

EI ST5 - Pacific Sound

Ziyad Boumelki, Younes Boumoussou, Vital de Nodrest, Anatole Dulon,
Ayoub Elmoussaoui, Quentin Fretault

Novembre 2024

Introduction

1 - Modélisation et étude théorique

2 - Modélisation numérique et résolution heuristique

3 - Résolution par optimisation

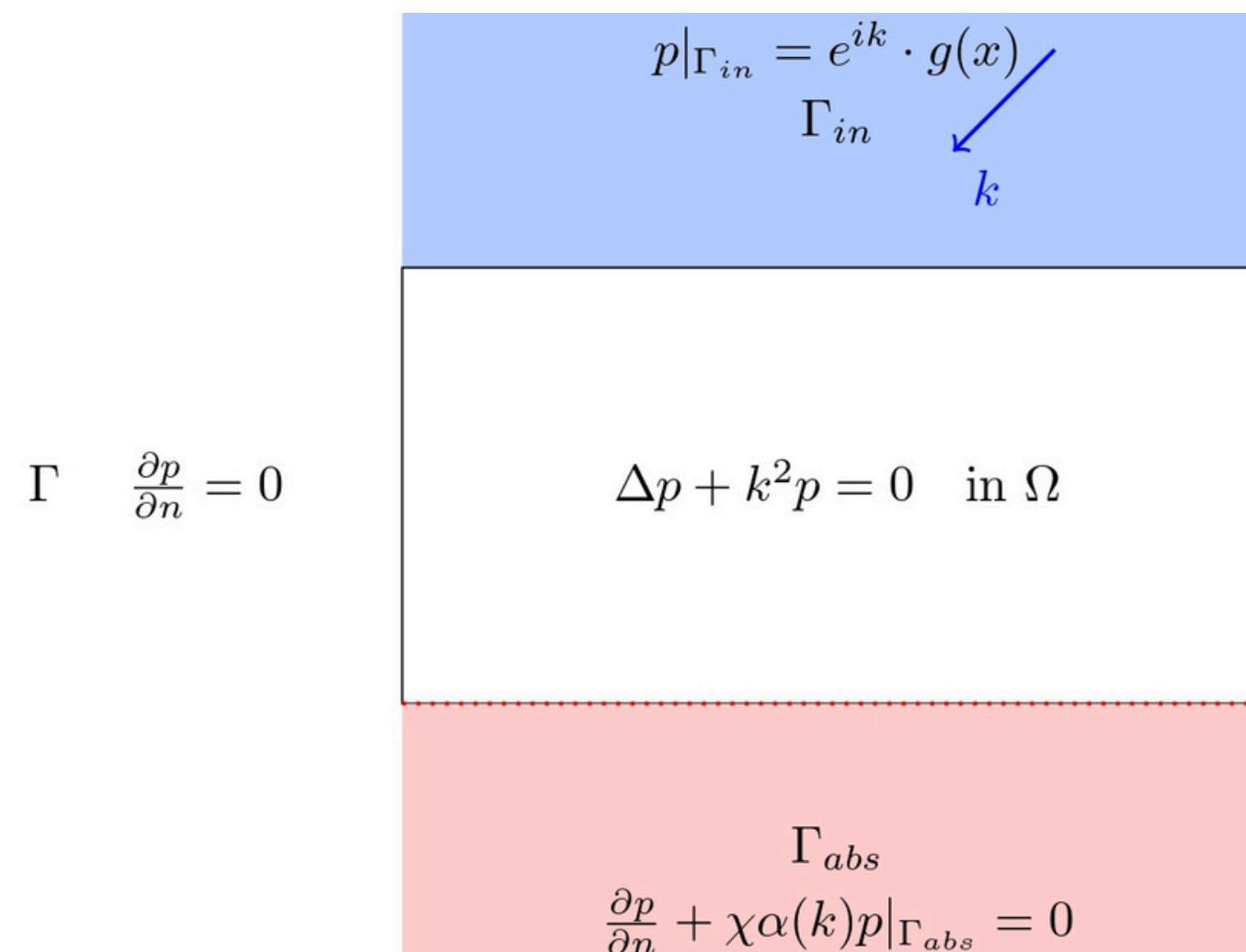
Conclusion

Introduction



Un espace bruyant

Présentation du modèle :



Passage : EDP \longrightarrow

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k^2 p = 0, & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0, & \text{sur la frontière réfléchissante } \Gamma \\ p = g, & \text{sur la frontière d'entrée } \Gamma_{in} \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \chi \alpha(k) p = 0, & \text{sur la frontière absorbante } \Gamma_{abs}. \end{array} \right.$$

Où : $\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si du matériau poreux est présent en } \mathbf{x}, \\ 0, & \text{si aucun matériau poreux n'est présent en } \mathbf{x}. \end{cases}$

avec la condition que $0 < \beta = \int_{\Gamma_{abs}} \chi dS < \int_{\Gamma_{abs}} dS$

Formalisme de l'optimisation :

- **Définition de l'énergie :**

$$J(\chi) = \int_{\Omega} |u(\chi)|^2 \, dx$$

- **Notre but :**

Minimiser la quantité J

- **Méthode envisagée :**

Descente de gradient

Contraintes :

- **Coût du matériau**

$$0 < \beta = \int_{\Gamma_{\text{abs}}} \chi dS < \int_{\Gamma_{\text{abs}}} dS$$

- **Validité de la méthode de descente de gradient ?**

L'ensemble $U_{ab} = \left\{ \chi \mid \chi(x) \in \{0, 1\}, 0 < \beta = \int_{\Gamma_{\text{abs}}} \chi dS < \int_{\Gamma_{\text{abs}}} dS \right\}$ n'est pas fermé pour la convergence faible

Ainsi, si $\chi_n \rightharpoonup \chi$, alors χ n'est pas forcément une fonction caractéristique.

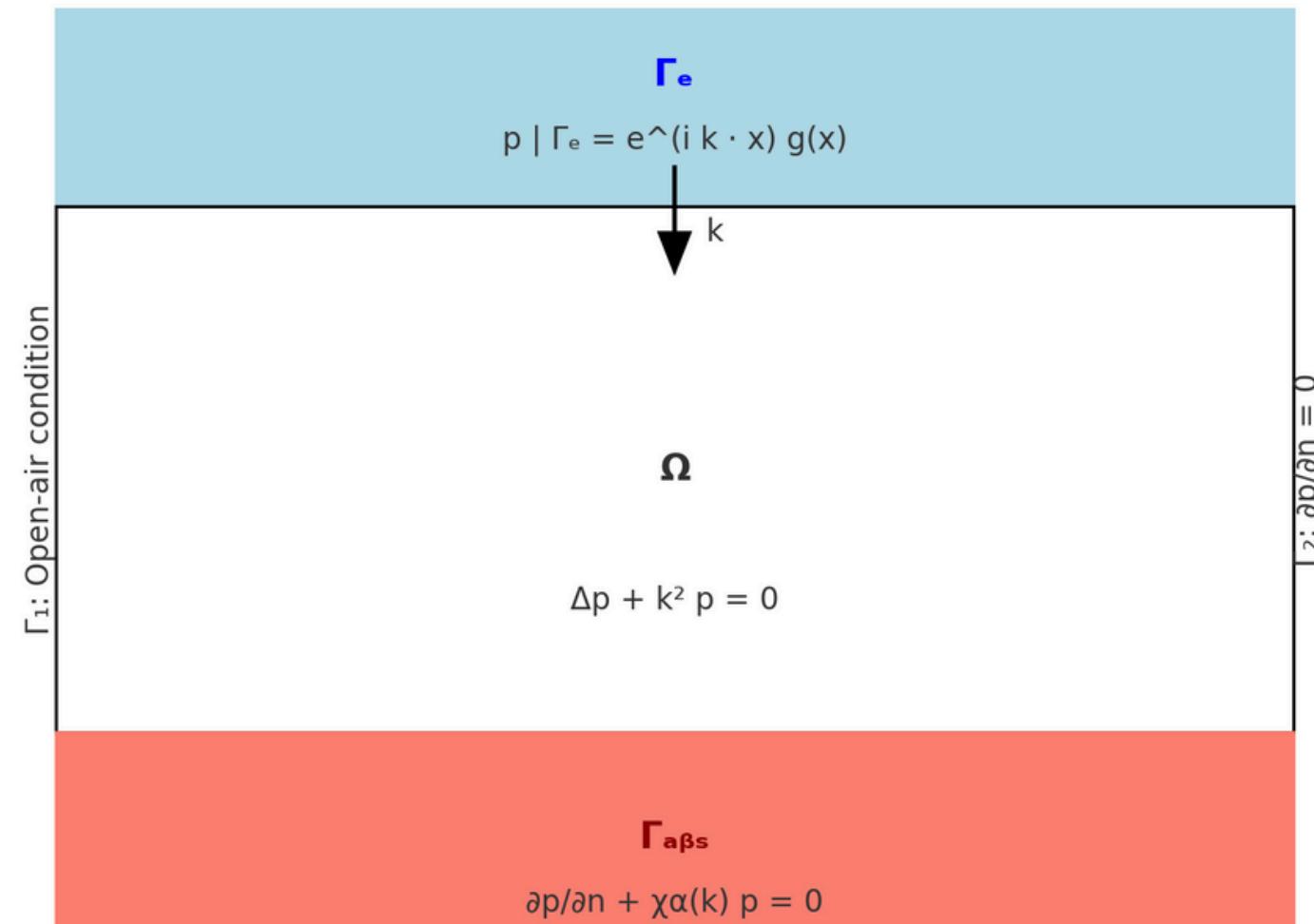
Solution :

- **Se ramener à un ensemble plus gentil, fermé pour la convergence faible**

$$U_{ab}^* = \{\chi \mid \chi(x) \in [0, 1]\}, \quad 0 < \beta = \int_{\Gamma_{\text{abs}}} \chi dS < \int_{\Gamma_{\text{abs}}} dS\}$$

Cela fait que la fonction objective J devient continue, ce qui justifie dans ce cas la descente du gradient

Effet de χ sur J avec une frontière open-air



Passage : EDP →

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad \text{sur } \Omega$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} - ikp = 0, \quad \text{sur la frontière } \Gamma_1$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \text{sur la frontière } \Gamma_2$$

$$p = g, \quad \text{sur la frontière d'entrée } \Gamma_{in}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \chi \alpha(k) p = 0, \quad \text{sur la frontière absorbante } \Gamma_{abs}.$$

Modified model with open-air and reflective boundary conditions.

