Kombinatorika

Vid Drobnič

6b) Katera po vrsti je beseda DARILO, če vse permutacije zapišemo po leksikografskem vrstenm redu.

Spomnimo se: Leksikografski vrstni red pomeni, da so besede zapisane po abecednem vrstnem redu (tako kot v slovarju). Mi želimo izračunati koliko besed sestavljenih samo iz črk D, A, R, I, L in O se pojavi pred besedo DARILO. Najprej si poglejmo abecedni red črk v besedi DARILO:

A, D, I, L, O, R

Ker so besede razvrstene po abecednem vrstem redu, bodo najprej vse besede, ki se začnejo s črko A. Torej bodo pred besedo DARILO vse besede oblike A _ _ _ _ _. Fiksirali smo črko A, iz ostalih 5-ih črk pa lahko naredimo 5! različnih besed. Torej imamo 5! besed, ki se začnejo s črko A.

Za vsemi besedami, ki se začnejo s črko A, bodo razvrščene besede, ki se začnejo s črko D (ker je D naslednja po abecedi). Torej bomo imeli opravkami z besedami oblike D _ _ _ _ _. Torej smo na prvo mesto dobili črko, ki jo želimo za besedo DARILO. Poglejmo si drugo mesto.

Na drugo mesto želimo dati črko A. Imamo srečo in je ta prva po abecedi. Kar pomeni, da se ukvarjamo z besedami oblike DA _ _ _ _. Poglejmo si tretjo črko v besedi.

Na tretjem mestu bi si želeli črko R. Ker pa so permuaticje urejene po abecedi, bodo pred njo vse besede oblike DAI _ _ _, DAL _ _ _ ter DAO _ _ _. Besed oblike DAI _ _ _ je 3!, besed oblike DAL _ _ _ je prav tako 3!, besed oblike DAO _ _ _ pa je spet 3!. Sedaj smo prešteli vse besede pred besedami oblike DAR _ _ _. Spet imamo srečo in naslednja beseda bo DARILO, ker so I, L, O že po vrstenm redu.

Povzetek: Pred besedo DARILO so vse besede oblike A _ _ _ _ _, DAI _ _ _, DAL _ _ in DAO _ _ _. Besed oblike A _ _ _ _ _ je 5!, besed oblike DAI _ _ _ je 3!, besed oblike DAL _ _ je 3! in besed oblike DAO _ _ _ je 3!. Torej je pred besedo DARILO 5! + 3! + 3! + 3! = 138 besed. Kar pomeni, da je DARILO 139. beseda.

10) V zbirki imamo 5 vrašanj iz geometrije in 7 vprašanj iz aritmetike. Na koliko načinov lahko izmed njih izberemo štiri izpitna vprašanja, ki pa ne smejo biti vsa iz istega poglavja.

Izbrati želimo 4 izpitna vprašanja iz neke zbirke. Torej se bomo ukvarjali s kombinacijami. Spomnimo se enačbe za izračun števila kombinacij:

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Če bi izbirali med vsemi vprašanji v zbirki, bi imeli na voljo 5 vprašanj iz geometrije in 7 iz aritmetike, kar je skupno 12 vprašanj. Torej bi imeli na voljo

$$C_{12}^4 = 495$$

vprašanj. V te kombinacije so vključene tudi kombinacije vprašanj samo iz poglavja aritmetike in kombinacije vprašanj samo iz poglavja geometrije.

V poglavju geometrije je 5 vprašanj. Če bi izbirali samo iz tega poglavja, bi imeli na voljo $C_5^4 = 5$ vprašanj. V poglavju aritmetike je 7 vprašanj. Če bi izbirali samo iz tega poglavja, bi imeli na voljo $C_7^4 = 35$ vprašanj.

Iz vseh kombinacij, ki jih lahko naredimo iz vprašanj iz celotne zbirke, moramo torej odšteti vse kombinacije, ki so sestavljene samo iz vprašanj iz poglavja geometrije in vse kombinacije, ki so sestavljene samo iz vprašanj iz poglavja aritmetike. Torej imamo na voljo

$$C_{12}^4 - (C_5^4 + C_7^4) = 495 - (5 + 35) = 455$$

kombinacij vprašanj.

12) V uradu dela 7 tehnikov, 5 laborantov in 8 inženirjev. Izračunaj, na koliko načinov lahko izmed sebe izberejo petčlansko komisijo, v kateri bodo zastopane vse tri stroke.

V komisiji nas vrstni red ne zanima, torej se bomo ponovno ukvarjali s kombinacijami. Izbiramo med $7 + 5 + 8 = 20$ ljudi. Če bi izračunali samo vse možne kombinacije 5-ih ljudi iz skupine 20-tih, bi dobili $C_{20}^{5} = 15504$ kombinacij. Žal pa je pogoj, da so zastopane vse tri stroke, kar nalogo nekoliko oteži.

Torej moramo od naše zgornje številke nekaj odšteti. Takoj nam pride na pamet samo odšteti vse kombinacije, kjer niso zastopani tehniki, laboranti ali inženirji.

