Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №5

на тему:

Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Выполнил: студент группы 353504
Левшуков Дмитрий Александрович

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2025

Цель работы:

- изучить метод разностных аппроксимаций для уравнения Пуассона;
- составить алгоритмы решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом сеток, применимым для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона по разработанным алгоритмам;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ;
- получить численное решение заданной задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

$\omega_h^* = \omega_h \setminus \omega_h'$ (ω_h^* – множество узлов, лежащих на Γ).

Зададим нормы

$$\|\upsilon\|_h = \max_{\omega_h} |\upsilon_{km}|, \quad \|\upsilon\|'_h = \max_{\omega_h'} |\upsilon_{km}|.$$

Разностная схема:

$$\Lambda \upsilon_{km} = f_{km}, \quad k, m = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{2.50}$$

$$\upsilon_{km} = 0 \quad \text{на} \quad \omega_h^*. \tag{2.51}$$

Разностное уравнение (2.50) в более подробной записи имеет вид

$$-\frac{\upsilon_{k-1,m} - 2\upsilon_{km} + \upsilon_{k+1,m}}{h^2} - \frac{\upsilon_{k,m-1} - 2\upsilon_{km} + \upsilon_{k,m+1}}{h^2} = f_{km}. \tag{2.52}$$

Его шаблон изображен на рис. 2.6.

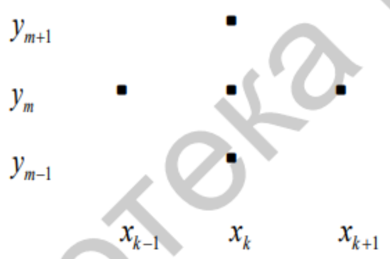


Рис. 2.6

$\omega_h^* = \omega_h \setminus \omega_h'$ (ω_h^* – множество узлов, лежащих на Γ).

Зададим нормы

$$\|\upsilon\|_h = \max_{\omega_h} |\upsilon_{km}|, \quad \|\upsilon\|'_h = \max_{\omega_h'} |\upsilon_{km}|.$$

Разностная схема:

$$\Lambda \upsilon_{km} = f_{km}, \quad k,\ m = 1, 2, \ldots, N\text{–}1, \tag{2.50}$$

$$\upsilon_{km} = 0 \quad \text{на} \quad \omega_h^*. \tag{2.51}$$

Разностное уравнение (2.50) в более подробной записи имеет вид

$$-\frac{\upsilon_{k-1,m} - 2\upsilon_{km} + \upsilon_{k+1,m}}{h^2} - \frac{\upsilon_{k,m-1} - 2\upsilon_{km} + \upsilon_{k,m+1}}{h^2} = f_{km}. \tag{2.52}$$

Его шаблон изображен на рис. 2.6.

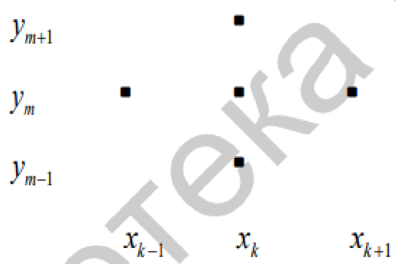


Рис. 2.6

Решение υ разностной задачи Дирихле находится методом последовательных приближений по схеме переменных направлений, где $f_{km}^{\nu-1/2} = f(x_k, y_m)$, υ_{km}^0 – произвольные. Можно доказать, что $\lim_{\nu\to\infty} \upsilon_{km}^{\nu} = \upsilon_{km}$, $k,\ m = 1$, 2, …, N–1, при любых начальных приближениях υ_{km}^0, причем наибольшая скорость сходимости достигается при $\tau \approx h/\pi$. Здесь положена в основу идея о стабилизации при $t \to +\infty$ решения уравнения теплопроводности к решению уравнения Пуассона, если f не зависит от t.

