0$ .

LAGRANGEEV IZREK: Naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, odvedljiva na  $(a, b)$ . Potem obstaja tak  $c \in (a, b)$ , da velja

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

**Opomba:**  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

DOKAZ: Definirajmo  $F(x) = f(x) - f(a) + d(x - a)$  Funkcija  $F$  je zvezna na  $[a, b]$ , odvedljiva na  $(a, b)$ .

$d$  določimo tako, da bo veljalo  $F(a) = F(b)$

$$\begin{aligned} F(a) &= 0, & F(b) &= f(b) - f(a) + d(b - a) \\ d &= -\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

Funkcija  $F$  ustreza pogojem Rollovega izreka, zato obstaja  $c \in (a, b) : F'(c) = 0$ .

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) + d \\ f'(c) + d &= 0 \\ f'(c) &= -d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

□

**Opomba:**  $a = x$ ,  $b = x + h$ . Če  $c \in (a, b)$ , potem obstaja  $\vartheta \in (0, 1)$ , tako da  $c = x + \vartheta h$ . V tem primerju velja

$$f(x + h) - f(x) = f'(x + \vartheta h)h$$

za nek  $\vartheta \in (0, 1)$

POSLEDICA: Naj bo  $f$  odvedljiva funkcija na intervalu  $I$ . Tedaj velja:

- (i)  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f$  naraščajoča na  $I$
- (ii)  $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \iff f$  padajoča na  $I$
- (iii)  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$  strogo naraščajoča na  $I$
- (iv)  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$  strogo padajoča na  $I$

**Opomba:**  $f(x) = x^3$  strogo naraščajoča na  $\mathbb{R}$ , vendar  $f'(0) = 0$ .

DOKAZ:

- (i)  $(\Rightarrow)$  denimo, da  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ . Dokazujemo  $f$  je naraščajoča na  $I$   
 Izberemo  $a, b \in I, a < b$  in dokazujemo  $f(a) \leq f(b)$ . Ker je  $f$  zvezna na  $[a, b]$  in odvedljiva na  $(a, b)$ , izpolnjuje pogoje za Lagrangeev izrek. Torej velja

$$\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(b - a)}_{> 0} \Rightarrow f(b) \geq f(a)$$

$(\Leftarrow)$  Denimo, da je  $f$  naraščajoča na  $I$ .

$$x \in I : f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Če je  $x$  notranja točka, ločimo primera:

$h > 0$  in dovolj majhen, da  $x + h \in I$ :

$$f(x + h) - f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

$h < 0$  in dovolj majhen, da  $x + h \in I$ :

$$f(x + h) - f(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0.$$

□

Ostalo se dokaže po istem kopitu, tako da je za DN.

POSLEDICA: Če za odvedljivo funkcijo  $f$  na intervalu  $I$  velja  $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$ , potem je  $f$  konstanta.

**Opombe:**

- Vemo že, da je  $(c)' = 0$
- 

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 2 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \text{ za vse } x \in [0, 1] \cup [2, 3]$$

POSLEDICA: Naj bo  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija  $c \in (a, b)$  in naj bo  $f$  odvedljiva na  $(a, b) \cup (c, b)$ .

- (i) Če je  $f'(x) \leq 0$  za vse  $x \in (a, b)$  in  $f'(x) \geq 0$  za vse  $x \in (c, b)$ , potem ima  $f$  v točki  $c$  minimum.
- (ii) Če je  $f'(x) \geq 0$  za vse  $x \in (a, b)$  in  $f'(x) \leq 0$  za vse  $x \in (c, b)$ , potem ima  $f$  v točki  $c$  maksimum.

**DOKAZ:**

- (i) Vemo, da je  $f$  padajoča na  $(a, c)$  in naraščajoča na  $(c, b)$ .  $f$  je zvezna v  $c$ . Izberimo poljubno naraščajoče zaporedje  $y_n \uparrow c$ . Če  $y_n \geq x$  za vse  $n$ :  $f(x) \geq f(y_n)$ .



Sledi:  $f(x) \geq f(c)$  velja  $\forall x < c$ .

Simetrično na desni:  $x > c \Rightarrow f(x) \geq f(c)$

$\Rightarrow f$  ima v  $c$  minimum.

(ii) Podobno

□

POSLEDICA: Naj bo  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  odvedljiva funkcija in  $c \in (a, b)$  stacionarna točka funkcije  $f$ .

(i) Če obstaja  $\delta > 0$  za katerega velja

$$\begin{aligned} f'(x) &\leq 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c) \quad \wedge \\ f'(x) &\geq 0 \quad \forall x \in (c, c + \delta) \end{aligned}$$

potem ima  $f$  v  $c$  lokalni minimum.

(ii) Če obstaja  $\delta > 0$ , za katerega velja

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c) \quad \wedge \\ f'(x) &\leq 0 \quad \forall x \in (c, c + \delta) \end{aligned}$$

potem ima  $f$  v  $c$  lokalni maksimum.

(iii) Če obstaja  $\delta > 0$ , da velja bodisi  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$ , bodisi  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$ , potem  $f'$  v točki  $c$  nima lokalnega ekstrema.

## 5.14 Iskanje ekstremov odvedljive funkcije na $[a, b]$

- Določimo stacionarne točke  $x_1, x_2, \dots, x_k$
- Izračunamo vrednosti  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)$  in  $f(a), f(b)$
- Določimo najmanjšo in največjo vrednost

Če funkcija  $f$  ni povsod odvedljiva na  $[a, b]$ , potem med kandidate za ekstrem dodamo še točke v katerih  $f$  ni odvedljiva.

Pri obravnavanju lokalnih ekstremov analiziramo predznak odvoda.

PRIMER: Določi lokalne ekstreme

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1$$
$$f'(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x = x(x-1)^2(x+1)$$

Stacionarne točke so:  $-1, 0, 1$ . Če se narišemo skico predznaka  $f'(x)$  vidimo:

- V  $-1$  je lokalni maksimum
- V  $0$  je lokalni minimum
- V  $1$  nima lokalnega ekstrema

TRDITEV: Denimo, da je  $f$  dvakrat odvedljiva v okolici točke  $a$  in denimo, da je  $a$  stacionarna točka od  $f$ .

- (i) Če je  $f''(x) \leq 0$  za vse  $x$  v neki okolici točke  $a$ , potem ima  $f$  v  $a$  lokalni maksimum.
- (ii) Če je  $f''(x) \geq 0$  za vse  $x$  v neki okolici točke  $a$ , potem ima  $f$  v  $a$  lokalni minimum.

DOKAZ:

- (i)  $f''(x) \leq 0$  za  $x \in (a - \delta, a + \delta)$ , zato je  $f'$  padajoča na  $(a - \delta, a + \delta)$ . Vemo tudi, da je  $f'(a) = 0$ , ker je  $a$  stacionarna točka. Sledi:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a - \delta, a) \quad \wedge$$
$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, a + \delta)$$

Po posledici ima  $f$  v  $a$  lokalni maksimum.

- (ii) Podobno

POSLEDICA: Naj bo  $f$  dvakrat odvedljiva v okolici točke  $a$  in  $f''$  zvezna v točki  $a$ , ter naj bo  $a$  stacionarna točka od  $f$ . Velja:

- (i) Če je  $f''(a) < 0$ , potem ima  $f$  v  $a$  lokalni maksimum.
- (ii) Če je  $f''(a) > 0$ , potem ima  $f$  v  $a$  lokalni minimum.

DOKAZ: Če je  $f''(a) < 0$ , zaradi zveznosti  $f''$  v  $a$  velja  $f''(x) < 0$  za vse  $x$  v neki okolici točke  $a$ . Nato uporabimo trditev.

TRDITEV: Naj bo  $f$  odvedljiva na  $[a, b]$ .

- (i) Če je  $f'(a) > 0$ , potem ima  $f$  v  $a$  lokalni minimum.
- (ii) Če je  $f'(a) < 0$ , potem ima  $f$  v  $a$  lokalni maksimum.
- (iii) Če je  $f'(b) > 0$ , potem ima  $f$  v  $b$  lokalni maksimum.
- (iv) Če je  $f'(b) < 0$ , potem ima  $f$  v  $b$  lokalni minimum.

**Opomba:** Strogi enačaj je zato, ker če  $f'(a) = 0$ , se lahko funkcija „obrne“ v katerokoli smer.

## 5.15 Konveksnost in konkavnost

DEFINICIJA: Naj bo funkcija  $f$  definirana na intervalu  $I$ . Pravimo, da je  $f$  *konveksna* na  $I$ , če velja:

$$\forall a, b \in I, a < b \forall x \in [a, b] : f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (*)$$

GEOMETRIJSKO:  $\forall a, b \in I, a < b$  graf funkcije  $f$  na  $[a, b]$  leži pod daljico skozi  $(a, f(a))$  in  $(b, f(b))$ .

Če pišemo  $t = \frac{x - a}{b - a}$ : ko  $x \in [a, b]$  bo  $t \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} x - a &= t(b - a) \\ x &= (1 - t)a + tb \end{aligned}$$

(\*) se prepíše v

$$f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$$

za vse  $t \in [0, 1]$ .

DEFINICIJA: Naj bo  $f$  definirana na intervalu  $I$ . Pravimo, da je  $f$  *konkavna* na  $I$ , če

$$\forall a, b \in I, a < b \forall x \in [a, b] : f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

GEOMETRIJSKO:  $\forall a, b \in I, a < b$  graf funkcija  $f$  na  $[a, b]$  leži nad daljico skozi  $(a, f(a))$  in  $(b, f(b))$ .

