Случајно талкање и Винеров процес

[Илија Боневски]

5 ноември 2025 год.

1 Вовед

Изучувањето на случајни талкања и Винеровиот процес започнува во 19-ти кон ран 20-ти век, се изучуваат прости талкања, нивните законитости за рекуренција и транзитивност од Поја, Луи Башеље и Ајнштајн користат случајни движења за моделирање на финансии и Брауново движење, и Норберт Винер прв ригорозно дефинира непрекинато Брауново движење. Понатаму се поврзуваат дискретните талкања со континуираната дифузија преку функционалната гранична теорема (Донскеров принцип на инваријантност), се развиваат Левиевите процеси и на мартингалите, и врз нив се основа современото стохастичкото сметање (стохастичка анализа), како и теоријата на потенцијалот.

Како модели во реалниот свет: Брауновото движење моделира дифузија во хемија и физика, а случајни талкања опишуваат модели за миграции на животни, редици, пребарувачки алгоритми, многу финансиски модели се основат на нив (Блек Шоулз). Математички, тие поврзуваат веројатност со термодинамика, мартингали и времиња на запирање, и се основа на стохастични диференцијални равенки во инженерство, машинско учење и статистика.

2 Случајно талкање

Случајно талкање е случаен процес кој дефинира последователни чекори на некој математички простор, претставен со:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1$$

каде X_i се независни и еднакво распределени случајни променливи, такви што

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{D}[X] = \sigma^2.$$

Просто напротив сложено случајно талкање. Во случај на *просто* случајно талкање, вредноста на S_n, од една итерација до друга, секогаш се разликува за некоја фиксна вредност, т.е.

$$|S_{i+1} - S_i| = d$$

или пак, за вредностите на X_i да важи дека

$$\mathbb{P}\big(X_1 \in a + d\mathbb{Z}\big) = 1,$$

каде a е реален број а d е некој коефициент поголем од 0, ова исто така се нарекува Lattice или случајно талкање во решетка, поради тоа што вредностите на S_n можат да се претстават на решетка, каде вредноста во даден момент може да се помести само на соседните полиња од решетката.

Во случај кога не е просто случајното талкање, X_i може да заземе вредности на некој непрекинат интервал, според некоја случајна распределба. Ова би важело за $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ и би опишало посложен пат.

2.1 Едно димензионално случајно талкање

Карактеристиките на случајно талкање. Ќе го разгледуваме најпростиот пример за случајно талкање, каде секој X_i може да е 1 или -1 со подеднаква веројатност. Ваквото случајно талкање има

$$E(S_n) = \sum_{j=1}^{n} E(X_j) = 0,$$

$$D(S_n) = E(S_n^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} E(X_i X_j) = n.$$

Очекуваната транзлација/поместување, $E|S_n|$, т.е. колку се има поместено вредноста од x-оската, може да се добие на следниот начин. Прво ќе изразиме очекуваната вредност рекурзивно

$$\mathbb{E}|S_{n+1}| = \mathbb{E}\big(\, \mathbb{E}\big(|S_{n+1}| \, \big| \, S_n\big) \, \big) = \mathbb{E}\Big[\tfrac{|S_n+1|+|S_n-1|}{2}\Big] = \mathbb{E}|S_n| + \mathbb{P}(S_n = 0),$$

вредноста се менува само ако на претходниот член вредноста е нула, префрлувајќи очекуваните вредности на едната страна, и собирајќи ги рекурзивните формули за сите S_n од 1 до n, се добива следната формула

$$\mathbb{E}|S_n| - \mathbb{E}|S_0| = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = 0).$$

Веројатноста $\mathbb{P}(S_k = 0)$, е 0, во случај k да е непарен, а кога k е парен, таа е веројатноста 1 и -1 да се појавиле исто толку често кај променливите X_i,

$$\mathbb{P}(S_{2m} = 0) = \binom{2m}{m} 2^{-2m},$$

според Stirling формулата, $\binom{2m}{m}$, кога m тежи кон бесконечно, после соодветно поедноставување, има вредност $\frac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$, со ова добиваме дека,

$$\mathbb{E}|S_n| = \sum_{m \le n/2} \mathbb{P}(S_{2m} = 0) \sim \sum_{m \le n/2} \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2\sqrt{\tfrac{n}{2}} = \sqrt{\tfrac{2n}{\pi}}\,.$$

Поместувањето, кога n тежи кон бесконечност, е од ред $\sqrt{n}$, со коефициент $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

За вакво случајно талкање, ако има бесконечно чекори, секоја можна вредност ќе се помине бесконечно многу пати. Нека a и b се два природни броеви, за кои ќе разгледаме веројатностите дека ќе се погоди b пред -a, како и очекуваниот број чекори да се достигне таква состојба.