Разностная схема (2.51), (2.52) устойчива по правой части, т. е. разностная задача

$$\Lambda z_{km} = \xi_{km}, \quad k, m = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$z_{km} = 0 \text{ на } \omega^*$$

при любом $h = 1/N$, $N \geq 2$, имеет единственное решение z и это решение удовлетворяет неравенству

$$\|z\|_h \leq c\|\xi\|'_h, \tag{2.53}$$

где c – некоторая постоянная, не зависящая от h и сеточной функции ξ.

Предположим, что решение задачи Дирихле (2.48), (2.49) достаточно гладкое на замкнутом квадрате $\overline{D}$, а именно, $u(x, y) \in C_4(\overline{D})$. Тогда разностное уравнение (2.51) аппроксимирует дифференциальное уравнение (2.48) на решение задачи (2.48), (2.49) со вторым порядком относительно h, т. е.

$$\|\psi\|'_h = O(h^2), \tag{2.54}$$

где

$$\psi_{km} = \Lambda u_{km} - f_{km} \tag{2.55}$$

есть невязка для разностного уравнения. При получении оценки (2.54) используется тот факт, что частным производным u''_{xx} и u''_{yy}, входящим в уравнение (2.48), в разностном уравнении (2.52) отвечают вторые разностные производные, аппроксимирующие указанные частные производные с точностью второго порядка по h. Поскольку краевое условие (2.49) аппроксимируется на сетке ω_h^* согласно (2.53) точно, то из (2.54) и устойчивости разностной схемы (2.50), (2.51) по правой части вытекает сходимость ее решения υ к решению $u \in C_4(\overline{D})$ задачи (2.48), (2.49) со вторым порядком относительно h, т. е.

$$\|u - \upsilon\|_h = O(h^2). \tag{2.56}$$

Действительно, из уравнения (2.52), равенства (2.56) и условий (2.49), (2.53) вытекает, что погрешность $r = u - \upsilon$ на сетке ω_h является решением разностной задачи

$$\Lambda r_{km} = \psi_{km}, \qquad k, m = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$r_{km} = 0 \ \text{на} \ \omega_h^*.$$

Отсюда и из (2.54), (2.55) следует (2.56). Разностная схема (2.50), (2.51) обладает вторым порядком точности.

Случай произвольной области

Рассмотрим задачу Дирихле

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad \text{на} \quad G, \tag{2.57}$$

где

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \qquad \text{на } \Gamma, \tag{2.58}$$

где G – некоторая конечная область (рис. 2.7); Γ – граница области G; $f(x, y)$ – заданная на области G функция; $\varphi(x, y)$ – заданная на границе Γ функция.

Строится, как и ранее, квадратная сетка с шагом h. Во всех расположенных в области G узлах сетки, которые можно соединить с четырьмя ближайшими узлами отрезками прямых, не пересекая границу Γ, разностное уравнение задается в следующем виде:

$$\Lambda \upsilon_{km} = f_{km}, \tag{2.59}$$

где Λ – оператор (2.52).

Указанные узлы обозначены на рис. 2.7 кружками. Шаблон разностного уравнения (2.57) показан на рис. 2.6. В узлах, находящихся в области G вблизи ее границы Γ (отмечены на рис. 2.7 треугольниками), для задания разностных уравнений применяется линейная интерполяция в направлении оси x или оси y. Например, в точке с номером 0 уравнение имеет вид

$$\upsilon_0 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \nu_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \varphi_1, \tag{2.60}$$

где ρ_1 – расстояние от точки 0 до точки 1 на границе Γ, в которой берется заданное значение функции φ, обозначенное через φ_1; υ_0, υ_2 – неизвестные в точках 0, 2; $\rho_2 = h$ – расстояние между этими точками.

Здесь для простоты используется один индекс. Формула (2.60) означает линейную интерполяцию между точками 1, 2 в точку 0.

