Raport Zadanie NUM7

Tomasz Dziób

22.12.2023

1 Wstęp techniczny

Poniższy raport dotyczy zadania numerycznego NUM7 z listy 6. Załączone program o nazwie *num7.cpp* został napisany w języku *C++*, oraz korzysta z biblioteki *GNU Plot*. Przed skompilowaniem programu należy zainstalować powyższą bibliotekę.

1.1 Jak uruchomić program?

Razem z załączonymi plikami znajdziemy *Makefile* który służy do uruchomienia programów.

- *make run* uruchamia program dotyczący podpunktu a wraz ze sprawdzeniem

2 Nakreślenie problemu

Interpolację stosuje się do znalezienia funkcji przechodzącej przez znany nam zestaw punktów, które nazywamy węzłami. Różne metody interpolacyjne, mniej lub bardziej dokładnie, przybliżają wartość poszukiwanej funkcji.

3 Użyta metoda

3.1 Interpolacja Lagrange'a

Jedną z metod interpolacji, oraz tą którą mieliśmy za zadanie omówić, jest *interpolacja wielomianowa*. Polega ona na przeprowadzeniu przez *n-węzłów* wielomianu o stopniu *n-1*. Do skontruuowania takiego wielomianu możemy użyć *wzoru Lagrange'a*:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \tfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Powyższy wzór służy do obliczania wartości w podanym węźle wielomianu. Za jego pomocą można wyliczyć wartość przybliżanej funkcji w dowolnym punkcie, nie zmieniając jego stopnia. Pozwala to na wykreślenie funkcji bez jawnego poznawania współczynników przy danych potęgach x.

i	0	1	2	$\cdots$	n
x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

$$\begin{aligned}
L_n(x) =& f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}+ \\
&+ f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_n)}+ \\
&+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_n)}+ \\
&\cdots \\
&+ f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned}$$

Interpolacja wielomianowa pozwala na obliczenie wartości wielomianu w sposób liniowy(zależne od stopnia wielomianu oraz dokładności w jakiej chcemy wykreślić funkcję).

3.2 Dystrybucja węzłów

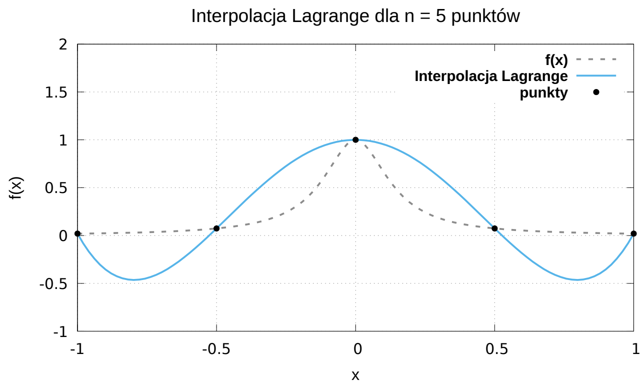
W zadaniu mieliśmy przedstawić powyższy problem dla dystrybucji węzłów:

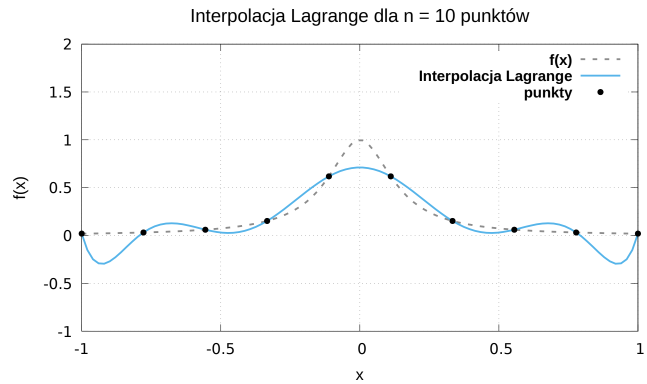
a) $x_i = -1 + 2\frac{i}{n+1} \qquad i = (0, 1, ..., n)$

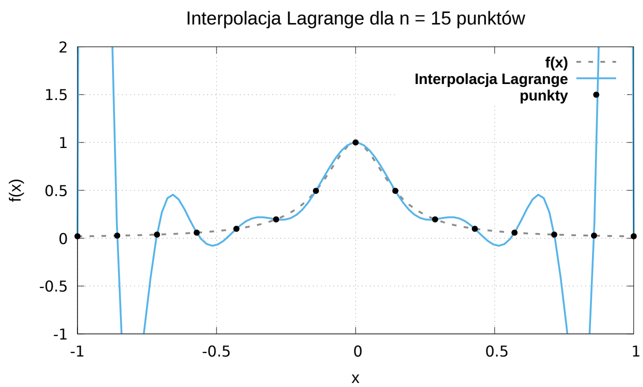
b) $x_i = cos(-1 + \frac{2i+1}{2(n+1)}\pi) \qquad i = (0, 1, ..., n)$