Število komisij, ki jih lahko naredimo, če niso zastopani tehniki zračunamo na naslednjem način. Opazimo, da izbiramo samo med laboranti in inženirji. Torej bomo imeli na voljo 13 ljudi iz katerih bomo sestavljaji komisi 5-ih članov. To je $C_{13}^{5} = 1287$ možnih kombinacij. V te kombinacije so vključene tudi vse kombinacije kjer so zastopani samo laboranti ali pa samo inženirji.

Število komisij, ki jih lahko naredimo, če niso zastopani laboranti izračunamo podobno kot prej. To je $C_{15}^{5} = 3003$ možnih kombinacij.

Število komisij, ki jih lahko naredimo, če niso zastopani inženirji spet izračunamo na podoben način. To je $C_{12}^{5} = 792$ možnih kombinacij.

Torej od vseh kombinacij odštejemo število kombinacij kjer niso zastopane vse stroke in dobimo:

$$C_{20}^{5} - (C_{13}^{5} + C_{15}^{5} + C_{12}^{5}) = 15504 - (1287 + 3003 + 792) = 10422$$

Žal pa še nismo končali, saj smo odšteli nekoliko preveč. Poglejmo, kaj moramo prišteti nazaj.

Ko smo izračunali število možnih komisij samo s tehniki in laboranti, s bile v teh kombinacijah tudi komisije, kjer so bili samo tehniki, ali pa samo laboranti. Ko smo potem izračunali še število komisij samo s tehniki in inženirji, so bile v teh kombinacijah tudi kombinacije, kjer so bili v komisiji samo tehniki ali pa samo inženirji. Z metodo ostrega pogleda opazimo, da sem v zgornjih dveh povedih dvakrat omenil komisije v katerih nastopajo samo tehniki. To pomeni, da smo dvakrat odšteli kombinacije, kjer so v komisiji samo tehniki, odšteti pa bi jih bilo potrebno samo enkrat. Podobno velja za komisije iz samih laborantov in za komisije iz samih inženirjev. Prišteti je torej treba kombinacije kjer je komisija sestavljena iz samih laborantov, tehnikov ali inženirjov. Število kombinacij petčlanske komisij iz sedmih tehnikov je $C_7^5 = 21$ Podobno naredimo z laboranti in inženirji in dobimo:

$$10422 + C_7^5 + C_5^5 + C_8^5 = 10422 + 21 + 1 + 56 = 10500$$

Odgovor je torej, da lahko komisijo sestavimo na 10500 možnih načinov.

18) Na krožnici leži 12 točk. Povežemo jih z dalicami, ki se začnejo v eni in končajo v drugi od teh 12 točk.

a) Koliko daljic določajo te točke

Če si narišemo skico opazimo, da lahko iz vsake točke vlečemo 11 daljic. Ker imamo 11 točk je to torej $12 \cdot 11$ daljic. Žal pa se nekatere daljice na tak način podvojijo. Če smo iz točke A vlekli daljico v točko B smo nato šteli se primer kjer smo vlekli daljico iz točke B v A. Vsako daljico smo šteli dvakrat. Rezultat bo torej:

$$\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

b) Koliko trikotnikov določajo te točke

Za trikotnik potrebujemo 3 točke. Torej si lahko iz 12 točk izberemo 3 in narišemo trikotnik, ki je določen z izbranimi točkami. Ker izbiramo 3 točke iz 12-ih in nas ne zanima vrstni red, nas to spomnija na kombinacije. Odgovor je torej $C_{12}^3 = 220$ trikotnikov.

19) V ravnini leži snop 10 vzporednih premic. Te vzporednice seka drug snop, ki ga sestavlja 8 vzporednic (tudi te ležijo v isti ravnini). Izračunaj, koliko paralelogramov določajo te premice.

Za paralelogram potrebujemo 4 daljice, ki pa so paroma vzporedne. Prvi snop ima 10 vzporednih premic. Če izberemo 2 premici iz tega snopa imamo že 2 nosilki stranic nekega paralelograma. Potrebujemo še drugi dve nosilki daljic. Te bomo izbirali v drugem snopu, ki ima 8 vzporednih premic. Ker nas vrstni red ne zanima, se bomo ukvarjali s kombinacijami. Če izberemo 2 premici iz prvega snopa, bomo dobili $C_{10}^2 = 45$ možnih kombinacij. Iz drugega snopa bomo prav tako izbrali 2 premici. To pomeni, da lahko iz drugega snopa dobimo $C_8^2 = 28$ možnih kombinacij.

Ker lahko za vsaki dve izbrani premici iz prvega snopa izberemo katerikoli dve premici iz drugega snopa, bomo število možnih kombinacij zmnožili med sabo. Torej je število vseh možnih paralelogramov:

$$C_{10}^2 \cdot C_8^2 = 45 \cdot 28 = 1260$$

Odgovor je, da te premice določajo 1260 paralelogramov.

20) Koliko različnih zneskov lahko plačaš, če imaš pri sebi en kovanec za 10 centov, en kovanec za 20 centov, enkovanec za 50 centov, en kovanec za 1 evro in en kovanec za 2 evra?