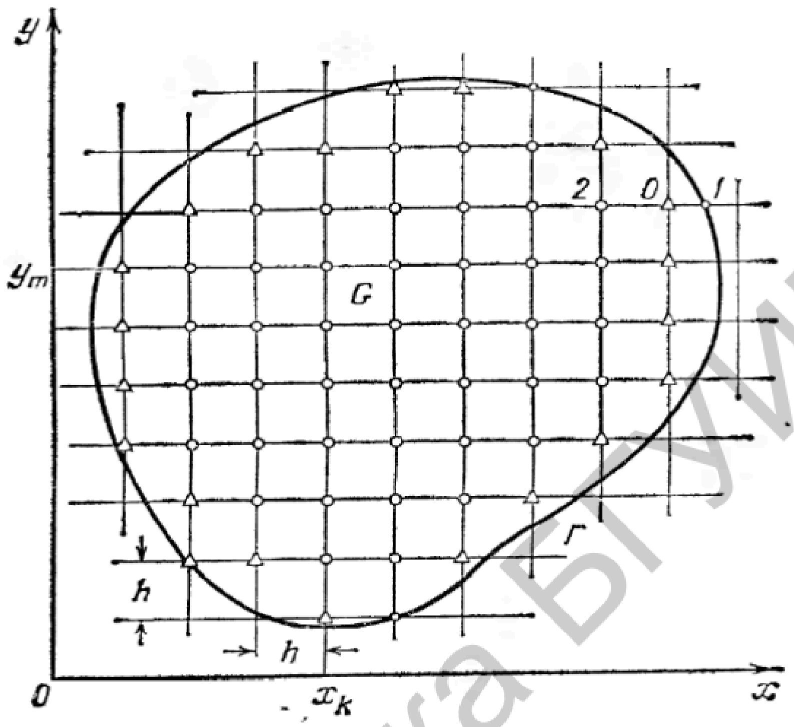


Рис. 2.7

Аналогично разностные уравнения задаются в остальных узлах, обозначенных треугольниками. При этом расстояния от точки, в которую производится интерполяция, до обеих крайних точек не должны превышать *h* и одна или обе крайние точки должны лежать на границе Γ. Уравнение (2.59), имеющее более подробную запись (2.52), разрешим относительно υ_{km}:

$$\upsilon_{km} = \frac{\upsilon_{k-1,m} + \upsilon_{k+1,m} + \upsilon_{k,m-1} + \upsilon_{k,m+1}}{4} + \frac{h^2}{4} f_{km}. \qquad (2.61)$$

Итак, в каждом узле, обозначенном кружком, задано уравнение (2.61), а в каждом узле, отмеченном треугольником, уравнение имеет вид (2.60). Общее число уравнений совпадает с числом неизвестных. Полученная система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение υ, для нахождения которого могут быть применены методы простых итераций и Зейделя.

Если $u(x, y) \in C_4(\overline{G})$ – решение задачи Дирихле, то справедлива оценка

$$\max_{G_h} |u - \upsilon| = O(h^2), \qquad (2.62)$$

где G_h – множество всех узлов, обозначенных кружками и треугольниками.

Решение $u(x, y)$ принадлежит классу $C_4(\overline{G})$, например, если граница Γ обладает трижды непрерывно дифференцируемой производной, функция φ длины s дуги границы Γ имеет ограниченную пятую производную, а $f(x,y) \in C_3(\overline{G})$.

3 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

3.1 Задания 1

Пластина прямоугольной формы с вырезом на одной из сторон жестко закреплена по краям и равномерно нагружена по площади рис. 2.8. Прогиб пластины определяется из уравнения Пуассона. Рассчитать прогиб *W(x, y)* по данным, приведенным в табл. 2.11, где *A, B* – размеры пластины; *h* − ее толщина; *R* – радиус выреза; *P* – нагрузка; *E* − модуль упругости; *ν* – коэффициент Пуассона. Граничное условие *W*= 0.

$$\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right)=P/D,$$

где $D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ – изгибная жесткость; *E* – модуль упругости; *h* − толщина пластины; *ν* – коэффициент Пуассона.