Веројатноста случајното талкање попрво да добие вредност b При добивање на оваа веројатност, потребно е случајното талкање да е мартингал, т.е. треба да докажеме дека очекуваната вредност на талкањето во некој n+1 момент, при тоа знаејќи ги сите претходни реализации во талкањето, е еднакво на вредноста на случајното талкање во n-тиот момент, доказот е следниот

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\, S_n + X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n].$$

Од тоа што X_{n+1} е независен од $\mathcal{F}_n$ и $\mathbb{E}[X_{n+1}] = 0$,

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = S_n.$$

Имајќи го ова во предвид, ние можеме да го искористиме теоремата за запирање на Дуб. Нека времето на стопирање ни се дефинира со прввиот момент во кој S_n добива вредност b или -a, нека $\tilde{S}_n$ биде дефинирана со

$$\tilde{S}_n = \begin{cases} S_n, & n < \tau, \\ -a \ \text{ or } \ b, & n \geq \tau. \end{cases}$$

со ова, $\tilde{S}_n$, го исполнува првиот услов од Теоремата за озапирање на Дуб, од кое следува дека

$$\mathbb{E}\big[\,|\tilde{S}_\tau|\,\big] \;=\; \mathbb{E}\big[\,|\tilde{S}_0|\,\big] \;=\; 0.$$

Нека веројатноста случајното талкање прво да достигне вредност b е p,

$$\mathbb{P}(S_\tau = b) = p, \qquad \mathbb{P}(S_\tau = -a) = 1 - p,$$

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_\tau] = p \cdot b + (1-p)(-a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{a}{a+b}.$$

Очекуваниот број чекори за S_n да добие вредност b или -a За ова ни треба знаењето дека $S_n^2 - n$ е исто така мартингал, па со помош на погорната теорема на запирање се добива следното

$$\mathbb{E}[S_\tau^2 - \tau] = \mathbb{E}[S_0^2] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[S_\tau^2] = b^2 p + a^2(1-p) = ab.$$

Обопштување на веојатностите за погодување и очекуваниот број чекори

Веројатностите на премин се постојани но различни меѓу себе, p!=q За поедноставување на пресметките, нека почетната состојба ни е а, што значи дека бараме веројатноста да се погоди a+b, нека е N, наспроти 0. Прво да дефинираме веројатноста од состојба k т.е. $S_i = k$, да се погоди N пред да се погоди 0,

$$h_k := \mathbb{P}_k(\text{погоди } N \text{ пред } 0).$$

Од ова следува дека $h_0 = 0$ и $h_N = 1$, како и следната рекурентна релација

$$h_k = p h_{k+1} + q h_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, N-1,$$

$$q h_{k-1} - h_k + p h_{k+1} = 0.$$

На сличен начин можеме да го претставиме очекуваното време на погодување

$$t_k := \mathbb{E}_k[T], \quad \text{каде } T = \text{време до апсорпција/погодување на } \{0, N\},$$

следува дека $t_0 = 0, t_N = 0$.

$$t_k = 1 + pt_{k+1} + qt_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, N-1,$$

$$qt_{k-1} - t_k + pt_{k+1} = -1.$$

Со решавањето на овие системи се добиваат следните формули соодветно

$$h_k = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, & p \neq q, \\ \dfrac{k}{N}, & p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$t_k = \frac{N}{p-q} \cdot \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} - \frac{k}{p-q} \quad (p \neq q).$$

Веројатностите на премин зависат од вредноста на случајното талкање За овој случај важи следното

$$\exists\, i, j \in \{1, \ldots, N-1\},\ i \neq j \ \text{ такви што } p_i \neq p_j.$$

Според ова, рекурентните релации се следните

$$h_k = p_k h_{k+1} + q_k h_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, N-1,$$

$$q_k h_{k-1} - h_k + p_k h_{k+1} = 0.$$

$$t_k = 1 + p_k t_{k+1} + q_k t_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, N-1,$$

$$q_k t_{k-1} - t_k + p_k t_{k+1} = -1.$$

Има повеќе алгоритми за решавање на овие равенки, ќе се задржам на тие без матрици, здравје линеарна. За веројатноста на погодување,

$$\text{За } i = 1, \ldots, N-1, \qquad h_i = p_i h_{i+1} + q_i h_{i-1}, \qquad h_0 = 0,\ h_N = 1.$$

$$\Delta_i := h_i - h_{i-1} :$$

$$h_i - p_i h_{i+1} - q_i h_{i-1} = 0 \iff p_i(h_{i+1} - h_i) = q_i(h_i - h_{i-1}) \iff \Delta_{i+1} = \rho_i \Delta_i,$$

$$\text{Каде } \rho_i := \tfrac{q_i}{p_i}.$$

$$\text{Итереативно:} \qquad \Delta_{k+1} = s_k \Delta_1, \qquad s_0 := 1, \quad s_k := \prod_{j=1}^{k} \rho_j.$$

$$\text{Сума на разлики:} \qquad h_i = h_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \Delta_{k+1} = \sum_{k=0}^{i-1} s_k \Delta_1.$$

$$\text{Од } h_N = 1 \implies \sum_{k=0}^{N-1} s_k \Delta_1 = 1,$$

$$\boxed{h_i = \frac{\sum_{k=0}^{i-1} s_k}{\sum_{k=0}^{N-1} s_k}, \qquad s_k = \prod_{j=1}^{k} \frac{q_j}{p_j}.}$$