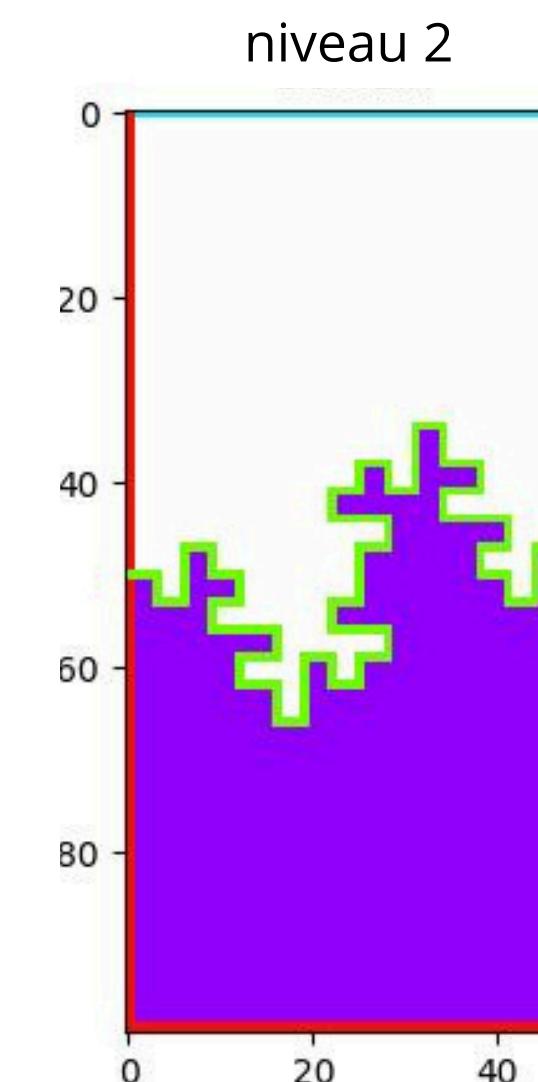
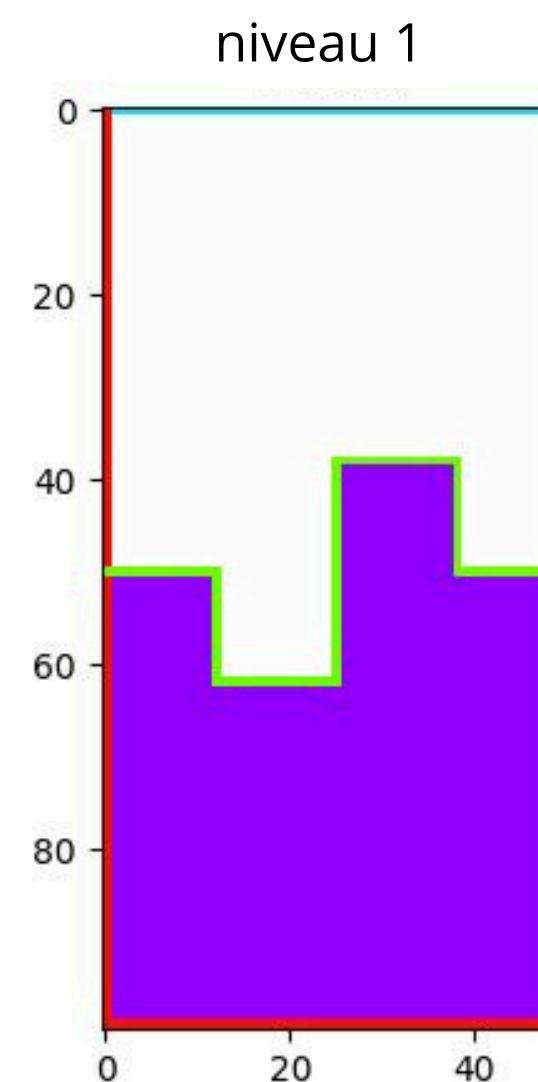
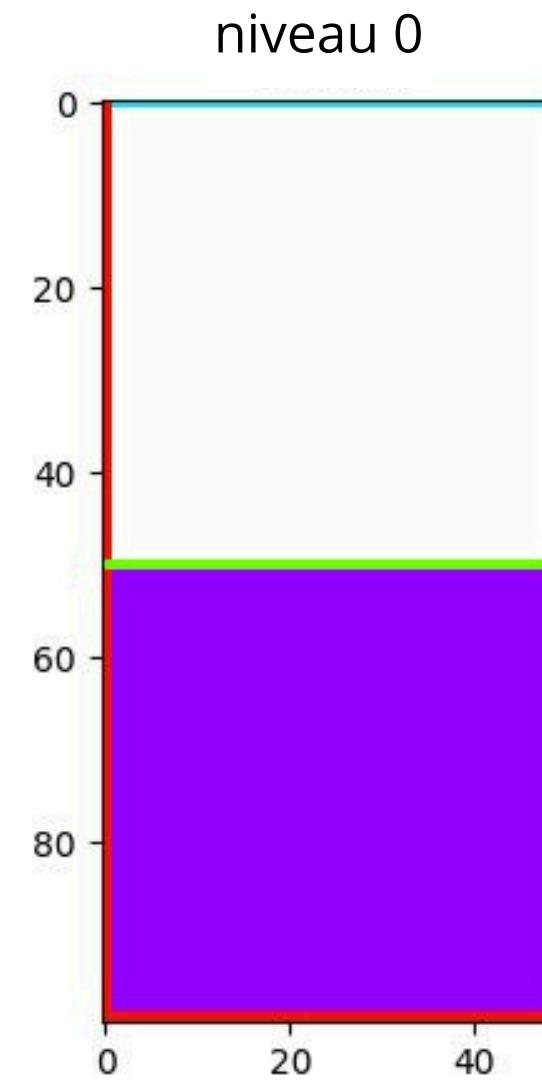
Effet de χ sur J avec une frontière open-air

- En appliquant rigoureusement la méthode lagrangienne, comme dans le polycopié pour les deux types de frontière

On trouve : $J'(\chi) = -\operatorname{Re}(\alpha p(\chi)q(\chi))$

Avec à chaque fois, q est solution d'un système adjoint différent .

2- Modélisation numérique et résolution heuristique



2- Modélisation numérique et résolution heuristique

Constante de Robin

$$\alpha = \text{Re}(\alpha) + i \text{Im}(\alpha)$$

$$\underbrace{\text{Re}(\alpha)}$$

Réflexion des ondes

$$+ i$$

$$\underbrace{\text{Im}(\alpha)}$$

Energie acoustique absorbée

Dépendance de alpha

$$\alpha = \alpha(\omega, \text{nature du matériau})$$

$$\text{Nature du matériau} = f(\phi, \sigma, \rho_0, \alpha_h, c)$$

2- Modélisation numérique et résolution heuristique

Matériaux considérés



Bois



Polyester



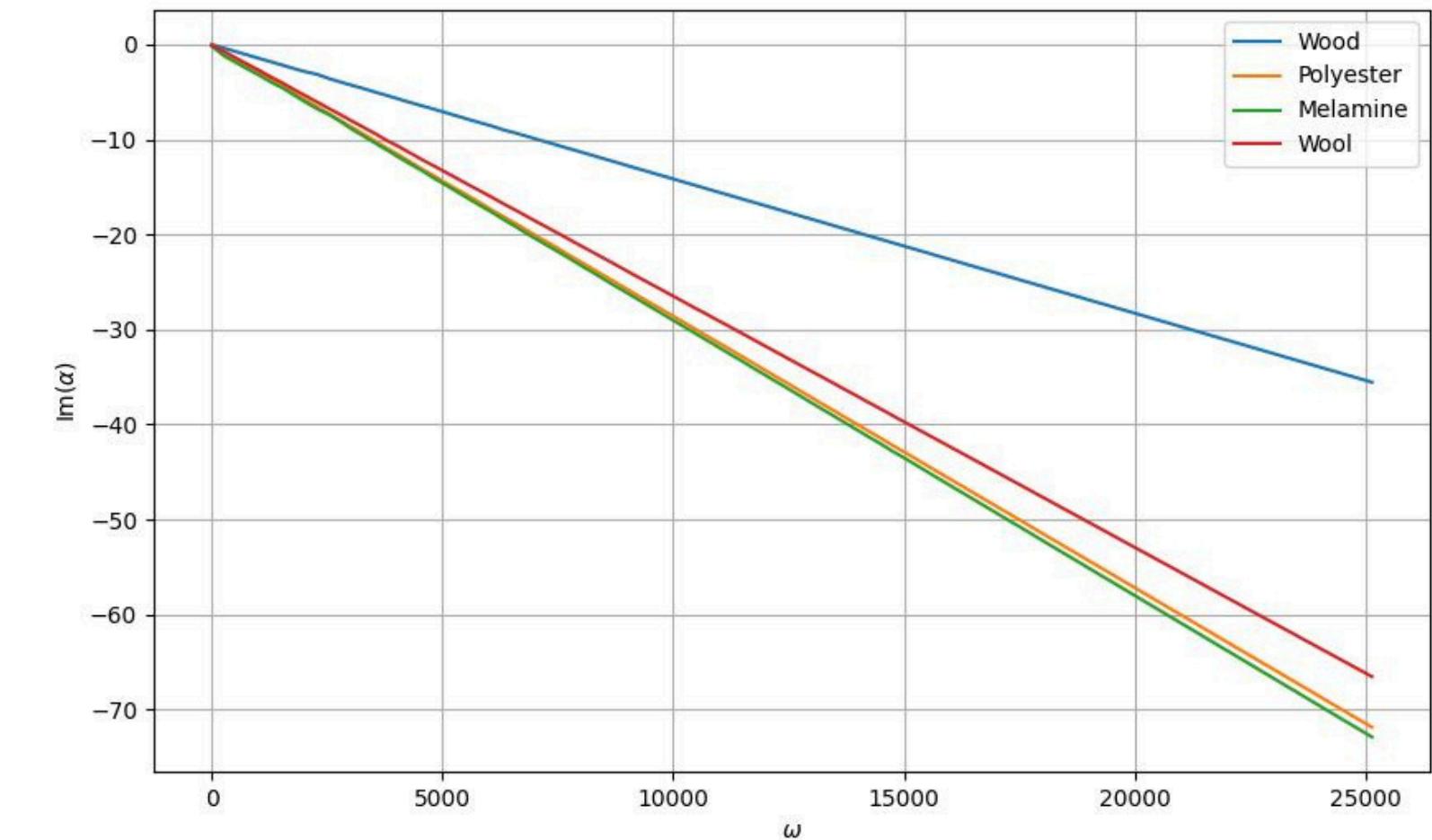
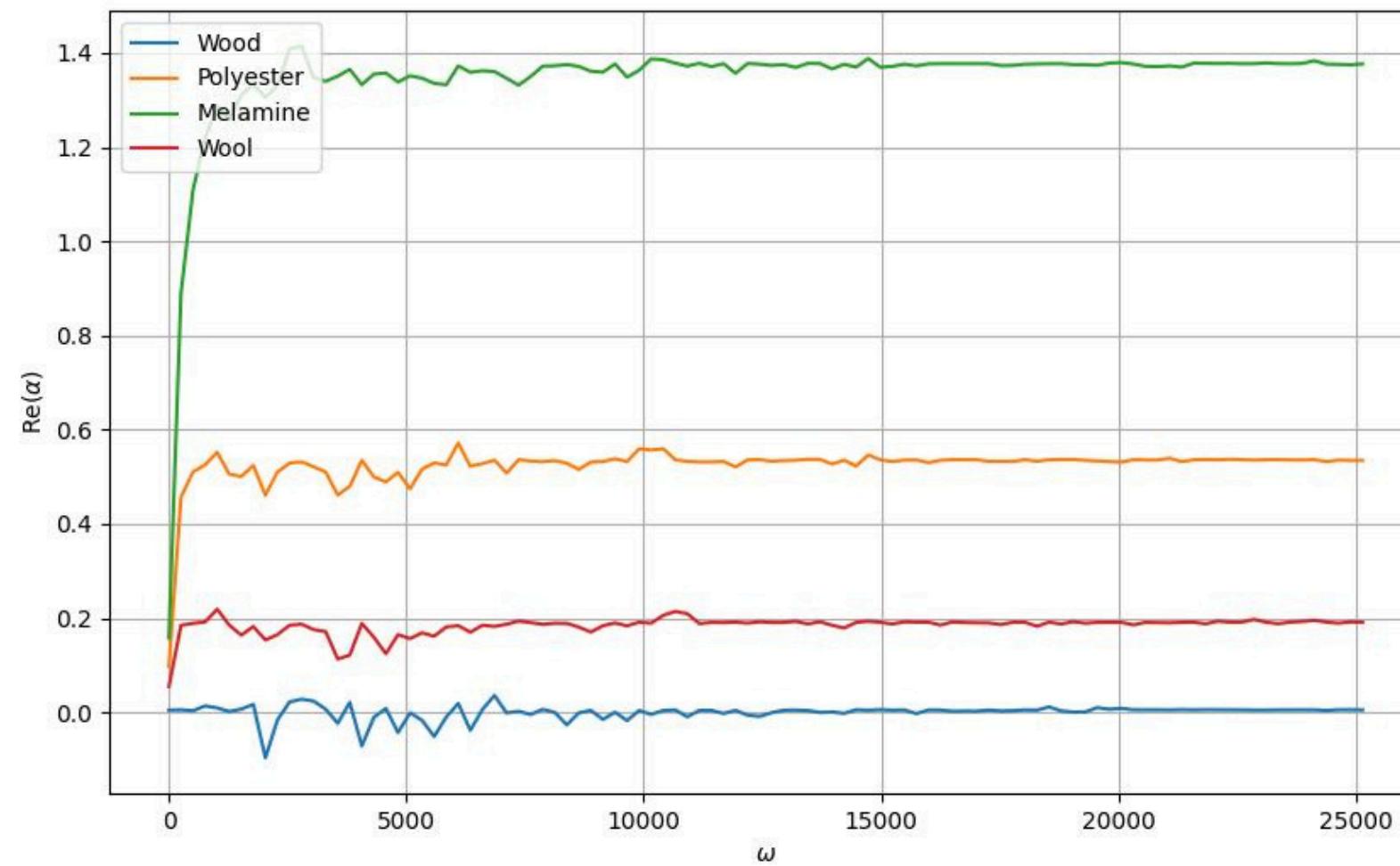
Laine



