Analiza 1

Vid Drobnič

Kazalo

1 Števila

1.1 Naravna števila

- Z njimi štejemo: 1, 2, 3
- Množico naravnih števil označimo z $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

- Vsako naravno število n ima naslednika n^+ ($n^+ = n + 1$)

Peanovi aksiomi:

$\mathbb{N}$ je množica skupaj s pravilom, ki vsakemu naravnemu številu n dodeli njegovega naslednika $n^+ \in \mathbb{N}$ in velja:

1. za vse $m, n \in \mathbb{N}$ če $m^+ = n^+$, potem $m = n$
2. obstaja $1 \in \mathbb{N}$, ki ni naslednik nobenega naravnega števila
3. Če je $A \subset \mathbb{N}$ in če je $1 \in A$ [1] in če velja: če $n \in A$, potem $n^+ \in A$ [2], potem $A = \mathbb{N}$

Aksiom (3) se imenuje **aksiom popolne indukcije**.

- Naravna števila lahko **seštevamo, množimo**.
- $\mathbb{N}$ so urejena po velikosti $1, 2, 3, 4, 5, ...$

$$\{3, 5, 6, 10\} \subset \mathbb{N}$$

$$\{3, 5, 7, 16, 23, ...\} \subset \mathbb{N}$$

- Vsaka neprazna podmnožica $\mathbb{N}$ ima najmanjši element.
- V splošnem ne velja[3], da ima vsaka neprazna podmnožica $\mathbb{N}$ največji element.

[1] indukcijska baza
[2] indukcijski korak
[3] ne velja za vse (množice)

1.2 Cela števila

Označimo jih z $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$$

- Seštevanje in množenje se iz $\mathbb{N}$ razširita na $\mathbb{Z}$.
- Poleg tega je definiramo **odštevanje**.
- Množico celih števil uredimo na običajen način.
- Ni res, da bi imela vsaka neprazna podmnožica $\mathbb{Z}$ najmanjši element.
- V splošnem deljenje ni definirano $\left(\frac{3}{2}\right)$

1.3 Racionalna števila

Racionalna števila so kvocienti celih števil. Bolj natančno: kvoceinti celih in naravnih števil.

Dva ulomka $\frac{m}{n}, \frac{k}{l}$ predstavljata isto racionalno število če: $ml = nk$
lahko naredimo:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

Množico $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ razdelimo na razrede: urejena para (m, n) in (k, l) sta v istem razredu, če velja $ml = nk$.

Racionalno število je razred urejenih parov in ga označimo z $\frac{m}{n}$.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

Seštevanje v $\mathbb{Q}$:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}$$

Seštevanje ulomkov je *dobro definirano:*
če je: $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}, \frac{k'}{l'} = \frac{k}{l}$
potem je: $\frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'} = \frac{m}{n} + \frac{k}{l}$

vemo: $m'n = mn'$ in $k'l = kl'$
Dokaz:

$$\frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'} =^{(def)} \frac{m'l' + n'k'}{n'l'} \frac{\cdot mk}{\cdot mk} =$$

$$= \frac{m'l'mk + n'k'mk}{n'ml'k} =$$

$$= \frac{m'mk'l + m'nk'k}{m'nk'l} = \frac{ml + nk}{nl} =^{(def)}= \frac{m}{n} + \frac{k}{l}$$

Množenje v $\mathbb{Q}$:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l, \in, \mathbb{N}$$

Množenje je dobro definirano (izpeljava doma).

Deljenje v $\mathbb{Q}$:

$$\frac{m}{n} : \frac{k}{l} = \frac{ml}{nk}, m, k \in \mathbb{Z}, n, l \in \mathbb{N}, k \neq 0$$

Lastnosti seštevanja

Naj bo A (številska) množica z operacijama $+$ in $\cdot$.

Osnovne lastnosti računskih operacij bomo imenovali **aksiomi**. Druge lastnosti izpeljemo iz aksiomov.

A1 asociativnost seštevanja

Za vse $a, b, c \in A$ velja $(a + b) + c = a + (b + c)$

A2 komutativnost seštevanja

Za vse $a, b \in A$ velja da $a + b = b + a$

A3 obstoj enote za seštevanje

Obstaja za element $0 \in A$ za katerega velja da: $0 + a = a$ za vse $a \in A$

A4 obstoj nasprotnega števila (elementa)

Za vsak $a \in A$ obstaja nasprotno število $-a \in A$ za katerega velja: $(-a) + a = 0$

Opomba: Množica A za operacijo $+$, ki ustreza aksiomom od A1 do A4 je **Abelova grupa** za $+$.

Trditev: Naj $(A, +)$ ustreza aksiomom od A1 do A4.

(1) $\forall a \in A$ ima eno samo nasprotno število

(2) **Pravilo krajšanja:** za vse $a, x, y \in A$ velja: $a + x = a + y \Rightarrow x = y$

(3) $-0 = 0$

Dokaz:

(1) izberemo poljubno število $a \in A$. Dokazujemo da ima a natanko 1 nasprotni element.

Po A4 nasprotno število obstaja. Denimo, da sta $b, c \in A$ nasprotni števili od a.

$$b + a = 0 \text{ in } c + a = 0$$

$$(a + b) + c \overset{\text{A2}}{=} (b + a) + c \overset{\text{predp.}}{=} 0 + c \overset{\text{A2}}{=} c$$

$$(a+b)+c \overset{\text{A2}}{=} (b+a)+c \overset{\text{A1}}{=} b+(a+c) \overset{\text{A2}}{=} b+(c+a) \overset{\text{predp.}}{=} b+0 \overset{\text{A2}}{=} 0+b \overset{\text{A3}}{=} b$$

$$c = b$$

(2)

$$a + x = a + y \overset{\text{A4}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (-a) + (a + x) = (-a) + (a + y) \overset{\text{A1}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow ((-a) + a) + x = ((-a) + a) + y \overset{\text{A4}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 0 + x = 0 + y \overset{\text{A3}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x = y$$

(3) $-0 = 0$

$$0 \overset{\text{A4}}{=} (-0) + 0 \overset{\text{A2}}{=} 0 + (-0) \overset{\text{A3}}{=} -0$$

Odštevanje v A: razlika števil a in b je vsota a in nasprotnega elementa od b.

$$a - b := a + (-b)$$

$b - a$ je rešitev enačbe $a + x = b$

Pozor: odštevanje ne ustreza aksiomom od A1 do A4.

Lastnosti množenja

A5 asociativnost množenja

Za vse $a, b, c, \in A$ velja: $(ab)c = a(bc)$

A6 komutativnost množenja

Za vse $a, b, c \in A$ velja: $ab = ba$

A7 obstoj enote za množenje

$\exists 1 \in A : 1 \cdot a = a$, za $\forall a \in A$

A8 obstoj obratnega števila (elementa)

Vsak $a \in A, a \neq 0$, ima obratni element, tj.: $a^{-1} \in A : a^{-1} \cdot a = 1$

Množici A z operacijo $+$, ki ustreza A1-A4, rečemo **grupa za seštevanje** (Abelova grupa).

Množica $A \setminus \{0\}$ z operacijo $\cdot$, ki ustreza A5-A8 je **grupa za množenje.**

Podobno kot za seštevanje lahko izpeljemo:
Trditev: veljajo:

(1) Vsak $a \in A \setminus \{0\}$ ima eno samo obratno število

(2) (pravilo krajšanja za množenje)

Za vsak $a, x, y \in A$ velja: $ax = ay \Rightarrow x = y$

(3) $1^{-1} = 1$

A9 Števili 0 in 1 sta različni $0 \neq 1$

A10 Distributivnost

Za vsake $a, b, c \in A$ velja:

$$(a+b)c = ac + bc$$

Def: Množico A z operacijama $+$ in $\cdot$, ki ustreza aksiomom A1-A10, imenujemo **komutativen**[4] **obseg** ali **polje**.
Primer: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ so polje.

V A vpeljemo urejenost z dvema aksiomoma:

A11: Za vsak $a \in A \setminus \{0\}$ velja, da je natanko eno od števil a, $-a$ pozitivno. Število 0 ni niti pozitivno niti negativno. (Število a je negativno, če je število $-a$ pozitivno).

A12: Za vsaka $a, b \in A$ velja: če sta a in b pozitivni števili, potem sta tudi $a + b$ in $a \cdot b$ pozitivni števili.

Def: Če ima obseg $(A, +, \cdot)$ urejenost, ki izpolnjuje A11 in A12, A imenujemo **urejen obseg** (urejeno polje).
Primer: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ z običajno urejenostjo je urejen obseg.

$\frac{m}{n}$ je pozitiven, če $m \cdot n > 0$

Def: Naj bo A urejen obseg. Za poljubna $a, b \in A$ definiramo:

Pišemo $a > b$ natanko tedaj, kadar je $a - b$ pozitivno število.

V tem primeru pišemo tudi $b < a$

V posebnem primeru pišemo $a > 0$, kadar je a pozitivno število.

Def: Naj bo A urejen obseg. Za poljubna $a, b \in A$

$a \leq b$ natanko takrat, kadar $a < b$ ali $a = b$

Trditev: V urejenem obsegu A velja:

(1) Za poljubni števili $a, b \in A$ velja natanko ena od možnosti:

$$a < b,\ a = b,\ a > b$$

Sledi iz A11 uporabljen za $a - b$.

[4] komutativnost se nanaša na komutativnost množenja

(2) Za poljubne $a, b, c \in A$ velja:

če je $a > b \wedge b > c$, potem $a > c$ (tranzitivnost)

(3) Za poljubne $a, b, c \in A$ velja:

če je $a > b$, potem $a + c > b + c$

(4) Za poljubne $a, b, c, \in A, c > 0$:

če je $a > b$, potem je $ac > bc$

(5) Za poljubne $a, b, c, d, \in A$:

če je $a > b > 0$ in $c > d > 0$, potem je $ac > bd$

Dokaz:

(2) $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

Po definiciji: $a - b > 0$ in $b - c > 0$

Zato po A12:

$$\begin{aligned}(a-b)+(b-c) &> 0\\ a+(-b)+b+(-c) &> 0\\ a+0+(-c) &> 0\\ a-c &> 0\end{aligned}$$

zato $a > c$

(3) denimo, da je $a > b$

dokazujemo, da je $a + b > b + c$, tj: $(a + c) - (b + c) > 0$

$$\begin{aligned}(a+c)-(b+c) = &a+c+(-(b+c)) =\\ &a+c+(-b)+(-c) =\\ &(a+(-b))+(c+(-c)) =\\ &a+(-b) = a-b\end{aligned}$$

Dokaz da $-(b + c) = (-b) + (-c)$:

$-(b + c)$ je nasprotni element od $b + c$, kar pomeni da je njuna vsota enaka 0. Če velja $-(b + c) = (-b) + (-c)$, mora biti tudi $b + c + (-b) + (-c) = 0$:

$$b + c + (-b) + (-c) \overset{A2,A1}{=} (b + (-b)) + (c + (-c)) \overset{A4}{=} 0 + 0 \overset{A3}{=} 0$$

Če $a > b$ je $a-b > 0$, zato je $(a+c)-(b+c) > 0$, kar pomni $a+c > b+c$.

(5) $a > b > 0$ in $c > d > 0$

Dokazujemo $ac > bd$:

$a > b \overset{4}{\Rightarrow} ac > bc$ $(c > 0)$
$c > d \overset{4}{\Rightarrow} bc > bd$ $(b > 0)$

Z upoštevanjem tranzitivnosti (2) dobimo: $ac > bd$ $\square$

Racionalna števila predstavimo na številski premici.

Racionalna števila so na številski premici **povsod gosta** tj: na vsakem nepraznem odprtem intervalu leži racionalno število.

Racionalna števila ne pokrijejo številske premice

Trditev: rešitev enačbe $x^2 = 2, x > 0$ ni racionalno število. ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)
Dokaz: Dokazujemo da x ni ulomek.

Dokazujemo s protislovjem.

- privzamemo, da tisto kar dokazujemo ni res. (predpostavimo, da x je ulomek)
- sklepamo
- skepi nas privedejo v protislovje s predpostavko

$$x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$$

Če je x ulomek, ga lahko zapišemo kot okrajšan ulomek, zato sta m in n tuji si števili.

$$
\begin{aligned}
x^2 = 2 \Rightarrow (\frac{m}{n})^2 &= 2 \\
\frac{m^2}{n^2} &= 2 \\
m^2 &= 2n^2 \\
2|m^2 &\Rightarrow 2|m \\
\exists l \in \mathbb{N} : m &= 2l \\
4l^2 &= 2n^2 \\
2l^2 &= n^2 \\
2|n^2 &\Rightarrow 2|n \\
&\rightarrow\leftarrow
\end{aligned}
$$

Dokaz da $2|m^2 \Rightarrow 2|m$:
Če je m liho, potem $k \in \mathbb{N}_0$

$$
\begin{aligned}
m &= 2k + +1 \\
m^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\
m^2 &\text{ je lih}
\end{aligned}
$$

1.4 Dedekindov aksiom in Realna števila

Radi bi skonstruirali številsko množico, ki bo vsaj urejen obseg in, ki zapolni številsko premico.

Dedekindov pristop

Def: **Rez** je podmonožica $A \subset \mathbb{Q}$, za katero velja:

(i) $A \neq \varnothing, A \neq \mathbb{Q}$

(ii) Če je $p \in A$, potem za vsak $q \in \mathbb{Q}$ in $q < p$, velja $q \in A$

(iii) za vsak $p \in A$ obstaja $q \in A, q > p$ (A nima največjega elementa)

Def: Množica realnih števil je množica vseh rezov, označimo jo s $\mathbb{R}$
Primer: 16 ustreza rez: $\{p \in \mathbb{Q}; p < 16\} = B$

Trditev: Preslikava $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ in je definirana s predpisom:

$$q \mapsto \{p \in \mathbb{Q}; p < q\} = p^*$$

vloži množico racionalnih števil v množico realnih števil.

Vpeljimo računski operaciji v $\mathbb{R}$.

Def: Naj bosta A in B reza. Vsota rezov A in B je

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$$

Opomba: Želimo si, da velja $(p + q)^* = p^* + q^*$

Trditev: Če sta A in B reza, potem je tudi $A + B$ rez.
Dokaz(trditev): Denimo da sta A in B reza.

Dokazujemo da je $A + B$ rez:

(i) $\underline{A + B \neq \varnothing}$

Ker sta A in B reza, po lastnosti (i) obstaja $a \in A$ in $b \in B$. Potem je $a + b \in A + B$. Sledi $A + B \neq \varnothing$ $\square$

$\underline{A + B \neq \mathbb{Q}}$

Obstaja $c \in \mathbb{Q}, c \notin A$ in obstaja $d \in \mathbb{Q}, d \notin B$.

$$c + d \notin A + B$$

Denimo, da je $c + d \ \in A + B$.

Potem velja, da je $c + d = a + b$ za $a \in A, b \in B$.

Iz (ii) sledi: $c > a$ in $d > b \Rightarrow a + b < c + d \quad \to\leftarrow$

(ii) Denimo: $p \in A + B$, dokazujemo da za $q \in \mathbb{Q}, q < p$ velja $\underline{q \in A + B}$

Obstajata $a \in A$ in $b \in B$, da $p = a + b$

$$q = a + q - a$$

Če je $q - a < b$, potem $q - a \in B$

$$q < a + b$$
$$q < p$$
$$\square$$

(iii) $\underline{A + B \text{ nima največjega elementa.}}$

izberimo $p \in A + B$
iščemo $q \in A + B, q > p$

Obstajata $a \in A, b \in B$, da je $p = a_b$
Obstaja $a' \in A, a' > a$

$$q := a' + b \in A + B$$
$$q > p$$
$$\square$$

Ni težko preveriti, da za $(\mathbb{R}, +)$ veljajo A1-A4.
Asociativnost in komutatiovnost se dokaže z operacijami na elementih reza.
0^* je enota za seštevanje.

Nasprotni rez od A:

$$-A = \{r \in \mathbb{Q}, \text{obstaja } r' \in \mathbb{Q}, r' > r \text{ in } r' + p < 0 \text{ za vse } p \in A\}$$

(i) $-A \neq \varnothing$

$\underline{-A \neq \mathbb{Q}}$

$$q + a < 0 \text{ za vse } q \in \mathbb{Q}$$
$$q = -a$$

(ii) $q \in -A : r < q$

$q + a < 0$ za vse $a \in A$

$r + a < q + a$ za vse $a \in A$ po tranzitivnosti: $r + a < 0$

(iii) Izberemo poljuben $r \in A$. Iščemo $q \in A, q > r$.

$$q := \frac{r + r'}{2}(r' > r, r' \in \mathbb{Q} : r' + p < 0 \text{ za vse } p \in \mathbb{Q})$$

$$q \in \mathbb{Q}, r' > q$$

Def: Pravimo da je A pozitiven, če je $0^* \subset A, A \neq 0^*$. Denimo da sta A in B pozitivna reza:

$$A \cdot B = \{q \in \mathbb{Q},\ \text{obstajata } a \in A, a > 0 \text{ in } b \in B, b > 0, \text{ da je } q < ab\}$$

Želimo $(pq)^* = p^* \cdot q^*, p, q \in \mathbb{Q}$

Def: Naj bosta A in B poljubna reza.

$$A \cdot B = \begin{cases} A \cdot B & A > 0 \wedge B > 0 \\ -A \cdot (-B) & A > 0 \wedge B < 0 \\ -(-A) \cdot B & A < 0 \wedge B > 0 \\ (-A) \cdot (-B) & A < 0 \wedge B < 0 \end{cases}$$

Če je vsaj eden od rezov enak 0^*, potem $A \cdot B = 0^*$.

Ni težko preveriti, da množenje rezov izpolnjuje A5-A8 in A9, A10.

Enota za množenje je 1^*.

Urejenost izplonjuje A11 in A12.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je **urejen obseg** in vsebuje $\mathbb{Q}$ kot **urejen podobseg**.

Cilj: Obseg $\mathbb{R}$ izpolnjuje še dodaten aksion A13 (**Dedekindov aksiom**), ki pove, da $\mathbb{R}$ zapolnjuje številsko premico.

Aksioma A13 obseg $\mathbb{Q}$ ne izpolnjuje.

Def: Naj bo B urejen obseg in $A \subset B$. Pravimo, da je A navzgor omejena, če obstaja $M \in B$, da velja:

$$\forall a \in A : a \leq M$$

$\forall M$ s to lastnostjo pravimo zgornja meja množice A. Če je $A \subset \mathbb{Q}$ (ali $\mathbb{R}$) in je množica navzgor omejena, potem ima A neskončno zgornjih mej.

Def: Naj bo A navzgor omejena množica. Če obstaja najmanjša od vseh zgornjih mej množice A v B, jo imenuje natančna zgornja meja množice A.

Torej je $\alpha \in B$ natančna zgornja meja množice A, če velja:

(i) α je zgornja meja $\forall a \in A : a \leq \alpha$

(ii) Če $b \in B, b < \alpha$, potem b ni zgornja meja množice A, t.j.: $\exists a \in A : a > b$

Natančno zgornjo mejo množice A imenujemo tudi **supremum** množice A in jo označimo z $\sup A$.

Def: Če obstaja največji element množice A, ga imenujemo **maksimum** množice A in označimo z $\max A$.

Če ima A maksimum, potem velja:

$$\max A \in A \wedge \forall a \in A : a \leq \max A$$

Če ima A maksimum, potem $\max A = \sup A$. (Za a v (2) lastnosti definicije supremuma vzamemo $\max A$)

Dokaz:

(1) $\max A$ je zgornja meja A (po definiciji maksimuma).

(2) če $b < \max A$, potem b ni zgornja meja (ker je $\max A \in A$, b pa je manjši, velja da b ni zgornja meja od A, ker obstaja nek element is A, ki je večji od b).

Primeri:

1. $A = \{x \in \mathbb{Q}, x < 0\} \subset \mathbb{Q}$

   4 je zgornja meja množice A, ker $x \in A, x < 0, 0 < 4 \Rightarrow x < 4$

   $\Rightarrow A$ je navzgor omejena.

   0 je natančna zgornja meja množice A

   (a) $x \in A, x < 0$

   (b) Izberemo poljuben $b \in \mathbb{Q}, b < 0$ in dokazujemo, da b ni zgornja meja.

   $$b < \frac{b}{2} < 0; \frac{b}{2} \in A, \frac{b}{2} > b$$

   Množica A nima maksimuma: $0 \notin A$.

2. $C = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$

   C je navzgor omejena z 2.

   $$x \in C : x^2 < 2 \wedge 2 < 4 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x < 2$$

   (a) Vsako število $p \in \mathbb{Q}, p^2 > 2$ je zgornja meja množice C.

   (b) Nobeno racionalno število $q \in \mathbb{Q}, q^2 < 2$ ni zgornja meja množice C.

Vemo: Rešitev enačbe $x^2 = 2, x > 0, x \notin \mathbb{Q}$.
Sledi: $C \subset \mathbb{Q}$ nima natančne zgornje meje.

Dokaz:

(a)

$$x^2 < 2 < p^2$$

sledi: $x^2 < p^2 \Rightarrow x < p$ za vse $x \in C$ $\square$

(b) Iščemo $c \in C$, da je $c > q, c^2 < 2$

$$c := \frac{2q+2}{q+2} = q + \frac{2q+2-q^2-2q}{q+2} = q + \frac{2-q^2 > 0}{q+2} > 0$$

$(q^2 < 2)$

$$c^2 = (\frac{2q+2}{q+2}^2 = \frac{4(q^2+2q+1)}{q^2+4q+4}$$

$$c^2 - 2 = \frac{4q^2+8q+4-2q^2-8q-8}{(q+2)^2} = \frac{2q^2-4}{(q+2)^2} = \frac{2(q^2-2>0)}{(q+2)^2} > 0$$

$$q^2 < 2$$

Podobno kot zgornjo mejo, navzgor omejeno množico, supremum in maskimum, definiramo spodnjo mejo, navzdol omejeno množico, infimum in minimum.

A13 (Dedekindov aksiom): Vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica v množici A ima supremum (v množici A).

Def: Če množica $(A, +, \cdot, <)$ izpolnjuje aksiome A1-A13 jo imenujem *poln urejen obseg* (poln se nanaša na A13).

Trditev: $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ je urejen obseg, ki ne izpolnjuje A13.

Izrek: vsaka nerpazna navzgor omejena podmnožica v $\mathbb{R}$ ima natančno določeno zgornjo mejo. ($\mathbb{R}$ izpolnjuje A13)

Posledica: $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ je poln urejen obseg.

Posledica: Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica $\mathbb{R}$ ima natančno spodnjo mejo.

A neprazna navzdol omejena.

$$-A = \{x; -x \in A\}$$

$-A$ je neprazna, navzgor omejena (če m spodnja meja od A, je $-m$ zgornja meja od $-A$). $\Rightarrow -A$ ima supremum in velja: $-\sup A = \inf A$

Dokaz (izrek): Izberemo poljubno neprazno navzgor omejeno podmnožico $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}$.

$$C = \cup A, A \in \mathcal{A}$$

Dokazati je treba:

1. C je rez
2. $C = \sup \mathcal{A}$

1. (i) $\underline{C \neq \varnothing}$
   Ker $\mathcal{A}$ ni prazna $\exists A \in \mathcal{A}$. Torej velja $A \subset C$, torej $C \neq \varnothing$.
   $\underline{C \neq \mathbb{Q}}$
   Ker je $\mathcal{A}$ omejena, obstaja zgornja meja M množice $\mathcal{A}$, velja:
   $$\forall A \in \mathcal{A} : A \leq M$$
   $$\forall A \in \mathcal{A} : A \subset M$$
   Sledi: $C \subset M$, zato $C \neq \mathbb{Q}$ (ker $M \neq \mathbb{Q}/M$ je rez).

   (ii) $\underline{p \in C, q \in \mathbb{Q}, q < p \Rightarrow q \in C}$
   $p \in C \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}$, da je $p \in A$. Ker je A rez, za $q \in \mathbb{Q}, q < p$ velja $q \in A$.
   Sledi: $q \in C$.

   (iii) $p \in C \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, q > p : q \in C$ $p \in C \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}$, da je $p \in A$. Ker je A rez, $\exists q \in A, q > p$.
   Sledi: $q \in C$.

2. (i) $\underline{C \text{ je zgornja meja } \mathcal{A}}$
   Ker je $A \subset C$ za vse $A \in \mathcal{A}$, velja $A \leq C$ za vse $A \in \mathcal{A}$. t.j.: C je zgornja meja.

   (ii) $\underline{C \text{ je natančna}}$ zgornja meja $\mathcal{A}$
   Izberimo poljuben $D < C$. Dokazujemo, da D ni zgornja meja $\mathcal{A}$.
   Ker je $D < C, D \subset C$ in $D \neq C$, obstaja $p \in \mathbb{Q}, p \in C$ in $p \notin D$.
   Ker je $p \in C$, obstaja $A \in \mathcal{A}$, da je $p \in A$.
   Velja: $A > D$ in $A \in \mathcal{A}$ (vemo da sta vsaka reza primerljiva po velikosti.)
   Sledi: D ni zgornja meja. $\square$

Za radovedne: Poleg Dedekinda je realna števila definiral tudi Cantor. Ta je to naredil s Cauchyjevimi zaporedji.

Opomba: Med obsegoma $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ je še veliko obsegov.

Definicija: Pravimo, da je x iracionalno število, če $x \notin \mathbb{Q}$.

Rešitvam polinomskih enačb s celimi koeficienti rečemo *algebraična števila.*

Primer: $\sqrt{2} : x^2 - 2 = 0$

Niso vsa iracionalna števila algebraična: π, e. Tem pravimo *transcendentna števila.*

1.5 Posledice Dedekindovega aksioma

- Množica $\mathbb{Z}$ ni navzgor omejena v $\mathbb{R}$.

  Dokaz: Denimo, da je $\mathbb{Z}$ navzgor omejena v $\mathbb{R}$. Potem obstaja $M \in \mathbb{R}$, da $M = \sup \mathbb{Z}$. Torej $M - 1$ ni zgornja meja $\mathbb{Z}$.

  $$\exists a \in \mathbb{Z}, a > M - 1$$
  $$a + 1 > M, a + 1 \in \mathbb{Z} \rightarrow\leftarrow$$

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{Z} : a < b$

  Dokaz: če to ne bi bilo res, bi bilo število a zgornja meja $\mathbb{Z}$. To pa ni res (prejšnja posledica).

- *Arhimedska lastnost:* Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^+$. Potem obstaja $n \in \mathbb{N} : na > b$.

  Dokaz: Obstajati mora $n \in \mathbb{N} : n > \frac{b}{a}$:. Po prejšnji posledici tak n obstaja. $\square$

- Naj bo $a \in \mathbb{R}^+$. Potem obstaja $n \in \mathbb{N}$, da $\frac{1}{n} < a$.

  Dokaz: uporabimo arhimedsko lastnost za $n = 1$.

- Naj bosta a, b poljubni $\mathbb{R}, a < b$. Obstaja $q \in \mathbb{Q}$, da velja $a < q < b$.

  *Dokaz:*če je $b - a > 1$, potem obstaja $m \in \mathbb{Z}, a < m < b$

$\{n \in \mathbb{Z}, n \leq a\}$ je navzdol omejena neprazna.

$$\sup\{n \in \mathbb{Z}, n \leq a\} = x, x \in \mathbb{Z}$$
$$m := x + 1$$

$$b > m > 0$$

$$b - a > 0$$
$$\exists n \in \mathbb{N} : n(b - a) > 1$$

Obstaja $m \in \mathbb{Z} : an < m < nb$.

$$a < \frac{m}{n} < b \, \square$$

Rečemo tudi: $\mathbb{Q}$ so v $\mathbb{R}$ *povsod gosta.*

1.6 Intervali

Def: Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ *zaprti interval*
2. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ *odprti interval*
3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ *polodprti interval*
   $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
4. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
   $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$
   $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$
   $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$
   $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Def: Naj bo $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ imenujemo ε-*okolica* števila a.

Okolica točke a je vsaka taka podmnožica v $\mathbb{R}$, ki vsebuje kakšno ε-okolico točke a.

1.7 Decimalni ulomki

Vsako $\mathbb{R}$ število lahko zapišemo kot *decimalni ulomek*.

Naj bo $x \in \mathbb{R}^+$ in naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ največje števliko, ki ne presega x:

$$n \leq x < n + 1$$

Interval $[n, n{+}1]$ razdelimo na 10 enakih delov. Nato poiščemo $n_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, da velja:

$$n + \frac{n_1}{10} \leq x < n + \frac{n_1 + 1}{10}$$

Postopek nadaljujemo in na ta način sestavimo zaporedje decimalnih približkov za x.

$$\mathcal{A} = \{n, n + \frac{n_1}{10}, n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100}, \ldots\}$$

Trditev: $x = \sup \mathcal{A}$
Dokaz:

(i) x je zgornja meja množice $\mathcal{A}$
Velja po konstrukciji: $\forall a \in \mathcal{A} : a \leq x$.

(ii) x je najmanjša zgornja meja
Denimo da to ni res:

$$y := \sup \mathcal{A} < x$$
$$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq x - y$$
$$\exists p \in \mathbb{N} : \frac{1}{10^p} < \frac{1}{n} < x - y$$

$$y + \frac{1}{10^p} < x$$

$$n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \ldots + \frac{n_p}{10^p} \leq y$$
$$n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \ldots + \frac{n_p + 1}{10^p} \leq y + \frac{1}{10^p} < x \rightarrow\leftarrow$$

Trditev utemelji, da x lahko zapišemo, kot neskončni decimalni ulomek.

$$x = n_0 + \frac{n_1}{10} + \ldots + \frac{n_p}{10^p} + \ldots = n_0, n_1 n_2 \ldots n_p \ldots$$

Trditev: Naj bosta $x, y \in \mathbb{R}^+$

(1) Denimo, da obstaja $k \in \mathbb{N}_0$, za katerega velja:

$$x = n_0, n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n_k 99 \ldots$$
$$y = n_0, n_1 n_2 \ldots n_{k-1}(n_k + 1)00 \ldots$$

in $n_k \neq 9$, potem $x = y$.

(2) Za dva različna decimalna zapisa $x \in \mathbb{R}^+$ velja (1).

Dokaz: Naj bo $\mathcal{A}$ množica decimalnih preslikav za x.

(1)
$$\forall a \in \mathcal{A} : y \geq a \text{ (} y \text{ je zgornja meja)}$$

Zato $y \geq x$ (x je $\sup \mathcal{A}$)

Dokzujemo y je natančna zgornja meja od $\mathcal{A}$

Naj bo $l > k$ in a_l l-ti decimalni približek za x.

$$y - a_l = \frac{1}{10^l}$$
$$y - \frac{1}{10^l} = a_l$$
$$y - \frac{1}{10^l} \leq a_l < a_{l+1}$$

$\Rightarrow y - \frac{1}{10^l}$ ni zgornja meja za noben l, torej je y natančna zgornja meja.

(2) x naj ima dva decimalna zapisa:

$$x = n_0, n_1 n_2 \ldots$$
$$x = m_0, m_1 m_2 \ldots$$

Obstaja najmanjši indeks $k \in \mathbb{N} : n_k \neq m_k$.

Predpostavimo, da je $m_k > n_k$

$m_0, m_1 m_2 \dots m_k$ je zgornja meja množice decimalnih približkov za x.

$$m_0, m_1 m_2 \dots m_k > m_0, m_1 m_2 \dots m_{k-1} n_k n_{k+1} n_{k+2} \dots$$

Če bi veljajo $n_k < m_k - 1$ (dokazujemo, da je razlika lahko največ 1, t.j: morajo se ponavljati 9-ke)

$$x \leq n_0, n_1 n_2 \dots n_{k-1}(n_k + 1) < m_0, m_1 \dots m_{k-1} m_k \leq x \rightarrow\leftarrow$$

($x < x$ ni možno)
Če bi bil $m_{k+1} \neq 0$ (ali za indeks $l > k$):

$$x \leq m_0, m_1 m_2 \dots m_k < m_0, m_1 \dots m_k m_{k+1} \leq x \rightarrow\leftarrow$$

Na podoben način dokažemo, da velja:

$$\forall l \in \mathbb{N} : n_{k+l} = 9$$

Podobno velja tudi za druge osnove. Primer v dvojiškem sistemu bi bil:

$$1101, 011 = 1101, 010\overline{1}$$

Trditev: Naj bo $x \in \mathbb{R}$. x ima periodičen decimalni zapis natanko tedaj, kadar $x \in \mathbb{Q}$ (tudi končen decimalni zapis je periodičen).

Dokaz: denimo, da je $x \in \mathbb{Q}^+$.

$$x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$$

m delimo z n pisno. To pomeni da podpisujemo ostanke. Ker imamo na voljo n različnih ostankov: $o_j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, se bo med $n+1$ zaporednimi ostanki vsaj eden zagotovo ponovil. Ko se ostanek ponovi, se ponovi tudi cel zapis, kar je perioda.

Denimo, da ima x periodičen decimalni zapis:

$$x = d, d_1 d_2 \dots d_n \overline{d_{n+1} d_{n+2} \dots d_{n+k}}$$
$$10^k x = d \cdot 10^k + d_1 d_2 \dots d_k, d_{k+1} \dots d_n \dots d_{n+k} \overline{d_{n+1} \dots d_{n+k}}$$
$$10^k x - x \text{ ima končen decimalni zapis} = p \in \mathbb{Q}$$
$$x = \frac{p}{10^k - 1} \in \mathbb{Q} \quad \square$$

1.8 Absolutna vrednost

Def: če je $x \in \mathbb{R}$, potem

$$|x| = \begin{cases} x & \text{če } x \geq 0 \\ -x & \text{če } x < 0 \end{cases}$$

Število $|x|$ imenujemo *absolutna vrednost realnega števila x.*

Trditev: Naj bo $x \in \mathbb{R}$. Veljajo:

(i) $|x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $|x| = |-x|$

(iv) $-|x| \leq x \leq |x|$

(v) $|x|$ je razdalja x do 0 na številski premici

(vi) *Trikotniška neenakost:* $|x+y| \leq |x| + |y|$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$

(vii) $|xy| = |x| \cdot |y|$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$

Dokaz:

(vi) pregledamo vse možnosti glede na predznak

(1) $x \geq 0, y \geq 0$

$$|x+y| = x+y = |x| + |y|$$

(2) $x < 0, y < 0$

$$|x+y| = -(x+y) = -x-y = |x| + |y|$$

(3) $x \geq 0, y < 0$

$$\begin{aligned} |x| &= x, |y| = -y \\ x+y &= |x| - |y| \\ |x+y| &= \begin{cases} |x| - |y| & \text{če } |x| \geq |y|, \\ |y| - |x| & \text{če } |x| < |y| \end{cases} \\ |x+y| &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

(4) simetrična (3)

Posledica:

1) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$

2) $|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$ za vse $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}$

Dokaz:

1) Za + je desna neenakost trikotniška neenakost.

   Leva neenakost:

$$\begin{aligned} |x| = |(x+y) - y| &\leq |x+y| + |y| \\ |x| - |y| &\leq |x+y| \end{aligned}$$

   Podobno velja: $|y| - |x| \leq |x+y|$

   Iz tega sledi: $||x| - |y|| \leq |x+y|$ $\square$

1.9 Kompleksna števila

Motivacija za kompleksna števila je, da bi lahko rešili enačbo:

$$x^2 = -a, a \in \mathbb{R}^+$$

Definicija: Kompleksno število je urejeni par realnih števil: množica vseh kompleknih števil je množica vseh urejenih parov realnih števil, t.j.: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in jo označimo s $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$$

Opomba (kdaj sta dve kompleksni števili enaki):

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha = (a, b), \beta = (c, d) : \alpha = \beta \iff a = c \wedge b = d$$

V množico kompleksnih števil vpeljemo računski operaciji:

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha = (a, b), \beta = (c, d) \text{ kjer } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\alpha + \beta = (a+c, b+d)$$
$$\alpha \cdot \beta = (ac - bd, ad + bc)$$

Izrek: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je komutativen obseg. Enota za seštevanje je $(0,0)$, enota za množenja pa $(1,0)$. V $\mathbb{C}$ se ne da vpeljati urejenosti, da bi bil urejen obseg. Drugače povedano: izraz kot npr. $z > 0$ je nesmiselen.

Dokaz: (veljavnosti nekaterih aksiomov)

(A3) $\alpha + (0,0) = (a,b) + (0,0) = (a+0, b+0) = (a,b) = \alpha \quad \square$

(A4) $\alpha = (a,b) \in \mathbb{C} \quad -\alpha = (-a,-b)$

$$(a,b) + (-a,-b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0,0) = 0 \quad \square$$

(A7) $(a,b) \cdot (1,0) = (1a - 0b, 0a + 1b) = (a,b) \quad \square$

(A8) $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0 \qquad \alpha = (a,b)$

$$\alpha^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$$
$$\alpha\alpha^{-1} = (\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}) = (1,0) = 1 \quad \square$$

Opomba: Kompleksni števili $(0,0) \equiv 0, (1,0) \equiv 1$ poimenujemo 0 in 1.

Opomba: Preslikava $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirana s predpisom $a \mapsto (a,0)$ inducira vložitev realnih števil v kompleksnem in je usklajena z računskima operacijama.

$$(a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$$
$$(a,0) \cdot (b,0) = (ab - 0 \cdot 0, 0a + 0b) = (ab, 0)$$

Poleg te vložitve, bi si lahko zmislili tudi kakšno drugo, vendar ne bi bila dobra. Npr: $a \mapsto (a,1)$ ni dobra vložitev, ker že pri seštevanju "pademo ven" iz realnih vrednosti $((a,1) + (b,1) + (a+b,2))$.

Torej lahko kompleksna števila $(a,0)$ *identificiramo* z realnimi: $(a,0) = a$.

Definicija: Kompleksno število $(0,1)$ označimo z i in ga imenujemo *imaginarna enota.*

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0-1, 0\cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1$$
$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi$$

Od tu naprej bomo kompleksna števila obravnavali kot

$$\mathbb{C} = \{a + bi, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Definirani računski operaciji inducirata običajno računanje s kompleksnimi števili

Definicija: Naj bo $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

- število a je realni del kompleksnega števila α in ga označimo: $a = \Re\alpha$
- število b je imaginarni del kompleksnega števila α in ga označimo: $b = \Im\alpha$. Opomba: $\Im\alpha \in \mathbb{R}$.
- številu $a - bi$ rečemo *konjugirano število* številu α in ga označimo z $\overline{\alpha}$
- šteilo $\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$ imenujemo *absolutna vrednost* kompleksnega števila α in označimo $|\alpha|$

  Opomba: $\alpha = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

  $\sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{(a^2 - abi + abi + b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R} \geq 0$

  $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

  To pojasni, zakaj lahko uporabljamo enako oznako za absolutno vrednost kompleksnega števila, kot za absolutno vrednost realnega števila.

Trditev: Za $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ velja:

(i) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

(ii) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$

(iii)

$$\Re\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \overline{\alpha})$$
$$\Im\alpha = \frac{1}{2i}(\alpha - \overline{\alpha})$$

(iv) $\alpha\overline{\alpha} = (\Re\alpha)^2 + (\Im\alpha)^2$

(v) $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$

Dokaz:(ii) $\alpha = a + bi, \qquad \beta = c + di, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac - bd + (ad+bc)i)} =$$
$$= ac - bd - (ad+bc)i$$

$$\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = \overline{(a+bi)(c+di)} = (a-bi)(c-di) =$$
$$= ac - bd - (ad+bc)i \quad \square$$

1.9.1 Lastnosti

Za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ velja:

(i) $|\alpha| \geq 0$

(ii) $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$

(iii) $|\alpha| = |\overline{\alpha}|$

(iv) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

(v) $|\Re\alpha| \leq |\alpha|$
$|\Im\alpha| \leq |\alpha|$

(vi) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Dokaz

(iv)
$$|\alpha\beta|^2 = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = \alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\beta} = |\alpha|^2|\beta|^2$$

Ker je $|\alpha| \geq 0$, enakost sledi.

(vi)

$$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta}) = (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) =$$
$$= \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} =$$
$$= |\alpha|^2 + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} + |\beta|^2$$

$$(|\alpha| + |\beta|)^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$$

Dovolj je dokazati $\alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} \leq 2|\alpha||\beta|$

$$\alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} = \alpha\overline{\beta} + \overline{\overline{\overline{\alpha}\beta}} = \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha\overline{\beta}} = 2\Re(\alpha\overline{\beta})$$

$$2\Re(\alpha\overline{\beta}) \leq 2|\alpha||\beta|$$
$$|\alpha\overline{\beta}| = |\alpha||\overline{\beta}| = |\alpha||\beta|$$

Neenakost velja zaradi (v).

1.9.2 Geometrijska interpretacija

Pri učenju geometrijske interpretacije toplo priporočam zvezek s skicami. Kot piše v datoteki README.md, skic v teh zapiskih ni in jih verjetno tudi ne bo. Če misliš, da imaš dovolj dobro domišljijo in se znajdeš samo iz tekstovnega opisa, potem pa kar pogumno, čeprav te pogum ne bo pripeljal do znanja.