**Opomba:** Velja:  $f$  konveksna  $\iff -f$  konkavna.

IZREK: Naj bo  $f$  odvedljiva funkcija na intervalu  $I$ . Potem je  $f$  konveksna natanko tedaj, kadar velja

$$\forall a, x \in I : f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) \quad (*)$$

**Opomba:** Graf funkcije leži nad tangento v poljubni točki iz  $I$ .

DOKAZ:

( $\Rightarrow$ ) Denimo, da je  $f$  konveksna na  $I$ . Izberemo poljubni  $a, x \in I$ . Če je  $a = x$ , ocean (\*) velja. Če  $a \neq x$ , velja

$$f(y) \leq f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(y - a)$$

za vse  $y$  med  $a$  in  $x$ .

$$\begin{aligned} f(y) - f(a) &\leq (f(x) - f(a)) \frac{y - a}{x - a} \\ \underbrace{\frac{f(y) - f(a)}{y - a}}_{f'(a) \text{ ko gre } y \text{ proti } a} (x - a) &\leq f(x) - f(a) \\ f'(a)(x - a) &\leq f(x) - f(a) \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Denimo, da je  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$  za vse  $a, x \in I$ . Izberemo  $a, b \in I, a < b$  in  $x \in (a, b)$ . Potem točki  $(a, f(a))$  in  $(b, f(b))$  ležita nad tangento na graf v točki  $(x, f(x))$ .

$$\begin{aligned} f(a) &\geq f(x) + f'(x)(a - x) \quad / \underbrace{(b - x)}_{>0} \\ f(b) &\geq f(x) + f'(x)(b - x) \quad / - \underbrace{(a - x)}_{<0} \\ f(a)(b - x) - f(b)(a - x) &\geq f(x)(b - x - (a - x)) \\ f(x) &\leq \frac{1}{b - a}(f(a)(b - a) + f(a)(a - x) - f(b)(a - x)) \\ f(x) &\leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{aligned}$$

za vse  $x \in (a, b)$

□

IZREK: Naj bo  $f$  odvedljiva funkcija na intervalu  $I$ . Potem je  $f$  konveksna natanko tedaj, kadar je  $f'$  naraščajoča na  $I$ .

Če je  $f$  dvakrat odvedljiva na intervalu  $I$ , potem je  $f$  konveksna na  $I$  natanko tedaj, kadar velja

$$\forall x \in I : f''(x) \geq 0$$

DOKAZ: Dovolj je dokazati prvo ekvivalenco, saj druga sledi iz prve z uporabo izreka o tem, kdaj je funkcija naraščajoča.

( $\Rightarrow$ ) Denimo, da je  $f$  konveksna na  $I$ . Dokazujemo, da je  $f'$  naraščajoča funkcija na  $I$ .

$$a, b \in I, a < b \Rightarrow f'(a) \leq f'(b)$$

Za krajišče  $a$  velja:

$$f(x) \leq f(a) + \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_k (x - a) \quad \forall x \in (a, b)$$
$$f(x) \leq f(a) + k(x - a) \Rightarrow f(x) - f(a) \leq k(x - a)$$

Podobno velja za krajišče  $b$ :

$$f(x) \leq f(b) + k(x - b) \Rightarrow f(x) - f(b) \leq k(x - b)$$

Iz tega sledi:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq k \text{ ko pošljemo } x \text{ proti } a \text{ dobimo } f'(a) \leq k$$
$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq k \text{ ko pošljemo } x \text{ proti } b \text{ dobimo } f'(b) \geq k$$

Sledi:

$$f'(a) \leq k \leq f'(b) \Rightarrow f'(a) \leq f'(b)$$

( $\Leftarrow$ ) Denimo, da je  $f'$  naraščajoča funkcija na  $I$ . Izberemo  $a, x \in I, a < x$ . Po Lagrangeevem izreku za  $f$  na  $[a, x]$  obstaja  $c \in (a, x)$ , da velja:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ker je  $f'$  naraščajoča, velja  $f'(a) \leq f'(c)$ . Iz tega sledi:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\geq f'(a)(x - a) \\ f(x) &\geq f(a) + f'(a)(x - a) \quad (\text{enačba tangente skozi točko } a) \end{aligned}$$

Podobno lahko naredimo za  $a > x$ . Po prejšnjem izreku je  $f$  konveksna.

□

**DEFINICIJA:** Naj bo funkcija  $f$  definirana na intervalu  $I$ . Če za točko  $a \in I$  obstaja taka okolica, da je na eni strani točke  $a$  funkcija konveksna in na drugi strani konkavna, potem ima  $f$  v točki  $a$  *prevoj*.

**PRIMER:** Natančno nariši graf funkcija  $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$ .

Določimo:

- $D_f$ , ničle, simetrija (sodost, lihost), periodičnost
- prvi odvod (intervali naraščanja in padanja, lokalni ekstremi)
- obnašanje na robovih  $D_f$  (limite, asimptote)
- drugi odvod (intervali konveksnosti in konkavnosti, prevoji)

**Opomba:** Drugi odvod je drugotnega pomena.

Poračunati in narisata znaš verjetno sam/a. Če ne, pridi kdaj na vaje.

## 5.16 L'Hôpitalovi izreki

**LEMA:** (posplošeni Lagrangeev izrek)

Naj bosta  $f$  in  $g$  zvezni funkciji na  $[a, b]$ , odvedljivi na  $(a, b)$ . Denimo, da je  $g'(x) \neq 0$  za vse  $x \in (a, b)$ . Potem obstaja  $c \in (a, b)$ , da velja

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Opomba:** Če za  $g$  vzamemo funkcijo  $g(x) = x$ , dobimo Lagrangeev izrek.

DOKAZ: Velja  $g(b) - g(a) \neq 0$ , ker po Lagrangeevem izreku obstaja  $d \in (a, b)$ , da velja

$$g(b) - g(a) = \underbrace{g'(d)}_{\neq 0} \underbrace{(b - a)}_{\neq 0}$$

Označimo  $k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$  in definiramo funkcijo:

$$F(x) = f(x) - f(a) - k(g(x) - g(a))$$

$F$  je zvezna na  $[a, b]$  in odveljiva na  $(a, b)$ . Velja  $F(a) = 0$ ,  $F(b) = 0$ . Po Rollovem izreku za  $F$  obstaja  $c \in (a, b) : F'(c) = 0$ .

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) - kg'(x) \\ f'(c) - kg'(c) &= 0 \\ k &= \frac{f'(c)}{g'(c)} \end{aligned}$$

□

IZREK (L'Hôpitalovo pravilo) Naj bosta  $f$  in  $g$  odvedljivi funkciji na  $(a, b)$ . Denimo da velja

$$(i) \quad g(x) \neq 0, \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$(ii) \quad \lim_{x \downarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$$

Če obstaja limitia  $\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , potem obstaja  $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  in velja

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Opombe:**

1. Če sta oba odvoda  $f'$  in  $g'$  v točki  $a$  definirana in zvezna, potem velja

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

2. Število  $b$  je lahko blizu  $a$ .

3. Analogen izrek velja za leve in obojestranske limite.

PRIMERA:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\cos 2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = \dots = 2$$

DOKAZ: Definiramo  $f(a) = g(a) = 0$ :  $f$  in  $g$  sta na  $[a, b]$  zvezni funkciji in odvedljivi na  $(a, b)$ .

Izberemo poljuben  $x \in (a, b)$ .  $f$  in  $g$  sta zvezni na  $[a, x]$  in odvedljivi na  $(a, x)$ . Po lemi (posplošen Lagrangeev izrek) obstaja točka  $c_x \in (a, x)$ , za katero velja

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Denimo, da je  $L = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Dokazujemo  $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

Izberemo  $\varepsilon > 0$ . Obstaja  $\delta > 0$ :  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  za vse  $x \in (a, a + \delta)$ .

Za  $x \in (a, a + \delta)$  velja  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L$  za nek  $c_x \in (a, x) \Rightarrow c_x \in (a, a + \delta)$ .

IZREK: Naj bosta  $f$  in  $g$  odvedljivi funkciji na  $(a, b)$  in  $g'(x) \neq 0$  za vsak  $x \in (a, b)$  in naj bo  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ . Če obstaja  $\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , potem obstaja  $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  in velja

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

OPOMBE:

- Izrek velja tudi za leve in obojestranske limite.
- Uporaba je smiselna npr. v primeru  $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \pm \infty$ .