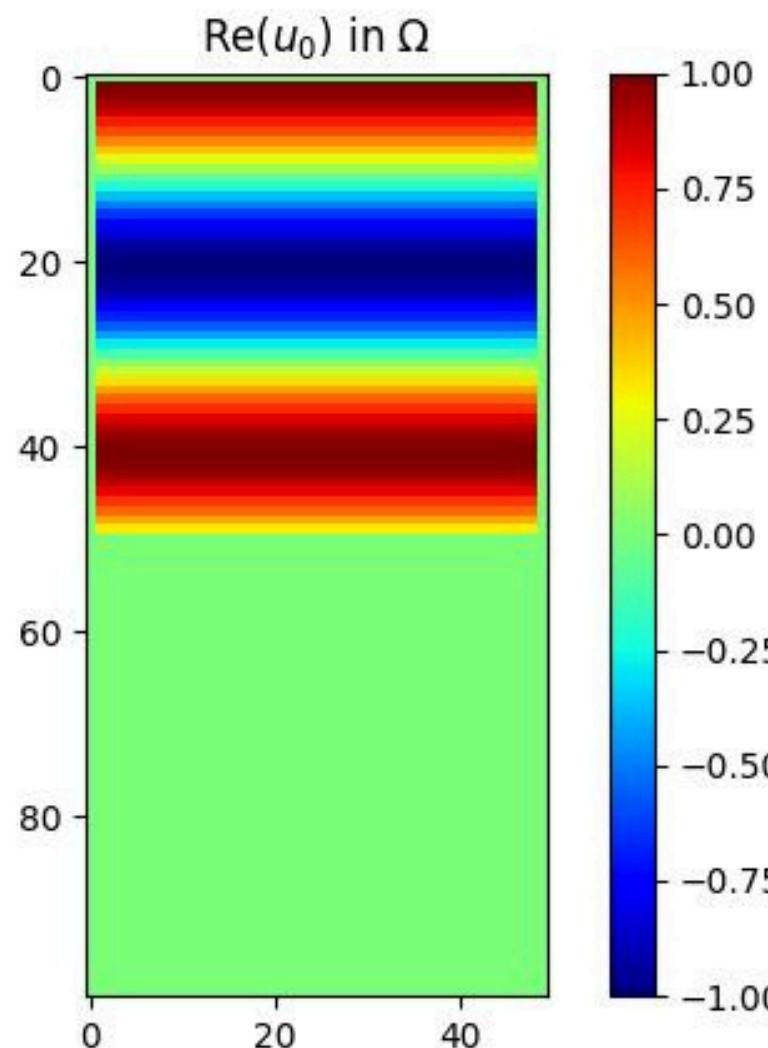
Mélamine

2- Modélisation numérique et résolution heuristique

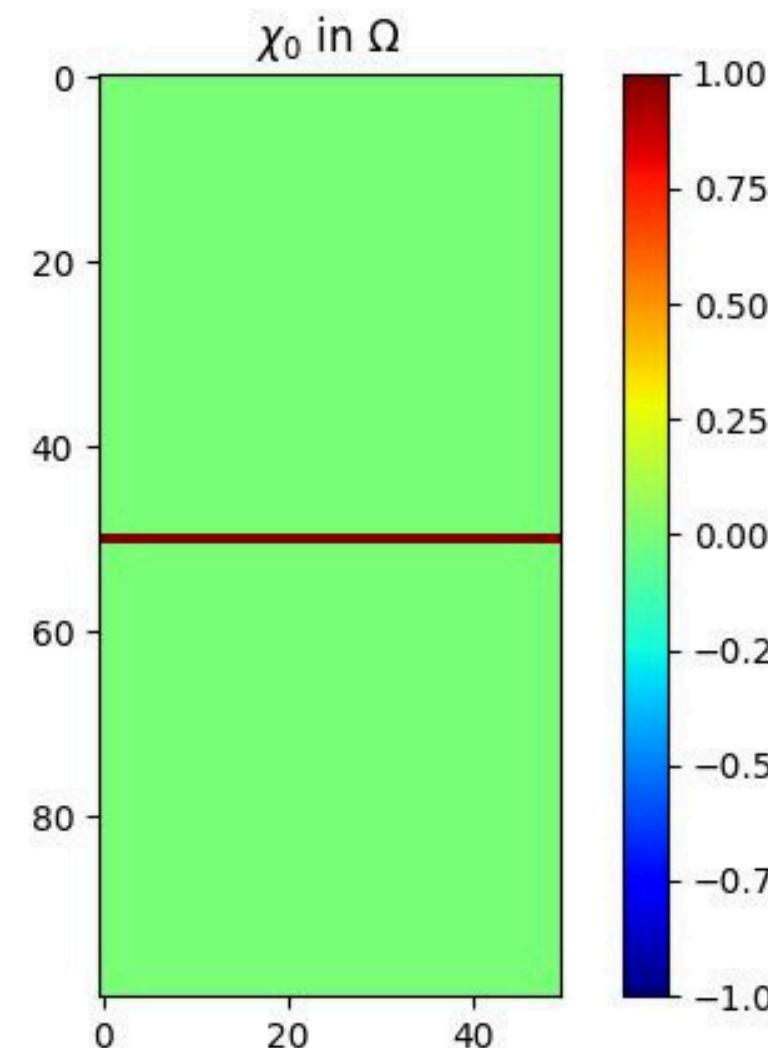
Parties réelle et imaginaire de alpha en fonction de omega pour les matériaux considérés



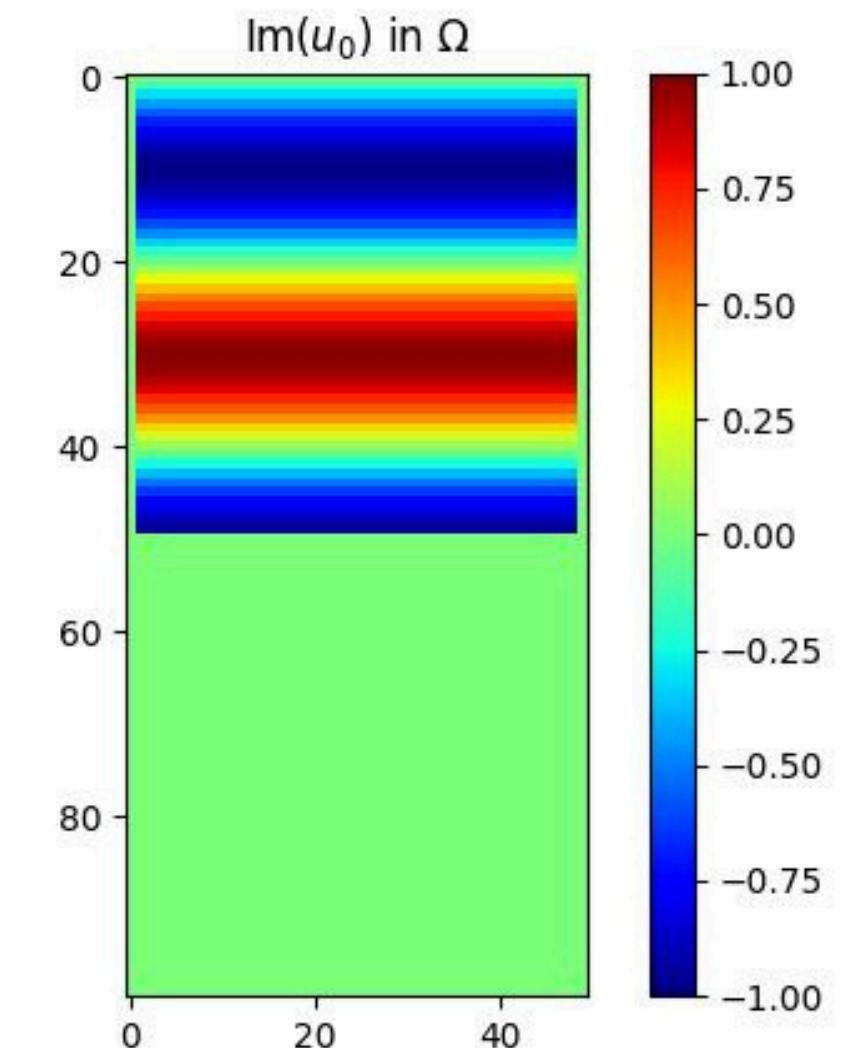
Etude de l'énergie



Partie réelle de u_0
 $f = 440 \text{ Hz (Niveau 0)}$

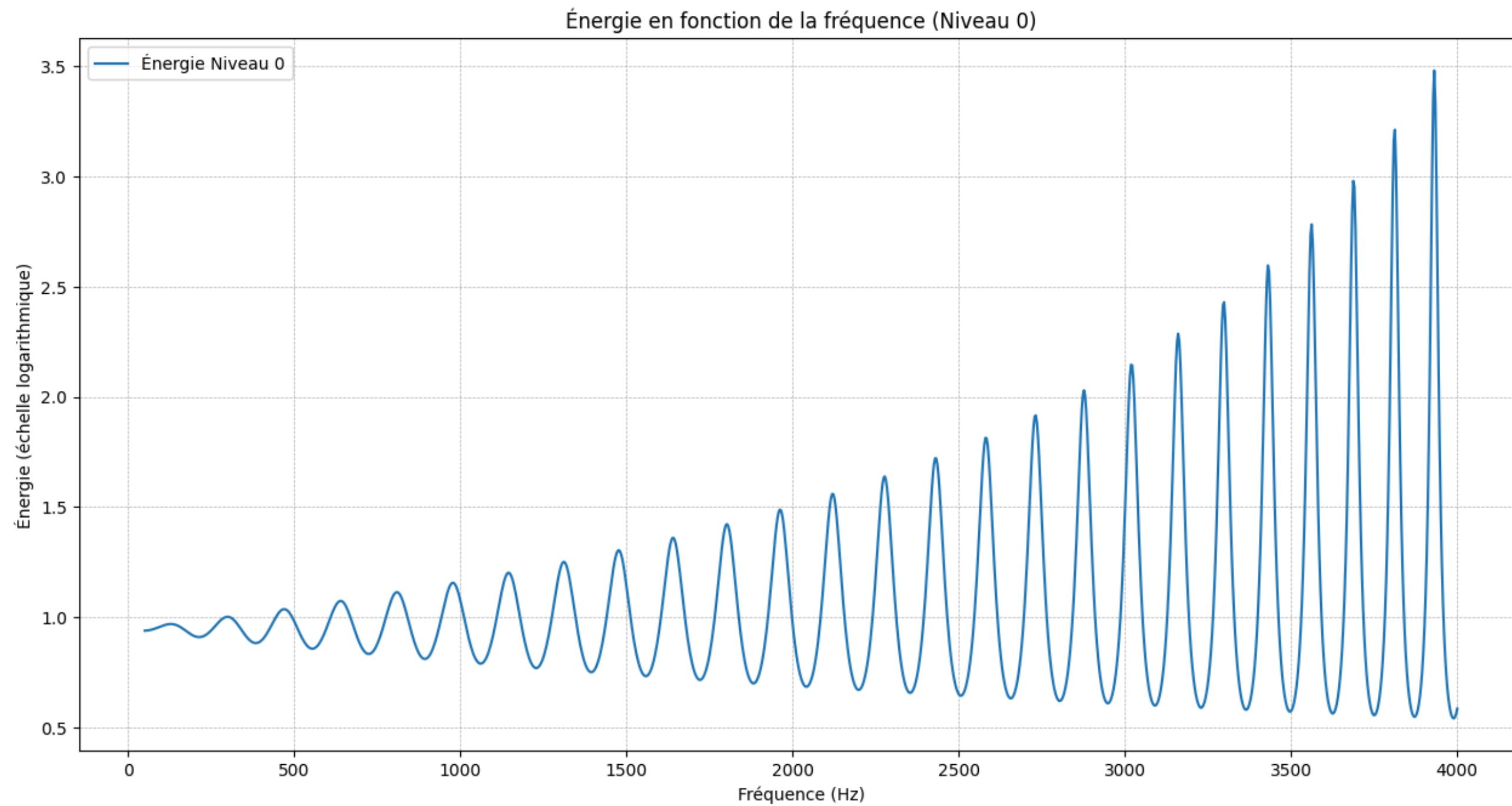


Mur totalement absorbant
(Niveau 0)



