

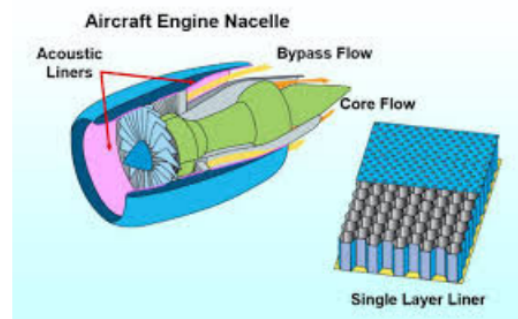
---

# Rapport EI : Contrôle de la pollution acoustique intérieure

---

Ziyad Boumelki  
Quentin Fretault  
Anatole Dulon  
Vital De Nodrest  
Younes-Jihad Boumoussou  
Ayoub Elmoussaoui

November 2024



# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Etat de l'art</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Modélisation du problème</b>	<b>5</b>
3.1	Présentation du modèle . . . . .	5
3.2	Domaines . . . . .	5
3.3	Équation gouvernante . . . . .	6
3.4	Condition d'absorption . . . . .	6
3.5	Equation aux dérivées partielles du système . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Formalisme du problème d'optimisation</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Etude théorique</b>	<b>7</b>
5.1	Nouvelle EDP . . . . .	8
5.2	Formulation variationnelle réelle . . . . .	9
5.3	Introduction du Lagrangien . . . . .	11
5.4	Problème Adjoint . . . . .	11
5.5	Système Adjoint . . . . .	12
5.6	Dérivée de $J$ par rapport à $\chi$ . . . . .	13
5.7	Conclusion . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Etude numérique</b>	<b>15</b>
6.1	Positionnement du problème . . . . .	15
6.1.1	Problème physique, et hyophèses . . . . .	15
6.1.2	Implémentation numérique . . . . .	16
6.1.3	Formulation du problème d'optimisation . . . . .	17
6.2	Compromis et Choix à faire : Nature du matériau . . . . .	18
6.2.1	Matériaux considérés et comparaison des performances . . . . .	18
6.2.2	Choix du matériau . . . . .	19
6.3	Méthode de descente de gradient numérique . . . . .	19
6.3.1	Principe . . . . .	20
6.3.2	Implémentation et application à notre situation . . . . .	20
6.4	Etude énergétique . . . . .	22
6.4.1	Dérivée de l'énergie . . . . .	22
6.4.2	Étude de l'énergie : Modèle du mur entièrement absorbant de forme plane . . . . .	23
6.4.3	Étude de l'énergie : Autres formes du modèle du mur entièrement absorbant . . . . .	23
6.4.4	Optimisation fréquentielle (Fréquences représentant des maximums d'énergie) . . . . .	24
6.4.5	Optimisation de l'énergie multifréquentielle . . . . .	24
6.4.6	Optimisation de la quantité de matériaux poreux . . . . .	25
6.5	Conclusion de la partie numérique : Produit à développer . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Annexe</b>	<b>27</b>

# 1 Introduction

Dans un monde de plus en plus urbanisé et industrialisé, la gestion du bruit et de la pollution acoustique est devenue une priorité dans les espaces publics et privés. La pollution sonore, qu'elle provienne de bureaux, de salles de concert ou de moteurs d'avions, a un impact significatif sur la santé et le bien-être des individus. Face à ces enjeux, la réduction et le contrôle du bruit intérieur représentent un défi scientifique et technique de premier ordre. Ce rapport s'inscrit dans cette perspective, en explorant les méthodes d'optimisation pour minimiser l'énergie acoustique dans divers environnements.

L'objectif principal de ce projet est de développer des solutions acoustiques adaptées, notamment par l'optimisation de la distribution de matériaux poreux sur des surfaces. Ces matériaux, lorsqu'ils sont judicieusement répartis, permettent d'absorber efficacement le son et de réduire les nuisances acoustiques dans des environnements comme les amphithéâtres, les bureaux ou encore les réacteurs d'avions. L'approche retenue se base sur des méthodes numériques pour modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation acoustique en utilisant des conditions aux limites adaptées, telles que les conditions de Dirichlet et de Robin.

Au cours de ce travail, différentes configurations de matériaux absorbants sont testées afin de déterminer celles qui offrent la meilleure performance dans des plages de fréquences spécifiques. L'utilisation de programmes informatiques, notamment pour résoudre l'équation de Helmholtz, permet d'approcher une solution optimale en termes de distribution des matériaux. Ce rapport vise ainsi à présenter les résultats obtenus et à évaluer l'efficacité des solutions proposées pour le contrôle de la pollution acoustique dans les espaces intérieurs.

## 2 Etat de l'art

Les avancées dans le domaine du contrôle acoustique intérieur se concentrent sur l'optimisation des matériaux absorbants et des méthodes numériques pour réduire efficacement les nuisances sonores. Les **matériaux poreux et perforés**, comme les mousses de mélamine, sont couramment utilisés pour absorber les ondes sonores dans des environnements tels que les bureaux, amphithéâtres et moteurs d'avions. Des recherches récentes explorent des configurations optimales de ces matériaux pour maximiser l'absorption en fonction des fréquences spécifiques du bruit.

La **modélisation numérique** repose principalement sur l'équation de Helmholtz et les conditions aux limites adaptées (Dirichlet, Neumann, Robin) pour simuler la propagation des ondes sonores et optimiser la distribution des matériaux absorbants. Les techniques d'optimisation par descente de gradient et d'autres méthodes numériques permettent d'adapter ces matériaux aux environnements complexes.