DOKAZ: Denimo, da  $\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$  obstaja. Za poljuben  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$  da velja

$$\forall x \in (a, a + \delta) : L - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \varepsilon$$



Izberimo poljuben  $x \in (a, a + \delta)$ . Uporabimo lemo na intervalu  $[x, a + \delta]$  in velja

$$\frac{f(x) - f(a + \delta)}{g(x) - g(a + \delta)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

za nek  $c \in (x, a + \delta)$ . Sledi:

$$L - \varepsilon < \frac{f(x) - f(a + \delta)}{g(x) - g(a + \delta)} < L + \varepsilon$$

za vsak  $x \in (a, a + \delta)$ . Ker je  $\lim_{x \downarrow a} g(x) = \infty$ , velja

$$\begin{aligned} g(x) &> 0 \\ g(x) - g(a + \delta) &> 0 \end{aligned}$$

zas vse  $x$  dovolj blizu  $a$ . Neenakost pomnožimo z  $\frac{g(x) - g(a + \delta)}{g(x)}$

$$\begin{aligned} (L - \varepsilon) \left( 1 - \frac{g(a + \delta)}{g(x)} \right) &< \frac{f(x) - f(a + \delta)}{g(x)} < (L + \varepsilon) \left( 1 - \frac{g(a + \delta)}{g(x)} \right) \\ \underbrace{(L - \varepsilon) \left( 1 - \underbrace{\frac{g(a + \delta)}{g(x)}}_{\rightarrow 0} \right)}_{\rightarrow L - \varepsilon} + \underbrace{\frac{f(a + \delta)}{g(x)}}_{\rightarrow 0} &< \frac{f(x)}{g(x)} < \underbrace{(L + \varepsilon) \left( 1 - \underbrace{\frac{g(a + \delta)}{g(x)}}_{\rightarrow 0} \right)}_{\rightarrow L + \varepsilon} + \underbrace{\frac{f(a + \delta)}{g(x)}}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Ker je limita leve strani neenačbe  $L - \varepsilon$ , se nahaja na  $(L - 2\varepsilon, L)$  za vse  $x \in (a, a + \delta')$ . Podobno lahko rečemo, da ker je limita desne strani neenačbe  $L + \varepsilon$ , se desna stran nahaja na  $(L, L + 2\varepsilon)$  za vse  $x \in (a, \delta'')$ . Zato se  $\frac{f(x)}{g(x)}$  nahaja na intervalu  $(L - 2\varepsilon, L + 2\varepsilon)$  za  $x \in (a, a + \delta') \cap (a, a + \delta'')$ .

POSLEDICA: Naj bosta  $f$  in  $g$  odvedljivi funkciji na  $(M, \infty)$  za nek  $M \in \mathbb{R}$ . Denimo, da  $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$  za vse  $x \in (M, \infty)$ . Naj bo  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Če obstaja  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , potem obstaja  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  in velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

DOKAZ: Definiramo

$$\begin{aligned} F(t) &= f\left(\frac{1}{t}\right) \\ G(t) &= g\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

Vzamemo  $M > 0$ :  $F$  in  $G$  sta definirani na  $(0, \frac{1}{M})$ . Izrek velja za  $F$  in  $G$ , ko  $t \downarrow 0$ . Takrat gre  $\frac{1}{t} \rightarrow \infty$ .

$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{f'(\frac{1}{t}) \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(\frac{1}{t}) \left(-\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Po L.P. velja

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{F'(t)}{G'(t)}$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

□

Podobna posledica velja za drugi izrek.

Kdaj uporabljamo L'Hôpitalovo pravilo?

- $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  (če so izpolnjeni pogoji v izreku)
- 

$$0\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

$$0\infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

## 5.17 Uporaba odvoda v geometriji

### 5.17.1 Podajanje krivulj

V kartezičnem koordinatnem sistemu:

1. **EksPLICITNO:** Krivulja  $K$  je dana kot graf funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , torej

$$K = \Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

2. **Implicitno:** Krivulja  $K$  je dana kot množica rešitev enačbe  $g(x, y) = 0$ , kjer je  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dana funkcija

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

Primer:  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  (enotska krožnica)

3. **Parametrično:** Krivulja  $K$  je dana kot množica točk  $(x, y)$ , ki so določene z  $x = \alpha(t)$ ,  $y = \beta(t)$ , kjer sta  $\alpha, \beta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  funkciji.

$$K = \{(\alpha(t), \beta(t)) : t \in [t_0, t_1]\}$$

$t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$  je *vektorska funkcija*.

Implicitni način podajanja krivulj je bolj splošen od eksplcitnega.

PRIMERI:

1. enotska krožnica  $x^2 + y^2 = 1$ . Parametrično:

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos t \\y(t) &= \sin t \\x^2(t) + y^2(t) &= 1\end{aligned}$$

$$2. \text{ Elipsa } \underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{a^2}}_{\cos^2 t} + \underbrace{\frac{(y - y_0)^2}{b^2}}_{\sin^2 t} = 1$$

Parametrično:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + a \cos t \\y &= y_0 + b \sin t\end{aligned}$$

3. Še dva primera kjer smo veliko risali (na enem smo se naučili risati grafe parametričnih krivulj). Veliko risanja pomeni, da si poglej zvezek.

V polarnem koordinatnem sistemu:

Krivulja  $K$  je podana kot množica točk s polarnima koordinatama  $(r, \varphi)$ , kjer je  $r = h(\varphi)$ , kjer je  $h : [\varphi_0, \varphi_1] \rightarrow \mathbb{R}$  realna funkcija.

PRIMERA:

1.  $h(\varphi) = c$ , kjer je  $c \in \mathbb{R}$ . Če narišes pride krožnica.
2.  $h(\varphi) = k\varphi, k > 0$ . Če narišes pride spirala.

DEFINICIJA: Pot v ravnini je preslikava  $F = (\alpha, \beta) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kjer je  $I$  interval,  $\alpha$  in  $\beta$  pa zvezni funkciji na  $I$ .

Tir poti je množica

$$C = F(I) = \{F(t) : t \in I\}$$

$F$  imenujemo *parametrizacija* krivulje  $C$ . Isto krivuljo  $C$  lahko podamo z različnimi parametrizacijami.

DEFINICIJA: Pot  $F = (\alpha, \beta) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  je odvedljiva, če sta  $\alpha$  in  $\beta$  odvedljivi na  $I$ . Pot  $F$  je razred  $C^1$  (zvezno odvedljiva), če sta  $\alpha$  in  $\beta$  razreda  $C^1$ .

**Opomba:** Preslikava  $F$  je zvezna, oziroma  $\alpha$  in  $\beta$  sta zvezni.

Če je  $F$  odvedljiva pot:

$$\dot{F}(t) = (\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t))$$

IZREK: Naj bo  $F : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  zvezno odvedljiva pot,  $t_0 \in I$  in denimo, da je  $\dot{F}(t_0) = (\dot{\alpha}(t_0), \dot{\beta}(t_0)) \neq 0$ . Če je  $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$ , potem obstaja tak  $\delta > 0$ , da lahko krivuljo

$$K = \{F(t) : |t - t_0| < \delta\}$$

zapišemo kot graf neke odvedljive funkcije  $y = f(x)$  med intervalom  $U$  okrog točke  $x_0 = \alpha(t_0)$ :

$$K = \{(x, f(x)) : x \in U\}$$

in velja

$$f'(\alpha(t)) = \frac{\dot{\beta}(t)}{\dot{\alpha}(t)}$$

za vse  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

DOKAZ: Denimo, da je  $\dot{\alpha}(t_0) > 0$ .

Ker je  $\dot{\alpha}$  zvezna funkcija, je  $\dot{\alpha} > 0$  na neki okolici  $t_0$ , zato je  $\alpha$  na neki okolici  $t_0$  strogo naraščajoča funkcija

Zato obstaja  $\delta > 0$ , da  $\alpha$  preslika interval  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  bijektivno v  $(\alpha(t_0 - \delta), \alpha(t_0 + \delta)) =: U$ .

Potem ima  $\alpha$  inverzno funkcijo  $\alpha^{-1} : U \rightarrow (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , ki je odvedljiva. Definiramo

$$f(x) = \beta(\alpha^{-1}(x)), \quad x \in U$$

Velja:

$$(x, f(x)) = (\alpha(t), \beta(\alpha^{-1}(\alpha(t))) = (\alpha(t), \beta(t))$$

za  $x \in U$ . Torej velja

$$f'(x) = \beta'(\alpha^{-1}(x)) \frac{1}{\alpha'(\alpha^{-1}(x))}$$

kjer je  $x = \alpha(t)$ .

□

POSLEDICA: Naj bosta  $\alpha$  in  $\beta$  dvakrat odvedljivi na  $(t_0, t_1)$ . Denimo, da je  $\dot{\alpha}(t) \neq 0$  za vse  $t \in (t_0, t_1)$ . Potem je funkcija  $f$  iz izreka dvakrat odvedljiva in velja:

$$f''(\alpha(t)) = \frac{\dot{\alpha}(t)\ddot{\beta}(t) - \ddot{\alpha}(t)\dot{\beta}(t)}{(\dot{\alpha}(t))^3}$$

DOKAZ: Velja  $f'(\alpha(t)) = \frac{\dot{\beta}(t)}{\dot{\alpha}(t)}$ .  $f$  je dvakrat odvedljiva, ker je kompozitum dvakrat odvedljivih funkcij.

$$f''(\alpha(t))\dot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)\ddot{\beta}(t) - \ddot{\alpha}(t)\dot{\beta}(t)}{(\dot{\alpha}(t))^2}$$

□

DEFINICIJA: Naj bo  $F : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  odvedljiva pot

- (i) Če za nek  $t \in I$  velja  $\dot{F}(t) = 0$ , potem  $t$  imenujemo *kritična točka* preslikave  $F$ .
- (ii) Če za nek  $t \in I$  velja  $\dot{F}(t) \neq 0$ , potem  $t$  imenujemo *regularna točka* preslikave  $F$ .
- (iii) Če so vse točke  $t \in I$  regularne, potem  $F$  imenujemo *regularna parametrizacija* gladkega tira poti  $F$ .