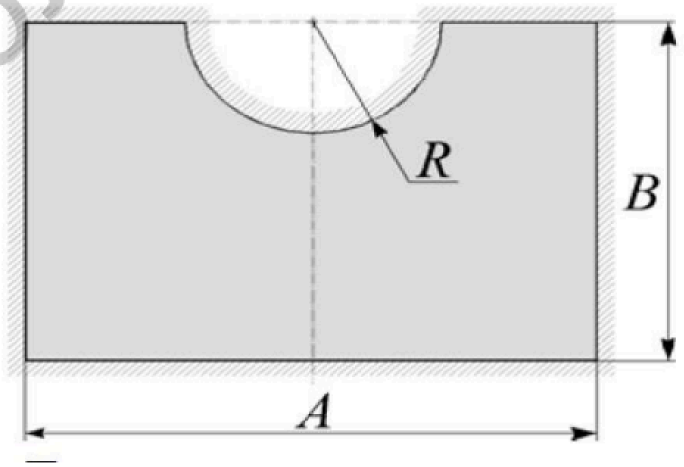
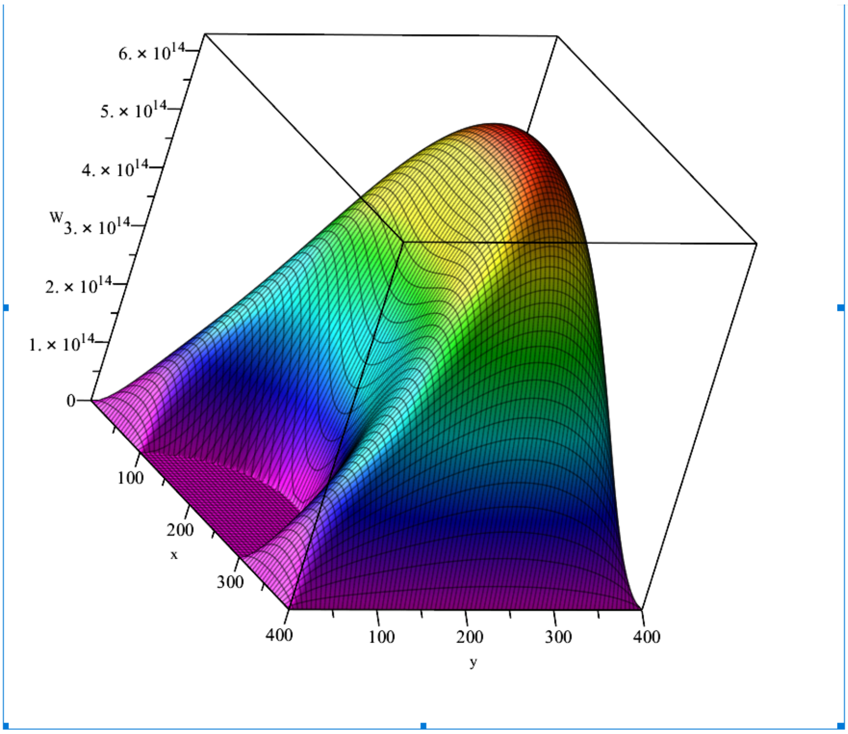


Рис. 2.8

Номер варианта	Параметры						
	A, мм	*B*, мм	*R*, мм	*h*, мм	*P*,	*E*, Н/м^2	*ν*
14	120	100	30	2	$55\cdot10^{9}$	70	0.3

Решение представим в виде графика.