Dans le secteur **aéronautique**, l'optimisation des doublures acoustiques (acoustic liners) dans les moteurs permet de réduire les bruits de ventilateur et de turbine, contribuant au respect des normes environnementales. Les recherches récentes s'orientent vers des solutions de contrôle adaptatif, qui permettent aux matériaux de s'ajuster en temps réel pour maximiser l'efficacité acoustique.

Ainsi, les progrès en matériaux, modélisation et optimisation offrent des solutions prometteuses pour minimiser la pollution sonore dans les espaces intérieurs.

### 3 Modélisation du problème

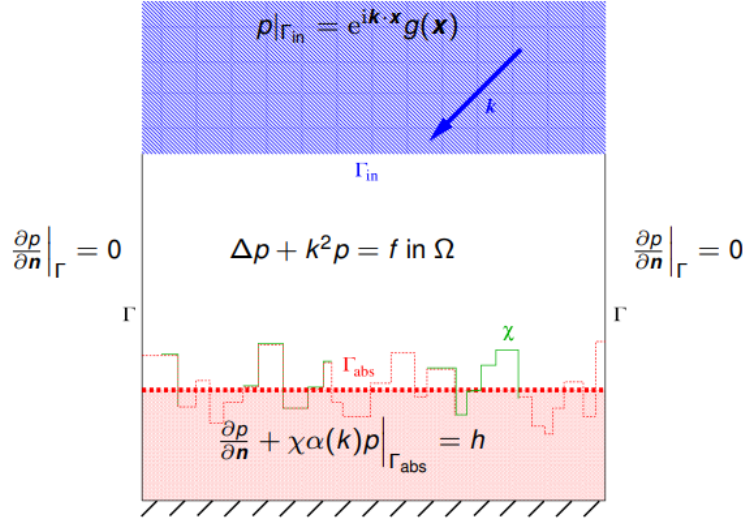


Figure 1: Modèle de problème pour des doublures acoustiques avec  $\partial\Omega = \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{abs}} \cup \Gamma$

#### 3.1 Présentation du modèle

Ce modèle représente un problème d'optimisation acoustique pour des doublures acoustiques (acoustic liners) avec différentes conditions aux limites dans un domaine  $\Omega$ , délimité par des frontières spécifiques  $\Gamma$ . Voici une description simplifiée :

#### 3.2 Domaines

- La partie supérieure est la frontière d'entrée ( $\Gamma_{\text{in}}$ ) avec une condition d'entrée de Dirichlet non homogène (onde incidente) représentée par  $p|_{\Gamma_{\text{in}}} = e^{ik \cdot x} g(x)$ , où  $k$  est le vecteur d'onde.
- La partie inférieure représente une région absorbante ( $\Gamma_{\text{abs}}$ ) où l'absorption du son est modulée par une fonction de distribution  $\chi$  et un coefficient d'absorption  $\alpha(k)$ . Avec La fonction caractéristique  $\chi$  donne la distribution de la couche absorbante sur la frontière  $\Gamma_{\text{abs}}$  :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si du matériau poreux est présent en } \mathbf{x}, \\ 0, & \text{si aucun matériau poreux n'est présent en } \mathbf{x}. \end{cases}$$

avec la condition que  $0 < \beta = \int_{\Gamma_{\text{abs}}} \chi dS < \int_{\Gamma_{\text{abs}}} dS$ .

- $\alpha(k) \in \mathbb{C}$  quant à lui représente le coefficient d'absorption

- Les côtés sont des frontières réfléchissantes ( $\Gamma$ ) avec des conditions de Neumann homogènes  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ .

### 3.3 Équation gouvernante

Dans le domaine  $\Omega$ , l'équation d'Helmholtz modifiée,  $\Delta p + k^2 p = f$ , modélise la propagation des ondes acoustiques, où  $p$  est la pression acoustique et  $f$  une source interne. Dans notre cas, on va supposer qu'il n'y a pas de source, ce qui signifie  $f = 0$

### 3.4 Condition d'absorption

Sur la frontière absorbante  $\Gamma_{\text{abs}}$ , la condition est donnée par  $\frac{\partial p}{\partial n} + \chi \alpha(k)p = h$ , ce qui représente une interface absorbante qui minimise les réflexions en dissipant l'énergie sonore. On va considérer  $h = 0$  pour se retrouver alors avec une condition de Robin homogène sur ce bord.

### 3.5 Equation aux dérivées partielles du système

L'EDP du système est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k^2 p = 0, & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0, & \text{sur la frontière réfléchissante } \Gamma \\ p = g, & \text{sur la frontière d'entrée } \Gamma_{\text{in}} \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \chi \alpha(k)p = 0, & \text{sur la frontière absorbante } \Gamma_{\text{abs}}. \end{array} \right. \quad (1)$$

## 4 Formalisme du problème d'optimisation

- La solution de l'EDP  $p$  dépend évidemment de  $\chi$ , elle sera notée alors  $u(\chi)$ . L'énergie du système  $J$  est ainsi définie par :  $J(\chi) = \int_{\Omega} |u(\chi)|^2 dx$

- Notre but est de trouver la fonction  $\chi$  qui nous permet de minimiser l'énergie du système,  $J$  dans notre cas. Ainsi, dans cette optique, nous allons essayer d'appliquer la méthode de descente du gradient. Mais pour cela, il va falloir vérifier quelques conditions de régularité pour pouvoir approcher la fonction optimale. Cette partie sera détaillée par la suite dans une autre partie.