Pri sebi imamo pet različnih kovancev. Plačamo lahko z enim, dvema, tremi, štirimi ali petimi kovanci. Ker so vsi kovanci različni, bo vsaka kombinacija kovancov pridelala drug znesek. Z metodo ostrega pogleda opazimo, da je opomba v resnici namig in da se bomo ukvarjali s kombinacijami.

Če plačamo z enim kovancem, imamo na voljo C_5^1 različnih kombinacij kovancev, kar pomeni da imamo C_5^2 različnih vrednosti. Če plačamo z dvema kovancema, imamo na voljo C_5^2 različnih kombinacij kovancev, kar pomeni da imamo C_5^2 različnih vrednosti. Podobno naredimo za tri, štiri in pet kovancev. Torej je skupno število različnih zneskov, ki jih lahko plačamo:

$$C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

Opomba: matematik v meni si ne more pomagati, da ne bi zgornje vsote zapisal na krajše, zato zgolj samo kot zanimivost povem, da lahko zgornjo enačbo zapišemo kot:

$$\sum_{n=1}^{5} C_5^n = 31$$

22) V bobnu za žrebanje so žogice označene s celimi števili od 1 do 20 (vključno). Iz bobna izžrebamo dve števili hkrati. Izračunaj verjetnost, da je vsota obeh števil enaka 16.

Iz navodil lahko razberemo, da imamo na voljo 20 žogic. Torej je število vseh možnosti enako:

$$n = C_{20}^2 = 190$$

Opomba: ne spomnim se, kako v srednji šoli učijo te oznake, zato so moje oznake verjetno drugačne od tistih v zvezku in učbeniku.

Da je vsota obeh žogic enaka 16, moramo potegniti eno izmed naslednjih možnosti:

1	15
2	14
3	13
4	12
5	11
6	10
7	9

Opazimo, da je teh možnosti 7, torej sledi $k = 7$. Verjetnost torej izračunamo:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{7}{190} \approx 3,68\%$$

23) Kolo sreče ima na obodu cela števila od 1 do 20 (vključno). Kolo sreče zavrtimo dvakrat in tako dobimo dve števili. Izračunaj verjetnost, da je vsota obeh števil enaka 16.

Naloga je zelo podobna prejšnji, vendar ima nekaj sprememb. Ko kolo zavrtimo prvič, imamo možnih 20 različnih izidov. Ko kolo zavrtimo drugič, imamo možnih prav tako 20 izidov. Število možnosti je torej enako:

$$n = 20 \cdot 20 = 400$$

Želimo, da je vsota obeh števil enaka 16. Za to se mora zgoditi eden od naslednjih izidov:

Prvo število	**Drugo število**
1	15
2	14
3	13
4	12
5	11
6	10
7	9
8	8
9	7
10	6
11	5
12	4
13	3
14	2
15	1

Teh možnosti je 15. Iz tega sledi $k = 15$. Verjetno je torej:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{15}{400} \approx 3,75\%$$

24) V posodi je pet belih žogic, tri črne in dve zeleni. Iz posode na slepo vzamemo tri žogice hkrati. Izračunaj verjetno naslednjih dogodkov in jih zaokroži na stotinko procenta

V obeh dogodkih bo naš n enak. Ker izvlečemo tri žogice iz skupine 5 belih, 3 črnih in 2 zeleni, bo število vseh žogic 10, in $n = C_{10}^{3} = 120$.

A: točno ena od izvlečenih žogic je bela

Če more biti točno ena izmed izvlečenih žogic bela, morata biti ostali dve črni ali pa zeleni. To pomeni, da moramo izbrati eno izmed petih belih žogic. Za vsako belo žogico, ki jo izvlečemo imamo na voljo še vse kombinacije zelenih in črnih žogic. Teh kombinacij je $C_{5}^{5} = 10$. Število ugodnih dokodkov k je torej:

$$k = 5 \cdot C_{5}^{2} = 50$$

Verjetnost dogodka A izračunamo sledeče:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{50}{120} \approx 41,67\%$$

B: vsaj dve od izvlečenih žogic sta črni

To pomeni, da mora biti število črnih izvlečenih žogic enako 2 ali 3. Ugodni so torej dogodki, kjer izvlečemo 2 črni žogici, in eno žogico, ki je bela ali zelena in dogodki kjer izvlečemo 3 črne žogice.

Za vsaki 2 črni žogici, lahko izvlečemo katerokoli kombinacijo belih in zelenih žogic. Število dogodkov, kjer izvlečemo 2 črni žogici je torej $C_{3}^{2} \cdot C_{7}^{1}$.

Število dogodkov kjer izvlečemo 3 črne žogice je C_{3}^{3}.

Število vseh ugodnih dogodkov k je torej:

$$k = C_{3}^{2} \cdot C_{7}^{1} + C_{3}^{3} = 22$$

Verjetnost dogodka B potemtakem izračunamo:

$$P(B) = \frac{k}{n} = \frac{22}{120} \approx 18,33\%$$

C: Vse tri izvlečene žogice so enake barve

To pomeni, da moramo izvleči 3 bele žogice, ali 3 črne žogice ali 3 zelene žogice. Zelenih žogici sta samo dve, torej ni možno izvleči treh zelenih žogic. Število dogodkov kjer izvlečemo 3 zelene žogice je torej 0, Število dogodkov, kjer izvlečemo 3 bele žogice je C_5^3, število dogodkov kjer izvlečemo 3 črne žogice je C_3^3. Število vseh ugodnih dogodkov k je torej:

$$k = C_3^3 + C_5^3 + 0 = 1 + 10 + 0 = 11$$

Verjetnost dogodka C je torej:

$$P(C) = \frac{k}{n} = \frac{11}{120} \approx 9,17\%$$

25) V razredu je 11 fantov (eden od njih je Rožle) in 16 deklet (ena od njih je Špela) Izmed njih izžrebamo štiričlansko delagacijo. Izračunaj verjetnosti naslednjih dogodkov.