Земнувајќи i со a би добиле бараната вредност. Содветно, за очекуваното време до погодок се добива следното, поради гломазноста на доказот без матрици, скриено е подолу

$$S_m := \sum_{k=0}^{m-1} s_k \ (S_0 = 0),$$

$$\boxed{t_i = \frac{S_i}{S_N} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j}^{N-1} \frac{s_k}{p_j s_j} - \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j}^{i-1} \frac{s_k}{p_j s_j}, \qquad s_k = \prod_{r=1}^{k} \frac{q_r}{p_r}.}$$

2.2 Повеќе димензионално случајно талкање

Повеќе димензионалните случајни талкања се дефинирани со

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad X_i \in \mathbb{Z}^d,$$

каде (X_i) се независни и еднакво распределени случајни променливи. На пример, за $d = 2$ секој чекор може да биде избран од $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$. Треакторијата на случајно талкање претставува множество од сите постигнати вредности/локации на талкањето. Кај 1Д lattice талкање таа претставува сите достижни вредности помеѓу долната и горната граница, каде кај повеќе димензионалните ни дава повеќе информации за самиот процес.
Табела: Прости случајна талкања на Z^d, рекурентност, веројотност две талкања да се "сретнат"т.е. да имат иста вредност во иста итерација зимајќи во предвид дека се започнале на |x| оддалеченост, и веројатност талкањето да се врати во почетната положба за дадена n-та итерација

d	**Рекурентност?** $P_0(\tau_0 < \infty)$	**Вер. на срeќавање**	$P(S_{2n} = 0)$
2	$= 1$ (рекурентна)	$= 1$ (с.с. срeќават)	$\sim \frac{1}{\pi n}$
3	≈ 0.340537 (транзитивно)	$= \frac{G_3(x)}{G_3(0)} \sim 0.314870244 \lvert x\rvert^{-1}$	$\sim \left(\frac{3}{2\pi n}\right)^{3/2}$
4	≈ 0.193206 (транзитивно)	$= \frac{G_4(x)}{G_4(0)} \sim 0.163490616 \lvert x\rvert^{-2}$	$\sim \left(\frac{4}{2\pi n}\right)^{2}$
5	≈ 0.135178 (транзитивно)	$= \frac{G_5(x)}{G_5(0)} \sim 0.109531015 \lvert x\rvert^{-3}$	$\sim \left(\frac{5}{2\pi n}\right)^{5/2}$

Дообј. G_d е дискретна Греенова функција $G_d(y) = \sum_{n \geq 0} P_0(S_n = y)$

3 Винеров процес

Винеров процес е непрекинат случаен процес кој се карактеризира со следните правила:

- $W_0 = 0$ со веројатност 1
- W има независни интервали за секое $t > 0$ т.е. интервалите $W_{t+u} - W_t,\ u \geq 0$, се независни од вредности во минатото $W_s,\ s < t$.
- W има Гаусови интевали т.е. $t \geq 0,\ u \geq 0, \quad W_{t+u} - W_t \sim \mathcal{N}(0, u)$
- W е непрекината

Карактеристики на Винеров

$$\mathbb{E}[\,|W_t|\,] = \int_0^\infty \mathbb{P}(|W_t| \geq x)\ dx = 2\int_0^\infty \mathbb{P}(W_t \geq x)\ dx = 2\int_0^\infty \Big(1 - \Phi\big(x/\sqrt{t}\big)\Big)\, dx = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

$$W_t \sim \mathcal{N}(0, t), \qquad \mathbb{E}[W_t] = 0, \qquad \mathrm{Var}(W_t) = t, \qquad \mathrm{Cov}(W_s, W_t) = \min\{s, t\}.$$

$$|W_t| \ \text{ има густина } \quad f_{|W_t|}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, e^{\left(-\frac{x^2}{2t}\right)}\,\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}, \qquad \mathbb{E}[\,|W_t|\,] = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}, \quad \mathrm{Var}(|W_t|) = t\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

3.1 Теорема на Донскер

Нека имаме случајно талкање S_n дефинирано со:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1$$

$$\mathbb{E}[X] = 0, \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{D}[X] = \mathbf{1}$$

Ќе го интерполираме S_n така што за секој реален t ќе има вредност,

$$S_t = S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor) X_{\lfloor t \rfloor + 1}, \qquad t \geq 0$$

Понатаму, сакаме да го "убрзаме"времето, т.е. сакаме S_n да е опишано на интервалот $[0, 1]$, каде овој интервал ќе го поделиме на n подеднакви подинтервали, за S_n би одговарало $S_{[nt]}$. Дисперзијата на овој процес е n, т.е. со зголемувањето на бројот на чекори, би се зголемила и дисперзијата. За да се избегне ова ќе го нормализираме, нека

$$S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\, S_{\lfloor nt \rfloor}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Донскеровата теорема гласи дека овој ново дефиниран процес, кога n тежи кон бесконечност, конвергира во дистрибуција кон Винеров процес.

