Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №3

на тему:

Метод сеток решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности

Выполнил: студент группы 353504
Левшуков Дмитрий Александрович

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2025

1 ЦЕЛИ РАБОТЫ

Цель выполнения задания:

- изучить метод разностных аппроксимаций для уравнения теплопроводности;
- составить алгоритмы решения уравнения теплопроводности методом сеток, применимым для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы решения уравнения теплопроводности по разработанным алгоритмам;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ;
- получить численное решение заданного уравнения теплопроводности.

2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЧАСТЬ

2.1 Используемые аппроксимации

При начальном уравнении

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Для явной схемы имеем

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \cdot \left(\frac{T_{i+1}^n - 2 \cdot T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} \right)$$

Для неявной схемы имеем

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \cdot \left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2 \cdot T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right)$$

Для $\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{h^2}\left[r_{i+\frac{1}{2}} \cdot T_{i+1}^{n+1} - \left(r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}} \right) \cdot T_i^{n+1} + r_{i-\frac{1}{2}} \cdot T_{i-1}^{n+1} \right],$$

где r выступает аналогом функции k.

Таким образом аппроксимация задачи выполнена с первым порядком точности по времени t и вторым по пространственной координате h.

2.2 Алгоритм явной разностной схемы

1. Определяем расчётный шаг сетки.

2. Проверяем условие устойчивости разностной схемы. Если условие выполняется, продолжаем.
3. Инициализируем граничные условия.
4. Применяем аппроксимации для дискретизации функции, т.е. избавляемся от производных и переходим к табличным функциям.
5. Обходим таблицу функции сверху вниз и справа налево (ряды – время, столбцы – координата), поэлементно заполняя ряд с помощью значений предыдущего.

2.3 Алгоритм неявной разностной схемы

1. Определяем расчётный шаг сетки.
2. Инициализируем граничные условия.
3. Применяем аппроксимации для дискретизации функции, т.е. избавляемся от производных и переходим к табличным функциям.
4. Для каждого ряда осуществляем прямой ход метода прогонки.
5. Для каждого ряда осуществляем обратный ход метода прогонки.

2.4 Оценка алгоритмов

Как видим, оба алгоритма по времени имеют асимптотику O(N*M), где N – кол-во точек с разными координатами, а M – кол-во точек с разным временем, которые мы рассматриваем в таблице. По пространству имеем асимптотику O(N), т.к. для обоих схем необходимо сохранять предыдущий ряд, для вычисления текущего.

3 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

3.1 Задания 1

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(K(x)\dfrac{du}{dx}\right) = f, \\ u(a) = U_A, \quad u(b) = U_B. \end{cases}$$

Таблица наборов параметров

Параметр	1 набор	2 набор	3 набор	4 набор	5 набор	6 набор	7 набор
c	1	2	0.1	1	1	1	1
$K(x)$	$k(x)$	$ck(x)$	$ck(x)$	$1/k(x)$	$k(x)$	$k(x)$	$k(x)$
U_A	ua	ua	ua	ua	$-ua$	ua	$-ua$
U_B	ub	ub	ub	ub	ub	$-ub$	$-ub$

Возьмём простейшие вводные, решения для которых должны иметь форму частей параболы ветвями вниз, будем работать с 20 точками.

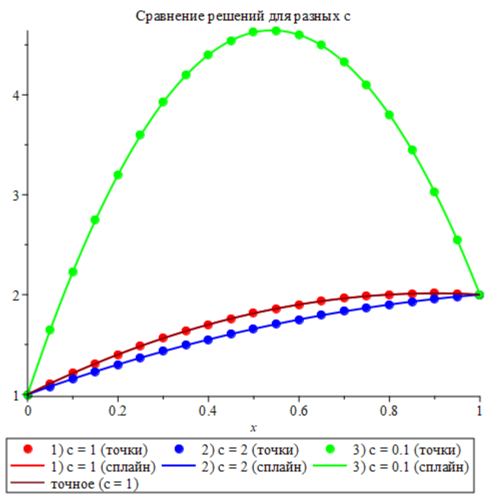
$K := (x, c) \rightarrow 2 \cdot c :$

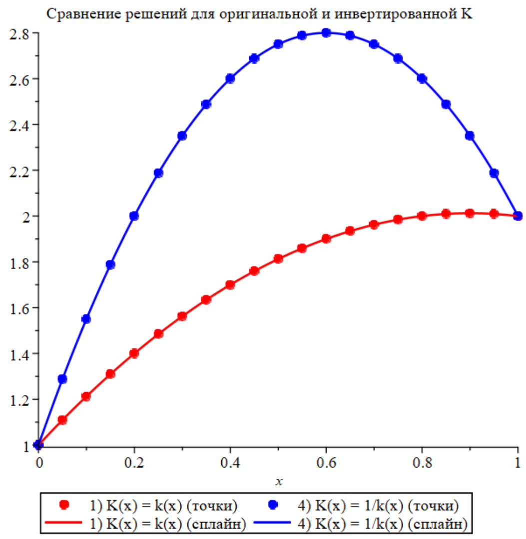
$f := x \rightarrow 5 :$

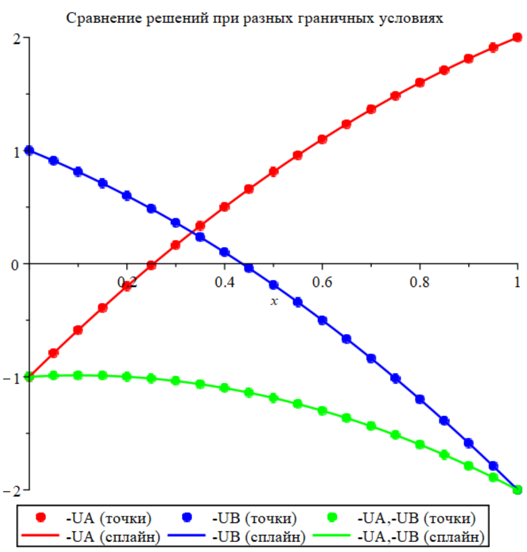
$a := 0 : b := 1 :$

$UA := 1 : UB := 2 :$

Решения представим в виде трёх графиков, а также сплайновых аппроксимаций, которые строятся по всем точкам.







$$
\begin{cases}
1. + 2.214x - 10.57x^3 & x < 0.05000 \\
1.003 + 2.135x - 1.585(x - 0.05000)^2 + 2.831(x - 0.05000)^3 & x < 0.1000 \\
1.013 + 1.997x - 1.160(x - 0.1000)^2 - 0.7586(x - 0.1000)^3 & x < 0.1500 \\
1.028 + 1.876x - 1.274(x - 0.1500)^2 + 0.2033(x - 0.1500)^3 & x < 0.2000 \\
1.050 + 1.750x - 1.244(x - 0.2000)^2 - 0.05447(x - 0.2000)^3 & x < 0.2500 \\
1.078 + 1.625x - 1.252(x - 0.2500)^2 + 0.01459(x - 0.2500)^3 & x < 0.3000 \\
1.113 + 1.500x - 1.250(x - 0.3000)^2 - 0.003911(x - 0.3000)^3 & x < 0.3500 \\
1.153 + 1.375x - 1.250(x - 0.3500)^2 + 0.001049(x - 0.3500)^3 & x < 0.4000 \\
1.200 + 1.250x - 1.250(x - 0.4000)^2 - 0.0002862(x - 0.4000)^3 & x < 0.4500 \\
1.253 + 1.125x - 1.250(x - 0.4500)^2 + 0.00009539(x - 0.4500)^3 & x < 0.5000 \\
1.312 + 1.x - 1.250(x - 0.5000)^2 - 0.00009539(x - 0.5000)^3 & x < 0.5500 \\
1.378 + 0.8750x - 1.250(x - 0.5500)^2 + 0.0002862(x - 0.5500)^3 & x < 0.6000 \\
1.450 + 0.7500x - 1.250(x - 0.6000)^2 - 0.001049(x - 0.6000)^3 & x < 0.6500 \\
1.528 + 0.6250x - 1.250(x - 0.6500)^2 + 0.003911(x - 0.6500)^3 & x < 0.7000 \\
1.612 + 0.5000x - 1.250(x - 0.7000)^2 - 0.01459(x - 0.7000)^3 & x < 0.7500 \\
1.703 + 0.3750x - 1.252(x - 0.7500)^2 + 0.05447(x - 0.7500)^3 & x < 0.8000 \\
1.800 + 0.2502x - 1.244(x - 0.8000)^2 - 0.2033(x - 0.8000)^3 & x < 0.8500 \\
1.904 + 0.1243x - 1.274(x - 0.8500)^2 + 0.7586(x - 0.8500)^3 & x < 0.9000 \\
2.010 + 0.002591x - 1.160(x - 0.9000)^2 - 2.831(x - 0.9000)^3 & x < 0.9500 \\
2.137 - 0.1347x - 1.585(x - 0.9500)^2 + 10.57(x - 0.9500)^3 & \textit{otherwise}
\end{cases}
$$

Получили действительно части параболы. Причём, при визуальном сравнение с точным решением, не видим сколько-нибудь заметных отклонений.