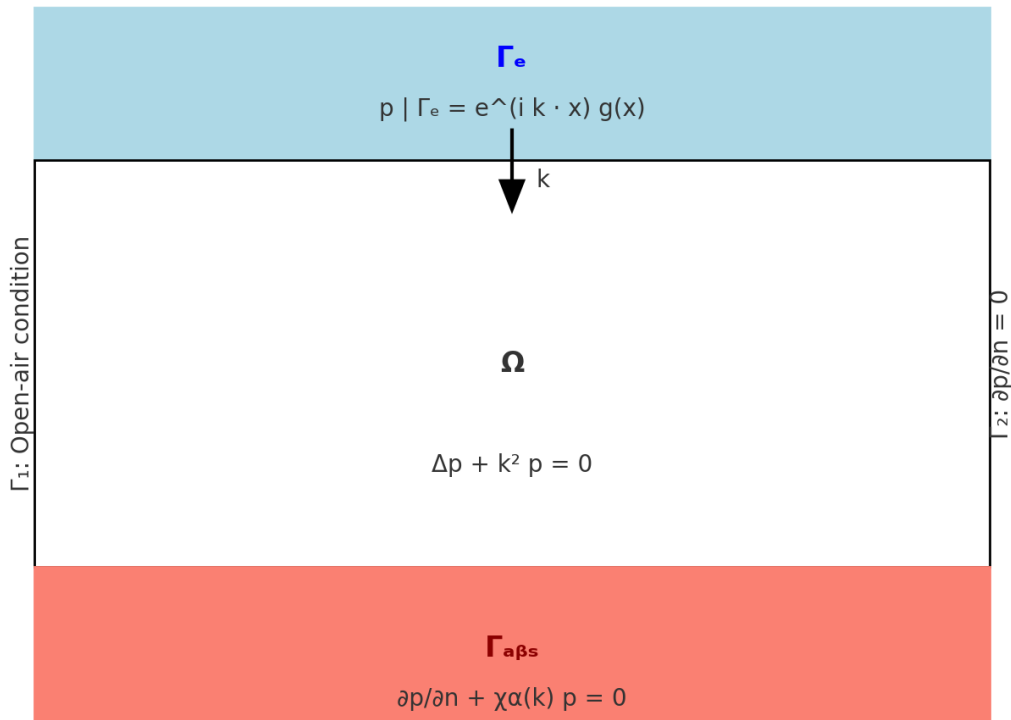
-Pour l'instant, on va essayer de voir l'effet de changer les conditions sur une frontière. Puisque notre objectif est d'optimiser  $J$  en fonction de  $\chi$ , l'étude de la dérivée de  $J$  par rapport à  $\chi$  est cruciale. Cela permet d'identifier la direction dans laquelle  $\chi$  doit être ajusté pour maximiser ou minimiser  $J$ , selon les besoins.

En examinant cette dérivée, on peut déterminer les points critiques où la variation de  $J$  par rapport à  $\chi$  est nulle, indiquant ainsi des candidats pour les valeurs optimales de  $\chi$ . De plus, cela permet d'analyser la sensibilité de  $J$  aux variations de  $\chi$ , ce qui est utile pour comprendre la robustesse de la solution optimale. Enfin, cette dérivée peut guider un algorithme d'optimisation qui utilise la direction de  $\chi$  favorable pour atteindre l'optimum de  $J$ .

En résumé, connaître la dérivée de  $J$  par rapport à  $\chi$  facilite non seulement l'optimisation directe mais fournit aussi une meilleure compréhension de la relation entre le paramètre  $\chi$  et le critère  $J$ .

## 5 Etude théorique

- Dans un premier temps, pour étudier l'effet de changer les conditions au bord sur le système, on va considérer qu'au niveau de la frontière  $\Gamma$  : une des frontière n'existe plus, ce qui signifie une frontière open-air, qui permet à l'onde de la traverser sans être réfléchi. Ainsi, on sera ramené à considérer deux nouvelles frontières  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  telles que : sur  $\Gamma_1$  on a plus de frontière (open-air condition) et sur  $\Gamma_2$  on a toujours la condition de Neumann homogène  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ .



Modified model with open-air and reflective boundary conditions.

## 5.1 Nouvelle EDP

Pour trouver la nouvelle EDP qui décrit le système, on modélise la nouvelle frontière open-air  $\Gamma_1$  avec la condition de rayonnement de Sommerfeld qui consiste à une condition de Robin homogène telle que :  $\frac{\partial p}{\partial n} - ikp = 0$ . La nouvelle EDP qui décrit le système est donnée dans ce cas par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p + k^2 p = 0, \quad \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} - ikp = 0, \quad \text{sur la frontière } \Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \text{sur la frontière } \Gamma_2 \\ p = g, \quad \text{sur la frontière d'entrée } \Gamma_{\text{in}} \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \chi\alpha(k)p = 0, \quad \text{sur la frontière absorbante } \Gamma_{\text{abs}}. \end{array} \right. \quad (2)$$

On va essayer dans un premier temps de se ramener à un problème avec une condition de Dirichlet homogène. Pour cela on considère  $\hat{g}$  une solution faible de l'EDP suivante



(l'existence d'une telle solution est justifiée dans annexe) :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \Gamma_{\text{in}}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{\text{abs}}, \end{cases}$$