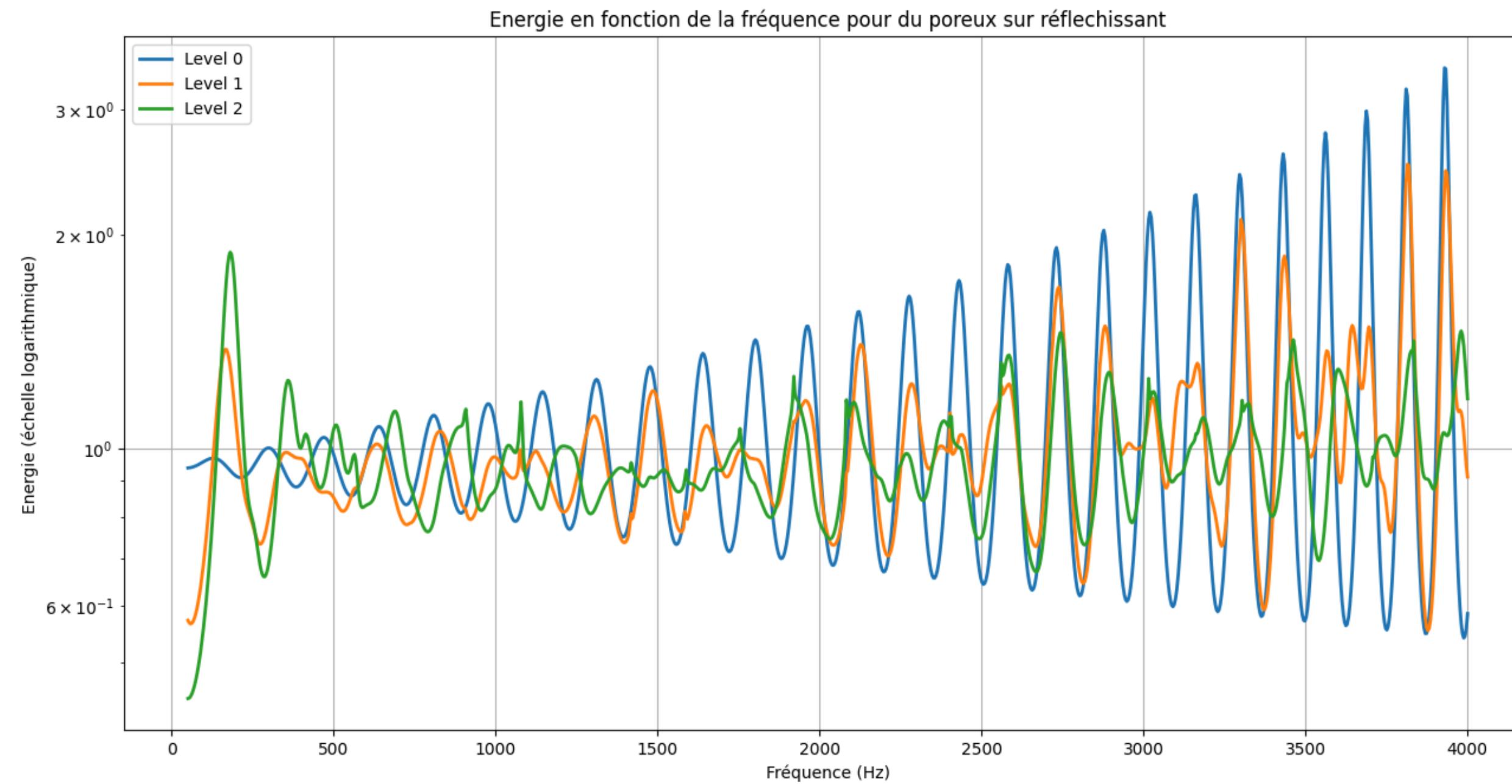
Partie imaginaire de u_0
 $f = 440 \text{ Hz (Niveau 0)}$

Pour le niveau 0



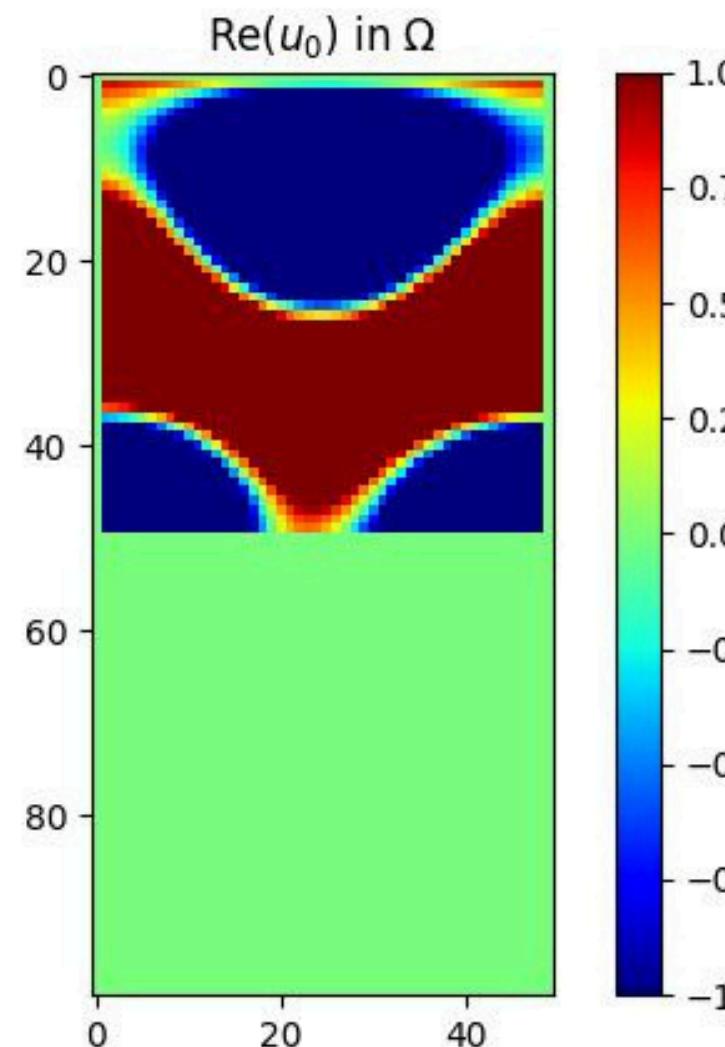
Variation de l'énergie pour une plage de fréquences

Superposition des niveaux 0, 1 et 2

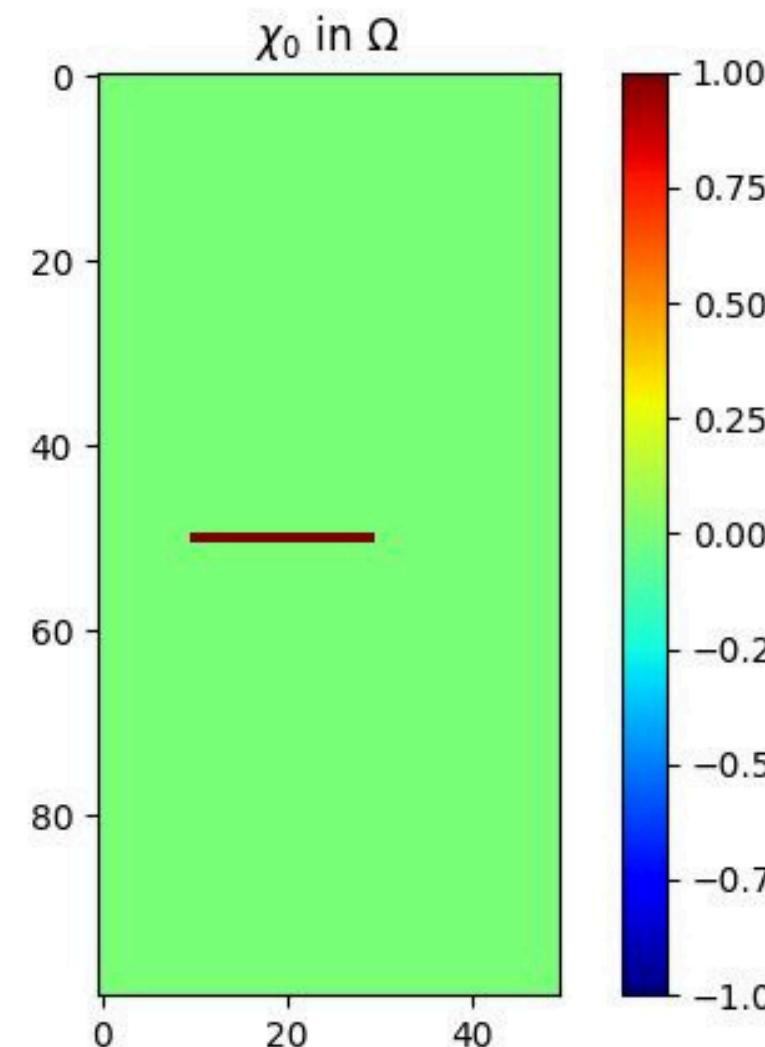


Variation de l'énergie pour une plage de fréquences

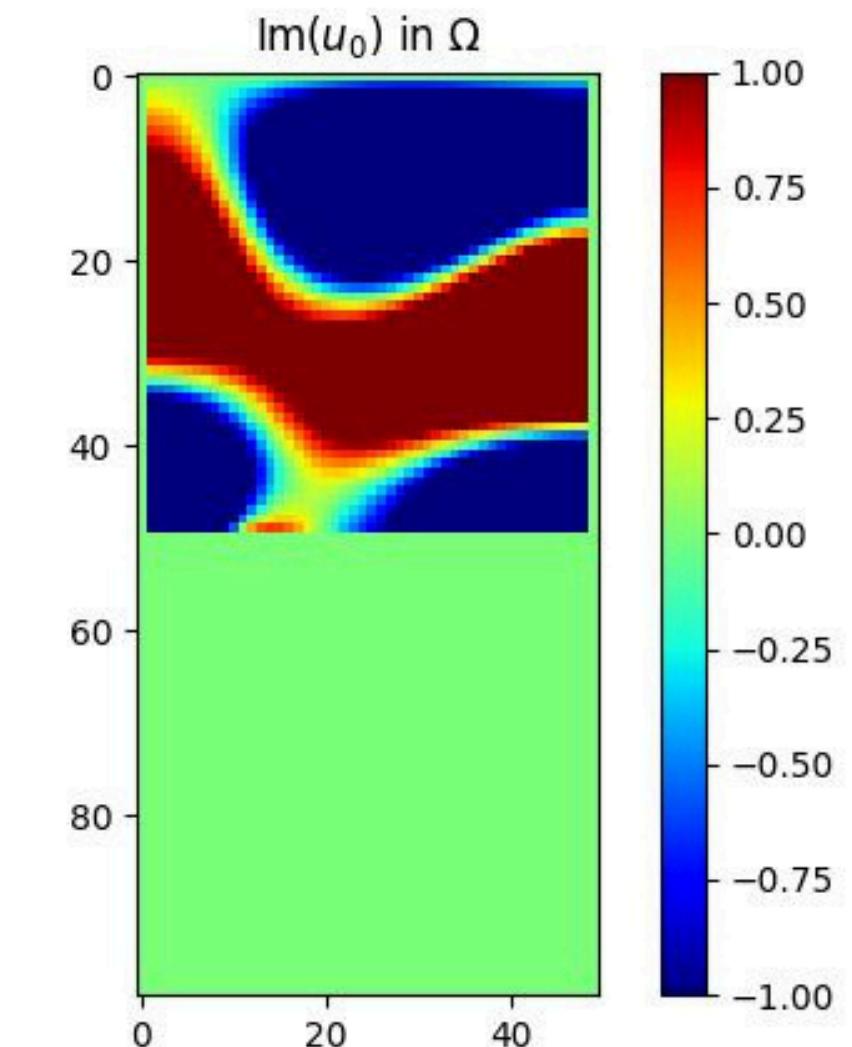
Poreux sur réflechissant



Partie réelle de u_0
 $f = 440$ Hz (Niveau 0)