Tako kot pri prejšnji nalogi, bo tudi tukaj n enak za vse dogodke. V razredu je 27 učencev, izmed katerih izbiramo štiri. n je torej $n = C_{27}^4 = 17550$.

A: v delagaciji sta tudi Rožle in Špela

V delagaciji morata biti rožle in špela. Torej imamo na voljo še 10 fantov in 15 deklet, kar je 25 učencev. Dva smo že izbrali (Rožleta in Špelo). Izbrati moramo torej še dva. Število ugodnih dogodkov k je torej $k = C_{25}^2 = 300$.. Verjetnost dogodka A izračunamo:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{300}{17550} \approx 1,71\%$$

B: v delagaciji je točno eden od njiju

V delagaciji je torej Rožle ali Špela, ne pa oba skupaj.

Če je v delagaciji Rožle, imamo na voljo še 10 fantov med katerimi izbiramo. Prav tako imamo na voljo samo 15 deklet, saj Špele ne smemo izbrati. Izbirali bomo torej tri učence izmed 25-ih. Število dogodkov, kjer je v delagaciji Rožle je torej C_{25}^{3}.

Če je v delagaciji Špela, imamo na voljo še 15 deklet in 10 fantov, saj Rožleta ne smemo izbrati. Izbirali bomo ponovno kot prej, trei učence med 25-imi. Število dogodkov, kjer je v delagaciji Rožle je torej C_{25}^{3}.

Skupno število ugodnih dogodkov je število dogodkov kjer je v delagaciji točno Rožle, ali pa točno Špela. k torej izračunamo sledeče:

$$k = C_{25}^{3} + C_{25}^{3} = 4600$$

Verjetnost dogodka B je torej:

$$P(B) = \frac{k}{n} = \frac{4600}{17550} \approx 26,21\%$$

C: Špela je edina ženska v delegaciji

V delagaciji bo torej Špela in še trije fantje. To pomeni, da bomo izbirali samo med 11-timi fanti. Število ugodnih dogodkov k je torej $k = C_{11}^{3} = 165$.

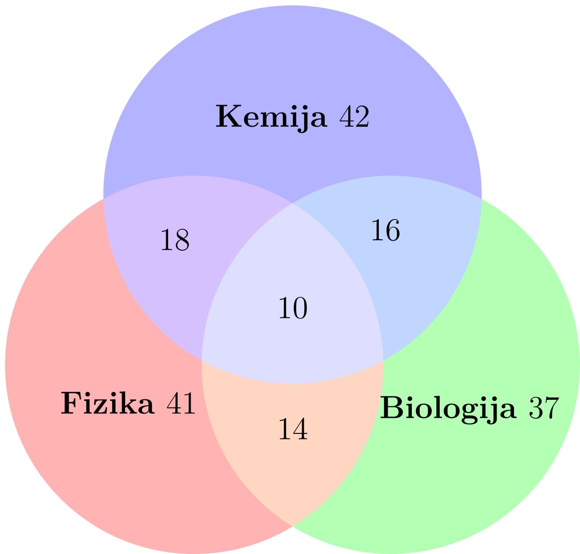
Verjetnost dogodka C torej izračunamo:

$$P(C) = \frac{k}{n} = \frac{165}{17550} \approx 0,94\%$$

26) Na šoli je 144 učencev. Učeni lahko obiskujejo fizikalni, biološki in kemijski krožek. Fizikalni krožek obiskuje 41 učencev, biološki krožek obiskje 37 učencev, kemijski krožek pa 42 učencev. Fizikalni in biološki krožek obiskuje 14 učencev. Biološki in kemijski krožek obiskuje 16 učencev. Kemijski in fizikalni krožek obiskuje 18 učencev. Vse tri koržke obiskuje 10 učencev. Na slepo izberemo enega od učencev s te šole.

Ne glede na podnalogo bo število vseh možnih dogodkov n enako. Enega učenca izberemo izmed 144-ih, torej je $n = C_{144}^{1} = 144$.

Ta naloga bi bila zelo trivialna, če bi vedeli točno koliko učencev obiskuje samo fizikalni krožek, koliko samo fizikalni in biološki, koliko samo fizikalni in kemisjki in koliko jih obiskuje vse tri. Podatki pa so podani tako, da se prekrivajo. Za lažjo predstavo si lahko narišemo Vennov diagram.



Slika 1: Vennov diagram učencev

Iz diagrama vidimo, da npr. fizikalni in biološki krožek obiskuje 14 učencev, 10 od teh učencev pa obiskuje vse tri krožke. Torej je število učencev, ki obiskuje samo fizikalni in biološki krožek enako 4. Podobno lahko naredimo za drugi dve kombinaciji krožkov.