Ainsi, on pose  $\hat{u} = p - \hat{g}$ , l'EDP vérifiée par  $\hat{u}$  est :

$$\begin{cases} \Delta \hat{u} + k^2 \hat{u} = -\Delta \hat{g} - k^2 \hat{g}, & \text{sur } \Omega \\ \hat{u} = 0, & \text{sur la frontière d'entrée } \Gamma_{\text{in}} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} = -\frac{\partial \hat{g}}{\partial n}, & \text{sur la frontière } \Gamma_2 \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + \chi \alpha(k) \hat{u} = -\left(\frac{\partial \hat{g}}{\partial n} + \chi \alpha(k) \hat{g}\right) & \text{sur la frontière absorbante } \Gamma_{\text{abs}}. \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} - ik \hat{u} = -\left(\frac{\partial \hat{g}}{\partial n} - ik \hat{g}\right), & \text{sur la frontière } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3)$$

Ainsi, d'après l'équation que vérifie  $\hat{g}$ , on déduit alors que le système précédent se simplifie en donnant.

$$\begin{cases} \Delta \hat{u} + k^2 \hat{u} = f, & \text{sur } \Omega \\ \hat{u} = 0, & \text{sur la frontière d'entrée } \Gamma_{\text{in}} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} = 0, & \text{sur la frontière } \Gamma_2 \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + \chi \alpha(k) \hat{u} = 0 & \text{sur la frontière absorbante } \Gamma_{\text{abs}}. \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} - ik \hat{u} = 0, & \text{sur la frontière } \Gamma_1 \end{cases} \quad (4)$$

- Avec  $f = -\Delta \hat{g} - k^2 \hat{g}$

## 5.2 Formulation variationnelle réelle

En appliquant la même démarche que celle de la partie 7.5.2 du polycopié, on définit les parties réelles et imaginaires des fonctions  $f$ ,  $\alpha$  et  $\hat{u}$ . On se trouve alors avec un système de deux EDP :

- Pour la partie réelle

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \hat{u}_R + k^2 \hat{u}_R = f_R, & \text{sur } \Omega \\ \hat{u}_R = 0, & \text{sur la frontière d'entrée } \Gamma_{\text{in}} \\ \frac{\partial \hat{u}_R}{\partial n} = 0, & \text{sur la frontière } \Gamma_2 \\ \frac{\partial \hat{u}_R}{\partial n} + \chi(\alpha_R(k)\hat{u}_R - \alpha_I(k)\hat{u}_I) = 0 & \text{sur la frontière absorbante } \Gamma_{\text{abs}}. \\ \frac{\partial \hat{u}_R}{\partial n} + k\hat{u}_I = 0, & \text{sur la frontière } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (5)$$

- Pour la partie imaginaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \hat{u}_I + k^2 \hat{u}_I = f_I, & \text{sur } \Omega \\ \hat{u}_I = 0, & \text{sur la frontière d'entrée } \Gamma_{\text{in}} \\ \frac{\partial \hat{u}_I}{\partial n} = 0, & \text{sur la frontière } \Gamma_2 \\ \frac{\partial \hat{u}_I}{\partial n} + \chi(\alpha_R(k)\hat{u}_I + \alpha_I(k)\hat{u}_R) = 0 & \text{sur la frontière absorbante } \Gamma_{\text{abs}}. \\ \frac{\partial \hat{u}_I}{\partial n} - k\hat{u}_R = 0, & \text{sur la frontière } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (6)$$

Par la suite, on remplace  $\hat{u}$  par  $u$  pour alléger les notations. Nous trouvons maintenant les formulations variationnelles des deux problèmes suivants :  $\forall v_R \in V(\Omega)$

$$- \int_{\Gamma_1} k u_I v_R - \int_{\Gamma_{\text{abs}}} \chi(\alpha_R u_R - \alpha_I u_I) v_R d\mu - \int_{\Omega} \nabla u_R \nabla v_R dx + k^2 \int_{\Omega} u_R v_R dx = \int_{\Omega} f_R v_R dx,$$

et

$$\forall v_I \in V(\Omega)$$

$$\int_{\Gamma_1} k u_R v_I - \int_{\Gamma_{\text{abs}}} \chi(\alpha_I u_R + \alpha_R u_I) v_I d\mu - \int_{\Omega} \nabla u_I \nabla v_I dx + k^2 \int_{\Omega} u_I v_I dx = \int_{\Omega} f_I v_I dx.$$

L'espace  $V(\Omega)$  désigne l'espace qui permet d'assurer que tous les ingrédients de l'EDP sont bien définis, il s'agit notamment des éléments  $x$  l'espace  $H^1(\Omega)$  tels que  $x = 0$  sur  $\Gamma_{\text{in}}$ .

Comme  $v_R$  et  $v_I$  sont indépendants, nous soustrayons les deux équations et obtenons la

formulation variationnelle réelle suivante pour tout  $(v_R, v_I) \in V(\Omega) \times V(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} FV(\chi, u_R, u_I, v_R, v_I) := & - \int_{\Gamma_1} k(u_R v_I + u_I v_R) \int_{\Gamma} \chi [(\alpha_I u_R + \alpha_R u_I) v_I - (\alpha_R u_R - \alpha_I u_I) v_R] d\mu \\ & + \int_{\Omega} [\nabla u_I \cdot \nabla v_I - \nabla u_R \cdot \nabla v_R] dx \\ & + \int_{\Omega} [k^2(u_R v_R - u_I v_I) + f_I v_I - f_R v_R] dx = 0. \end{aligned}$$

Ici,  $u_R$  et  $u_I$  dépendent de  $\chi$ .