Максимальный прогиб: 6.287e+014 м

Рисунок 1 – Решение задания

Получили слегка нереалистичный результат: приблизительно 4202.54010695 расстояний от Земли до Солнца. На основе визуального анализа рисунка 2, который представлен ниже, а также полученных ранее результатов, можно сделать вывод, что в степени нагрузки был потерян знак минус.

$$55 \cdot 10^{9}$$

Рисунок 2 – Значение нагрузки

Запустим программный с предположением, что нагрузка P = 55*10^(-9). В таком случае получим следующее:

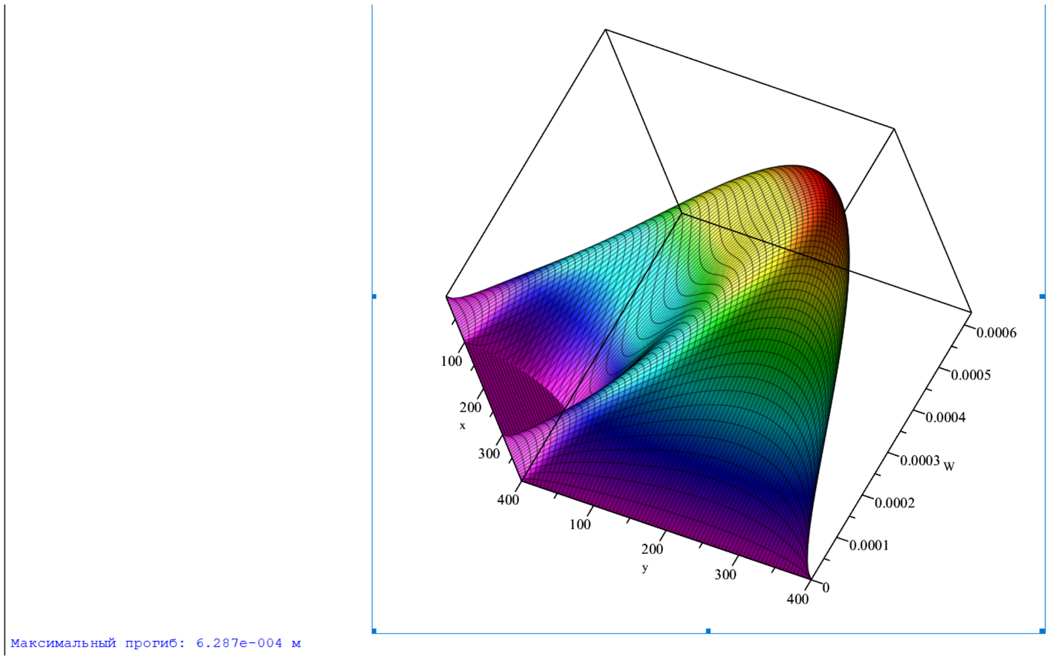


Рисунок 3 – Альтернативное решение задания

Как видно из рисунка 3, максимальный прогиб составляет реалистичное значение – 6,287e-004 м.

Проведём тестирование.

Таблица с данными для каждого теста представлена ниже.

Тест	A, м	B, м	R, м	h, м	P, Н/м^2	E, Н/м^2	v
1	0,12	0,1	0,03	0,002	0	70	0,3
2	0,12	0,1	0,03	0,002	55e3	70e9	0,3
3	0,12	0,1	0,02	0,002	55e3	70e9	0,3

<u>Тест 1.</u> Ожидаемый результат – ровная пластина (из-за особенности Maple – прямоугольник без выреза). Результат программы представлен на рисунке 4.