Kompleksno število $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ predstavimo s točko (a, b) v izbranem koordinatnem sistemu. Te točki nam lahko predstavljata tudi krajevna vektorja in ker kompleksna števila seštevamo po komponentah, se to ujema s seštevanjem vektorjev.

Tako kot nam absolutna vrednost realnega števila predstavlja oddaljenost števila od 0, nam tudi tu absolutna vrednost kompleksnega števila predstavlja oddaljenost števila od izhodišča koordinatnega sistema. Drugače povedano: predstavlja nam "dolžino" tega števila. To lahko vidimo tudi iz enačbe $|\alpha| = \sqrt{(\Re\alpha)^2 + (\Im\alpha)^2}$, ki nam pravzaprav predstavlja pitagorov izrek.

Če si narišemo dve števili α in β v koordinatni sistem in nato vanj vrišemo še njuno vsoto $\alpha + \beta$ po paralelogramskem pravilu za seštevanje vekotjev, opazimo, da dobimo trikotnik s stranicami α, β in $\alpha + \beta$. Za trikotnik pa vemo, da je vsota dolžin dveh stranic v trikotniku večja od dolžine tretje stranice. Iz tu izhaja ime trikotniška neenakost.

1.9.3 Polarni zapis

Lego točke v koordinatnem sistemu lahko podamo s poltrakom skozi izhodišče, na katerem leži točka in z razdaljo od izhodišča.

Poltrak je določen s kotom od pozitivnega poltraka abscisne osi do danega poltraka, meren v pozitivni smeri.

Kota φ in $\varphi + 2k\pi$ določata isti poltrak.

Če $\varphi \in [0, 2\pi]$, potem φ imenujemo *argument* kompleksnega števila.

Če zapišemo $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x &= |z| \cos\varphi \qquad & |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= |z| \sin\varphi \qquad & \tan\varphi &= \frac{x}{y} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{x}{y} + k\pi, k \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$k = 1$ za kompleksna števila v II in III kvadrantu, sicer $k = 0$.

Polarni zapis: $z = x + iy = |z| \cos\varphi + i|z| \sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$$|\cos\varphi + i\sin\varphi| = 1$$

$\cos\varphi + i\sin\varphi$ leži na *enotski krožnici* (krožnica s polmerom 1 in središčem v izhodišču).

Množenje v polarnem:

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ w &= |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zw = |z||w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ = |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i\sin\varphi\cos\psi + i\sin\psi\cos\varphi) = \\ = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)) \end{aligned}$$

Pri množenju z kompleksnimi števili se abolutni vrednosti zmnižita, kota pa seštejeta

Konjugirana vrednost

$$\overline{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

Potenciranje

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Formuli pravimo *Moivreova formula* (beremo “moavrova”) in jo dokažemo z indukcijo.

Korenjenje

Korenjenje nam predstavlja reševanje enačbe $w^n = z$, kjer $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Rešitvam te en"acbe pravimo n-ti koreni kompleksnega števila z.

Za reševanje najprej število z zapišemo v polarni obliki: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. To storimo tudi s število w: $w = r(\cos\psi + i\sin\psi)$.

To vstavimo v začetno enačbo:

$$r^n = (\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Kompleksni števili sta enaki, če sta enako oddaljena od izhodišča:

$$r^n = |z|$$

in ležita na istem poltraku. Ustrezna kota se razlikujeta kvečjemu za večkratnik 2π:

$$n\psi = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

To pomeni, da dobimo:

$$|w| = \sqrt[n]{z}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}$$

$\frac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi]$ za $k \in 0, 1, \ldots, n$.

Dokaz:

$$k \geq n \Rightarrow k = ln + o, l, o \in \mathbb{N}_0$$
$$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi ln}{n} + \frac{2\pi o}{n} = 2l\pi + \frac{2\pi o}{n}$$

To pomeni, da so različni n-ti koreni: $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, če je $z \neq 0$.

Opomba: Oznake za koren ni, ker ni enolične rešitve.

Geometrijsko nam rešitve predstavljajo ogljišča pravilnega n-kotnika, ki je včrtan krožnici s polmerom $\sqrt[n]{|z|}$.

Rešitvam enačbe $w^n = 1$ rečemo n-ti koreni enote in ležijo na enotski krožnici.

Osnovni izrek algebre: Vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti ima kompleksno ničlo.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, a_j \in \mathbb{C}$$

2 O množicah in preslikavah

Definicija: Naj bosta A in B množici.
Preslikava f iz množice A v množico B je predpis, ki vsakemu elementu iz množice A priredi natanko en element iz množice B.

Pišemo $f : A \to B$

$$a \in A : a \mapsto f(a) \in B$$

A imenujemo *domena* ali *definicijsko območje*, B pa imenujemo *kodomena*.

Zaloga vrednosti je množica $\{f(a); a \in A\} = Z_f$.

Definicija: Naj bosta A in B množici in $f : A \to B$ preslikava.

Pravimo, da je f *surjektivna*, če je $B = Z_f$.

Pravimo, da je f *injektivna*, če velja:

$$\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Ro lahko zapišemo tudi kot:

$$\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Pravimo, da je f *bijektivna (povratno enolična)*, kadar je surjektivna in injektivna.

Definicija: Naj bosta A in B množici, $f : A \to B$ bijektivna preslikava.

Inverzna preslikava $f^{-1} : B \to A$ vsakemu elementu $b \in B$ priredi tisti element $a \in A$, za katerega velja $f(a) = b$.

f^{-1} je dobro definirana

$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$, ker je f surjektivna. Ta a je enolično določen, ker je f injektivna; $f(a_1) = f(a) \Rightarrow a_1 = a$.

Definicija: Naj bosta A in B množici.

Pravim, da sta množici *ekvipolentni* ali enako močni, kadar obstaja bijektivna preslikava $f : A \to B$.

Opomba: če je $f : A \to B$ bijektivna, potem je $f^{-1} : B \to A$ bijekcija.

Opomba: končni množici imata enako moč, kadar imata enako število elementov.

Definicija: Če ima množica A enako moč kot $\mathbb{N}$, pravimo, da je A *števno neskončna.*

Če je A števno neskončna, potem obstaja $\mathbb{N} \to A; n \mapsto f(n) = a_n$.

$$A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\} = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$$

pri čemer velja: $j \neq k : a_j \neq a_k$.

Trditev: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ so števno neskončna.

Dokaz za $\mathbb{Z}$: $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$

Pri $\mathbb{Q}$ je dovolj, da dokažemo za nenegativna števila, nato sledi podobno kot za $\mathbb{Z}$. Za pozitivna število naredimo tabelo 1.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$

Tabela 1: Dokaz da so $\mathbb{Q}$ števno nesknočna

Nato števila povežemo po diagonalah ($\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$) in izločimo števila ko so se že ponovila (npr: $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$).

Izrek: $\mathbb{R}$ ni števno neskončna

Dokaz: Denimo da je. Potem $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} = \mathbb{R}$.

a_j zapišemo kot decimalni ulomek:

$$\begin{aligned} a_1 &= d_1' d_{11} d_{12} d13 \ldots \\ a_2 &= d_2' d_{21} d_{22} d23 \ldots \\ a_3 &= d_3' d_{31} d_{32} d33 \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &:= 0' x_1 x_2 x_3 \ldots \in \mathbb{R} \\ x_1 &= 1, \text{če je } d_{11} = 0, \text{ sicer } x_1 = 0 x_2 &= 1, \text{če je } d_{22} = 0, \text{ sicer } x_2 = 0 \end{aligned}$$

Skonstruirali smo $x \notin \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \rightarrow\leftarrow$.

3 Številska zaporedja

Definicija: Zaporedje realnih števil je preslikava $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Zapis je:

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & f(n) \text{označimo z } a_n \end{aligned}$$

Preslikava f je podana z $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Zaporedje realnih števil podamo *s členi* $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kar krajše zapišemo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ali pa kar zaporedje a_n.

Opomba: zaporedje $\{a_n\}$ ni množica $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Primer:

1) $a_n = 1, n \in \mathbb{N}$ *konstantno zaporedje*

   To zaporedje ustreza preslikavi $f(n) = 1, n \in \mathbb{R}$

2) $b_n = n, n \in \mathbb{N}$ Takemu zaporedju pravimo, da je podan s splošnim členom. Narišemo lahko njegov graf $\{(n, b_n); n \in \mathbb{N}\}$

3) $d_1 = 1, d_2 = 1, d_{n+2} = d_n + d_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ je *rekurzivno podano.* Predstavlja Fibonaccijevo zaporedje.

4) *aritmetično aporedje*

$$a_n = a_1 + (n-1)d, n \in \mathbb{N}$$
$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$$

To lahko zapišemo tudi z rekurzivno zvezo:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N} \\ a_1 = a_1 \end{cases}$$

5) *geometrijsko zaporedje*

$$a_n = a_1 qn - 1, n \in \mathbb{N}$$
$$a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots$$

Zapisano z rekurzivno zvezo:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n q, n \in \mathbb{N} \\ a_1 = a_1 \end{cases}$$

DEFINICIJA:

- Zaporedje a_n je *navzgor omejeno* če je zaloga vrednosti preslikave $n \mapsto a_n$ navzgor omejena, t.j.:

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$$

- *Natančna zgornja meja* zaporedja a_n je natanc"na zgornja meja zaloge vrednosti preslikave $n \mapsto a_n$ in jo označimo s $\sup a_n$.
- Število M imenujemo *zgornja meja* zaporedja a_n.
- Analogno definiramo navzdol omejeno, natančno spodnjo mejo $\inf a_n$, max in min.

Primer:

$a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

navzgor omejeno z 1: $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq 1$

navzdol omejeno z 0: $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \geq 0$

$\sup \frac{1}{n} = 1$, ker je 1 zgornja meja in $a_1 = 1$.

$\inf 1/n = 0$ 0 je spodnja meja.

Izberemo $\varepsilon > 0$. Dokazujemo da ε ni spodnja meja. Po arhimedski lastnosti:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\max \frac{1}{n} = 1$

$\min \frac{1}{n}$ ne obstaja.

Definicija: Zaporedje a_n *konvergira* proti $a \in \mathbb{R}$, če:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Število a imenujemo *limita zaporedja* in označimo z:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

Če zaporedje a_n konvergira, je a_n *konvergentno zaporedje.* Sicer je *divergentno zaporedje.*

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Zunaj ε-te okolice je kvečjemo končnomnogo čelnov.

Zapis $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ pomeni, da zaporedje konvergira in njegova limita je a. To ne velja, če zaporedje divergira, ali pa njegova konvergira in njegova limita ni a.

Primeri:

1) $a_n = 1, n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Izberemo poljuben $\varepsilon > 0 : |a_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

2) $b_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Po arhimedski lastnosti:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists m : \frac{1}{m} < \varepsilon$$
$$n \geq m : \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$$
$$-\varepsilon < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m : \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

3) $c_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

ker:

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

po prejšnjem primeru

4) $d_n = (-1)^n$

zaporedje divergira

Denimo, da je x limita tega zaporedja:

- če $x = -1 : \varepsilon = 1$, zunaj $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon) = (-2, 0)$ ležijo vsi sodi členi zaporedja, ki jih je neskončno, zato -1 ni limita.
- Analogno za $x = 1$.
- $x \neq 1 \wedge x \neq -1$

$$d = \min\{|x-1|, |x+1|\}$$

velja:

$$1 \notin (x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2})$$
$$-1 \notin (x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2})$$

Vsi členi zaporedja ležijo izven tega intervala, zato x ni limita. Sledi: d_n divergira.

TRDITEV: Konvergentno zaporedje ima eno samo limito.

DOKAZ: Denimo da sta a in b limiti zaporedja a_n.

Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$:
$$\exists n_a \forall n : n > n_a \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$
$$\exists n_b \forall n : n > n_b \Rightarrow |a_b - a| < \varepsilon$$

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 : |a - b| < 2\varepsilon \Rightarrow |a - b| = 0 \Rightarrow a = b$$

TRDITEV: Konvergentno zaporedje je omejeno

DOKAZ: Denimo, da je a_n konvergentno zaporedje z limito a. Izberemo $\varepsilon = 1$ in po definiciji velja:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon = 1$$

Lahko skonstruiramo množico členov, ki so izven ε-te okolice a. Tej množici dodamo tudi zgornjo mejo okolice $a + \varepsilon = a + 1$. Ker je izven okolice končnomnogo členov, ima ta množica maksimum:

$$\max \{a + 1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0 - 1}\} = M$$

Za vsak n velja: $a_n \leq M$, ker če $n \leq n_0 - 1$, je a_n v zgornji množici, ki smo ji doličili maksimum, če $n \geq n_0$ je a_n v okolici a, to pomeni $a_n < a + 1$, $a + 1$ je v zgornji množici, ki smo ji določili maksimum.

Analogno lahko naredimo za spodnjo mejo. $\square$

Ni vsako omejeno zaporedje konvergentno. Primer: $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

DEFINICIJA: Naj bo a_n zaporedje. Število s je *stekaličče zaporedja* a_n, če v vsaki okolici s leži neskončno členov zaporedja.

PRIMER: $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

Vemo, da ni konvergentno. -1 in 1 sta stekališči a_n, ker vvsi členi z lihimi indeksi ležijo na $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$ za $\varepsilon > 0$. Analgono za 1 in sode člene.

OPOMBI:

1) s je stekališče $\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ je $|a_n - s| < \varepsilon$ izpolnjen za neskončno mnogo indeksov n.

2) Če je zaporedje a_n konvergentno z limito a, potem je a edino stekališče zaporedja a_n, ker na $(a-b, a+b)$ ležijo vsi, razen končno mnogo členov.

Primeri:

1) Zaporedje s 3 stekališči: $a_n = n \mod 3$.

2) Zaporedje z 2 stekališčama, ki ima same različne člene: $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

3) Zaporejde z neskončno stekališči:

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Stekališča zaporedja so vsa naravna števila.

4) Ali ima zaporedje neštevno stekališč? Da.

Obstaja bijekcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Stekališča zaporedja $a_n : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ na $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ leži neskončno nogo $\mathbb{Q}$ števil, torej neskončno mnogo členov zaporedja. Zato je x stekališče.

5) Divergentno zaporedje brez stekališč: $a_n = n$.

Trditev: Če vsaka okolica števila $s \in \mathbb{R}$ vsebuje člen zaporedja $a_n, a_n \neq s$, potej je s stekališče a_n.

Dokaz: Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Obstaja $n_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1} \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon), a_{n_1} \neq s$. Definiramo razdaljo: $d_1 = |s - a_{n_1}|$. Obstaja $n_2 : a_{n_2} \in (s - d_1, s + d_1), a_{n_2} \neq s, n_1 \neq n_2$. Postopek nadaljujemo $\square$.

Izrek: Vsako omejeno zaporedje ima stekališče.

Dokaz: Ker je zaopredje a_n omejeno, ima spodnjo mejo m in zgornjo mejo M.

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}; a_n < u \text{ je izpolnjeno za končno mnogo členov zaporedja}\}$$
$$m \in \mathcal{U}, M + 1 \notin \mathcal{U}$$

$\Rightarrow \mathcal{U}$ je navzgor omejena in neprazna, torej obstaja $\sup \mathcal{U} = s$.

Izberemo $\varepsilon > 0$.:

- $s+\varepsilon \notin \mathcal{U}$: $a_n < s+\varepsilon$ je izpolnjena za neskončno mnogo členov.
- $s-\varepsilon$: $\exists u \in (s-\varepsilon, s] \cap \mathcal{U}$. Ker $u \in \mathcal{U}, s-\varepsilon < u$, je $s-\varepsilon \in \mathcal{U}$, zato velja da $a_n < s-\varepsilon$ velja za končno mnogo členov zaporedja.

Sledi: na $[s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ leži neskončno mnogo členov zaporedja. s je stekališče.

□

3.1 Monotona zaporedja

DEFINICIJA:

- Zaporedje a_n je *naraščajaoče*, če velja: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$.
- Zaporedje a_n je *padajoče*, če velja: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$.
- Zaporedje a_n je *strogo naraščajaoče*, če velja: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$.
- Zaporedje a_n je *strogo padajoče*, če velja: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$.
- Zaporedje a_n je *monotono*, če je zaporedje bodisi naraščajoče, ali padajoče.
- Zaporedje a_n je *strogo monotono*, če je zaporedje bodisi strogo naraščajoče, ali strogo padajoče.

PRIMER:

1) $a_n = -n$ (strogo) padajoče

2) $a_n = 1$ naraščajoče ali padajoče

3) $a_n = \dfrac{1}{n}$ je padajoče in navzdol omejeno

4) $a_n = (-1)^n$ ni ne padajoče ne naraščajoče

TRDITEV: Monotono zaporedje je konvergentno natanko tedaj, kadar je omejeno. Če je zaporedje a_n naraščajoče in navzgor omejeno potem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$$

Če je zaporedje a_n padajoče in navzdol omejeno potem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$$

Dokaz za v eno stran že vemo.

DOKAZ: (v drugo stran ekvivalence)

Denimo, da je zaporedje a_n naraščajoče in navzgor omejeno. Ker je a_n navzgor omejeno: $\exists a := \sup a_n$.

Dokazujemo a_n konjugira proti a

Izberemo poljubene $\varepsilon > 0$. Ker $a - \varepsilon$ ni zgornja meja zaporedja: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$. Ker je zaporedje a_n naraščajoče in navzgor omejeno z a velja:

$$n \geq n_0 : a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a$$
$$\forall n \geq n_0 a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Sledi: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ $\square$

Analogno za navzdol omejeno padajoče zaporedje.

PRIMER: $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}$

Najprej dokažemo, da je a_n padajoče zaporedje, t.j:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$$

Vemo, da je navzdol omejeno z 0. Ker je padajoče in navzdol omejeno, je konvergentno.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Vemo: $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n = a$

Vemo, da a ni negativen, ker so vsi členi zaporedji zaporedja pozitivini. Če bi $a > 0$:

$$a_n \geq a$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq a$$
$$\frac{1}{n} \geq a^2 > 0 \text{ za vse } n \in \mathbb{N}$$

Zaradi arhimedske lastnosti vemo, da to ni res. $\rightarrow\leftarrow$

Torej a ni negativen in a ni pozitivne, torej $a = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3.2 Podzaporedja

Podzaporedje zaporedja a_n je zaporedje, ki vsebuje samo nekatere člene zaporedja a_n v enakem vrstnem redu.

$$a_1, \cancel{a_2}, \cancel{a_3}, a_4, \ldots$$

Definicija: Naj bo a_n zaporedje in naj bo n_j strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Zaporedje $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ je podzaporedje $(a_n)_{n=1}$.

Primeri:

1) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje

   podzaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

2) $b_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ ni konvergentno, ima dve stekališči

   $b_{2n-1} = -1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$: $b_1, b_3, b_5, \ldots$ je podzaporedje lihih členov.

   Podobno lahko naredimo podzaporedje sodih členov. Podzaporedja lihih in sodih členov sta konvergentna.

Trditev Naj bo a_n zaporedje. Če je a_n konvergentno, potem je konvergentno tudi vsako njegovo podzaporedje $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ in velja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{j\to\infty} a_{n_j}$$

Dokaz: Naj bo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$

Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Vemo: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

Potem velja:

$$j \geq n_0 : |a_{n_j} - a| < \varepsilon$$

ker je $n_j \geq n_{n_0} \geq n_0$

Opomba: Če neko podzaporedje danega zaporedja konvergira, ni nujno, da je dano zaporedje konvergentno. Primer: $(-1)^n$.

Definicija: *Rep zaporedja* je zaporedje, ki ga dobimo iz danega zaporedja tako, da izpustimo prvih končno mnogo členov.

Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, kadar je konvergenten njegov rep.

Primer: $1, 2, 4, 16, 36, 16, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

3.3 Računanje z zaporedji

Trditev: Naj bosta a_n in b_n konvergentni zaporedji. Tedaj konvergirajo tudi naslednja zaporedja:

- $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots$
- $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n, \ldots$
- $a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots$

in velja:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

Dokaz

Vsota: Izberemo poljuben $\varepsilon > 0 : a = \lim_{n\to\infty} a_n, b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| \leq 2\varepsilon$ za $n \geq \max\{n_a, n_b\}$

$\square$

Produkt:

$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| == |b_n(a_n-a)+a(b_n-b)| \leq |b_n(a_n-a)|+|a(b_n-b)|$

Ker je b_n konvergentno, je omejeno: $\exists M_b \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < M_b$

$$\leq M_b|a_n - a| + |a||b_n - b| \leq \varepsilon \text{ če } n \geq \max\{n_a, n_b\}$$

ker vemo: $|a_n - a| \leq \dfrac{\varepsilon}{2M_b}$ za $n \geq n_a$ in $|b_n - b| \leq \dfrac{\varepsilon}{2|a|}$ za $n \geq n_b$.

$\square$

Posledica: Če je a_n konvergentno zaporedje in $\lambda \in \mathbb{R}$, potem je zaporedje $\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots$ konvergentno in velja:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$$

Dokaz je enak kot dokaz za produkt limit, kjer $b_n = \lambda$.

Ker veljajo pravila za dva člena, veljajo tudi za končno mnogo.

Trditev: Naj bo a_n konvergentno zaporedje in $\forall n \in \mathbb{N} a_n \neq 0$ in $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Potem je zaporedje

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots$$

konvergetno in velja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

Dokaz: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_n a}\right| = \frac{|a - a_n}{|a||a_n|} \leq \frac{|a - a_n|}{|a|\eta} < \varepsilon \text{ za dovolj velike } n$$

$|a_n|$ lahko omejino stran od 0, t.j.: $\exists \eta > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \geq \eta$

Konstrukcija η: Zunaj $\left(a - \frac{|a|}{2}, a + \frac{|a|}{2}\right)$ leži končno mnogo členov zaporedja.

$$\eta := \min\left\{\left|a - \frac{|a|}{2}\right|, \left|a + \frac{|a|}{2}\right|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}\right\}$$

Posledica: Naj bosta a_n in b_n konvergentni zaporedji, $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Potem je zaporedje $\frac{a_n}{b_n}$ konvergentno in velja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

Izrek o sendviču: Naj bodo a_n, b_n, c_n taka zaporedja, da

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n$$

Če sta zaporedji a_n in c_n konvergentni in $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$, potem je b_n konvergentno in velja:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

PRIMER: $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

ker $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ in $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

DOKAZ IZREKA:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

Vzamemo poljuben $\varepsilon > 0$:

$$\exists n_a : n \geq n_a \to |a_n - L| < \varepsilon$$
$$\exists n_c : n \geq n_c \to |c_n - L| < \varepsilon$$

Če vzamemo $n \geq \max\{n_a, n_c\} : L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$.

Torej $b_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ za vse $n \geq \max\{n_a, n_c\}$. Zato b_n konvergira proti L.

TRDITEV: Naj bosta a_n in b_n konvergetni zaporedji. Če $a_n \leq b_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$, potem velja $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$. **Opomba:** Trditev s strogimi neenačaji v splošnem ne velja.

$$a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}, a_n < b_n$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

PRIMER: Obravnavaj konvergenco zaporedja (Newtnova formula):

$$x_1 = 2$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

Zaporedje je s to rekurzivno zvezo dobro definirano, t.j.: $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} > 0$$

Če $x_n \neq 0$ potem $x_{n+1} \neq 0$. To lahko preverimo tudi z indukcijo.

Dokažemo lahko, da: x_n je padajoče

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

Če je $\frac{x_n^2 - 2}{2x_n} > 0$, potem je padajoče. Dovolj je dokazati, da je $x_n^2 - 2 \geq 0$, ker tedaj iz rekurzivne zveze sledi: $x_{n+1} \leq x_n$.

$$x_{n+1}^2 = \left(\frac{x_n^2 + 2}{2x_n}\right)^2 - 2 = \frac{x_n^4 + 4x_n^2 + 4 - 8x_n^2}{4x_n^2} = \frac{x_n^4 - 4x_n^2 + 4}{4x_n^2} = \frac{(x_n^2 - 2)^2}{4x_n^2} \geq 0$$

x_n je padajoče in navzdol omejeno, zato je konvergentno. Torej lahko izračunamo limito. Velja:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$
$$2x_n x_{n+1} = x_n^2 + 2$$

in vemo:

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n =: x$$

Ker je x_{n+1} rep zaporedja x_n, je konvergentno in ima isto limito kot x_n. Ker s konvergentnimi zaporedji lahko računamo:

$$\lim_{n\to\infty}(2x_n x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(x_n^2 + 2)$$
$$2x^2 = x^2 + 2$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

vemo $x \geq 0$, torej

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$$

Izrek: Naj bo $I_n = [a_n, b_n], a_n < b_n$ zaporedje vloženih zaprtih intervalov, t.j.:

$$\forall n \in \mathbb{N} : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$$

Denimo, da zaporedje njihovih dolžin konvergira proti nič:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n, a_n) = 0$$

Tedaj obstaja natanko eno število $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

Dokaz: a_n je naraščajoče zaporedje, b_n je padajoče zaporedje. Obe zaporedji sta omejeni (navzdol z a_1 in navzgor z b_1). Zato sta obe konvergentni. Zato $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: c$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : c \in I_n$$
$$c = \sup a_n : a_n \leq c$$
$$c = \inf b_n : c \leq b_n$$
$$c \in [a_n, b_n]$$

Dokaz, da je število c eno samo doma. □

Izrek: Naj bo a_n zaporedje. Število b je stekališče zaporedja a_n natanko tedaj, kadar obstaja podzaporedje zaporedja a_n, ki konvergira proti s.

Dokaz:

($\Leftarrow$) Denimo, da podzaporedje a_{n_j} konvergira proti s. Dokazujemo, da je s stekališče a_n.

Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Obstaja j_0, da za vsak $j \geq j_0$ velja:

$$a_{n_j} \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$$

Torej je na $s-\varepsilon, s+\varepsilon$ neskončno členov zaporedja. Zato je s stekališče.

($\Rightarrow$) Denimo, da je s stekališče zaporedja a_n. Za dokaz bomo skonstruirali tako zaporedje, da bo konvergiralo proti s. Naj bo

$$U_m = (s - \frac{1}{m}, s + \frac{1}{m})$$

Na U_1 obstaja neskončno mnogo členov zaporedja, zato lahko izberemo $a_{n_1} \in U_1$.

Na U_2 obstaja neskončno mnogo členov zaopredja, zato obstaja:

$$n_2 > n_1 \wedge a_{n_2} \in U_2$$

Ta postopek induktivno nadaljujemo. Recimo, da že imamo:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \text{ da } n_1 < n_2 < \ldots n_k \text{ in vsak } a_{n_j} \in U_j$$

Na intervalu U_{k+1} obstaja neskoncčno členov zaporedja, zato obstaja $n_{k+1} > n_k$ in $a_{n_{k+1}} \in U_{k+1}$

Podzaporedje a_{n_1} konvergira proti s po konstrukciji. □

3.4 Cauchyjev pogoj

Zanima nas opis konvergence brez sklicevanja na limito. a_n je konvergentno, če obstaja $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Definicija: Zaporedje a_n izpolnjuje *Cauchyjev pogoj*, če velja:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Če zaporedje izpolnjuje Cauchyjev pogoj, pravimo, da je zaporedje *Cauchyjevo*.

Izrek: Zaporedje realnih števil a_n je konvergentno natanko tedaj, kadar je Cauchyjevo.

Opomba: Za zaporedje racionalnih števil ta izrek ne velja. Obstaja zaporedje $q_n, q_n \in \mathbb{Q}$, q_n je Cauchyjevo ni pa konvergentno v $\mathbb{Q}$. Npr. zaporedje racionalnih približkov za $\sqrt{2}$.

Dokaz:

($\Rightarrow$) Denimo, da zaporedje a_n konvergira proti a. Za poljuben $\varepsilon > 0$ po definiciji konvergence velja:

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Za $n, m \geq n_0$ velja:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < 2\varepsilon$$

Torej je zaporedje Cauchyjevo.

($\Leftarrow$) Denimo, da je a_n Cauchyjevo.

Potem je a_n omejeno

$$\exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < 1 = \varepsilon$$

Zato je $|a_n - a_{n_0}| < 1$ za vse $n \geq n_0$. (Namesto m vzamemo n_0, saj vstreza pogoju)

Torej vsi členi razen $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$ ležijo na $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1)$. Zato je a_n omejeno.

Vemo, da ima vsako omejeno zaporedje stekališče s. Trdimo $s = \lim_{n\to\infty} a_n$

Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Denimo, da je zunaj $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ neskončno členov zaporedja. Potem bi zunaj $s-\varepsilon, s+\varepsilon$ obstajalo omejeno podzaporejde zaporedja a_n, zato ima to podzaporeje stekališče $t, t \neq s$. t je stekališče a_n.

Cauchyjevo stekališče nima nikoli dveh različnih stekališč.

Denimo, da sta s in t stekališči.

$$d = |s-t|$$

Na $(s - \frac{d}{3}, s + \frac{d}{3})$ leži neskončno členov zaporedja.

Na $(t - \frac{d}{3}, t + \frac{d}{3})$ leži neskončno členov zaporedja.

Če bi bilo zaporedje Cauchyjevo, $\exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \frac{d}{3}$. Pridemo v protislovje s prejšnjima dvema izjavama. $\rightarrow\leftarrow$

$\square$

Izrek: Vsako omejeno zaporedje, ki ima eno stekališče je konvergentno (v dokazu prejšnjega izreka (če si naredil domačo nalogo, tudi na dolgo)).

Opomba: Izrek (zelo očitno) ne velja za neomejena zaporedja.

Definicija: Naj bo a_n zaporedje. Pravimo, da zaporedje a_n *konvergira proti neskončno*, če velja:

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists n_o \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n \geq M$$

V tem primeru pišemo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Zaporedje, ki konvergira proti neskončno **ni** konvergentno. Z drugimi besedami: zaporedij, ki konvergirajo proti ∞ **ne** štejemo med konvergentna zaporedja.

Podobno definiramo tudi $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$:

$$\forall m \in \mathbb{R} \exists n_0 \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n \leq m$$

Primer: a_n: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$b_n = n^{(-1)^n}$ ne konvergira proti neskončno.

Nekaj posebnih zaporedij:

TRDITEV: Naj bo $a \in \mathbb{R}$

1) $|a| < 1 \Rightarrow a^n$ konvergentno z limito 0
2) $a > 1 \Rightarrow a^n$ konvergira proti ∞

DOKAZ:

1) $a \in (0, 1)$ zaporedje a^n je padajoče: $a^{n+1} < a^n$ in navzdol omejeno z 0, zato je konvergetno.

   Naj bo $b_n = a^n$ in $b_{n+1} = a^{n+1} = ab_n$. Vemo:

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

   Torej:

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (ab_n) = a \lim_{n\to\infty} b_n = ab$$
$$b(1-a) = 0$$

   Ker $a \neq 1$ velja $b = 0$.

   Če $a \in (-1, 0)$ velja:

$$-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n$$

   Za $|a|^n$ velja zgoren dokaz. Nato lahko uporabimo izrek o sendviču, zaradi katerega velja:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

2) $a > 1 : a^n$ je naraščajoče

   Če bi bilo omejeno, bi bilo konvergentno. Po prejšnjem dokazu bi dobili $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, kar ni mogoče, ker je zaporedje naraščajoče in so vsi členi pozitivni. Torej a_n ni omejeno.

   Zato $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$

   Ker je a_n neomejeno, za $M \in \mathbb{R}$ obstaja $n_0 : a^{n_0} \geq M$. Ker je naraščajoče velja:

$$\forall n \geq n_0 : a^n \geq M$$

Trditev: Za vsak $a > 0$ in vsak $m \in \mathbb{N}$ obstaja natanko en $x0$, ki reši enačbo $x^m = a$. To rešitev označimo z $\sqrt[m]{a}$. Veljajo osnovne lastnosti za $\sqrt[m]{\ }$:

$a, b > 0, m, n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$
$$\sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$
$$\sqrt[np]{a^{nq}} = \sqrt[p]{a^q}$$
$$\sqrt[p]{a^q}\,\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[pn]{a^{qn}}\,\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[np]{a^{qno+np}}$$

Definicija: Naj bo $a > 0, a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$. Pišemo $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a_n}$

$$a^0 = 1$$
$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$$

Naj bo $q \in \mathbb{Q}$. Obstajata $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} : q = \frac{m}{n}$.

$$a^q = a^{\frac{m}{n}}$$

Opomba: Je dobro definirano, ker ni odvisno od izbere ulomka (ena izmed lastnosi nam dovoljuje "krajšanje")

Trditev: Naj bo $a \in \mathbb{R}, a > 0, p, q \in \mathbb{Q}$. Velja:

$$a^{pq} = (a^p)^q$$
$$a^p a^1 = a^{p+q}$$
$$a^p b^p = (ab)^p$$

Trditev: Za $a \in \mathbb{R}, a > 0$ velja: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Dokaz: $a > 1$:

$$\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n+1]{a}$$
$$a^{n+1} \geq a^n$$

Zaporedje je padajoče. Ker je navzdol omejeno z 0 (tudi z 1), je konvergetno in njegova limiti ≥ 1.

Denimo, da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = L > 1$:

$$\sqrt[n]{a} \geq L > 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : a \geq L^n$$

Ker je $L > 1$, L^n konvergira proti ∞, kar pomeni, da bo presegel a. Torej protislovje $\longleftrightarrow$.

Zato je $L = 1$.

Za $a < 1$ je podoben dokaz (DN). $\square$

Trditev: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n &= \left(\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + 1\right)^n = \\
&= 1 + \binom{n}{1}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \binom{n}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + \ldots \geq \\
&\geq \binom{n}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 = \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2
\end{aligned}
$$

Dobili smo:

$$0 \leq \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \leq n$$

torej velja:

$$0 \leq \frac{n-1}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \leq 1$$

za $n \geq 2$.

Po izeku o sendviču velja: $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = 0$ $\square$

Izrek: Zaporedje $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je konvergentno. Njegovo limito označimo z:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Dokaz: a_n je naraščajoče

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{nnnn\ldots n}$$

Ker je v števu in imenvolacu tega ulomka enako števil, lahko naredimo rečemo:

$$\frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{nnnn\ldots n} = \underbrace{\frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\ldots(1 - \frac{k-1}{n})}_{k-1}$$

Torej velja:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \ldots + \frac{1}{n!}(\ldots)$$
$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \ldots + \frac{1}{n!}(\ldots) + \frac{1}{(n+1)!}(\ldots)$$

Prva dva člena sta enaka, nato pa se začnejo razlikovati v oklepajih:

$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n+1}$$

Prav tako ima zaporedje a_{n+1} en člen več kota zaporedje a_n. Iz tega sledi: $a_n \leq a_{n+1}$

a_n je navzgor omejeno

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \ldots \leq$$
$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$
$$= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$$

Sledi, da je a_n konvergentno.

3.5 Potence z realnimi eksponenti

$$a > 0, x \in \mathbb{R}, a^x \qquad\qquad r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, r_n \in \mathbb{Q}$$

- Če r_n konvergira, potem a^{r_n} konvergira.
- Če $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, r_n, s_n \in \mathbb{Q}$, potem velja: $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \text{ , kjer } r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}, r_n \in \mathbb{Q}$$

Trditev: Naj bo $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Potem:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in \mathbb{Q}, |h| < \delta : |a^h - 1| < \varepsilon$$

Dokaz: $a > 0, \varepsilon > 0,$

Vemo: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Če $\sqrt[n]{a}$ zapišemo kot $a^{\frac{1}{n}}$, potem po definiciji limite velja:

Za $\varepsilon > 0 \exists n_0 : |a^{\frac{1}{n}} - 1| < 0$ za vse $n \geq n_0$.

Naj bo $h \in \mathbb{Q}, 0 < h \leq \frac{1}{n}$. Za $a > 1$ velja:

$$0 < a^h - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

in za $a < 1$ velja:

$$0 < 1 - a^h < 1 - a^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

Spomnimo se: če $a < 1$ in $n, m \in \mathbb{Q}, n < m$ potem velja: $a^m < a^n$. V našem primeru to pomeni:

$$h < \frac{1}{n} : a^{\frac{1}{n}} < a^h$$

Zato pri $1 - a^{\frac{1}{n}}$ od 1 odštejemo več, kot pri $1 - a^h$, torej neenakost velja.

Sklep zgornjih dveh dokazov je:

$$\forall h \in \left(0, \frac{1}{n}\right) : |a^h - 1| < \varepsilon$$

Podobno lahko dokažemo za $h < 0$. $\square$

Trditev: Naj bo $a > 0$ in naj bo r_n konvergentno zaporednje racionalnih števil z limito $r \in \mathbb{R}$. Potem velja naslednje:

(1) Zaporedje $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ konvergira.

(2) Če je $r \in \mathbb{Q}$, potem je $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r$.

Dokaz:

(1) za primer $a > 1$:

a^{r_n} je omejeno zaporedje za primer $a > 1$.

r_n je omejeno zaporedje, ker je konvergentno: obstaja $M \in \mathbb{Q}$, da velja:

$$\forall n \in \mathbb{N} : r_n \leq M$$

iz tega sledi:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a^{r_n} \leq a^M$$

a^{r_n} je Cauchyjevo zaporedje (od tod sledi, da je konvergentno)

Naj bo $\varepsilon > 0$

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = \\ = |a^{r_m}(a^{r_n - r_m} - 1)| = |a^{r_m}| \cdot |a^{r_n - r_m} - 1| \leq \\ \leq a^M |a^{r_n - r_m} - 1| < \varepsilon$$

Velja, ker po prejšnji trditvi obstaja $\delta > 0$, tako da velja:

$$|\underbrace{r_n - r_m}_{h}| < \delta \Rightarrow |a^{\overbrace{r_n - r_m}^{h}} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^M}$$

Ker je r_n konvergentno, je Cauchyjevo, zato obstaja $n_o \in \mathbb{N}$, tako da velja

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 : |r_n - r_m| < \delta$$

Podobno naredimo za $a < 1$.

(2) Če je $r \in \mathbb{Q}$:

$$|a^r - a^{r_n}| = |a^r(1 - a^{r_n - r})| = |a^r||1 - a^{r_n - r} < \varepsilon$$

za $\varepsilon > 0$. Torej mora veljati:

$$|1 - a^{r_n - r}| < \frac{\varepsilon}{a^r}$$

Po trditvi od prej:

$$\exists \delta > 0 \forall h \in \mathbb{Q}, |h| < \delta : |a^h - 1| < \frac{\varepsilon}{a^r}$$

Ker r_n konvergira proti r, obstaja $n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |r_n - r| < \delta$

$\square$

TRDITEV: Naj bo $a > 0$ in naj bosta r_n in s_n zaporedji racionalnih števil z isto limito

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Potem velja:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$$

DOKAZ: ideja dokaza je:

$$1 = a^0 = a^{\lim_{n\to\infty} r_n - \lim_{n\to\infty} s_n} = \frac{a^{\lim_{n\to\infty} r_n}}{a^{\lim_{n\to\infty} s_n}}$$

To še ni dokaz, ker ne vemo kaj je $a^{\lim_{n\to\infty} r_n}$, saj se lahko zgodi, da je limita zaporedja r_n iracionalno število, za kar še nismo definirali potenciranja.

Vemo: $a^{r_n - s_n} = \dfrac{a^{r_n}}{a^{s_n}}$ za vse $n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty}(r_n - s_n) = 0$, zato $1 = a^0 = \lim_{n\to\infty} a^{r_n - s_n}$. Ta neenakost velja zaradi prejšnje trditve. Ker je $\lim_{n\to\infty}(r_n - s_n)$ racionalno število, velja $\lim_{n\to\infty} a^{r_n - s_n} = a^{\lim_{n\to\infty}(r_n - s_n)} = a^0$

$$1 = a^0 = \lim_{n\to\infty} a^{r_n - s_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} a^{r_n}}{\lim_{n\to\infty} a^{s_n}}$$

Sklep:

$$1 = \frac{\lim_{n\to\infty} a^{r_n}}{\lim_{n\to\infty} a^{s_n}}$$
$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

To seveda velja, samo če $\lim_{n\to\infty} a^{s_n} \neq 0$.

Ker je s_n konvergentno, je omejeno:

$$\exists M \in \mathbb{N} : |s_n| < M \Rightarrow a^{-M} \leq a^{s_n} \leq a^M$$

zato za $a > 1$ velja:
$$a^{-M} \leq \lim_{n\to\infty} a^{s_n} \leq a^M$$

za $0 < a < 1$ velja podobno:

$$a^M \leq \lim_{n\to\infty} a^{s_n} \leq a^{-M}$$

torej je $\lim_{n\to\infty} a^{s_n}$ pozitivno število.

$\square$

Definicija: Naj bo $a > 0$ in $r \in \mathbb{R}$. Denimo, da zaporedje r_n racionalnih števil konvergira proti r. Potem definiramo:

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

Opombe:

1) Definicija je dobra, ko za različni konvergentni zaporedji racionalnih števil z isto limito, zaporedji a^{r_n} in a^{s_n} konvergirati k istemu številu.

2) Če je $r \in \mathbb{Q}$, se nova definicija ujema z definicijo za racionalne potence.