Na podoben način lahko izračunamo koliko učencev obiskuje npr. samo fizikalni krožek. Samo kemijski in fizikalni obiskuje 8 učencev, samo fizikalni in biološki obiskujejo 4 učenci, vse tri krožke pa obiskuje 10 učencev. Če fizikalni krožek obiskuje 41 učencev, potemtakem samo fizikalni krožek obiskuje $41 - 4 - 8 - 10 = 19$ učencev.

Na tak način lahko izračunamo še koliko učencev obiskuje samo druga dva krožka. Končni izračun nas pripelje do naslednjih številk:

K	**F**	**B**	**K & B**	**K & F**	**F & B**	**K &F & B**
18	19	17	6	8	4	10

A: izbrani učenec obiskuje točno en krožek

To pomeni, da mora izbrani učenec obiskovati samo kemijo, samo fiziko, ali pa samo biologijo. Iz zgornje tabele preberemo, da samo kemijo obiskuje 18 ljudi, samo fiziko 19 ljudi, samo biologijo pa 17 ljudi. Torej moramo izbrati enega učenca izmed $18 + 19 + 17 = 54$. Ugodnih dogodkov k je torej $k = C_{54}^{1} = 54$.

Verjetnost dogodka A se izračuna:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{54}{144} = 37,5\%$$

B: izbrani učenec obiskuje točno dva krožka

Izbrani učenec mora obiskovati samo kemijo in fiziko, samo kemijo in biologijo, ali pa samo fiziko in biologijo. Iz zgornje tabele preberemo, da je učencov, ki ustrezajo tem pogojem $8 + 6 + 4 = 18$. Ugodnih dogodkov k je torej $k = C_{18}^{1} = 18$.

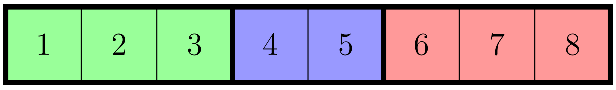
Verjetnost dogodka B se izračuna:

$$P(B) = \frac{k}{n} = \frac{18}{144} = 12,5\%$$

27) Doma imamo tri matematične, dva kemijska in tri fizikalne priročnike. Ne da bi pazili na vrstni red, jih zložimo na polico. Izračunaj, kolikšna je verjetnost, da bodo matematični priročniki skupaj, kemijski skupaj in fizikalni skupaj. Rezultat zaokroži na tri mesta.

Skupaj imamo 8 priročnikov. Ko jih zložimo na polico, nas vrstni red zanima, torej imamo opravka s permutacijami. Število vseh dogodkov je enako število načinov na katere lahko zložimo priročnike na polico. Ker je priročnikov 8, je potem število vseh dogodkov $m = 8!$.

Na sliki 2 opazimo, da imamo tri skupine priročnikov. Zelena skupina nam predstavlja matematične priročnike, modra kemijske, rdeča pa fizikalne. Poglejmo si bolj podrobno matematične priročnike. Če bi na polico zložili samo

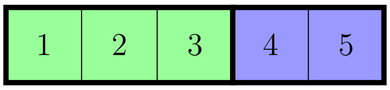


Slika 2: Polica s priročniki

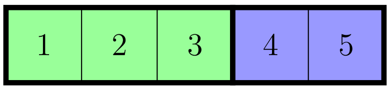
matematične priročnike, bi jih lahko zložili na 3! načinov (trije so in zanima nas vrstni red, zaradi česar uporabimo permutacije). Podobno lahko naredimo za kemijske in fizikalne priročnike.

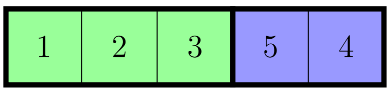
V zgornji sliki so matematični priročniki zeleni in označeni s števili $1, 2$ in 3. Ta števila lahko med sabo „mešamo”, oziroma bolj natančno: zelenim (matematičnim) priročnikom lahko zamenjamo vrstni red. Torej je število možnih vrstnih redov priročnikov v zeleni skupini 3!. Podobno velja za kemijske in fizikalne priročnike.

Če bi mešali samo vrstni red priročnikov, bi torej dobili število različnih vrstnih redov $3! \cdot 2! \cdot 3!$. Poglejmo zakaj uporabimo množenje in ne seštevanje. Za lažje razumevanje se osredotočimo samo na zelene in modre priročnike in dobimo naslednjo skico:



Za vsak poljuben vrstni red zelenih priročnikov, lahko modre priročnike razporedimo na 2! različnih načinov. Torej če so zeleni priročniki v vrtnem redu $1, 2, 3$, dobimo naslenjo skico:





Ker lahko to naredimo za vsak vrstni red zelenih, bi dobili $3! \cdot 2!$ možnih razporeditev. Žal pa še nismo popolnoma končali. Na vsako skupino priročnikov lahko gledamo tudi iz vidika skupina. Torej namesto, da se ukvarjamo z vrstnim redom priročnikov v recimo zeleni skupini, si lahko pogledamo tudi vrstni red skupin. Poenostavljeno: zamižimo na eno oko in se pretvarjamo,

Slika 3: Skica posamečnih skupin

da skupina priročnikov ni sestavljena iz posamečnih priročnikov. To vidimo na skici 3.