### 5.3 Introduction du Lagrangien

Nous définissons maintenant le Lagrangien du problème d'optimisation comme la somme de la formulation variationnelle précédemment calculée et de l'énergie du système qui dépendra également de la fonction du relèvement :

$$\forall \chi \in L^\infty(\Gamma, \mu), \quad \forall w_R, w_I, q_R, q_I \in V(\Omega)$$

$$\mathcal{L}(\chi, w_R, w_I, q_R, q_I) = \int_{\Omega} ((w_R + g_R)^2 + (w_I + g_I)^2) dx + FV(\chi, w_R, w_I, q_R, q_I).$$

Ici, tous les arguments du Lagrangien,  $\chi, w_R, w_I, q_R, q_I$ , sont indépendants. Sous forme explicite, le Lagrangien est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\chi, w_R, w_I, q_R, q_I) = & - \int_{\Gamma_1} k[(w_R q_I + w_I q_R)] d\mu \\ & + \int_{\Gamma_{abs}} \chi [(\alpha_I w_R + \alpha_R w_I) q_I - (\alpha_R w_R - \alpha_I w_I) q_R] d\mu \\ & + \int_{\Omega} (w_R + g_R)^2 + (w_I + g_I)^2 dx \\ & + \int_{\Omega} [\nabla w_I \cdot \nabla q_I - \nabla w_R \cdot \nabla q_R + k^2(w_R q_R - w_I q_I)] dx. \end{aligned}$$

### 5.4 Problème Adjoint

Trouvons le problème adjoint. Nous commençons par calculer  $\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_R}(x, u_R, u_I, q_R, q_I), \phi_R \right\rangle$  et  $\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_I}(x, u_R, u_I, q_R, q_I), \phi_I \right\rangle$ .

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_R} (x, u_R, u_I, q_R, q_I), \phi_R \right\rangle &= \int_{\Omega} 2u_R \phi_R + \int_{\Gamma_{abs}} \chi (\alpha_I q_I \phi_R - \alpha_R q_R \phi_R) d\mu \\
&+ \int_{\Omega} [-\nabla q_R \nabla \phi_R + k^2 q_R \phi_R] dx - \int_{\Gamma_1} k q_I \phi_R \\
&+ \int_{\Omega} 2g_R \phi_R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_I} (x, u_R, u_I, q_R, q_I), \phi_I \right\rangle &= \int_{\Omega} 2u_I \phi_I + \int_{\Gamma} \chi (\alpha_R q_I \phi_I + \alpha_I q_R \phi_I) d\mu \\
&+ \int_{\Omega} [-\nabla q_I \nabla \phi_I - k^2 q_I \phi_I] dx - \int_{\Gamma_1} k q_R \phi_I \\
&+ \int_{\Omega} 2g_I \phi_I
\end{aligned}$$

## 5.5 Système Adjoint

Nous déduisons le système adjoint à partir de

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_R}, \phi_R \right\rangle = 0 \quad \forall \phi_R \in V(\Omega) \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_I}, \phi_I \right\rangle = 0 \quad \forall \phi_I \in V(\Omega).$$

Pour garder la notation  $q_R$  et  $q_I$  désignant les variables indépendantes de la Lagrangienne, nous désignons la solution du système adjoint par  $p_R$  et  $p_I$ . Sous forme explicite, nous avons la formulation variationnelle suivante pour le problème adjoint

$\forall \phi_R \in V(\Omega) :$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} 2u_R \phi_R dx + \int_{\Gamma_{abs}} \chi (\alpha_I p_I \phi_R - \alpha_R p_R \phi_R) d\mu + \int_{\Omega} [-\nabla p_R \nabla \phi_R + k^2 p_R \phi_R] dx &= \int_{\Gamma_1} k q_I \phi_R \\
&- \int_{\Omega} 2g_R \phi_R,
\end{aligned}$$

$\forall \phi_I \in V(\Omega) :$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} 2u_I \phi_I dx + \int_{\Gamma_{abs}} \chi (\alpha_R p_I \phi_I + \alpha_I p_R \phi_I) d\mu + \int_{\Omega} [-\nabla p_I \nabla \phi_I - k^2 p_I \phi_I] dx &= \int_{\Gamma_1} k q_R \phi_I \\
&- \int_{\Omega} 2g_I \phi_I.
\end{aligned}$$

Les formulations variationnelles sont suffisantes, mais il peut aussi être utile de voir les problèmes forts correspondants, obtenus formellement avec l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)p_R = -2(u_R + g_R) \text{ sur } \Omega; \\ \frac{\partial p_R}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2; \\ \frac{\partial p_R}{\partial n} = -kp_I \text{ sur } \Gamma_1; \\ p_R = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{in}}; \\ \frac{\partial p_R}{\partial n} + \chi(\alpha_R p_R - \alpha_I p_I) = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{abs}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\Delta - k^2)p_I = -2(u_I + g_I) \text{ sur } \Omega; \\ \frac{\partial p_I}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2; \\ \frac{\partial p_I}{\partial n} = -kp_R \text{ sur } \Gamma_1; \\ p_I = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{in}}; \\ \frac{\partial p_I}{\partial n} + \chi(\alpha_R p_I + \alpha_I p_R) = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{abs}}. \end{cases}$$

À partir des systèmes précédents, nous déduisons le système à valeurs complexes pour  $p = p_R + ip_I$  :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)p = -2u_1 \text{ sur } \Omega; \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2; \\ \frac{\partial p}{\partial n} + ik\bar{p} = 0 \text{ sur } \Gamma_1; \\ p = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{in}}; \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \chi\alpha p = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{abs}}. \end{cases}$$

Avec,  $u_1 = (u_R + g_R) + i(u_I + g_I)$  et  $\bar{p}$  désigne le conjugué de  $p$ . Nous remarquons alors que  $p$  dépend de  $\chi$ .