3) Računska pravila za računanje z racionalnimi eksponenti se prenesejo na ra"unanje z realnimi eksponenti.

Trditev: Naj bo $\alpha > 0$. Potem je $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$.

Dokaz: za domačo nalogo. Če si priden si ga naredil, če si pridna se učis iz svojih zapiskov, ker znate ženske brati za sabo (naredimo se fizike in zanemarimo, da zna Nik brati za sabo kljub temu, da ni ženskega spola[5])).

Trditev: Naj bo $q \in \mathbb{Q}, q > 1$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$$

Dokaz:

$$a_n = \frac{n^\alpha}{q^n}$$
$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^\alpha}{q^{n+1}} = \frac{(n+1)^\alpha}{qn^\alpha}\frac{n^\alpha}{q^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{q}a_n$$

Vemo, da $\frac{1}{q} < 1$

Sledi:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q} < 1$$

Zato bo od nekod naprej $a_{n+1} < a_n$.

Ker je $\forall n \in \mathbb{N} : 0a_n > 0$, je a_n konvergentno. Torej obstaja

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

in velja:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q}a_n\right) = \frac{1}{q}L$$

Torej lahko poračunamo L:

$$L = \frac{1}{q}L$$
$$L - \frac{1}{q}L = 0$$
$$L(1 - \frac{1}{q}) = 0$$

[5]lahko se sam odločis ali zanemarimo njegov obstoj, ali pa samo njegov spol

Ker $1-\dfrac{1}{q}\neq 1$, velja $L=0$

$\square$

3.6 Zgornja in spodnja limita

Definicija: Naj bo a_n omejeno zaporedje in $\mathcal{S}$ množica njegovih stekališč. Natančno zgornjo mejo množice $\mathcal{S}$ imenujemo *zgornja limita* ali *limes superior* in pišemo:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \sup \mathcal{S}$$

Spodnja limita ali *limes inferior* je natančna sopdnja meja od $\mathcal{S}$ in pišemo

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf \mathcal{S}$$

Opombi:

- Ker je zaporedje a_n omejeno, $\mathcal{S}\neq\varnothing$.
- Množica $\mathcal{S}$ je omejena, ker je zaporedje omejeno (z zgornjo in spodnjo mejo zaporedja).

Definicija:

(1) Če je zaporedje a_n navzgor neomjeno, potem definiramo:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$$

(2) Če je zaporedje a_n navzdol neomejeno, potem definiramo:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

(3) Denimo, da je a_n navzgor neomejeno in navzdol omejeno. Če je množica njegovih stekališč $\mathcal{S}$ neprazna, potem definiramo:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf \mathcal{S}$$

sicer:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$$

(4) Denimo, da je a_n navzdol neomejeno in navzgor omejeno. Če je množica njegovih stekališč $\mathcal{S}$ neprazna, potem definiramo:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \mathcal{S}$$

sicer:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

PRIMERI:

1) $a_n = (-1)^n$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$$

2) b_n konvergentno z limito b

$$b = \limsup_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} b_n$$

3) $c_n = n^{(-1)^n} : 1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \ldots$

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \infty$$
$$\liminf_{n\to\infty} c_n = 0$$

4) $d_n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\limsup_{n\to\infty} d_n = \infty$$
$$\liminf_{n\to\infty} d_n = \infty$$

TRDITEV Naj bo a_n omejeno zaporedje in $\mathcal{S}$ množica njegovih stekališč. Tedaj je

$$s = \limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \mathcal{S}$$

natanko tedaj, kadar za vsak $\varepsilon > 0$ velja:

$a_n > s + \varepsilon$ kvečjemu za končno indeksov n

$a_n > s - \varepsilon$ za neskončno indeksov n

Posledica Naj bo a_n omejeno zaporedje. Potem je $\limsup_{n\to\infty} a_n$ največje stekališče a_n.

Dokaz

(⇒) Naj bo $s = \limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \mathcal{S}$. Denimo, da bi za nek $\varepsilon > 0$

$$a_n > s + \varepsilon$$

veljalo za neskončno indeksov n. Sledi, da obstaja omejeno podzaboredje a_{n_j}, da je

$$\forall j a_{n_j} > s + \varepsilon$$

Ker je omejeno, ima stekališče $\geq s + \varepsilon \rightarrow\leftarrow$

(⇐) $\forall \varepsilon > 0$ na intervalu $(s-\varepsilon, s+\varepsilon]$ leži neskončno mnogo členov zaporedja, zato je stekališče. Dokazujemo $\underline{s = \sup \mathcal{S}}$

dovolj je dokazati, da a_n nima stekališča $x, x > s$

Denimo, da je $x > s$ stekališče a_n.

$$d = x - s$$

Na $\left(x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2}\right)$leži neskončno mnogo členov zaporedja. Torej $a_n > s + \frac{d}{2}$ izpolnjena za neskončno mnogo indeksov n. $\rightarrow\leftarrow$

□

Trditev: Naj bo a_n omejeno zaporedje. Tedaj velja:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_n (\sup_{k\geq n} a_k) = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} a_k) = b$$

Skica dokaza:

$$b_n = \sup_{k\geq n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \geq b_{n+1} = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$$

b_n je padajoče in je omejen (ker je a_n omejeno). Torej je konvergentno. Njegova limita je njegova spodnja meja.

$\varepsilon > 0 : a_n > b + \varepsilon$ končno mnogo indeksov

$a_n > b - \varepsilon$ za neskončno indeksov

TRDITEV: Naj bosta a_n in b_n omejeni zaporedji. Če velja $a_n \leq b_n$ za $\forall n \in \mathbb{N}$ potem:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$$

3.7 O zaporedjih kompleksnih števil

DEFINICIJA: Zaporedje kompleksnih števil je preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Pišemo:

$$z_n = f(n)$$

Teko kot pri realnih zaporedjih rečemo zaporedje z_n.

DEFINICIJA: Zaporedje kompleksnih števil z_n konvergira proti $z \in \mathbb{C}$, če:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_o \in \mathbb{N} \forall n \geq n_o : |z_n - z| < \varepsilon$$

Pišemo:

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n$$

PRIMER: $z_n = \frac{1}{3n} + i\frac{2n-1}{n}$ zaporeje kompleksnih števil podano s splošnim "lenom.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 2i$$

TRDITEV: Zaporedje kompleksnih števil z_n konvergira proti $z \in \mathbb{C}$ natanko takrat, ko zaporedje $\Re z_n$ konvergira proti $\Re z$ in zaporedje $\Im z_n$ konvergira proti $\Im z$.

DOKAZ:

$$|z_n - z|^2 = (\Re z_n - \Re z)^2 + (\Im z_n - \Im z)^2 \tag{1}$$

($\Rightarrow$) Denimo, da $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$

$$\varepsilon > 0 : \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |z - z_n| < \varepsilon$$

Iz 1 sledi:

$$|\Re z_n - \Re z| \leq |z_n - z| \leq \varepsilon$$
$$|\Im z_n - \Im z| \Im |z_n - z| \leq \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$ $\Re z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Re z$ in $\Im z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Im z$

za $\varepsilon > 0$:

$$\exists n_{Re} : |\Re z_n - \Re_z| < \varepsilon \text{ za } n \geq n_{Re}$$
$$\exists n_{Im} : |\Im z_n - \Im_z| < \varepsilon \text{ za } n \geq n_{Im}$$

Iz 1 sledi:

$$|z - z_n|^2 \leq \varepsilon^2 + \varepsilon^2$$
$$|z - z_n| \leq \sqrt{2}\varepsilon$$

TRDITEV: Za konvergentni zaporedji kompleksnih števil z_n inw_n velja, da so zaporedja $z_n + w_n$, $z_n - w_n$ in $z_n w_n$ konvergentna in velja:

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(z_n - w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n - \lim_{n\to\infty} w_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n$$

Če $w_n \neq 0$ za $\forall n \in \mathbb{N}$ in je $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$, potem $\dfrac{z_n}{w_n}$ konvergira.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n}$$

Dokaže se tako, da s pomočjo prejšnje trditve pretvorime na vsoto, razliko, zmnožek in kvocient realnih zaporedji.

IZREK: Zaporeje kompleksnih števil z_n je konvergentno natanko takrat, kadar izpolnjuje Cauchyjev pogoj.

Dokaz ponovno tako, da pretvorimo na realna zaporedja s pomočjo prejšnje trditve.

4 Števillske vrste

DEFINICIJA: Naj bo a_n realno zaporedje. Neksončno formalno vrsto

$$a_1 + a_2 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

imenujemo *številska vrsta.* Člen a_n imenujemo splošni člen številske vrste. Označimo:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

PRIMERI:

1) geometrijska vrsta

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Osnovna lastnost: kovocient zaporednih členov je konstanten

2)

$$1 - 1 + 1 - 1 \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

DEFINICIJA: Dana je številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Zaporedje

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_n &= \sum_{j=1}^{n} a_j \end{aligned}$$

imenujemo *zaporedje delnih vsot.* Če zaporedje delnih vsot konvergira, pravimo, da vsrta konvergira. V tem primeru limito zaporedja delsnih vsto s imenujemo *vsota vrste* in pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Če zaporedje delnih vsto divergira, rečemo, da vrsta divergira.

Opomba: Zapis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ pomeni:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira
2. njena vsota je s

PRIMERI:

1) Obrovnavaj konvergenco geometrijske vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

$$s_n = a + aq + aq^n + \ldots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

Velja za $q \neq 1$. Oklepaj smo razrešili po formuli, ki smo jo našli v spominu:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-1}b + \ldots + b^{n-1})$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{a-q^n}{1-q} = \frac{a}{a-1}$$

Če $|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0$

Za $q > 1 : a\frac{1-q^n}{1-q} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ vrsta ne konvergira.

Za $q < -1 : a\frac{1-q^n}{1-q}$ ne konvergira

Za $q = -1 : a\frac{1-(-1)^n}{2}$ ima dve stekališči, zato divergira.

Za $q = 1 : s_n = na$ divergira (ker konvergira proti $\pm\infty$).

Geiom vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ konvergira natanko takrat, kadar $|q| < 1$. V tem primeru velja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$$

2) Obravnavaj konvergenco $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira po definiciji natanko takrat, kadar zaporedje s_n konvergira.

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Razceptimo na delne ulomke:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1}$$

Razpišemo s_n in dobimo:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{n} - \ldots \frac{1}{n+2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

Torej velja:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Vrsta je konvergentna in $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$

3) Obravnavaj konvergenco $\sum_{n=1}^{\infty} 1$

Vrsta divergira, ker $s_n = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$ divergira.

OPOMBA: Naj bo vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna. Potem je zaporedje a_n konvergentno in $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DOKAZ: Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergenta, je zaporedje delnih vsot s_n konvergentno.

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

Torej:

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

$\Rightarrow a_{n+1}$ je konvergentno in velja:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

TRDITEV: (Cauchyjev pogoj za vrste) Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj, kadar velja:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \forall k \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

DOKAZ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira po definiciji natanko takrat, kadar zaporedje delnih vsot s_n konvergira. Po definiciji je zporedje s_n Cauchyjevo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0, n, m \in \mathbb{N} : |s_n - s_m| < \varepsilon$$

Naj bo $m \geq n$:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon$$

Lahko si izberemo $k = m - n$ in trditev velja.

TRDITEV: Dana je številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(1) Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem $\forall m \in \mathbb{N}$ konvergira vrsta $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$.

(2) Če za nek $m \in \mathbb{N}$ vrsta $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergira, potem konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ideja dokaza:

$$\sum a_n \text{ konvergira } \Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ konvergira.}$$
$$\sum_{n=m} a_n \rightsquigarrow t_n = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+n}$$

$$s_{m+k} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_{m-1}}_{A} + \underbrace{a_m + \ldots + a_{m+k}}_{t_{k+1}}$$
$$s_{m+k} = A + t_{k+1}$$

Če konvergira eno zaporedje, konvergira tudi drugo zaporedje.

Trditev: Denima, da sta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni vrsti, $c \in \mathbb{R}$. Potem konvergirajo tudi: $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ in $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ ter velja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Opomba: KOnvergentne vrste sestavljajo vektorski prostor (nad obsegom).

Dokaz: Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, konvergira tudi njeno zaporedje delnih vsot $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, zato konvergira $cs_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n$ in velja ustrezna zveza za limito.

Primer: Obravnavaj konvergenco vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (*harmonična vrsta*).

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ je neomejeno

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$s_8 = s_4 + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\frac{1}{8}} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Opazimo vzorec:

$$s_{2^k} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(k-1)$$

To formulo lahko dokažemo z indukcijo. s_k je neomejeno in vrsta divergira.

4.1 Vrte z nenegativnimi členi

Definicija: Denimo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z nenegativnimi členi. Potem je zaporedje delnih vsot s_n naraščajaoče ($s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$)

Trditev: Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ z nenegativnimi členi konvergira natanko takrat, kadar je njeno zaporedje delnih vsot s_n navzgor omejeno.

Izrek: (primerjalni kriterij za konvergenco vrst): Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti z nenegativnimi členi in naj velja:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$$

(1) Če vsota $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, potem $\sum_{n=a_n}^{\infty}$ konvergira.

(2) Če vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, potem $\sum_{n=b_n}^{\infty}$ divergira.

Opomba: Pravimo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *majoranta* za $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Primer: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ali konvergira?

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} \geq \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$ konvergira po primerjalnem kriteriju. Ker je to rep zaporedja $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ konvergira.

Dokaz trditve:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \ldots + a_n \\ t_n &= b_1 + \ldots + b_n \end{aligned}$$

Po predpostavki $s_n \leq t_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(1) Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, zaporedje t_n konvergir, t.j.: t_n je navzgor omejeno:

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : t_n \leq M$$

Sledi: $s_n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, torej s_n in s tem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(2) Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, potem je zaporedje s_n navzgor neomejeno. Ker $s_n \leq t_n$ je tudi t_n navzgor neomejeno, zato $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Primer: Obravnavaj konvergenco $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ v odvisnosti od $p \in \mathbb{R}$.

$p = 1$ Vemo, da je harmonična vrsta in divergira.

$p \leq 1$ $\dfrac{1}{n^p} \geq \dfrac{1}{n}$ odtod po primerjalnem kriteriju sledi, da $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ divergira.

$p > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira

Podoben dokaz kot pri harmonični vrsti (samo druge ocene)

$$s_4 = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \underbrace{\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}}_{\leq 2\frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$s_8 = s_4 + \underbrace{\frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p}}_{\leq 4\frac{1}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}}} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}$$

$$\begin{aligned} s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^{-1})^{p-1}} \leq \\ \leq \underbrace{1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^{-1})^{p-1}} + \ldots}_{\text{zgornja meja}} \end{aligned}$$

Opazimo, da je od nekega člena naprej to geometrijska vrsta z $q = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$, kar pomeni, da ima vsoto. Torej je s_{2^k} navzgor omejeno, ker je naraščajoče je tudi s_n navzgor omejeno in je zato s_n konvergentno.

Izrek: (*kvocientni* kriterij ali *d'Alembertov* kriterij) Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi. Sestavimo zaporedje:

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

1) Če obstaja $q \in (0,1)$, da velja $d_n \leq q \forall n \in \mathbb{N}$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2) Če velja $d_n \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Če obstaja $\lim_{n\to\infty} d_n = d$, potem velja:

1') Če je $d < 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2') Če je $d > 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Opombi:

- Če je $d = 1$, kriterij ne da odgovora.
- Če je $\limsup_{n\to\infty} d_n < 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Primer:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1} n!}{(n+1)! 2^n} = \frac{2}{n+1}$$
$$d = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ konvergira.

- Obravnavaj konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, $x > 0$

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \frac{(n+1)x}{n}$$
$$d = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x}{n} = x \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = x$$

  - Če $x < 1$ vrsta konvergira.
  - Če $x > 1$ vrsta divergira.
  - Če $x = 1 : \sum_{n=1}^{\infty} n$ divergira (ker členi ne konvergirajo proti 0).

Dokaz:

1) Denimo, da je $d_n \leq q < 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \forall n$$
$$a_{n+1} \leq qa_n \leq q \cdot qa_{n-1} \leq q^3 a_{n-2} \leq \ldots \leq q^n a_1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n a_1$$

Po primerjalnem kriteriju vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ konvergira $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2) $d_n \geq q \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Zaporedje d_n je naraščajoče zaporedje pozitivnih števil. Zato členi a_n ne konvergirajo proti 0. Torej vrsta divergira.

Iz 1 sledi 1', iz 2 sledi 2'. Dokaz je bil za DN. Si naredil/a?

Izrek:(*korenski* kriter ali *Cauchyjev* kriterij) Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z nenegativnimi členi. Sestavimo zaporedje

$$c_n = \sqrt[n]{a_n}$$

Tedaj velja:

1) Če obstaja $q \in (0,1)$, da velja $c_n \leq q$ za vse $n \in \mathbb{N}$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2) Če velja $c_n \geq 1 \forall n$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Če obstaja $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, potem velja:

1') Če je $c < 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2') Če je $c > 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Opombi:

- Če je $c = 1$, kriterij ne da odgovora.
- Če je $\limsup_{n\to\infty} c_n < 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Dokaz:

1) Naj bo $q \in (0,1), c_n \leq q \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} c_n &\leq q \\ \sqrt[n]{c_n} &\leq q \\ a_n &\leq q^n \end{aligned}$$

Členi v vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ so majonirani s členi konvergentne geometrijske vrste q^n, zato $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira po primerjalnem kriteriju.

2) Naj bo $c_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} c_n &\geq 1 \\ \sqrt[n]{a_n} &\geq 1 a_n &&\geq 1^n \end{aligned}$$

Vrsta divergira, ker členi ne konvergirajo proti 0.

Tako kot pri prejšnjem primeru iz 1 sledi 1' in iz 2 sledi 2'. Ponovno je bil dokaz za DN.

Primer:

- Obravnavaj konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n, x > 0$

$$c_n = \sqrt[n]{\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{x}{n}$$

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n} = x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Po korenskem kriteriju vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$ konvergira za vse $x > 0$.

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Že od prej vemo, da konvergira, ampak si vseeno poglejmo kvocientni in korenski kriterij.

  - **Kvocientni kriterij:**

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

  - **Korenski kriterij:**

$$c_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

IZREK: (*Raabejev* kriterij) Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi. Sestavimo zaporedje:

$$r_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

1) Če obstaja $r > 1$, da velja $r_n > r \quad \forall n \in \mathbb{N}$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2) Če velja $r_n \leq 1 \forall n$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Če obstaja $\lim_{n\to\infty} r_n = R$, potem velja:

1') Če je $R > 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2') Če je $R < 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Opombi:

- Če je $R = 1$ kriterij ne da odgovora.
- Če je $\limsup_{n\to\infty} r_n > 1$, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Dokaz:

1) Naj bo $r_n \geq r > 1 \quad \forall n$

$$\begin{aligned} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &\geq r \\ \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 &\geq \frac{r}{n} \\ \frac{a_n}{a_{n+1}} &\geq \frac{r}{n} + 1 \end{aligned}$$

Trditev: Če je $s \in \mathbb{Q} \quad 1 < s < r$, potem velja $1 + \dfrac{r}{n} > \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^s$

Dokaz trditve: $s = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{r}{n} &> \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}} \\ \left(1 + \frac{r}{n}\right)^q &> \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \\ \left(1 + \frac{r}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{r}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = \\ &= 1 + q\frac{r}{n} + \frac{1}{n^2}(\cdots) - (1 + \frac{p}{n} + \frac{1}{n^2}(\cdots)) = \frac{1}{n}(qr - p) + \frac{1}{n^2}(\cdots) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{n}}_{>0}(\underbrace{(qr-p)}_{>0} + \frac{1}{n}(\cdots)) > 0 \end{aligned}$$

$qr - p > 0$, ker $r > \dfrac{p}{q} \Rightarrow qr > p$. $\quad \dfrac{1}{n}(\cdots) > 0$ za dovolj velik n, ker je limita tega člena 0.

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &\geq 1+\frac{r}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^s = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \\
a_{n+1} &\leq a_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^s \quad \text{za dovolj velik } n \\
a_{n_0+1} &\leq a_{n_0}\left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^s \\
a_{n_0+2} &\leq a_{n_0+1}\left(\frac{n_0+1}{n_0+2}\right)^s < a_{n_0}\left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^s \cdot \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^s = a_{n_0}\frac{n_0^s}{(n_0+2)^s} \\
a_{n_0+3} &\leq a_{n_0+2}(\cdots) < a_{n_0}\frac{n_0^s}{(n_0+3)^s} \\
a_{n_0+k} &\leq a_{n_0}\frac{n_0^s}{(n_0+k)^s} \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0}\frac{n_0^s}{(n_0+k)^s} = a_{n_0}n_0^s\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n_0+k)^s}$$

Ta vrsta konvergira, ker je $s > 1$ in je ostanek vrste $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$. Torej po primerjalnem kriteriju konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Naj bo $r_n \leq 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &\leq 1 \\
\frac{a_n}{a_{n+1}}-1 &\leq \frac{1}{n} \\
\frac{a_n}{a_{n+1}} &\leq 1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \\
a_{n+1} &\geq \frac{n}{n+1}a_n \\
a_{n+2} &\geq \frac{n+1}{n+2}a_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}a_n = \frac{n}{n+2}a_n \\
a_{n+k} &\geq \frac{n}{n+k}a_n \\
a_{k+1} &\geq \frac{1}{k+1}a_1
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}a_1 = a_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$$

Je harmonična vrsta, ki divergira. Po primerjalnem kriteriju divergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

PRIMER: Obravnavaj konvergenco $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}, x > 0$.

- **Kvocientni:**

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(x+1)\dots(x+n)(n+1)!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)n!} = \frac{n+1}{x+n+1}$$

  $\lim_{n\to\infty} d_n = 1$ in kriterij ne da odgovora

- **Raabejev:**

$$r_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{x+n+1}{n+1} - 1\right) = \frac{nx}{n+1}$$
$$\lim_{n\to\infty} r_n = x$$

  - Če je $x > 1$, potem vrsta konvergira.
  - Če je $x < 1$, potem vrsta divergira.
  - Če je $x = 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{2\cdot 3\cdot n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$ divergira.

4.2 Absolutna konvergenca

DEFINICIJA: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ številska vrsta. Pravimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutno konvergira*, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
Opomba: Za vrste z nenegativnimi členi, je absolutna konvergenca isto kot konvergenca.

IZREK: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ številska vrsta. Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergira, potem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

DOKAZ: Vemo: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko takrat, ko $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ izpolnjuje Cauchyjev pogoj. Spomnimo se Cauchyjevega pogoja za vrste:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall k \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

Naj vsota $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, zato izpolnjuje Cauchyjev pogoj. Dokažimo, da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ izpolnjuje Cauchyjev pogoj.
Izberemo ε.

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| \leq \underbrace{|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}|}_{||a_{n+1}|+\dots+|a_{n+k}||<\varepsilon} < \varepsilon$$

$\square$

PRIMER: Ugotovi ali vrsta konvergira

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ konvergira. Vemo $|\sin n| \leq 1$:

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergira}$$

Po primerjalnem kriteriju $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ konvergira.

IZREK:(*Leibnizov kriterij* za alternirajoče vrste) Naj bo a_n padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito 0. Tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$konvergira. Velja ocena:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n a_n\right| \leq a_m$$

PRIMER: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ alternirajoča harmonična vrsta. $a_n = \frac{1}{n}$ ustreza pogojem, zato vrsta konvergira. Ne konvergira absolutno (ker harmonična vrsta divergira).

DEFINICIJA: naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ številska vrsta. Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, ni pa absolutna konvergentna, potem rečemo, da je *pogojno konvergentna*.

DOKAZ:

$$s_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}$$
$$s_{2n+1} = (\underbrace{a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots}_{s_{2n-1}}) - \underbrace{a_{2n-1} + a_{2n}}_{>0} \leq s_{2n-1}$$

$\Rightarrow s_{2n+1}$ je padajoče

$$s_{2n+2} = (\underbrace{a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots}_{s_{2n}}) + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{>0} \geq s_{2n}$$

$\Rightarrow s_{2n}$ je naraščajoča

$$s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \geq 0$$
$$s_{2n+2} = a_0 + (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \cdots + (-a_{2n-1} + a_{2n}) - a_{2n+1} \leq a_0$$

$\Rightarrow s_{2n+1}$ je navzdol omejeno
$\Rightarrow s_{2n+2}$ je navzgor omejeno

$\Rightarrow s_{2n+1}, s_{2n+2}$ sta konvergentni podzaporedji v s_n.

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n}}_{\to 0}$$

Zato velja $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$. Zato je s_n konvergentno $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergira.

$|s_{m+k} - s_m| = |(-1)^m||a_m + (-a_{m+1} + a_{m+2}) + (-\cdots) + (-1^{k-1})a_{m+k-1}| \leq a_m$

$k \to \infty : |s - s_m| \leq a_m$ $\square$

4.3 O preureditvah vrst

Zamenjava vrstnega reda seštevanja.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 \cdots + a_n + \cdots$$
$$\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekcija}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)} + \cdots$$

Izrek: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta in $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektivna preslikava. Potem je $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ konvergentna in velja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

Dokaz:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Dokazujemo $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = s$

$$\left| s - \sum_{k=1}^{m} a_{\pi(k)} \right| = \left| s - s_n - \underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_{\pi(k)}}_{\text{razen } \pi(k)\in\{1\ldots n\}} \right| \leq |s - s_n| + \sum_{k=1}^{m} |a_{\pi(k)}| \leq |s - s_n| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

- $|s - s_n < \frac{\varepsilon}{2}$, ker $\exists n_0 \forall n \geq n_0$ to velja.

- $\exists m_0 \forall n \geq m_0 : \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
- $\exists m \in \mathbb{N} : \{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \supset \{1, 2, \dots, n\}$

Izrek:(Reimann) Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergenta. Potem $\forall A \in \mathbb{R}$ obstaja bijekcija $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A$. Obstaja še dve bijekciji $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_{\pi_1(n)} = \infty$$
$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_{\pi_2(n)} = -\infty$$

Dokaz: Predpostaviti smemo, da $a_n \neq 0 \forall n$.

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = P_{k(n)} - Q_{m(n)}$$

Pri čemer so v $P_{k(n)}$ sešteti vsi pozitivni členi, med a_1 in a_n, v $Q_{m(n)}$ pa nasprotne vrednosti vseh negativnih členov med a_1 in a_n.

$$P_{k(n)} = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k(n)}$$
$$Q_{m(n)} = q_1 + q_2 + \cdots + q_{m()}$$

Velja tudi $k(n) + m(n) = n$.

$$P_{k(n)} + Q_{m(n)} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ divergirata

- Če bi obe konvergirali, bi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n$ konvergirala $\to\leftarrow$
- Če bi ena konvergirala, druga pa ne: iz $s_n = P_{k(n)} - Q_{m(n)}$ sledi, da če bi ena od vrst konvergirala bi tudi druga, ker s_n konvergira.

$\lim_{n\to\infty} p_n = 0, \lim_{n\to\infty} q_n = 0$

Vemo: ker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. p_n je podaporedje v $a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = 0$. Podobno velja za q_n. Torej

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = 0$$

Sedaj lahko sestavimo, tako zaporedje, ki konvergira proti $A \in \mathbb{R}$. Obstaja najmanjši $k_1 \in \mathbb{N}$, da velja

$$\begin{gathered} p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > A \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1 - 1} \leq A \end{gathered}$$

Obstaja najmanjši $k_2 \in \mathbb{N}$, da velja:

$$\begin{gathered} p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{k_2} < A \\ p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{k_2 - 1} \geq A \end{gathered}$$

Postopek nadaljujemo. Ker je $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = 0$, bo preurejena vrsta konvergentna z vsoto A. Dobili smo bijektivno preslikavo po konstrukciji.

Če želimo skonstruirati vrsto, ki konvergira proti neskončno $A = \infty$ naredimo sledeče

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} &> 1 \\ p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_2} &> 2 \end{aligned}$$

$\square$

4.4 Množenje vrst

Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ številski vrsti.

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \\ &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_1 b_n + \\ &+ a_2 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_2 b_n + \cdots \end{aligned}$$

To lahko zapišemo v tabelo, podobno kot urejenost racionalnih števil. Vsota iz vseh produktov je vrsta oblke

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s}$$

kjer je $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijektivna preslikava s predpisom $s \mapsto (i_s, k_s)$. *Cauchyjev produkt*

$$c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1$$

je produkt kontra diagonal v tabeli. Vsota produktov je

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

Izrek: Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutno konvergentni številski vrsti. Potem je vrsta, ki je sestavljena iz vseh produktov konvergentna in njena vsota je

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Natančneje, za vsako bijektivno preslikavo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, je vrsta

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{\varphi_1(s)} b_{\varphi_2(s)}$$

konvergentna in velja:

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{\varphi_1(s)} b_{\varphi_2(s)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Dokaz: dokazujemo absolutno konvergenco vrste iz vseh produktov. $\sum_{s=1}^{\infty} |a_{\varphi_1(s)} b_{\varphi_2(s)}|$ je konvergenta

Zaporedje delnih vsot:

$$|a_{\varphi_1(1)} b_{\varphi_2(1)}| + |a_{\varphi_1(2)} b_{\varphi_2(2)}| + \cdots + |a_{\varphi_1(m)} b_{\varphi_2(m)}|$$

Obstaja $n_0 = \max\{\varphi_1(1), \varphi_1(2), \ldots, \varphi_1(m)\}$ in $k_0 = \max\{\varphi_2(1), \varphi_2(2), \ldots, \varphi_2(m)\}$, tako da lahko zgornjo vsoto omejimo navzgor in dobimo

$$\begin{aligned} &|a_{\varphi_1(1)} b_{\varphi_2(1)}| + |a_{\varphi_1(2)} b_{\varphi_2(2)}| + \cdots + |a_{\varphi_1(m)} b_{\varphi_2(m)}| \leq \\ &\qquad \leq (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0}|)(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_{k_0}|) \leq \\ &\qquad\qquad \leq \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\right)}_{\text{število}} \end{aligned}$$

Ker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergira, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira. Podobno velja za $|b_n|$.

Zaporedje delnih vsot $\sum_{s=1}^{\infty} |a_{\varphi_1(s)} b_{\varphi_2(s)}|$ je navzgor omejeno, zato je vrsta z nenegativnimi členi konvergentna.

Vosta vrste je neodvisna od izbire vrstnega reda členov, zato izberemo vrstni red „po kvadratih".

$$s_{m^2} = \left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{m} b_n\right)$$

$$\lim_{m\to\infty} s_{m^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Vsako podzaporedje konvergentnega zaporedja konvergira proti limiti zaporedja, zato tudi s_m konvergira k temu številu.

$\square$

PRIMER: $a_n = b_n = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ konvergira po Leibnizevem kriteriju, vendar ne konvergira absolutno. Izračunajmo produkt vrst s Cauchyjevo ureditvijo

$$\begin{aligned} c_n &= a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 = \\ &= (-1)\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^2\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-1)^{n-2}\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (-1)\frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \end{aligned}$$

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(k+1)}_{\leq n}\underbrace{(n+1-k)}_{\leq n}}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \geq \frac{n-1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergira, ker členi ne gredo proti 0.

4.5 Dvakratne vrste

Imamo neskončno matriko $[a_{ij}]$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Formalni vrsti
$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right)$$
in
$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)$$
imenujemo *dvakratni vrsti*, če $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ konvergira za vsak i, oziroma če $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ konvergira za vsak j.

Naj bo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijektivna preslikava. Elemente $[a_{ij}]$ s φ uredimo v zaporedje in sestavimo številsko vrsto.

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{\varphi(s)} \tag{2}$$

VELJA:

1) Če 2 absolutno konvergira, potem dvakratni vrsti konvergirata in vse tri imajo enako vsoto.
2) Če dvakratna vrsta konvergira, ko njene člene nadomestimo z absoutnimi vrednostmi, potem 2 konvergira in vsote so enake.

5 Funkcije realne spremenljivke

DEFINICIJA: Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$. *(Realna) funkcija (realne spremenljivke)* je preslikava
$$f : D \to \mathbb{R}$$
Spomnimo se, da je preslikava predpis, za katerega velja
$$\forall x \in D \exists! y \in \mathbb{R} : y = f(x)$$

OPOMBI:

1. V pojmu funkcija sta združena dve predpostavki:
   - definicijsko območje
   - predpis

2. Funkciji f in g sta enki, če imata enako definicijsko območje in predpis.

Dogovor: Funkcijo lahko podamo samo s spredpisom. V tem primeru vzamemo za definicjsko območje množico vseh x, za katero ima predpis smisel.

Primer:

1) $f(x) = \sqrt{x} \quad D_f = [0, \infty)$

2) Ali sta funkciji, ki sta dani s predpisoma

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x-1) + \ln(x+1) \\ g(x) &= \ln(x^2 - 1) \end{aligned}$$

enaki?

$$\begin{aligned} D_f &= (1, \infty) \\ D_g &= (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{aligned}$$

Nista enaki, vedar data enake vrednosti na preseku definicijskih območji.

$$\forall x \in D_f \cap D_g : f(x) = g(x)$$

Definicija: Naj bosta f in g funkciji. Če velja $D_f \subset D_g$ in če velja $f(x) = g(x)$ za vse $x \in D_f$, potem rečemo, da je funkcija g *razširitev* funkcije f in da je f *zožitev* funkcije g. Zožitev zapišemo kot

$$g|_{D_f} = f$$

Definicija: Naj bo f funkcija. Množico

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2$$

imenujemo *graf funkcije*.

Opomba:

1. Funkcija f je s svojim grafom natančno določena.
2. Katere podmnožice $S \subseteq \mathbb{R}^2$ so grafi funkcij? Presek vsake navpične premice z množico S je točka ali prazna množica.

5.1 Operacije s funkcijami

DEFINICIJA: Naj bosta $f : D_f \to \mathbb{R}$ in $g : D_g \to \mathbb{R}$ funckiji. Če je $Z_f \subset D_g$, potem lahko definiramo *kompozitum funkcij*

$$g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$$

s predpisom:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Ni nujno, da bi bila $g \circ f$ in $f \circ g$ v kakšni zvezi.

PRIMER:

1) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \ln x^2$. $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x^2) = \ln^2 x^2 + 1 = 4\ln^2 |x| + 1$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \ln(x^2 + 1)^2 = 2\ln(x^2 + 1)$$

2) $f(x) = x^2$ ni injektivna

$$f|_{[0,\infty)} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

je injektivna. Naredimo lahko inverzno funkcijo $f^{-1} : Z_f \to \mathbb{R}$ s predpisom $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

DEFINICIJA: Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ injektivna funkcija z zalogo vrednosti Z_f. Inverzno preslikavo $f^{-1} : Z_f \to \mathbb{R}$ imenujemo *inverzna funkcija*. Njen predpis je znan ža iz poglavja o preslikavah

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$$

PRIMER: Funkcija f je dana s predpisom:

$$f(x) = \frac{2x + 3}{3x - 1}$$

Določi inverzno funkcijo, če obstaja.

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \\ y &= \frac{2x + 3}{3x - 1} \\ y(3x - 1) &= 2x + 3 \\ 3xy - 2x &= 3 + y \\ x(3y - 2) &= 3 + y \\ x &= \frac{3 + y}{3y - 2} \end{aligned}$$

Iz računa sledi: če je $y \neq \frac{2}{3}$, potem obstaja natanko en x za katerega velja $f(x) = y$. Torej je $Z_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$, f je injektivna in $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{3y-2}$.

$$\begin{aligned}
\Gamma_f &= \{(x, f(x)) : x \in D_f\} = \{(f^{-1}(y), y) : y \in Z_f\} \\
\Gamma_{f^{-1}} &= \{(y, f^{-1}(y) : y \in Z_f)\}
\end{aligned}$$

Zato je $\Gamma_{f^{-1}}$ dobljen iz Γ_f z zrcaljenjem preko simetrale lihih kvadrantov.

DEFINICIJA: Naj bo f funkcija.

- Pravimo, da je f navzogr omejena, če je Z_f navzgor omejena, t.j.:

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in D_f : f(x) \leq M$$

- Pravimo, da je f navzdol omejena, če je Z_f navzdol omejena, t.j.:

$$\exists m \in \mathbb{R} \forall x \in D_f : f(x) \geq m$$

- Funkcija f je omejena, kadar je navzgor in navzdol omejena.
- Če je f navzgor omejena, potem je supremum funkcije f natančna zgornja meja zaloge vrednosti

$$\sup f := \sup Z_f$$

- Če je f navzdol omejena, potem je infimum funkcije f natančna spodnja meja zaloge vrednosti

$$\inf f := \inf Z_f$$

- Če obstaja maksimum zaloge vrednosti, velja

$$\max f := \max Z_f$$

- Če obstaja minimum zaloge vrednosti, velja

$$\min f := \min Z_f$$

DEFINICIJA: Naj bo f funkcija. Pravimo, da je $x \in D_f$ *ničla* funkcije f, če

$$f(x) = 0$$

Definicija: Naj bosta $f, g : D \to \mathbb{R}$ funkciji. Funkcije $f + g, f - d, f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ definiramo s predpisi:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\end{aligned}$$

Če $\forall x \in D g(x) \neq 0$, potem definiramo $\dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definicija: Naj bosta $f, g : D \to \mathbb{R}$ funkciji. Funkciji $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} : D \to \mathbb{R}$ definiramo s predpisoma:

$$\begin{aligned}\max\{f, g\}(x) &:= \max\{f(x), g(x)\} \\ \min\{f, g\}(x) &:= \min\{f(x), g(x)\}\end{aligned}$$

Definicija: Naj bo Γ množica in naj bo za vsak $\gamma \in \Gamma$

$$f_\gamma : D \to \mathbb{R}$$

funkcija. Če je $\{f_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\}$ navzgor omejena za vsak $x \in D$, potem lahko definiramo funkcijo

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma : D \to \mathbb{R}$$

s predpisom

$$(\sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma)(x) = \sup\{f_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\}$$

Podobno definiramo

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma : D \to \mathbb{R}$$

Primer: $f_\gamma(x) = \dfrac{1}{1 + \gamma x^2}, \gamma \in (0, \infty),\ D_{f_\gamma} = \mathbb{R}$

$$\left\{\frac{1}{1 + \gamma x^2} : \gamma \in (0, \infty)\right\} \text{ je navzgor omejena z 1 in navzdol omejena z 0}$$

5.2 Zveznost

Zvezna funkcija je funkcija, kjer „majhna” sprememba neodvisne spremenljivke povzroči „majhno” spremembo odvisne spremenljivke.

PRIMERA

- $g(x) = \sin\frac{1}{x}$: V 0 ni definirana, zato ne moremo govoriti v zveznosti. Lahko določimo $g(0) = 0$, vendar ne glede na vrednost, ki jo določimo v 0, g ne bo zvezna.
- $h(x) = x\sin\frac{1}{x}$. Če določimo $h(0) = 0$, potem je h zvezna.

DEFINICIJA: Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija in $a \in D$ točka. Funkcija f je *zvezna v točki* $a \in D$, če velja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Opomba: δ je odvisna od ε. Najprej si izberemo ε, nato pa določimo δ.

PRIMERI:

1) $C \in \mathbb{R}, \quad f(x) = C$ f je zvezna v $a \in \mathbb{R}$

   Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Vemo $f(a) = C$. Če si izberemo $\delta = 1$, velja:

$$|x - a| < 1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

2) $g(x) = x$ g je zvezna v $a \in \mathbb{R}$

   Izberemo $\varepsilon > 0$. Dokazujemo

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

   Naj bo $\delta := \varepsilon$. Velja:

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$$

   ker $|x - a| < \delta$ in $\varepsilon = \delta$

3) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ f ni zvezna v 0

Negacija definicje je:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

Naj bo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Izberemo poljuben $\delta > 0$. Naj bo $x_\delta = \frac{\delta}{2}$. x_δ je v okolici točke 0, ker

$$|0 - x_\delta| = |0 - \frac{\delta}{2}| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

Funkcijske slike niso v ε-ti okolici točke $f(0)$, ker:

$$|f(0) - f(x_\delta)| = |0 - 1| = 1 \geq \varepsilon = \frac{1}{2}$$

Definicija: Naj bo $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$. Množico $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ imenujemo δ *okolice toček a v D*. Množica $U \subset \mathbb{R}$ je *okolica točke a v D*, če vsebuje kakšno δ-okolico točke a v D.

Ekvivalentni definicija zveznosti

- Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija in $a \in D$. Potem je f zvezna v točki a natanko tedaj, kadar velja, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da f preslika δ-okolico točke a v ε-to okolico točke $f(a)$.
- Funkcija f je zvezna v točki a natanko tedaj, če za vsako okolico V toček $f(a)$, obstaja taka okolica U točke a, da velja $f(U) \subset V$.

5.2.1 Opis zveznosti z zaporedji

Naj bo $f : D \to R$ zvezna v $a \in D$. Izberemo poljubno konvergentno zaopredje $x_n \in D$ z limito a. Opazujemo $f(x_n)$. Trdimo $f(x_n)$ konvergira proti $f(a)$.