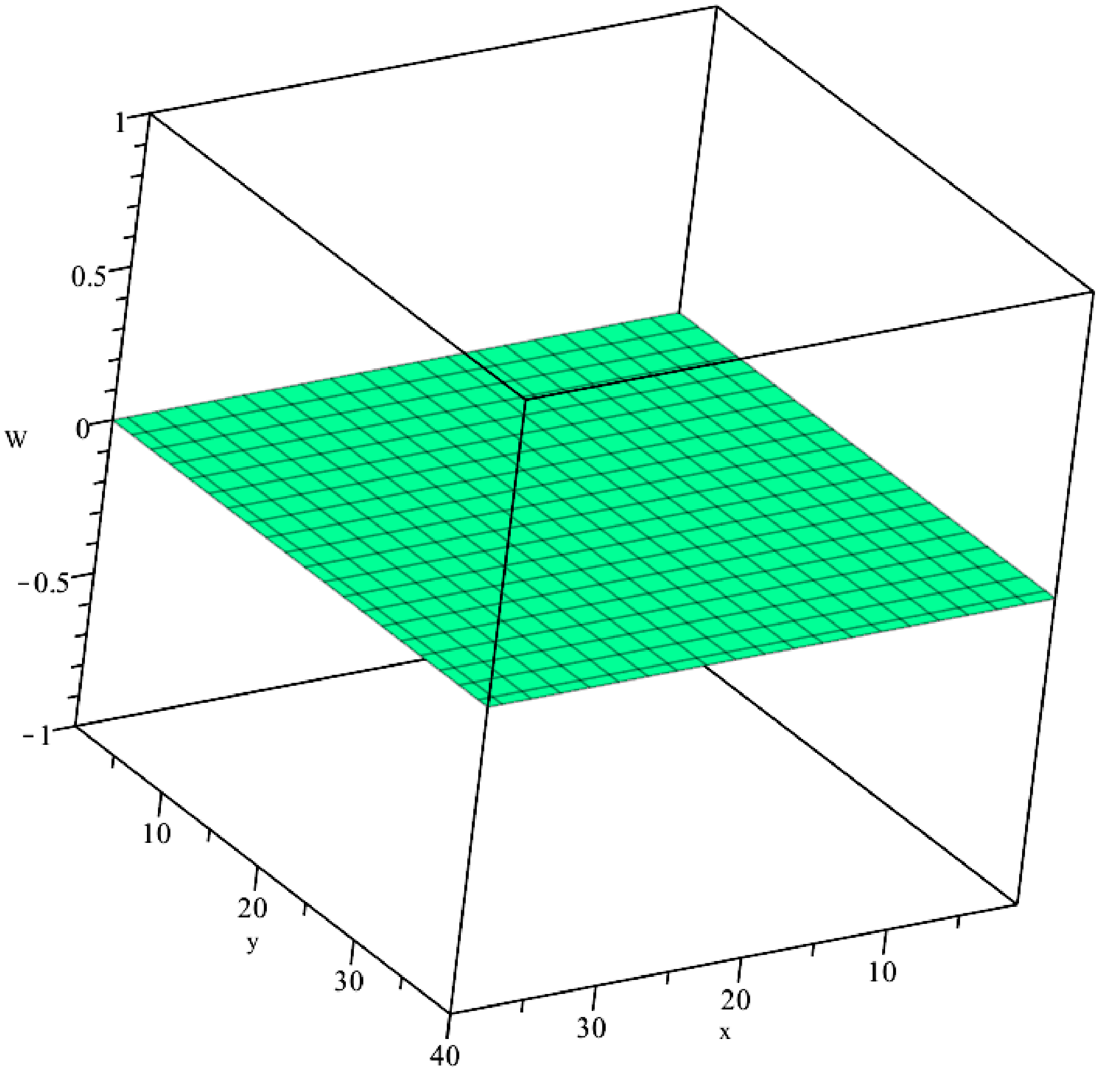