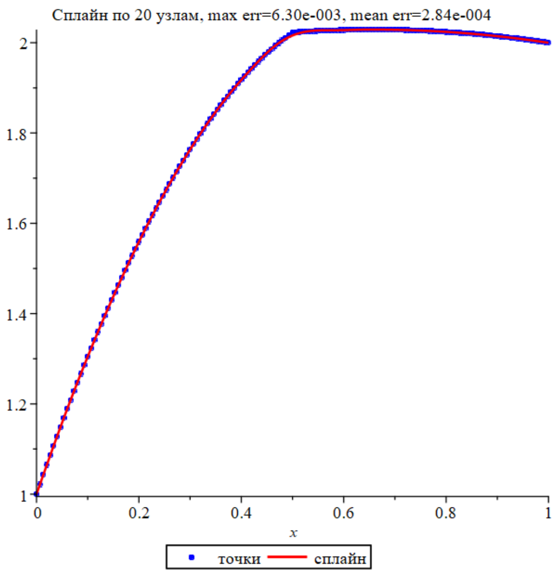
3.2 Задание 2

Приводится то же уравнение, но теперь явно требуется разностная схема второго порядка, которая и так была применена в первом задании.

Будем менять теплопроводность и источник тепла, как это требуется в условии, строить сплайн аппроксимации.

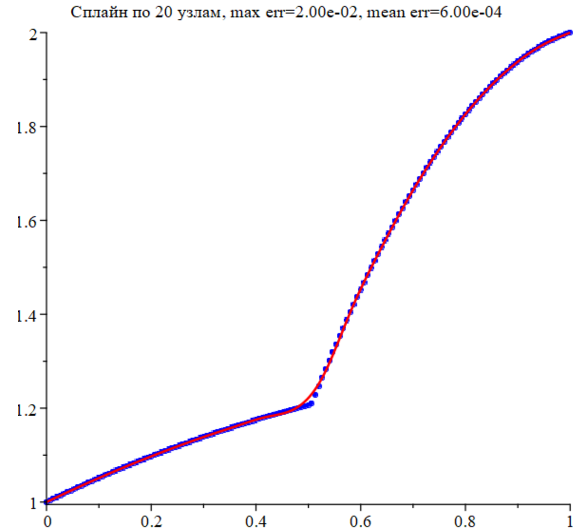
а) Полагать, что стержень состоит из двух материалов с различными коэффициентами теплопроводности k(x).

$$
\begin{aligned}
&k := x \rightarrow piecewise(\\
&a \le x \ \mathbf{and}\ x \le (b+a)/2, 1, \\
&(b+a)/2 < x \ \mathbf{and}\ x \le b,\ 10 \\
&);
\end{aligned}
$$



$$
\begin{cases}
1. + 3.218x - 19.81x^3 & x < 0.05333 \\
1.006 + 3.049x - 3.170(x - 0.05333)^2 + 5.312(x - 0.05333)^3 & x < 0.1067 \\
1.029 + 2.756x - 2.320(x - 0.1067)^2 - 1.437(x - 0.1067)^3 & x < 0.1600 \\
1.064 + 2.496x - 2.550(x - 0.1600)^2 + 0.4342(x - 0.1600)^3 & x < 0.2133 \\
1.114 + 2.228x - 2.480(x - 0.2133)^2 - 0.3323(x - 0.2133)^3 & x < 0.2600 \\
1.169 + 1.994x - 2.527(x - 0.2600)^2 + 0.6926(x - 0.2600)^3 & x < 0.3133 \\
1.245 + 1.731x - 2.416(x - 0.3133)^2 - 2.453(x - 0.3133)^3 & x < 0.3667 \\
1.340 + 1.452x - 2.809(x - 0.3667)^2 + 9.118(x - 0.3667)^3 & x < 0.4200 \\
1.426 + 1.230x - 1.350(x - 0.4200)^2 - 34.02(x - 0.4200)^3 & x < 0.4733 \\
1.623 + 0.7958x - 6.793(x - 0.4733)^2 + 14.59(x - 0.4733)^3 & x < 0.5267 \\
1.922 + 0.1957x - 4.459(x - 0.5267)^2 + 33.35(x - 0.5267)^3 & x < 0.5800 \\
2.025 + 0.004744x + 0.8778(x - 0.5800)^2 - 8.938(x - 0.5800)^3 & x < 0.6333 \\
2.015 + 0.02210x - 0.5523(x - 0.6333)^2 + 2.398(x - 0.6333)^3 & x < 0.6867 \\
2.040 - 0.01634x - 0.1686(x - 0.6867)^2 - 0.6550(x - 0.6867)^3 & x < 0.7400 \\
2.057 - 0.03992x - 0.2734(x - 0.7400)^2 + 0.2181(x - 0.7400)^3 & x < 0.7867 \\
2.075 - 0.06401x - 0.2428(x - 0.7867)^2 - 0.08462(x - 0.7867)^3 & x < 0.8400 \\
2.097 - 0.09063x - 0.2564(x - 0.8400)^2 + 0.1547(x - 0.8400)^3 & x < 0.8933 \\
2.120 - 0.1167x - 0.2316(x - 0.8933)^2 - 0.5341(x - 0.8933)^3 & x < 0.9467 \\
2.147 - 0.1459x - 0.3171(x - 0.9467)^2 + 1.982(x - 0.9467)^3 & otherwise
\end{cases}
$$

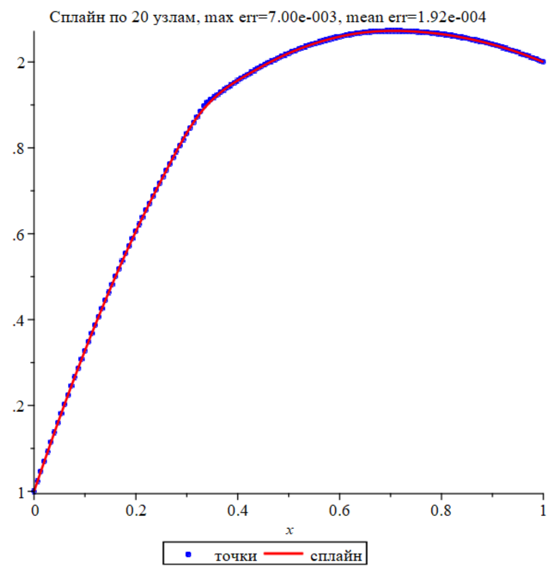
$$
x \mapsto \begin{cases}
10 & a \le x \le \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \\
1 & \frac{a}{2} + \frac{b}{2} < x \le b
\end{cases}
$$



