Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №4

на тему:

Аппроксимации граничных условий второго рода в методе конечных разностей на примере уравнения теплопроводности

Выполнил: студент группы 353504
Левшуков Дмитрий Александрович

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2025

Цель работы – ознакомиться с наиболее часто применяемыми способами аппроксимации граничных условий второго рода (граничных условий (ГУ) Неймана) в методе конечных разностей (на примере ГУ для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности).

Постановка задачи

Задачи, которые будут использоваться для анализа свойств численных решений с ГУ второго рода, формулируются так: в стержне длиной L с *теплоизолированной* боковой поверхностью торец $x = 0$ *поддерживается* при *постоянной* температуре T_0 (ГУ первого рода), а торец $x = 1$ – *теплоизолирован* (ГУ второго рода); температуропроводность материала стержня постоянна и равна a; в начальный момент времени $t = 0$ стержень нагрет до температуры $T_{нач}(x)$ (координата x отсчитывается от левого торца стержня (рис. 2.4)). Найти распределение температуры по стержню в любой момент времени, т. е. найти функцию $T(x, t)$ для $0 < x \le L$ и $t > 0$. Стержень круглого сечения нарисован условно – сечение может иметь любую форму, и если боковая поверхность теплоизолирована, то температура любой точки стержня может зависеть только от координаты x и не будет зависеть от координаты поперек стержня.

Искомая функция $T(x,t)$ является решением одномерного уравнения теплопроводности, которое в безразмерных координатах имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ 0 < x < 1,\ 0 < t \le T.$$

Граничные условия:

$$T(0,t) = T_0,\quad \frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = 0 \text{ для } 0 < t \le T$$

(на границе $x = 0$ граничное условие первого рода, а при $x = 1$ – второго).

Начальные условия: $T(x,0) = T_{нач}(x)$ при $0 < x < 1$.

Способы реализации ГУ второго рода

Методы конечных разностей, применяемые для численного решения задач с граничными условиями второго (и третьего) рода, не имеют *никаких принципиальных отличий* от методов, применяемых для задач с ГУ первого рода. Для решения поставленной задачи методом конечных разностей необходимо представить граничное условие второго рода в «естественном» для этого метода виде, т. е. с использованием численного решения (величин T_i^n). Иными словами, производную в граничном условии надо заменить ее разностной аппроксимацией, а это можно сделать многими способами. Рассмотрим только два способа реализации ГУ второго рода, которые будут использованы в расчетах. При рассмотрении используем ту же равномерную сетку, что и в лабораторной работе №13.

Первый способ. Приближенно значение производной при x= 1 можно записать, используя аппроксимацию производной по x левой разностью:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_N^n - T_{N-1}^n}{h}, \tag{2.43}$$

а поскольку значение этой производной в рассматриваемой задаче равно нулю, то аппроксимация граничного условия выглядит так:

$$T_N^n - T_{N-1}^n = 0. \tag{2.44}$$

Численное решение ДУ с граничным условием второго рода при $x = 1$ происходит почти так же, как и с ГУ первого рода: на каждом шаге по времени с помощью разностной схемы вычисляются все T_i^n при, $1 \le i \le N-1$, а значение T_N^n (на границе) вычисляется по формуле (2.44). Это и есть первый способ реализации граничного условия второго рода. Следует обратить внимание на то, что разностная аппроксимация первой производной левой разностью (формула (2.43)) имеет первый порядок точности по h, т. е. $O(h)$.

Второй способ можно пояснить на примере явной разностной схемы аппроксимации уравнения теплопроводности. Алгоритм явной схемы можно записать так:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\tau}{h^2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n). \tag{2.45}$$

Из этого выражения следует, что для вычисления величины T_1^0 требуется какая-то величина T_{N+1}^n, которая *не входит* в расчетную область. Однако ее можно вычислить, используя аппроксимацию производной в граничном условии центральной разностью:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{N+1}^n - T_{N-1}^n}{2h}, \tag{2.46}$$

а поскольку значение этой производной в рассматриваемой задаче равно нулю, то аппроксимация граничного условия выглядит так:

$$T_N^n = T_{N-1}^n. \tag{2.47}$$

Способ реализации граничного условия здесь несколько иной: на каждом шаге по времени с помощью разностной схемы вычисляются все T_i^{n+1} при

$1 \le i \le N-1$, а при вычислении T_1^0 в разностной схеме заменяются T_{N+1}^n на T_{N-1}^n (используется равенство (2.45)).

Обратите внимание на то, что разностная аппроксимация первой производной центральной разностью (формула (2.46)) имеет второй порядок точности по h, т. е. $O(h^2)$. Рассмотренному выше второму способу реализации ГУ второго рода можно дать другую интерпретацию, которая может оказаться более наглядной и полезной в сложных задачах. Эта другая интерпретация связана с введением «фиктивных» узлов (узлов вне зоны расчета). На рис. 2.5 показаны такие узлы (линия узлов, находящихся на расстоянии h от границы, на которой поставлено ГУ второго рода).