Te skupine lahko med sabo premešamo na nadaljnih 3! različnih načinov (ker imamo tri elemente in se spet ukvarjamo s permutacijami). To pomeni, da lahko damo npr. skupino fizikalnih priročnikov pred matematične. Poglejmo še, kaj to pomeni v številkah.

Malo prej smo naračunali, da če spreminjamo vrstni red knjig v posamečni skupini, dobimo $3! \cdot 2! \cdot 3!$ možnosti. Ravnokar smo ugotovili, da je še 3! možnosti razporeditve skupin. Te dve stvari ponovno združimo z množenjem in dobimo, da je število ugodnih dogodkov $k = 3! \cdot (3! \cdot 2! \cdot 3!)$. Operacijo množenja uporabimo zaradi podobnega argumenta kot prej. Za vsak izbran vrstni red posamečnih skupin na polici, lahko spreminjamo vrstni red posamečnih knjig v posamečni polici. Za domačo nalogo in boljše razumevanje, se lahko doma poigramo s fizičnimi knjigami oziroma zvezki.

Sedaj moramo izračunati še verjetnost. Torej samo vstavimo naračunane številke v formulo:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{8!}{3! \cdot (3! \cdot 2! \cdot 3!)} = \frac{3}{280} \approx 1,07\%$$

28) Na svetovnem prvenstvu v balinanju sodeluje 10 držav, med njimi tudi Slovenija in Madžarska. Organizatorji bodo razdelili sodelujoče države z "rebom v dve skupini po 5 držav. Izračunaj verjetnost, da bosta Slovenija in Madžarska v isti skupini. Rezultat zaokroži na štiri mesta.

Vrstni red nas ne zanima, torej bomo ponovno imeli opravka s kombinacijami. Med 10-imi državami izbiramo 5-držav, ki bo tvorilo skupino, torej je vseh dogodkov $n = C_{10}^{5} = 252$.

Želeli bi si, da bi Slovenija in Madžarska bili v isti skupini. Da se to zgodi, bi morali izbrati dve državi izmed dveh, ki nas zanimajo, torej $C_2^2 = 1$ in 3 države izpred ostalih, ki niso slovenija ali madžarska. Skupno torej $C_2^2 \cdot C_8^3 = C_8^3 = 56$. 8 se pojavi zato, ker izbiramo iz 8-ih držav, to so tiste, ki niso Slovenija ali Madžarska.

Poleg tega, so ugodni dogodki tudi tisti, kjer izberemo vseh 5 držav takih, da niso Slovenija ali Madžarska, saj to pomeni, da sta Slovenija in Madžarska v drugi skupini, kar je prav tako to kar si želimo. Takih kombinacij je C_8^5, ker še vedno izbiramo med osmimi državami, toda tokrat želimo, da je vseh 5 iz tistih osmih, ki niso Slovenij ali Madžarska. Torej je število vseh ugodnih dogodkov

$$k = C_2^2 \cdot C_8^3 + C_8^5 = 112$$

Tokrat uporabimo seštevanje, ker se lahko zgodi eno ali drugo.

Verjetnost poračunamo sledeče

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{112}{252} = \frac{4}{9} \approx 44,44\%$$

Med 40 izdelki je 5 izdelkov z napako. Kontrolor kakovosti na slepo izbere vzorec 4 izdelkov. Serijo izdelkov zavrne, če je v vzorcu več kot en izdelek z napako. Kolikšna je verjetnost, da je serijo zavrnil?

Vseh možnih dogodkov je $n = C_{40}^4$.

Serijo zavrne, če je v vzorcu več kot en izdelek z napako. Ker je manj računanja, bomo izračunali verjetnost nasprotnega dogodka. To je, da je v seriji 0 ali 1 izdelek z napako.

V seriji je 0 izdelkov z napako, če smo vseh 4 izdelkov izbrali med tistimi 35-imi, ki nimajo napake. Takih kombinacij je C_{35}^4.

V seriji je 1 izdelek z napako, če smo 1 izdele izbrali med tistimi 5-imi, ki imajo napako in ostale 3 izdeleke izbrali med tistimi 35-imi, ki nimajo napake. Takih kombinacij je $C_5^1 \cdot C_{35}^3$

Torej je število vseh ugodnih dogodkov enako $k = C_{35}^4 + C_5^1 \cdot C_{35}^3$. Tu uporabimo seštevanje, ker se lahko zgodi eno ali drugo.[1]

[1]Pri kombinatoriki se je treba veliko poslušati. Če uporabimo veznik **ali**, je najverjetne

Verjetnost nasprotnega dogodka je torej

$$P(A)' = \frac{k}{n} = \frac{C_{35}^4 + C_5^1 \cdot C_{35}^3}{C_{40}^4} \approx 93,1\%$$

Verjetnost dogodka je torej

$$P(A) = 1 - P(A)' = 1 - 0,931 = 6,9\%$$

35) Luka je vrgel kocko. Padla je štirica. Katera od sponjih trditev je pravilna?