$$\begin{cases} 1. + 0.5292x - 1.980x^3 & x < 0.05333 \\ 1.001 + 0.5123x - 0.3168(x - 0.05333)^2 + 0.5236(x - 0.05333)^3 & x < 0.1067 \\ 1.003 + 0.4830x - 0.2330(x - 0.1067)^2 - 0.1146(x - 0.1067)^3 & x < 0.1600 \\ 1.006 + 0.4572x - 0.2513(x - 0.1600)^2 - 0.06531(x - 0.1600)^3 & x < 0.2133 \\ 1.011 + 0.4298x - 0.2618(x - 0.2133)^2 + 0.4549(x - 0.2133)^3 & x < 0.2600 \\ 1.017 + 0.4084x - 0.1981(x - 0.2600)^2 - 1.477(x - 0.2600)^3 & x < 0.3133 \\ 1.026 + 0.3746x - 0.4344(x - 0.3133)^2 + 5.438(x - 0.3133)^3 & x < 0.3667 \\ 1.026 + 0.3747x + 0.4356(x - 0.3667)^2 - 20.27(x - 0.3667)^3 & x < 0.4200 \\ 1.077 + 0.2482x - 2.808(x - 0.4200)^2 + 75.66(x - 0.4200)^3 & x < 0.4733 \\ 0.9169 + 0.5942x + 9.297(x - 0.4733)^2 + 58.45(x - 0.4733)^3 & x < 0.5267 \\ 0.1672 + 2.085x + 18.65(x - 0.5267)^2 - 167.6(x - 0.5267)^3 & x < 0.5800 \\ -0.1294 + 2.644x - 8.167(x - 0.5800)^2 + 44.91(x - 0.5800)^3 & x < 0.6333 \\ 0.1632 + 2.156x - 0.9814(x - 0.6333)^2 - 12.04(x - 0.6333)^3 & x < 0.6867 \\ 0.3010 + 1.948x - 2.908(x - 0.6867)^2 + 3.250(x - 0.6867)^3 & x < 0.7400 \\ 0.5022 + 1.666x - 2.388(x - 0.7400)^2 - 0.9123(x - 0.7400)^3 & x < 0.7867 \\ 0.6769 + 1.437x - 2.515(x - 0.7867)^2 - 0.1570(x - 0.7867)^3 & x < 0.8400 \\ 0.8962 + 1.167x - 2.541(x - 0.8400)^2 + 1.362(x - 0.8400)^3 & x < 0.8933 \\ 1.121 + 0.9081x - 2.323(x - 0.8933)^2 - 5.293(x - 0.8933)^3 & x < 0.9467 \\ 1.391 + 0.6152x - 3.169(x - 0.9467)^2 + 19.81(x - 0.9467)^3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

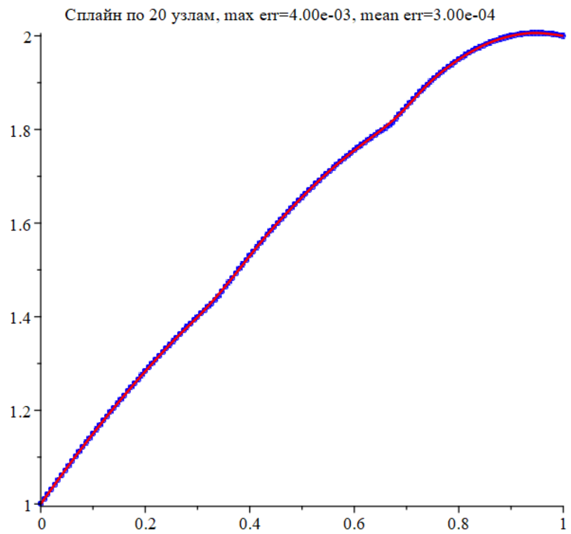
б) Пусть стержень состоит из трёх материалов с различными свойствами:

$k := x \rightarrow piecewise($
$a \leq x\ \mathbf{and}\ x \leq a + (b - a)/3, 1,$
$a + (b - a)/3 < x\ \mathbf{and}\ x \leq a + 2\cdot(b - a)/3,\ 2,$
$a + 2\cdot(b - a)/3 < x\ \mathbf{and}\ x \leq b,\ 3,$
$);$



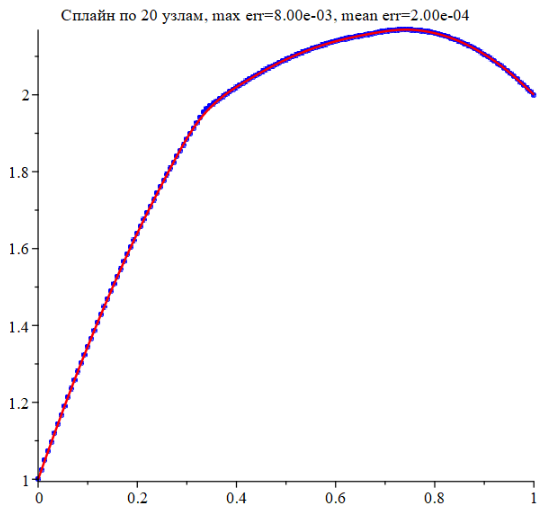
$$\begin{cases} 1. + 3.450x - 19.75x^3 & x < 0.05333 \\ 1.006 + 3.281x - 3.161(x - 0.05333)^2 + 5.025(x - 0.05333)^3 & x < 0.1067 \\ 1.029 + 2.987x - 2.357(x - 0.1067)^2 - 0.3439(x - 0.1067)^3 & x < 0.1600 \\ 1.063 + 2.733x - 2.412(x - 0.1600)^2 - 3.649(x - 0.1600)^3 & x < 0.2133 \\ 1.117 + 2.444x - 2.996(x - 0.2133)^2 + 18.00(x - 0.2133)^3 & x < 0.2600 \\ 1.155 + 2.282x - 0.4762(x - 0.2600)^2 - 57.37(x - 0.2600)^3 & x < 0.3133 \\ 1.314 + 1.742x - 9.656(x - 0.3133)^2 + 29.26(x - 0.3133)^3 & x < 0.3667 \\ 1.577 + 0.9614x - 4.975(x - 0.3667)^2 + 29.51(x - 0.3667)^3 & x < 0.4200 \\ 1.684 + 0.6827x - 0.2527(x - 0.4200)^2 - 7.888(x - 0.4200)^3 & x < 0.4733 \\ 1.727 + 0.5884x - 1.515(x - 0.4733)^2 + 2.038(x - 0.4733)^3 & x < 0.5267 \\ 1.799 + 0.4442x - 1.189(x - 0.5267)^2 - 0.2662(x - 0.5267)^3 & x < 0.5800 \\ 1.870 + 0.3152x - 1.231(x - 0.5800)^2 - 0.9735(x - 0.5800)^3 & x < 0.6333 \\ 1.955 + 0.1755x - 1.387(x - 0.6333)^2 + 1.526(x - 0.6333)^3 & x < 0.6867 \\ 2.044 + 0.04063x - 1.143(x - 0.6867)^2 + 2.476(x - 0.6867)^3 & x < 0.7400 \\ 2.116 - 0.06015x - 0.7467(x - 0.7400)^2 - 0.7436(x - 0.7400)^3 & x < 0.7867 \\ 2.173 - 0.1347x - 0.8508(x - 0.7867)^2 + 0.04559(x - 0.7867)^3 & x < 0.8400 \\ 2.246 - 0.2251x - 0.8435(x - 0.8400)^2 + 0.4279(x - 0.8400)^3 & x < 0.8933 \\ 2.321 - 0.3114x - 0.7751(x - 0.8933)^2 - 1.757(x - 0.8933)^3 & x < 0.9467 \\ 2.411 - 0.4091x - 1.056(x - 0.9467)^2 + 6.601(x - 0.9467)^3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$k := x \rightarrow piecewise($
$a \leq x\ \mathbf{and}\ x \leq a + (b - a)/3, 3,$
$a + (b - a)/3 < x\ \mathbf{and}\ x \leq a + 2\cdot(b - a)/3,\ 2,$
$a + 2\cdot(b - a)/3 < x\ \mathbf{and}\ x \leq b,\ 1,$
$);$