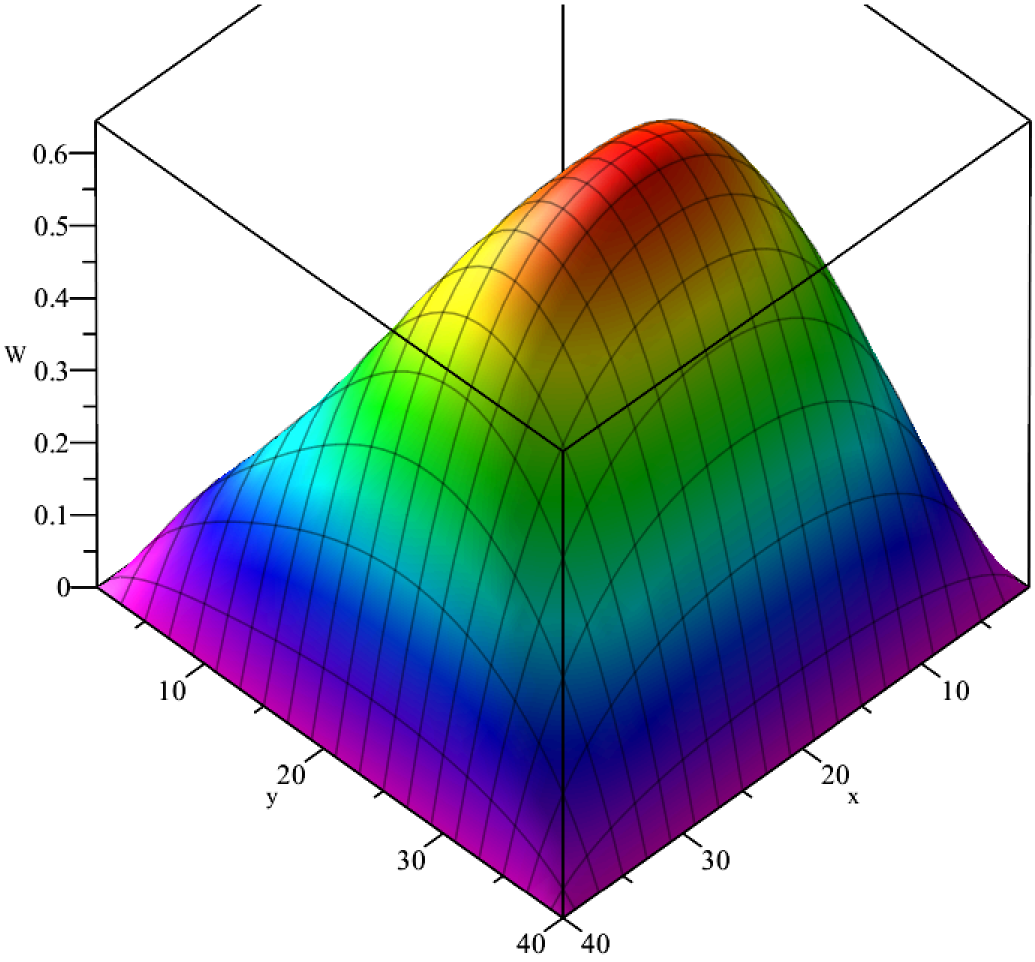