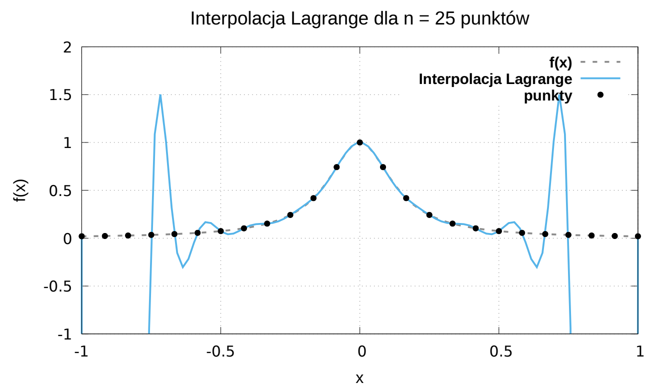
4 Uzyskany wynik

a) Przybliżana funkcja $y(x) = \frac{1}{1+50x^2}$ Dystrybucja węzłów: $x_i = -1 + 2\frac{i}{n+1}$



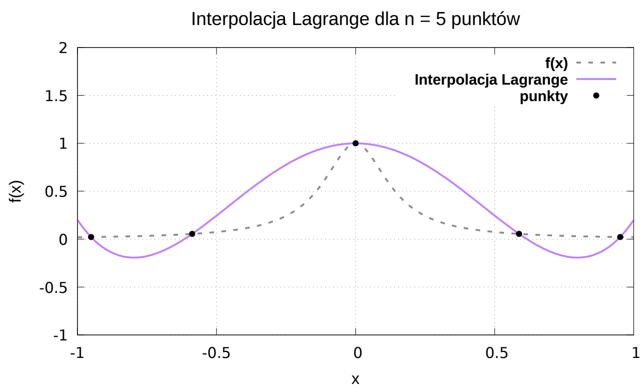


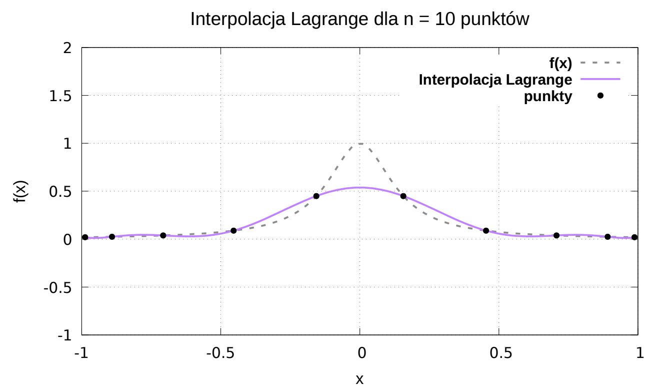


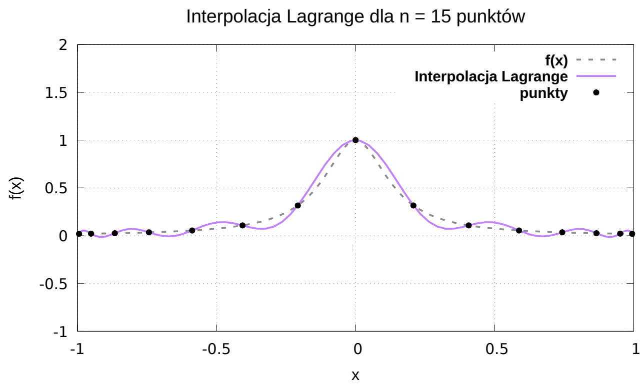


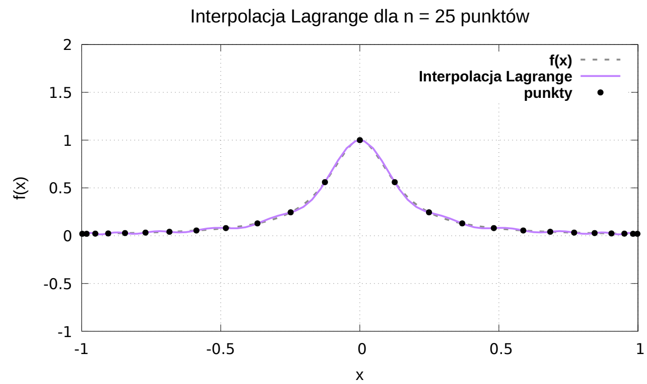
Na wykresach powyżej jesteśmy w stanie zauważyć jak zmienia się funkcja w zależności od ilości wybranych węzłów. Dla $n = 10$ obserwujemy już zbliżanie się kształtem do pożądanej funkcji. Niestety obecność *efektu Rungego* udziela się już dla wielomianu 14 rzędu co oznacza błąd interpolacji dobranie nieodpowiedniej metody dla tej funkcji.

b) Przybliżana funkcja $y(x) = \frac{1}{1+50x^2}$ Dystrybucja węzłów: $x_i = cos(-1 + \frac{2i+1}{2(n+1)}\pi)$









Używanie dystrybucji podanej w podpunkcie b) wykazuje się większą odpornością na błędy. Dla $n = 10$ obserwujemy już zbliżanie się kształtem do pożądanej funkcji. Ilość węzłów 15, 25 przybliża w bardzo dokładny sposób ogólny kształt poszukiwanej funkcji. *Efekt Rungego* nie występuje oraz wraz ze wzrostem rzędu wielomianu jesteśmy wstanie zauważyć polepszenie dokładności.

5 Podsumowanie

Skuteczność interpolacji wielomianowej znacząco zależy od funkcji, którą interpolujemy. W sytuacji, gdy zwiększamy liczbę węzłów na końcach przedziału może przyczynić się pojawienia się oscylacji Rungego, co za tym idzie błędu interpolacji. Metoda ta jest szczególnie użyteczna w przypadku funkcji, które przypuszczalnie mają charakter wielomianowy.