Pravilna je trditev c, ki pravi: V naslenjem metu je verjetnost, da bo padla štirica enaka. To je zato, ker je za vsak met verjetnost da pade štirica enaka $\frac{1}{6}$, ne glede na to, kaj smo vrgli prej.

37) V posodi je 10 kroglic, od tega 6 modrih, ostale pa so rumene. Na slepo izvlečemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da je modre barve in kolikšna, da je rumene barve?

Torej imamo 6 modrih in 4 rumene barve. Če izvlečemo eno kroglico iz 10-ih, je število vseh možnih dogodkov enako

$$n = C_{10}^1 = 10$$

Število ugodnoh dogodkov, da izvlečemo modro kroglico je enako

$$k = C_6^1 = 6$$

Torej je verjetnost, da smo izvlelki modro kroglico enaka

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{6}{10} = 60\%$$

Za rumeno barvo se izračuna podobno in dobimo

$$P(B) = \frac{C_4^1}{10} = \frac{4}{10} = 40\%$$

---

tu opracija seštevanje, če pa uporabimo veznik **in**, je najverjetneje operacije množenja. Za DN je premislek zakaj je tako.

42) Kolikšna je verjetnost, da iz posode, v kateri je 5 belih, 6 rdečih in 3 modre kroglic na slepo izvlečemo kroglice, ki je bele ali modre barve?

Število vseh kroglic v posodi je 14. Torej je število vseh dogodkov kjer izvlečemo eno kroglico $n = C_{14}^1 = 14$. Izvleči moramo kroglico, ki je bele ali modre barve. Število kroglic, ki so bele ali modre barve je enako $5 + 3 = 8$. Torej je število ugodnih dogodkov $k = C_8^1 = 8$. Verjetnost izračunamo sledeče

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{8}{14} \approx 57,14\%$$

43) Na vlaku je med 30 potniki 5 potnikov brez vozne karte. Sprevodnik na slepo izbere 6 potnikov Kolikšna je verjetnost, da bodo med njimi trije potniki brez vozne karte?

Med 30 potniki izberemo 6 potnikov. Ker nas vrstni red ne zanima, se ukvarjamo s kombinacijami. Število možnih dogodkov je torej $n = C_{30}^6$.

Zanima nas verjetnost, da so trije potniki brez karte. Torej so mora zgoditi, da so trije potniki med tistimi 5-imi, ki nimajo vozovnice in 3 med preostalimi 25-imi, ki imajo vozovnico. Število možnih dogodkov je $k = C_5^3 \cdot C_{25}^3$.

Verjetnost izračunamo sledeče

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{C_5^3 \cdot C_{25}^3}{C_{30}^6} \approx 3,87\%$$

44) V škatli je 7 belih, 3 modre in 8 črnih krogic. Kroglice iste barve med seboj razlikujemo. Na slepo izvlečemo hkrati tri kroglice. Kolikšna je verjetnost, da:

Imamo 18 kroglic iz katerih izvlečemo 3. Pri vse podnalogah, bo število vseh dogodkov enako $n = C_{18}^3$.

a) so vse tri kroglice bele

Ugodni dogodki so tisti, pri katerih izvlečemo vse tri kroglice bele. Torej je število ugodnih dogodkov $k_a = C_7^3$. Verjetnost je torej

$$P(A) = \frac{k_a}{n} = \frac{C_7^3}{C_{18}^3} = \frac{35}{816} \approx 4,29\%$$

b) je ena kroglica modra, dve pa črni

Torej so udogni dogodki tisti, pri katerih izvlečemo eno kroglico izmed 3-eh modrih in dve izmed 8-ih črnih. Število ugodnih dogodkov je $k_b = C_3^1 \cdot C_8^2$. Verjetnost torej izračunamo

$$P(B) = \frac{k_b}{n} = \frac{C_3^1 \cdot C_8^2}{C_{18}^3} = \frac{7}{68} \approx 10,29\%$$

c) nobena kroglica ni modra

Torej moramo izvleči vse 3 kroglice take, da so bele ali črne. Takih kroglic je $7 + 8 = 15$. Torej je število ugodnih dogodkov $k_c = C_{15}^3$. Verjetnost je potemtakem

$$P(C) = \frac{k_c}{n} = \frac{C_{15}^3}{C_{18}^3 n} = \frac{455}{816} \approx 55,76\%$$

d) vsaj ena kroglica je črna

Torej moramo potegniti 1, 2 ali 3 črne kroglici. Ponovno si bomo pomagali tako, da bomo izračunali verjetnost nasprotnega dogodka. Torej, da potegnemo 0 črnih kroglic. To se bo zgodilo, če bodo vse 3 kroglice izmed 10-ih, ki niso črne. Število ugodnih dogodkov za nasprotni dogodek je torej $k_{d'} = C_{10}^3$.

Verjetnost nasprotnega dogodgka izračunamo sledeče

$$P(D)' = \frac{k_{d'}}{n} = \frac{C_{10}^3}{C_{18}^3} = \frac{5}{34} \approx 14,7\%$$

Verjetnost dogodka je torej

$$P(D) = 1 - P(D)' = 1 - 0,147 = 85,3\%$$

e) je ena kroglica bela in dve modri ali pa ena modra in dve beli

Ugodnih dogodkov za eno belo in dve modri kroglici je število dogodkov, kjer potegnemo eno kroglico izmed 7 belih in 2 izmed 3 modrih. To je $C_7^1 \cdot C_3^2$.