Naj bo  $F : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  odvedljiva pot v ravnini in naj bo  $t$  regularna točka od  $F$ . Potem je  $\dot{F}(t)$  smerni vektor tangente skozi točko  $F(t)$  in enačba tangente je

$$\vec{r} = r_F \vec{r}(t) + s \dot{F}(t)$$

v vektorski obliki. V parametrični obliki je enačba smernega vektorja

$$\begin{aligned} x &= \alpha(t) + s\dot{\alpha}(t) \\ y &= \beta(t) + s\dot{\beta}(t) \end{aligned}$$

V segmenti obliki je to

$$(x - \alpha(t))\dot{\beta}(t) - (y - \beta(t))\dot{\alpha}(t) = 0$$

ali

$$\frac{x - \alpha(t)}{\dot{\alpha}(t)} = \frac{y - \beta(t)}{\dot{\beta}(t)}$$

V regularni točki je smerni vektor normale  $(-\dot{\beta}(t), \dot{\alpha}(t))$ . Enačba normale je torej

$$(x - \alpha(t))\dot{\alpha}(t) + (y - \beta(t))\dot{\beta}(t) = 0$$

TRDITEV: Tangenta je odvisna samo od tira poti, ni pa odvisna od izbire regularne parametrizacije.

DOKAZ: Denimo, da je  $t_2$  regularna točka parametrizacije  $F = (\alpha, \beta)$  in da je  $s_2$  regularna točka parametrizacije  $G = (\alpha_1, \beta_1)$  in da velja  $F(t_2) = G(s_2)$ . Naj bo  $\alpha'(t_2) \neq 0$ . Potem obstaja odvedljiva funkcija  $\varphi$  v okolici  $s_2$  za katero velja

$$\varphi(s_2) = t_2, \quad \varphi'(s_2) \neq 0$$

Funkcijo definiramo kot

$$\varphi = \alpha^{-1} \circ \alpha_1$$

Smerna koeficienta tangent sta

$$\begin{aligned} &(\dot{\alpha}(t_2), \dot{\beta}(t_2)) \\ &(\dot{\alpha}_1(s_2), \dot{\beta}_1(s_2)) \end{aligned}$$

Parametrizacijo  $G$  lahko zapišemo kot  $G = F \circ \varphi$ . Potem velja

$$\begin{aligned} &(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha \circ \varphi, \beta \circ \varphi) \\ &(\dot{\alpha}_1(s_2), \dot{\beta}_1(s_2)) = (\dot{\alpha}(t_2)\varphi'(s_2), \dot{\beta}(t_2)\varphi'(s_2)) = \underbrace{\varphi'(s_2)}_{\neq 0}(\dot{\alpha}(t_2), \dot{\beta}(t_2)) \end{aligned}$$

Ker sta vektorja kolinearna, določata isto premico.

## 5.18 Integral

### 5.18.1 Primitivna funkcija in nedoločen integral

MOTIVACIJA: Vsaka odvedljiva funkcija  $f$  na intervalu  $I$  določa funkcijo  $f'$  na  $I$ . Denimo, da poznamo  $f'$ . Kako dobimo  $f$ ? Ali je vsaka funkcija  $g$  na  $I$  odvod neke funkcije?

DEFINICIJA: Naj bo funkcija  $f$  definirana na množici  $I \subset \mathbb{R}$ . Če obstaja odvedljiva funkcija  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero velja  $F' = f$  na  $I$ , potem jo imenujemo *primitivna funkcija* od  $f$ .

PRIMER:  $f(x) = x$  na  $\mathbb{R}$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2$  je primitivna funkcija od  $f$ .

$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 100$  je primitivna funkcija od  $f$ .

LEMA: Naj bo  $f$  funkcija definirana na intervalu  $I$ .

1. Če je  $F$  primitivna funkcija od  $f$  na  $I$ , potem je za vsak  $c \in \mathbb{R}$  tudi funkcija  $G(x) = F(x) + c$  primitivna funkcija od  $f$ .
2. Če sta  $F$  in  $G$  primitivni funkciji od  $f$  na intervalu  $I$ , potem obstaja  $c \in \mathbb{R}$ , da velja

$$\forall x \in I : G(x) = F(x) + c$$

DOKAZ:

1.  $F' = f$  po definiciji  
 $G' = F' = f$
2.  $h(x) = F(x) - G(x)$  je odvedljiva funkcija na intervalu  $I$ .

$$h'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Zato je  $h$  konstanta funkcija.

□

DEFINICIJA: *Nedoločen integral* funkcije  $f$  je skupek vseh njenih primitivnih funkcij. Označimo ga s

$$\int f(x)dx$$

Funkcijo  $f$  imenujemo *integrand*.

PRIMER:

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln |x| + c_1 & x > 0 \\ \ln |x| + c_2 & x < 0 \end{cases}$$

PRIMER:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x \leq 0 \\ -1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$f$  nima primitivne funkcije na  $(-1, 1)$

Denimo, da je  $F$  primitivna funkcija od  $f$  na  $(-1, 1)$ . Torej je  $F'(x) = f(x)$  za vse  $x \in (-1, 1)$ . Naj bo  $a \in (0, 1)$ . Potem je  $F$  odvedljiva funkcija na  $[-a, a]$ , zato je  $F$  zvezna na  $[-a, a]$  in zato doseže maksimum.

- $F$  nima stacionarne točke.
- $F'(-a) = f(-a) = 1$ , zato v  $-a$  ni dosežen maksimum
- $F'(a) = f(a) = -1$ , zato v  $a$  ni dosežen maksimum.

→←

**Opomba:** Funkcija  $f$  ni zvezna. Dokazali bomo, da ima vsaka zvezna funkcija primitivno funkcijo.

TABELA OSNOVNIH INTEGRALOV:

Funkcija	Primitivna funkcija
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln  x $
$a^x$	$\frac{1}{\ln a} a^x$
$e^x$	$e^x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1})$

### 5.18.2 Pravila za integriranje

TRDITEV: Za poljubni funkciji  $f$  in  $g$ , ki imata primitivni funkcija na intervalu  $I$  velja



1.  $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
2.  $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

DOKAZ:  $F' = f$  in  $G' = g$ , potem velja  $(F + G)' = f + g$

Podobno za množenje s konstantno.

□

TRDITEV: Če je  $F$  odvedljiva funkcija na  $I$ , potem velja

$$\int F'(x)dx = F(x) + c$$

DOKAZ: Po definiciji primitivne funkcije.

**Opomba:**  $F$  je primitivna funkcija do  $f$  na  $I$ , če je  $F$  odvedljiva in velja  $F' = f$  na  $I$ . Denimo, da je  $F$  primitivna funkcija od  $f$ .

$$\begin{aligned} dF(x) &= F'(x)dx = f(x)dx \\ \int f(x)dx &= F(x) + c \end{aligned}$$

TRDITEV: (uvredba nove spremenljivke)

Naj bo funkcija  $g$  odvedljiva na intervalu  $I$ . Naj ima funkcija  $f$  primitivno funkcijo  $F$ , definirano na  $g(I) = \{g(x) : x \in I\}$ . Potem je  $F \circ g$  primitivna funkcija od  $(f \circ g)g'$  na intervalu  $I$ . Torej:

$$\int (f \circ g)(x)g'(x)dx = F(g(x)) + C, \quad x \in I$$

**Opomba:** Če označimo  $t = g(x)$ , dobimo:

$$\begin{aligned} dt &= g'(x)dx \\ \int \underbrace{f(g(x))}_t \underbrace{g'(x)dx}_{dt} &= \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C \end{aligned}$$

DOKAZ:  $F \circ g$  je odvedljivak, ker je kompozitum odvedljivih

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) = (f \circ g)g'$$

□

TRDITEV: (integriranje po delih - per partes)

Naj bosta  $f$  in  $g$  odvedljivi funkciji na  $I$ . Potem velja

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx, \quad x \in I$$

Če označimo  $u = f(x)$  in  $v = g(x)$ , potem velja

$$\int u dv = uv - \int v du$$

DOKAZ:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Zato je  $fg$  primitivna funkcija od  $f'g + fg'$  in zato formula velja.

### 5.18.3 Določeni integral

Naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nenegativna funkcija. Potem graf funkcije  $f$  omejuje območje  $A$  nad intervalom  $[a, b]$ :  $A$  je navzgor omejeno z  $\Gamma_f$ , navzdol z abscisno osjo, na levi s premico  $x = a$  in na desni s premico  $x = b$ .

Če je  $f$  konstanta, znamo izračunati ploščino, ki jo določa.

V splošnem:

- Interval  $[a, b]$  razdelimo na podintervale in na vsakem podintervalu funkcijo  $f$  zamenjamo s primerno konstanto.
- Ne vemo kako dobra je aproksimacija.
- Če namesto poljubne točke na grafu na vsakem podintervalu izberemo točki, v katerih je dosežen infimum  $f$  oziroma supremum  $f$ , dobimo zgornjo mejo in spodnjo mejo za ploščino  $A$ .

PRIMER:  $f(x) = x^2$  izračunaj ploščino pod grafom na  $[0, 1]$ .

Interval  $[0, 1]$  razdelimo na  $n$  enakih delov (*ekvidistančna delitev*).

Zgornja meja ploščine lika

$$\begin{aligned} \sup A &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} 1^2 = \\ &= \frac{1}{n^3} (1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Spodnja meja ploščine lika

$$\begin{aligned}\inf A &= \frac{1}{n}0 + \frac{1}{n}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2) = \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}\end{aligned}$$

## Riemannov integral

DEFINICIJA: Naj bo  $[a, b]$  dan interval. *Delitev*  $D$  intervala  $[a, b]$  je množica  $\{x_1, x_1, \dots, x_n\}$  *delilnih točk*, za katere velja:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

in  $n \in \mathbb{N}$ . Dolžino  $i$ -tega intervala  $[x_{i-1}, x_i]$  označimo z  $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ .