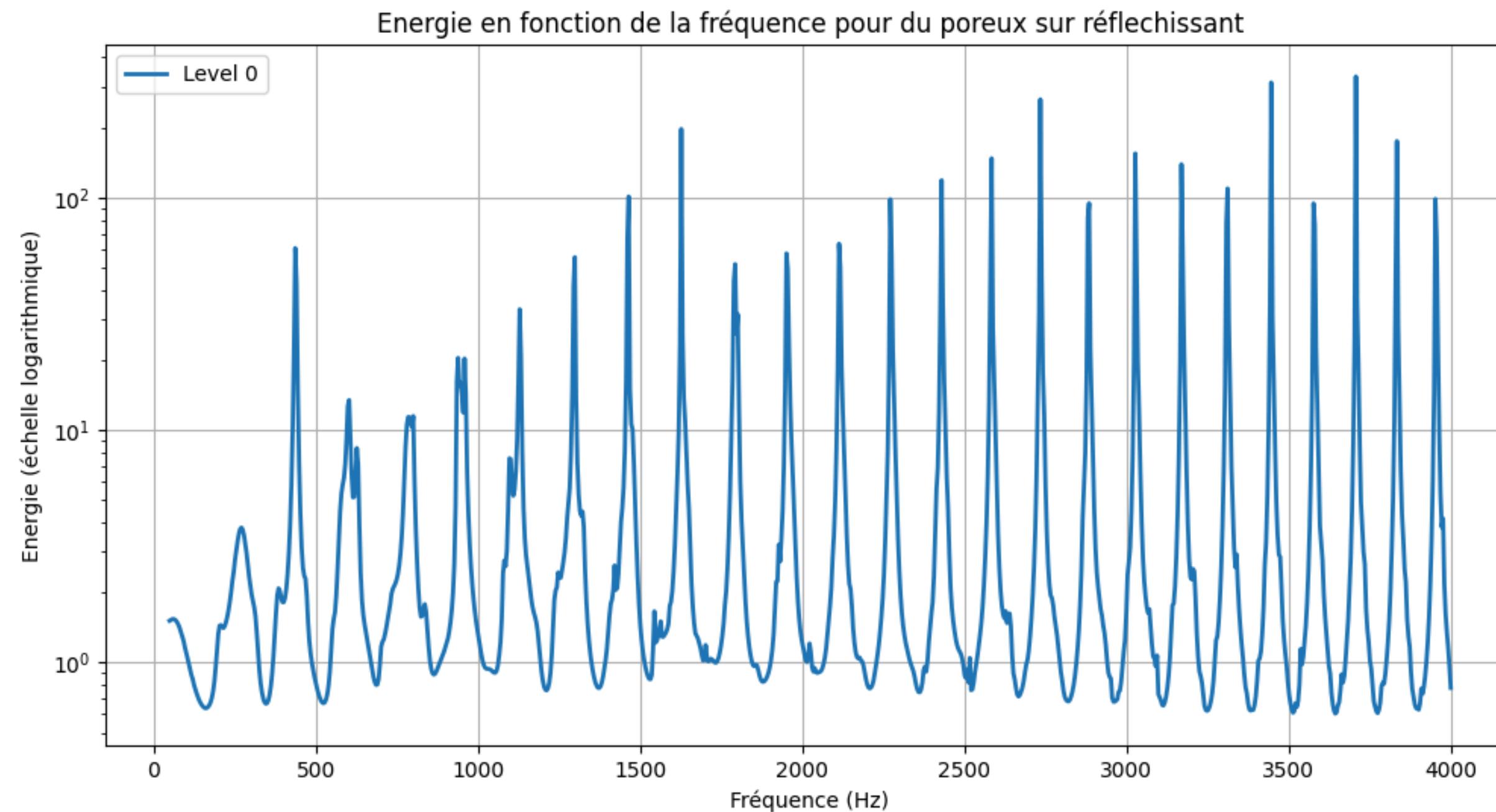


Poreux sur un mur réfléchissant
(Niveau 0)



Partie imaginaire de u_0
 $f = 440$ Hz (Niveau 0)

Tracé de l'énergie



Variations de la fréquence pour un mur réfléchissant
avec une partie en matériel poreux

3- Résolution par optimisation

Descente de Gradient

Objectif : optimiser la fonctionnelle J

On sait résoudre l'EDP d'Helmholtz pour n'importe quel terme source

Calcul de l'énergie :
$$J(\chi, u(\chi)) = \int_{\Omega} |u(\chi)|^2 d\mu$$

Calcul du problème adjoint et du gradient :
$$J'(\chi) = -Re(\alpha p(\chi) q(\chi))$$

Mise à jour :
$$\chi^{(k+1)} = \chi^{(k)} - \mu J'(\chi^{(k)})$$

3- Résolution par optimisation

Descente de Gradient

Compromis temps de calcul / Précision crucial dans les algos d'optimisation

Taux d'apprentissage et mise à jour

Définir des conditions d'arrêt

Montrer expérimentalement la stabilité
de l'algo : lancer 100x avec un
initialisation aléatoire

```
max énergies départ: 3.2616927059609213
min énergies départ: 0.9204707433729631
max énergies finale: 0.7607486435557832
min énergies finale: 0.5590539734768082
moyenne énergies départ: 1.503011773336126
moyenne énergies finales: 0.583598512586355
écart-type énergies départ: 0.4425917709556112
écart-type énergies finales: 0.04092397568974471
```

Projection intermédiaire

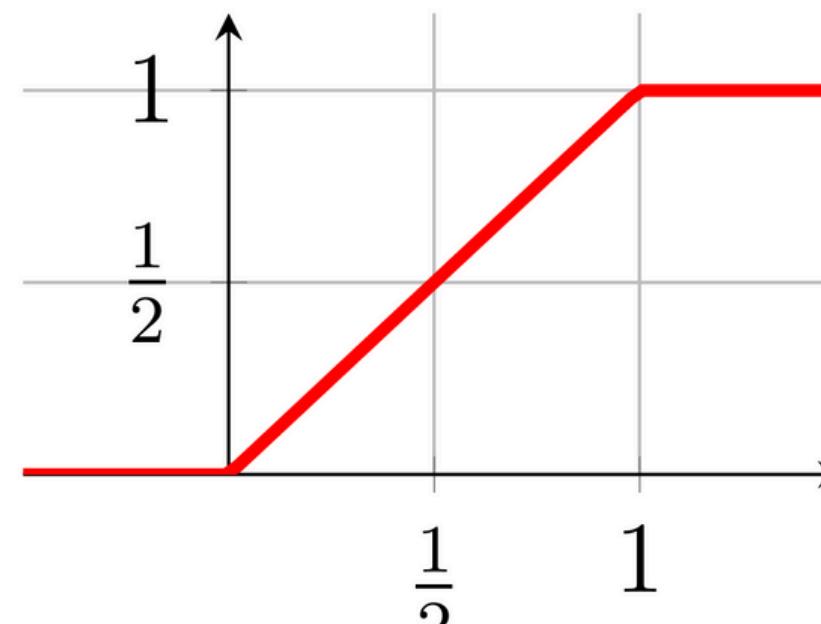
$$\chi^{(k+1)} = \chi^{(k)} - \mu J'(\chi^{(k)})$$

$$\mathcal{P} : (\Gamma_{abs} \rightarrow \mathbb{R}) \longrightarrow U_{ad}^*$$

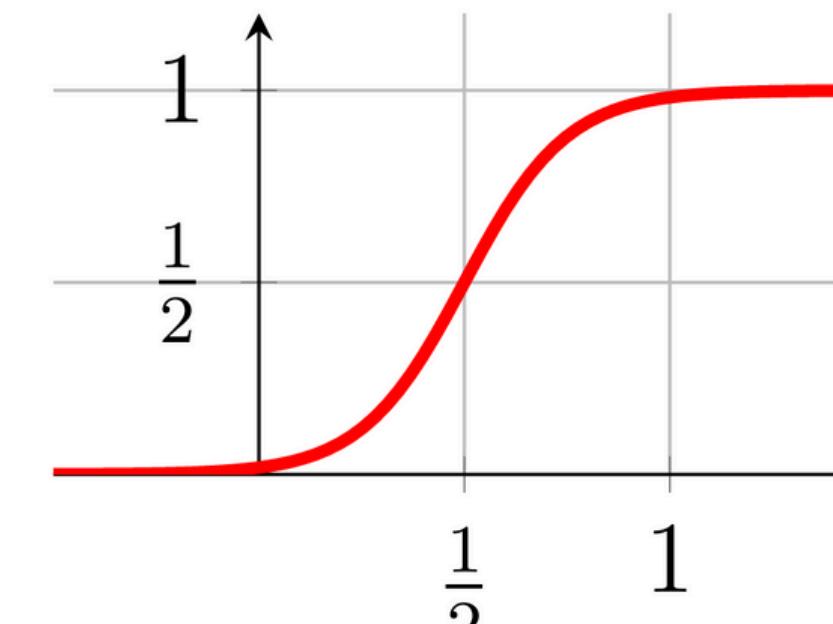
$$\chi \longmapsto \phi \circ (\chi + l_\chi)$$

Puis recherche dichotomique de l_χ

$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$ n'est pas unique !