Izberemo $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna v a, obstaja $\delta > 0$, da za $x \in D$ velja, če $|x-a| < \delta$ sledi $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. Ker x_n konvergira proti a, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $|x_n - a| < \delta$ za vse $n \geq n_0$. Potem velja $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$. $\square$

Izrek: Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija in $a \in D$. f je zvezna v $a \in D$ natanko tedaj, kadar za **vsako** zaporedje $x_n \in D$, ki konvergira proti a, zaporedje $f(x_n)$ konvergira proti $f(a)$.

Dokaz:

($\Rightarrow$) Že dokazano.

($\Leftarrow$) Denimo, da f ni zvezna v točki a. Potem velja:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

Torej za vsak n velja:

$$x_n \in D : |x_n - a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

kjer je $\frac{1}{n} = \delta$.

Zaporedje x_n konvergira proti a, ker $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ za vsak n. Zaporedje $f(x_n)$ ne konvergira proti $f(a)$, ker $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ za vsak n.

$\square$

Primeri:

1) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ *Dirichletova funkcija*

Ni zvezna v nobeni točki. Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Velja

$$\exists q_n \in \mathbb{Q}, q_n \to a$$
$$\exists a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, a_n \to a$$

Torej je $f(q_n) = 1$ za vsak n iin $\lim_{n\to\infty} f(q_n) = 1$. Vemo tudi, da $f(a_n) = 0$ za vsak n in $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$. Torej f ni zvezna v a.

2)

$$g : (0,1) \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & x = \frac{m}{k} \text{ okrajšan ulomek} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

g ni zvezna v $\mathbb{Q}$ točkah.

Izrek: Naj bosta $f, g : D \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji v točki $a \in D$. Potem so funkcije $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ zvezne v točki a. Če je $g(a) \neq 0$, potem je $\frac{f}{g}$ zvezna v točki a.

Dokaz Vemo, da je f zvezna v $a \in D \iff$ za vsako zaporedje x_n v D, ki konvergira proti a, zaporedje $f(x_n)$ konvergira proti $f(a)$. Izberemo poljubno zaporedje $x_n \in D$, ki konvergira proti a. Dokazujemo $(f+g)(x_n)$ kovergira proti $(f+g)(a)$.

$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$ ker sta f in g zvezni, $f(x_n)$ konvergira proti $f(a)$ in $g(x_n)$ konvergira proti $g(a)$. Torej $f(x_n)+g(x_n)$ konvergira proti $f(a)+g(a) = (f+g)(a)$.

Če $g(a) \neq 0$, potem je $\dfrac{f}{g}$ definirana na okolici točke $a \in D$. Obstaja $\delta > 0$, da za

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D$$

velja $g(x) \neq 0$. Torej lahko izberemo poljubno zaporedje $x_n \in (a-\delta, a+\delta) \cap D$, ki konvergira proti a. Tedaj je zaporedje $\left(\frac{f}{g}\right)(x_n)$ dobro definirano in konvergira proti $\left(\frac{f}{g}\right)(a)$ (podoben sklep kot prej).

Izrek: Naj bosta f in g funkciji, za kateri velja $Z_f \subseteq D_g$. Če je f zvezna v a in g zvezna v $f(a)$, potem je $g \circ f$ zvezna v a.

Dokaz: Izberemo poljubno konvergentno zaporeje $x_n \in D_f$ z limito a. Ker je f zvezna v a, zaporedje $f(x_n)$ konvergira proti $f(a)$. Ker je g zvezna v $f(a)$, zaporedje $g(f(x_n))$ konvergira proti $g(f(a))$.

Definicija: Naj bo $f : D \to R$ funkcija. Pravimo, da je f *zvezna funkcija*, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Primeri:

1) Konstante so zvezne funkcije. Polinome in racionalne funkcije lahko dobimo z deljenjem in množenjem linearnih funkcij. Posledica je, da so polinomi in racionalne funkcije zvezne.

Definicija: Naj bo $f : D \to R$ funkcija. Pravimo, da je f *enakomerno zvezna* na D, če velja:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in D : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Opomba: Če je f enakomerno zvezna na D, potem je f zvezna na D. f je zvezna na D (f je zvezna na vsaki točki $a \in D$):

$$\forall a \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ ni enakomerna zvezna na $(0, \infty)$

Naj bo $0 < a < \dfrac{1}{2}$. Velja:

$$|f(a) - f(2a)| = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right| = \frac{1}{2a}$$

Za $\varepsilon = 1$ izveremo poljuben $\delta > 0$. Obtaja a, da velja: $\dfrac{1}{2a} > 1$ in $2a \in (0, \delta)$.

$$|a - 2a| = a < \delta \wedge |f(a) - f(2a)| \geq 1$$

Lema o pokritjih: Dan je nek zaprt interval $[a, b]$ in za vsak $x \in [a, b]$ imamo $\delta(x) > 0$. Označimo $O_x = (x - \delta(x), x + \delta(x)$ $\delta(x)$ okolica točke x. Tedaj v družini okolic $\{O_x; x \in [a, b]\}$ obstaja končno število okolic, ki pokrijejo $[a, b]$, t.j. obstaja $n \in \mathbb{N}$ in obstaja $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, da velja $[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{n} O_{x_j}$

Dokaz: O_a pokrije vsak interval $[a, c)$, kjer je $c < a + \delta(a)$.

$S = \{c \in [a, b], \text{interval } [a, c] \text{ je mogoče pokriti s končno mnogo okolicami iz družine } O_x\}$

Vemo $S \neq \varnothing$ in $S \subset [a, b]$. Torej je S neprazna navzgor omejena množica in ima $\sup S := M$.

Dokazujemo $M \in S$

Vemo $M \in [a, b]$. Ker je $M - \delta(M) < M$, obstaja $c > M - \delta(M), c \in S$. Velja

$$[a, c] \subset O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \cdots \cup O_{x_k}$$
$$[a, M] \subset O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \cdots \cup O_{x_k} \cup O_M$$

$\Rightarrow M \in S$

Če $M \neq b$ potem zgornji interval pokrije $[a, M + \delta(M)) \cap [a, b]$, kar je več kot $[a, M]$. To je v protislovju s tem, da $M = \sup S$. $\rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow M = b$

Posledica: Naj bo $K = [a, b]$. Iz vsakega pokritja K z odpritmi intervali je mogoče izbrati končno podpokritje. To pomeni: $\{I_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ družina odprtih intervalov, za katero velja:

$$K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$$

Obstaja $m \in \mathbb{N}$ in $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m \in \Gamma$, da velja:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_{\gamma_i}$$

Dokaz posledice Za $x \in [a, b]$ velja $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$.

Obstaja $\gamma \in \Gamma : x \in I_\gamma$.

Obstaja $\delta(x) > 0 : (x - \delta(x), x + \delta(x)) \subset I_\gamma$

Na ta način dobimo pokritje $[a, b]$ z O_x. Po lemi o pokritjih obstaja $m \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_m \in [a, b]$

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} O_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_{\gamma_i}$$

ker $O_{x_i} \subset I_{\gamma_i}$ za ustrazno izbrane γ. $\square$

Izrek: Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je f enakomerna zvezna na $[a, b]$

$c \in [a, b] : f$ je zvezna v točki c:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a, b] : |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

f je enakomerno zvezna na $[a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in [a, b] : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Dokaz: Ker je f zvezna na $[a, b]$ je za $x \in [a, b]$ f zvezna v x. Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Obstaja $\delta(x) > 0$, za katerega velja

$$x' \in [a, b] : |x' - x| < 2\delta(x) \Rightarrow |f(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

$$O_x = (x - \delta(x), x + \delta(x)) : \{O_x : x \in [a, b]\}$$

je odprto pokritje $[a, b]$ in po lemi o pokritjih obstaja končno podpokritje:

$$m \in \mathbb{N} : x_1, \dots, x_m \in [a, b]$$
$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} O_{x_i}$$
$$\delta := \min\{\delta(x_1), \dots, \delta(x_m)\}$$

Naj bosta $x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta$.

Obstaja $i \in 1, \ldots, m : x \in (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i))$:

$$|x' - x_i| = |x' - x + x - x_i| \leq |x' - x| + |x - x_i| < 2\delta(x_i)$$

Po (3) sledi:

$$|x - x_i| < \delta(x_i) < 2\delta(x_i) \Rightarrow |f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|x' - x_|| < 2\delta(x_i)i \Rightarrow |f(x') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|f(x) - f(x')| = |f(x) - f(x_i) + f(x_i) - f(x')| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x')| < \varepsilon$$

□

5.2.2 Lastnosti zveznih funkcij

Izrek: (*bisekcija*) Naj bo f zvezna funkcija na $[a, b]$. Če ima f v krajiščih intervala $[a, b]$ nasprotno predznačeni vrednosti, potem ima f na $[a, b]$ ničlo.

$$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow (\exists c \in [a, b] : f(c) = 0)$$

Dokaz: $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Če je $f(c_1) = 0$, potem končamo.

Sicer označimo z $[a_1, b_1]$ tistega od podintervalov $[a, c_1], [c_1, b]$, na katerem ima f v krajiščih nasprotno predznačeni vrednosti.

Nadaljujemo podobno $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}, \cdots$. Če se postpoek ni ustavil.

Na ta način konstruiramo zaporedje vloženih intervalov:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$
$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-1) \quad \text{in} \quad f(a_n)f(b_n) < 0$$

Po izreku obstaja natanko ena točka c, ki je vsebovana v vseh intervalih

$$c = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$$

Ker je f zvezna, velja:

$$f(c) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(b_n)$$

Ker velja $f(a_n)f(b_n) < 0$

$$(f(c))^2 = \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0 \Rightarrow f(c) = 0$$

$\square$

Opomba: Metoda bisekcije je metoda za numberično iskanje ničel

IZREK: Naj bo f zvezna funkcija na $[a, b]$. Potem je f omejena. Ozaničimo:

$$m = \inf_{[a,b]} f \quad \text{in} \quad M = \sup_{[a,b]} f$$

Obstajata $x_m, x_M \in [a, b]$, za kateri velja

$$f(x_m) = m \quad \text{in} \quad f(x_M) = M$$

Opomba: Zvezna funkcija na zaprtem intervalu doseže minimum in maksimum.

DOKAZ: Denimo, da f ni omejena. Recimo, da ni navzgor omejena. Torej velja:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$$

Zaporedje x_n je omejeno, zato ima stekališče s. Torej obstaja konvergentno podzaporedje $x_{n_k} \to s$. Ker je f zvezna, je $f(x_{n_k})$ konvergentna z limito $f(s)$. Pridemo do protislovja, ker mora biti $f(x_{n_k}) > n$ neomejeno. $\rightarrow\leftarrow$

Naj bo $M = \sup f$. Vemo $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq M$. Recimo, da funkcija f ne zadodoseže vrednosti M.

$$M - f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$M - f$ je zvezna na $[a, b]$, zato $\frac{1}{M-f}$ zvezna na $[a, b]$ Po pravkar dokazanem je $\frac{1}{M-f}$ omejena. Torej

$$\exists A \in \mathbb{R}, A > 0 : \frac{1}{M - f} \leq A \quad \forall x \in [a, b]$$
$$\frac{1}{A} \leq M - f(x)$$
$$f(x) \leq M - \frac{1}{A} \quad \forall x \in [a, b]$$

Pridemo do protislovja, ker $M = \sup f \rightarrow\leftarrow$.

Torej obstaja $x_M \in [a, b] : f(x_M) = M$ $\square$

Posledica: Naj bo A zvezna funkcija na $[a, b]$. Označimo $m = \min f$, $M = \max f$. Potem funkcija f doseže vse vrednosti med m in M.

$$\forall c \in [m, M] \exists x_c \in [a, b] : f(x_c) = c$$

Dokaz: Če je $m = M$ je f konstantna.

Če $m \neq M$: naj bo $c \in (m, M)$. Definiramo $g(x) = f(x) - c$. g je definirana na $[a, b]$ in je zvezna. Obstajata x_m in x_M : $f(x_m) = m, f(x_M) = M$. g zožimo med x_m in x_M. g ima na tem intervalu v krajiščih nasprotno predznačeni vrednosti: $m - c < 0$ in $M - c > 0$. Zato obstaja $x_c : g(x_c) = 0$. Velja: $f(x_c) = c$.

$\square$

5.3 Monotone zvezne funkcije

Definicija: Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ interval in $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Pravimo, da je f *naraščajoča funkcija* (na I), če velja

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Pravimo, da je f *strogo naraščajoča* (na I), če

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Podobno definiramo padajočo in strogo padajočo funkcijo.

Funkcija je (strogo) *monotona*, če je ali (strogo) naraščajoča, ali (strogo) padajoča.

Izrek: Naj bo f strogo monotona funkcija na $[a, b]$. Če je f zvezna, potem je njena inverzna funkcija f^{-1} zvezna.

Dokaz: Denimo, da je f strogo naraščajoča. Ker je f strogo naraščajoča, je injektivna, zato inverzna funkcija obstaja.

Vemo: Ker je f zvezna, je njena zaloga vrednosti zaprt interval od najmanjše do največje vrednosti, t.j.: $[f(a), f(b)]$.

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$$

Dokazujemo, da je f^{-1} zvezna $\forall y_0 \in [f(a), f(b)]$.

Izberimo $\varepsilon > 0$. Obstaja natanko en $x_0 \in (a,b) : f(x_0) = y_0$ $(f^{-1}(y_0) = x_0)$.

Ker je f strogo naraščajoča:

$$f(x_0 - \varepsilon) < \underbrace{y_0}_{f(x_0)} < f(x_0 + \varepsilon)$$

Izberemo

$$\delta = \min\{f(x_0 + \varepsilon) - y_0, y_0 - f(x_0 - \varepsilon)\} > 0$$

Če $|y - y_0| < \delta : f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$

Ker je f^{-1} strogo naraščajoča:

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$$
$$|f^{-1}(y) - \underbrace{x_0}_{f^{-1}(y_0)}| < \varepsilon$$

$\square$

5.4 Zveznost posebnih funkcij

Vemo, da so polinomi in racionalne funkcije zvezne.

Primer $f(x) = x^n$ je zvezna funkcija

- $n \in \mathbb{N}$, n liho, potem je f strogo naraščajoča na $\mathbb{R}$. Po izreku $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ zvezna funkcija na $\mathbb{R}$.
- n sodo: $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ je zezna funkcija na $[0, \infty)$.

Zato so *algebraične* funkcije zvezne.

Eksponentna funkcija $a > 0, a \neq 1$. Definirali smo že $a^x, x \in \mathbb{R}$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$x \in \mathbb{R}, x = \lim_{n\to\infty} q_n$$
$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$$

Iz pravil za računanje z racionalnimi potencami sledi:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

IZREK: Eksponentna funkcija $x \mapsto a^x$ je zvezna na $\mathbb{R}$, njena zaloga vrednosti je $(0, \infty)$.

Če je $a > 1$, potem je eksponentna funkcija naraščajoča, če je $a < 1$, potem je padajoča.

DOKAZ: Za $a > 1$, za $a < 1$ je podobno. $x \mapsto a^x$ strogo naraščajoča

$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

$$a^{x_2} = a^{x_1 + (x_2 - x_1)} = a^{x_1} \cdot \underbrace{a^{x_2 - x_1}}_{>1} > a^{x_1}$$

Zveznost: Vemo že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in \mathbb{Q}, |h| < \delta \Rightarrow |a^h - 1| < \varepsilon$$

Ker je $x \mapsto a^x$ strogo naraščajoča, velja zgornja trditev tudi če $\mathbb{Q}$ zamenjamo z $\mathbb{R}$.

$$h > 0 : \exists h_1 \in (h, \delta) : 0 < h < h_1 < \delta \Rightarrow a^0 < a^h < a^{h_1}$$

ker je $|a^{h_1} - a^0| < \varepsilon$ je tudi $|a^h - a^0| < \varepsilon$.

Podobno lahko naredimo za $h < 0$.

Torej je $x \mapsto a^x$ zvezna v točki 0.

Naj bo $x_0 \in \mathbb{R}$ in dokažimo zveznost v x_0. Izberemo $\varepsilon > 0$ in iščemo $\delta > 0$:

$$|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} |a^{x - x_0} - 1|$$
$$|a^{x - x_0} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$$

Ker je zvezna v točki 0, obstaja $\delta > 0$:

$$|h| = |x - x_0| < \delta \Rightarrow |a^h - 1| < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$$

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \infty$$
$$\lim_{n \to \infty} a^{-1} = 0$$

Na $[-n, n]$ a^x doseže vse vrednosti od $[a^{-n}, a^n]$. Za $a^x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a^{-n}, a^n] = (0, \infty)$

Posledica: Naj bo $a > 0, a \neq 1$. Potem velja:

$$(a^x)^y = a^{xy}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

DOKAZ: (skica)

$$\begin{aligned} p_n \in \mathbb{Q}, &\quad p_n \to x \\ q_m \in \mathbb{Q}, &\quad q_m \to y \end{aligned}$$

$(a^{p_n})^{q_m} = a^{p_n q_m}$ za $\forall n, m$ (ker so racionalne potence)

$a^{p_n q_m} = a^{x q_m}$, ko gre $n \to \infty$ po definiciji. $a^{x q_m} = a^{xy}$, ko gre $m \to \infty$ po definiciji.

$(a^{p_n})^{q_m} = (a^x)^{q_m}$, ko gre $n \to \infty$, ker je $x \mapsto x^{q_m}$ zvezna. $(a^x)^{q_m} = (a^x)^y$, ko gre $m \to \infty$, zaradi zveznosti.

DEFINICIJA: Naj bo $a > 0, a \neq 1>$ inverzno funkcijo eksponentne funkcije $x \mapsto a^x$ imenujemo *logaritemska funkcija* z osnovo a in označimo z $\log_a$ Logaritem z osnovo e ozna"icmo z ln in imenujemo *naravni logaritem.*

Opomba:

- log obstaja (po nekem izreku)
- $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ slika bijektivno

Po definiciji inverzne funkcije je

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

IZREK: Funkcija $\log_a$ je zvezna na $(0, \infty)$. Če je $a > 1$, potem je strogor naraščajoča, če je $a < 1$, potem je strogo padajoča. **Velja**:

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y & \forall x, y > 0 \\ \log_a x^\lambda &= \lambda \log_a x & \forall x > 0, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

DOKAZ: Vse razen lastnosti so posledica prejšnjih izrekov

$$\begin{gathered} c = \log_a x \quad \text{in} \quad d = \log_a y \\ \Rightarrow a^c = x \quad \text{in} \quad a^d = y \\ \Rightarrow \underbrace{a^c \cdot a^d}_{a^{c+d}} = xy \\ \Rightarrow c + d = \log_a(xy) \\ \Rightarrow \log_a x + \log_a y = \log_a(xy) \end{gathered}$$

□

5.5 Trigonometrične funkcije

Iz prosminarja vemo

$$\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos\varphi$$
$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi$$

zato je za študij osnovnih lastnosti dovolj obravnati le eno funkcijo.

IZREK: Sinus je zvezna funkcija $\mathbb{R}$.

DOKAZ: Narišemo si enotsko krožnico in v njo vrišemo kot φ_0 in φ, kjer $\varphi_0 < \varphi$. Ozaničimo trikotnik ABC, tako da je $A(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$, in $B(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Vemo, da je ABC pravokotni trikotnik, in je dolčina loka $AB = l$. Velja $l > AB > AC, BC$.

Vemo: $\overline{BC} = |\sin\varphi - \sin\varphi_0|$ in dolžina loka $AB = |\varphi - \varphi_0|$. Velja $|\sin\varphi - \sin\varphi_0| \leq |\varphi - \varphi_0|$.

sinus je zvezna v točki φ_0

Izberemo $\varepsilon > 0$ in iščemo δ. Velja

$$|\sin\varphi - \sin\varphi_0| \leq |\varphi - \varphi_0|\varepsilon$$

Izberemo $\delta := \varepsilon :$ če je $|\varphi - \varphi_0| < \delta = \varepsilon$, potem je $|\sin\varphi - \sin\varphi_0| \leq |\varphi - \varphi_0| < \delta = \varepsilon$.

$\square$

5.6 Ciklometrične funkcije

. Večino znamo že iz proseminarja. Vemo, da je arcsin inverzna funkcija $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. Posledica izreka je, da so arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens in arkus kotangens zvezna funkcije.

Elementarne funkcije so funkcije, ki jih dobimo iz osnovnih tipov (polinomi, racionalne funkcije, algebraične funkcije, eksponentne, trigonometrične) z uporabo aritmetičnih opracij, kompozituma in invertiranja. **Primer:**

$$\ln(\arcsin(\sqrt{x^2 + 6x} + e^x))$$

Elementarne funkcije so zvezne.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 16 & x \leq 0 \end{cases}$$

ni zvezna funkcije (ni elementarna funkcija). Pravimo ji *zlepek*.

5.7 Limita funkcije

Radi bi opisali lokalno obnašanje funkcije: imamo funkcijo, ki je definaran v okolici točke a in ne nujno v a.

DEFINICIJA: Naj bo funkcija f definirana v *prebodeni okolici* točke a, t.j.: obstaja $r > 0$, da je f definirana na $(a - r, a + r) \setminus \{a\}$. Število $L \in \mathbb{R}$ imenujemo *limita* funkcije f, ko gre x proti a, če

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

TRDITEV: Naj bo f definirana v okolici točke a. Funkcija f je zvezna v točki a natanko tedaj, kadar je

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

to pomeni: $\lim_{x \to a} f(x)$ obstaja in je enaka $f(a)$.

DOKAZ: napišemo obe definiciji in je očitno, zato je bil za DN.

POSLEDICA: Naj bo funckija f definirana v prebodeni okolici D_f fočke a. Če obstaja $\lim_{x \to a} f(x) = L$, potem je funkcija

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \setminus \{a\} \\ L & x = a \end{cases}$$

zvezna funkcija v točki a.

DOKAZ: $\lim_{x \to a} \widetilde{f}(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \widetilde{f}(a)$

IZREK: Naj bo funkcija f definirana v prebodeni okolici $\mathcal{U}$ točke a. Potem obstaja $\lim_{x \to a} f(x) = L$ natanko tedaj, kadar za vsako zaporedje $x_n \in \mathcal{U}$, ki konvergira proti a, zaporedje $f(x_n)$ konvergira proti L.

DOKAZ: Posledica trditve (zvezna $\Rightarrow$ po izreku za zveznost).

IZREK: Naj bosta f in g definirani v prebodeni okolici točke a in denimo, da obstaja $\lim_{x\to a} f(x)$ in $\lim_{x\to a} g(x)$. Potem obstajajo $\lim_{x\to a}(f+g)(x), \lim_{x\to a}(f-g)(x), \lim_{x\to a}(f\cdot g)(x)$ in velja:

$$\lim_{x\to a}(f\pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Če je $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, potem obstaja $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in velja

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

DOKAZ: Imamo zveznost po trditvi in delamo z zaporedji.

DEFINICIJA: Naj bo funkcija f definirana na $(a-r,a)$ za nek $r > a$. Pravimo, da je $L\in\mathbb{R}$ *leva limita* funkcije f, ko gre x proti a če

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in D_f : x\in(a-\delta,a)\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

Oznaka:

$$L = \lim_{x\nearrow a} f(x) = f(a-) = \lim_{x\uparrow a} f(x)$$

Podobno definiramo *desno limito* in označimo

$$D = \lim_{x\searrow a} f(x) = f(a+) = \lim_{x\downarrow a} f(x)$$

TRDITEV: Naj bo f definirana v prebodeni okolici točke a. Limita funkcije $f<$ ko gre x proti a obstaja natanko tedaj, kadar obstajata leva ind esna limita in sta enaki.

DOKAZ: Potrebno je lepo zložiti definicije, zato je bil dokaz za DN.

IZREK: Naj bo f monotona funkcija na $[a,b]$. Potem za vsak $c\in(a,b)$ obstajata $f(c-)$ in $f(c+)$. Funkcija f je zvezna v točki c natanko tedaj, kadar $f(c-)=f(c+)$. Če je naraščajoča, potem je $f(c-)\le f(c)\le f(c+)>$ Če je f padajoča, potem je $f(c+)\le f(c)\le f(c-)$.

DEFINICIJA: Če monotona funckija f na $[a,b]$ ni zvezna v točki c, potem $f(c+)-f(c-)$ imenujemo *skok* funkcije f v točki c.

DOKAZ: (izreka) Naj bo f naraščajoča, $c\in(a,b)$. Vemo

$$\forall x\in[a,c] : f(x)\le f(c)$$

Množica $\{f(x) : x \in [a,c)\}$ je navzgor omejena, zato ima supremum S. Dokazujemo $f(c-) = S$

Izberemo $\varepsilon > 0$. Obstaja $x_0 \in [a,c)$, da je $f(x_0) > S - \varepsilon$.

Za $x \in [x_0, c)$ velja: ker je f naraščajoča: $S - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq S$. Torej $f(x) \in (S - \varepsilon, S + \varepsilon)$. Vzamemo $\delta := c - x_0$. Podobno naredimo za desno limito in padajoče zaporedje.

$\square$

Izrek: Monotona funkcija f na $[a,b]$ ima kvečjemo števno mnogo točk nezvenznosti.

Dokaz: Vemo: v točkah nezveznosti ima funkcija monotona skok. Naj bo

$$\mathcal{N} = \text{ množica točk nezveznosti}$$

Velja
$$\forall c \in \mathcal{N} \exists f(c-), f(c+) : f(c-) \neq f(c+)$$
Če je f naraščajoča: obstaja $r_c \in (f(c-), f(c+)) \cap \mathbb{Q}$. Naj bo

$$g : \mathcal{N} \to \mathbb{Q} \qquad g(c) = r_c$$

g je injektivna, zato je $\mathcal{N}$ kvečjemu števna.

$\square$

Definicija: Naj bo funkcija f definirana na (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$. Število $L \in \mathbb{R}$ je limita funkcije f, ko pošljemo x čez vse meje, če velja:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R}, M > a \forall x \in \mathbb{R} : x \geq M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

V tem primeru pišemo
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$
Podobno definiramo
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Definicija: Naj bo funkcija f definirana na prebodeni okolici točke a. Pravimo, da f izpolnjuje *Cauchyjev pogoj* pri a, če

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} : |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

TRDITEV: Naj bo funkcija f definirana na prebodeni okolici točke a. Funkcija f izplonjuje Cauchyjev pogoj pri a natanko takrat, kadar obstaja limita funkcije f, ko gre x proti a.

DOKAZ: Za DN.

Opomba: Cauchyjev pogoj ima smisel tudi pri $a = \pm\infty$ in trditev velja tudi pri $a = \pm\infty$.

DEFINICIJA: Naj bo funkcija f definirana v prebodeni okolici točke a. Pravimo, da je limita funkcije f ,ko gre x proti a enaka neskončno če

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0, \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} : f(x) > M$$

Označimo z $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

Podobno definiramo:

- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\uparrow a} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

PRIMER:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

   Če si narišemo krožni izsek enotske krožnice, lahko z malo geometrije pridemo do ocene $\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\tan x$. Nato izraz nekoliko preuredimo in dobimo $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$. Uporabimo lahko izrek o sendviču in pridemo do končnega rezultata.

2) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$

   $\lim_{x\to\infty} f(x) = e$

   Vemo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$
$$\lim_{n\to-\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

Za $x \in [n, n+1)$ velja:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Po izreku o sendviču torej velja $\lim_{x\to\infty} f(x) = e$

3) $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$, $a>0, a\neq 1$

$$\begin{gathered} a^h = 1+\frac{1}{x} \\ h>0: h\to 0, x\to\infty \\ h<0: h\to 0, x\to -\infty \\ h=\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right) \end{gathered}$$

$$\frac{a^h-1}{h} = \frac{1}{x\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} \to \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

5.8 Odvod

Definicija: Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a. Če obstaja

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

jo imenujemo *odvod* funcije f v točki a in jo označimo s $f'(a)$ in pravimo, da je f *odvadljiva* v točki a.

Opomba: Če je f odvadljiva v točki a: $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(x)}{x-a}$

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x) - f(a) \\ \Delta x &= x - a \end{aligned}$$

razliki ali *diferenca.* $x = a+h, \quad h = x-a$

Kvoceint $\frac{f(x)-f(x)}{x-a}$ se imenuje *diferenčni kvoecient.*

Geometrijski pomen: Naklonski koeficient sekante skozi $(a, f(a)), (x, f(x))$ je $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. V limiti $x \to a$ dobimo naklonski koeficient tangente.

Primer: $f(x) = x^2 + 1$. Izračunaj $f'(2)$.

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x - 2} = 4$$

Izrek: Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a. Če je f *odvadljiva* v točki a, potem je f zvezna v točki a.

Dokaz: Denimo, da je f odvadljiva v točki a.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left(f(a) + (f(x) - f(a)) \frac{x-a}{x-a} \right) = \\ = \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - 1} \lim_{x\to a} (x - 1) = \\ = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a)\end{aligned}$$

Primer:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je zvezna na $\mathbb{R}$. Ali je odvadljiva v 0?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-\frac{2}{3}} = \infty$$

ni odvadljiva.

2)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sin \frac{1}{h}$$

ne obstaja

3) $g(x) = |x|$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

ne obstaja, ker $\lim_{h\downarrow 0} \dfrac{|h|}{h} = 1$, $\lim_{h\uparrow 0} \dfrac{|h|}{h} = -1$

DEFINICIJA: Naj bo funcija f definirana na $[a, a+r)$ za nek $r > 0$. Če obstaja $\lim_{x\downarrow a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, jo imenujemo *desni odvod* funcije f v točki a. Podobno definiramo *levi odvod.*

TRDITEV: Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a. Funcija f je odvavljiva v točki a natanko tedaj, kadar obstaja levi in desni odvod funcije f v točki a in sta enaka.

DEFINICIJA: Pravimo, da je funcija f odvadljiva na (a, b), če je f odvadljiva v vsaki točki iz (a, b).

Funkcija f je odvadljiva na $[a, b]$, če je f odvadljiva na (a, b), v krajišču a ima desni odvod in v krajišču b ima levi odvod.

DEFINICIJA: Naj bo funkcija f definirana na intervalu I in naj bo f odvedljiva vsaj v kakšni točki iz I. Označimo z

$$I' = \{x \in I : f \text{ je odvedljiva v točki } x\}$$

Funkcijo $f' : I' \to \mathbb{R}$ in je definirana s predpisom $x \mapsto f'(x)$ imenujemo *odvod* funkcije f.

DEFINICIJA: Naj bo funkcija f definirana na intervalu I.

Pravimo, da je f *zvezno odvedljiva* na I, če je f odvedljiva na I in je njen odvod f' zvezna funkcija na I.

DEFINICIJA: Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Pravimo, da je f *odsekoma zvezno odvedljiva*, če je odvedljiva povsod, razen v končno mnogo točkah $c_1, \ldots, c_k$, $a < c_1 < \cdots < c_k < b$ v katerih ima f levi in desni odvod, na vsakem podintervalu $[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_k, b]$, pa je f zvezno odvedljiva.

Primer: $f(x) = |x|$./

5.9 Diferencial

Naj bo f odvadljiva v točki a

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Velja:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h} = 0$$

Označimo števec $o(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$, kjer je $\lim_{h\to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0$.

Velja:
$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h)$$

Izpeljali smo, da je odvadljivo funkcijo v točki a v okolici točke a mogoče „dobro" aproksimirati z „linearno" funkcijo.

Definicija: Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a. Pravimo, da je f *diferenciabilna* v točki a, če obstaja linearna preslikava $\mathcal{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero velja
$$f(a+h) - f(a) = \mathcal{L}(h) + o(h)$$
kjer je $\lim_{h\to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0$. Linearno preslikavo $\mathcal{L}$ imenujemo *diferencial* funkcije f v a in jo označimo $df(a)$.

Opombe:

1. Če je f odvedljiva v točki a, potem je f diferenciabilna v točki a in $\mathcal{L}(h) = f'(a)h$.
2. Vse linearne preslikave $\mathcal{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so oblike $h \mapsto kh, k \in \mathbb{R}$.

Izrek: Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a. Potem je f diferenciabilna v točki a natanko tedaj, kadar je f odvedljiva v točki a. V tem primeru velja $df(a)h = f'(a)h$.

Dokaz:

($\Leftarrow$) že vemo

($\Rightarrow$) Po predpostavki obstaja $\mathcal{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linearna preslikava, da je
$$f(a+h) - f(a) = \mathcal{L}(h) + o(h)$$
kjer $\lim_{h\to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0$.
$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathcal{L}(h)}{h}$$

Ker je $\mathcal{L}$ linearna, obstaja $a \in \mathbb{R} : \mathcal{L}(h) = ah, \quad \forall h \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathcal{L}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - ah}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - a$$

Po pravilih za računanje z limitami torej obstaja $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ in je enaka a.

Zapis: Naj bo f odvedljiva v $x \quad h = \Delta x$.

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

kjer je $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$

Vemo $df(x)\Delta x = f'(x)\Delta x$. Vzamemo $f(x) = x \quad dx = \Delta x$. $df = f'dx \quad f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$.

5.10 Pravila za odvajanje

1. $f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

2. Če sta f in g odvedljivi funkciji v točki a, potem so tudi $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ odvedljive v točki a in velja

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Če je $g(a) \neq 0$, potem je $\frac{f}{g}$ odvedljiva v a in velja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

DOKAZ:

$$\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} = \\
&= \lim_{h\to a}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)}{h}+\lim_{h\to a}\frac{f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} g(a+h)\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+f(a)\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \\
&= g(a)f'(a)+f(a)g'(a)
\end{aligned}$$

POSLEDICA: Če je f odvedljiva v točki a in $\lambda \in \mathbb{R}$, potem velja

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

Dokaz z uporabo formule za produkt in $g(x) = \lambda$.

POSLEDICA: Če so funkcije $f_1, \dots, f_n$ odvedljive v točki a, potem velja

$$(f_1 f_2 \cdots f_n')(a) = f_1'(a)f_2(a)\dots f_n(a)+f_1(a)f_2'(a)f_3(a)\dots f_n(a)+\cdots+f_1(a)\dots f_n'(a)$$

Dokaz z indukcijo in formulo za produkt.

3. Odvod kompozituma

   Naj bo funkcija f odvedljiva v točki a in naj bo g odvedljiva v točki $f(a)$. Potem je $g \circ f$ odvedljiva v točki a in velja

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

   DOKAZ: Ker je f odvedljiva v točki a, je f diferenciabilna v točki a in velja:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o_f(h) \quad \text{kjer } \lim_{h\to 0}\frac{o_f(h)}{h} = 0 \tag{4}$$

   Podobno za g:

$$g(f(a)+k) = g(f(a)) + kg'(f(a)) + o_g(k) \quad \text{kjer } \lim_{k\to 0}\frac{o_g(k)}{k} = 0 \tag{5}$$

   Po definiciji velja:

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h}$$

Če razpišemo z zgornjima dvema enčabama dobimo:

$$g(f(a+h)) \overset{(4)}{=} g(f(a) + \underbrace{hf'(a) + o_f(h)}_{k}) \overset{(5)}{=}$$
$$= g(f(a)) + (hf'(a) + o_f(h)) + g'(f(a)) + o_g(k(h)) =$$
$$= g(f(a)) + hg'(f(a)) \cdot f'(a) + o_f(h)g'(f(a)) + o_g(k(h))$$

Sledi:

$$\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = g'(f(a))f'(a) + \underbrace{\frac{o_f(h)}{h}g'(f(a))}_{\overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0} + \frac{o_g(k(h))}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{o_g(k(h))}{h} = \lim_{k\to 0} \underbrace{\frac{o_g(k(h))}{k(h)}}_{\to 0} \underbrace{\frac{k(h)}{h}}_{\to f'(a)} = 0$$

ker:

$$\lim_{h\to 0} k(h) \lim_{h\to 0} \left(hf'(a) + \frac{o_f(h)h}{h} \right) = 0$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{k(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hf'(a) + o_f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(f'(a) + \frac{o_f(h)}{h} \right) = f'(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = g'(f(a)) \cdot f'(a) = (g \circ f)'(a)$$

□

Izrek: Naj bo f zvezna, strogo monotona na $[a,b]$, $c \in (a,b)$ in denimo, da je f odvedljiva v točki c. Če je $f'(c) \neq 0$, potem je inverzna funkcija f^{-1} odvedljiva v točki $f(c) = d$ in velja:

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}$$

Dokaz: Za strogo naraščajoče:

f^{-1} je zvezna na $[f(a), f(b)]$

$$\lim_{y\to d} \frac{\overbrace{f^{-1}(y)}^{x} - \overbrace{f^{-1}(d)}^{c}}{y-d} = \text{ker je } f^{-1} \text{ zvezna, gre } x \to c \text{, ko gre } y \to d$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{x-c}{f(x)-f(c)} = \lim_{x\to c} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x)}{x-c}} =$$

$$= \frac{1}{f'(c)}$$

Geometrijski pomen: graf f^{-1} dobimo z zrcaljenjem grafa f preko simetrale lihih kvadrantov. Če prezrcalimo premico preko simetrale lihih kvadrantov, je koeficient zrcaljenje premice obratna vrednost koeficienta dane premice.

Opomba: Če vemo, da je f^{-1} odveljiva, potem izpeljano formulo dobimo tudi takole:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$
$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$$
$$(f^{-1})'(\underbrace{f(x)}_{y}) = \frac{1}{x}$$
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

5.11 Odvodi elementarnih funkcij

- $f(x) = x^n$ Za $n \in \mathbb{N}$:

  $f'(x) = (xx \dots x)' = 1x^{n-1} + x1x^{n-1} + xx1x^{n-3} + \cdots + x^{n-1}1 = nx^{n-1}$

  Za cela števila nastavimo $f(x) = x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}$

  $$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

f	f'	Dokaz
c	0	po definiciji
x	1	po definiciji
x^n	nx^{n-1}	(1)
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$	(2)
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(\log_a x)'$ s prehodom na novo osnovo
a^x	$a^x \ln a$	(3)
e^x	e^x	Uporabimo pravilo za a^x
$\sin x$	$\cos x$	(4)
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, odvajamo kompozitum
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, odvajamo ulomek
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(5)
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Uporabimo zvezo $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	(6)

Tabela 2: Tabela odvodov

Za racionaln števila si najprej poglejmo $f(x) = x^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$. Če je n sod, je odvedljiva na $(0, \infty)$, če je n lih, je odvedljiva na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(f(x))^n = x$$
$$n(f(x))^{n-1} f'(x) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

$f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ lahko zapišemo kot:

$$f'(x) = \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)' =$$
$$= m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} =$$
$$= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

Če poznamo odvod potenčne funkcije, lahko naredimo še za realne eksponente. Naj bo $h(x) = x^r, \quad r \in \mathbb{R}, x > 0$:

$$x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \ln x}$$
$$(x^r)' = (e^{r \ln x})' = e^{r \ln x} r \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^{r-1}$$

- $\log_a x$

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log \dfrac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \log_a \lim_{h\to 0} \left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}\frac{\ln e}{\ln a} =$$

$$= \frac{1}{x \ln a}$$

- a^x je inverzna funkcija strogo monotone funkcije $\log_a x$, ki ima povsod neničelen odvod, zato je odvedljiva.

$$\log_a(a^x) = x$$
$$\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x^x}(a^x)' = 1$$
$$(a^x)' = (\ln a)a^x = a^x \ln a$$

- $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} =$$

$$\cos x$$

- $f(x) = \arcsin x$ je inverzna funkcija $\sin x|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$, ki je strogo monotona, odvedljiva z neničelnim odvodom na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Zato je arcsin odvedljiva na $(-1,1)$.

$$\sin(\arcsin x) = x$$
$$\cos(\arcsin x)(\arcsin x)' = 1$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $\arctan x$ je inverz zo"itve strogo naraščajoče odveljive funkcije $\tan x$ z neničelnim odvodm, zato je odvedljiva.

$$\tan(\arctan x) = x$$
$$\frac{1}{\cos^(\arctan x)}(\arctan x)' = 1$$
$$(\arctan x)' = \cos^x(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

5.12 Odvodi višjega reda

Denimo, da je f odvedljiva funkcija na intervalu I. Potem za $x \in I$ poznamo $f'(x)$, kar nam definira funkcijo:

$$f' : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

Če je funkcija f' odvedljiva na I, potem njen odvod označimo z f'' in imenujemo *drugi odvod* funkcije f na I.

Višje odvode definiramo induktivno. Torej, n-ti odvod funkicje f je odvod $(n-1)$-tega odvoda

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Oznake: Naj bo I (zaprti) interval:

- $C(I) = C^0(I)$ množica vseh zveznih funkcij na I.
- $C^1(I)$ množica vseh zvezno odveljivih funkcij na I, to so funkcije, ki so odveljive na I in je njihov odvod f' zvezna funkcija na I.
- $C^r(I)$ množica vseh r-krat zvezno odvedljivih funkcij na I, to so funkcije, ko so r-krat odvedljive in je $f^{(r)}$ zvezna funkcija na I.
- $C^\infty(I) = \bigcap_{r\in\mathbb{N}} C^r(I)$ neskončnokrat odvedljive funkcije

Vemo: $f, g \in C^r(I)$, potem $f+g, \lambda f \in C^r(I)$ za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$. Torej je $C^r(I)$ *vektorski prostor.*

Oglejmo si preslikavo:

$$D : f \mapsto f'$$
$$C^r(I) \to C^{r-1}(I)$$

TRDITEV: D je linearna preslikava

DOKAZ: Doma. Ni težak, še posebej če si v zadnjem mesecu bil/a prisoten na algebri.