*Velikost* delitve  $D$  je dolžina najdaljšega podintervala v delitvi  $D$

$$\delta(D) = \max\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$$

Na vsakem podintervalu izberemo *testno točko*  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  in z

$$T_D = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

označimo nabor testnih točk. Denimo, da je nabor testnih točk  $T_D$  *usklajen* z delitvijo  $D$ , ker smo na vsakem podintervalu delitve  $D$  izbrali eno testno točko.

*Reimannova vsota* funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , pridružena delitvi  $D$  in usklajeni izbiri testnih točk  $T_D$  je

$$R(f, D, T_D) = \sum_{k=1}^n \delta_k f(t_k)$$

**Opomba:** Pričakujemo, da Riemannove vsote bolje aproksimirajo prloščino, če je  $\delta(D)$  manjši.

DEFINICIJA: Riemannov itegral ali določeni integral funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je limita Rimeannove vsote, kjer limito vzamemo po vseh delitvah  $D$  zaprtega

intervala  $[a, b]$  in po vseh usklajenih izbirah testnih točk  $T_D$ , ko gre  $\delta_D$  proti 0, če ta limita obstaja. Pišemo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{D, T_D \\ \delta(D) \rightarrow 0}} R(f, D, T_D)$$

Torej:  $I = \lim_{\substack{D, T_D \\ \delta(D) \rightarrow 0}} R(f, D, T_D)$  pomeni, da za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$ , da za vse delitve  $D$ , kjer  $\delta(D) < \delta$  in vsako usklajeno izbiro testnih točk  $T_D$  velja

$$|R(f, D, T_D) - I| < \varepsilon$$

Če Riemannov integral  $f$  na  $[a, b]$  obstaja, pravimo, da je  $f$  na  $[a, b]$  *Riemannovo integrabilna*.

TRDITEV: Če je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemannovo integrabilna, potem je  $f$  omejena.

DOKAZ: Denimo, da je  $f$  Riemannovo integrabilna in da ni omejena.

Po definiciji integrabilnosti obstaja  $I \in \mathbb{R}$ , da za vsak  $\varepsilon > 0$ , obstaja  $\delta > 0$  da za vsako delitev  $D$ , kjer je  $\delta(D) < \delta$  in za vsako usklajeno izbiro testnih točk  $T_D$ , velja  $|R(f, D, T_D) - I| < \varepsilon$ . Torej obstaja  $I$ , da za  $\varepsilon = 1$  obstaja  $\delta > 0$ .

Naj bo delitev  $D$  taka, da je  $\delta(D) < \delta$ . Obstaja podinterval  $[x_{i-1}, x_i]$ , na katerem je  $f$  neomejena.

$$R(f, \underbrace{D}_{\text{fiksiramo}}, T_D) = \sum_{j=1}^n \delta_j f(t_j)$$

$T_D = \{t_1, \dots, t_n\}$  fiksiramo točke  $t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$ . Vsota se torej zapiše kot

$$R(f, D, T_D^K) = \sum_{j \neq i} f(t_j) \delta_j + f(t_i^k) \delta_i$$

Ker je  $f$  neomejena, lahko privzamemo, da je  $f$  navzgor neomejena na  $[x_{i-1}, x_i]$ . Torej za vsak  $k \in \mathbb{N}$  obstaja  $s_k \in [x_{i-1}, x_i]$ , da je  $f(s_k) > k$ . Za  $t_i^k$  vzamemo  $t_i^k = s_k$ .  $\rightarrow \leftarrow$

**Opomba:** Ni vsaka omejena funkcija na  $[a, b]$  Riemannovo integrabilna

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

$f$  je omejena.  $f$  ni Riemannovo integrabilna

$$R(f, D, T_D) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \delta_i = \sum_{i=1}^n \delta_i = 1$$

Za testne točke, kjer je  $t_i \in \mathbb{Q} \cap [x_{i-1}, x_i]$

$$R(f, D, T_D) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \delta_i = 0$$

Za testne točke, kjer je  $t_i \in \mathbb{R} \cap [x_{i-1}, x_i]$ .

Za poljubno drobne delitve lahko izberemo  $T_D^1$  in  $T_D^2$ , da je  $R(f, D, T_D^1) = 1$  in  $R(f, D, T_D^2) = 0$ , torej limita ne obstaja.

□

#### 5.18.4 Darbouxove vsote

Odslej naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  omejena funkcija. Naj bo  $D$  delitev intervala  $[a, b]$  za delilnimi točkami  $x_i$ . Označimo:

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ M_k &= \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ m &= \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \\ M &= \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

Velja:

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M$$

za vse  $k = 1, \dots, n$

DEFINICIJA: Število  $s(D) = \sum_{i=1}^n m_i \delta_i$  imenujemo *spodnja Darbouxova vsota* prirejena delitvi  $D$ .

Število  $S(D) = \sum_{i=1}^n M_i \delta_i$  imenujemo *zgornja Darbouxova vsota* prirejena delitvi  $D$ .

VELJA:

$$m(b-a) \leq s(D) \leq S(D) \leq M(b-a)$$

še več

$$s(D) \leq R(f, D, T_D) \leq S(D)$$

za vsako usklajeno izbiro testnih točk.

DEFINICIJA: Pravimo, da je delitev  $D'$  *finejša* od delitve  $D$ , kadar je  $D \subset D'$ .

TRDITEV 1: Naj bo delitev  $D'$  finejša od delitve  $D$ . Tedaj velja:

$$s(D) \leq s(D') \quad \text{in} \quad S(D') \leq S(D)$$

DOKAZ: Od  $D$  do  $D'$  pridemo z dodajanjem (večkrat) ene točke naenkrat. Zato je dovolj dokazati v primeru  $D' = D \cup \{y\}$ ,  $y \in (x_{i-1}, x_i)$ . Za  $m_i$  velja

$$\begin{aligned} m'_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, y]\} \geq m_i \\ m''_i &= \inf\{f(x) : x \in [y, x_k]\} \geq m_i \end{aligned}$$

Torej velja

$$s(D) = \sum_{j \neq i} m_j \delta_j + m_i \delta_i \leq \sum_{j \neq i} m_j \delta_j + m'_i (y - x_{k-1}) + m''_i (x_k - y) = s(D')$$

Podobno naredimo za zgornjo vsoto.

□

TRDITEV 2: Naj bosta  $D_1$  in  $D_2$  poljubni delitvi intervala  $[a, b]$ . Potem velja

$$s(D_1) \leq S(D_2)$$

**Opomba:** Poljubna spodnja Darbouxova vsota je pod poljubno zgornjo Darbouxovo vsoto.

DOKAZ: Naj bo  $D = D_1 \cup D_2$ .  $D$  je finejša od  $D_1$  in od  $D_2$ . Po trditvi 1 velja

$$s(D_1) \leq s(D) \leq S(D) \leq S(D_2)$$

□

Množica spodnjih Darbouxovih vsot je navzgor omejena (z  $M(b-a)$ ), množica zgornjih Darbouxovih vsot pa je navzdol omejena (z  $m(b-a)$ ). Zato obstajata

$$\begin{aligned} s &= \sup\{s(D) : D \text{ delitev } [a, b]\} \\ S &= \inf\{S(D) : D \text{ delitev } [a, b]\} \end{aligned}$$

Po trditvi 2 velja  $s \leq S$ .

$$\begin{aligned} s(D_1) &\leq S(D_2) \quad \forall D_1, D_2 \\ \sup D_1 &= s \leq S(D_2) \quad \forall D_2 \\ s &\leq S = \inf D_2 \end{aligned}$$

DEFINICIJA: Naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  omejena funkcija. Pravimo, da je  $f$  *Darbouxovo integrabilna* na  $[a, b]$ , če velja

$$s = S$$

V tem primeru število  $s$  imenujemo *Darbouxov integral* funkcije  $f$  na  $[a, b]$ .

TRDITEV 3: Omejena funkcija  $f$  na  $[a, b]$  je Darbouxovo integrabilna natanko tedaj, kadar za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja delitev  $D$ , za katero velja

$$S(D) - s(D) < \varepsilon$$

DOKAZ:

( $\Leftarrow$ ) Izberemo poljuben  $\varepsilon$ . Po predpostavki obstaja delitev  $D$ , da velja

$$S(D) - s(D) < \varepsilon$$

Po definiciji velja

$$s(D) \leq s \leq S \leq S(D)$$

Iz tega sledi, da je  $\underbrace{S - s}_{\geq 0} < \varepsilon$  za poljuben  $\varepsilon > 0$ . Torej je  $s = S$ .

( $\Rightarrow$ ) Denimo, da je  $f$  Darbouxovo integrabilna, torej  $s = S$ . Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$

Obstaja delitev  $D_1 : s(D_1) \in (s - \varepsilon, s]$

Obstaja delitev  $D_2 : s(D_2) \in [S, S + \varepsilon]$

Naj bo  $D = D_1 \cup D_2$ .

$$\underbrace{S(D)}_{\leq S(D_2)} - \underbrace{s(D)}_{\geq S(D_1)} \leq S(D_2) - s(D_1) < \varepsilon$$

□

IZREK 4: Zvezna funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je Darbouxovo integrabilna.