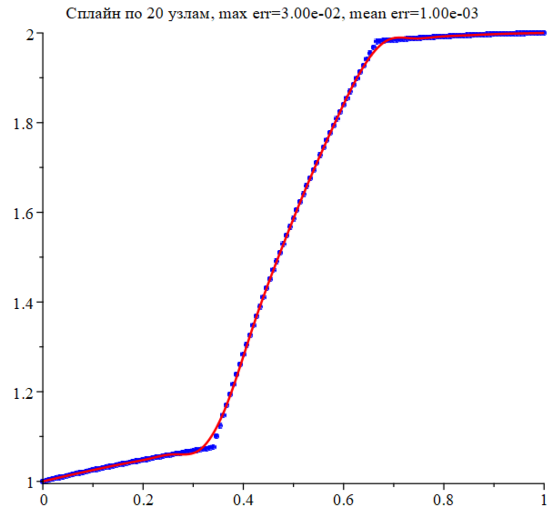
$$
\begin{cases}
1. + 1.558\,x - 6.633\,x^{3} & x < 0.05333 \\
1.002 + 1.501\,x - 1.061\,(x - 0.05333)^{2} + 1.913\,(x - 0.05333)^{3} & x < 0.1067 \\
1.010 + 1.405\,x - 0.7552\,(x - 0.1067)^{2} - 1.019\,(x - 0.1067)^{3} & x < 0.1600 \\
1.022 + 1.315\,x - 0.9181\,(x - 0.1600)^{2} + 2.161\,(x - 0.1600)^{3} & x < 0.2133 \\
1.036 + 1.236\,x - 0.5723\,(x - 0.2133)^{2} - 9.163\,(x - 0.2133)^{3} & x < 0.2600 \\
1.064 + 1.123\,x - 1.855\,(x - 0.2600)^{2} + 28.91\,(x - 0.2600)^{3} & x < 0.3133 \\
1.047 + 1.171\,x + 2.770\,(x - 0.3133)^{2} - 9.803\,(x - 0.3133)^{3} & x < 0.3667 \\
0.9761 + 1.383\,x + 1.201\,(x - 0.3667)^{2} - 19.39\,(x - 0.3667)^{3} & x < 0.4200 \\
0.9922 + 1.346\,x - 1.900\,(x - 0.4200)^{2} + 5.001\,(x - 0.4200)^{3} & x < 0.4733 \\
1.063 + 1.186\,x - 1.100\,(x - 0.4733)^{2} - 0.6165\,(x - 0.4733)^{3} & x < 0.5267 \\
1.125 + 1.063\,x - 1.199\,(x - 0.5267)^{2} - 2.535\,(x - 0.5267)^{3} & x < 0.5800 \\
1.208 + 0.9137\,x - 1.604\,(x - 0.5800)^{2} + 10.76\,(x - 0.5800)^{3} & x < 0.6333 \\
1.255 + 0.8344\,x + 0.1164\,(x - 0.6333)^{2} + 29.14\,(x - 0.6333)^{3} & x < 0.6867 \\
1.080 + 1.095\,x + 4.779\,(x - 0.6867)^{2} - 58.40\,(x - 0.6867)^{3} & x < 0.7400 \\
1.077 + 1.107\,x - 4.565\,(x - 0.7400)^{2} + 18.55\,(x - 0.7400)^{3} & x < 0.7867 \\
1.309 + 0.8020\,x - 1.968\,(x - 0.7867)^{2} - 4.492\,(x - 0.7867)^{3} & x < 0.8400 \\
1.511 + 0.5537\,x - 2.687\,(x - 0.8400)^{2} + 2.523\,(x - 0.8400)^{3} & x < 0.8933 \\
1.740 + 0.2886\,x - 2.283\,(x - 0.8933)^{2} - 5.598\,(x - 0.8933)^{3} & x < 0.9467 \\
2.009 - 0.002766\,x - 3.179\,(x - 0.9467)^{2} + 19.87\,(x - 0.9467)^{3} & \textit{otherwise}
\end{cases}
$$

$k := x \to piecewise($
$a \le x \;\mathbf{and}\; x \le a + (b - a)/3, 1,$
$a + (b - a)/3 < x \;\mathbf{and}\; x \le a + 2\cdot(b - a)/3,\ 2,$
$a + 2\cdot(b - a)/3 < x \;\mathbf{and}\; x \le b,\ 1,$
$);$



$$
\begin{cases}
1. + 3.621\,x - 19.75\,x^{3} & x < 0.05333 \\
1.006 + 3.453\,x - 3.160\,(x - 0.05333)^{2} + 4.999\,(x - 0.05333)^{3} & x < 0.1067 \\
1.029 + 3.158\,x - 2.360\,(x - 0.1067)^{2} - 0.2444\,(x - 0.1067)^{3} & x < 0.1600 \\
1.063 + 2.904\,x - 2.399\,(x - 0.1600)^{2} - 4.021\,(x - 0.1600)^{3} & x < 0.2133 \\
1.118 + 2.614\,x - 3.043\,(x - 0.2133)^{2} + 19.67\,(x - 0.2133)^{3} & x < 0.2600 \\
1.153 + 2.459\,x - 0.2895\,(x - 0.2600)^{2} - 62.66\,(x - 0.2600)^{3} & x < 0.3133 \\
1.320 + 1.893\,x - 10.31\,(x - 0.3133)^{2} + 31.11\,(x - 0.3133)^{3} & x < 0.3667 \\
1.602 + 1.058\,x - 5.337\,(x - 0.3667)^{2} + 32.40\,(x - 0.3667)^{3} & x < 0.4200 \\
1.714 + 0.7655\,x - 0.1525\,(x - 0.4200)^{2} - 8.754\,(x - 0.4200)^{3} & x < 0.4733 \\
1.756 + 0.6745\,x - 1.553\,(x - 0.4733)^{2} + 2.613\,(x - 0.4733)^{3} & x < 0.5267 \\
1.827 + 0.5312\,x - 1.135\,(x - 0.5267)^{2} - 1.697\,(x - 0.5267)^{3} & x < 0.5800 \\
1.902 + 0.3956\,x - 1.407\,(x - 0.5800)^{2} + 4.174\,(x - 0.5800)^{3} & x < 0.6333 \\
1.971 + 0.2812\,x - 0.7387\,(x - 0.6333)^{2} + 0.6577\,(x - 0.6333)^{3} & x < 0.6867 \\
2.020 + 0.2080\,x - 0.6335\,(x - 0.6867)^{2} - 14.99\,(x - 0.6867)^{3} & x < 0.7400 \\
2.160 + 0.01251\,x - 3.032\,(x - 0.7400)^{2} + 4.846\,(x - 0.7400)^{3} & x < 0.7867 \\
2.352 - 0.2388\,x - 2.354\,(x - 0.7867)^{2} - 1.440\,(x - 0.7867)^{3} & x < 0.8400 \\
2.566 - 0.5021\,x - 2.584\,(x - 0.8400)^{2} + 1.706\,(x - 0.8400)^{3} & x < 0.8933 \\
2.792 - 0.7632\,x - 2.311\,(x - 0.8933)^{2} - 5.383\,(x - 0.8933)^{3} & x < 0.9467 \\
3.062 - 1.056\,x - 3.172\,(x - 0.9467)^{2} + 19.83\,(x - 0.9467)^{3} & \textit{otherwise}
\end{cases}
$$

$k := x \to piecewise($
$a \le x \;\mathbf{and}\; x \le a + (b - a)/3, 20,$
$a + (b - a)/3 < x \;\mathbf{and}\; x \le a + 2\cdot(b - a)/3,\ 1,$
$a + 2\cdot(b - a)/3 < x \;\mathbf{and}\; x \le b,\ 20,$
$);$