Rectified linear

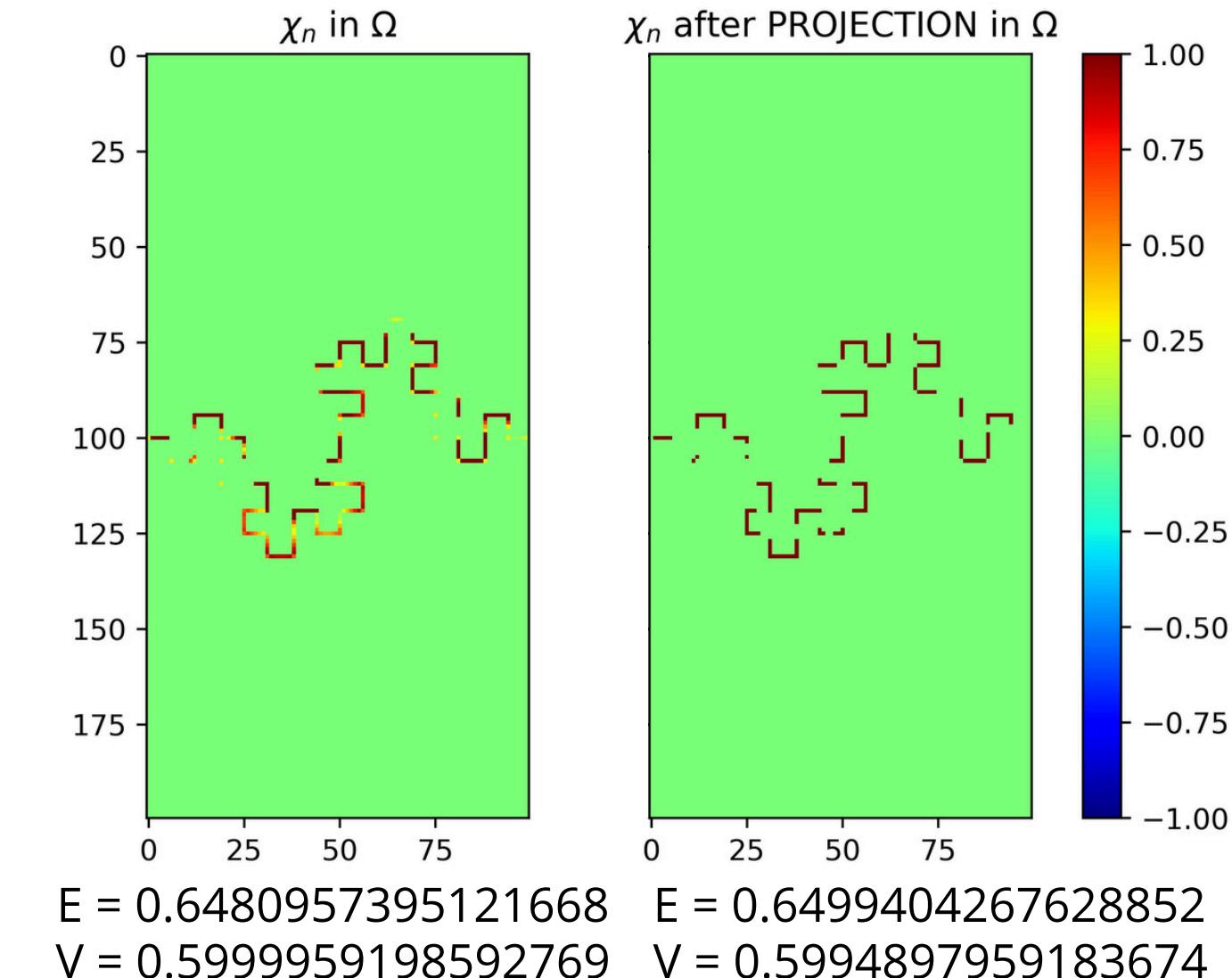
Sigmoïde $a = 8$

Projection finale

$$U_{ad}^* \longrightarrow U_{ad}$$

Algorithme

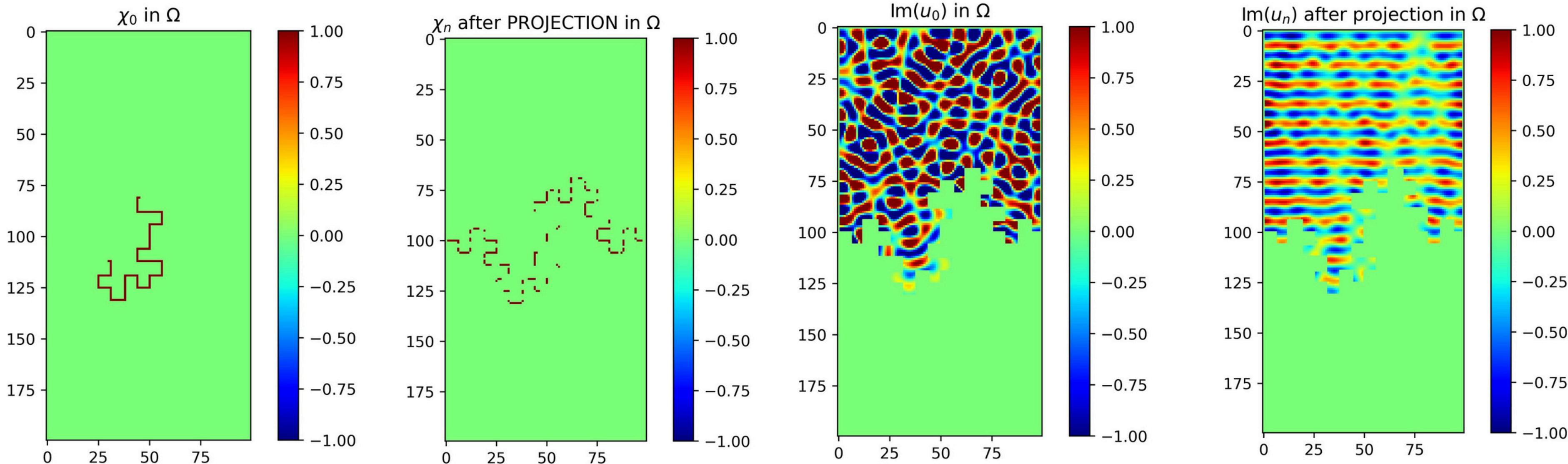
- Trier les valeurs de χ
- Mettre les plus grandes à 1
- S'arrêter quand V_{obj} est atteint
- Mettre les autres valeurs à 0



Exemple de projection finale pour $f = 1000\text{Hz}$ et une fractale de niveau 2

3- Résolution par optimisation

Exemple d'optimisation



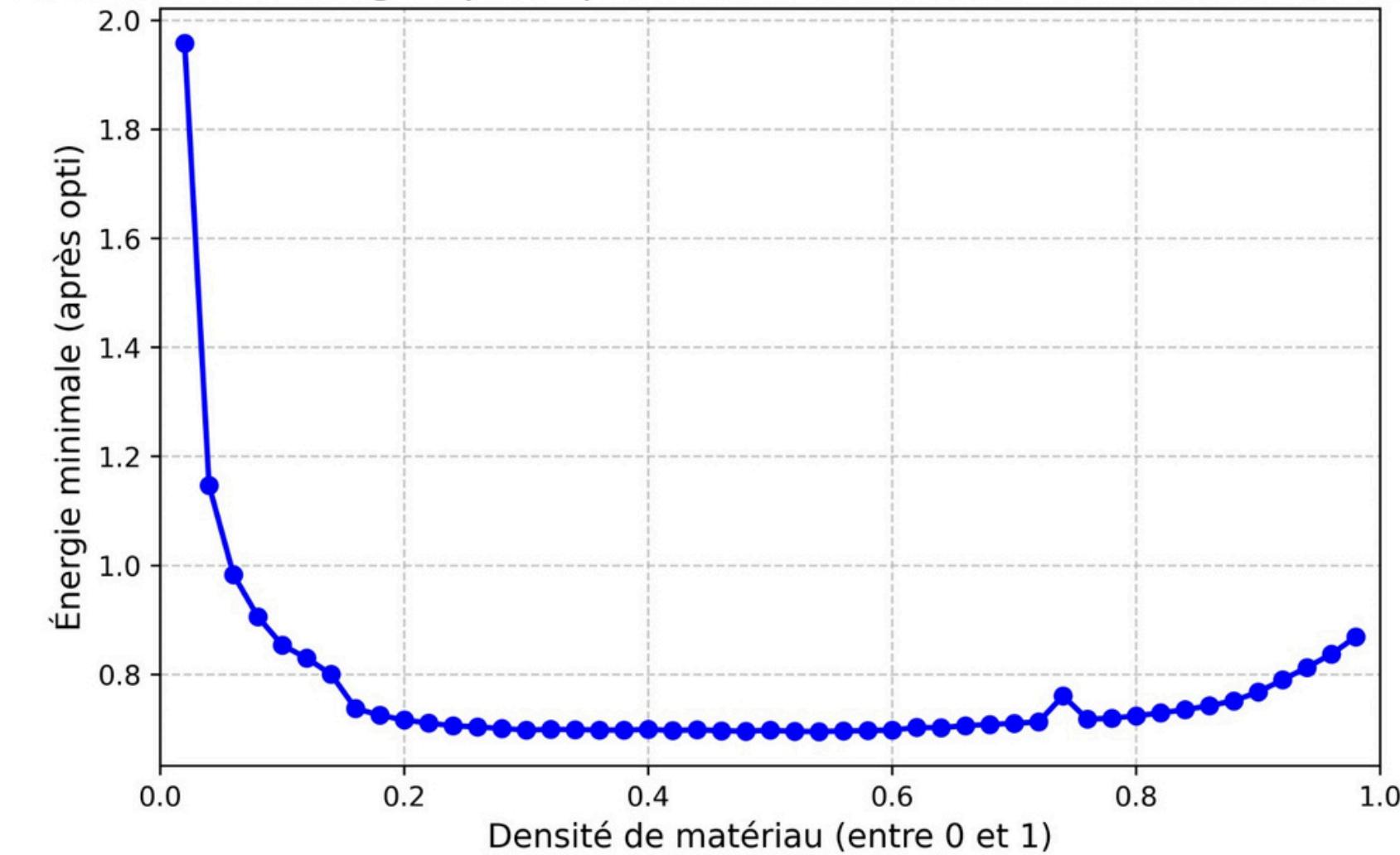
Solution optimisée avec $f = 440\text{Hz}$, $N = 100$, niveau de fractale = 2, Beta = 0.5