## 5.6 Dérivée de $J$ par rapport à $\chi$

Nous calculons finalement, la dérivée de  $J$  par rapport à  $\chi$ , évaluée dans la direction  $\chi_0$  :

$$\begin{aligned} \langle J'(\chi), \chi_0 \rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi}(\chi, p_R(\chi), p_I(\chi), q_R(\chi), q_I(\chi)), \chi_0 \right\rangle \\ &= \int_{\Gamma_{\text{abs}}} \chi_0 [\alpha_R u_R(\chi) + \alpha_R p_I(\chi)] q_I(\chi) - (\alpha_R p_R(\chi) - \alpha_I p_I(\chi)) q_R(\chi) d\mu \\ &= - \int_{\Gamma_{\text{abs}}} \chi_0 \text{Re}(\alpha p(\chi) q(\chi)) d\mu. \end{aligned}$$

avec,  $q(\chi)$  est la solution de l'EDP suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + u^2)p = -2u_1 \text{ sur } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2; \\ \frac{\partial u}{\partial n} + ik\bar{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_1; \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{in}}; \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \chi\alpha u = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{abs}}. \end{array} \right.$$

Par la suite :  $J'(\chi) = -\text{Re}(\alpha p(\chi)q(\chi))$  On trouve donc la même formule pour le cas d'une frontière réfléchissante.

## 5.7 Conclusion

### Conclusion et Attention

**Conclusion :** Avec une frontière de type *open-air*, nous obtenons la même expression pour la dérivée de  $J$  par rapport à  $\chi$  que pour une frontière totalement réfléchissante.

**Attention :** La fonction  $q$  considérée ici n'est cependant pas la même, car elle se réfère à un problème adjoint différent.



Figure 2: Un lieu bruyant

## 6 Etude numérique

### 6.1 Positionnement du problème

#### 6.1.1 Problème physique, et hyophèses

Notre cadre d'étude se limitera à l'insonorisation acoustique d'un poste de travail d'un open-space, comme représenté Figure 2. Celui-ci forme un parallépipède rectangle d'environ un mètre sur deux, occupé au milieu par un bureau, entouré sur trois côtés par des panneaux en bois et ouvert sur le dernier côté, où se trouve la chaise et le travailleur. L'insonorisation souhaitée doit atténuer les sons arrivant du côté libre dérangeant le travailleur, mais aussi ceux produits par le travailleur lui-même (quand il est au téléphone par exemple) qui dérangent les autres.

Pour simplifier le problème, et utiliser l'étude théorique réalisée juste avant, on se place en deux dimensions. On se restreint à chercher des solutions où le matériau absorbant ne peut couvrir que le panneau du fond et pas les panneaux latéraux (pour économiser de l'argent, et de l'espace, car, on va le voir, les surpanneaux isolants ont une certaine profondeur). Les panneaux latéraux sont supposés parfaitement réfléchissants, et le surpanneau du fond aussi s'il n'est pas recouvert de matériau absorbant. On se restreint également à quelques géométries pour le panneau du fond, les premières itérations de la fractale de Minkowski (car on sait théoriquement que ce sont de bonnes géométries pour l'insonorisation), voire la Figure . L'essentiel de l'optimisation portera donc, comme

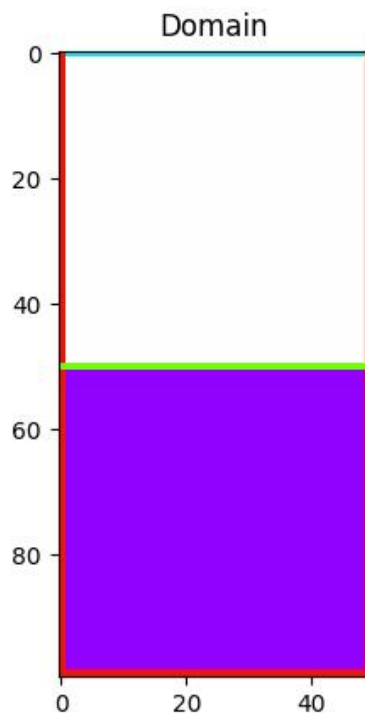


Figure 3: Le maillage utilisé, avec la géométrie du panneau du fond la plus simple : l'itération 0 de la fractale de Minkowski

dans l'analyse théorique menée avant, sur la proportion  $\beta$  de matériau absorbant dans le panneau du fond ainsi que sa répartition spatiale sur la géométrie. Enfin, les sources de bruit seront représentées par des ondes planes incidentes depuis le bord libre. Si le modèle est acceptable pour des sons émis ailleurs dans la pièce, il est clair qu'une onde sphérique serait plus adapté pour représenter la voix émise par le travailleur à son poste de travail.

Pour trouver la gamme de fréquence sur laquelle portera l'optimisation, nous avons récupéré plusieurs audios de différents sons de bureaux (voir les références), et nous avons opéré une transformée de Fourier. Les résultats montre qu'entre la voix humaine, les imprimantes ou la ventilation, on souhaite atténuer des sons dont la fréquence varie entre 50 et 4000 Hz.