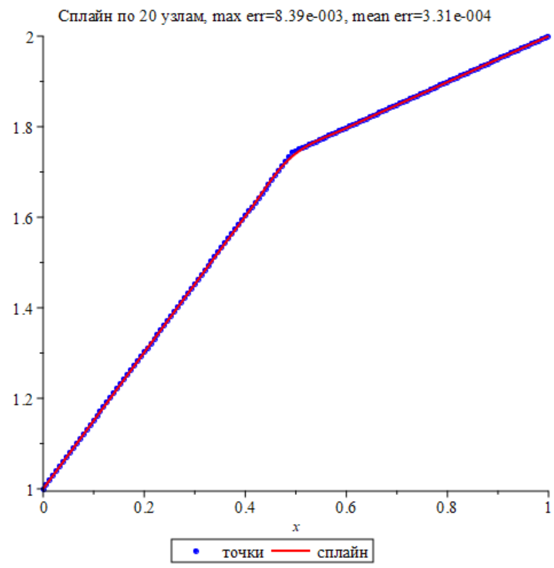


$$\begin{cases} 1.+0.2609x-1.157x^3 & x<0.05333 \\ 1.000+0.2510x-0.1851(x-0.05333)^2+1.098(x-0.05333)^3 & x<0.1067 \\ 1.001+0.2406x-0.009408(x-0.1067)^2-3.236(x-0.1067)^3 & x<0.1600 \\ 1.005+0.2120x-0.5272(x-0.1600)^2+11.85(x-0.1600)^3 & x<0.2133 \\ 0.9959+0.2569x+1.368(x-0.2133)^2-53.10(x-0.2133)^3 & x<0.2600 \\ 1.050+0.03767x-6.065(x-0.2600)^2+168.2(x-0.2600)^3 & x<0.3133 \\ 0.8118+0.8259x+20.84(x-0.3133)^2-23.47(x-0.3133)^3 & x<0.3667 \\ 0.1257+2.849x+17.09(x-0.3667)^2-155.4(x-0.3667)^3 & x<0.4200 \\ -0.05782+3.345x-7.779(x-0.4200)^2+42.55(x-0.4200)^3 & x<0.4733 \\ 0.1474+2.879x-0.9717(x-0.4733)^2-14.76(x-0.4733)^3 & x<0.5267 \\ 0.2634+2.649x-3.334(x-0.5267)^2+16.51(x-0.5267)^3 & x<0.5800 \\ 0.3809+2.434x-0.6927(x-0.5800)^2-51.27(x-0.5800)^3 & x<0.6333 \\ 0.6950+1.923x-8.895(x-0.6333)^2-45.76(x-0.6333)^3 & x<0.6867 \\ 1.582+0.5837x-16.22(x-0.6867)^2+129.1(x-0.6867)^3 & x<0.7400 \\ 2.021-0.04476x+4.433(x-0.7400)^2-40.74(x-0.7400)^3 & x<0.7867 \\ 1.910+0.1029x-1.270(x-0.7867)^2+9.057(x-0.7867)^3 & x<0.8400 \\ 1.957+0.04472x+0.1794(x-0.8400)^2-2.358(x-0.8400)^3 & x<0.8933 \\ 1.958+0.04373x-0.1978(x-0.8933)^2+0.3737(x-0.8933)^3 & x<0.9467 \\ 1.974+0.02582x-0.1380(x-0.9467)^2+0.8628(x-0.9467)^3 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

в) Промоделировать процесс теплопроводности в зависимости от правой части – функции f(x), предполагая, что f(x) − точечный источник тепла. Задать точечный источник тепла можно следующим образом: f(x) = cδ(x-x0), где c − некоторая константа (мощность источника); δ(x) − дельта-функция; x0 − точка из отрезка [a,b], в которой располагается источник.

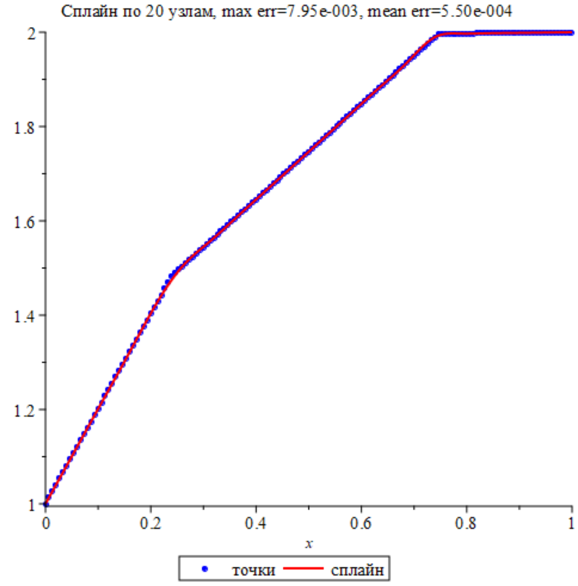
Вернёмся к константной теплопроводности, чтобы заметнее были изменения в f(x).

1) Точечный источник (150) поставлен в середину отрезка [a,b];



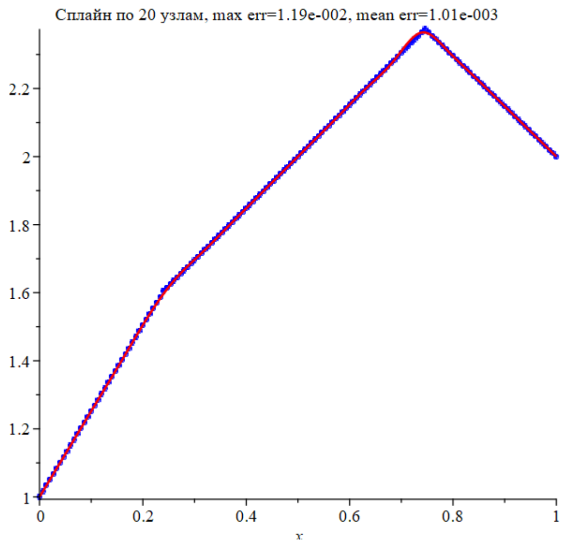
$$\begin{cases} 1.+1.507x-0.001310x^3 & x<0.05333 \\ 1.000+1.507x-0.0002096(x-0.05333)^2+0.006543(x-0.05333)^3 & x<0.1067 \\ 1.000+1.507x+0.0008373(x-0.1067)^2-0.02485(x-0.1067)^3 & x<0.1600 \\ 1.000+1.507x-0.003138(x-0.1600)^2+0.09284(x-0.1600)^3 & x<0.2133 \\ 0.9999+1.507x+0.01172(x-0.2133)^2-0.4167(x-0.2133)^3 & x<0.2600 \\ 1.000+1.505x-0.04662(x-0.2600)^2+1.320(x-0.2600)^3 & x<0.3133 \\ 0.9984+1.512x+0.1646(x-0.3133)^2-4.852(x-0.3133)^3 & x<0.3667 \\ 1.007+1.488x-0.6117(x-0.3667)^2+18.09(x-0.3667)^3 & x<0.4200 \\ 0.9705+1.577x+2.282(x-0.4200)^2-67.50(x-0.4200)^3 & x<0.4733 \\ 1.124+1.244x-8.517(x-0.4733)^2+32.17(x-0.4733)^3 & x<0.5267 \\ 1.439+0.6104x-3.370(x-0.5267)^2+26.71(x-0.5267)^3 & x<0.5800 \\ 1.509+0.4789x+0.9030(x-0.5800)^2-7.156(x-0.5800)^3 & x<0.6333 \\ 1.489+0.5141x-0.2420(x-0.6333)^2+1.920(x-0.6333)^3 & x<0.6867 \\ 1.495+0.5047x+0.06512(x-0.6867)^2-0.5223(x-0.6867)^3 & x<0.7400 \\ 1.493+0.5072x-0.01845(x-0.7400)^2+0.1649(x-0.7400)^3 & x<0.7867 \\ 1.493+0.5065x+0.004635(x-0.7867)^2-0.03673(x-0.7867)^3 & x<0.8400 \\ 1.493+0.5067x-0.001241(x-0.8400)^2+0.009825(x-0.8400)^3 & x<0.8933 \\ 1.493+0.5067x+0.0003307(x-0.8933)^2-0.002584(x-0.8933)^3 & x<0.9467 \\ 1.493+0.5067x-0.00008266(x-0.9467)^2+0.0005166(x-0.9467)^3 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

2) два одинаковых (150) по мощности источника поставлены в разные точки отрезка, симметричные относительно середины отрезка;