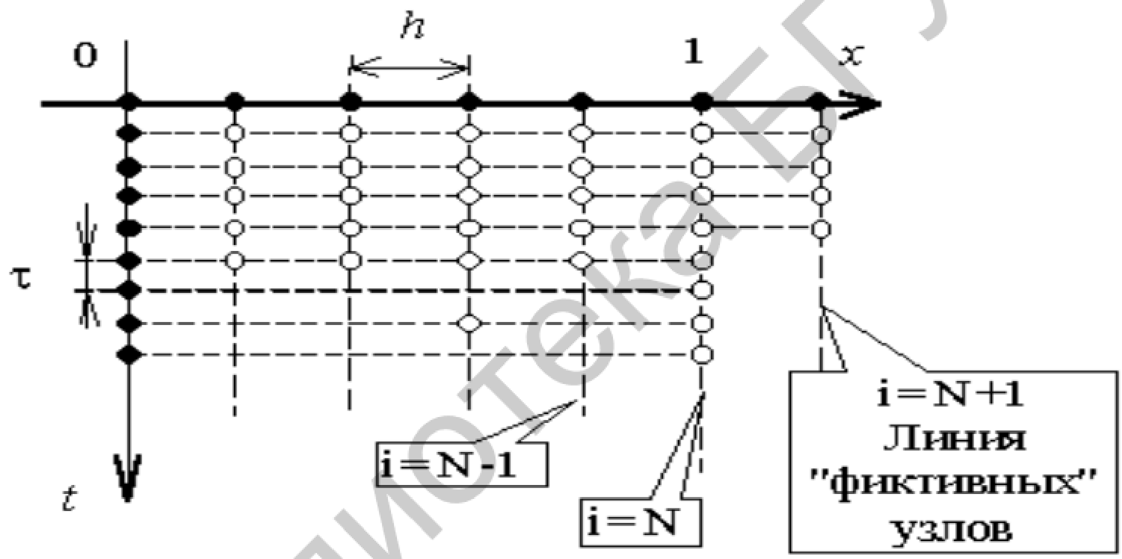


Рис. 2.5

Если температуру в этих узлах задавать равной значениям температуры в соответствующих симметричных относительно границы узлах (согласно равенству (2.45)), то для расчета будет использоваться *одна и та же* разностная схема для всех узлов (включая и узлы при $i=N$). В работе должна быть предусмотрена возможность численного решения уравнения теплопроводности с помощью неявной и явной разностных схем. Возможность использования различных граничных и начальных условий ограничена задачами, которые позволяют в достаточной мере познакомиться с основными способами реализации ГУ второго рода и их свойствами.

Шаги сетки выбираются так же, как и в лабораторной работе №13. Расчетная область по времени, реализованная в программе, составляет во всех случаях отрезок [0, 1]. Результаты расчета выводятся в виде табл. 2.10. После расчета необходимо построить такие же, как в лабораторной работе №13, графики решений.

3 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

3.1 Задания 1

Задача 1. Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \ a < x < b, \ 0 < t \le T, \\ u(a,t) = g_1(t), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(b,t) = g_2(t), \ 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ a \le x \le b, \end{cases}$$

используя явную и неявную разностные схемы. Исходные данные указаны в табл. 2.9. Изобразить графики зависимости приближенного решения от x при $t = 0,\ 2\tau, 4\tau, \ldots T.$