### 6.1.2 Implémentation numérique

L'implémentation numérique nous a été en grande partie fournie dès le début de la semaine. Le maillage utilisé (voir Figure 3 et Figure 4) est un maillage régulier, rectangulaire, de  $N$  sur  $2N$  noeuds ou  $N$  vaut typiquement 50, 100 ou 200 (selon la qualité de la simulation souhaitée, en particulier la représentation fidèle du



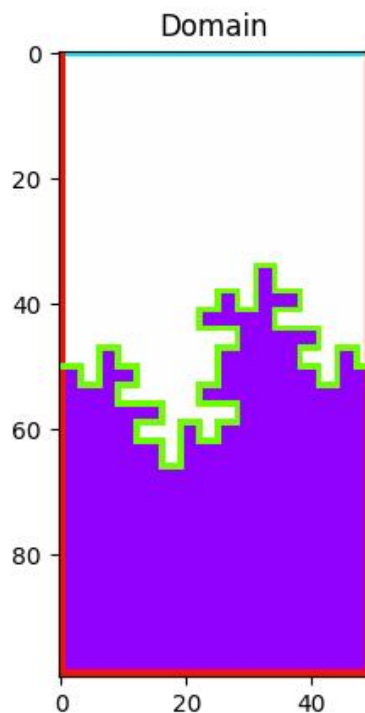


Figure 4: Une géométrie plus compliquée : l'itération 2 de la fractale de Minkowski

comportement haute fréquence dont il a été tenu compte). Il représente le poste de travail vu de haut : les noeuds cyans représentent le bord libre, en rouge les panneaux latéraux et en vert le panneau du fond. Les neouds violets représentent le rembourrage du surpanneau.

### 6.1.3 Formulation du problème d'optimisation

On fixe pour le moment la fréquence  $f$ , et donc par conséquent  $\omega = 2\pi f$  et  $k = \frac{\omega}{c}$ , où  $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  est la célérité du son dans l'air à température ambiante.

On souhaite minimiser la pollution acoustique, ce qui se traduit par une minimisation de l'énergie en fonction de  $\chi$ , c'est-à-dire de la fonctionnelle suivante :

$$J(\chi, u(\chi)) = \int_{\Omega} |u(\chi)|^2 d\mu$$

où  $u(\chi)$  représente le champ acoustique dépendant de  $\chi$  et  $\chi$  est la fonction caractéristique du matériau absorbant (mur) définie sur le bord  $\Gamma_{\text{abs}}$  :

$$\forall x \in \Gamma, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si un matériau poreux est présent en } x, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En pratique, il n'est pas réaliste de couvrir tout le bord avec du matériau poreux, surtout si le bord est fractal (cela rendrait le mur trop épais et coûteux). On introduit donc un paramètre  $\beta \in [0, 1]$  pour représenter la part de volume occupée par le matériau. En normalisant, on considère que la mesure  $\mu(\Gamma_{\text{abs}}) = 1$ , ce qui nous conduit à définir l'espace des fonctions admissibles :

$$U_{\text{ad}}(\beta) = \left\{ \chi \in L^\infty(\Gamma, \mu) \mid \forall x \in \Gamma, \chi(x) \in \{0, 1\}, \int_{\Gamma} \chi d\mu = \beta \right\}$$

Finalement, notre problème d'optimisation s'énonce ainsi :

Étant donné une onde incidente  $g$  et un volume fixé  $\beta$ , on cherche  $\chi_{\text{opt}} \in U_{\text{ad}}(\beta)$  tel que :

$$J(\chi_{\text{opt}}, u(\chi_{\text{opt}})) = \min_{\chi \in U_{\text{ad}}(\beta)} J(\chi, u(\chi))$$

On est alors confronté à une problématique : l'ensemble  $U_{\text{ad}}(\beta)$  n'est pas fermé pour la convergence faible\* des fonctions. Pour pallier cette difficulté, on utilise une méthode de relaxation. Ainsi, on effectue l'optimisation sur l'ensemble étendu suivant :

$$U_{\text{ad}}^*(\beta) = \left\{ \chi \in L^\infty(\Gamma, \mu) \mid \forall x \in \Gamma, \chi(x) \in [0, 1], \int_{\Gamma} \chi d\mu = \beta \right\}$$

Cet ensemble, qui est l'adhérence convexe de  $U_{\text{ad}}(\beta)$ , garantit que l'optimisation est bien définie pour la convergence faible\*. À la fin du processus, on procède à une projection pour obtenir une solution dans  $U_{\text{ad}}(\beta)$ .

## 6.2 Compromis et Choix à faire : Nature du matériau

### 6.2.1 Matériaux considérés et comparaison des performances

Comme déjà abordé en voie numérique, la sélection du matériau d'une structure joue un rôle déterminant dans sa capacité à absorber les ondes acoustiques.

En particulier, la sélection du matériau influence directement la valeur du paramètre  $\alpha$  de la condition de Robin dans le problème. Comme détaillé lors de l'étude numérique, ce choix de peut être formulé sous la forme d'un problème de minimisation.

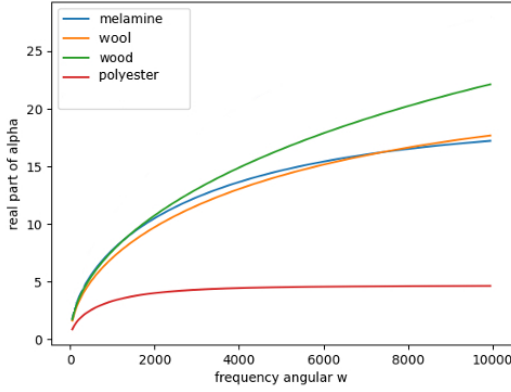
Nous nous donnons ainsi quelques matériaux couramment utilisés comme absorbants acoustique : Bois, Polyester, Mélamine, Laine, et nous notons leurs caractéristiques physiques de Porosité  $\phi$ , Résistivité  $\sigma$ , Masse volumique  $\rho_0$ , Tortuosité  $\alpha_h$ , Vitesse du son dans le matériau  $c_0$ .