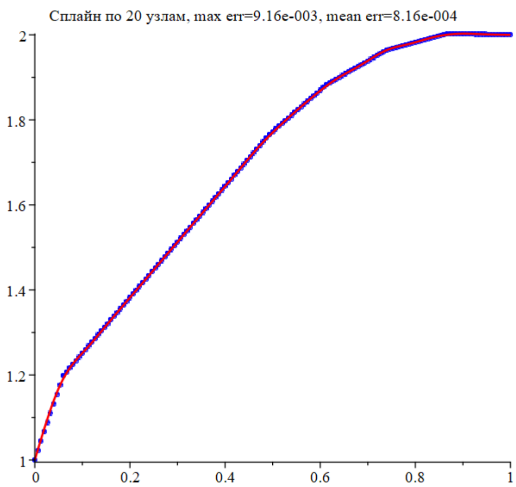
$$
\begin{cases}
1.+2.012x+0.5484x^3 & x<0.05333\\
0.9998+2.016x+0.08775(x-0.05333)^2-2.742(x-0.05333)^3 & x<0.1067\\
1.001+2.002x-0.3510(x-0.1067)^2+10.42(x-0.1067)^3 & x<0.1600\\
0.9935+2.054x+1.316(x-0.1600)^2-38.94(x-0.1600)^3 & x<0.2133\\
1.032+1.862x-4.914(x-0.2133)^2-22.02(x-0.2133)^3 & x<0.2600\\
1.176+1.260x-7.996(x-0.2600)^2+63.36(x-0.2600)^3 & x<0.3133\\
1.261+0.9473x+2.142(x-0.3133)^2-16.97(x-0.3133)^3 & x<0.3667\\
1.234+1.031x-0.5727(x-0.3667)^2+4.508(x-0.3667)^3 & x<0.4200\\
1.242+1.008x+0.1486(x-0.4200)^2-1.064(x-0.4200)^3 & x<0.4733\\
1.239+1.015x-0.02166(x-0.4733)^2-0.2518(x-0.4733)^3 & x<0.5267\\
1.241+1.011x-0.06195(x-0.5267)^2+2.071(x-0.5267)^3 & x<0.5800\\
1.235+1.022x+0.2695(x-0.5800)^2-8.034(x-0.5800)^3 & x<0.6333\\
1.260+0.9820x-1.016(x-0.6333)^2+30.06(x-0.6333)^3 & x<0.6867\\
1.160+1.130x+3.794(x-0.6867)^2-112.2(x-0.6867)^3 & x<0.7400\\
1.563+0.5773x-14.16(x-0.7400)^2+110.1(x-0.7400)^3 & x<0.7867\\
2.017-0.02518x+1.251(x-0.7867)^2-9.910(x-0.7867)^3 & x<0.8400\\
1.978+0.02366x-0.3350(x-0.8400)^2+2.652(x-0.8400)^3 & x<0.8933\\
1.989+0.01055x+0.08933(x-0.8933)^2-0.6979(x-0.8933)^3 & x<0.9467\\
1.986+0.01413x-0.02233(x-0.9467)^2+0.1396(x-0.9467)^3 & \text{otherwise}
\end{cases}
$$

3) два различных по мощности источника поставлены симметрично (слева 150, справа 450);



$$
\begin{cases}
1.+2.518x+0.5484x^3 & x<0.05333\\
0.9998+2.523x+0.08775(x-0.05333)^2-2.742(x-0.05333)^3 & x<0.1067\\
1.001+2.509x-0.3510(x-0.1067)^2+10.42(x-0.1067)^3 & x<0.1600\\
0.9935+2.561x+1.316(x-0.1600)^2-38.94(x-0.1600)^3 & x<0.2133\\
1.032+2.369x-4.914(x-0.2133)^2-22.01(x-0.2133)^3 & x<0.2600\\
1.176+1.766x-7.996(x-0.2600)^2+63.36(x-0.2600)^3 & x<0.3133\\
1.261+1.454x+2.141(x-0.3133)^2-16.95(x-0.3133)^3 & x<0.3667\\
1.233+1.538x-0.5699(x-0.3667)^2+4.425(x-0.3667)^3 & x<0.4200\\
1.242+1.515x+0.1381(x-0.4200)^2-0.7541(x-0.4200)^3 & x<0.4733\\
1.239+1.523x+0.01746(x-0.4733)^2-1.409(x-0.4733)^3 & x<0.5267\\
1.244+1.513x-0.2079(x-0.5267)^2+6.389(x-0.5267)^3 & x<0.5800\\
1.225+1.545x+0.8143(x-0.5800)^2-24.15(x-0.5800)^3 & x<0.6333\\
1.299+1.426x-3.049(x-0.6333)^2+90.20(x-0.6333)^3 & x<0.6867\\
0.9993+1.871x+11.38(x-0.6867)^2-336.7(x-0.6867)^3 & x<0.7400\\
2.208+0.2119x-42.48(x-0.7400)^2+330.2(x-0.7400)^3 & x<0.7867\\
3.571-1.596x+3.752(x-0.7867)^2-29.73(x-0.7867)^3 & x<0.8400\\
3.454-1.449x-1.005(x-0.8400)^2+7.956(x-0.8400)^3 & x<0.8933\\
3.487-1.488x+0.2680(x-0.8933)^2-2.094(x-0.8933)^3 & x<0.9467\\
3.478-1.478x-0.06700(x-0.9467)^2+0.4187(x-0.9467)^3 & \text{otherwise}
\end{cases}
$$

4) предложить свой вариант расположения источников (слева 300, справа четыре по 50).



$$
\begin{cases}
1.+3.760x-158.5x^3 & x<0.05333\\
1.048+2.407x-25.37(x-0.05333)^2+177.5(x-0.05333)^3 & x<0.1067\\
1.130+1.216x+3.030(x-0.1067)^2-24.04(x-0.1067)^3 & x<0.1600\\
1.116+1.334x-0.8163(x-0.1600)^2+6.570(x-0.1600)^3 & x<0.2133\\
1.121+1.303x+0.2349(x-0.2133)^2-2.206(x-0.2133)^3 & x<0.2600\\
1.120+1.310x-0.07397(x-0.2600)^2+0.9111(x-0.2600)^3 & x<0.3133\\
1.120+1.310x+0.07181(x-0.3133)^2-1.782(x-0.3133)^3 & x<0.3667\\
1.122+1.303x-0.2133(x-0.3667)^2+6.216(x-0.3667)^3 & x<0.4200\\
1.110+1.333x+0.7813(x-0.4200)^2-23.08(x-0.4200)^3 & x<0.4733\\
1.162+1.219x-2.912(x-0.4733)^2+12.87(x-0.4733)^3 & x<0.5267\\
1.262+1.018x-0.8527(x-0.5267)^2+0.8992(x-0.5267)^3 & x<0.5800\\
1.308+0.9352x-0.7088(x-0.5800)^2-16.47(x-0.5800)^3 & x<0.6333\\
1.440+0.7191x-3.343(x-0.6333)^2+35.67(x-0.6333)^3 & x<0.6867\\
1.472+0.6668x+2.364(x-0.6867)^2-52.98(x-0.6867)^3 & x<0.7400\\
1.619+0.4669x-6.112(x-0.7400)^2+58.41(x-0.7400)^3 & x<0.7867\\
1.760+0.2780x+2.065(x-0.7867)^2-27.87(x-0.7867)^3 & x<0.8400\\
1.776+0.2605x-2.395(x-0.8400)^2+3.332(x-0.8400)^3 & x<0.8933\\
1.973+0.03347x-1.861(x-0.8933)^2+14.54(x-0.8933)^3 & x<0.9467\\
2.040-0.04099x+0.4654(x-0.9467)^2-2.909(x-0.9467)^3 & \text{otherwise}
\end{cases}
$$

3.3 Задание 3

Задача 3. Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи − коэффициента теплопроводности и начальной температуры:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \dfrac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x)(1 - e^{-t}), & 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ u(0,t) = U_A, \quad u(l,t) = U_B, & 0 \le t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. Найти приближенное решение задачи с шагами $\tau = 0.05$ и $h = 0.01$, используя явную разностную схему. Построить графики решений при значениях $t = 0,\ 5\tau,\ 20\tau,\ 200\tau$.

2. Экспериментально определить момент времени t, при котором происходит установление процесса (визуально).

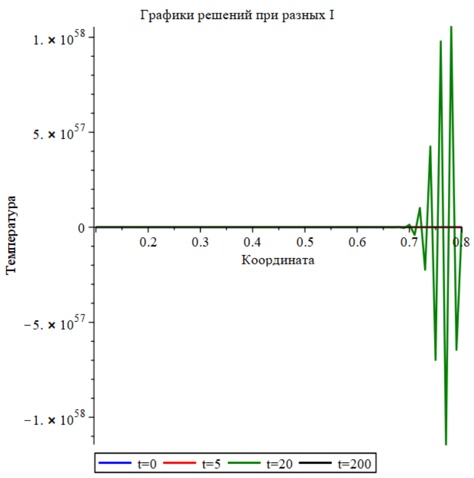
3. Произвести анимацию процесса установления.