OZNAKA:

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} \qquad\qquad D^k = \frac{d^k}{dx^k}$$

PRIMERI:

1. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad \widetilde{f} \in C(\mathbb{R})$$

Za $x \neq 0$:

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

Za $x = 0$:

$$\widetilde{f}'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\widetilde{f}(h) - \widetilde{f}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h}$$

ne obstaja.

$\Rightarrow \widetilde{f}$ v točki 0 ni odvedljiva. torej $\widetilde{f} \in C^1(I)$, če $0 \notin I$, sicer $\widetilde{f} \notin C^1(I)$.

2. $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Za $x \neq 0$:

$$g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Za $x = 0$:

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = 0$$

Torej:

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

g' je gotovo zvezna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. g' je zvezna v 0 $\iff$ $\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$.

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}(\underbrace{2x\sin\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{oscilira}}) \quad \text{ne obstaja}$$

g' ni zvezna v 0. Torej je g odvedljiva na $\mathbb{R}$, njen odvod g' pa ni zvezna funkcija na $\mathbb{R}$.

5.13 Rollov in Lagrageev izrek

DEFINICIJA: Naj bo $S \subset \mathbb{R}$ in naj bo $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Pravimo, da ima f v točki $c \in S$ *lokalni maksimum*, če:

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in S : |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \le f(c)$$

Funkcija f ima v točki $c \in S$ *lokalni minimum*, če:

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in S : |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \ge f(c)$$

Lokalni ekstrem je skupno ime za lokalni minimum in lokalni maksimum.

TRDITEV: Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $c \in (a, b)$. Če je c lokalni ekstrem od f, potem velja

$$f'(c) = 0$$

DOKAZ: Recimo, da je c lokalni maksimum. Poglejmo si sekante skozi $(c, f(c))$. Vzemimo δ iz definicije lokalnega maksimuma. Potem velja

$$|x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \le f(c)$$

Ločimo primera:

- $x > c$
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0 \tag{*}$$
- $x < c$
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0 \tag{**}$$

Poglejmo si odvod:

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Iz (*) sledi:

$$\lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Iz (**) sledi:

$$\lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Torej velja $f'(c) = 0$.

Definicija: Naj bo funkcija f odvedljiva na intervalu I. Če je za nek $c \in I$ $f'(c) = 0$, imenujemo c *stacionarna točka* funckija f.

Trditev pove, da so lokalni ekstremi stacionarne točke funkcije f.

Rollov izrek: Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, odvedljiva na (a, b) in $f(a) = f(b)$. Potem obstaja $c \in (a, b)$, da velja $f'(c) = 0$.

Dokaz: Ker je f zvezna na $[a, b]$ doseže minimum in maksimum. Označimo z $x_m \in [a, b]$ točke, v katerih doseže minimum in z $x_M \in [a, b]$ točke v katerih doseže maksimum.

- Če je $f(x_m) = f(x_M)$, potem je f konstanta, zato je $f' \equiv 0$.
- Če je $f(x_m) \neq f(x_M)$:

  Ker je $f(a) = f(b)$, vsaj ena od točk x_m, x_M ni krajišče intervala $[a, b]$. Označimo jo s c. V c je dosežen lokalni ekstrem, zato je po prejšnji trditvi $f'(c) = 0$.

Lagrangeev izrek: Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, odvedljiva na (a, b). Potem obstaja tak $c \in (a, b)$, da velja

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Opomba: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Dokaz: Definirajmo $F(x) = f(x) - f(a) + d(x - a)$ Funkcija F je zvezna na $[a, b]$, odvedljiva na (a, b).

d določimo tako, da bo veljalo $F(a) = F(b)$

$$F(a) = 0, \quad F(b) = f(b) - f(a) + d(b - a)$$

$$d = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Funkcija F ustreza pogojem Rollovega izreka, zato obstaja $c \in (a,b) : F'(c) = 0$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) + d \\ f'(c) + d &= 0 \\ f'(c) = -d &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

$\square$

Opomba: $a = x, \quad b = x + h$. Če $c \in (a,b)$, potem obstaja $\vartheta \in (0,1)$, tako da $c = x + \vartheta h$. V tem primerju velja

$$f(x+h) - f(x) = f'(x + \vartheta h)h$$

za nek $\vartheta \in (0,1)$

POSLEDICA: Naj bo f odvedljiva funkcija na intervalu I. Tedaj velja:

(i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f$ naraščajoča na I

(ii) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \iff f$ padajoča na I

(iii) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ strogo naraščajoča na I

(iv) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ strogo padajoča na I

Opomba: $f(x) = x^3$ strogo naraščajoča na $\mathbb{R}$, vendar $f'(0) = 0$.

DOKAZ:

(i) ($\Rightarrow$) denimo, da $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$. Dokazujemo f je naraščajoča na I
Izberemo $a, b \in I, a < b$ in dokazujemo $f(a) \leq f(b)$. Ker je f zvezna na $[a,b]$ in odvedljiva na (a,b), izpolnjuje pogoje za Lagrangeev izrek. Torej velja

$$\exists c \in (a,b) : f(b) - f(a) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(b-a)}_{>0} \Rightarrow f(b) \geq f(a)$$

($\Leftarrow$) Denimo, da je f naraščajoča na I.

$$x \in I : f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Če je x notranja točka, ločimo primera:

$h > 0$ in dovolj majhen, da $x + h \in I$:

$$f(x+h) - f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

$h < 0$ in dovolj majhen, da $x + h \in I$:

$$f(x+h) - f(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0.$ □

Ostalo se dokaže po istem kopitu, tako da je za DN.

Posledica: Če za odvedljivo funkcijo f na intervalu I velja $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$, potem je f konstanta.

Opombe:

- Vemo že, da je $(c)' = 0$
-

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 2 & x \in [2,3] \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ za vse $x \in [0,1] \cup [2,3]$

Posledica: Naj bo $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zvezvna funkcija $c \in (a,b)$ in naj bo f odvedljiva na $(a,b) \cup (c,b)$.

(i) Če je $f'(x) \leq 0$ za vse $x \in (a,b)$ in $f'(x) \geq 0$ za vse $x \in (c,b)$, potem ima f v točki c minimum.

(ii) Če je $f'(x) \geq 0$ za vse $x \in (a,b)$ in $f'(x) \leq 0$ za vse $x \in (c,b)$, potem ima f v točki c maksimum.

Dokaz:

(i) Vemo, da je f padajoča na (a,c) in naraščajoča na (c,b). f je zvezna v c. Izberimo poljubno naraščajoče zaporedje $y_n \uparrow c$.

Če $y_n \geq x$ za vse $n : f(x) \geq f(y_n)$.

Sledi: $f(x) \geq f(c)$ velja $\forall x < c$.

Simetrično na desni: $x > c \Rightarrow f(x) \geq f(c)$

$\Rightarrow f$ ima v c minimum.

(ii) Podobno

$\square$

POSLEDICA: Naj bo $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in $c \in (a,b)$ stacionarna točka funkcije f.

(i) Če obstaja $\delta > 0$ za katerega velja

$$\begin{aligned} f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c) \quad \wedge \\ f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (c, c+\delta) \end{aligned}$$

potem ima f v c lokalni minimum.

(ii) Če obstaja $\delta > 0$, za katerega velja

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c) \quad \wedge \\ f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (c, c+\delta) \end{aligned}$$

potem ime f v c lokalni maksimum.

(iii) Če obstaja $\delta > 0$, da velja bodisi $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$, bodisi $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$, potem f' v točki c nima lokalnega ekstrema.

5.14 Iskanje ekstremov odvedljive funkcije na $[a,b]$

- Določimo stacionarne točke $x_1, x_2, \ldots, x_k$
- Izračunamo vrednosti $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)$ in $f(a), f(b)$
- Določimo najmanjšo in največjo vrednost

Če funkcija f ni povsod odvedljiva na $[a,b]$, potem med kandidate za ekstrem dodaamo še točke v katerih f ni odvedljiva.

Pri obravnavanju lokalnih ekstremov analiziramo predznak odvoda.

Primer: Določi lokalne ektreme

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1$$
$$f'(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x = x(x-1)^2(x+1)$$

Stacionarne točke so: $-1, 0, 1$. Če se narišemo skico predznaka $f'(x)$ vidimo:

- V -1 je lokalni maksimum
- V 0 je lokalni minimum
- V 1 nima lokalnega ekstrema

Trditev: Denimo, da je f dvakrat odvedljiva v okolici točke a in denimo, da je a stacionarna točka od f.

(i) Če je $f''(x) \leq 0$ za vse x v neki okolici točke a, potem ima f v a lokalni maksimum.

(ii) Če je $f''(x) \geq 0$ za vse x v neki okolici točke a, potem ima f v a lokalni minimum.

Dokaz:

(i) $f''(x) \leq 0$ za $x \in (a-\delta, a+\delta)$, zato je f' padajoča na $(a-\delta, a+\delta)$. Vemo tudi, da je $f'(a) = 0$, ker je a stacionarna točka. Sledi:

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad & \forall x \in (a-\delta, a) \quad \wedge \\ f'(x) \leq 0 \quad & \forall x \in (a, a+\delta) \end{aligned}$$

Po posledici ima f v a lokalni maksimum.

(ii) Podobno

Posledica: Naj bo$f$ dvakrat odvedljiva v okolkici točke a in f'' zvezna v točki a, ter naj bo a stacionarna to'cka od f. Velja:

(i) Če je $f''(a) < 0$, potem ima f v a lokalni maksimum.

(ii) Če je $f''(a) > 0$, potem ima f v a loklani minimum.

Dokaz: Če je $f''(a) < 0$, zaradi zveznosti f'' v a velja $f''(x) < 0$ za vse x v neki okolici točke a. Nato uporabimo trditev.

Trditev: Naj bo f odvedljiva na $[a, b]$.

(i) Če je $f'(a) > 0$, potem ima f v a lokalni minimum.

(ii) Če je $f'(a) < 0$, potem ima f v a lokalni maksimum.

(iii) Če je $f'(b) > 0$, potem ima f v b lokalni maksimum.

(iv) Če je $f'(b) < 0$, potem ima f v b lokalni minimum.

Opomba: Strogi enačaj je zato, ker če $f'(a) = 0$, se lahko funkcija „obrne" v katerokoli smer.

5.15 Konveksnost in konkavnost

Definicija: Naj bo funkcija f definirana na intervalu I. Pravimo, da je f *konveksna* na I, če velja:

$$\forall a, b \in I, a < b \forall x \in [a, b] : f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (*)$$

Geometrijsko: $\forall a, b \in I, a < b$ graf funkcije f na $[a, b]$ leži pod daljico skozi $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

Če pišemo $t = \dfrac{x - a}{b - a}$: ko $x \in [a, b]$ bo $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} x - a =& t(b - a) \\ x =& (1 - t)a + tb \end{aligned}$$

(*) se prepiše v

$$f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$$

za vse $t \in [0, 1]$.

Definicija: Naj bo f definirana na intervalu I. Pravimo, da je f *konkavna* na$I$, če

$$\forall a, b \in I, a < b \forall x \in [a, b] : f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Geometrijsko: $\forall a, b \in I, a < b$ graf funkcija f na $[a, b]$ leži nad daljico skozi $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

Opomba: Velja: f konveksna $\iff$ $-f$ konkavna.

Izrek: Naj bo f odvedljiva funkcija na intervalu I. Potem je f konveksna natanko tedaj, kadar velja

$$\forall a, x \in I : f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) \tag{*}$$

Opomba: Graf funkcije leži nad tangento v poljubni točki iz I.

Dokaz:

($\Rightarrow$) Denimo, da je f konveksna na I. Izberemo poljubni $a, x \in I$. Če je $a = x$, ocean (*) velja. Če $a \neq x$, velja

$$f(y) \leq f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(y - a)$$

za vse y med a in x.

$$f(y) - f(a) \leq (f(x) - f(a))\frac{y - a}{x - a}$$

$$\underbrace{\frac{f(y) - f(a)}{y - a}}_{f'(a) \text{ ko gre } y \text{ proti } a}\ (x - a) \leq f(x) - f(a)$$

$$f'(a)(x - a) \leq f(x) - f(a)$$

($\Leftarrow$) Denimo, da je $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ za vse $a, x \in I$. Izberemo $a, b \in I, a < b$ in $x \in (a, b)$. Potem točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$ ležita nad tangento na graf v točki $(x, f(x))$.

$$f(a) \geq f(x) + f'(x)(a - x) \quad / \underbrace{(b - x)}_{>0}$$

$$f(b) \geq f(x) + f'(x)(b - x) \quad / - \underbrace{(a - x)}_{<0}$$

$$f(a)(b - x) - f(b)(a - x) \geq f(x)(b - x - (a - x))$$

$$f(x) \leq \frac{1}{b - a}(f(a)(b - a) + f(a)(a - x) - f(b)(a - x))$$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

za vse $x \in (a, b)$

$\square$

Izrek: Naj bo f odvedljiva funkcija na intervalu I. Potem je f konveksna natanko tedaj, kadar je f' naraščajoča na I.

Če je f dvakrat odvedljiva na intervalu I, potem je f konveksna na I natanko tedaj, kadar velja

$$\forall x \in I : f''(x) \geq 0$$

Dokaz: Dovolj je dokazati prvo ekvivalenco, saj druga sledi iz prve z uporabo izreka o tem, kdaj je funkcija naraščajoča.

($\Rightarrow$) Denimo, da je f konveksna na I. Dokazujemo, da je f' naraščajoča funkcija na I.

$a, b \in I, a < b \Rightarrow f'(a) \leq f'(b)$

Za krajišče a velja:

$$f(x) \leq f(a) + \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{k}(x - a) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$f(x) \leq f(a) + k(x - a) \Rightarrow f(x) - f(a) \leq k(x - a)$$

Podobno velja za krajišče b:

$$f(x) \leq f(b) + k(x - b) \Rightarrow f(x) - f(b) \leq k(x - b)$$

Iz tega sledi:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq k \text{ ko pošljemo } x \text{ proti } a \text{ dobimo } f'(a) \leq k$$

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq k \text{ ko pošljemo } x \text{ proti } b \text{ dobimo } f'(b) \geq k$$

Sledi:

$$f'(a) \leq k \leq f'(b) \Rightarrow f'(a) \leq f'(b)$$

($\Leftarrow$) Denimo, da je f' naraščajoča funkcija na I. Izberemo $a, x \in I, a < x$. Po Lagrangeevem izreku za f na $[a, x]$ obstaja $c \in (a, x)$, da velja:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ker je f' naraščajoča, velja $f'(a) \leq f'(c)$. Iz tega sledi:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\geq f'(a)(x-a) \\ f(x) &\geq f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{(enačba tangente skozi točko } a\text{)} \end{aligned}$$

Podobno lahko naredimo za $a > x$. Po prejšnjem izreku je f konveksna.

□

DEFINICIJA: Naj bo funkcija f definirana na intervalu I. Če za točko $a \in I$ obstaja taka okolica, da je na eni strani točke a funkcija konveksna in na drugi strani konkavna, potem ima f v točki a *prevoj*.

PRIMER: Natančno nariši graf funkcija $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$.

Določimo:

- D_f, ničle, simetrija (sodost, lihost), periodičnost
- prvi odvod (intervali naraščanja in padanja, lokalni ekstremi)
- obnašanje na robovih D_f (limite, asimptote)
- drugi odvod (intervali konveksnosti in konkavnosti, prevoji)

Opomba: Drugi odvod je drugotnega pomena.

Poračunati in narisata znaš verjetno sam/a. Če ne, pridi kdaj na vaje.

5.16 L'Hôpitalovi izreki

LEMA: (posplošeni Lagrangeev izrek)

Naj bosta f in g zvezni funkciji na $[a, b]$, odvedljivi na (a, b). Denimo, da je $g'(x) \neq 0$ za vse $x \in (a, b)$. Potem obstaja $c \in (a, b)$, da velja

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Opomba: Če za g vzamemo funkcijo $g(x) = x$, dobimo Lagrangeev izrek.

Dokaz: Velja $g(b)-g(a) \neq 0$, ker po Lagrangeevem izreku obstaja $d \in (a,b)$, da velja

$$g(b)-g(a) = \underbrace{g'(d)}_{\neq 0}\underbrace{(b-a)}_{\neq 0}$$

Označimo $k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ in definiramo funkcijo:

$$F(x) = f(x) - f(a) - k(g(x) - g(a))$$

F je zvezna na $[a,b]$ in odveljiva na (a,b). Velja $F(a) = 0, \quad F(b) = 0$. Po Rollovem izreku za F obstaja $c \in (a,b) : F'(c) = 0$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) - kg'(x) \\ f'(c) - kg'(c) &= 0 \\ k &= \frac{f'(c)}{g'(c)} \end{aligned}$$

$\square$

Izrek (L'Hôpitalovo pravilo) Naj bosta f in g odvedljivi funkciji na (a,b). Denimo da velja

(i) $g(x) \neq 0, \quad g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a,b)$

(ii) $\lim_{x \downarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$

Če obstaja limitia $\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja $\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in velja

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Opombe:

1. Če sta oba odvoda f' in g' v točki a definirana in zvezna, potem velja

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

2. Število b je lahko blizu a.

3. Analogen izrek velja za leve in obojestranske limite.

Primera:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos 2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=\cdots=2$$

Dokaz: Definiramo $f(a)=g(a)=0$: f in g sta na $[a,b)$ zvezni funkciji in odvedljivi na (a,b).

Izberemo poljuben $x\in(a,b)$. f in g sta zvezni na $[a,x]$ in odvedljivi na (a,x). Po lemi (posplošen Lagrangeev izrek) obstaja točka $c_x\in(a,x)$, za katero velja

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Denimo, da je $L=\lim_{x\downarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dokazujemo $\lim_{x\downarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

Izberemo $\varepsilon>0$. Obstaja $\delta>0:\frac{f'(x)}{g'(x)}\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ za vse $x\in(a,a+\delta)$.

Za $x\in(a,a+\delta)$ velja $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}=L$ za nek $c_x\in(a,x)\Rightarrow c_x\in(a,a+\delta)$.

Izrek: Naj bosta f in g odvedljivi funkciji na (a,b) in $g'(x)\neq 0$ za vsak $x\in(a,b)$ in naj bo $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$. Če obstaja $\lim_{x\downarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja $\lim_{x\downarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}$ in velja
$$\lim_{x\downarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\downarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Opombe:

- Izrek velja tudi za leve in obojestranske limite.
- Uporaba je smiselna npr. v primeru $\lim_{x\downarrow a}f(x)=\pm\infty$.

Dokaz: Denimo, da $\lim_{x\downarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ obstaja. Za poljuben $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$ da velja

$$\forall x\in(a,a+\delta):L-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<L+\varepsilon$$

Izberimo poljuben $x \in (a, a+\delta)$. Uporabimo lemo na intervalu $[x, a+\delta)$ in velja

$$\frac{f(x) - f(a+\delta)}{g(x) - g(a+\delta)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

za nek $c \in (x, a+\delta)$. Sledi:

$$L - \varepsilon < \frac{f(x) - f(a+\delta)}{g(x) - g(a+\delta)} < L + \varepsilon$$

za vsak $x \in (a, a+\delta)$. Ker je $\lim_{x \downarrow a} g(x) = \infty$, velja

$$g(x) > 0$$
$$g(x) - g(a+\delta) > 0$$

zas vse x dovolj blizu a. Neenakost pomnožimo z $\frac{g(x)-g(a+\delta)}{g(x)}$

$$(L-\varepsilon)\left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right) < \frac{f(x) - f(a+\delta)}{g(x)} < (L+\varepsilon)\left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right)$$

$$\underbrace{(L-\varepsilon)\left(1 - \underbrace{\frac{g(a+\delta)}{g(x)}}_{\to 0}\right) + \underbrace{\frac{f(a+\delta)}{g(x)}}_{\to 0}}_{\to L-\varepsilon} < \frac{f(x)}{g(x)} < \underbrace{(L+\varepsilon)\left(1 - \underbrace{\frac{g(a+\delta)}{g(x)}}_{\to 0}\right) + \underbrace{\frac{f(a+\delta)}{g(x)}}_{\to 0}}_{\to L+\varepsilon}$$

Ker je limita leve strani neenačbe $L - \varepsilon$, se nahaja na $(L - 2\varepsilon, L)$ za vse $x \in (a, a+\delta')$. Podobno lahko rečemo, da ker je limita desne strani neenačbe $L + \varepsilon$, se desna stran nahaja na $(L, L+2\varepsilon)$ za vse $x \in (a, \delta'')$. Zato se $\frac{f(x)}{g(x)}$ nahaja na intervalu $(L - 2\varepsilon, L + 2\varepsilon)$ za $x \in (a, a+\delta') \cap (a, a+\delta'')$.

Posledica: Naj bosta f in g odvedljivi funkciji na (M, ∞) za nek $M \in \mathbb{R}$. Denimo, da $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ za vse $x \in (M, \infty)$. Naj bo $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Če obstaja $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ in velja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dokaz: Definiramo

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$$

Vzamemo $M > 0$: F in G sta definirani na $\left(0, \frac{1}{M}\right)$. Izrek velja za F in G, ko $t \downarrow 0$. Takrat gre $\frac{1}{t} \to \infty$.

$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Po L.P. velja

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{F'(t)}{G(t)}$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

□

Podobna posledica velja za drugi izrek.

Kdaj uporabljamo L'Hôpitalovo pravilo?

- $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ (če so izpolnjeni pogoji v izreku)
- $$0\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$
  $$0\infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

5.17 Uporaba odvoda v geometriji

5.17.1 Podajanje krivulj

V kartezičnem koordinatnem sistemu:

1. **Eksplicitno:** Krivulja K je dana kot graf funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, torej

$$K = \Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

2. **Implicitno:** Krivulja K je dana kot množica rešitev enačbe $g(x, y) = 0$, kjer je $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana funkcija

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

Primer: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ (enotska krožnica)

3. **Parametrično:** Krivulja K je dana kot množica točk (x, y), ki so dolo'cene z $x = \alpha(t), y = \beta(t)$, kjer sta $\alpha, \beta : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ funkciji.

$$K = \{(\alpha(t), \beta(t)) : t \in [t_0, t_1]\}$$

$t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$ je *vektorska funkcija.*

Implicitni način podajanja krivulj je bolj splošen od eksplicitnega.

Primeri:

1. enotska krožnica $x^2 + y^2 = 1$. Parametrično:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin t \\ x^2(t) + y^2(t) &= 1 \end{aligned}$$

2. Elipsa $\underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{a^2}}_{\cos^2 t} + \underbrace{\frac{(y - y_0)^2}{b^2}}_{\sin^2 t} = 1$

Parametrično:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a \cos t \\ y &= y_0 + b \sin t \end{aligned}$$

3. Še dva primera kjer smo veliko risali (na enem smo se naučili risati grafe parametričnih krivulj). Veliko risanja pomeni, da si poglej zvezek.

V polarnem koordinatnem sistemu:

Krivulja K je podana kot množica točk s polarnima koordinatama (r, φ), kjer je $r = h(\varphi)$, kjer je $h : [\varphi_0, \varphi_1] \to \mathbb{R}$ realna funkcija.

Primera:

1. $h(\varphi) = c$, kjer je $c \in \mathbb{R}$. Če narišes pride krožnica.
2. $h(\varphi) = k\varphi, k > 0$. Če narišes pride spirala.

Definicija: *Pot v ravnini* je preslikava $F = (\alpha, \beta) : I \to \mathbb{R}^2$, kjer je I interval, α in β pa zvezni funkciji na I.

Tir poti je množica

$$C = F(I) = \{F(t) : t \in I\}$$

F imenujemo *parametrizacija* krivulje C. Isto krivuljo C lahko podamo z razli'cnimi parametrizacijami.

Definicija: Pot $F = (\alpha, \beta) : I \to \mathbb{R}^2$ je odvedljiva, če sta α in β odvedljivi na I. Pot F je razred C^1 (zvezno odvedljiva), če sta α in β razreda C^1.

Opomba: Preslikava F je zvezna, oziroma α in β sta zvezni.

Če je F odvedljiva pot:

$$\dot{F}(t) = (\dot{\alpha}(t)\dot{\beta}(t))$$

Izrek: Naj bo $F : I \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot, $t_0 \in I$ in denimo, da je $\dot{F}(t_0) = (\alpha(\dot{t_0}), \beta(\dot{t_0})) \neq 0$. Če je $\alpha(\dot{t_0}) \neq 0$, potem obstaja tak $\delta > 0$, da lahko krivuljo

$$K = \{F(t) : |t - t_0| < \delta\}$$

zapišemo kot graf neke odvedljive funkcije $y = f(x)$ med intervalom U okrog točke $x_0 = \alpha(t_0)$:

$$K = \{(x, f(x)) : x \in U\}$$

in velja

$$f'(\alpha(t)) = \frac{\dot{\beta}(t)}{\dot{\alpha}(t)}$$

za vse $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

Dokaz: Denimo, da je $\dot{\alpha}(t_0) > 0$.

Ker je $\dot{\alpha}$ zvezna funkcija, je $\dot{\alpha} > 0$ na neki okolici t_0, zato je α na neki okolici t_0 strogo naraščajoča funkcija

Zato obstaja $\delta > 0$, da α preslika interval $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ bijektivno v $(\alpha(t_0 - \delta), \alpha(t_0 + \delta)) =: U$.

Potem ima α inverzno funkcijo $\alpha^{-1} : U \to (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, ki je odvedljiva. Definiramo

$$f(x) = \beta(\alpha^{-1}(x)), \quad x \in U$$

Velja:
$$(x, f(x)) = (\alpha(t), \beta(\alpha^{-1}(\alpha(t))) = (\alpha(t), \beta(t))$$
za $x \in U$. Torej velja
$$f'(x) = \beta'(\alpha^{-1}(x))\frac{1}{\alpha'(\alpha^{-1}(x))}$$
kjer je $x = \alpha(t)$.

$\square$

Posledica: Naj bosta α in β dvakrat odvedljivi na (t_0, t_1). Denimo, da je $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ za vse $t \in (t_0, t_1)$. Potem je funkcija f iz izreka dvakrat odvedljiva in velja:
$$f''(\alpha(t)) = \frac{\dot{\alpha}(t)\ddot{\beta}(t) - \ddot{\alpha}(t)\dot{\beta}(t)}{(\dot{\alpha}(t))^3}$$

Dokaz: Velja $f'(\alpha(t)) = \frac{\dot{\beta}(t)}{\dot{\alpha}(t)}$. f je dvakrat odvedljiva, ker je kompozitum dvakrat odvedljivih funkcij.
$$f''(\alpha(t))\dot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)\ddot{\beta}(t) - \ddot{\alpha}(t)\dot{\beta}(t)}{(\dot{\alpha}(t))^2}$$

$\square$

Definicija: Naj bo $F : I \to \mathbb{R}^2$ odvedljiva pot

(i) Če za nek $t \in I$ velja $\dot{F}(t) = 0$, potem t imenujemo *kritična točka* preslikave F.

(ii) Če za nek $t \in I$ velja $\dot{F}(t) \neq 0$, potem t imenujemo *regularna točka* preslikave F.

(iii) Če so vse točke $t \in I$ regularne, potem F imenujemo *regularna parametrizacija* gladkega tira poti F.

Naj bo $F : I \to \mathbb{R}^2$ odvedljiva pot v ravnini in naj bo t regularna točka od F. Potem je $\dot{F}(t)$ smerni vektor tangente skozi točko $F(t)$ in enačba tangente je
$$\vec{r} = r_F\vec{(t)} + s\dot{F}(t)$$
v vektorski obliki. V parametrični obliki je enačba smernega vektorja
$$x = \alpha(t) + s\dot{\alpha}(t)$$
$$y = \beta(t) + s\dot{\beta}(t)$$

V segmenti obliki je to

$$(x-\alpha(t))\dot{\beta}(t)-(y-\beta(t))\dot{\alpha}(t)=0$$

ali

$$\frac{x-\alpha(t)}{\dot{\alpha}(t)}=\frac{y-\beta(t)}{\dot{\beta}(t)}$$

V regularni točki je smerni vektor normale $(-\dot{\beta}(t),\dot{\alpha}(t))$. Enačba normale je torej

$$(x-\alpha(t))\dot{\alpha}(t)+(y-\beta(t))\dot{\beta}(t)=0$$

Trditev: Tangenta je odvisna samo od tira poti, ni pa odvisna od izbire regularne parametrizacije.

Dokaz: Denimo, da je t_2 regularna točka parametrizacije $F=(\alpha,\beta)$ in da je s_2 regularna točka parametrizacije $G=(\alpha_1,\beta_1)$ in da velja $F(t_2)=G(s_2)$. Naj bo $\alpha'(t_2)\neq 0$. Potem obstaja odvedljiva funkcija φ v okolici s_2 za katero velja

$$\varphi(s_2)=t_2,\quad \varphi'(s_2)\neq 0$$

Funkcijo definiramo kot

$$\varphi=\alpha^{-1}\circ\alpha_1$$

Smerna koeficienta tangent sta

$$(\dot{\alpha}(t_2),\dot{\beta}(t_2))$$
$$(\dot{\alpha_1}(s_2),\dot{\beta_1}(s_2))$$

Parametrizacijo G lahko zapišemo kot $G=F\circ\varphi$. Potem velja

$$(\alpha_1,\beta_1)=(\alpha\circ\varphi,\beta\circ\varphi)$$
$$(\dot{\alpha_1}(s_2),\dot{\beta_1}(s_2))=(\dot{\alpha}(t_2)\varphi'(s_2),\dot{\beta}(t_2)\varphi'(s_2))=\underbrace{\varphi'(s_2)}_{\neq 0}(\dot{\alpha}(t_2),\dot{\beta}(t_2))$$

Ker sta vektorja kolinearna, določata isto premico.

5.18 Integral

5.18.1 Primitivna funkcija in nedoločen integral

Motivacija: Vsaka odvedljiva funkcija f na intervalu I določa funkcijo f' na I. Denimo, da poznamo f'. Kako dobimo f? Ali je vsaka funkcija g na I odvod neke funkcije?

Definicija: Naj bo funckija f definirana na množici $I \subset \mathbb{R}$. Če obstaja odvedljiva funkcija $F : I \to \mathbb{R}$, za katero velja $F' = f$ na I, potem jo imenujemo *primitivna funkcija* od f.

Primer: $f(x) = x$ na $\mathbb{R}$

$F(x) = \frac{1}{x}x^2$ je primitivna funkcija od f.

$G(x) = \frac{1}{x}x^2 + 100$ je primitivna funkcija od f.

Lema: Naj bo f funkcija definirana na intervalu I.

1. Če je F primitivna funkcija od f na I, potem je za vsak $c \in \mathbb{R}$ tudi funkcija $G(x) = F(x) + c$ primitivna funkcija od f.

2. Če sta F in G primitivni funkciji od f na intervalu I, potem obstaja $c \in \mathbb{R}$, da velja
$$\forall x \in I : G(x) = F(x) + c$$

Dokaz:

1. $F' = f$ po definiciji

   $G' = F' = f$

2. $h(x) = F(x) - G(x)$ je odvedljiva funkcija na intervalu I.
$$h'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$$
   Zato je h konstanta funkcija.

□

Definicija: *Nedoločen integral* funkcije f je skupek vseh njenih primitivnih funkcij. Označimo ga s
$$\int f(x)dx$$
Funkcijo f imenujemo *integrand*.

Primer:
$$\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \ln|x| + c_1 & x > 0 \\ \ln|x| + c_2 & x < 0 \end{cases}$$

Primer:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x \leq 0 \\ -1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

f nima primitivne funkcije na $(-1, 1)$

Denimo, da je F primitivna funkcija od f na $(-1, 1)$. Torej je $F'(x) = f(x)$ za vse $x \in (-1, 1)$. Naj bo $a \in (0, 1)$. Potem je F odvedljiva funkcija na $[-a, a]$, zatoje F zvezna na $[-a, a]$ in zato doseže maksimum.

- F nima stacionarne točke.
- $F'(-a) = f(-a) = 1$, zato v $-a$ ni dosežen maksimum
- $F'(a) = f(a) = -1$, zato v a ni dosežen maksimum.

$\rightarrow\leftarrow$

Opomba: Funkcija f ni zvezna. Dokazali bomo, da ima vsaka zvezna funkcija primitivno funkcijo.

Tabela osnovnih integralov:

Funkcija	**Primitivna funkcija**
x^n	$\frac{x^n+1}{n+1}, \quad n \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1})$

5.18.2 Pravila za integriranje

Trditev: Za poljubni funkciji f in g, ki imata primitivni funkcija na intervalu I velja

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
2. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Dokaz: $F' = f$ in $G' = g$, potem velja $(F+G)' = f + g$

Podobno za množenje s konstantno.

$\square$

Trditev: Če je F odvedljiva funkcija na I, potem velja

$$\int F'(x)dx = F(x) + c$$

Dokaz: Po definiciji primitivne funkcije.

Opomba: F je primitivna funkcija do$f$ na I, če je F odvedljiva in velja $F' = f$ na I. Denimo, da je F primitivna funkcija od f.

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$
$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Trditev: (uvedba nove spremenljivke)

Naj bo funkcija g odvedljiva na intervalu I. Naj ima funkcija f primitivno funkcijo F, definirano na $g(I) = \{g(x) : x \in I\}$. Potem je $F \circ g$ primitivna funkcija od $(f \circ g)g'$ na intervalu I. Torej:

$$\int (f \circ g)(x)g'(x)dx = F(g(x)) + C, \quad x \in I$$

Opomba: Če označimo $t = g(x)$, dobimo:

$$dt = g'(x)dx$$
$$\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\underbrace{g'(x)dx}_{dt} = \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

Dokaz: $F \circ g$ je odvedljivak, ker je kompozitum odvedljivih

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) = (f \circ g)g'$$

$\square$

Trditev: (integriranje po delih - per partes)

Naj bosta f in g odvedljivi funkciji na I. Potem velja

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx, \quad x \in I$$

Če označimo $u = f(x)$ in $v = g(x)$, potem velja

$$\int udv = uv - \int vdu$$

DOKAZ:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Zato je fg primitivna funkcija od $f'g + fg'$ in zato formula velja.

5.18.3 Določeni integral

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nenegativna funkcija. Potem graf funkcije f omejuje območje A nad intervalom $[a, b]$: A je navzgor omejeno z Γ_f, navzdol z abscisno osjo, na levi s premico $x = a$ in na desni s premico $x = b$.

Če je f konstanta, znamo izračunat ploščino, ki jo določa.

V splošnem:

- Interval $[a, b]$ razdelimo na podintervali in na vsakem podintervalu funkcijo f zamenjamo s primerno konstanto.
- Ne vemo kako dobra je aproksimacija.
- Če namesto poljubne točke na grafu na vsakem podintervalu izberemo točki, va keterih je dosežen infimum f oziroma supremum f, dobimo zgornjo mejo in spodnjo mejo za ploščino A.

PRIMER: $f(x) = x^2$ izračunaj ploščino pod grafom na $[0, 1]$.

Interval $[0, 1]$ razdelimo na n enakih delov (*ekvidistančna delitev*).

Zgornja meja ploščine lika

$$\begin{aligned}
\sup A &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}1^2 = \\
&= \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Spodnja meja ploščine lika

$$\begin{aligned}\inf A = \frac{1}{n}0 + \frac{1}{n}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \\ = \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2) = \\ = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Riemannov integral

Definicija: Naj bo $[a, b]$ dan interval. *Delitev* D intervala $[a, b]$ je množica $\{x_1, x_1, \ldots, x_n\}$ *delilnih točk*, za katere velja:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

in $n \in \mathbb{N}$. Dolžino i-tega intervala $[x_{i-1}, x_i]$ označimo z $\delta_i = x_i - x_{i-1}$.

Velikost delitve D je dolžina najdaljšega podintervala v delitvi D

$$\delta(D) = \max\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$$

Na vsakem podintervalu izberemo *testno točko* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ in z

$$T_D = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$$

označimo nabor testnih točk. Denimo, da je nabor testnih točk T_D *usklajen* z delitvijo D, ker smo na vsakem podintervalu delitve D izbrali eno testno točko.

Reimannova vsota funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, pridružena delitvi D in usklajeni izbiri testnih točk T_D je

$$R(f, D, T_D) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k f(t_k)$$

Opomba: Pričakujemo, da Riemannove vsote bolje aproksimirajo prloščino, če je $\delta(D)$ manjši.

Definicija: Riemannov itnegral ali določeni integral funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je limita Rimeannove vsote, kjer limito vzamemo po vseh delitvah D zaprtega intervala $[a,b]$ in po vseh usklajenih izbirah testnih točk T_D, ko gre δ_D proti 0, če ta limita obstaja. Pišemo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{D,T_D \\ \delta(D)\to 0}} R(f,D,T_D)$$

Torej: $I = \lim_{\substack{D,T_D \\ \delta(D)\to 0}} R(f,D,T_D)$ pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vse delitve D, kjer $\delta(D) < \delta$ in vsako usklajeno izbiro testnih točk T_D velja

$$|R(f,D,T_D) - I| < \varepsilon$$

Če Riemannov integral f na $[a,b]$ obstaja, pravimo, da je f na $[a,b]$ *Riemannovo integrabilna.*

TRDITEV: Če je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemannovo integrabilna, potem je f omejena.

DOKAZ: Denimo, da je f Riemannovo integrabilna in da ni omejena.

Po definiciji integrabilnosti obstaja $I \in \mathbb{R}$, da za vsak $\varepsilon > 0$, obstaja $\delta > 0$ da za vsako delitev D, kjer je $\delta(D) < \delta$ in za vsako usklajeno izbiro testnih točk T_D, velja $|R(f,D,T_D) - I| < \varepsilon$. Torej obstaja I, da za $\varepsilon = 1$ obstaja $\delta > 0$.

Naj bo delitev D taka, da je $\delta(D) < \delta$. Obstaja podinterval $[x_{i-1}, x]$, na katerem je f neomejena.

$$R(f, \underbrace{D}_{\text{fiksiramo}}, T_D) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j f(t_j)$$

$T_D = \{t_1, \ldots, t_n\}$ fiksiramo točke $t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$. Vsota se torej zapiče kot

$$R(f,D,T_D^K) = \sum_{j\neq i} f(t_j)\delta_j + f(t_i^k)\delta_i$$

Ker je f neomjena, lahko privzamemo, da je f navzgor neomejena na $[x_{i-1}, x_i]$. Torej za vsak $k \in \mathbb{N}$ obstaja $s_k \in [x_{i-1}, x_i]$, da je $f(s_k) > k$. Za t_i^k vzamemo $t_i^k = s_k$. $\to\leftarrow$

Opomba: Ni vsaka omejena funkcija na $[a,b]$ Riemannovo integrabilna

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

f je omejana. f ni Riemannovo integrabilna

$$R(f, D, T_D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$$

Za testne točke, kjer je $t_i \in \mathbb{Q} \cap [x_{i-1}, x_i]$

$$R(f, D, T_D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i = 0$$

Za testne točke, kjer je $t_i \in \mathbb{R} \cap [x_{i-1}, x_i]$.

Za poljubno drobne delitve lahko izberemo T_D^1 in T_D^2, da je $R(f, D, T_D^1) = 1$ in $R(f, D, T_D^2) = 0$, torej limita ne obstaja.

$\square$

5.18.4 Darbouxove vsote

Odslej naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Naj bo D delitev intervala $[a, b]$ za delilnimi točkami x_i. Označimo:

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ M_k &= \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ m &= \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \\ M &= \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

Velja:

$$m \le m_k \le M_k \le M$$

za vse $k = 1, \dots, n$

Definicija: Število $s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i$ imenujemo *spodnja Darbouxova vsota* prirejena delitvi D.

Število $S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i$ imenujemo *zgornja Darbouxova vsota* prirejena delitvi D.

Velja:

$$m(b - a) \le s(D) \le S(D) \le M(b - a)$$

še več

$$s(D) \le R(f, D, T_D) \le S(D)$$

za vsako usklajeno izbiro testnih točk.

DEFINICIJA: Pravimo, da je delitev D' *finejša* od delitve D, kadar je $D \subset D'$.

TRDITEV 1: Naj bo delitev D' finejša od delitve D. Tedaj velja:

$$s(D) \leq s(D') \quad \text{in} \quad S(D') \leq S(D)$$

DOKAZ: Od D do D' pridemo z dodajanjem (večkrat) ene točke naenkrat. Zato je dovolj dokazati v primeru $D' = D \cup \{y\}, y \in (x_{i-1}, x_i)$. Za m_i velja

$$\begin{aligned} m_i' &= \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, y]\} \geq m_i \\ m_i'' &= \inf\{f(x) : x \in [y, x_k]\} \geq m_i \end{aligned}$$

Torej velja

$$s(D) = \sum_{j \neq i} m_j \delta_j + m_i \delta_i \leq \sum_{j \neq i} m_i \delta_i + m_i'(y - x_{k-1}) + m_i''(x_k - y) = s(D'')$$

Podobno naredimo za zgornjo vsoto.