$$S_{[0,1]}^{(n)} \ \Rightarrow \ W_{[0,1]}$$

3.2 Принцип на рефлексија

Нека имаме винеров процес, поради непрекинатоста на процесот, секоја реализација/патека на $(0, t)$ што завршува со вредност поголема од a во време t (т.е. $W(t) \geq a$) мора да ја има примено вредноста a во некој $t_a \leq t$ момент за прв пат. За секоја ваква реализација, може да се дефинира $W'(t)$ на $(0, t)$ така што таа е симетрична на оригиналната реализација по оската околу а на интервалот (t_a, t). Овие пак се реализации на Винеров процес, кои поминуваат низ а, но имаат вредност помала од а во t. Од ова следува дека сите реализации кои достигнуваат вредност а на интервалот $(0, t)$, пола ќе завршат со вредност помала од а. Знаејќи го ова, може да се постигне заклучокот дека веројатноста процесот да заврши со вредност поголема од а, е пола од веројатноста да ја достигне а.

$\mathbb{P}\left(\sup\limits_{0\leq s\leq t} W(s) \geq a\right) = 2\,\mathbb{P}(W(t) \geq a) = 2\big(1 - \Phi(a/\sqrt{t})\big)$, sup означува максималната вредност на тој интервал

4 Примена на случајно талкање и Брауново движење на финансискиот пазар

4.1 Дериват, опција, европска "call"опција

Дериват договор на финансиски пазар помеѓу продавач и купувач.

Опција (option) договор што му дава на сопственикот право (но не и обврска) да купи или продаде количество на средство по претходно определена цена *(strike price)* до/на одреден датум.

Европска опција опција што може да се искористи само на датумот на доспевање.

Call опција право да се *купи* средство по strike-цената.

4.2 Black Scholes модел

Black Scholes моделот е математички модел за динамиката на финансискиот пазар, во однос на финансиските деривати. Од овој модел, може да се изведе Black Scholes формулата за проценка на цените на европски тип на опција.

4.2.1 Формула

Следната формула се однесува на "call"опција:

$$C(S_t,t) \ = \ N(d_+)\,S_t - N(d_-)\,Ke^{-r(T-t)}, \qquad d_+ \ = \ \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right], \qquad d_- \ = \ d_+ - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Овде $C(S_t,t)$ е цената што ја проценуваме за опцијата во сегашноста, т.е. фер цената на опцијата, S_t е цената на акцијата во момент t, т.е. сегашноста, K е цената по која сме договорени дека ќе купиме, $(T-t)$ е договореното време за купување во опцијата, $e^{(-r(T-t))}$ се користи за пресметување на односот на вредноста на некоја сума пари во сегашноста наспрема вредноста во што ќе ја имат за $(T-t)$, т.е. ако акцијата расте за r проценти по година, и ние за една година купиме акции за x сума, тоа би било исто како во сегашноста да купиме акции за $x * e^{-r}$ сума, $N(d_+)$ и $N(d_-)$, претставуваат веројатности во стандардна нормална распределба. Кај вредностите d_+ и d_-, потребно е да знаеме дека σ се однесува на стандардната девијација логаритамските разлики на цена на акциите.

4.2.2 Врска помеѓу формулата и Брауново движење

За моделирање на цени на акции се користи геометриско Брауново движење. Случаен процес соодветствува на геометриско Брауново движење кога го исполнува следниот услов

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$$

во контекст на моделирање цена на акција, dS_t претставува промената на цената на акцијата, dt е делот од времето за кое пресметуваме, σ е стандардната девијација на цената на акцијата измерена за една година, и dW_t е брауново движење во интервал со должина dt. Со трансформации на оваа формула ние можеме да добиеме дека природниот логаритам од односто на цената на акцијата во моменти t_1, t_2 има нормална дистрибуција т.ш.

$$\ln\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} \ \sim \ \mathcal{N}\Big((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(t_2-t_1),\ \sigma^2(t_2-t_1)\Big).$$

т.е. ако моделираме цените на акциите како геометриско Брауново движење, добиваме дека природниот логаритам од односто на цената на акцијата во моменти t_1, t_2 соодветствуват на брауново движење со "drift"т.е. $\mu > 0$