Рисунок 4 – Тест 1

<u>Тест 2.</u> Проверим соблюдение граничных условий. Результат программы представлен на рисунке 5.

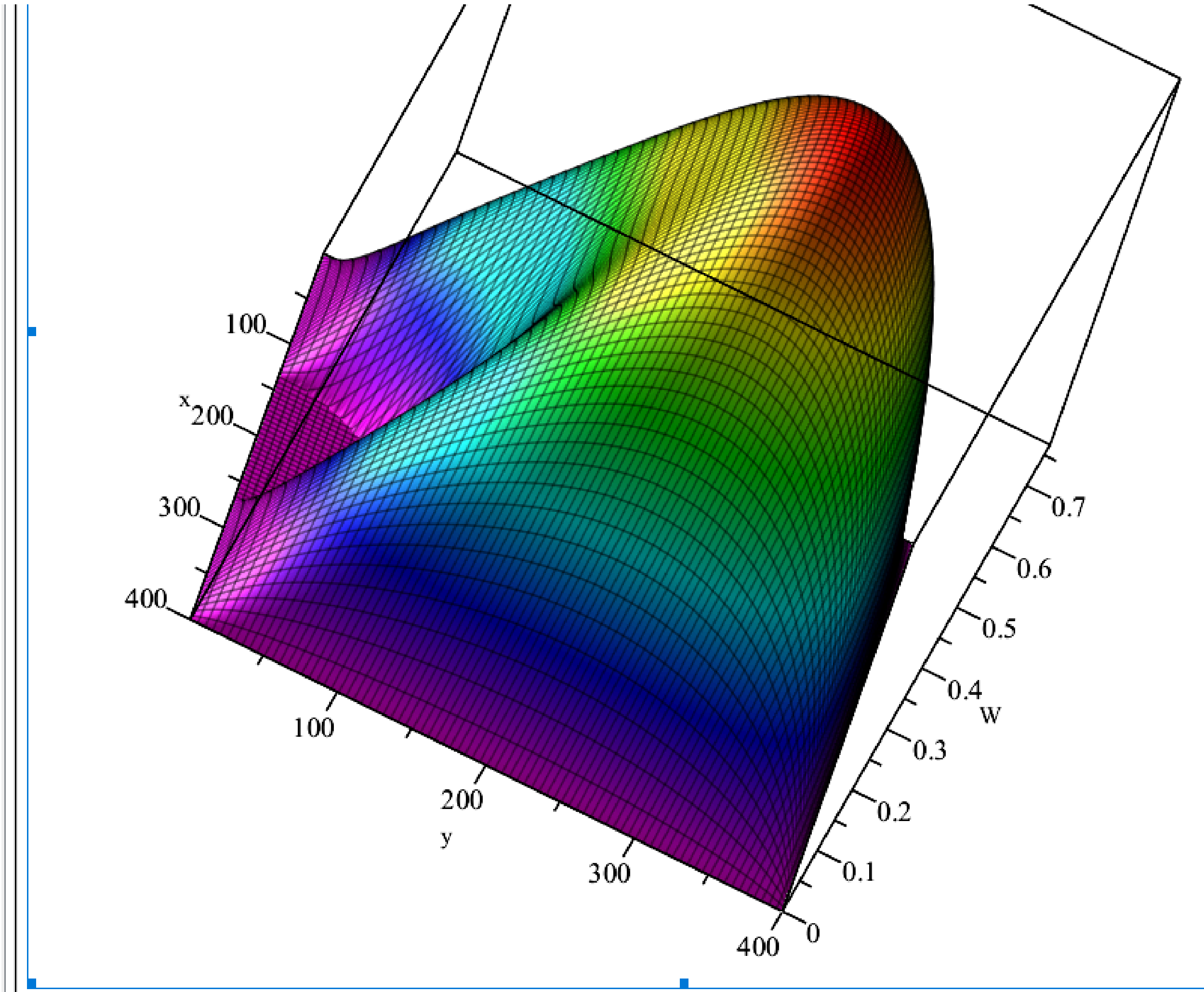



```
Изгибная жесткость D = 51.282 H&middot;м
Максимальный прогиб: 6.443e-001 м
```

"Граничные условия выполнены и прогиб в вырезе равен нулю"

Рисунок 5 – Тест 2

<u>Тест 3.</u> Проверим, что прогиб симметричен относительно центра пластины.. Результат программы представлен на рисунке 6.




```
Изгибная жесткость D = 51.282 H&middot;м
Максимальный прогиб: 7.668e-001 м
Симметрия соблюдается
```

Рисунок 6 – Тест 3

Вывод

В ходе выполнения задания был реализован метод сеток для решения задачи Дирихле уравнения Пуассона, описывающего прогиб прямоугольной пластины с вырезом. Основные результаты и выводы:

- Учтены граничные условия (W=0 на краях и в области выреза) через обнуление соответствующих узлов.
- Наличие выреза снижает жесткость системы, что корректно отражено в уменьшении прогиба.
- Решение демонстрирует симметричное распределение с максимумом в центре пластины.
- Нулевые значения на границах и в области выреза подтверждают выполнение условий Дирихле.

- Для повышения точности использовать следует использовать сетку размером $Nx,Ny \geq 80$
- Метод сеток эффективен для решения задач Дирихолевого типа для уравнения Пуассона.