□

TRDITEV 2: Naj bosta D_1 in D_2 poljubni delitvi intervala $[a, b]$. Potem velja

$$s(D_1) \leq S(D_2)$$

Opomba: Poljubna spodnja Darbouxova vsota je pod poljubno zgornjo Darbouxovo vsoto.

DOKAZ: Naj bo $D = D_1 \cup D_2$. D je finejša od D_1 in od D_2. Po trditvi 1 velja

$$s(D_1) \leq s(D) \leq S(D) \leq S(D_2)$$

□

Množica spodnjih Darbouxovih vsot je navzgor omejena (z $M(b-a)$), množica zgornjih Darbouxovih vsot pa je navzdol omejena (z $m(b-a)$). Zato obstajata

$$\begin{aligned} s &= \sup\{s(D) : D \text{ delitev } [a, b]\} \\ S &= \inf\{S(D) : D \text{ delitev } [a, b]\} \end{aligned}$$

Po trditvi 2 velja $s \leq S$.

$$\begin{aligned} s(D_1) &\leq S(D_2) \quad \forall D_1, D_2 \\ \sup D_1 = s &\leq S(D_2) \quad \forall D_2 \\ s &\leq S = \inf D_2 \end{aligned}$$

Definicija: Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Pravimo, da je f *Darbouxovo integrabilna* na $[a,b]$, če velja

$$s = S$$

V tem primeru število s imenujemo *Darbouxov integral* funkcije f na $[a,b]$.

Trditev 3: Omejena funkcija f na $[a,b]$ je Darbouxovo integrabilna natanko tedaj, kadar za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja delitev D, za katero velja

$$S(D) - s(D) < \varepsilon$$

Dokaz:

($\Leftarrow$) Izberemo poljuben ε. Po predpostavki obstaja delitev D, da velja

$$S(D) - s(D) < \varepsilon$$

Po definiciji velja

$$s(D) \leq s \leq S \leq S(D)$$

Iz tega sledi, da je $\underbrace{S - s}_{\geq 0} < \varepsilon$ za poljuben $\varepsilon > 0$. Torej je $s = S$.

($\Rightarrow$) Denimo, da je f Darbouxovo integrabilna, torej $s = S$. Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$

Obstaja delitev $D_1 : s(D_1) \in (s - \varepsilon, s]$

Obstaja delitev $D_2 : s(D_2) \in [S, S + \varepsilon]$

Naj bo $D = D_1 \cup D_2$.

$$\underbrace{S(D)}_{\leq S(D_2)} - \underbrace{s(D)}_{\geq s(D_1)} \leq S(D_2) - s(D_1) < \varepsilon$$

□

Izrek 4: Zvezna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je Darbouxovo integrabilna.

Dokaz:

$$S(D) - s(D) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_i (\underbrace{M_i - m_i}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \delta_i = \varepsilon$$

Ker je f zvezna na $[a,b]$, je na $[a,b]$ enakomerno zvezna. Torej za $\frac{\varepsilon}{b-a}$ obstaja $\delta > 0 : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ za $x, x' \in [a,b]$.

Izberemo delitev D, da je $\delta(D) < \delta$. Potem velja $M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

□

Izrek 5: Vsaka monotona funkcija na $[a,b]$ je Darbouxovo integrabilna.

Dokaz: Denimo, da je f naraščajoča. Naj bo D ekvidistančna delitev na n enakih delov. Potem velja

$$\begin{aligned}
S(D) - s(D) &= \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta_i - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\delta_i = \\
&= \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\right) = \\
&= (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n} < \varepsilon
\end{aligned}$$

za dovolj velike n.

□

Izrek (aditivnost domene): Naj bo f omejena funkcija na $[a,b]$ in $c \in [a,b]$. f je Darbouxovo integrabilna na $[a,b]$ natanko tedaj, kadar je Darbouxovo integrabilna na $[a,c]$ in $[c,b]$.

Dokaz:

($\Rightarrow$) Ker je f Darbouxovo integrabilna, za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja delitev D intervala $[a,b]$, da velja

$$S(D) - s(D) < \varepsilon$$

Označimo $\widetilde{D} = D \cup \{c\}$ je delitev intervala $[a,b]$. Vemo

$$S(\widetilde{D}) - s(\widetilde{D}) \leq S(D) - s(D) < \varepsilon$$

Označimo $D_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ je delitev intervala $[a,c]$ in $D_2 = \{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ je delitev $[c,b]$, kjer je $x_0 = a, x_k = c, x_n = b$. Potem velja

$$\begin{aligned}
S(\widetilde{D}) - s(\widetilde{D}) &= S(D_1) + S(D_2) - s(D_1) - s(D_2) = \\
&= (S(D_1) - s(D_1)) + (S(D_2) - s(D_2)) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Torej velja $S(D_i) - s(D_i) < \varepsilon$ za $i = 1, 2$. Zato je f integrabilna na $[a, c]$ in $[c, b]$.

($\Leftarrow$) f je integrabilna na $[a, c]$ in $[c, b]$. Za poljuben $\varepsilon > 0$ obstajata delitev D_1 intervala $[a, c]$ in delitev D_2 intervala $[c, b]$ da velja

$$S(D_i) - s(D_i) < \varepsilon \quad i = 1, 2$$

Označimo $D = D_1 \cup D_2$ je delitev intervala $[a, b]$ in velja

$$S(D) - s(D) = \underbrace{(S(D_1) - s(D_1))}_{<\varepsilon} + \underbrace{(S(D_2) - s(D_2))}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

Torej je f integrabilna na $[a, b]$.

$\square$

Opomba: Denimo, da je f Darbouxovo integrabilna na $[a, b]$. Če se funkcija $\widetilde{f}$ razlikuje od f samo v eni točki, potem je tudi $\widetilde{f}$ Darbouxovo integrabilna na $[a, b]$.

Posledica: Naj bo f omejena funkcija na $[a, b]$. Če obstajajo točke

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_r = b$$

da je f zvezna na (c_{i-1}, c_i) za vse $i = 1, \ldots, r$, potem je f Darbouxovo integrabilna na $[a, b]$.

Posledica: Vsaka odsekana zvezna funkcija je integrabilna.

Definicija: Pravimo, da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *odsekoma zvezna*, če je zvezna povsod razen v končno mnogo točkan na $[a, b]$ in v točkah kjer ni zvezna ima skok, t.j. obstajata leva in desna limita.

Trditev: Naj bo f Darobuxovo integrabilna na $[a, b]$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev D za katero je $\delta(D) < \delta$, velja

$$S(D) - s(D) < \varepsilon$$

Dokaz: Če je $M = m$, ni kaj dokazovati, zato naj bo $M \neq m$. Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker je f integrabilna, obstaja delitev D_0, da velja

$$S(D_0) - s(D_0) < \varepsilon$$

Naj bo $D_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Označimo $\delta := \frac{\varepsilon}{n(M-m)}$[6] Izberemo delitev D, za katero je $\delta(D) < \delta$. Zapišemo lahko

$$S(D) - s(D) = \sum_k (M_k - m_k)\delta_k = \sum{}' + \sum{}''$$

kjer je $\sum'$ vsota po tistih podintervalih v delitvi D, ki ne vsebujejo nobene točke $x_i \in D_0$ v svoji notranjosti, $\sum''$ pa je vsota po vseh ostalih podintervalih.

Za $\sum''$ vemo, da je v njej največ n členov. Torej lahko zapišemo

$$(M_k - m_k) \underbrace{\delta_k}_{\leq \delta(D) < \delta} \leq \underbrace{(M_k - m_k)}_{\leq M-m} \frac{\varepsilon}{n(M-m)} \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

Ker je v $\sum''$ največ n členov, velja

$$\sum{}'' < \varepsilon$$

Za $\sum'$: vemo, da je $D \cup D_0$ finejša od D_0, zato velja

$$S(D \cup D_0) - s(D \cup D_0) < \varepsilon$$

Po drugi strani bodo vsi členi iz vsote $\sum'$ vsebovani v $S(D \cup D_0) - s(D \cup D_0)$, zato velja

$$\sum{}' < S(D \cup D_0) - s(D \cup D_0) < \varepsilon$$

zato je $\sum' < \varepsilon$. Torej velja

$$\sum = \sum{}' + \sum{}'' < 2\varepsilon$$

$\square$

Izrek: Naj bo f omejena funkcija na $[a, b]$. Tedaj je f Riemannovo integrabilna natanko tedaj, kadar je f Darbouxovo integrabilna. V tem primeru sta integrala enaka.

Opomba: Odsel bomo Riemannovo ali Darbouxovo integrailne funkcije imenovali kar *integrabilne funkcije*. Obstajajo še druge definicije integrabilnosti, ki se ne ujemajo z našo definicijo.

Dokaz:

[6] na predavanjih smo označili $\delta := \frac{\varepsilon}{2n(M-m)}$, vendar bodo tako prišle lepše številke. Trust me.

($\Leftarrow$) Denimo, da je f Darbouxovo integrabilna. Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev D, kjer je $\delta(D) < \delta$ velja

$$S(D) - s(D) < \varepsilon$$

Dokazujemo, da za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev D, kjer je $\delta(D) < \delta$ velja, da za poljubno izbiro usklajenih testnih točk T_D, velja

$$|\underbrace{I}_{S=s} - R(f, D, T_D)| < \varepsilon$$

Vemo, da za vsako usklajeno izbiro T_D velja

$$s(D) \leq R(f, D, T_D) \leq S(D)$$

in vemo

$$s(D) \leq s = S \leq S(D)$$

Sledi

$$|S - R(f, D, T_D)| < \varepsilon$$

za vsako uklajeno izbiro T_D. Torej ej f Riemannovo integrabilna in $I = S = s$.

($\Rightarrow$) Denimo, da je f Riemannovo integrabilna in ozna"icmo z I njen Riemannov integral. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev D, kjer je $\delta(D) < \delta$ velja

$$|I - R(f, D, T_D)| < \varepsilon$$

za vse usklajene izbire T_D.

Ideja: T_D dobimo tako, da je $f(t_k) \approx M_k$ in potem bo $R(f, D, T_D) \approx S(D)$.

Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$ in dobimo δ iz definicije Riemannovega itnegrala. Naj bo D delitev, da je $\delta(D) < \delta$. Za vsak k obstajata

$$t_k \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leq M_k - f(t_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$
$$s_k \in [x_{k-1}, x_K] : 0 \leq f(t_k) - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Torej velja

$$
\begin{aligned}
|S(D)-I| &= \left|\sum_k M_k\delta_k - I\right| = \\
&= \left|\sum_k f(t_k)\delta_k - I + \sum_k (M_k - f(t_k))\delta_k\right| \le \\
&\le \underbrace{\left|\sum_k f(t_k)\delta_k - I\right|}_{<\varepsilon} + \overbrace{\sum_k \underbrace{(M_k - f(t_k))}_{<\frac{\varepsilon}{b-a}}\delta(k)}^{<\varepsilon} < 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

Na podoben način dobimo $|s(D)-I| < 2\varepsilon$. Sledi

$$S(D) - s(D) < 4\varepsilon$$

□

IZREK: Naj bo funkcija f integrabilna na $[a,b]$. Označimo $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$ in naj bo g zvezna na $[m,M]$. Potem je $g \circ f$ integrabilna na $[a,b]$.

POSLEDICA: Če je f integrabilna na $[a,b]$, potem so $|f|, f^n (n \in \mathbb{N})$ integrabilne.

DOKAZ: Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker je g enakomerno zvezna na $[m,M]$, obstaja $\delta > 0$, da za $u, u' \in [m,M]$ velja

$$|u - u'| < \delta \Rightarrow |g(u) - g(u')| < \varepsilon$$

Ker je f integrabilna na $[a,b]$, obstaja delitev D intervala $[a,b]$, da velja

$$
\begin{aligned}
&S_f(D) - s_f(D) < \varepsilon\delta \\
&S_f(D) - s_f(D) = \sum_k (M_k - m_k)\delta_k = \sum{}' (M_k - m_k)\delta_k + \sum{}'' (M_k - m_k)\delta_k
\end{aligned}
$$

kjer je so v $\sum'$ členi za katere velja $M_k - m_k < \delta$, v $\sum''$, pa so členi za katere velja $M_k - m_k \ge \delta$.

Označimo

$$
\begin{aligned}
\overline{m_k} &= \inf\{g \circ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\
\overline{M_k} &= \sup\{g \circ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}
\end{aligned}
$$

Ker je $M_k - m_k < \delta$, zaradi enakomerne zveznosti velja, da je $\overline{M_k} - \overline{m_k} \leq \varepsilon$. Torej velja

$$S_{g\circ f}(D) - s_{g\circ f}(D) = \sum_k{}^{'}(\overline{M_k} - \overline{m_k})\delta_k \leq \varepsilon \sum_k \delta_k \leq \varepsilon(b-a)$$

Za $\sum''$ velja

$$\sum{}^{'} + \sum{}^{''} < \varepsilon\delta \Rightarrow \sum{}^{''}(\underbrace{M_k - m_k}_{\geq\delta})\delta_k < \varepsilon\delta$$

Iz tega sledi

$$\begin{gathered}\sum{}^{''}\delta\delta_k \leq \sum{}^{''}(M_k - m_k)\delta_k < \varepsilon\delta \\ \delta\sum{}^{''}\delta_k \leq \varepsilon\delta \\ \sum{}^{''}\delta_k \leq \varepsilon\end{gathered}$$

Po drugi strani velja

$$\sum{}^{''}(\overline{M_k} - \overline{m_k})\delta_k \leq \sum{}^{''}(\overline{M} - \overline{m})\delta_k = (\overline{M} - \overline{m})\sum{}^{''}\delta_k \leq (\overline{M} - \overline{m})\varepsilon$$

Če to dvoje združimo dobimo

$$\begin{aligned}S_{g\circ f}(D) - s_{g\circ f}(D) = \sum_k(\overline{M_k} - \overline{m_k})\delta_k = \\ = \underbrace{\sum{}^{'}(\overline{M_k} - \overline{m_k})\delta_k}_{\leq\varepsilon(b-a)} + \underbrace{\sum{}^{''}(\overline{M_k} - \overline{m_k})\delta_k}_{\leq\varepsilon(\overline{M}-\overline{m})} \leq \\ \leq \varepsilon((b-a) + (\overline{M} - \overline{m}))\end{aligned}$$

Torej je $g \circ f$ integrabilna na $[a, b]$.

$\square$

5.18.5 Lastnosti določenega integrala

TRDITEV: Naj bosta f in g integrabilni funkciji na $[a, b]$ in naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Potem velja:

(i) $f+g$ in $f-g$ sta integrabilni na $[a,b]$ in velja

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b (f(x)-g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

(ii) λf je integrabilna na $[a,b]$ in velja

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

$\Rightarrow$ integrabilne funkcije na $[a,b]$ sestavljajo vektorski prostor.

(iii) $f \cdot g$ je integrabilna na $[a,b]$.

(iv) Če je $f(x) \leq g(x)$ za vse $x \in [a,b]$, potem velja

$$\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$$

Tej lastnosti pravmo *monotonost integrala*. Posledica je $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq x \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

(v)

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

(vi) Naj bo $c \in (a,b)$. Potem velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dogovor:

1. Naj bo f integrabilna na $[a,b]$. Velja

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

2.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Posledica dogovora: Če je f integrabilna na I in vzememo $a, b, c \in I$, potem velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dokaz:

(i)

$$R(f+g, D, T_D) = R(f, T, T_D) + R(g, D, T_D)$$
$$\sum (f+g)(t_k)\delta_k = \sum f(t_k)\delta_k + \sum g(t_k)\delta_k$$

Ker $R(f, D, T_D)$ limitira proti $\int_a^b f(x)dx$ in $R(g, D, T_D)$ limitira proti $\int_a^b g(x)dx$, tudi njuna vsota limitira proti $\int_a^b (f+g)(x)dx$. Da je vsota limit enaka limiti vsot je potrebno še dokazati (bilo je za DN). Osnovna ideja je, da naredimo podobno kot pri zaporedjih ($\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$).

Podobno dokažemo razliko.

(ii) Dokažemo na enak način kot točko (i).

(iii) Dokazujemo fg je integrabilna. Vemo, da sta f in g integrabilni. Torej velja:

$$\underbrace{(\underbrace{f+g}_{\text{integrabilna po (i)}})^2}_{\text{integrabilna po izreku}} = \underbrace{f^2}_{\text{integrabilna po izreku}} + 2fg + \underbrace{g^2}_{\text{integrabilna po izreku}}$$

Zato lahko zapišemo

$$fg = \underbrace{\frac{1}{2}(\underbrace{(f+g)^2 - f^2 - g^2}_{\text{integrabilna po (i)}})}_{\text{integrabilna po (ii)}}$$

Torej je tudi fg integrabilna.

(iv) $f(x) \leq g(x)$ za vse $x \in [a, b]$. Sledi $\underbrace{R(f, D, T_D)}_{\to I} \leq \underbrace{R(g, D, T_D)}_{\to J}$ za isto velja. Zato velja zveza v limiti.

Dokazati moramo, da je $I \leq J$ ne glede na izbiro delitve. Ideja dokaza je, da dokažemo, da za vsak $\varepsilon > 0$ velja $J - I \geq -\varepsilon$ ne glede na delitev.

(v) Ker je f integrabilna je $|f|$ integrabilna. Velja

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$
$$\underbrace{-\int_a^b |f(x)|dx}_{-I} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)|dx}_{I}$$

Iz tega sledi

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq I = \int_a^b |f(x)|dx$$

(vi) Ta lastnost je posledica aditivnosti domene.

5.18.6 Povprečna vrednost

Do sedaj vemo, da če so $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, je povprečna vrednost $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$. Če za $[a, b]$ vzamemo $[0, 1]$ in za D vzamemo ekvidistančno delitev, da je $\delta_k = \frac{1}{n}$, potem velja

$$R(f, D, T_D) = \frac{1}{n}(f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_n))$$

Definicija: Naj bo f integrabilna funkcija na $[a, b]$. *Povprečna vrednost* funkcije f na $[a, b]$ je

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)d_x = \mu$$

Opomba: Za nenegativne integrabilne funkcije f je povprečna vrednost μ tisto število, da je ploščina pod grafom f enaka ploščini pravokotnika z višino μ.

Izrek: Naj bo f integrabilna na $[a, b]$ in naj bo

$$m = \inf f \qquad\qquad M = \sup f$$

Potem za povprečno vrednost μ funkcije f velja

$$m \leq \mu \leq M$$

Če je f zvezna na $[a, b]$, potem obstaja $c \in [a, b]$, da velja

$$f(c) = \mu$$

DOKAZ: Vemo $m \leq f(x) \leq M$ za vsak $x \in [a,b]$. Zaradi monotonosti določenega integrala velja

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$
$$m \leq \mu \leq M$$

Če je f zvezna na $[a,b]$, potem doseže vse vrednosti med m in M, torej tudi μ.

5.18.7 Osnovni izrek analize

DEFINICIJA: Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Funkcijo $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiramo s predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

in jo imenujemo *integral kot funkcija zgornje meje.*

IZREK (osnovni izrek analize):

Naj bo f integrabilna funkcija na $[a,b]$. Tedaj je $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ zvezna na $[a,b]$. Če je f zvezna v točki $x \in (a,b)$, potem je F v točki x odvedljiva in $F'(x) = f(x)$.

POSLEDICA: Vsaka zvezna funkcija na $[a,b]$ ima primitivno funkcija na $[a,b]$. Natančneje: če je f zvezna na $[a,b]$, potem je $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ odvedljiva na $[a,b]$ in $F' = f$.

DOKAZ: Če je f integrabilna je f zvezna.

Vemo, da je f omejena. Torej obstaja $M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M$ za vsak $x \in [a,b]$. Torej velja

$$F(x) - F(x') = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x'} f(t)dt = \int_{x'}^x f(t)dt$$

Če je $x > x'$ velja

$$|F(x) - F(x')| = \left|\int_{x'}^x f(t)dt\right| \underbrace{\leq}_{x>x'} \int_{x'}^x |\underbrace{f(t)}_{\leq M} dt| \leq \int_{x'}^x M dt = M(x-x') < \varepsilon$$

Če je $|x - x'| < \delta = \frac{\varepsilon}{M}$.

Če je $x < x'$, potem po podobnem izračunu dobimo

$$|F(x) - F(x')| \leq M(x' - x) < \varepsilon$$

Torej velja, da če je $|x - x'| < \frac{\varepsilon}{M}$, potem je $|F(x) - F(x')| < \varepsilon$, zaradi česar je F enakomerno zvezna.

Denimo, da je f zvezna v točki x. Velja

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt + \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t) - f(x))dt = \\
&= f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t) - f(x))dt
\end{aligned}$$

Dokazati je potrebno, da je limita $\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t) - f(x))dt$ enaka 0.

Ker je f zvezna v točki x velja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

Če je $|h| < \delta$, potem velja $|t - x| < \delta$, ker t leži med x in $x + h$. Zato velja

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t) - f(x))dt\right| &\leq \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h} \underbrace{|f(t) - f(x)|}_{<\varepsilon} dt \leq \\
&\leq \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h}\varepsilon h = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

POSLEDICA: Vsaka zvezna funkcija f na $[a, b]$ ima primitivno funkcijo na $[a, b]$. Natančneje $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ je odvedljiva in $F'(x) = f(x)$, F je primitivna funkcija od f.

Opomba: Nima vsaka integrabilna funkcija primitivne funkcije. Npr. funkcija, ki ima skok.

IZREK: (osnovni izrek interalnega računa - Leibnizova formula)

Najbo f taka integrabilna funkcija na $[a, b]$, ki ima na $[a, b]$ primitivno funkcijo F, to je $F' = f$ na $[a, b]$. Potem velja Leibnizova formula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(X)|_a^b$$

DOKAZ:

1. Če je f zvezna, potem je $F(X) = \int_a^x F(t)dt$ njena primitivna funkcija

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

izrek za F velja. Če je G kakšna druga primitivna funkcija za f, potem velja $F' = G' = f$ na $[a, b]$ in zato obstaja $C \in \mathbb{R}$, da velja

$$G(X) = F(X) + C$$

Sledi

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

torej izrek velja

2. V splošnem:

Naj bo D poljubna delitev intervala $[a, b]$. Potem po Lagrangeevem izreku obstaja tak $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, da velja

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

Zapišemo lahko tudi

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = R(f, D, T_D)$$

Vemo, da je f integrabilna in zato obstaja limita Riemannovih vsot, to je Riemannov integral. Vemo, da si lahko za vsako delitev izberemo testne točke za katere bo $F(b) - F(a)$ enaka Riemannovi vsoti. Torej smo našli podzaporedje konvergentnega zaporedja Riemannovih vsot, ki konvergira proti $F(b) - F(a)$, torej tudi zaporedje Riemannovih vsto konvergira proti $F(b) - F(a)$, zato je integral enak $F(b) - F(a)$.

$\square$

PRIMER: Obstaja funkcija, ki ni zvezna, je integrabilna in ima primitivno funkcijo. Naj bo $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ primitivna funkcija, $F(0) = 0$. Vemo

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$
$$F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{g}}{h} = 0$$

Torej je F zvezna in odvedljiva na $\mathbb{R}$. Definiramo

$$f(x) = F'(x)$$
$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ ne obstaja, f je zvezna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ker je omejena na $[a, b]$, je integrabilna. Sledi

$$\int_0^a f(x)dx = F(a) - F(0) = F(a)$$

5.18.8 Uvedba nove spremenljivke in integracija po delih v določenem integralu

Izrek:

(i) Naj bo $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in $f : Z_\varphi \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem velja

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

(ii) Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljivi funkciji. Potem velja

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x))|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Dokaz:

(i) Naj bo F primitivna funkcija od f (obstaja, ker je f zvezna). Potem je

$$G(t) = F(\varphi(t))$$

zvezno odvedljiva funkcija. Torej je

$$G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

zvezna funkcija. Zato je G primitivna funkcija od $(f \circ \varphi)\varphi'$ in velja

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

(ii) Velja
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Zato je fg primitivna funkcija od $f'g+fg'$, odtod po Leibnizovi formuli

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = (f(x)g(x))|_a^b$$

□

Izrek: Naj bo φ zvezno odvedljiva, naraščajoča funkcija na $[a, b]$ in f integrabilna na $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Tedaj je funkcija $(f \circ \varphi)\varphi'$ integrabilna na $[a, b]$ in velja
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Dokaz: f je integrabilna, zato za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev D, $\delta(D) < \delta$, velja

$$\left| \underbrace{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx}_{I} - R(f, D, T_D) \right| < \varepsilon$$

za vsako usklajeno izbiro T_D.

Delitev D intervala $[\varphi(a), \varphi(b)]$ določa delitev $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ intervala $[a, b]$ (ker je φ naraščajoča).

Ker je φ zvezna na $[a, b]$, je enakomerno zvezna na $[a, b]$, zato za vsak $\delta > 0$ obstaja $\delta' > 0$ da za $t, t' \in [a, b]$ velja

$$|t - t'| < \delta' \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t')| < \delta$$

Oglejmo si Riemannovo vsoto $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Naj bo $\overline{D}$ delitev intervala $[a, b]$. Velja

$$R((f \circ \varphi)\varphi', \overline{D}, T_{\overline{D}}) = \sum_{j=1}^{n} f(\varphi(c_j))\varphi'(c_j)(t_j - t_{j-1})$$

Po Lagrangeevem izreku obstaja tak $\overline{c_j} \in (t_{j-1}, t_j)$, da velja

$$\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) = \varphi(\overline{c_j})(t_j - t_{j-1})$$

Upoštevajmo še enakomerno zveznost funkcije φ'. Obstaja $\delta'' > 0$, da za $t, t' \in [a, b]$ velja

$$|t - t'| < \delta'' \Rightarrow |\varphi'(t) - \varphi'(t')| < \varepsilon$$

Označimo še $M = \sup |f|$. Sedaj lahko zapišemo

$$R((f \circ \varphi)\varphi', \overline{D}, T_{\overline{D}}) = \sum_{j=1}^{n} f(\varphi(c_j))\varphi'(c_j)(t_j - t_{j-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f(\varphi(c_j))\varphi'(\overline{c_j})(t_j - t_{j-1}) - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f(\varphi(c_j))(t_j - t_{j-1})(\varphi'(c_j) - \varphi'(\overline{c_j}))}_{o} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f(\varphi(c_j))(\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})) + o =$$

$$= R\left(f, \{\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n)\}, \{\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_n)\}\right) + o$$

Poglejmo kako je z o

$$|o| \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|f(\varphi(c_j))|}_{\leq M} \cdot |t_j - t_{j-1}| \cdot \underbrace{|\varphi'(c_j) - \varphi'(\overline{c_j})|}_{\leq \varepsilon \text{ če } |c_j - \overline{c_j}| < \delta''} \leq \varepsilon M \sum_{j=1}^{n} |t_j - t_{j-1}| = \varepsilon M(b-a)$$

Iz tega sledi

$$|R((f \circ \varphi)\varphi', \overline{D}, T_{\overline{D}}) - I| = |R(f, D, T_D) + o - I| \leq$$
$$\leq \underbrace{|R(f, D, T_D) - I|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|o|}_{\leq \varepsilon M(b-a)} \leq \varepsilon(1 + M(b-a))$$

$|R((f \circ \varphi)\varphi', \overline{D}, T_{\overline{D}}) - I| < \varepsilon$, če velja $\delta(D) < \delta$. $D = \{\varphi(t_0), \ldots, \varphi(t_n)\}$, torej bo $\delta(D) < \delta$, ko bo $\delta(\overline{D}) < \delta'$.

□

5.18.9 Izrek o povprečjih

Naj bo f integrabilna na $[a, b]$. Potem je povprečje p

$$p = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Izrek: Naj bosta f in g integrabilni funkciji na $[a, b]$.

$$m = \inf_{[a,b]} f \qquad\qquad M = \sup_{[a,b]} f$$

Denimo, da je g enakega predznaka na $[a,b]$ (bodisi $g \geq 0$, ali $g \leq 0$ na $[a,b]$). Tedaj velja

$$\int_a^b f(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

za nek $\mu \in [m,M]$. Če je f zvezna funkcija, potem obstaja $c \in [a,b]$, da velja

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Dokaz: Denimo, da je $g(x) \geq 0$ za vse $x \in [a,b]$. Vemo:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$
$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Iz monotonosti integrala sledi

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \underbrace{\int_a^b f(x)g(x)dx}_{\mu\int_a^b g(x)dx \quad \mu\in[m,M]} \leq M\int_a^b g(x)dx$$

1.
$$\int_a^b g(x)dx \neq 0 \Rightarrow \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

2.
$$\int_a^b g(x)dx = 0 \Rightarrow \mu \in [m,M]$$

Če je f zvezna doseže vse vrednosti na $[m,M]$, torej obstaja $c \in [a,b]$, da velja $f(c) = \mu$.

Izrek: Naj bo f zvezna funkcija na $[a,b]$, funkcija g nenegativna, padajoča in zvezno odvedljiva na $[a,b]$. Potem velja

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx$$

kjer je $c \in [a,b]$.

Dokaz: Naj bo $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. F je primitivna funkcija od f (zvezno odvledljiva).

$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b F'(x)g(x)dx = g(x) = g(x)F(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx =$$
$$= g(b)F(b) - g(x)\underbrace{F(a)}_{0} + \int_a^b F(x)(\underbrace{-g'(x)}_{\geq 0})dx$$

Označimo

$$m = \inf F \qquad\qquad M = \sup F$$

Velja

$$m(-g'(x)) \leq F(x)(-g'(x)) \leq M(-g'(x))$$

Zaradi monotonosti integrala velja

$$-m\int_a^b g'(x)dx \leq \int_a^b F(x)(-g'(x))dx \leq -M\int_a^b g'(x)dx$$

$$-m(g(b)-g(a)) \leq \int_a^b F(x)(-g'(x))dx \leq -M(g(b)-g(a))$$

Torej velja

$$I \leq \underbrace{g(b)}_{\geq 0}\underbrace{F(b)}_{\leq M} - M(g(b)-g(a)) \leq Mg(b) - M(g(b)-g(a)) = Mg(a)$$

$$I \geq g(b)m - m(g(b)-g(a)) = mg(a)$$

Izpeljali smo $mg(a) \leq I \leq Mg(a)$. Iz tega sledi

$$I = \mu g(a)$$

za nek $\mu \in [m, M]$. Ker je F zvezna, obstyaja $c \in [a, b]$, da velja $F(c) = \mu$. Torej velja

$$I = g(a)\int_a^c f(t)dt$$

□

5.18.10 Posplošeni integral

Definicija: Naj bo funkcija $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ integrabiln na vsakem intervalu $[t, b]$ za vsak $t \in (a, b)$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\downarrow a}\int_t^b f(x)dx$$

če t limita obstaja.

Če ta limita obstaja, pravimo da je f *posplo"eno integrabilna* na $[a, b]$ in da je $\int_a^b f(x)dx$ *konvergenten.* sicre pravimo, da je $\int_a^b f(x)dx$ *divergenten.*

Opombe:

(i) Podobna definicija velja za funkcije $f : [a, b) \to \mathbb{R}$.

(ii) Posplošenemu integralu se reče tudi *izlimitirani*, včasih tudi *nepravi* integral.

(iii) Če je f integrabilna na $[a, b]$, je f posplošeno integrabilna na $[a, b]$ in integrala se ujemata, ker je integral kot funkcija zgornje meje zvezna funkcija.

(iv) Posplošeni integral je smiselno obravnavati npr. za zvezna funkcije na $(a, b]$, ki so v okolici točke a neomojene. Ni pa nujno, da je taka funkcija posplošeno integrabilna.

IZREK: Naj bo $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ taka funkcija, ki je integrabilna na $[a, t]$ za vsak $t \in (a, b)$. Če obstaja posplošeni integral $\int_a^b |f(x)|dx$, potem obstaja tudi $\int_a^b f(x)dx$.

Opomba: Če je f absolutno integrabilna, potem je f integrabilna.

DOKAZ:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad\qquad G(x) = \int_a^x |f(t)|dt$$

Če je $x \in [a, b)$, sta $f, |f|$ integrabilni na $[a, x]$, zato sta F in G zvezni na $[a, b)$.

Po definiciji posplošenega integrala velja

$$\int_a^b |f(x)|dx = \lim_{t \uparrow b} \int_a^t |f(x)|dx = \lim_{t \uparrow b} G(t)$$

$$x_1 < x_2 : |F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_a^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt\right| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt = |G(x_2) - G(x_1)|$$

Ker G izpolnjuje Cauchyjev pogoj pri b, izplonjuje tudi F Cauchyjev pogoj pri b. Zato obstaja $\lim_{x \uparrow b} F(x)$

□

IZREK: Naj bo f integrabilna na $[a, b]$.

(a) Če je $s < 1$, potem

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-a)^s} dx$$

konvergira.

(b) Če je $s \geq 1$ in če je funkcija v okolici točke a omejena stran od 0, t.j. $\exists m \in \mathbb{R}, m > 0 : |f(x)| \geq m$ za vse x blizu a, potem

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-a)^s} dx$$

divergira.

Dokaz:

(a) $s < 1$: vemo, da iz absolutne integrabilnosti sledi integrabilnost, zato je dovolj dokazati, da obstaja

$$\int_a^b \left| \frac{f(x)}{(x-a)^s} \right| dx$$

Ker je f integrabilna, je omejena. Zato obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $|f(x)| \leq M$ za vse $x \in [a, b]$.

$$\int_t^b \left| \frac{f(x)}{(x-a)^s} \right| dx \leq \int_t^b \left| \frac{M}{(x-a)^s} \right| dx$$

za $t \in (a, b)$. Po definiciji posplošenega integrala

$$\int_a^b \left| \frac{f(x)}{(x-a)^s} \right| dx = \lim_{t \downarrow a} \underbrace{\int_t^b \left| \frac{f(x)}{(x-a)^s} \right| dx}_{\text{narašcajo, ko gre } t \text{ proti } a}$$

Ko gre t proti a, velja

$$\int_a^b \frac{M}{(x-a)^s} = \int_0^{b-a} \frac{M}{u^s} du$$

kjer je $u = x - a$. Ta integral obstaja, ker je $s < 1$. Limita obstaja, ker so vsi integrali omejeni in naraščajo.

(b) $f(x) \geq m > 0$ za vse x blizu a ($x \in (a, a+\delta)$ za nek $\delta > 0$).

$$t \in (a, a+\delta) : \int_t^{a+\delta} \frac{f(x)}{(x-a)^s} dx \geq \int_t^{a+\delta} \frac{m}{(x-a)^s} dx$$

Ko gre t proti a, gre integral proti ∞.

$\square$

Opomba: Pogoj v točki (b) je gotovo izpolnjen, če je $\lim_{x\downarrow a} f(x) \neq 0$. Posebej, če je f zvezna na $[a,b]$, potem je pogoj v (b) izpolnjen, čim je $f(a) \neq 0$.

DEFINICIJA: Naj bo funkcija $f : [a,c) \cup (c,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[a,s]$ za vse $s \in (a,c)$ in na $[t,b]$ za vse $t \in (c,b)$. Potem je posplošeni integral funkcije f na $[a,b]$ definiran s

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s\uparrow c} \int_a^s f(x)dx + \lim_{t\downarrow c} \int_t^b f(x)dx$$

če obe limiti obstajata.

Cauchyjeva glavna vrednost:

$$v.p. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\downarrow 0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right)$$

Opombe:

1. Podobno definiramo posplošeni integral na več (končno mnogo) izjemnih točk.
2. Če obstaja posplošeni integral, poitem obstaja glavna vrednost. Obratno pa v splošnem ne velja.

5.18.11 Posplošeni integral na neomejenem intervalu

DEFINICIJA: Naj bo $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ (posplošeno) integrabilna na vsakem $[a,s]$ za vse $s > a$. Potem je *posplošeni integral* funkcije f na $[a,\infty)$ definiran

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{s\to\infty} \int_a^s f(x)dx$$

če obstaja končna limita. V tem primeru rečemo, da je f *posplošeno integrabilna* na $[a,\infty)$, in da je integral *konvergenten.*

Če končna limita ne obstaja, pravimo, da integral *divergira.*

Podobno definiramo na $(-\infty, a]$ in na $(-\infty, \infty)$

IZREK: Naj bo $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija na $[a,b]$ za vsak $b > a$. Če obstaja $\int_a^\infty |f(x)|dx$, potem obstaja $\int_a^\infty f(x)dx$.

DOKAZ: Podoben kot zadnjič, zato ga zpelji doma.

IZREK: Naj bo $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija na $[a, b]$ za vsak $b > a$. Tedaj $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergira natanko tedaj, kadar

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \forall c, c' \geq M : \left| \int_c^{c'} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

DOKAZ: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

$\int_a^\infty f(t)dt$ konvergira natanko tedaj, kadar obstaja (končna) limita $\lim_{x\to\infty} F(x)$. To je natanko tedaj, kadar F v ∞ izpolnjuje Cauchyjev pogoj:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \forall c, c' \geq M : |F(c) - F(c')| < \varepsilon$$
$$|F(c) - F(c')| = \left| \int_a^c f(t)dt - \int_a^{c'} f(t)dt \right| = \left| \int_c^{c'} f(t)dt \right|$$

$\square$

IZREK Naj bo $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, $a > 0$.

(1) Če je g omejena na $[a, \infty)$ in $\alpha > 1$, potem

$$\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^\alpha} dx$$

konvergira.

(2) Če je g omejena stran od 0 na $[a, \infty)$ (t.j. $\exists m \in \mathbb{R}, m > 0 : |g(x)| \geq m$ za vse $x \in [a, \infty)$) in je $\alpha \leq 1$, potem

$$\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^\alpha} dx$$

divergira.

DOKAZ: $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^\alpha}$ $\frac{g(x)}{x^\alpha}$ je zvezna na $[a, \infty)$, zato je integrabilna na $[a, b]$ za vsak $b > a$. Za $M > a$ velja

$$\int_a^M \frac{g(x)}{x^\alpha} dx = -\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{M}} \frac{g\left(\frac{1}{t}\right)}{t^{-\alpha+2}} dt = \int_{\frac{1}{M}}^{\frac{1}{a}} \frac{g\left(\frac{1}{t}\right)}{t^{2-\alpha}} dt$$

Ali obstaja posplošeni integral $\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{g\left(\frac{1}{t}\right)}{t^{2-\alpha}} dt$?

$\frac{g(\frac{1}{t})}{t^{2-\alpha}}$ je zvezna na $(0, \frac{1}{a})$ in g je omejena v okolici 0. Po izreku iz preteklosti, integral konvergira, če je $2 - \alpha < 1$ $(1 < \alpha)$, če pa je $2 - \alpha \geq 1$ in $g(\frac{1}{t})$ omejena stran od 0, potem integral divergira.

$\square$

Izrek: (integralski kirterij za konvergenco vrst)

Naj bo $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ monotono padajoča in nenegativna. Potem $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergira natanko tedaj, kadar konvergira $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Dokaz: Za $x \in [n, n+1)$ velja

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(n) \leq \int_1^n f(t)dt \leq \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^{n+1} f(t)dt \leq f(1)+f(2)+\cdots f(n)$$

$\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergira $\iff$ zaporedje s_n konvergira $\iff$ zaporedje s_n je navzgor omejeno (vemo, da je naraščajoče) $\iff$ $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ navzgor omejena (vemo, da je naraščajoča) $\iff$ $\int_1^\infty f(t)dt$ konvergira.

5.18.12 Uporaba integrala v geometriji

1. **Ploščina lika med grafoma zveznih funkcij**

   (a) Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji in denimo, da je $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Naj bo

   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(b)\}$$

   Tedaj je ploščina lika med grafoma

   $$pl(D) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

   (b) Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji.

   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, y \text{ leži med } f(x) \text{ in } g(x)\}$$

   Tedaj je ploščina med grafoma

   $$pl(D) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

2. **Ploščina območja, ki je dano s krivuljo**

(a) Naj bo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot. Pišimo $F = (x, y)$, kjer sta $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljivi.

(i) Če je $y(t) \geq 0$ za vse $t \in [a, b]$ in je

$$x(a) = \min_{t \in [a,b]} \{x(t)\}$$
$$x(b) = \max_{t \in [a,b]} \{x(t)\}$$

Potem ploščino lika med krivuljo in abscisno osjo nad intervalom $[x(a), x(b)]$ izračunamo

$$\int_a^b y(t)\dot{x}(t)dt$$

(ii) Če je $x(t) \geq 0$ in je

$$y(a) = \min_{t \in [a,b]} \{t(t)\}$$
$$y(b) = \max_{t \in [a,b]} \{t(t)\}$$

Potem je ploščina lika med krivuljo in ordinatno osjo na $[y(a), y(b)]$

$$\int_a^b x(t)\dot{y}(t)dt$$

DOKAZ: Ideja dokaza v zvezku (vsebuje same skice).