DOKAZ:

$$\begin{aligned} S(D) - s(D) &= \\ &= \sum_{i=1}^n M_i \delta_i - \sum_{i=1}^n m_i \delta_i = \sum_{i=1}^n \delta_i \underbrace{(M_i - m_i)}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \delta_i = \varepsilon \end{aligned}$$

Ker je  $f$  zvezna na  $[a, b]$ , je na  $[a, b]$  enakomerno zvezna. Torej za  $\frac{\varepsilon}{b-a}$  obstaja  $\delta > 0 : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$  za  $x, x' \in [a, b]$ .

Izberemo delitev  $D$ , da je  $\delta(D) < \delta$ . Potem velja  $M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ .

□

IZREK 5: Vsaka monotona funkcija na  $[a, b]$  je Darbouxovo integrabilna.

DOKAZ: Denimo, da je  $f$  naraščajoča. Naj bo  $D$  ekvidistančna delitev na  $n$  enakih delov. Potem velja

$$\begin{aligned} S(D) - s(D) &= \\ &= \sum_{i=1}^n M_i \delta_i - \sum_{i=1}^n m_i \delta_i = \sum_{i=1}^n f(x_i) \delta_i - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \delta_i = \\ &= \frac{b-a}{n} \left( \sum_{i=1}^n f(x_i) - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \right) = \\ &= (f(b) - f(a)) \frac{b-a}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

za dovolj velike  $n$ .

□

IZREK (ADITIVNOST DOMENE): Naj bo  $f$  omejena funkcija na  $[a, b]$  in  $c \in [a, b]$ .  $f$  je Darbouxovo integrabilna na  $[a, b]$  natanko tedaj, kadar je Darbouxovo integrabilna na  $[a, c]$  in  $[c, b]$ .

DOKAZ:

( $\Rightarrow$ ) Ker je  $f$  Darbouxovo integrabilna, za poljuben  $\varepsilon > 0$  obstaja delitev  $D$  intervala  $[a, b]$ , da velja

$$S(D) - s(D) < \varepsilon$$

Označimo  $\widetilde{D} = D \cup \{c\}$  je delitev intervala  $[a, b]$ . Vemo

$$S(\widetilde{D}) - s(\widetilde{D}) \leq S(D) - s(D) < \varepsilon$$

Označimo  $D_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  je delitev intervala  $[a, c]$  in  $D_2 = \{x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$  je delitev  $[c, b]$ , kjer je  $x_0 = a, x_k = c, x_n = b$ . Potem velja

$$\begin{aligned} S(\widetilde{D}) - s(\widetilde{D}) &= S(D_1) + S(D_2) - s(D_1) - s(D_2) = \\ &= (S(D_1) - s(D_1)) + (S(D_2) - s(D_2)) < \varepsilon \end{aligned}$$



Torej velja  $S(D_i) - s(D_i) < \varepsilon$  za  $i = 1, 2$ . Zato je  $f$  integrabilna na  $[a, c]$  in  $[c, b]$ .

( $\Leftarrow$ )  $f$  je integrabilna na  $[a, c]$  in  $[c, b]$ . Za poljuben  $\varepsilon > 0$  obstajata delitev  $D_1$  intervala  $[a, c]$  in delitev  $D_2$  intervala  $[c, b]$  da velja

$$S(D_i) - s(D_i) < \varepsilon \quad i = 1, 2$$

Označimo  $D = D_1 \cup D_2$  je delitev intervala  $[a, b]$  in velja

$$S(D) - s(D) = \underbrace{(S(D_1) - s(D_1))}_{< \varepsilon} + \underbrace{(S(D_2) - s(D_2))}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$

Torej je  $f$  integrabilna na  $[a, b]$ .

□

**Opomba:** Denimo, da je  $f$  Darbouxovo integrabilna na  $[a, b]$ . Če se funkcija  $\tilde{f}$  razlikuje od  $f$  samo v eni točki, potem je tudi  $\tilde{f}$  Darbouxovo integrabilna na  $[a, b]$ .

POSLEDICA: Naj bo  $f$  omejena funkcija na  $[a, b]$ . Če obstajajo točke

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_r = b$$

da je  $f$  zvezna na  $(c_{i-1}, c_i)$  za vse  $i = 1, \dots, r$ , potem je  $f$  Darbouxovo integrabilna na  $[a, b]$ .

POSLEDICA: Vsaka odsekana zvezna funkcija je integrabilna.

DEFINICIJA: Pravimo, da je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  *odsekoma zvezna*, če je zvezna povsod razen v končno mnogo točkan na  $[a, b]$  in v točkah kjer ni zvezna ima skok, t.j. obstajata leva in desna limita.

TRDITEV: Naj bo  $f$  Darbouxovo integrabilna na  $[a, b]$ . Potem za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$ , da za vsako delitev  $D$  za katero je  $\delta(D) < \delta$ , velja

$$S(D) - s(D) < \varepsilon$$

DOKAZ: Če je  $M = m$ , ni kaj dokazovati, zato naj bo  $M \neq m$ . Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$ . Ker je  $f$  integrabilna, obstaja delitev  $D_0$ , da velja

$$S(D_0) - s(D_0) < \varepsilon$$

Naj bo  $D_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Označimo  $\delta := \frac{\varepsilon}{n(M-m)}$ <sup>6</sup> Izberemo delitev  $D$ , za katero je  $\delta(D) < \delta$ . Zapišemo lahko

$$S(D) - s(D) = \sum_k (M_k - m_k) \delta_k = \sum' + \sum''$$

kjer je  $\sum'$  vsota po tistih podintervalih v delitvi  $D$ , ki ne vsebujejo nobene točke  $x_i \in D_0$  v svoji notranjosti,  $\sum''$  pa je vsota po vseh ostalih podintervalih.

Za  $\sum''$  vemo, da je v njej največ  $n$  členov. Torej lahko zapišemo

$$(M_k - m_k) \underbrace{\delta_k}_{\leq \delta(D) < \delta} \leq \underbrace{(M_k - m_k)}_{\leq M-m} \frac{\varepsilon}{n(M-m)} \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

Ker je v  $\sum''$  največ  $n$  členov, velja

$$\sum'' < \varepsilon$$

Za  $\sum'$ : vemo, da je  $D \cup D_0$  finejša od  $D_0$ , zato velja

$$S(D \cup D_0) - s(D \cup D_0) < \varepsilon$$

Po drugi strani bodo vsi členi iz vsote  $\sum'$  vsebovani v  $S(D \cup D_0) - s(D \cup D_0)$ , zato velja

$$\sum' < S(D \cup D_0) - s(D \cup D_0) < \varepsilon$$

zato je  $\sum' < \varepsilon$ . Torej velja

$$\sum = \sum' + \sum'' < 2\varepsilon$$

□

**IZREK:** Naj bo  $f$  omejena funkcija na  $[a, b]$ . Tedaj je  $f$  Riemannovo integrabilna natanko tedaj, kadar je  $f$  Darbouxovo integrabilna. V tem primeru sta integrala enaka.

**Opomba:** Odsel bomo Riemannovo ali Darbouxovo integrabilne funkcije imenovali kar *integrabilne funkcije*. Obstajajo še druge definicije integrabilnosti, ki se ne ujemajo z našo definicijo.

**DOKAZ:**

---

<sup>6</sup>na predavanjih smo označili  $\delta := \frac{\varepsilon}{2n(M-m)}$ , vendar bodo tako prišle lepše številke. Trust me.

( $\Leftarrow$ ) Denimo, da je  $f$  Darbouxovo integrabilna. Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$ . Obstaja  $\delta > 0$ , da za vsako delitev  $D$ , kjer je  $\delta(D) < \delta$  velja

$$S(D) - s(D) < \varepsilon$$

Dokazujemo, da za poljuben  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$ , da za vsako delitev  $D$ , kjer je  $\delta(D) < \delta$  velja, da za poljubno izbiro usklajenih testnih točk  $T_D$ , velja

$$\left| \underbrace{I}_{S=s} - R(f, D, T_D) \right| < \varepsilon$$

Vemo, da za vsako usklajeno izbiro  $T_D$  velja

$$s(D) \leq R(f, D, T_D) \leq S(D)$$

in vemo

$$s(D) \leq s = S \leq S(D)$$

Sledi

$$|S - R(f, D, T_D)| < \varepsilon$$

za vsako uklajeno izbiro  $T_D$ . Torej je  $f$  Riemannovo integrabilna in  $I = S = s$ .

( $\Rightarrow$ ) Denimo, da je  $f$  Riemannovo integrabilna in označimo z  $I$  njen Riemannov integral. Za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$ , da za vsako delitev  $D$ , kjer je  $\delta(D) < \delta$  velja

$$|I - R(f, D, T_D)| < \varepsilon$$

za vse usklajene izbire  $T_D$ .

Ideja:  $T_D$  dobimo tako, da je  $f(t_k) \approx M_k$  in potem bo  $R(f, D, T_D) \approx S(D)$ .

Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$  in dobimo  $\delta$  iz definicije Riemannovega integrala. Naj bo  $D$  delitev, da je  $\delta(D) < \delta$ . Za vsak  $k$  obstajata

$$\begin{aligned} t_k &\in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leq M_k - f(t_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} \\ s_k &\in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leq f(t_k) - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \end{aligned}$$

Torej velja

$$\begin{aligned}
 |S(D) - I| &= \left| \sum_k M_k \delta_k - I \right| = \\
 &= \left| \sum_k f(t_k) \delta_k - I + \sum_k (M_k - f(t_k)) \delta_k \right| \leq \\
 &\leq \underbrace{\left| \sum_k f(t_k) \delta_k - I \right|}_{< \varepsilon} + \overbrace{\sum_k (M_k - f(t_k)) \delta_k}^{< \varepsilon} < 2\varepsilon \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}}
 \end{aligned}$$

Na podoben način dobimo  $|s(D) - I| < 2\varepsilon$ . Sledi

$$S(D) - s(D) < 4\varepsilon$$

□

**IZREK:** Naj bo funkcija  $f$  integrabilna na  $[a, b]$ . Označimo  $m = \inf_{[a, b]} f$ ,  $M = \sup_{[a, b]} f$  in naj bo  $g$  zvezna na  $[m, M]$ . Potem je  $g \circ f$  integrabilna na  $[a, b]$ .

**POSLEDICA:** Če je  $f$  integrabilna na  $[a, b]$ , potem so  $|f|, f^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) integrabilne.

**DOKAZ:** Izberemo poljuben  $\varepsilon > 0$ . Ker je  $g$  enakomerno zvezna na  $[m, M]$ , obstaja  $\delta > 0$ , da za  $u, u' \in [m, M]$  velja

$$|u - u'| < \delta \Rightarrow |g(u) - g(u')| < \varepsilon$$

Ker je  $f$  integrabilna na  $[a, b]$ , obstaja delitev  $D$  intervala  $[a, b]$ , da velja

$$S_f(D) - s_f(D) < \varepsilon \delta$$

$$S_f(D) - s_f(D) = \sum_k (M_k - m_k) \delta_k = \sum_k' (M_k - m_k) \delta_k + \sum_k'' (M_k - m_k) \delta_k$$

kjer je so v  $\sum'$  členi za katere velja  $M_k - m_k < \delta$ , v  $\sum''$ , pa so členi za katere velja  $M_k - m_k \geq \delta$ .

Označimo

$$\begin{aligned}
 \overline{m_k} &= \inf \{g \circ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\
 \overline{M_k} &= \sup \{g \circ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}
 \end{aligned}$$

Ker je  $M_k - m_k < \delta$ , zaradi enakomerne zveznosti velja, da je  $\overline{M_k} - \overline{m_k} \leq \varepsilon$ .  
Torej velja

$$S_{g \circ f}(D) - s_{g \circ f}(D) = \sum_k' (\overline{M_k} - \overline{m_k}) \delta_k \leq \varepsilon \sum_k \delta_k \leq \varepsilon(b-a)$$

Za  $\sum''$  velja

$$\sum_k' + \sum_k'' < \varepsilon \delta \Rightarrow \sum_k'' \underbrace{(M_k - m_k)}_{\geq \delta} \delta_k < \varepsilon \delta$$

Iz tega sledi

$$\begin{aligned} \sum_k'' \delta \delta_k &\leq \sum_k'' (M_k - m_k) \delta_k < \varepsilon \delta \\ \delta \sum_k'' \delta_k &\leq \varepsilon \delta \\ \sum_k'' \delta_k &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Po drugi strani velja

$$\sum_k'' (\overline{M_k} - \overline{m_k}) \delta_k \leq \sum_k'' (\overline{M} - \overline{m}) \delta_k = (\overline{M} - \overline{m}) \sum_k'' \delta_k \leq (\overline{M} - \overline{m}) \varepsilon$$

Če to dvoje združimo dobimo

$$\begin{aligned} S_{g \circ f}(D) - s_{g \circ f}(D) &= \sum_k (\overline{M_k} - \overline{m_k}) \delta_k = \\ &= \underbrace{\sum_k' (\overline{M_k} - \overline{m_k}) \delta_k}_{\leq \varepsilon(b-a)} + \underbrace{\sum_k'' (\overline{M_k} - \overline{m_k}) \delta_k}_{\leq \varepsilon(\overline{M} - \overline{m})} \leq \\ &\leq \varepsilon((b-a) + (\overline{M} - \overline{m})) \end{aligned}$$

Torej je  $g \circ f$  integrabilna na  $[a, b]$ .

□

### 5.18.5 Lastnosti določenega integrala

TRDITEV: Naj bosta  $f$  in  $g$  integrabilni funkciji na  $[a, b]$  in naj bo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
Potem velja:

(i)  $f + g$  in  $f - g$  sta integrabilni na  $[a, b]$  in velja

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x))dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b (f(x) - g(x))dx &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

(ii)  $\lambda f$  je integrabilna na  $[a, b]$  in velja

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

$\Rightarrow$  integrabilne funkcije na  $[a, b]$  sestavljajo vektorski prostor.

(iii)  $f \cdot g$  je integrabilna na  $[a, b]$ .

(iv) Če je  $f(x) \leq g(x)$  za vse  $x \in [a, b]$ , potem velja

$$\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$$

Tej lastnosti pravimo *monotonost integrala*. Posledica je  $\forall x \in [a, b] :$   
 $f(x) \geq x \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

(v)

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(vi) Naj bo  $c \in (a, b)$ . Potem velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

DOGOVOR:

1. Naj bo  $f$  integrabilna na  $[a, b]$ . Velja

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

2.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

POSLEDICA DOGOVORA: Če je  $f$  integrabilna na  $I$  in vzememo  $a, b, c \in I$ , potem velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

DOKAZ:

(i)

$$R(f+g, D, T_D) = R(f, T, T_D) + R(g, D, T_D) \\ \sum (f+g)(t_k)\delta_k = \sum f(t_k)\delta_k + \sum g(t_k)\delta_k$$

Ker  $R(f, D, T_D)$  limitira proti  $\int_a^b f(x)dx$  in  $R(g, D, T_D)$  limitira proti  $\int_a^b g(x)dx$ , tudi njuna vsota limitira proti  $\int_a^b (f+g)(x)dx$ . Da je vsota limit enaka limiti vsot je potrebno še dokazati (bilo je za DN). Osnovna ideja je, da naredimo podobno kot pri zaporedjih ( $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ).

Podobno dokažemo razliko.

(ii) Dokažemo na enak način kot točko (i).

(iii) Dokazujemo  $fg$  je integrabilna. Vemo, da sta  $f$  in  $g$  integrabilni. Torej velja:

$$\underbrace{\left( \underbrace{f+g}_{\text{integrabilna po (i)}} \right)^2}_{\text{integrabilna po izreku}} = \underbrace{f^2}_{\text{integrabilna po izreku}} + 2fg + \underbrace{g^2}_{\text{integrabilna po izreku}}$$

Zato lahko zapišemo

$$fg = \frac{1}{2} \underbrace{\left( \underbrace{(f+g)^2 - f^2 - g^2}_{\text{integrabilna po (i)}} \right)}_{\text{integrabilna po (ii)}}$$

Torej je tudi  $fg$  integrabilna.

(iv)  $f(x) \leq g(x)$  za vse  $x \in [a, b]$ . Sledi  $\underbrace{R(f, D, T_D)}_{\rightarrow I} \leq \underbrace{R(g, D, T_D)}_{\rightarrow J}$  za isto velja. Zato velja zveza v limiti.

Dokazati moramo, da je  $I \leq J$  ne glede na izbiro delitve. Ideja dokaza je, da dokažemo, da za vsak  $\varepsilon > 0$  velja  $J - I \geq -\varepsilon$  ne glede na delitev.

(v) Ker je  $f$  integrabilna je  $|f|$  integrabilna. Velja

$$\begin{aligned} -|f(x)| &\leq f(x) \leq |f(x)| \\ \underbrace{-\int_a^b |f(x)| dx}_{-I} &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)| dx}_I \end{aligned}$$

Iz tega sledi

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq I = \int_a^b |f(x)| dx$$

(vi) Ta lastnost je posledica aditivnosti domene.

### 5.18.6 Povprečna vrednost

Do sedaj vemo, da če so  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , je povprečna vrednost  $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ . Če za  $[a, b]$  vzamemo  $[0, 1]$  in za  $D$  vzamemo ekvidistančno delitev, da je  $\delta_k = \frac{1}{n}$ , potem velja

$$R(f, D, T_D) = \frac{1}{n}(f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n))$$

DEFINICIJA: Naj bo  $f$  integrabilna funkcija na  $[a, b]$ . *Povprečna vrednost* funkcije  $f$  na  $[a, b]$  je

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu$$

**Opomba:** Za nenegativne integrabilne funkcije  $f$  je povprečna vrednost  $\mu$  tisto število, da je ploščina pod grafom  $f$  enaka ploščini pravokotnika z višino  $\mu$ .

IZREK: Naj bo  $f$  integrabilna na  $[a, b]$  in naj bo

$$m = \inf f \qquad M = \sup f$$

Potem za povprečno vrednost  $\mu$  funkcije  $f$  velja

$$m \leq \mu \leq M$$

Če je  $f$  zvezna na  $[a, b]$ , potem obstaja  $c \in [a, b]$ , da velja

$$f(c) = \mu$$



DOKAZ: Vemo  $m \leq f(x) \leq M$  za vsak  $x \in [a, b]$ . Zaradi monotonosti določenega integrala velja

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

$$m \leq \mu \leq M$$

Če je  $f$  zvezna na  $[a, b]$ , potem doseže vse vrednosti med  $m$  in  $M$ , torej tudi  $\mu$ .

### 5.18.7 Osnovni izrek analize

DEFINICIJA: Naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna funkcija. Funkcijo  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiramo s predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

in jo imenujemo *integral kot funkcija zgornje meje*.