4.3 Биномно вреднување на цени на опции

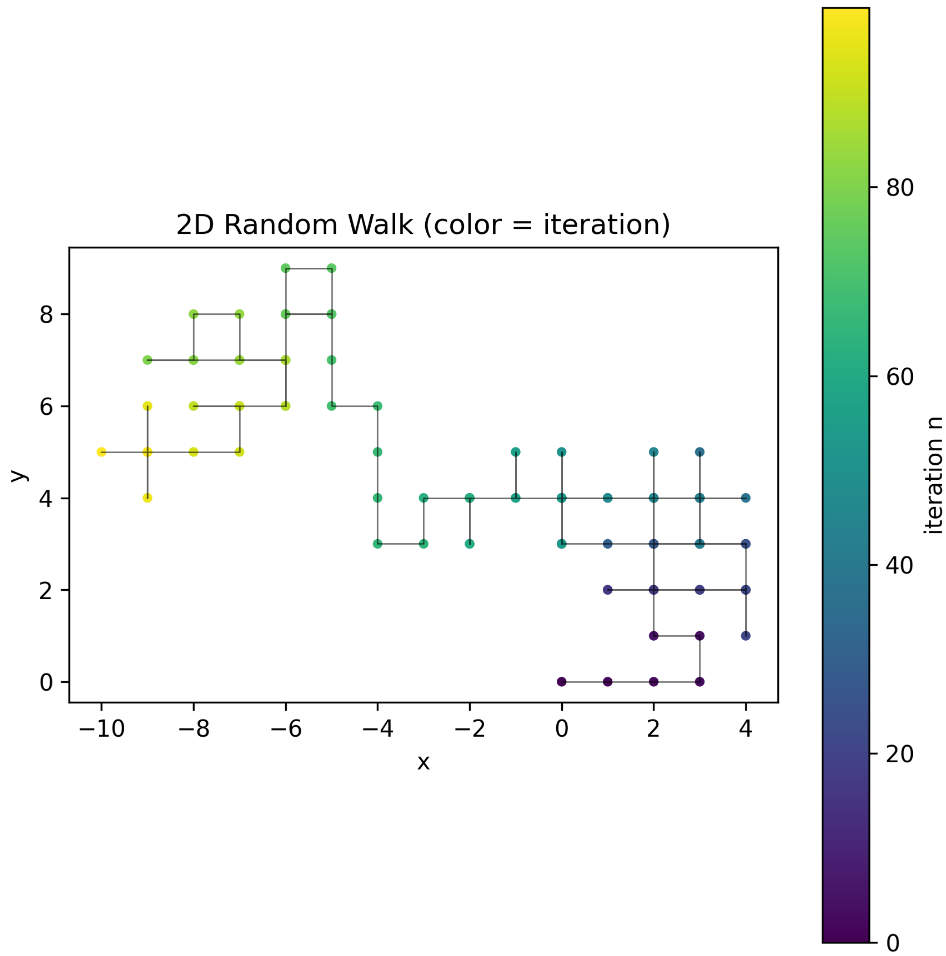
Ако Black Scholes ги моделира цените на акциите како непрекинати случајни процеси, биномно вреднување се однесува на исцепкување на времето во дискретни интервали, повторно со цел да се добие проценка за фер цена на опција, во лик на случајно талкање.

4.3.1 Методот

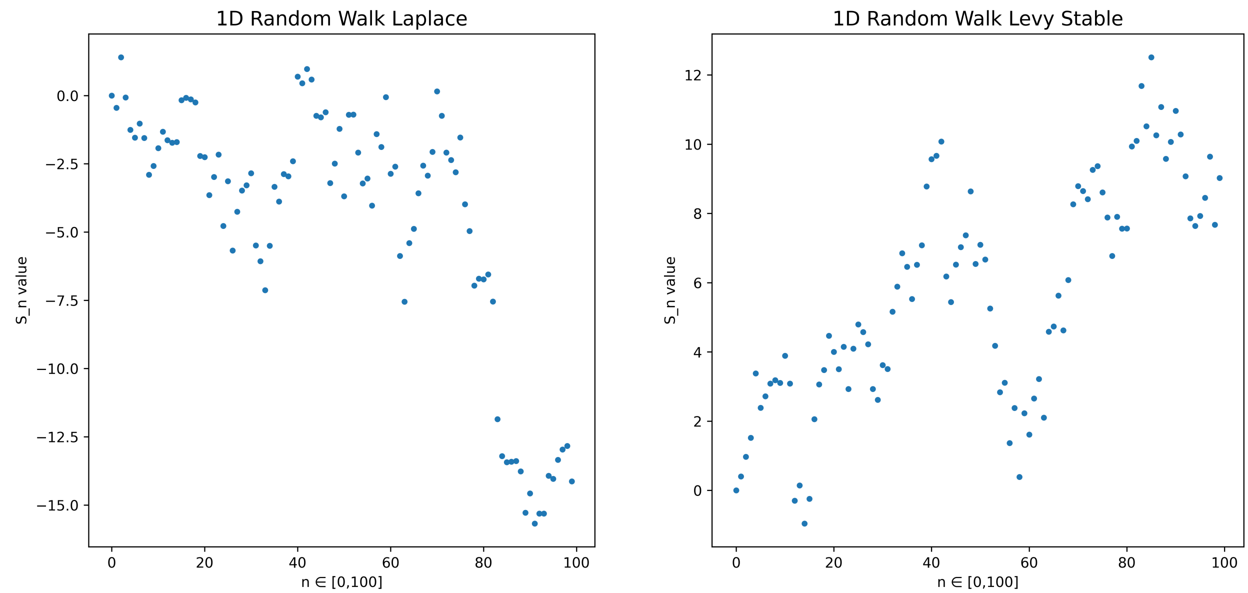
Биномното вреднување се базира на правење на биномно дрво за моделирање на цените на некоја акција. Поради тоа што разгледуваме дискретни моменти, ние одредуваме за колку може да се качи или да се намали цената за тој интервал. Нека d, u, коефициентите за кои се намалува или зголемува цената соодветно. Изборот на овие коефициенти се основа на тоа што сакаме да добиеме дека природниот логаритам од односот на цената на акцијата во моменти t_1, t_2 соодветствуват на брауново движење со "drift"т.е. $\mu > 0$ и стандардна девијација $\sigma * \sqrt{t}$, и дека сакаме да важи дека редоследот на покачувања и намалувања не е важен. Овие својства се запазени со $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = \frac{1}{u}$. Следно, нè интересираат веројатностите за промена на цената. Очекуваната вредност од цената во некој следен момент можеме да ја претставиме како $\mathbb{E}^*\big[S_{\text{next}}\big] = p^*(uS) + \big(1 - p^*\big)(dS) = S\, e^{r\Delta t}$, каде r е за колку процентуално е пресметано дека ќе расте акцијата. Со решавање на овој систем добиваме дека $p = \frac{e^{(r-q)\,\Delta t} - d}{u-d}$. Сега, во секој јазол, ставаме вредноста на разликата од вредноста на акцијата со договорениот "strike price". Следно сакаме да поврзаме јазлите со нивните веројатности, како и да скалираме резултатот со колку пари во сегашност би одговарал. Формулата што се добива е следната $C_{t-\Delta t,\, i} = e^{-r\Delta t}\big(p\, C_{t,i} + (1-p)\, C_{t,i+1}\big)$, каде $C_{t-\Delta t,\, i}$ е вредноста на опцијата во јазол i во време $t - \Delta t$. Со пропагација се до првиот член се добива фер вредноста на дадената опција.