DEFINICIJA: Naj bo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija gladkega loka K. Potem F določa orientacijo (usmerjenost) krivulje K. Ta je določena s smerjo v kateri se gilbje točka $F(t)$ po krivulji K, ko gre t od a do b.

Gladka enostavna sklenjena krivulja je gladka pot K, ki ima regularno paramterizacijo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, za katero velja

$$F(a) = F(b), \quad \dot{F}(a) = \dot{F}(b)$$

in $F|_{[a,b]}$ je injektivna.

DEFINICIJA: Naj bo D območje, ki ga omejuje gladka sklenjena krivulja K. Regularna parametrizacija F krivulje K določa *pozitivno usmerjenost* krivulje K (pozitivno orientacijo), če je D na levi strani, ko se vzdolž K premikamo v smeri, ki jo določa F.

Trditev: Naj bo $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $F = (x,y)$ regularna parametrizacija gladke enostavne sklenjene krivulje K, ki določa pozitivno usmerjenost K. Potem je ploščina območja D znotraj K enaka

$$pl = \int_a^b x(t)\dot{y}(t)dt = -\int_a^b \dot{x}(t)y(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - x(t)\dot{y}(t))dt$$

Dokaz: V zvezku se nahaja skica. Naj bo t_a vrednost parametra t, pri katerem je vrednost x minimalna in t_b vrednost parametra t, pri katerem je vrednost x maksimalna.

Točki $F(t_a)$ in $F(t_b)$ razdelita K na dva loka.

$$\int_a^b y(t)\dot{x}(t)dt = \int_a^{t_b} y(t)\dot{x}(t)dt + \int_{t_b}^{t_a} y(t)\dot{x}(t)dt + \int_{t_b}^{b} y(t)\dot{x}(t)dt = -pl$$

Trditev: Naj bo $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$ zvezno odvedljiva polarno podana krivulja. Potem je ploščina območja, ki ga določa krivulja skupaj z daljicama $\varphi = \alpha, 0 \leq r \leq r(\alpha)$ in $\varphi = \beta, 0 \leq r \leq r(\beta)$ enaka

$$pl = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

Dokaz: Krivuljo parametriziramo

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= r(\varphi)\cos\varphi \\ y(\varphi) &= r(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(x(\varphi)\dot{y}(\varphi) - \dot{x}(\varphi)y(\varphi)) = \\ &= \frac{1}{2}(r(\varphi)\cos\varphi(\dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi) - (\dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)r(\varphi)\sin\varphi) = \\ &= \frac{1}{2}r^2(\varphi)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{1}{2}r^2(\varphi) \end{aligned}$$

Če parametriziramo daljici dobimo

$$\begin{aligned} x &= x & \dot{x} &= 1 \\ y &= kx + n & \dot{y} &= k \end{aligned}$$

Od tu sledi:

$$x\dot{y} - \dot{x}y = kx - kx = 0$$

5.18.13 Dolžina loka

DEFINICIJA: Naj bo $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ pot, ki določa krivuljo $K, F = (\alpha, \beta)$. Izberemo delitev intervala $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

Pot F na j-tem podintervalu zamenjamo z daljico od $F(t_{j-1})$ d0 $F(t_j)$. Dolžina poligonalne krivulje, ki aproksimira F je

$$l(D) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\left(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\right)^2 + (\beta(t_j) - \beta(t_{j-1}))^2}$$

Dolžina poti F je

$$l(F) = \sup\{l(D), D \text{ delitev } [a, b]\}$$

Pravimo, da je pot F *izmerljiva*, če je $l(F) < \infty$.

IZREK: Naj bo $F = (x, y) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot. Potem je dolžina poti

$$l(F) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

DOKAZ: Naj bo D delitev $[a, b] : a = t_0 < t_1 \cdots t_{n-1} < t_n = b$.

$$l(D) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(y(t_j) - y(t_{j-1}))^2 + (x(t_j) - x(t_{j-1}))^2}$$

Po Lagrangeevem izreku velja

$$y(t_j) - y(t_{j-1}) = \dot{y}(s_j)(t_j - t_{j-1})$$

kjer je $s_j \in (t_{j-1}, t_j)$. Podobno velja za x

$$x(t_j) - x(t_{j-1}) = x(v_j)(t_j - t_{j-1}) \quad v_j \in (t_{j-1}, t_j)$$

Dobimo

$$l(D) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\dot{y}^2(s_j)(t_j - t_{j-1})^2 + \dot{x}^2(v_j)(t_j - t_{j-1})^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\dot{y}^2(s_j) + \dot{x}^2(v_j)}(t_j - t_{j-1}) \approx R\left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, D, T_D\right)$$

Ocenimo razliko

$$\left|R\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, D, T_D\right) - l(D)\right| =$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\dot{y}^2(c_j)+\dot{x}^2(c_j)}(t_j - t_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\dot{y}^2(s_j)+\dot{x}^2(v_j)}(t_j - t_{j-1})\right|$$

kjer je $T_D = \{c_1, \ldots, c_n\}$. Poglejmo si razliko enega člena v vsoti

$$\left|\sqrt{\underbrace{\dot{y}^2(c_j)+\dot{x}^2(c_j)}_{A}} - \sqrt{\underbrace{\dot{y}^2(s_j)+\dot{x}^2(v_j)}_{B}}\right| = \left|\frac{\dot{x}^2(c_j)+\dot{y}^2(c_j)-\dot{x}^2(v_j)-\dot{y}^2(s_j)}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}\right| \leq$$
$$\leq \frac{|\dot{x}(c_j)-\dot{x}(v_j)||\dot{x}(c_j)+\dot{x}(v_j)|}{\underbrace{\sqrt{A}}_{\geq|\dot{x}(c_j)|}+\underbrace{\sqrt{B}}_{\geq|\dot{x}(v_j)|}} + \frac{|\dot{y}(c_j)-\dot{y}(v_j)||\dot{y}(c_j)+\dot{y}(v_j)|}{\underbrace{\sqrt{A}}_{\geq|\dot{y}(c_j)|}+\underbrace{\sqrt{B}}_{\geq|\dot{y}(v_j)|}} \leq$$
$$\leq |\dot{x}(c_j)-\dot{x}(v_j)| + |\dot{y}(c_j)-\dot{y}(v_j)|$$

Dobili smo

$$\left|R\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, D, T_D\right) - l(D)\right| \leq \sum_{j=1}^{n}(|\dot{x}(c_j)-\dot{x}(v_j)|+|\dot{y}(c_j)-\dot{y}(v_j)|)(t_j-t_{j-1})$$

Ker sta x in y zvezno odvedljiva na $[a,b]$, sta funkciji $\dot{x}$ in $\dot{y}$ enakomerno zvezni na $[a,b]$, zato za $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta_0 > 0$, da če je $|s' - s''| < \delta_0$, potem je $|\dot{x}(s') - \dot{x}(s'')| < \varepsilon$ in $|\dot{y}(s') - \dot{t}(s'')| < \varepsilon$.

Če je $\delta(D) < \delta_0$, potem sledi

$$\left|R\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, D, T_D\right) - l(D)\right| < \sum_{j=1}^{n} 2\varepsilon(t_j - t_{j-1}) = 2\varepsilon(b-a)$$

Ker je $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ integrabilna (zvezna) funkcija, po definiciji Riemmanovega integrala za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta_1 > 0$, da za vsako delitev D, kjer je $\delta(D) < \delta_1$ in za vsako izbiro T_D velja

$$|I - R\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, D, T_D\right)| < \varepsilon$$

Torej za vsak $\varepsilon > 0$ in $\delta < \min\{\delta_0, \delta_1\}$ velja, da je $|I - l(D)| < \varepsilon$.

$S = \sup\{l(D)\} = I$

Naj bo D poljubna delitev. Naj bo D' finejša delitev od delitve D, da bo

$$\delta(D') < \min\{\delta_0, \delta_1\}$$

Velja $|I - l(D')| < \varepsilon + 2\varepsilon(b-a)$.

Obstaja delitev $D : |l(D) - s| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
&|S - I| = |S - l(D') + l(D') - I| \leq \\
&\leq |S - l(D')| + |l(D') - I| \leq S - l(D) + (l(D') - I) < \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon(b-a)
\end{aligned}$$

$\square$

Dolžina grafa funkcije f

Naj bo f zvezno odvedljiva na intervalu $[a, b]$. Potem je dolžina njenega grafa na intervalu $[a, b]$

$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Parametrizacja grafa Γ_f:

$$F(x) = (x, f(x)), \quad x \in D_f = [a, b]$$

Dolžina polarno podane krivulje

$$r = r(\varphi) \qquad\qquad \varphi \in [\alpha, \beta]$$

Dolžina loka je

$$l(r(\varphi)) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}d\varphi$$

Parametrizacija grafa je

$$\begin{gathered}
F(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi) \\
|\dot{F}(\varphi)| = \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}
\end{gathered}$$

Definicija: Pravimo, da je pot $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *gladka*, če sta x in y zvezno odvedljivi in $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ (t.j. regularna parametrizacija). *Gladek lok* je tir gladke injektivne poti.

TRDITEV: Naj bosta F in G injektivni regularni parametrizaciji istega gladkega loka K, t.j. $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2, G : [c, d] \to \mathbb{R}^2$ in velja

$$F([a, b]) = G([c, d])$$

Potem je $l(F) = l(G)$.

Opomba: Dolžina gladkega loka K je dolžina njegove regularne parametrizacije.

Dokaz: Vemo, da obstaja $\varphi : [a, b] \to [c, d]$, za katero velja

$$G \circ \varphi = F$$

in velja φ odvedljiva in $\varphi'(x) \neq 0 \forall x$. Potem je

$$G = (\alpha, \beta) \qquad\qquad F = (\alpha \circ \varphi, \beta \circ \varphi)$$

Vemo

$$l(G) = \int_c^d \sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2} ds$$

Za $l(F)$ pa velja

$$\begin{aligned} l(F) = &\int_a^b \sqrt{((\alpha \circ \varphi)'(t))^2 + ((\beta \circ \varphi)'(t))^2} dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{(\dot{\alpha}(\varphi(t)))^2 + (\dot{\beta}(\varphi(t)))^2} |\dot{\varphi}(t)| dt = \int_d^c \sqrt{\dot{\alpha}(s)^2 + \dot{\beta}(s)^2} (-ds) \end{aligned}$$

Kjer smo naredili substitucijo $s = \varphi(t) \Rightarrow ds = \dot{\varphi}(t)dt$. Če je $\dot{\varphi} > 0$ potem $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$, kar pomeni, da je $l(F) = l(G)$. Če je $\dot{\varphi} < 0$, potem je $\varphi(a) = d, \varphi(b) = c$.

□

5.18.14 Naravni parameter

Naj bo $F = (\alpha, \beta) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ injektivna regularna parametrizacija gladkega loka K. Potem funkcija

$$\varphi(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{\alpha}(s)^2 + \dot{\beta}(s)^2} ds$$

izmeri dolžino loka K med $F(a)$ in $F(t)$.

Ker je $\dot{\varphi}(t) = \sqrt{\dot{\alpha}(s)^2 + \dot{\beta}(s)^2} ds$, je φ zvezno odvedljiva, strogo naraščajoča funkcija, ki slika $[a,b]$ na interval $[0, l(K)]$. Njen inverz označimo s φ^{-1} in je zvezno odvedljiv.

Potem je
$$G := F \circ \varphi^{-1} : [0, l(K)] \to \mathbb{R}^2$$
regularna parametrizacija loka K.

Naj bo $G = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Potem velja

$$\sqrt{\dot{\tilde{\alpha}}(s)^2 + \dot{\tilde{\beta}}(s)^2} = 1$$

Torej je G regularna parametrizacija gladkega loka K, za katero velja

$$\int_0^{s_0} \sqrt{\dot{\tilde{\alpha}}(s)^2 + \dot{\tilde{\beta}}(s)^2} ds = s_0$$

Torej: dolžina dela K od $G(0)$ do $G(s_0)$ je s_0.

Parameter pri parametrizacija G meri dolžino loka, zato ga imenujemo *naravni parameter*, parametrizacijo G pa *naravna parametrizacija.* FIzikalno je to taka parametrizacija, pri kateri se po krivulji premikamo s hitrostjo 1.

Definicija: Diferencial dolžine loka gladke krivulje označimo z ds in ga imenujemo *ločna dolžina.*

Za $F = (\alpha, \beta)$ je $ds = \sqrt{\dot{\alpha}(t)^2 + \dot{\beta}(t)^2} dt$ in $l = \int_a^s ds$. Zapišemo lahko tudi

$$ds = \sqrt{(\dot{\alpha}(t)dt)^2 + (\dot{\beta}(t)dt)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

5.18.15 Prostornine in površine vrtenin

Definicija: Ploskev, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcija f nad $[a,b]$ okrog abscisne osi imenujemo *rotacijska ploskev*, telo, ki ga omejuje, pa *vrtenina.*

Prostornina vrtenine:

Naj bo $f : [a,b] \to [0, \infty)$ zvezna funkcija. Pribli'zek za prostornino vrtenine:

Če je D delitev intervala $[a,b]$, je vsote prostornin „valjev” enaka

$$\sum_{j=1}^{n} \pi f(t_j)^2(x_j - x_{j-1}) = R(\pi f^2, D, T_D) \tag{6}$$

Ta vsota pa limitira proti $\int_a^b f(x)^2 dx$. Torej velja

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Ploščina rotacijske ploskve

Valj je slaba aproksimacija za površino. Boljša je prisekani stožec.

Naj bo $f : [a,b] \to [0,\infty)$ zvezno odvedljiva in naj bo D delitev intervala $[a,b]$. Nad $[x_{j-1}, x_j]$ aproksimiramo graf funkcije z daljico od $(x_{j-1}), f(x_{j-1})$ do $(x_j, f(x_j))$. Ko daljico zavrtimo okrog abscisne osi, dobimo prisekani stožec s površino

$$\pi(f(x_j) + f(x_{j-1})\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}$$

Torej je približek za površino

$$\sum_{j=1}^{n} \pi(f(x_j) + f(x_{j-1})\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (\underbrace{f(x_j) \overset{2}{-} f(x_{j-1})}_{f'(t_j)(x_j - x_{j-1})}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{j-1}) + f(x_j))\sqrt{1 + (f'(t_j))^2}(x_j - x_{j-1}) \overset{\delta(D)\downarrow 0}{\longrightarrow} 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{q + (f'(x))^2}dx$$

Torej velja

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

6 Funkcijska zaporedja in vrste

Definicija: Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $f_n : D \to \mathbb{R}$ funkcije za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potem pravimo, da je

$$\{f_n\} = \{f_n : D \to \mathbb{R}\}$$

funkcijsko zaporedje.

Če za vsak $x \in D$ številsko zaporedje $\{f_n(x)\}$ konvergira, pravimo da funkcijsko zaporedje f_n *konvergira* na D (konvergira po točkah). V tem primeru definirmao funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

in jo imenujemo *limitna funkcija*.

DEFINICIJA: Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $\{f_n : D \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje. Pravimo, da $\{f_n\}$ *konvergira enakomerno* proti funkciji $f : D \to \mathbb{R}$ na D, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ in vse $x \in D$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Opomba: Če funkcijsko zaporedje $\{f_n\}$ konvergira enakomerno na D proti f, potem $\{f_n\}$ konvergira proti f, t.j. f je limitna funkcija $\{f_n\}$.

f je limitna funkcija $\{f_n\} \iff \forall x \in D : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \iff$

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

f_n enakomerno konvergira proti f na $D \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

V definiciji enakomerne konvergence označimo

$$M_n := \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$$

Za obravnavo enakomerne konvergence moramo obravnavati M_n, ki pa je številsko zaporedje. f_n enakomerno konvergira proti f natanko takrat, kadar zaporedje M_n konvergira proti 0.

Geometrijska interpretacija: $M_n < \varepsilon \iff$ graf funkcije f_n leži v ε-pasu okrog grafa f. $f_n \to f$ enakomerno na $D \iff \forall \varepsilon > 0$ vsi grafi funkcije f_n za dovolj velik n ležijo znotraj ε-pasu okrog grafa f.

DEFINICIJA: Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $\{f_n : D \to \mathbb{R}\}$ funckijsko zaporedje. Pravimo, da je $\{f_n\}$ *enakomerno Cauchyjevo* na D, če velja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

IZREK: Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}, \{f_n : D \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje. Tedaj je $\{f_n\}$ enakomerno konvergentno na D natanko takrat kadar je $\{f_n\}$ enakomerno Cauchyjevo na D.

Dokaz: Dokažemo podobno kot za zaporedja.

Izrek: Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ in $\{f_n : D \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje. Če so vse funkcije f_n zvezne na D in $\{f_n\}$ enakomerno konvergira proti f na D, potem je f zvezna na D.

Opomba: Protiprimer je $f_n(x) = x^n$ na $[0, 1]$.

Dokaz: Dokazujemo, da je f zvezna na D. Izberemo poljuben $a \in D$ in dokazujemo, da je f zvezna v točki a. Izberemo $\varepsilon > 0$ in iščemo tak $\delta > 0$, da $\forall x \in D$ velja $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a) + f_{n_0}(a) - f(a)| \leq \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)|}_{<\varepsilon/3 \text{ za } |x-a|<\delta} + \underbrace{|f_{n_0}(a) - f(a)|}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon \end{aligned}$$

Ker f_n enakomerno konvergira proti f, obstaja n_0, da za vsak $n \geq n_0$ velja, da za vsak $x \in D$
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
Ker je funkcija f_{n_0} zvezna v točki a, obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$ velja
$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

□

Definicija: Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ in $\{u_n : D \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje.
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$
pravimo *funkcijska vrsta.* Funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}$ *konvergira po točkah*, če za vsak $x \in D$ številska vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$
konvergira.

Opomba: Funkcijska vrsta konvergira po točkah natanko takrat, kadar funkcijsko zaporedje njenih delnih vsot konvergira po točkah. Torej za $x \in D$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergira $\iff$ $\{\sum_{n=1}^{k} u_n(x)\}_k$ konvergira $\iff$ $s_k = \sum_{n=1}^{k} u_n$ konvergira v x.

Naj bo s vsota po točkah konvergentne funkcijske vrste $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $s = \lim_{k\to\infty} s_k$. Pravimo, da $\sum_{n=1}^{\infty}$ *konvergira proti s enakomerno na* D, če funkcijsko zaporedje njenih delnih vsot $s_k = \sum_{n=1}^{k} u_n$ enakomerno konvergira proti s na D.

Posledica: Če je $\{u_n : D \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje zveznih funkcij in če $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira enakomerno na D proti s, potem je s zvezna funkcija na D.

Posledica: Naj bo $\{u_n : D \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje. Tedaj velja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je enakomerno konvergentna na $D \iff \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je enakomerno Cauchyjeva na D, t.j.:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > m \geq n_0 \forall x \in D : \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{m} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

Izrek (Weierstrassov kriterij za enakomerno konvergenco funkcijskih vrst, M-test):

Naj bo $\{u_n : D \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje. Denimo, da obstaja konvergentna številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ s pozitivnimi členi, za katero velja

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$$

Potem funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira enakomerno (in absolutno) na D. Če se u_n zvezne na D, potem je tudi vsota vrste zvezna na D.

Dokaz: Iz $|u_n(x)| \leq c_n \forall x \in D$ z uporabo primerjalnega kriterija sledi, da $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ konvergira za vsak x. Torej vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ po točkah absolutno konvergira, zato konvergira po točkah.

Dokažimo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ enakomerno Cauchyjeva. Naj bo $k > m$, potem za vsak $x \in D$ velja

$$\left| \sum_{n=1}^{k} u_n(x) - \sum n = 1^m u_n(x) \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{k} u_n(x) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{k} |u_n(x)| \leq \sum_{n=m+1}^{k} c_n < \varepsilon$$

Konvergentna številska vrsta je Cauchyjeva, zato obstaja n_0, da za $k > m \geq n_0$ velja $\sum_{n=m+1}^{k} c_n < \varepsilon$

6.1 Integriranje in odvajanje funkcijskih zaporedij in vrst

Izrek: Naj bo $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje zveznih funkcij. Če funkcijsko zaporedje $\{f_n\}$ konvergira proti funkciji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ enakomernona $[a,b]$, potem velja

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Dokaz: Vemo, da je limitna funkcija zvezna na $[a,b]$. f_n konvergira proti f enakomerno na $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \leq$$
$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a)$$

Torej zaporedje konvergira za $n \geq n_0$.

Posledica: Naj bo $\{u_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje zveznih funkcij. Denimo, da $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ enakomerno konvergira na $[a,b]$. Potem velja

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x)dx \right)$$

Opomba: Enakomerno konvergentno funkcijsko vrsto iz zveznih funkcij lahko členoma integriramo.

Dokaz: (skica) Funkcijsko zaporedje delnih vsot enakomerno konvergira in uporabimo prejšnji izrek.

Izrek: Naj bo $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje zvezno odvedljivih funkcij. Denimo, da $\{f_n'\}$ enakomerno konvergira na $[a,b]$ proti funkciji $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ in denimo, da obstaja $c \in [a,b]$, da $\{f_n(c)\}$ konvergira. Potem $\{f_n\}$ konvergira enakomerno na $[a,b]$ k neki funkciji f in velja

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Opomba: Pri odvajanju izgubimo podatek o konstanti, zato potrebujemo da $\{f_n(c)\}$ konvergira za nek c. Primer $f_n(x) = n$.

DOKAZ: Ker je f_n' zvena funkcija, $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt$ za vse $x \in [a,b]$. Po prejšnjem izreku $\int_a^b f_n'(t)dt$ konvergira in celotna funkcija konvergira proti

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(c) = L + \int_c^x g(t)dt\right) = f(x)$$

Torej za vsak $x \in [a,b]$ obstaja $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Zato je f_n konvergentna po točkah.

Dokazati moramo še, da f_n enakomerno konvergira. Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \\
&= \left|f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt - \lim_{n\to\infty} f_n(c) - \int_c^x g(t)dt\right| = \\
&= \left|f_n(c) - \lim_{n\to\infty} f_n(c) + \int_c^x (f_n'(t) - g(t))dt\right| \leq \\
&\leq \underbrace{|f_n - \lim_{n\to\infty} f_n(c)|}_{<\varepsilon \text{ za velik } n} + \int_c^x \underbrace{|f_n'(t) - g(t)|}_{<\varepsilon \text{ za velik } n} dt < \varepsilon + \varepsilon(b-a)
\end{aligned}$$

$\square$

POSLEDICA: Naj bo $\{u_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje zvezno enakomernih funkcij. Denimo, da $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'$ konvergira enakomerno na $[a,b]$ in da obstaja $c \in [a,b]$, da $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ konvergira. Potem $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira enakomerno na $[a,b]$ in velja

$$\left(\sum_{n=n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

DOKAZ: Prejšenj izrek uporabimo na zaporedju delnih vsot.

6.2 Potenčne vrste

DEFINICIJA: Potenčna vrsta je vrsta oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

kjer je a_n številsko zaporedje in $c \in \mathbb{R}$. Rečemo tudi potenčna vrsta s *središčem* v c.

IZREK: Naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ potenčna vrsta. Obstaja $R \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$ z naslednjo lastnostjo:

- $\forall x, |x-c| < R$, je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ konvergentna in absolutno konvergentna
- $\forall x, |x-c| > R$, je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ divergentna.

R imanujemo *konvergenčni polmer*. Če je $r \in (0,R)$, potem potenčna vrsta na $[c-r, c+r]$ enakomerno konvergira. DOKAZ: za $c=0$.

Denimo, da potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira pri $x = x_0 \neq 0$. Naj bo $r \in (0, |x_0|)$. Dokazujemo, da vrsta enakomerno konvergira na $[-r, r]$. Uporabimo Wirestrassov M-test.

Vemo, da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konvergira, zato velja $\lim_{n\to\infty} |a_n x^n| = 0$. Zato obstaja $M \in \mathbb{R} : |a_n x_0^n| < M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

$$|a_n x^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n||r|^n \leq \frac{M}{|x_0|^n} r^n = M \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$ je geometrijska vrsta, z $q = \frac{r}{|x_0|} < 1$, zato konvergira. Po M-testu je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergenta in absolutno konvergentna in enakomerno konvergeira na $[-r, r]$. Velja

$$R = \sup\{|x_0|,\ x_0 \text{ vrsta konvergira}\}$$

Če za nek y_0 velja, da $\sum a_n y_0^n$ divergira, potem divergira za vse $y > y_0$. Če to ne bi veljalo, bi obstajal y_1, za katerega vrsta konvergira in po prejšnjem dokazu konvergira tudi za vse $y < y_1$, torej tudi y_0, kar je protislovje. Če ne obstaja y_0, za katerega vrsta divergira, potem je $R = \infty$.

POSLEDICA: naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ potenčna vrsta s konvergen"nim polmerom $R > 0$.

1. Vsota potenčne vrste je zvezna funkcija na $(c-R, c+R)$ (na $[c-r, c+r]$ konvergira enakomerno za vsak $r < R$.)
2. Vsoto potenčne vrste lahko členoma integriramo in členoma odvajamo na $(c-R, c+R)$. Konvergenčni polmer se ohrani.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$
$$\int_c^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-c)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$$

3. Vsota potenčne vrste je funkcija $C^\infty((c-R, c+R))$.

Izrek: Naj bo $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-c)^n$ potenčna vrsta in R njen konvergenčni polmer. Potem velja

1. $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, če ta limita obstaja
2. $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, če ta limita obstaja

Dokaz:

1. Uporabimo kvocientni kriterij. Obravnavamo absolutno konvergenco $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-c)^n$:

$$d_n = \frac{|a_{n+1}||x-c|^{n+1}}{|a_n||x-c|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x-c|$$
$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x-c| = |x-c| \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}_{\text{obstaja po predp.}} = |x-c|L$$

   Po kvocientnem kriteriju velja

   - $|x-c|L < 1 \iff |x-c| < \frac{1}{L}$ vrsta konvergira
   - $|x-c|L > 1 \iff |x-c| > \frac{1}{L}$ vrsta divergira

   Torej je $\frac{1}{L} = R$ in velja

$$\frac{1}{R} = L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

2. Podoben dokaz kot za točko (1).

$\square$

Izrek: (Cauchy – Hadamart) Za konvergenčni polmer R potenčne vrste $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-c)^n$ velja

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Dokaz: Omejimo se na vrste s središčem 0 $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$. Naj bo

$$a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$$

1. Denimo, da je $a = \infty$. Izberimo $x \neq 0$. ∞ je stekališče $\sqrt[n]{|a_n|}$. Torej obstajajo poljubno veliki indeksi n, da je $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|x|}$. Za te indekse n velja
$$|a_n||x|^n > 1$$
Torej ne velja, da je $\lim_{n\to\infty} |a_n x^n| = 0$, zato vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergira. Sledi, da je $R = 0$.

2. Denimo, da je $a \in [0, \infty)$. Izberimo poljuben $x, |x| < \frac{1}{a}$. Obstaja $q > 0$, da velja
$$|x| < \frac{1}{q} < \frac{1}{a}$$
Ker je a največje stekališče $\sqrt[n]{|a_n|}$, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja
$$\sqrt[n]{|a_n|} < q$$
Torej je $|a_n| \leq q^n$ za vse $n \geq n_0$. Zato je
$$|a_n x^n| \leq |qx|^n$$
za vse $n \geq n_0$. Po definiciji q-ja vemo
$$|qx| < 1$$
Po primerjalnem kriteriju vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolutno konvergira.

   Izberimo poljuben $x, |x| > \frac{1}{a}$, torej $a > \frac{1}{|x|}$. Obstajajo poljubno veliki indeksi, da je
$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|x|}$$
za te indekse n. Torej velja
$$|a_n x|^n > 1$$
Zato ne velja, da bi $|a_n x^n|$ konvergiralo proti 0, torej vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergira.

   Sledi, da je
$$a = \frac{1}{R}$$
$\square$.

Izrek (odvajanje in integriranj epotenčnih vrst): Naj bo konvergenčni polmer R dane potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = f(x)$ pozitiven. Potem imata vrsti, ki ju dobimo s členskim odvajanjem $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ in s členskim integriranjem $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$ tudi konvergenčen polmer R in velja

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} \\
\int_0^x f(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} \quad x \in (-R, R)
\end{aligned}
$$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \frac{1}{R} \\
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} &= \frac{1}{R} \\
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} &= \frac{1}{R}
\end{aligned}
$$

□

Izrek (Abelov izrek): Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. Če vrsta v $x = R$ konvergira, potem je njena vstoa zvezna v $x = R$. Simetrično velja za $x = -R$.

6.2.1 Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta

Naj bo p polinom stopnje n

$$p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$$

Za $a \in \mathbb{R}$ velja

$$
\begin{aligned}
p(a+h) &= a_0 + a_1(a+h) + a_2(a+h)^2 + \cdots + a_n(a+h)^n = \\
&= b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \cdots + b_n h^n
\end{aligned}
$$

Za izračun koeficienta b_0, je očitno da vstavimo $h = 0$ in dobimo $b_0 = p(a)$. S pomočjo odvajanja lahko pridobimo še ostale člene

$$
\begin{aligned}
p'(a+h) &= b_1 + 2b_2 h + \cdots + nb_n h^{n-1} \\
p'(a) &= b_1 \\
p''(a+h) &= 2b_2 + 2 \cdot 3b_3 h + \cdots + n \cdot (n-1) b_n h^{n-2} \\
p''(a) &= 2b_2
\end{aligned}
$$

Z nadaljevanjem tega postopka dobimo nasledenj polinom

$$p(a+h) = p(a) + p'(a)h + \frac{p''(a)}{2}h^2 + \frac{p'''(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

Definicija: Naj bo f n-krat odvedljiva funkcija v okolici točke a. Polinom

$$T_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

imenujemo n-ti *Taylorjev polinom* funkcije f pri a.

Opomba: Velja, če je f polinom stopnje n, potem

$$f(x) = T_{n,a}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

V resnici nas zanima

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

kjer je $R_{n,a}$ ostanek. Za uporabo je pomembno oceniti ostanek. $T_{n,a}$ in f imata v točki a vse odvode do reda n enake in aproksimacija bo „dobra" blizu a, če je n čim večji.

Taylorjev izrek: Naj bo funkcija f $(n+1)$-krat odvedljiva na odprtem intervalu I, ki vsebuje a. Potem za vsak $x \in I$ obstaja $c \in I$ med a in x, da velja

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Dokaz: Po definiciji R velja

$$R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$$

Vemo, da $R_{n,a}(a) = 0$ in $R_{n,a}^{(k)}(a) = 0$ za $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Fiksiramo x in vemo, da obstaja $s \in \mathbb{R}$, da velja

$$R_{n,a}(x) = s(x-a)^{n+1}$$

Definiramo funkcijo

$$G(y) = R_{n,a}(y) - s(y-a)^{n+1}$$

Velja

$$G(x) = 0 \qquad\qquad G^{(k)}(a) = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Po Rollovem izrek obstaja c_1 med a in x: $G'(c_1) = 0$. Ponovno uporabimo Rollov izrek in obstaja c_2 med a in c_1: $G''(c_2) = 0$. Ta postopek nadaljujemo in obstaja c: $G^{(n+1)}(c) = 0$. Iz tu sledi

$$\begin{aligned} G^{(n+1)}(y) &= (R_{n,a}(y))^{(n+1)} - (s(y-a)^{n+1})^{(n+1)} = \\ &= (f(y) - T_{n,a}(y))^{(n+1)} - (n+1)!s = f^{(n+1)}(y) - s(n+1)! \end{aligned}$$

Iz enakosti

$$R_{n,a}(x) = s(x-a)^{n+1}$$

sledi

$$s = \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+a}}$$

Torej velja

$$\begin{aligned} G^{(n+1)}(c) &= 0 \\ f^{(n+1)}(c) - (n+1)!\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} &= 0 \\ R_{n,a}(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

□

Definicija: Če je f neskončnokrat odvedljiva v okolici točke a, ji lahko priredimo *Taylorjevo vrsto*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \lim_{k\to\infty} T_{k,a}(x)$$

Za tiste x, za katere limita obstaja, t.j. za tiste x, za katere vrsta konvergira.

Opomba: Taylorjeva vrsta je potenčna vrsta s konvergenčnim območjem.

Pozor: Vsota Taylorjeve vrste, ki je prirejena f, ni nujno f.

Izrek: Denimo, da je funkcija f vsota konvergentne potenčne vrste

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad |x| < R \land R > 0$$

Potem za vsak $|a| < R$ velja

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

za vse $x, |x-a| < R-|a|$. T.j. f je vsota prirejene Taylorjeve vrste.

Dokaz: Za $a=0$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad f(0)=c_0$$

Na $(-R,R)$ potenčno vrsto členoma odvajamo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\
f'(0) &= c_1 \\
f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n x^{n-k} \\
f^{(k)}(0) &= k(k-1)\cdots 1 c_k = k! c_k \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}
\end{aligned}$$

Torej za $a=0$ izrek velja.

Za $a \neq 0$ definiramo $x=(x-a)+a$. Velja

$$x^n = ((x-a)+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (x-a)^k$$

To vstavimo v prvotno vrsto in dobimo

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=n}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_n \binom{n}{k} a^{n-k} (x-a)^k = \\
= \sum_{k=}^{\infty} \left(\underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} c_n \binom{n}{k} a^{n-k}}_{d_k} \right) (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x-a)^k
\end{aligned}$$

Na enak način kot v prvem delu dokaza dobimo

$$d_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

□

Definicija: Naj bo I odprt interval. Pravimo, da je funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ *realno analitična* na intervalu I, če

$$\forall a \in I \exists r_a > 0 : (a-r_a, a+r_a) \subset I$$

in je f na $(a-r_a, a+r_a)$ vsota konvergentne potenčne vrste s središčem v a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

za vse $x \in (a-r_a, a+r_a)$

Oznaka: $C^{\omega}(I)$ ... razred vseh realno analitičnih funkcij na I.

Opombe:

1. Od prej vemo, da je $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, torej je f vsota prirejene Taylorjeve vrste na neki okolici točke a.
2. $C^{\omega}(I) \subsetneq C^{\infty}(I)$

Taylorjev izrek (splošna oblika ostanka): Naj bo I odprt interval in $f \in C^{n+1}(I)$ Za vsak $x \in I, a \in I$ in $p \in \{0, \ldots, n+1\}$ obstaja c med a in x, da velja

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

kjer je

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{pn!}(x-a)^p(x-c)^{n+1-p}$$

Opomba: Pri $p = n+1$

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Dokaz: Naj bodo $a, x, b \in I, p \in \{0, \ldots, n+1\}$. Definiramo funkcijo

$$\begin{aligned} F(x) &= T_{n,x}(b) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p R_{n,a}(b) = \\ &= f(x) + f'(x)(b-x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p R_{n,a}(b) \end{aligned}$$

Velja

$$\begin{aligned} F(a) &= T_{n,a}(b) + R_{n,a}(b) = f(b) \\ F(b) &= f(b) \end{aligned}$$

Po Rollovem izreku obstaja c med a in b, da je $F'(c) = 0$. Velja

$$F'(x) = f'(x)+f'(x)(-1)+f''(x)(b-x)+f''(x)(-1)+f'''(x)\frac{(b-x)^2}{2}+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}(-1)+\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n+p\frac{(b-x)^{p-1}}{(b-a)^p}R_{n,a}(b)(-1)$$

Večino členov se pokrajša in dobimo

$$F'(c) = 0 = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n - p\frac{(b-c)^{p-1}}{(b-a)^p}R_{n,a}(b)$$

Torej velja

$$R_{n,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{pn!}(b-c)^{n-p+1}(b-a)^p$$

□

6.2.2 Taylorjeve vrste osnovnih funkcij

1. **Eksponentna funkcija** $f(x) = e^x$ okrog 0.

   Prirejena Taylorjeva vrsta

   $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

   Dokazati je treba $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

   $$e^x = T_{n,0}(x) + R_{n,0}(x)$$

   $T_{n,0}(x)$ konvergira proti $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, zato je treba dokazati, da za fiksen x velja

   $$\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$$

   Fiksiramo x:

   $$|R_{n,0}(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq$$

   $$\leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^{|x|}\frac{\overbrace{|x|\cdot|x|\cdots|x|}^{n+1}}{1\cdot 2\cdots(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

   Torej velja

   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. **Sinus, kosinus** okoli 0

   Prirejena Taylorjeva vrsta:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

   Za fiksen x velja

$$|R_{n,0}(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Podobno dokažemo za kosinus in velja

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. **Logaritemska funkcija**

$$f(x) = \ln(x+1)$$

   razvijemo v Taylorjevo vrsto s središčem v 0. Velja $D_f = (-1, \infty)$. Velja

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

   za $x \in (-1, 1)$ ($R = 1$). Z integracijo po členih dobimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + C$$

   Za izračun konstante vstavimo $x = 0$ in dobimo

$$f(0) = 0 = C \Rightarrow C = 0$$

   Torej velja

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

   Primer: Razvoj funkcije $\ln x$ okrog točke $a > 0$.

$$\ln x = \ln(a + (x-a)) = \ln\left(a\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)\right)$$

Če je $\left|\frac{x-a}{a} < 1\right|$ velja

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(a\left(1+\frac{x-a}{a}\right)\right) = \\
&= \ln a + \ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right) = \ln a + \frac{x-a}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{x-a}{a}\right)^n + \cdots = \\
&\quad = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{na^n}(x-a)^n + \cdots
\end{aligned}
$$

velja za $|x-a| < |a|$.

4. **Binomska vrsta**

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Razvoj v Taylorjevo vrsto okrog 0. Za funkcijo velja $D_f = (-1, \infty)$. Vemo

$$
\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \\
f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)
\end{aligned}
$$

Prirejena Taylorjeva vrsta je torej

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Defnirajmo *posplošen binomski simbol*

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$$

Dokažimo, da velja

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

za $x \in (-1, 1)$.

$x \in (0,1)$: Za $c \in (0, x)$ velja

$$
\begin{aligned}
|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1}\right| \leq \\
&\leq \underbrace{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| |x|^{n+1} 2^\alpha}_{a_n}
\end{aligned}
$$

Za zgornjo oceno smo uporabili sledečo oceno

$$(1+c)^{\alpha-n-1} = \underbrace{|(1+c)^{\alpha}|}_{\leq 2^{\alpha}} \underbrace{|(1+c)^{-n-1}|}_{\leq 1} \leq 2^{\alpha}$$

Pri fiksnem x dokazujemo $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dovolj je dokazati, da številska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira. Uporabimo kvocientni kriterij

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(\alpha-n-1)||x|^{n+2}2^{\alpha}(n+1)!}{(n+2)!|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)||x|^{n+1}2^{\alpha}} =$$

$$= \frac{|\alpha-n-1|}{n+2}|x| \xrightarrow{n\to\infty} |x|$$

Če je $|x| < 1$, potem $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira (za naš x to velja).

$x \in (-1, 0)$: Za $c \in (x, 0$ uporabimo oceno za ostanek pri $p = 1$:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{1\cdot n!}x(x-c)^n\right| =$$

$$= \left|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+c)^{\alpha-n-1}\right|\frac{1}{n!}|x||x-c|^n \leq$$

$$\leq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right| M \left|\frac{x}{1+c}\right| \left|\frac{x-c}{1+c}\right|^n$$

Za določiti M smo uporabili

$$\alpha \geq 0 : 0 < 1+c < 1 \Rightarrow (1+c)^{\alpha} < 1$$
$$\alpha < 0 : 0 < 1+x < 1+c < 1 \Rightarrow (1+c)^{\alpha} \leq (1+x)^{\alpha}$$

Sledi, da je $M = \max\{1, (1+x)^{\alpha}\}$.

$\left|\frac{x}{1+c}\right|$ ocenimo z

$$\left|\frac{x}{1+c}\right| \leq \left|\frac{x}{1+x}\right|$$

Za oceno $\left|\frac{x-c}{1+c}\right|$ definiramo $g(c) = \frac{x-c}{1+c}$ in iščemo maksimum te funkcije. Velja

$$g'(c) = \frac{-(1+c)-(x-c)}{(1+c)^2} = \frac{-1-x}{(1+c)^2} < 0$$

Za $g(c)$ vemo, da je $g(c) < 0$ in je strogo padajoča. Torej je največja vrednost $|g(c)| \leq |g(0)| = |x|$. Tako smo dobili oceno

$$|R_n(x)| \leq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right| M \left|\frac{x}{1+x}\right| |x|^n$$

Na enak način kot prej dokažemo, da gre $|R_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ pri fiksnem x.

7 Metrični prostori

Metrični prostor je množica M, kjer je za vsak par točk $x, y \in M$ definirana razdalja $d(x, y)$. Lastnosti, ki jih od razdalje pričakujemo združimo v naslednji definiciji:

Definicija: *Metrični prostor* je neprazna množica M skupaj s preslikavo $d : M \times M \to \mathbb{R}$, ki ustreza pogojem

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M \quad \text{in} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. *trikotniška neenakost:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in M$

Preslikavo d imenujemo *metrika* ali *razdalja* na M, par (M, d) imenujemo *metrični prostor*.

Definicija: Naj bo (M, d) metrični prostor in naj bo $a \in M, r > 0$.