On constate que l'énergie a été atténuée

Résultats

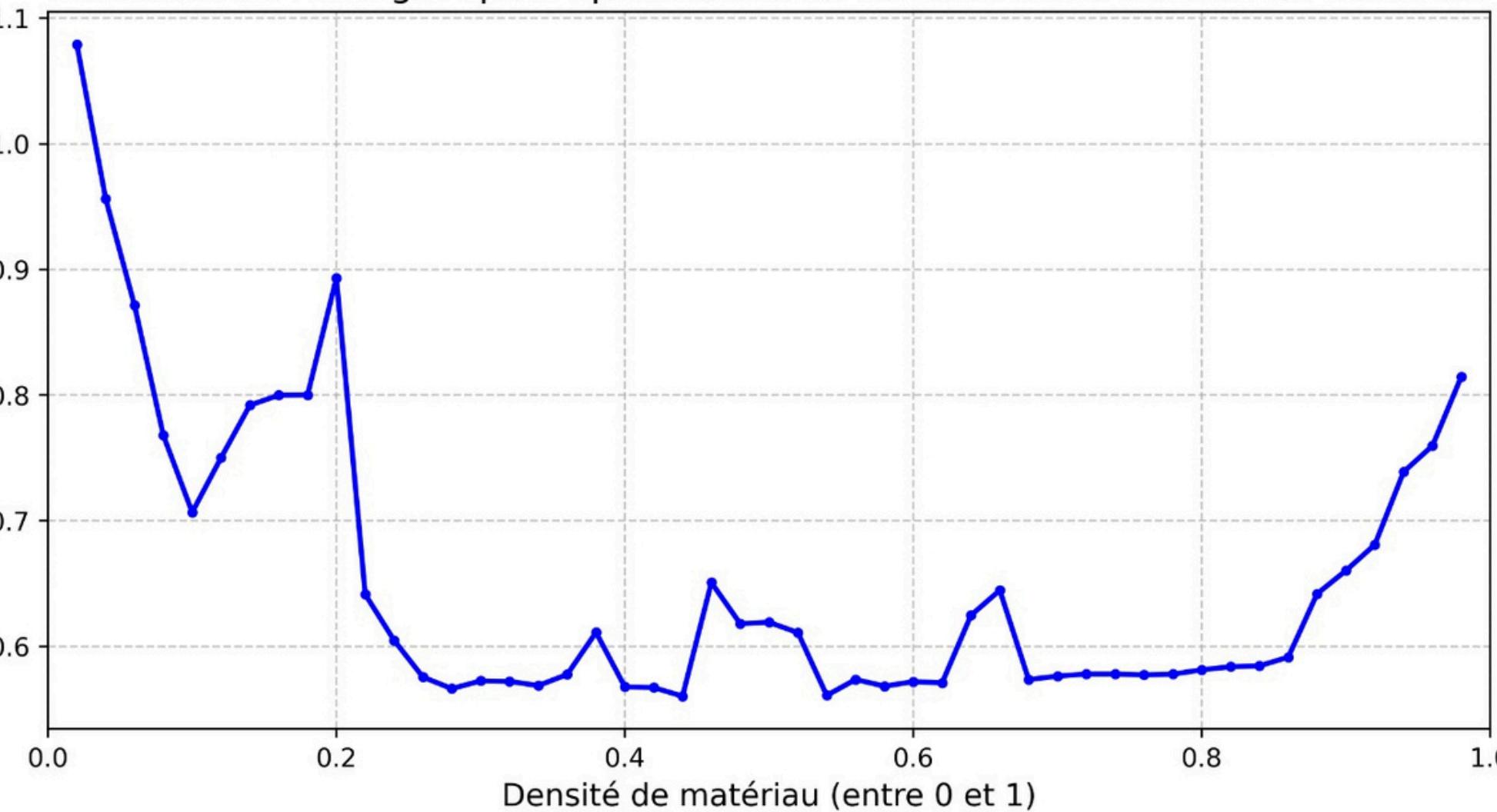
Quelle quantité de matière optimale

Évolution de l'énergie après optimisation en fonction de la densité de matériau



Pour une fractale de niveau 1

Évolution de l'énergie après optimisation en fonction de la densité de matériau

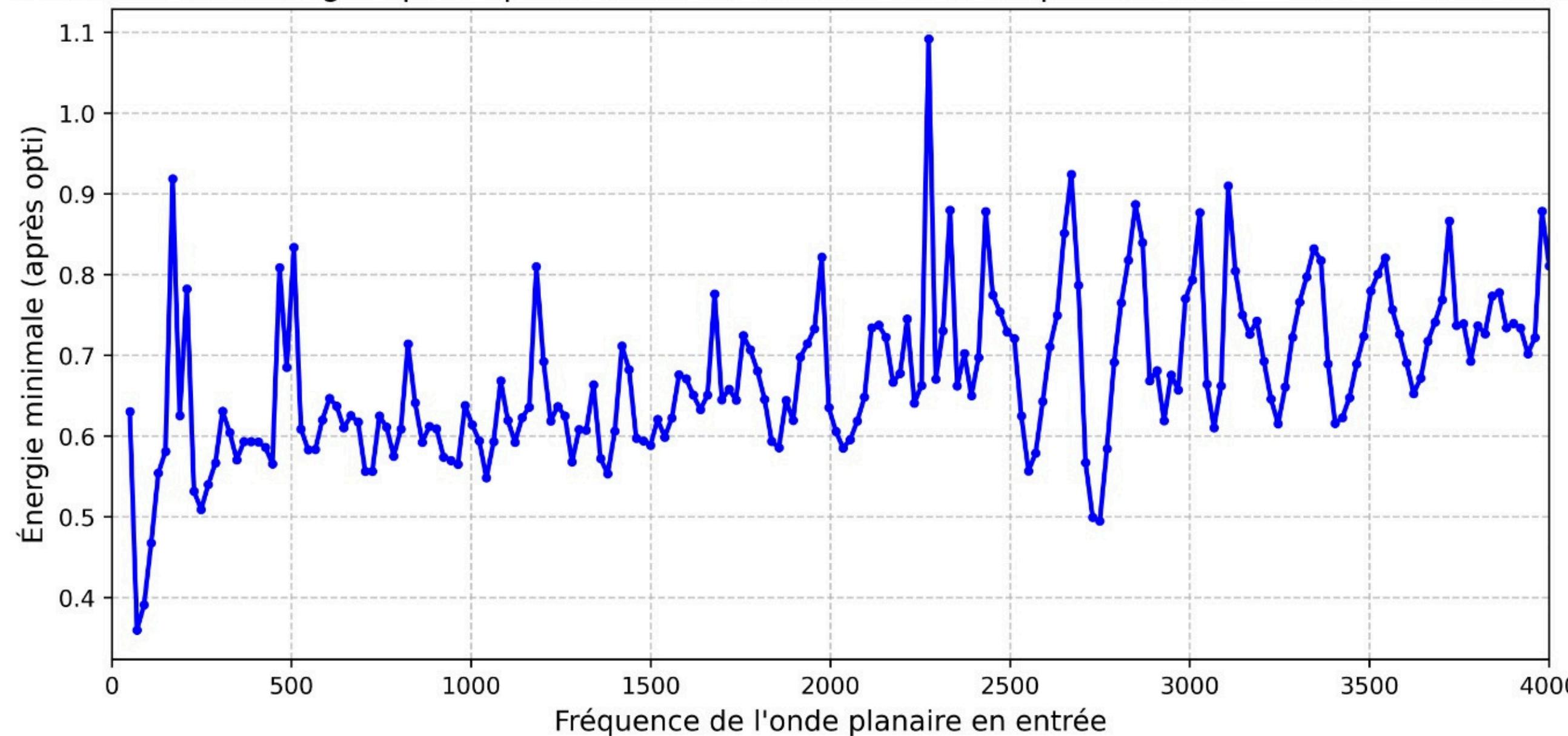


Pour une fractale de niveau 2

Résultats

On sait optimiser la forme pour une fréquence donnée

Évolution de l'énergie après optimisation en fonction de la fréquence. beta = 0.5, N=100, level = 2



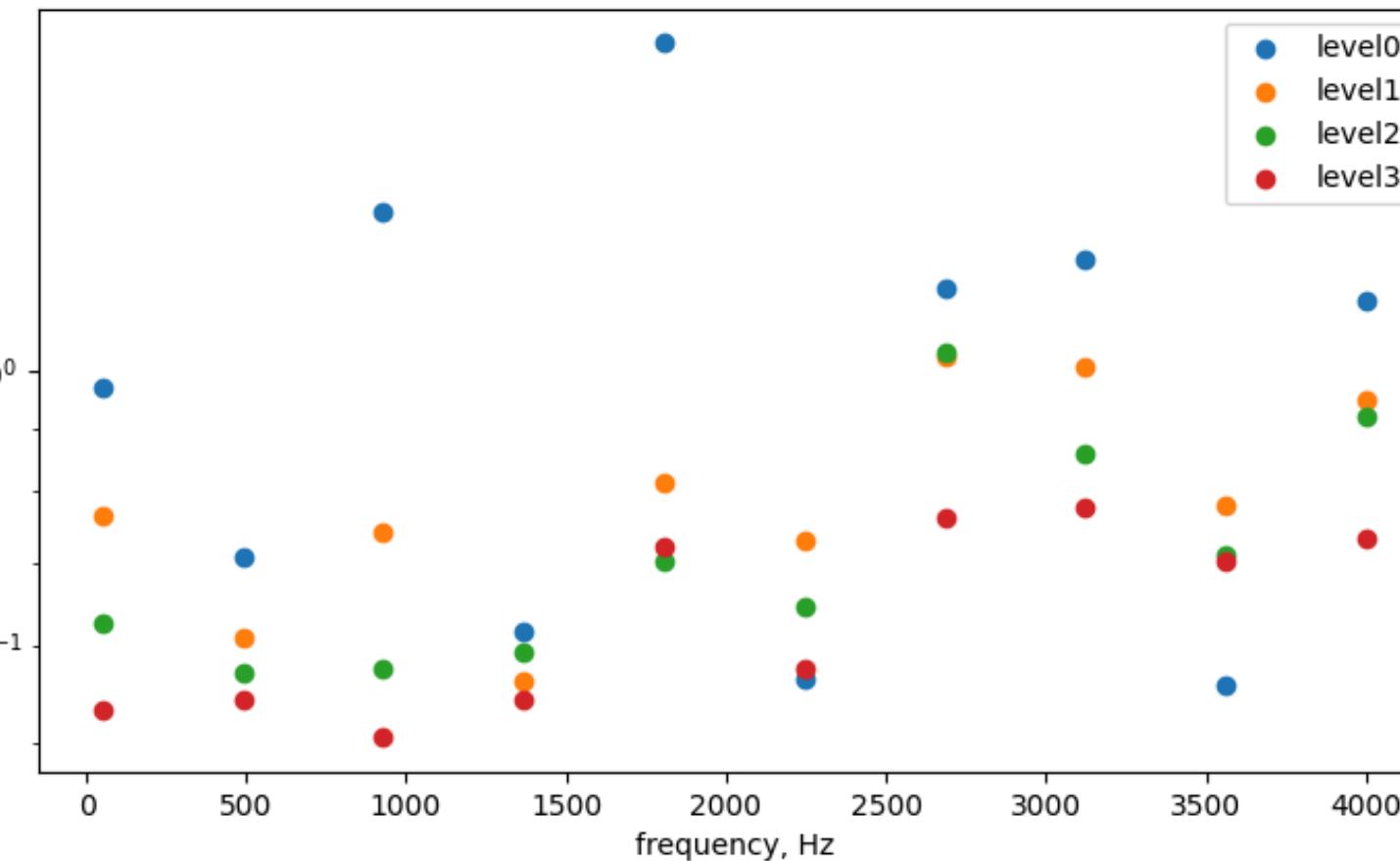
Pour une fractale de niveau 2

On retrouve des maxima mais ils sont plus faibles en moyenne

Résultats

Quel niveau de fractale est le plus rentable en dépense de matériau ?

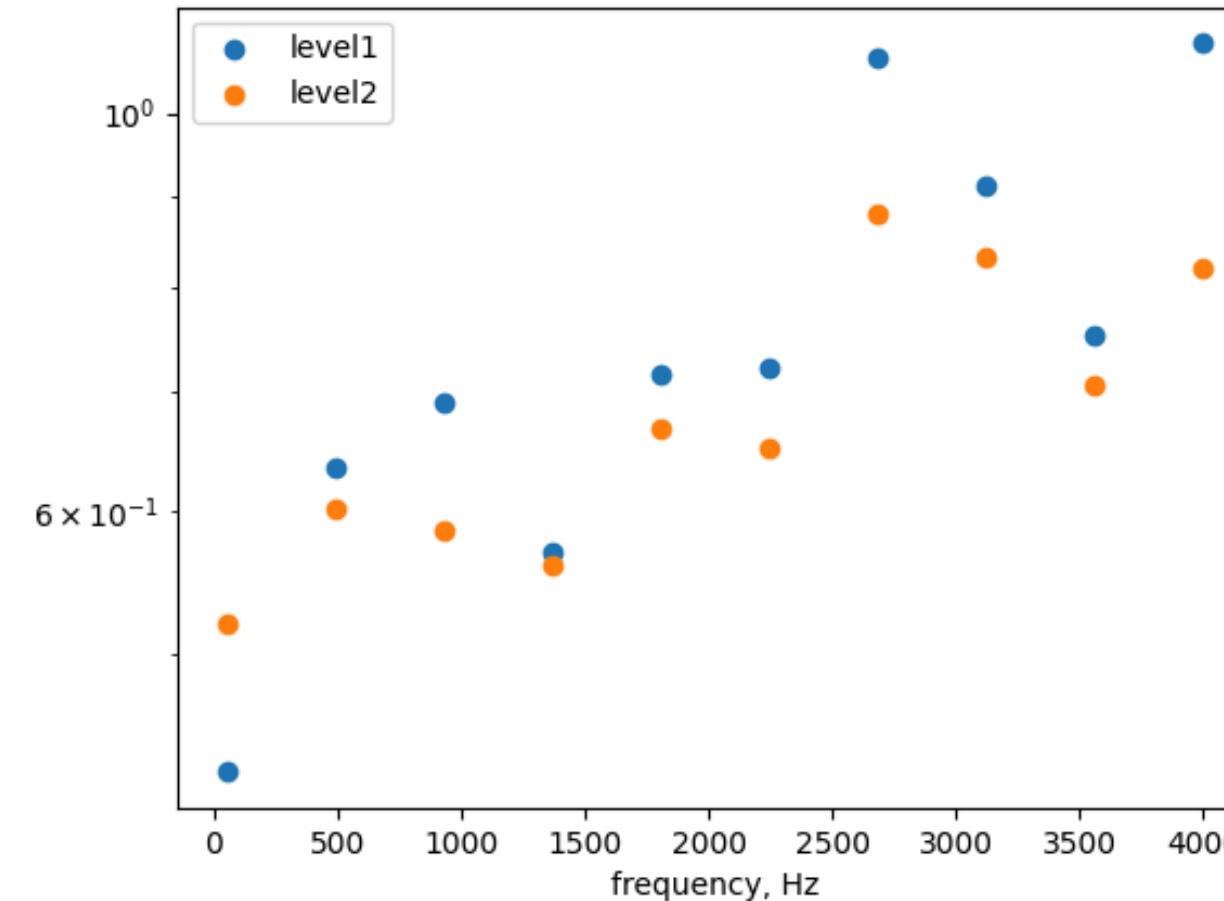
log-energy after optimization



Performance des différents niveaux de fractale pour un budget de 0.6

- niveau 0 : 1.01522383
- niveau 1 : 0.79871415
- niveau 2 : 0.72397912
- niveau 3 : 0.63928515