4. Исследовать, как влияет начальная температура на процесс установления, взяв другие функции $\varphi(x)$ (согласованные с граничными условиями).

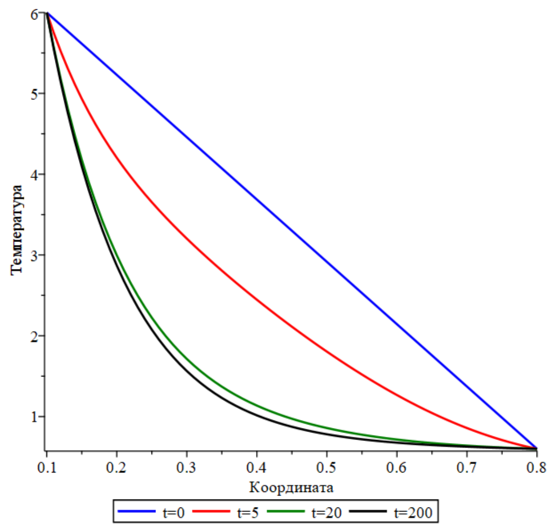
2.3.8	x	$x + x^{\frac{1}{3}}$	0.1	6	0.8	0.6

Явная схема для данной задачи не подходит, т. к. не выполняется условие устойчивости и решение конечно-разностной задачи не сходится к решению рассматриваемого ДУ.

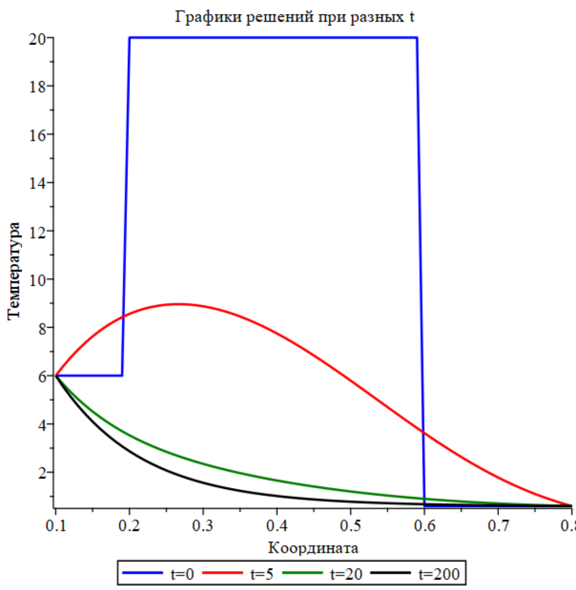
Если всё-таки попробовать применить явную схему, получим следующий результат.

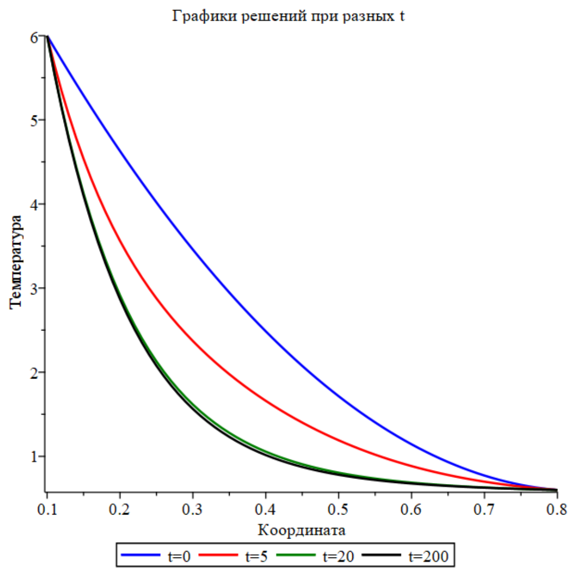


Неявная схема сходится.



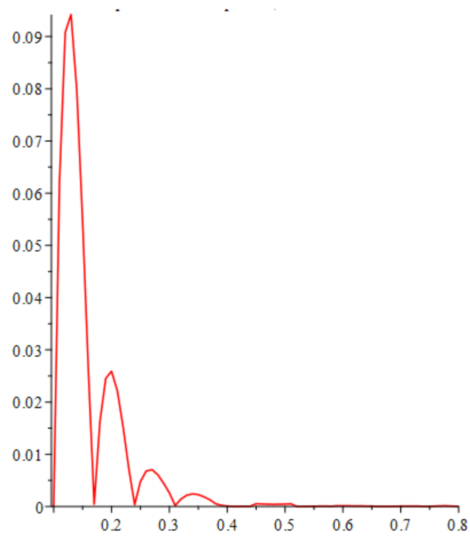
Как видно, мы использовали линейное изначальное условие. Изменим его на кусочно-непрерывную функцию и на квадратичную и проверим, как меняется момент t, при котором процесс устанавливается

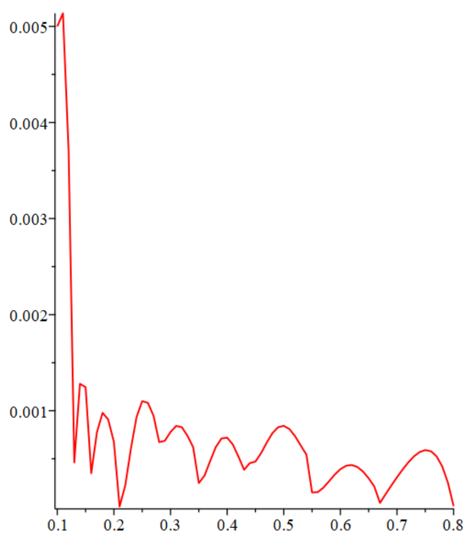




Так он составил 25, 30 и 40 тау для квадратичного, линейного и кусочно-непрерывного стартовых условий соответственно. Понятно, что чем ближе стартовое условие к стационарному, тем быстрее система установится. При t, равном двести тау, все три решения совпадают (полученные числа буквально одинаковые).

Попробуем построить интерполяцию сплайнами по 11 точкам, равномерно взятым. Получим максимальную абсолютною 9е-2, а среднюю относительную 5е-3. Погрешность заметно больше у левой границ, поэтому возьмём не равномерное распределение, проверим квадратичное распределение.





Для квадратного макс абсолютная 5e-3, средняя относительная 5e-4. Приведём оба решения.

$$\begin{cases} 9.889 - 38.89\,v + 768.2\,(v-0.1)^3 & v < 0.1700 \\ 8.233 - 27.60\,v + 161.3\,(v-0.1700)^2 - 557.3\,(v-0.1700)^3 & v < 0.2400 \\ 5.379 - 13.21\,v + 44.28\,(v-0.2400)^2 - 43.86\,(v-0.2400)^3 & v < 0.3100 \\ 3.859 - 7.659\,v + 35.07\,(v-0.3100)^2 - 89.66\,(v-0.3100)^3 & v < 0.3800 \\ 2.635 - 4.066\,v + 16.25\,(v-0.3800)^2 - 32.89\,(v-0.3800)^3 & v < 0.4500 \\ 1.898 - 2.275\,v + 9.343\,(v-0.4500)^2 - 21.11\,(v-0.4500)^3 & v < 0.5200 \\ 1.417 - 1.277\,v + 4.911\,(v-0.5200)^2 - 10.40\,(v-0.5200)^3 & v < 0.5900 \\ 1.122 - 0.7424\,v + 2.728\,(v-0.5900)^2 - 6.405\,(v-0.5900)^3 & v < 0.6600 \\ 0.9434 - 0.4547\,v + 1.383\,(v-0.6600)^2 - 2.182\,(v-0.6600)^3 & v < 0.7300 \\ 0.8315 - 0.2932\,v + 0.9247\,(v-0.7300)^2 - 4.405\,(v-0.7300)^3 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10.58 - 45.75\,v + 7494.\,(v-0.1)^3 & v < 0.1100 \\ 10.34 - 43.50\,v + 224.8\,(v-0.1100)^2 - 1239.\,(v-0.1100)^3 & v < 0.1300 \\ 9.439 - 35.99\,v + 150.5\,(v-0.1300)^2 - 319.1\,(v-0.1300)^3 & v < 0.1600 \\ 8.259 - 27.83\,v + 121.8\,(v-0.1600)^2 - 305.1\,(v-0.1600)^3 & v < 0.2100 \\ 6.449 - 17.94\,v + 76.01\,(v-0.2100)^2 - 166.0\,(v-0.2100)^3 & v < 0.2800 \\ 4.467 - 9.734\,v + 41.17\,(v-0.2800)^2 - 91.54\,(v-0.2800)^3 & v < 0.3500 \\ 3.091 - 5.315\,v + 21.95\,(v-0.3500)^2 - 45.38\,(v-0.3500)^3 & v < 0.4400 \\ 1.982 - 2.466\,v + 9.699\,(v-0.4400)^2 - 18.55\,(v-0.4400)^3 & v < 0.5500 \\ 1.272 - 1.006\,v + 3.577\,(v-0.5500)^2 - 6.211\,(v-0.5500)^3 & v < 0.6700 \\ 0.9173 - 0.4155\,v + 1.341\,(v-0.6700)^2 - 3.439\,(v-0.6700)^3 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