Odprta krogla s središčem v a in polmerom r je množica

$$K(a, r) = \{x \in M, d(a, x) < r\}$$

Zaprta krogla s središčem v a in polmerom r je množica

$$\overline{K}(a, r) = \{x \in M d(a, x) \leq r\}$$

Okolica točke a je vsaka taka podmnožica M, ki vsebuje neko kroglo s središčem v a in pozitivnim polmerom.

Definicija: Naj bo (M, d) metrični prostor in naj bo $A \subset M$.

(i) Točka $a \in M$ je *notranja točka* množici A, če obstaja kakšna okolica točke a, ki vsa leži v množici A.

$$\exists r > 0 : K(a, r) \subset A$$

(ii) Točka $a \in M$ je *zunanja točka* množice A, če obstaja vsaj ena okoica točke a, ki ne vsebuje nobene točke iz A.

$$\exists r > 0 : K(a, r) \cap A = \varnothing$$

(iii) Točka $a \in M$ je *robna točka* množice A, če vsaka njena okolica seka A in $A^c = M \setminus A$.

$$\forall r > 0 : (K(a,r) \cap A \neq \varnothing \wedge K(a,r) \cap (M \setminus A) \neq \varnothing)$$

Množico vseh notranjih točk označimo z $\mathring{A}$ ali z $\operatorname{Int} A$ in jo imenujemo *notranjost* množice A.

Množico vseh robnih točk označimo z ∂A ali z $\operatorname{Meja} A$ in jo imenujemo *rob* ali *meja množice* A.

Opombe:

1. Zunanje točke množice A so natanko notranje množice A^c.
2. $M = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int}(A^c) \cup \operatorname{Meja} A$, pri čemer so te množice paroma disjunktne.
3. Vsaka notranja točka množice A leži v A ($\operatorname{Int} A \subset A$).
4. Nobena zunanja točka množice A ne leži v A.
5. Robne točke lahko ležijo v A ali v A^c.
6. Notranja točka množice A je zunanja točka množice A^c.
7. Robna točka množice A je tudi robna točka množice A^c in obratno.

Definicija: Naj bo (M, d) metrični prostor.

Pravimo, da je podmnožica O *odprta*, če je vsaka njena točka notranja točka množice O.

Pravimo, da je podmnožica $Z \subset M$ *zaprta*, če vsebuje vse svoje robne točke.

Opombi:

$$O \subset M \text{ je odprta} \iff \operatorname{Int} O = O$$
$$Z \subset M \text{ je zaprta} \iff \partial Z \subset Z$$

Trditev: Naj bo (M, d) metrični prostor in $A \subset M$. Potem je A odprta natanko takrat, kadar je A^c zaprt.

Dokaz: Recimo, da je $O \subset M$ odprta. Torej $O = \operatorname{Int} O$. Zato ležijo robne točke množice O v O^c. torej vse robne točke O^c ležijo v O^c. Zato je O^c zaprta množica.

Reicmo, da je $Z \subset M$ zaprta. Potem Z vsebuje svoje robne točke. Ker so robne točke Z in Z^c enake, Z^c vsebuje samo notranje točke, torej je Z^c opdrt.

Izrek: Naj bo $\mathcal{O}$ družina vseh odprtih množic metričnega prostora (M, d). Potem velja

(1) $M \in \mathcal{O}, \quad \varnothing \in \mathcal{O}$

(2) Unija poljubne družine odprtih množic je odprta, t.j. za poljubno množico Λ in za poljubno družino $A_\lambda \in \mathcal{O}$ velja

$$\forall \lambda \in \Lambda : \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}$$

(3) Presek končnega števila odprtih množic je odprta množica.

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{O}$$

Dokaz:

(1) Vemo od prej.

(2) Izberemo $\Lambda, A_\lambda \in \mathcal{O}$ za vsakn $\lambda \in \Lambda$. Dokazujemo, da je $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ odprta. Izberemo poljubno točko $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ in dokazujemo, da je notranja točka od $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Vemo

$$\exists \lambda \in \Lambda : a \in A_\lambda$$

Ker je A_λ odprta, je a notranja točka od A_λ, zato

$$\exists r > 0 : K(a, r) \subset A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

Torej je $a \in \operatorname{Int}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$.

(3) Dovolj je dokazati za $n = 2$, naprej nadaljujemo induktivno po istem postopku.

Naj bosta $A_1, A_2 \in \mathcal{O}$. Dokazujemo, da je $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{O}$.

- Če je $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, je presek odrpt.
- Če $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, izberemo poljuben $a \in A_1 \cap A_2$. Velja $a \in A_1 \wedge a \in A_2$. Ker sta A_1 in A_2 odprti, je a notranja točka obeh.

  $$(\exists r_1 > 0 : K(a, r_1) \subset A_1) \wedge (\exists r_2 > 0 : K(a, r_2) \subset A_2)$$

  Izberemo $r = \min\{r_1, r_2\}$ in velja

  $$K(a, r) \subset A_1 \cap A_2 \Rightarrow a \in \operatorname{Int}(A_1 \cap A_2)$$

  Zato je $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{O}$.

Opomba: Za števno (neskončne) preseke ni nujno res, da bi bil presek odprtih množic odprt. Protiprimer $\mathbb{R}^2$ z običajno metriko in družina množic $A_n = K\left(0, \frac{1}{n}\right)$. A_n je odrpta za vsak $n \in \mathbb{N}$, vendar

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{(0, 0)\}$$

ni odprta množica.

Posledica: Naj bo $\mathcal{Z}$ družina vseh zaprtih množic metričnega prostora (M, d). Velja

(1) $M \in \mathcal{Z}, \quad \varnothing \in \mathcal{Z}$

(2) Unija končnega števila zaprtih množic je zaprta množica.

$$\forall n \in \mathbb{N}, Z_1, \ldots Z_n \in \mathcal{Z} : \bigcup_{i=1}^{n} Z_i \in \mathcal{Z}$$

(3) Presek poljubne družine zaprtih množic je zaprt.

$$\forall \Lambda \forall Z_\lambda \in \mathcal{Z} : \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \in \mathcal{Z}$$

Dokaz: (1) vemo, (2) in (3) se dokaže podobno. Dokažimo (3):

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \lambda} Z_\lambda \right)^c = \underbrace{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \underbrace{(Z_\lambda)^c}_{\text{odprt}}}_{\text{odprt}}$$

Posledica: Vsaka končna podmnožica v metričnem prostoru je zaprta.

Dokaz: Vemo, da je $\{x\}$ zaprta.

Trditev: naj bo (M, d) metrični prostor. Vsaka odrpta krogla je odprta množica in vsaka zaprta krogla je zparta množica.

Dokaz: naj bo $a \in M$ in $r > 0$. Potem je

$$K(a,r) = \{x \in M, d(a,x) < r\}$$

Dokazujemo, da je $K(a,r)$ odprta množica, t.j.: $\forall x \in K(a,r)$ je x notranja točka $K(a,r)$. Iščemo $r' > 0 : K(x,r') \subset K(a,r)$. Naj bo

$$r' := (r - d(a,x))$$

Izberemo $y \in K(x,r') : d(x,y) < r'$ in dokazujemo $y \in K(a,r)$, t.j. $d(a,y) < r$.

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r - d(a,x) = r$$

Za zaprte krogle dokažemo, da je komplement zaprte krogle odprt, na podoben način kot zgoraj.

Definicija: Naj bo A podmnožica v metri'cnem prostoru (M,d). Z $\overline{A}$ označimo množico $A \cup \partial A$ in jo imenujemo *zaprtje* množice A.

Velja:

1. $\overline{A}$ je zaprta množica (ker je $\overline{A}^c$ odprt).
2. $\overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{A}$

Opomba: V splošnem ne velja

$$\overline{K(a,r)} = \overline{K}(a,r)$$

Definicija: Naj bo (M,d) metrični prostor. Podmnožica $A \subset M$ je *omejena*, če leži v neki krogli, t.j.

$$\exists a \in M \exists r > 0 : A \subset K(a,r)$$

Metrični prostor (M,d) je *omejen*, če je M omejena podmnožica.

Definicija: Naj bo (M,d) metrični prostor in $A \subset M$. Pravimo, da je točka $a \in M$ *stekališče množice* A, če vsaka okolica točke a vsebuje neskončno točk množice A.

Pozor: To ni analogna definicija stekališča zaporedja.

Opomba: Stekališča množice imajo lahko samo neskončne množice.

IZREK: Naj bo (M, d) metrični prostor in $A \subset M$. Točka $a \in M$ je stekališče množice A natanko tedaj, kadar vsaka okolica točke a vsebuje vsaj eno od a različno točko množice A.

DOKAZ:

($\Rightarrow$) Očitno, direktno iz definicije.

($\Leftarrow$) Naj bo U poljubna okolica točke a. Dokazujemo, da v U leži neskončno točk iz A. Po predpostavki obstaja $a_1 \in U, a_1 \in A, a_1 \neq a$. Naj bo

$$U_2 = K(a, d(a, a_1))$$

U_2 je okolica točke a in $a_1 \notin U_2$. Po predpostavki $\exists a_2 \in U_2, a_2 \in A, a_2 \neq a$. Postopek nadaljujemo in dobimo $a_1, a_2, \ldots$, ki so med seboj različne in vse le'zijo v U (in v A).

$\square$

POSLEDICA: Naj bo (M, d) metrični prostor in $A \subset M$. Množica A je zaprta natanko tedaj, kadar vsebuje vsa svoje stekališča.

DOKAZ: Stekališče množice A ni zunanja točka A. Zato je bodisi notranja, bodisi robna točka množice A.

($\Rightarrow$) Če je A zaprta, potem A vsebuje vse svoje robne točke, zato vsebuje vsa svoja stekališča.

($\Leftarrow$) Denimo, da A ni zaprta. Potem obstaja neka robna točka b množice A, ki ne leži v A. Po definiciji robne točke vsaka njena okolica seka A in A^c. Ker $b \notin A$ je torej v vsaki okolici b vsaj ena točka $a \in A, a \neq b$. Torej je po izreku točka b stekališče množice A, zato A ne vsebuje vseh svojih stekališč. $\rightarrow\leftarrow$

$\square$

POSLEDICA: Naj bo (M, d) metrični prostor in $A \subset M$. Potem je množica vseh stekališč množice A zaprta.

Dokaz: S naj bo množica vseh stekališč množice A. Dokazujemo, da je $M \setminus S$ odprta množica. Izberemo poljuben $x \in M \setminus S$ in dokazujemo, da je notranja točka $M \setminus S$. Obstaja $r > 0 : K(x,r) \cap A \subset \{x\}$.

$$x' \in K(x,r) : K(x', \min\{r - d(x,x'), d(x,x')\}) \cap A = \varnothing$$

Zato $x' \neq S$.

□

7.1 Zaporedja v metričnih prostorih

Definicija: Zaporedje v metričnem prostoru (M,d) je preslikava $\varphi : \mathbb{N} \to M$. Točko $\varphi(n)$ imenujemo n-ti člen zaporedja in pišemo $a_n = \varphi(n)$.

Definicija: Pravimo, da je točka $a \in M$ *stekališče* zaporedja $\{a_n\}$, če vsaka njena okolica vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja, t.j.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ neskončno indeksov } n : d(a, a_n) < \varepsilon$$

Definicija: Pravimo, da zaporedje $\{a_n\}$ v M *konvergira* proti $a \in M$, če vsaka okolica točke a vsebuje vse člene zaporedja od nekega indeksa naprej, t.j.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(a, a_n) < \varepsilon$$

V tem primeru a imenujemo *limita zaporedja* $\{a_n\}$ in pišemo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Opombe:

- Če je zaporedje $\{a_n\}$ v M konvergentno z limito $a \in M$, potem je a stekališče zaporedja.
- Ni vsako stekališče limita.
- Limita je edino stekališče konvergentnega zaporedja.

  Dokaz: Denimo, da je $\{a_n\}$ v M konvergentno z limito $a \in M$. Recimo, da je $b \in M, b \neq a$. Dokazujemo, da b ni stekališče. Naj bo $\varepsilon = \frac{1}{2} d(a,b) > 0$. Velja

  $$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(a, a_n) < \varepsilon$$

Poglejmo si razdaljo

$$d(b, a_n) \geq \underbrace{d(b, a)}_{2\varepsilon} - \underbrace{d(a, a_n)}_{<\varepsilon} \geq \varepsilon$$

za vse $n \geq n_0$. Torej b ni stekališče, ker v $K(b, \varepsilon)$ leži kvečjemo prvih n_0 členov zaporedja

DEFINICIJA: Pravimo, da zaporedje $\{a_n\}$ v metričnem prostoru (M, d) zadošča *Cauchyjevem pogoju* če

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

IZREK: Vsako konvergentno zaporedje v (M, d) je Cauchyjevo.

DOKAZ: Recimo, da $\{a_n\}$ v M konvergira z limito $a \in M$. Torej velja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(a, a_n) < \varepsilon$$

Za $n, m \geq n_0$ velja

$$d(a_n, a_m) \leq \underbrace{d(a_n, a)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(a, a_m)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

Zato je zaporedje $\{a_n\}$ Cauchyjevo.

PRIMER: Naj bo $M = \{1, \frac{1}{2}, \ldots\} = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ z inducirano razdaljo v $\mathbb{R}$. Obstaja zaporedje v M, ki je Cauchyjevo, ni pa konvergentno. Primer takega zaporedja je $a_n = \frac{1}{n}$. Zaporedje $\{a_n\}$ je konvergenton zaporedje v $\mathbb{R}$ z limito 0. Vemo, da je v vsakem metričnem prostoru konvergentno zaporedje Cauchyjejvo. Naše zaporedje je torej Cauchyjevo v $\mathbb{R}$ in zato tudi v M, ni pa konvergentno, ker točke 0 ni v M.

DEFINICIJA: Naj bo (M, d) metrični prostor. Pravimo, da je M *poln*, če je vsako Cauchyjevo zaporedje v M konvergentno v M.

IZREK: Naj bo $C[a, b]$ metrični prostor zveznih funkcij s standardno metriko (max. metrika). Zaporedje $\{f_n\}$ v $C[a, b]$ konvergira proti $f \in C[a, b]$ natanko tedaj, kadar funkcijsko zaporedje proti f konvergira enakomerno na $[a, b]$.

DOKAZ:

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \in C[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(f, f_n) < \varepsilon \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \iff$$

$$\forall x \in [a, b] : \iff |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \iff f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ enakomerno na } [a, b]$$

Opomba: Zvene funkcije z običajno metriko: konvergentna v $C[a,b]$ je natanko enakomerna konvergenca na $[a,b]$.

Izrek: Metrični prostor $C[a,b]$ z običajno metriko je poln.

Dokaz: Naj bo $\{f_n\}$ Cauchyjevo zaporedje v $C[a,b]$. Dokazujemo, da je konvergentno. Vemo

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : \quad \underbrace{d(f_n, f_m)}_{\max_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f_m(x)|} \quad < \varepsilon$$

Naj bo $x \in [a,b] : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ za vse $m, n \geq n_0$. $\{f_n(x)\}$ je Cauchyjevo (v $\mathbb{R}$) zato je konvergentno in njegovo limito označimo z $f(x)$. S tem smo dobili limitno funkcijo f po točkah. Dokazujemo, da f_n proti f konvergira v $C[a,b]$. Vemo

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 \forall x \in [a,b] : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Ko pošljemo m proti neskončno za dani ε dobimo, da za dani ε in vsak $n \geq n_0$ velja

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$$

Torej f_n konvergira proti f enakomerno na $[a,b]$. Po izreku torej f_n konvergira proti f v $C[a,b]$.

7.2 Kompaktnost

Definicija: Naj bo (M,d) metrični prostor in naj bo $K \subset M$. Pravimo, da je družina množic $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *pokritje* množice K, če velja

$$A_\gamma \subset M \forall \gamma \in \Gamma \quad \text{in} \quad K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$$

Če so vse množice A_γ odprte, pravimo da je $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *odprto pokritje* K.

Če so vse A_γ zaprte, potem je $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *zaprto pokritje*.

Če je v družini le končno množic, je to *končno pokritje*.

Podpokritje pokritja $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ je vsaka poddružina $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, ki je pokritje od K.

Definicija: Naj bo (M,d) metrični prostor. Pravimo, da je podmnožica $K \subset M$ *kompaktna*, če vsako odprto pokritje $(O_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ vsebuje končno podpokritje.

Pravimo, da je M *kompakten* metrični prostor, če je množica M kompaktna množica.

Izrek: Vsaka kompaktna podmnožica K v metričnem prostoru (M, d) je zaprta in omejena.

Dokaz: K je omejena

K je kompaktna $\iff$ za vsako odprto pokritje K obstaja končno podpokritje

K je omejena $\iff \exists a \in M, \exists r > 0 : K \subset K(a, r)$

Izberemo $a \in M$. $\{K(a, n), n \in \mathbb{N}\}$ je odprto pokritje K. Ker je K kompaktno, obstaja končno podpokritje

$$K \subset K(a, n_1) \cup K(a, n_2), \cup \cdots \cup K(a, n_m)$$

Naj bo $N := \max\{n_1, \ldots, n_m\}$. Potem je $K \subset K(a, N)$, zato je omejena.

K je zaprta $\iff$ K^c je odprt

Izberemo poljuben $c \in M \setminus K$ in dokazujemo, da je notranja točka K^c.

$$O_r = \{x \in M : d(x, c) > r\} = \left(\overline{K}(c, r)\right)^c$$

Velja

$$K \subset \bigcup_{r>0} O_r = M \setminus \{c\}$$

Zaradi kompaktnosti K obstaja končno podpokritje:

$$K \subset O_{r_1} \cup O_{r_2} \cup \cdots \cup O_{r_k} = O_r$$

kjer je $r := \min\{r_1, \ldots, r_k\}$. Torej je $K \subset \left(\overline{K}(c, r)\right)^c$. Od tod sledi $\overline{K}(c, r) \subset K^c$. Zato je c notranja točka v K^c.

$\square$

Izrek: Vsaka zaprta podmnožica Z kompaktne množice K v metričnem prostoru (M, d) je kompaktna.

Dokaz: Naj bo Z zaprta podmnožica kompaktne množice K, t.j. $Z \subset K$. Vemo, da je Z^c odprt v M. Naj bo $\{O_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ odprto pokritje množice Z.

$$\{O_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \cup Z^c$$

je odprto pokritje M in zato tudi K. Ker je K kompaktna, obstaja končno podpokritje

$$Z \subset K \subset O_{\gamma_1} \cup O_{\gamma_2} \cup \cdots \cup O_{\gamma_k} \cup Z^c$$

Torej je

$$Z \subset O_{\gamma_1} \cup O_{\gamma_2} \cup \cdots \cup O_{\gamma_k}$$

zato je Z kompaktna.

□

IZREK (Heine – Borel): Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ z običajno metriko. A je kompaktna natanko takrat, kadar je zaprta in omejena.

Opomba: Izrek velja tudi za podmno"ice v $\mathbb{R}^n$.

DOKAZ:

- (⇒) Vemo po izreku.
- (⇐) Naj bo A zaprta in omejena. Ker je A omejena, obstajata $a < b : A \subset [a, b]$. Ker je A zaprta podmnožica kompaktne množice, je kompaktna.

□

LEMA 1: Naj bo $\{I_n\}$ zaporedje vloženih zaprtih intervalov v $\mathbb{R}$, t.j. $I_{n+1} \subset I_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potem velja

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \neq \varnothing$$

DOKAZ: $I_n = [a_n, b_n]$. $\{a_n\}$ je naraščajoče in navzgor omejeno (z b_1), zato je konvergentno in označimo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Velja

$$a_n \leq a \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Od tod sledi $a \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

LEMA 2: naj bo $\{P_n\}$ padajoče zaporejde kvadrov v $\mathbb{R}^k$, t.j.

$$P_n = [a_1^n, b_1^n] \times [a_2^n, b_2^n] \times \cdots \times [a_k^n, b_k^n]$$

Potem je $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n \neq \varnothing$.

DOKAZ: Dokaz analogen dokazu Leme 1.

Lema 3: Kvader $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ je kompakten v $\mathbb{R}^k$ z evklidsko metriko.

Dokaz: Dolžina diagonale v P je

$$\delta := \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i)^2}$$

in velja $\forall x, y \in P : d(x, y) \leq \delta$.

Denimo, da P ni kompakten. Potem obstaja odprto pokritje $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ kvadra P, ki nima končnega podpokritja. Naj bo

$$c_j := \frac{a_j + b_j}{2}$$

Intervali $[a_j, c_j], [c_j, b_j]$ določajo 2^k kvadrov Q_j, katerih unija je P. Vsaj enega od kvadrov Q_j ne moremo pokriti s končno mnogo članicami pokritja $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Postopek nadaljujemo in na ta način dobimo zaporedje kvadrov

$$P_j : P \supset P_1 \supset P_2 \supset \cdots$$

za katerega velja $P_{j+1} \subset P_j$ in nobenega kvadra ne moremo pokriti s končno mnogo O_γ. Po lemi 2 obstaja $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$ in obstaja $\gamma \in \Gamma : x \in O_\gamma$, kjer je O_γ odprta množica. Vemo, da je dolžina diagonale $P_j = 2^{-j}\delta$, zato obstaja P_j, da velja $P_j \subset O_\gamma$. Torej smo našli kvader, ki ga lahko pokrijemo s končno mnogo O_γ. $\rightarrow\leftarrow$

Torej je P kompaktna.

$\square$

Zato velja:

Izrek (Heine – Borel: Naj bo $E \subset \mathbb{R}^k$ z evklidsko metriko. Množica E je kompaktna natanko takrat, kadar je E zaprta in omejena.

Izrek: Vsaka neskončna množica točk A, ki leži v kompaktni podmnožici K metričnega prostora (M, d) ima stekališče v K.

Dokaz: Denimo, da A nima stekališča v K. Torej za poljuben $x \in K$ velja, da obstaja $r_x > 0 : K(x, r_x) \cap A$ je kvečjemu končna.

$$\{K(x, r_x) : x \in K\}$$

je odprto pokritje K. Obstaja končno podpokritje

$$K \subset K(x_1, r_{x_1}) \cup \cdots \cup K(x_k, r_{x_k})$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} A \cap K \subset A \cap (K(x_1, r_{x_1}) \cup K(x_2, r_{x_2}) \cup \cdots \cup K(x_k, r_{x_k})) = \\ = \underbrace{(A \cap K(x_1, r_{x_1})) \cup \cdots \cup (A \cap K(x_k, r_{x_k}))}_{\text{kvečjemu končna}} \end{aligned}$$

$A \cap K$ je neskončna $\rightarrow\leftarrow$

Izrek: Naj bo K kompaktna podmnožica v metričnem prostoru (M, d). Tedaj ima poljubno zaporedje $\{a_n\}$ v K vsaj eno stekališče.

Dokaz: Denimo, da nobena točka iz K ni stekališ'ce $\{a_n\}$. Potem za vsak $x \in K$ obstaja $r_x > 0$, da v $K(x, r_x)$ leži kvečjem končno členov zaporedja.

$$\{K(x, r_x) : x \in K\}$$

je odprto pokritje kompaktne množice K. Obstaja končno podpokritje

$$K \subset \underbrace{K(x_1, r_{x_1}) \cup \cdots \cup K(x_k, r_{x_k})}_{\text{v tej uniji leži kvečjemu končno členov zaporedja}}$$

V K leži neskončno mnogo členov zaporedja. $\rightarrow\leftarrow$.

Posledica: Naj bo $\{a_n\}$ zaporedje v kompaktni množici K v metričnem prostoru (M, d). Tedaj ima $\{a_n\}$ konvergentno podzaporedje (z limito v K).

Dokaz: Kot pri realnih zaporedjih dokažemo: za vsako stekališče s zaporedja $\{a_n\}$ obstaja konvergentno podzaporedje z limito s.

Izrek: Vsak kmopakten metrični prostor je poln.

Lema: Če je a stekališče Cauchyjevega zaporedja $\{a_n\}$ v metričnem prostoru (M, d), potem je $\{a_n\}$ konvergentno zaporedje z limito a.

Dokaz (izrek): M je kompakten. Izberemo poljubno Cauchyjevo zaporedje $\{a_n\}$ v M. Po izreku ima $\{a_n\}$ stekališče a v M, ki je po lemi limita zaporedja $\{a_n\}$.

$\square$

Dokaz (Leme): a je stekališče $\{a_n\} \iff \forall \varepsilon > 0$ obstaja neskončno mnogo indeksov $n \in \mathbb{N}$, za katere velja

$$a_n \in K(a, \varepsilon) \iff d(a, a_n) < \varepsilon$$

$\{a_n\}$ je Cauchyjevo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

Ker je a stekališče, obstaja $n_1 \geq n_0 : d(a, a_{n_1}) < \varepsilon$ in velja

$$\forall m \geq n_0 : d(a, a_m) \leq \underbrace{d(a, a_{n_1})}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(a_{n_1}, a_m)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

Od tod sledi, da je $a = \lim_{n \to \infty} a_n$.

DEFINICIJA: Metrični prostor (M, d) je *lokalno kompakten*, če ima vsaka točka $x \in M$ kompaktno okolico.

IZREK: Naj bodo K_j zaprte podmnožice v kompaktnem metričnem prostoru (M, d), za katere velja

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots \quad K_j \neq \varnothing$$

Potem je $\bigcap_{j=1}^{\infty} k_j \neq \varnothing$.

Opombi:

- Že vemo za primer zaprtih vloženih intervalov.
- $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ je kompakten (ker je zaprt v kompaktnem metričnem prostoru).

DOKAZ: $V_j = M \setminus K_j$ je odprta množica za vsak j. Če bi veljalo

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j = \varnothing$$

lahko naredimo komplement nad to enačbo in dobimo

$$\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \right)^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j = M$$

Velja, da je $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j = M$ in ker je M kompaktna, obstaja končno podpokritje, t.j.

$$\exists k \in \mathbb{N} : M \subset V_{j_1} \cup V_{j_1} \cup \cdots \cup V_{j_k} = V_{j_k}$$

kjer smo brez škode za splošnost predpostavili $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$. Torej velja

$$V_{j_k} = M \setminus K_{j_k}$$

Vemo, da $K_{j_k} \neq \varnothing$, torej smo prišli v protislovje z $M \subset V_{j_k}$. Od tod sledi

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \varnothing$$

$\square$

7.3 Podprostori v metričnem prostoru

Vemo: Če je (M, d) metrični prostor in je $A \subset M$, potem je $(A, d_{|A \times A})$ metrični prostor z inducirano razdaljo. Vemo tudi

$$\forall a \in A : K_A(a, r) = K_M(a, r) \cap A$$

Izrek: Naj bo (M, d) metrični prostor in $A \subset M$. Množica $O_A \subset A$ je odprta v $(A, d_{|A \times A})$ natanko tedaj, kadar je $O_A = O \cap A$ za neko odprto množico $O \subset M$.

Dokaz: Če je O odprta množica v M, potem

$$\forall x \in O \exists r_x > 0 : K(x, r_x) \subset O$$

Zato velja

$$O = \bigcup_{x \in O} K(x, r_x)$$

($\Rightarrow$) Naj bo O_A odprta podmnožica v $(A, d_{|A \times A})$. Velja

$$O_A = \bigcup_{x \in O_A} K_A(x, r_x) = \bigcup_{x \in O_A} (K_M(x, r_x) \cap A) = \underbrace{\left(\bigcup_{x \in O_A} K_M(x, r_x) \right)}_{\text{unija odprtih je odprta}} \cap A = O \cap A$$

($\Leftarrow$) Denimo, da velja $O_A = O \cap A$, kjer je O odprta v M. Dokazujemo, da je O_A odprta v A. Vemo

$$O = \bigcup_{x \in O} K_M(x, r_x)$$

Torej velja

$$O_A = \left(\bigcup_{x \in O} K_M(x, r_x) \right) \cap A = \bigcup_{x \in O} (K_M(x, r_x) \cap A) = \bigcup_{x \in O \cap A} K_A(x, r_x)$$

Unija odprtih v A je odrpta, torej je O_A odprta.

$\square$

Izrek: Naj bo (M, d) metrični prostor in $A \subset M$. Za množico $Z_A \subset A$ velja, da je Z_A zaprta natnko tedaj, kadar je $Z_A = Z \cap A$ za neko zaprto množico Z v M.

Dokaz: S prehodom na komplemente in uporabo prejšnjega izreka.

Izrek: Naj bo (M, d) metrični prostor in $A \subset M$. Množica $K \subset A$ je kompaktna v $(A, d_{|A \times A})$ natanko tedja, kadar je K kompaktna v M.

Dokaz:

($\Rightarrow$) Denimo, da je K kompaktna v A. Dokazujemo, da je K kompatkna v M. Izberemo poljubno odprto pokritje $(O_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ za K v M. Potem je

$$\{O_\gamma \cap A\}_{\gamma \in \Gamma}$$

odprto pokritje K v A, ker

$$K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} O_\gamma \Rightarrow K \cap A = K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \underbrace{(O_\gamma \cap A)}_{\text{odprte v } A}$$

Ker je K v A kompaktna, obstaja končno podpokritje

$$K \subset (O_{\gamma_1} \cap A) \cup \cdots \cup (O_{\gamma_k} \cap A)$$

Sledi

$$K \subset O_{\gamma_1} \cup \cdots \cup O_{\gamma_k}$$

Torej je K kompaktna v M.

($\Leftarrow$) Denimo, da je K kompaktna v M. Dokazujemo, da je K kompaktna v A. Izberemo poljubno odprto pokritje $(O_\gamma^A)_{\gamma \in \Gamma}$ v A od K. Po izreku vemo, da za vsak $\gamma \in \Gamma$ obstaja O_γ, ki je odprta v M, da velja

$$O_\gamma^A = O_\gamma \cap A$$

Torej je $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma$. Ker je K kompaktna v M, obstaja končno podpokritje

$$K \subset O_{\gamma_1} \cup \cdots \cup O_{\gamma_k}$$

Sledi

$$K \cap A = K \subset (O_{\gamma_1} \cap A) \cup \cdots \cup (O_{\gamma_k} \cap A) = \bigcup_{i=1}^{k} O_{\gamma_i}^A$$

Torej je K kompaktna v M.

$\square$

7.4 Preslikave med metričnimi prostori

Naj bosta (M, d) in (M', d') metrična prostora in naj bo $D \subset M$ neprazna podmnožica. Ukvarjali se bomo s preslikavami $f : D \to M'$.

Definicija: Oznake kot zgoraj. Naj bo $x_0 \in D$. Pravimo, da je preslikava f *zvezna v točki* x_0, če velja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Opombe:

- $f : D \to M'$ je zvezna v točki $x_0 \in D \iff$ za vsako okolico V točke $f(x_0)$ obstaja okolica U točke x_0 v M, da je $f(U \cap D) \subset V$.

  ($\Leftarrow$) Naj bo $V = K'(f(x_0), \varepsilon)$. Po predpostavki obstaja okolica U točke $x_0 : f(U \cap D) \subset V$. Po definiciji okolice $\exists \delta > 0 : K(x_0, \delta) \subset U$. Torej če je $x \in D$ in $x \in K(x_0, \delta)$, potem je $f(x) \in K'(f(x_0), \varepsilon)$.

  ($\Rightarrow$) Izberemo poljubno okolico V točke $f(x_0)$. Po definiciji okolice

  $$\exists \varepsilon > 0 : K'(f(x_0), \varepsilon) \subset V$$

  Po definiciji zveznosti v točki x_0

  $$\exists \delta > 0 : f(\underbrace{K(x_0, \delta)}_{U} \cap D) \subset K'(f(x_0), \varepsilon)$$

  $\square$

- $f : D \to M'$ je zvezna v točki $x_0 \in D \iff$ za vsako okolico V točke $f(x_0)$ v M' obstaja okolica U od x_0 v D , da velja $f(U) \subset V$.

IZREK: Preslikava $f : D \to M'$ je zvezna v točki $x_0 \in D$ natanko takrat, kadar za vsako zaporedje $\{x_n\}$ v D, ki konvergira proti x_0, zaporedje $\{f(x_n)\}$ konvergira proti $f(x_0)$.

DOKAZ: Kot pri realnih funkcijah.

DEFINICIJA: Naj bo $A \subset D$. Pravimo, da je preslikava $f : D \to M'$ *zvezna na* A, če je f zvezna v vsaki točki iz A. Pravimo, da je f *zvezna preslikava*, če je zvezna na D.

IZREK: Preslikava $f : D \to M'$ je zvezna natanko tedaj, kadar je za vsako odprto množico O' v M' praslika $f^{-1}(O')$ odprta.

DOKAZ:

($\Rightarrow$) Denimo, da je $f : D \to M'$ zvezna. Izberemo poljubno odprto množico $O' \in M'$. Označimo $O = f^{-1}(O')$. Dokazujemo, da je O odprta.

- $O = \varnothing$ je odprta.
- $O \neq \varnothing$. Izberemo poljubno točko $x_0 \in O$ in dokazujemo, da je notranja točka od O. Vemo, da je $f(x_0) \in O'$ in ker je O' odprta, je o' okolica $f(x_0)$. Ker je f zvezna v točki x_0, velja

$$\exists \delta > 0 : f(\underbrace{K(x_0, \delta) \cap D}_{\subset O}) \subset O'$$

Torej je x_0 notranja točka od O.

($\Leftarrow$) Izberemo poljuben $x_0 \in D$ in dokazujemo, da je f zvezna v x_0.

Izberemo poljubno okolico V točke $f(x_0)$ v M'. Obstaja $K'(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. Po predpostavki je

$$f^{-1}(\underbrace{K'(f(x_0), \varepsilon))}_{\ni x_0}$$

odprta. Ker je x_0 element odprte množice, je notranjost te množice, velja

$$\exists \delta > 0 : K(x_0, \delta) \subset f^{-1}(K'(f(x_0), \varepsilon))$$

Torej velja

$$f(K(x_0, \delta)) \subset K'(f(x_0), \varepsilon)$$

$\square$

IZREK: Naj bosta (M, d) in (M', d') metrična prostora in naj bo $D \subset M$. Preslikava $f : D \to M'$ je zvezna natanko tedaj, kadar je za vsako zaprto množico $Z' \subset M'$ njena praslika $f^{-1}(Z')$ zaprta v M.

DOKAZ: S prehodom na komplemente in uporabo prejšnjega izreka.

Opomba: Če je $f : D \to M'$ zvezna ni nujno res, da bi bila slika odprte množice odprta. Primer: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z običajno metriko definiramo s predpisom $f(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

IZREK: Naj bodo $(M, d), (M', d'), (M'', d'')$ metrični prostori in $D \subset M$ ter preslikavi $f : D \to M'$, $g : M' \to M''$. Če sta f in g zvezni, potem je $g \circ f : D \to M''$ zvezna.

DOKAZ: Če je $Z'' \subset M''$ zaprta, potem je zaradi zveznosti g, $g^{-1}(Z'')$ zaprta v M'. Zaradi zveznosti f, je $f^{-1}(g^{-1}(Z''))$ v M zaprta. Po prejšnjem izreku je $g \circ f$ zvezna.

$\square$

IZREK: Naj bo $K \subset M$ kompaktna podmnožica v metričnem prostoru (M, d) in $f : K \to M'$ zvezna preslikava. Potem je $f(K)$ kompaktna.

DOKAZ: Denimo, da je K kompaktna in $f : K \to M'$ zvezna. Dokazujemo $f(K)$ je kompaktna.

Izberemo poljubno odprto pokritje

$$\{O'_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} : f(K) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} O'_\gamma$$

$f^{-1}(O'_\gamma)$ je odprta v M, ker je f zvezna. Velja

$$K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \underbrace{f^{-1}(O'_\gamma)}_{\text{odprta}}$$

Ker je K kompaktna, obstaja končno podpokritje

$$K \subset f^{-1}(O'_{\gamma_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(O'_{\gamma_k})$$
$$f(K) \subset O'_{\gamma_1} \cup \cdots \cup O'_{\gamma_k}$$

Torej je $f(K)$ kompaktna.

$\square$

IZREK: Naj bo $K \subset M$ kompaktna podmnožica v metričnem prostoru (M, d) in $f : K \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija[7]. Tedaj je f omejena in doseže minimum in maksimum.

SKICA DOKAZA: $f(K) \subset \mathbb{R}$ je kopaktna (prejšnji izrek), zato je zaprta in omejena. Sledi, da je f omejena. ker je f omejena, potem $\inf f$ in $\sup f$ obstajata in sta robni točki. Ker je $f(K)$ zaprta, sta $\inf f$ in $\sup f$ doseženа.

DEFINICIJA: Naj bosta (M, d) in (M', d') metrična prostora in $D \subset M$ ter $C \subset D$. Pravimo, da je preslikava $f : D \to M'$ *enakomerno zvezna na* C, če velja

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in C : d(x, x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Opomba: Če je f enakomerno zvezna na C, je f zvezna na C, obratno v splošnem ni res.

IZREK: Naj bo K kompaktna podmnožica v metričnem prostoru (M, d) in $f : K \to M'$ zvezna preslikava. Potem je f enakomerno zvezna na K.

DOKAZ: Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Za vsak $x \in K$ obstaja $\delta_x > 0$, da za vsak $x' \in K, d(x, x') < \delta_x$ velja $d'(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Družina $\{K(x, \frac{1}{2}\delta_x)\}_{x \in K}$ je odprto pokritje kompaktne množice K, zato obstaja končno podpokritje

$$K \subset K(x_1, \delta_{x_1}/2) \cup \cdots \cup K(x_k, \delta_{x_k}/2)$$

Naj bo

$$\delta := \min \left\{ \frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_k}}{2} \right\}$$

Izberemo poljubena $x, x' : d(x, x') < \delta$. Obstaja $j : x' \in K(x_j, \delta_{x_j}/2)$.

$$d(x, x_j) \leq \underbrace{d(x, x')}_{< \delta \leq \delta_{x_j}/2} + \underbrace{d(x', x_j)}_{< \delta_{x_j}/2} < \delta_{x_j}$$

Ker $d(x', x_j) < \frac{\delta_{x_j}}{2}$ zaradi zveznosti velja

$$d'(f(x'), f(x_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ker $d(x, x_j) < \frac{\delta_{x_j}}{2}$ zaradi zveznosti velja

$$d'(f(x), f(x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

[7] Pod besedo funkcija se razume običajna metrika na $\mathbb{R}$.

Torej velja

$$d'(f(x), f(x')) \leq d'(f(x), f(x_j)) + d'(f(x_j), f(x') < \varepsilon$$

$\square$

7.5 Banachovo skrčitveno načelo

Definicija: Naj bo (M, d) metrični prostor. Preslikava $f : M \to M$ je *skrčitev*, če obstaja $q \in \mathbb{R}, q < 1$, da velja

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

Opombe:

- $q \geq 0$
- Vsaka skrčitev je enakomerno zvezna na M.

Izrek (Banachovo skrčitveno načelo): Naj bo (M, d) poln metrični prostor in $f : M \to M$ skrčitev. Potem obstaja natanko ena *negibna točka* preslikave f, t.j.

$$a \in M : f(a) = a$$

Za poljubno točko $x \in M$ zaporedje $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ konvergira proti a.

Dokaz:

- **enoličnost stacionarne točke**

  Recimo, da sta $a, b \in M$ in da je $f(a) = a$, ter $f(b) = b$. Ker je f skrčitev, obstaja $q \in [0, 1)$, da je

  $$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

  Torej

  $$\begin{gathered} d(f(a), f(b)) \leq qd(a, b) \\ d(a, b) \leq qd(a, b) \\ \Rightarrow d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b \end{gathered}$$

- **obstoj**

  Naj bo $x \in M$:
$$\underbrace{f(x)}_{x_1}, \underbrace{f(f(x))}_{x_2}, \dots$$
  Definiramo
$$x_m = \underbrace{f(f(\cdots f}_{m\times f}(x)\cdots))$$
  Dokazujemo, da je $\{x_m\}$ Cauchyjevo. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo $n > m$: in velja
$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+2}, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_m) \leq$$
$$\leq d(x_m, x_{m+1})(1 + q + q^2 + \cdots) = \frac{1}{1-q} d(x_m, x_{m+1})$$
  Za vse m velja
$$d(x_m, x_{m+1}) \leq q d(x_{m-1}, x_m) \leq q^2 d(x_{m-2}, x_{m-1}) \leq \cdots \leq q^m d(x_1, x_0)$$
  Torej za $n > m$ velja
$$d(x_n, x_m) \leq \frac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0)$$
  Ker $q^m \xrightarrow{m\to\infty} 0$, je $\{x_n\}$ Cauchyjevo. Ker je M poln, je zaporedje $\{x_m\}$ konvergentno in njegovo limito označimo z a.

  Dokažimo, da je a negibna, torej $f(a) = a$.
$$f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

$\square$

Opomba: $d(x_n, x_m) \leq \frac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0)$. Če pošljemo $n \to \infty$ dobimo
$$d(a, x_m) \leq \frac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0)$$
Tu smo uporabili, da je funkcija $x \mapsto d(x, x_0)$ zvezna. Dokaz je bil za DN.