5 Симулации

Слика 1: Просто случајно талкање



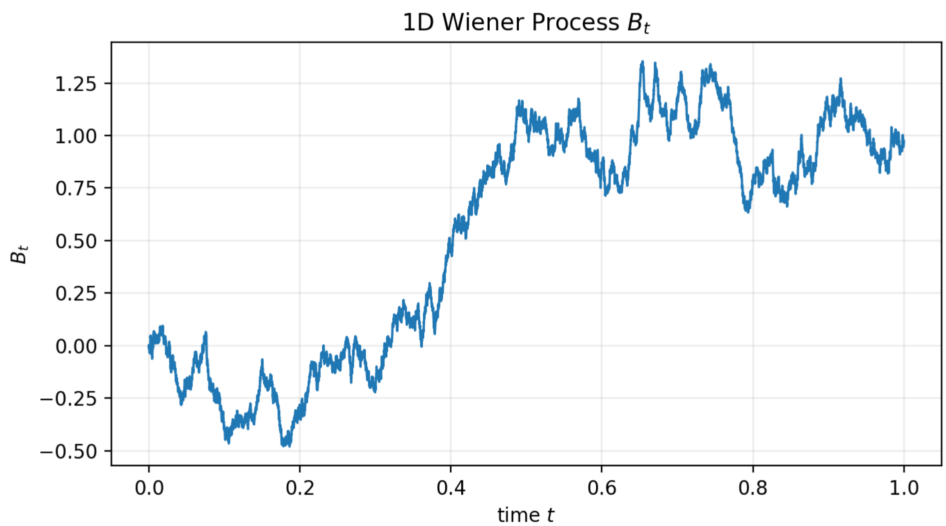
Слика 2: 2D просто случајно талкање



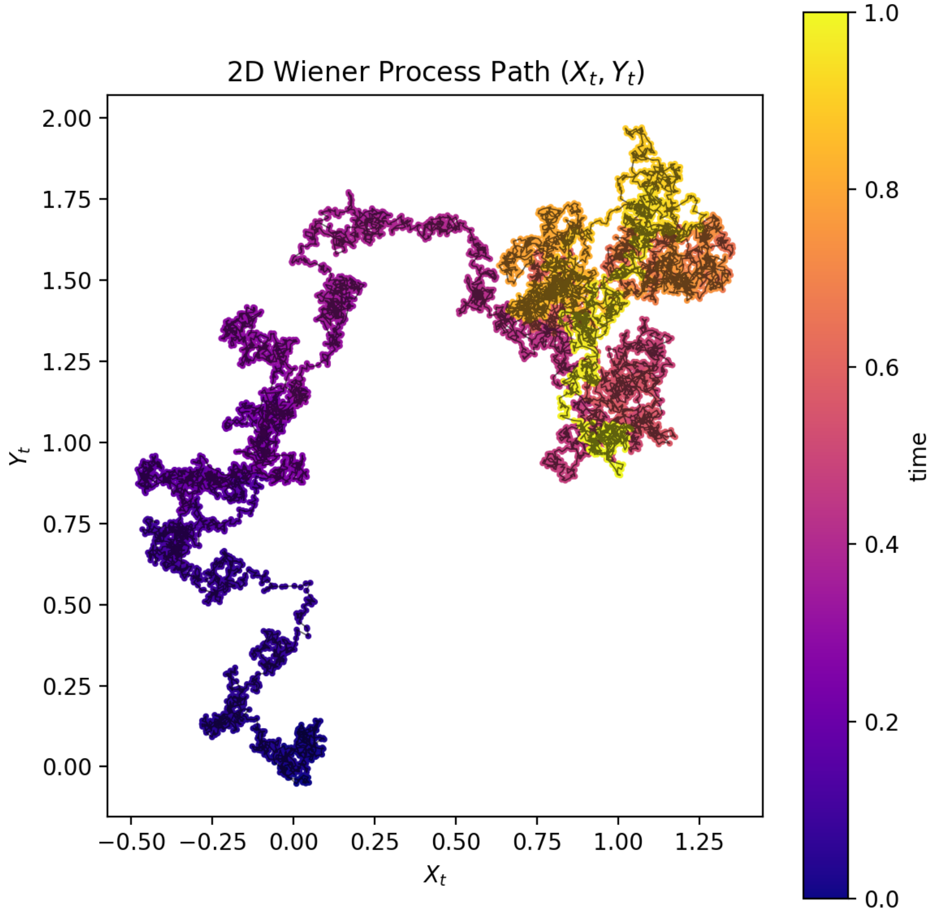
(a) Laplace-distributed increments

(б) Lévy (heavy-tailed) increments

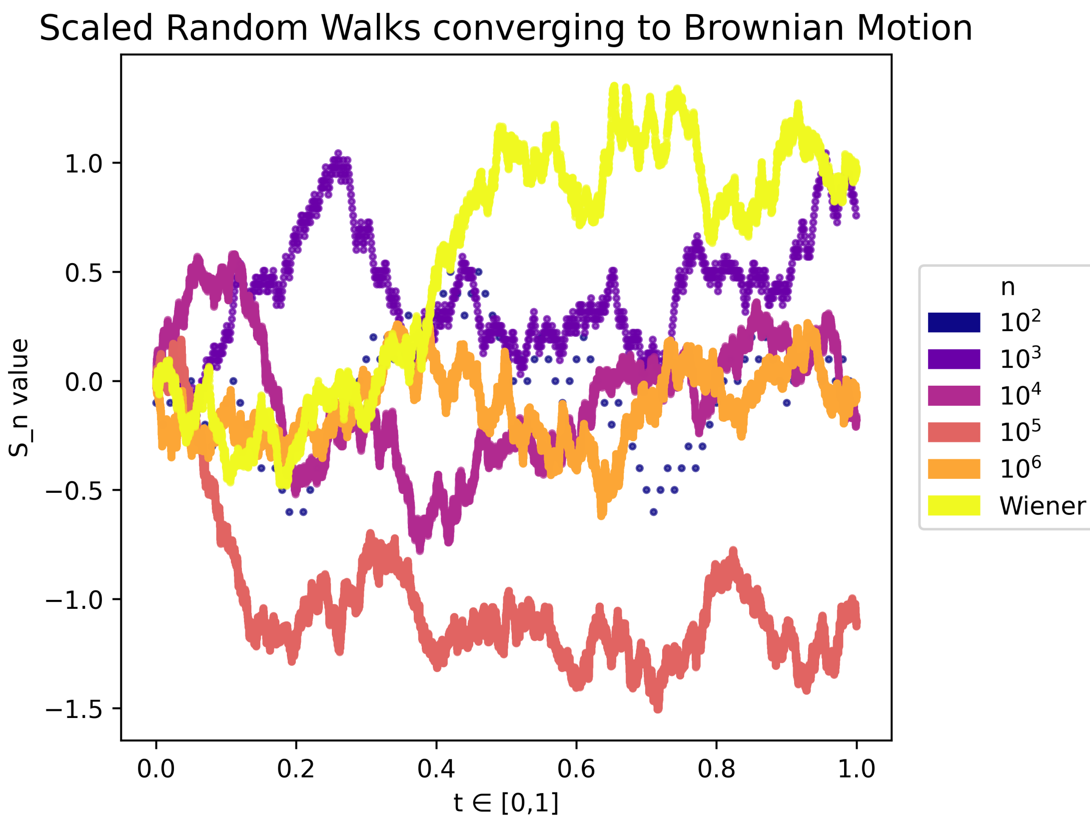
Слика 3: Случајни талкања со различни дистрибуции



Слика 4: Пример патека од 1Д Винеров процес.



Слика 5: Пример патека од 2Д Винеров процес.



Слика 6: Скалирано талкање наспроти Винеров.

Во кодот имам додадено нови симулации за Black Scholes и биномно вреднување на опциите.

A Докази и теореми

Theorem A.1 (Стерлингова апроксимација)**.** *$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ кога $n \to \infty$.*

Definition A.2 (Мартингал)**.** Мартингал е случаен процес за кој важи дека очекуваната вредност на следниот примерок, имајќи/знаејќи ги вредностите на претходните примероци, е еднаква на вредноста во претходната итерација, т.е.