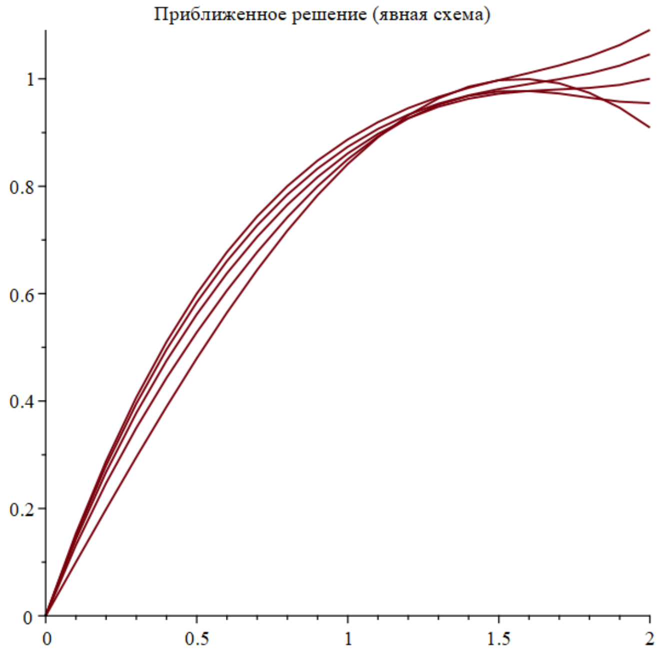
Таблица 2.9

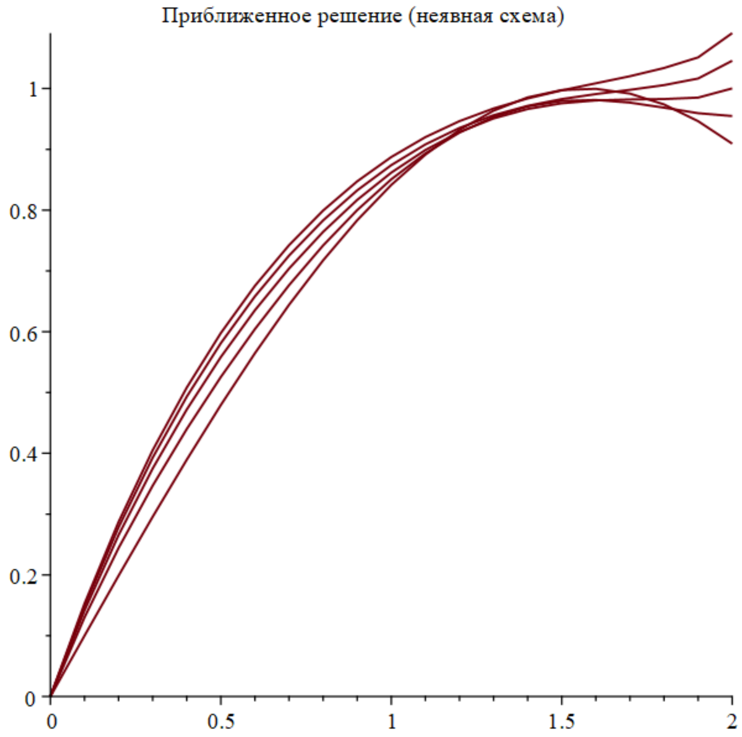
Окончание табл. 2.9

Номер задания	a	b	k	T	$\varphi(x)$	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$f(x,t)$
14	0	2	1	0.2	$\sin(x)$	0	$\sin(2)$	$2-x$

УКАЗАНИЕ. Условие устойчивости для явной разностной схемы имеет вид $\tau \le 0.5(h^2 / k)$.

Решение представим в виде 2 графиков – для явной и неявной схемы.





Получили действительно части параболы. Причём, при визуальном сравнение с точным решением, не видим сколько-нибудь заметных отклонений. Графики подтверждают, что:

1) Обе схемы корректно обрабатывают начальные и граничные условия.
2) Правая граница эволюционирует согласно du/dt = sin(2).
3) Неявная схема дает более гладкое решение за счет большей устойчивости.

4) Явная схема требует мелких шагов по времени, но может быть точнее при малых τ.

Проведём тестирование программного продукта.

В таблице ниже приведены тестовые значения.

a	b	k	T	phi	g_1	g_2	f
0	2	1	0.2	sin(x)	0	sin(2)	sin(2)*(x/2)+sin(x)

Если аналитическое решение известно (например, для тестового случая), можно вычислить погрешность численного решения. Определяем аналитическое решение и подходящую f(x,t):

u(x, t) = sin(x) + t*sin(2)*x/2

f(x, t) = sin(2)*x/2 + sin(x)

Проверка условий:

1) Начальное условие: u(x,0) = sin(x) ✔
2) Левая граница (x=0): u(0,t) = 0 + t*sin(2)*0 = 0 ✔
3) Правая граница (x=2): $\frac{\partial u}{\partial t}(2,t) = sin(2) * (2/2) = sin(2)$ ✔

В результате выполнения программы получилось следующее значение ошибок:

```
Максимальная ошибка (явная схема): 1.29534e-04
Максимальная ошибка (неявная схема): 1.56106e-02
```

Убедимся, что граничные условия выполняются на всех временных слоях.

```
"Левая граница (явная схема): OK"
"Правая граница (явная схема): OK"

"Левая граница (неявная схема): OK"
"Правая граница (неявная схема): OK"
```

Убедимся, что при $t = 0$ решение совпадает с phi(x) = sin(x).

"Начальное условие (явная схема): OK"

"Начальное условие (неявная схема): OK"

Вывод

В ходе выполнения задания были успешно реализованы явная и неявная разностные схемы для решения начально-краевой задачи уравнения теплопроводности. Основные результаты и выводы:

Явная схема:

1) Удовлетворяет условию устойчивости при $\tau \le 0.5h^2$. При нарушении этого условия наблюдается экспоненциальный рост ошибки.
2) Графики решения демонстрируют плавную эволюцию от начального условия $u(x,0)=\sin(x)$ к параболическому профилю под воздействием источника $f(x,t)=2-x$

Неявная схема:

1) Остается устойчивой даже при больших шагах по времени, что подтверждает её безусловную устойчивость.

2)Решение более гладкое, но менее детальное из-за грубого шага τ.