3.4 Задание 4

Задача 4. Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи. Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \ \ a < x < b, \ \ 0 < t \le T, \\ u(a,t) = g_1(t), \ \ u(b,t) = g_2(t), \ \ 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ a \le x \le b. \end{cases}$$

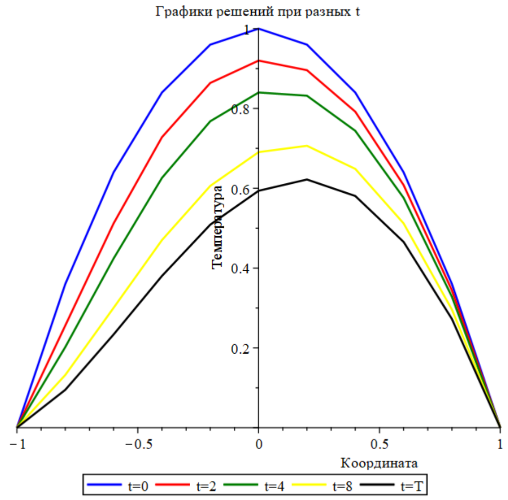
Исходные данные приведены в табл. 2.7.

В задаче взять входные данные *ua*, *ub* из задачи 3. Использовать явную разностную схему. Взять $h = (b-a)/10$; шаг τ выбрать из условия устойчивости. Изобразить графики зависимости приближенного решения от x при $t = 0,\ 2\tau, 4\tau, \ldots T$.

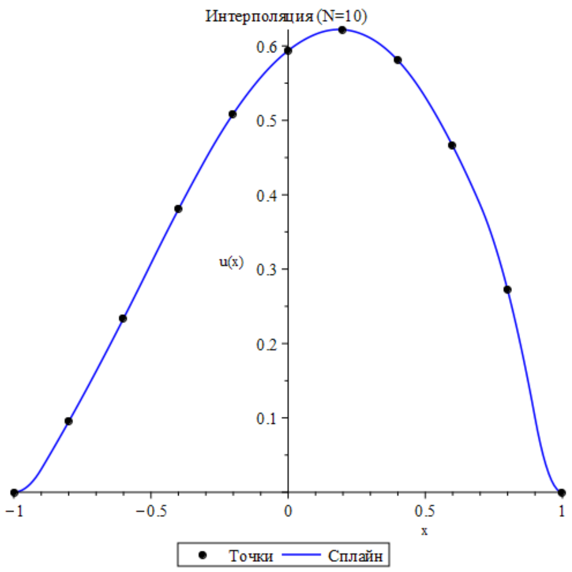
УКАЗАНИЕ. Условие устойчивости для явной разностной схемы имеет вид $\tau \le 0.5(h^2/k)$.

2.4.8	−1	1	0.5	0.4	$1-x^2$	0	0	x

Реализуем описанный ранее алгоритм и получаем решение.

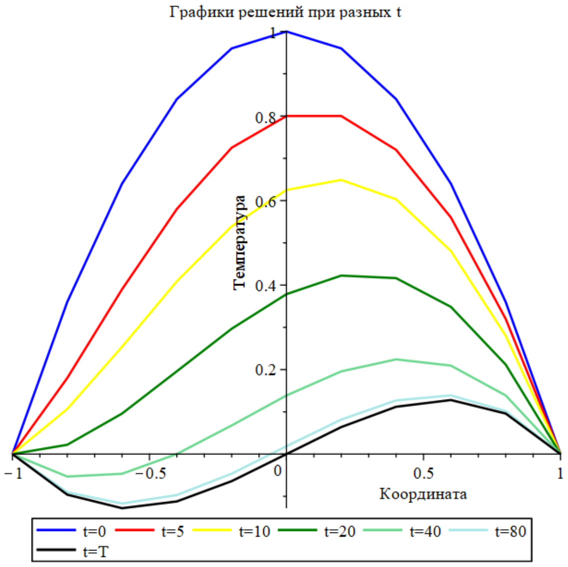


Построили кубическую интерполяцию по всем точкам по финальному времени.



$$\begin{cases} 0.4192 + 0.4192\, v + 1.378\, (v + 1.)^3 & v < -0.8000 \\ 0.5626 + 0.5846\, v + 0.8269\, (v + 0.8000)^2 - 1.403\, (v + 0.8000)^3 & v < -0.6000 \\ 0.6819 + 0.7471\, v - 0.01462\, (v + 0.6000)^2 - 0.2798\, (v + 0.6000)^3 & v < -0.4000 \\ 0.6633 + 0.7077\, v - 0.1825\, (v + 0.4000)^2 - 0.7011\, (v + 0.4000)^3 & v < -0.2000 \\ 0.6190 + 0.5505\, v - 0.6031\, (v + 0.2000)^2 - 0.1386\, (v + 0.2000)^3 & v < 0. \\ 0.5938 + 0.2927\, v - 0.6863\, v^2 - 0.3558\, v^3 & v < 0.2000 \\ 0.6269 - 0.02455\, v - 0.8998\, (v - 0.2000)^2 - 0.04958\, (v - 0.2000)^3 & v < 0.4000 \\ 0.7368 - 0.3904\, v - 0.9295\, (v - 0.4000)^2 + 0.01698\, (v - 0.4000)^3 & v < 0.6000 \\ 0.9217 - 0.7602\, v - 0.9193\, (v - 0.6000)^2 - 0.5555\, (v - 0.6000)^3 & v < 0.8000 \\ 1.228 - 1.195\, v - 1.253\, (v - 0.8000)^2 + 2.088\, (v - 0.8000)^3 & 0.8000 \le v \end{cases}$$

Если взять T не 0.4, как просится в условии, а большее значение (далее представлены результаты при T=10), то можно увидеть, к какому состоянию “движется” система.



Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы был изучен и применён метод сеток для решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности. Были рассмотрены явная и неявная разностные схемы. Явная схема проще в реализации, т.к. позволяет непосредственно получать значения следующих точек таблицы, но является условно устойчивой и требует проверки для оценки возможности ее использования. При этом неявная разностная схема является абсолютно устойчивой, т.е. можно проводить интегрирование краевой задачи с любым разностным шагом по времени, независимо от шага по пространству (и наоборот). Начальная температура в нестационарном процессе теплопроводности влияет на скорость перехода к стационарному состоянию. Нахождение решений для стационарных задач проще, т.к. рассматривается функция от одной переменной вместо двух. Эти задачи задаются коэффициентом теплопроводности, взаимодействиями со средой и граничными условиями. Для решения стационарных задач 1-2 применялся метод конечных разностей второго порядка (относительно h), который добавлением одного слагаемого давал явную и неявную схемы для задач 3-4. Аппроксимация сплайнами может применяться для более удобной записи решений, а более тонко подогнанные распределения рассматриваемых точек позволяет уменьшать погрешность аппроксимации для отдельных функций.