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$$

каде $\mathcal{F}_n$ е множество од претходните реализации т.е. примероците x_1,x_2,...x_n.

Definition A.3. Време на запирање е случајно време во кое престанува набљудувањето на некој случаен процес, основано само на информациите добиени до таа точка

[Време на запирање] Нека $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ е филтрација на веројатносниот простор . Случајна променлива $\tau : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ се нарекува а *време на запирање* во однос на $(\mathcal{F}_n)$ ако за секој $n \geq 0$,

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Еквивалентно, “$\tau \leq n$” се одредува по информациите достапни до време n.

Theorem A.4 (Теоремата на запирање на Дуб)**.** *Нека $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ е мартингал и τ нека биде време на стопирање во однос на $(\mathcal{F}_n)$. Ако τ и X_n задоволуваат било кој од следните услови:*

(i) τ е скоро сигурно ограничено, т.е. $\tau \leq c$ за некое

(ii) $(X_{n\wedge\tau})$ *е насекаде интеграбилно, или*

(iii) $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ *и интервалите се ограничени:* $|X_{n+1} - X_n| \le C$,

тогаш

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0].$$

Доказ дека $M_n = S_n^2 - n$ *е мартингал.*

$$M_n := S_n^2 - n$$

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n \quad \text{a.s.}$$

$$S_{n+1}^2 = (S_n + X_{n+1})^2 = S_n^2 + 2S_nX_{n+1} + X_{n+1}^2$$

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = S_n^2 + 2S_n\,\mathbb{E}[X_{n+1}] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2] = S_n^2 + 1$$

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\big[S_{n+1}^2 - (n+1) \mid \mathcal{F}_n\big] = (S_n^2 + 1) - (n+1) = S_n^2 - n = M_n$$

□

Доказ за очекуваното време до достигнување на состојба.

$$t_0 = t_N = 0, \qquad t_i = 1 + p_it_{i+1} + q_it_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, N-1).$$

$$\text{Нека } w_i := t_i - t_{i-1}, \qquad \rho_i := \frac{q_i}{p_i}, \qquad s_0 := 1, \quad s_k := \prod_{j=1}^{k} \rho_j \ (k \ge 1).$$

$$t_i - p_it_{i+1} - q_it_{i-1} = 1 \iff p_i(t_{i+1} - t_i) = q_i(t_i - t_{i-1}) - 1 \iff w_{i+1} = \rho_iw_i - \frac{1}{p_i}.$$

$$\text{Нека } v_i := \frac{w_i}{s_{i-1}} \quad (i \ge 1).$$

$$v_{i+1} = \frac{\rho_iw_i - 1/p_i}{s_i} = \frac{w_i}{s_{i-1}} - \frac{1}{p_is_i} = v_i - \frac{1}{p_is_i},$$

$$v_{k+1} = v_1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_js_j}, \qquad w_{k+1} = s_k\left(v_1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_js_j}\right).$$

$$S_m := \sum_{k=0}^{m-1} s_k \ (S_0 = 0), \qquad A_m := \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_js_j} \ (A_0 = 0).$$

$$t_i = \sum_{k=0}^{i-1} w_{k+1} = \sum_{k=0}^{i-1} s_kv_1 - \sum_{k=0}^{i-1} s_kA_k = S_iv_1 - \sum_{k=0}^{i-1} s_kA_k.$$

$$t_N = 0: \quad 0 = S_Nv_1 - \sum_{k=0}^{N-1} s_kA_k \implies v_1 = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} s_kA_k}{S_N}.$$

$$\boxed{t_i = \frac{S_i}{S_N} \sum_{k=0}^{N-1} s_kA_k - \sum_{k=0}^{i-1} s_kA_k.}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} s_k A_k = \sum_{k=0}^{m-1} s_k \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j s_j} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{p_j s_j} \sum_{k=j}^{m-1} s_k = \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j}^{m-1} \frac{s_k}{p_j s_j},$$

$$\boxed{t_i = \frac{S_i}{S_N} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j}^{N-1} \frac{s_k}{p_j s_j} - \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j}^{i-1} \frac{s_k}{p_j s_j}, \qquad s_k = \prod_{r=1}^{k} \frac{q_r}{p_r}.}$$

□

Референци

Литература

[1] *Random walk*. Wikipedia.

[2] *Wiener process*. Wikipedia.

[3] *Brownian motion*. Wikipedia.

[4] *Donsker's invariance principle*. Wikipedia.

[5] *Reflection principle (Wiener process)*. Wikipedia.

[6] *Hitting time*. Wikipedia.

[7] *Martingale (probability theory)*. Wikipedia.

[8] *Optional stopping theorem*. Wikipedia.

[9] *Stirling's approximation*. Wikipedia.

[10] *Geometric Brownian motion*. Wikipedia.

[11] *Black–Scholes model*. Wikipedia.

[12] *Option (finance)*. Wikipedia.

[13] *European option*. Wikipedia.

[14] *Call option*. Wikipedia.