Moyennes :



Performance des différents niveaux de fractale pour un budget de 1.4

- niveau 1 : 0.75935235
- niveau 2 : 0.68282636

Conclusion de l'étude

Matériaux à utiliser



Densité de matériau à utiliser :

Beta = 0.3

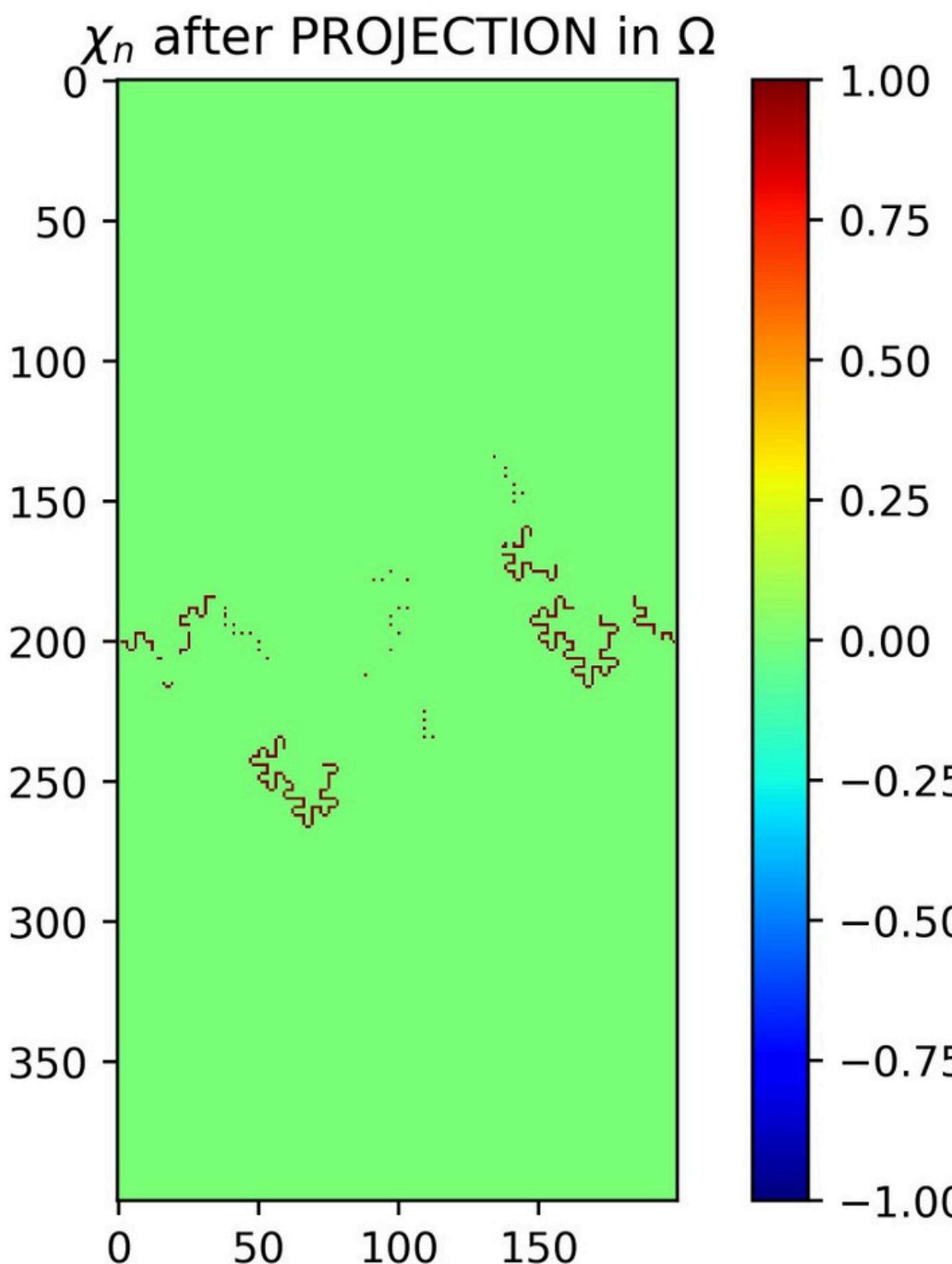
Niveau de fractale

Mélamine

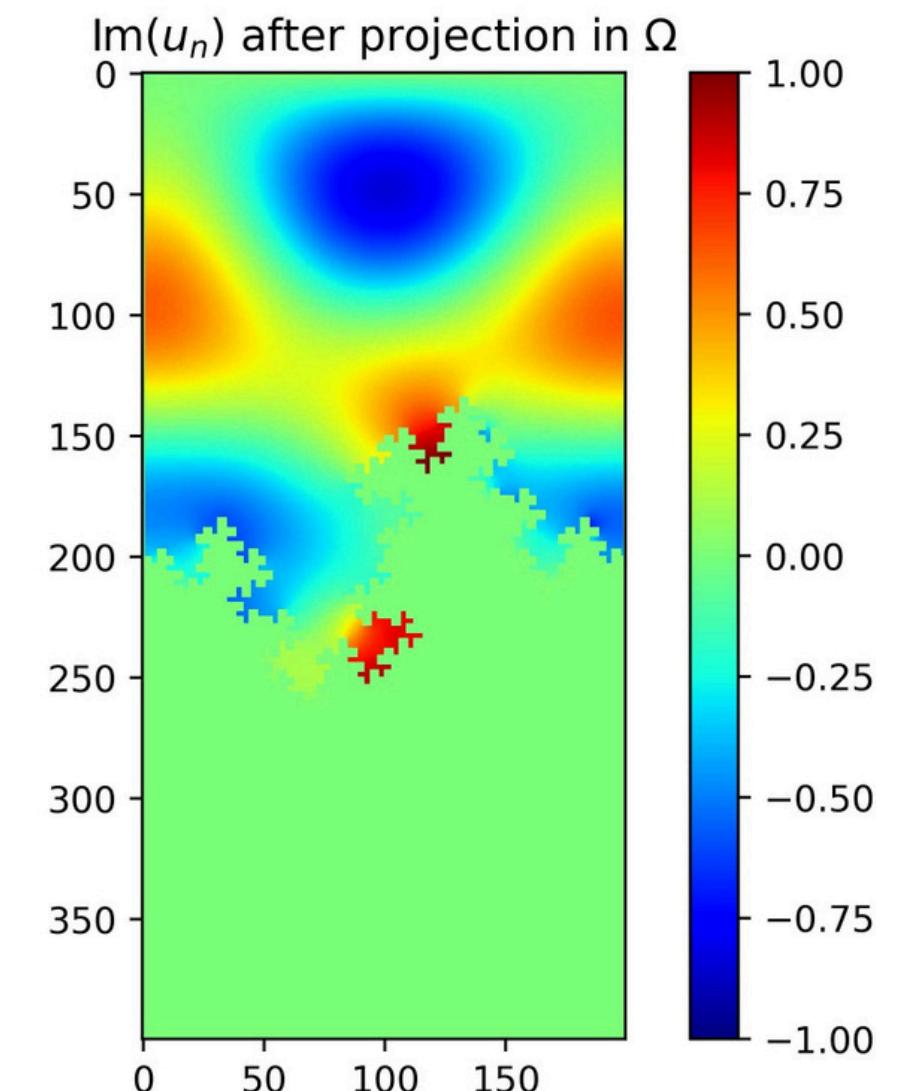
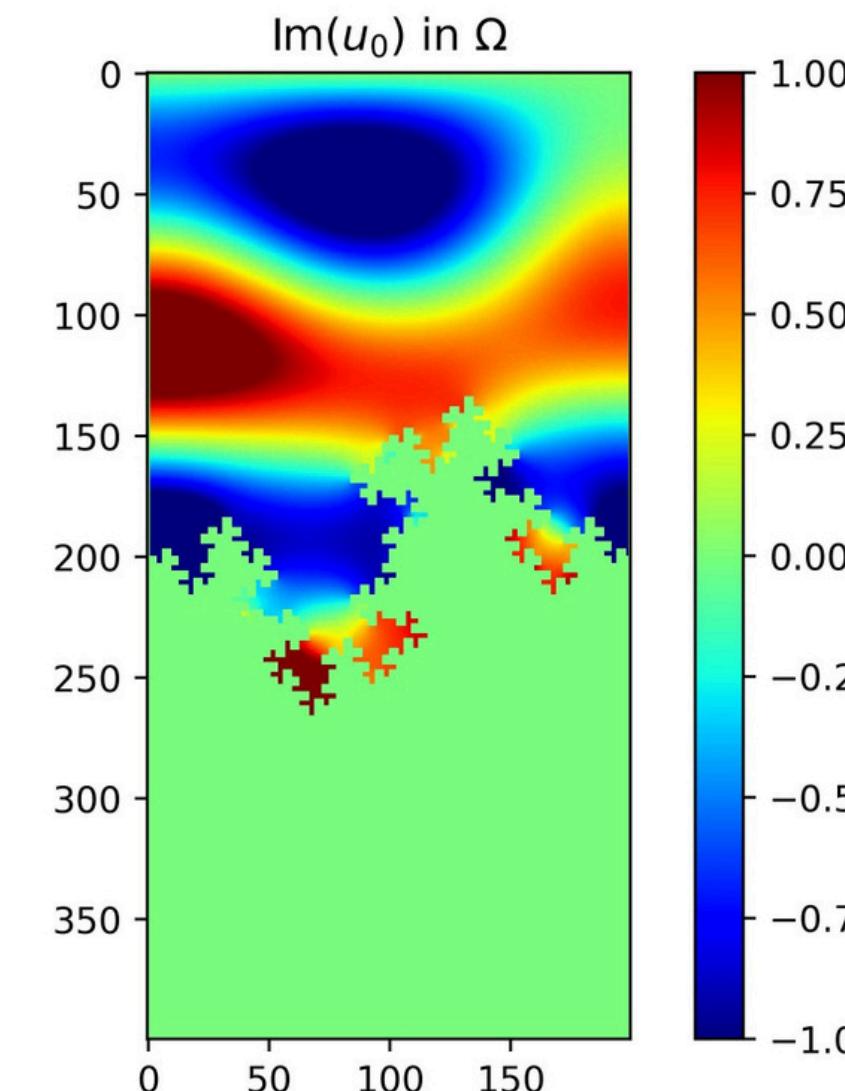
Compromis -> fractal_level = 3

Conclusion de l'étude

Forme géométrique



Post-Atténuation



Merci!

Bibliographie

Sons de climatisation : pixabay.com

Son de bureau : sound-fishing.net

Son de voix et imprimante : lasonotheque.org