IZREK (osnovni izrek analize):

Naj bo  $f$  integrabilna funkcija na  $[a, b]$ . Tedaj je  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  zvezna na  $[a, b]$ . Če je  $f$  zvezna v točki  $x \in (a, b)$ , potem je  $F$  v točki  $x$  odvedljiva in  $F'(x) = f(x)$ .

POSLEDICA: Vsaka zvezna funkcija na  $[a, b]$  ima primitivno funkcija na  $[a, b]$ . Natančneje: če je  $f$  zvezna na  $[a, b]$ , potem je  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  odvedljiva na  $[a, b]$  in  $F' = f$ .

DOKAZ: Če je  $f$  integrabilna je  $f$  zvezna.

Vemo, da je  $f$  omejena. Torej obstaja  $M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M$  za vsak  $x \in [a, b]$ . Torej velja

$$F(x) - F(x') = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x'} f(t) dt = \int_{x'}^x f(t) dt$$

Če je  $x > x'$  velja

$$|F(x) - F(x')| = \left| \int_{x'}^x f(t) dt \right| \leq \underbrace{\int_{x'}^x}_{x > x'} |f(t)| dt \leq \underbrace{\int_{x'}^x}_{\leq M} M dt = M(x - x') < \varepsilon$$

Če je  $|x - x'| < \delta = \frac{\varepsilon}{M}$ .

Če je  $x < x'$ , potem po podobnem izračunu dobimo

$$|F(x) - F(x')| \leq M(x' - x) < \varepsilon$$

Torej velja, da če je  $|x - x'| < \frac{\varepsilon}{M}$ , potem je  $|F(x) - F(x')| < \varepsilon$ , zaradi česar je  $F$  enakomerno zvezna.

Denimo, da je  $f$  zvezna v točki  $x$ . Velja

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt = \\ &= f(x) + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \end{aligned}$$

Dokazati je potrebno, da je limita  $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt$  enaka 0.

Ker je  $f$  zvezna v točki  $x$  velja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

Če je  $|h| < \delta$ , potem velja  $|t - x| < \delta$ , ker  $t$  leži med  $x$  in  $x + h$ . Zato velja

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| &\leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} \underbrace{|f(t) - f(x)|}_{< \varepsilon} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h} \varepsilon h = \varepsilon \end{aligned}$$

□

**POSLEDICA:** Vsaka zvezna funkcija  $f$  na  $[a, b]$  ima primitivno funkcijo na  $[a, b]$ . Natančneje  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  je odvedljiva in  $F'(x) = f(x)$ ,  $F$  je primitivna funkcija od  $f$ .

**Opomba:** Nima vsaka integrabilna funkcija primitivne funkcije. Npr. funkcija, ki ima skok.

**IZREK:** (osnovni izrek interalnega računa - Leibnizova formula)

Najbo  $f$  taka integrabilna funkcija na  $[a, b]$ , ki ima na  $[a, b]$  primitivno funkcijo  $F$ , to je  $F' = f$  na  $[a, b]$ . Potem velja Leibnizova formula

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(X)|_a^b$$

**DOKAZ:**

1. Če je  $f$  zvezna, potem je  $F(X) = \int_a^x f(t)dt$  njena primitivna funkcija

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

izrek za  $F$  velja. Če je  $G$  kakšna druga primitivna funkcija za  $f$ , potem velja  $F' = G' = f$  na  $[a, b]$  in zato obstaja  $C \in \mathbb{R}$ , da velja

$$G(X) = F(X) + C$$

Sledi

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

torej izrek velja

2. V splošnem:

Naj bo  $D$  poljubna delitev intervala  $[a, b]$ . Potem po Lagrangeevem izreku obstaja tak  $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ , da velja

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

Zapišemo lahko tudi

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = R(f, D, T_D)$$

Vemo, da je  $f$  integrabilna in zato obstaja limita Riemannovih vsot, to je Riemannov integral. Vemo, da si lahko za vsako delitev izberemo testne točke za katere bo  $F(b) - F(a)$  enaka Riemannovi vsoti. Torej smo našli podzaporedje konvergentnega zaporedja Riemannovih vsot, ki konvergira proti  $F(b) - F(a)$ , torej tudi zaporedje Riemannovih vsot konvergira proti  $F(b) - F(a)$ , zato je integral enak  $F(b) - F(a)$ .

□

PRIMER: Obstaja funkcija, ki ni zvezna, je integrabilna in ima primitivno funkcijo. Naj bo  $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  primitivna funkcija,  $F(0) = 0$ . Vemo

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = 0$$

Torej je  $F$  zvezna in odvedljiva na  $\mathbb{R}$ . Definiramo

$$f(x) = F'(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  ne obstaja,  $f$  je zvezna na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ker je omejena na  $[a, b]$ , je integrabilna. Sledi

$$\int_0^a f(x)dx = F(a) - F(0) = F(a)$$

### 5.18.8 Uvedba nove spremenljivke in integracija po delih v določenem integralu

IZREK:

- (i) Naj bo  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezno odvedljiva funkcija in  $f : Z_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija. Potem velja

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

- (ii) Naj bosta  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezno odvedljivi funkciji. Potem velja

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x))|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

DOKAZ:

- (i) Naj bo  $F$  primitivna funkcija od  $f$  (obstaja, ker je  $f$  zvezna). Potem je

$$G(t) = F(\varphi(t))$$

zvezno odvedljiva funkcija. Torej je

$$G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

zvezna funkcija. Zato je  $G$  primitivna funkcija od  $(f \circ \varphi)\varphi'$  in velja

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

(ii) Velja

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Zato je  $fg$  primitivna funkcija od  $f'g + fg'$ , odtod po Leibnizovi formuli

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = (f(x)g(x))|_a^b$$

□

IZREK: Naj bo  $\varphi$  zvezno odvedljiva, naraščajoča funkcija na  $[a, b]$  in  $f$  integrabilna na  $[\varphi(a), \varphi(b)]$ . Tedaj je funkcija  $(f \circ \varphi)\varphi'$  integrabilna na  $[a, b]$  in velja

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

DOKAZ:  $f$  je integrabilna, zato za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$ , da za vsako delitev  $D$ ,  $\delta(D) < \delta$ , velja

$$\left| \underbrace{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx}_I - R(f, D, T_D) \right| < \varepsilon$$

za vsako usklajeno izbiro  $T_D$ .

Delitev  $D$  intervala  $[\varphi(a), \varphi(b)]$  določa delitev  $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  intervala  $[a, b]$  (ker je  $\varphi$  naraščajoča).

Ker je  $\varphi$  zvezna na  $[a, b]$ , je enakomerno zvezna na  $[a, b]$ , zato za vsak  $\delta > 0$  obstaja  $\delta' > 0$  da za  $t, t' \in [a, b]$  velja

$$|t - t'| < \delta' \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t')| < \delta$$

Oglejmo si Riemannovo vsoto  $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ .

Naj bo  $\overline{D}$  delitev intervala  $[a, b]$ . Velja

$$R((f \circ \varphi)\varphi', \overline{D}, T_{\overline{D}}) = \sum_{j=1}^n f(\varphi(c_j))\varphi'(c_j)(t_j - t_{j-1})$$

Po Lagrangeevem izreku obstaja tak  $\overline{c}_j \in (t_{j-1}, t_j)$ , da velja

$$\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) = \varphi(\overline{c}_j)(t_j - t_{j-1})$$

Upoštevajmo še enakomerno zveznost funkcije  $\varphi'$ . Obstaja  $\delta'' > 0$ , da za  $t, t' \in [a, b]$  velja

$$|t - t'| < \delta'' \Rightarrow |\varphi'(t) - \varphi'(t')| < \varepsilon$$

Označimo še  $M = \sup |f|$ . Sedaj lahko zapišemo

$$\begin{aligned} R((f \circ \varphi)\varphi', \overline{D}, T_{\overline{D}}) &= \sum_{j=1}^n f(\varphi(c_j))\varphi'(c_j)(t_j - t_{j-1}) = \\ &= \sum_{j=1}^n f(\varphi(c_j))\varphi'(\overline{c_j})(t_j - t_{j-1}) - \underbrace{\sum_{j=1}^n f(\varphi(c_j))(t_j - t_{j-1})(\varphi'(c_j) - \varphi'(\overline{c_j}))}_o = \\ &= \sum_{j=1}^n f(\varphi(c_j))(\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})) + o = \\ &= R(f, \{\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_n)\}, \{\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_n)\}) + o \end{aligned}$$

Poglejmo kako je z  $o$

$$|o| \leq \sum_{j=1}^n \underbrace{|f(\varphi(c_j))|}_{\leq M} \cdot |t_j - t_{j-1}| \cdot \underbrace{|\varphi'(c_j) - \varphi'(\overline{c_j})|}_{\leq \varepsilon \text{ če } |c_j - \overline{c_j}| < \delta''} \leq \varepsilon M \sum_{j=1}^n |t_j - t_{j-1}| = \varepsilon M(b-a)$$

Iz tega sledi

$$\begin{aligned} |R((f \circ \varphi)\varphi', \overline{D}, T_{\overline{D}}) - I| &= |R(f, D, T_D) + o - I| \leq \\ &\leq \underbrace{|R(f, D, T_D) - I|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|o|}_{\leq \varepsilon M(b-a)} \leq \varepsilon(1 + M(b-a)) \end{aligned}$$

□