Število ugodnih dogodkov za eno modro in dve beli kroglici naredimo podobno. To pomeni, da izvlečemo eno izmed 3 modrih in 2 izmed 7 belih. To je $C_3^1 \cdot C_7^2$

Število vseh ugodnih dogodkov je torej

$$k_e = C_7^1 \cdot C_3^2 + C_3^1 \cdot C_7^2$$

Verjetnost dogodka je torej

$$P(E) = \frac{k_e}{n} = \frac{C_7^1 \cdot C_3^2 + C_3^1 \cdot C_7^2}{C_{18}^3} = \frac{7}{68} \approx 12,29\%$$

Iz običajnega kompleta 32 igralnih kart na slepo izvlečemo štiri karte. Izračunajte verjetnost, da

Tako kot pri prejšnji nalogi, bodo število vseh dogodkov enako čez celotno nalogo. To je $n = C_{32}^4$, ker iz kupa 32 kart izvlečemo 4.

a) so vse štiri karte rdeče

V igralnem kompletu imamo 16 črnih in 16 rdečih kart. Mi si želimo, da bi bile vse 4 izvlečene karte rdeče. Torej morajo vse 4 izvlečene karte biti iz skupine 16 kart. Ugodnih dogodkov je potemtakem $k_a = C_{16}^4$. Verjetnost izračunamo sledeče

$$P(A) = \frac{k_a}{n} = \frac{C_{16}^4}{C_{32}^4} \approx 5,06\%$$

b) sta dve karti dami in ena je as

V kompletu imamo 4 dame in 4 ase. Torej morata biti 2 izvlečeni karti izmed 4-ih dam, kar je C_4^2. 1 karta mora biti izmed 4-ih asov, to je C_4^1. Potem pa moramo izvleči še eno karto, ki mora biti izmed preostalih 24 kart, ki niso dame ali asi. Takih je C_{24}^1. Če bi si to rekli v povedi, bi uporabili veznik in, zato bomo uporabili množenje (glej opombo na strani 16). Torej je število ugodnih dogodkov enako

$$k_b = C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_{24}^1$$

Verjetnost dogodka je torej

$$P(B) = \frac{k_b}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_{24}^1}{C_{32}^4} \approx 1,6\%$$

c) je vsaj ena karta pik

Ponovno si bomo pomagali z nasprotnim dogodkom, saj je tako manj računanja. Nasprotni dogodek je, da je 0 kart pik. Imamo 8 pikov. To pomeni, da morajo vse 4 karte biti iz skupine 24-ih kart, ki niso piki. Ugodnih nasprotnih dogodkov je torej

$$k_{c'} = C_{24}^4$$

Verjetnost nasprotnega dogodka je torej

$$P(C)' = \frac{k_{c'}}{n}$$

Verjetnost dogodka je torej

$$P(C) = 1 - P(C)' = 1 - \frac{k_{c'}}{n} = 1 - \frac{C_{24}^4}{C_{32}^4} \approx 77,09\%$$

d) je kvečjemu ena karta dama

Imamo 4 dame. Želimo, da je največ ena karta dama. Torej je lahko 0 dam, ali pa 1 dama. Da izvlečemo 0 dam, moramo vse 4 karte izvleči iz skupine 28-iih kart, ki niso dame, to je C_{28}^4. Da je ena karta damo, moramo izvleči eno karte izmed 4-ih, ki so dame in 3 karte izmed 28-ih, ki niso dame. To je $C_4^1 \cdot C_{28}^3$. Vseh ugodnih dogodkov je torej

$$k_d = C_{28}^4 + C_4^1 \cdot C_{28}^3$$

Operacije seštevanja in množenja se ponovno ujemajo z vezniki. Verjetnost izračunamo sledeče

$$P(D) = \frac{k_d}{n} = \frac{C_{28}^4 + C_4^1 \cdot C_{28}^3}{C_{32}^4} \approx 93,38\%$$

e) so dve ali tri karte kralji

Imamo 4 kralje. Želimo si, da bi izvlekli 2 ali 3. Za dva kralja moramo izvleči 2 karti izmed 4-ih kart, ki so kralji in 2 karte izmed 28-ih kart, ki niso kralji. To je $C_4^2 \cdot C_{28}^2$. Da izvlečemo 3 kralje, potrebujemo izvleči 3 karte izmed 4-ih kart, ki so kralji in 1 karto izmed 28-ih, ki niso kralji. To je $C_4^3 \cdot C_{28}^1$. Skupno je ugodnih dogodkov

$$k_e = C_4^2 \cdot C_{28}^2 + C_4^3 \cdot C_{28}^1$$

Uporabimo seštevanje, ker piše v navodilih **ali**. Verjetnost izračunamo sledeče:

$$P(E) = \frac{k_e}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_{28}^2 + C_4^3 \cdot C_{28}^1}{C_{32}^4} \approx 6,62\%$$