Nous considérons ainsi, pour nos différents matériaux, les grandeurs suivantes :

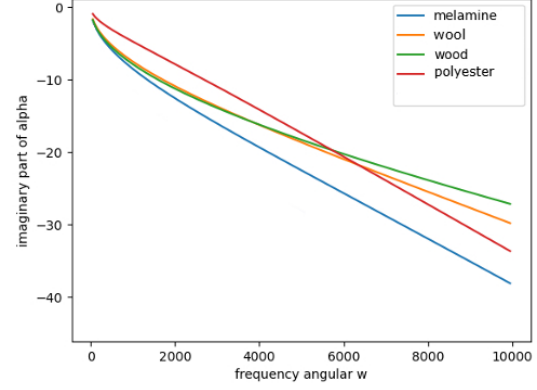
- Bois :  $(\phi, \sigma, \rho_0, \alpha_h, c_0) = (0.5, 12500 \text{ Pa}\cdot\text{s}/\text{m}, 600 \text{ kg}/\text{m}^3, 1.35, 360 \text{ m}/\text{s})$

- Polyester :  $(\phi, \sigma, \rho_0, \alpha_h, c_0) = (0.9, 20000 Pa \cdot s/m, 40 kg/m, 1.2, 340 m/s)$
- Mélamine :  $(\phi, \sigma, \rho_0, \alpha_h, c_0) = (0.95, 13000 Pa \cdot s/m, 10 kg/m, 1.3, 340 m/s)$
- Laine :  $(\phi, \sigma, \rho_0, \alpha_h, c_0) = (0.9, 22500 Pa \cdot s/m, 100 kg/m, 1.4, 340 m/s)$

Nous traçons nos courbes sur notre gamme de fréquence considérée:  $\omega \in [2\pi, 8000\pi]$ .



(a) Partie réelle de  $\alpha$



(b) Partie imaginaire de  $\alpha$

Lorsque la partie imaginaire de  $\alpha$  augmente, le matériau devient plus absorbant. Pour déterminer  $\alpha$  à partir du matériau, nous utilisons la fonction *get\_alpha* du module alpha, que nous avons développé dans notre contrôle continu. Cette fonction prend en argument la pulsation et le nom du matériau, puis renvoie la constante de Robin correspondante.

### 6.2.2 Choix du matériau

D'après les courbes ci-dessus, il est clair que pour optimiser l'absorption acoustique nous choisissons la mélamine comme matériau isolant, elle présente la valeur optimale de  $\alpha(\omega)$  pour tout  $\omega$  et semble offrir la meilleure isolation.

Nous vérifierons cela en observant l'énergie minimisée grâce à notre méthode de descente de gradient

## 6.3 Méthode de descente de gradient numérique

On veut minimiser une fonction

Comme expliqué en 3 et 4, pour une géométrie donnée, on cherche  $\chi : \Gamma_{abs} \longrightarrow \{0; 1\}$  décrivant la répartition d'une quantité  $\beta$  de matériau absorbant sur le mur afin d'obtenir une énergie interne la plus faible possible pour un son d'une fréquence donnée. Dans le cadre de notre résolution numérique,  $\Gamma_{abs}$  contient un nombre fini d'éléments, et l'ensemble des solutions possibles est donc lui aussi fini. Cependant, le cardinal de cet ensemble devient facilement énorme quand la taille du maillage augmente, ce qui nous

empêche de toutes les essayer. Connaissant la dérivée de Fréchet de notre énergie, on privilégie donc un autre approche : la méthode de descente de gradient.

### 6.3.1 Principe

Intuitivement, le gradient d'une fonctionnelle  $J$  c'est la direction dans laquelle  $J$  croît le plus vite. L'idée de la descente de gradient est très simple, on fixe un taux d'apprentissage  $\mu$ , et on exécute itérativement ce processus :

- Calcul de la dérivée de Fréchet de  $J$  en  $\chi^{(k)}$
- $\chi^{(k+1)} = \chi^{(k)} - \mu J'(\chi^{(k)})$
- On calcule la nouvelle énergie  $J(\chi^{(k+1)})$  et on regarde si on s'est amélioré.

### 6.3.2 Implémentation et application à notre situation

Puisque nous travaillons numériquement, nous passons d'un espace de dimension infinie à un espace de dimension finie, au prix de quelques approximations. Comme dans tout problème d'optimisation numérique, il existe un compromis entre la précision de la solution et le temps de calcul.

La résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) est une tâche coûteuse en temps de calcul. C'est pourquoi nous avons structuré notre code en utilisant abondamment la bibliothèque `numpy`, qui est particulièrement efficace pour la vectorisation. Cela nous a permis d'augmenter le nombre de points dans notre maillage, et ainsi d'améliorer la précision de notre solution.

**Conditions d'arrêt de l'algorithme et taux d'apprentissage** Nous définissons un taux d'apprentissage  $\mu$  qui va "coefficients" à quel point on se déplace dans la direction  $J'(\chi^{(k)})$ . Ce taux d'apprentissage est mis à jour dynamiquement. Si l'on a  $J(\chi^{(k+1)}) < J(\chi^{(k)})$  alors on a appris, et donc on augmente  $\mu$ . En revanche si  $J(\chi^{(k+1)}) > J(\chi^{(k)})$  cela veut dire que l'on a été "trop loin", et donc on décide de diminuer avec  $\mu_{k+1} = \frac{\mu_k}{2}$ .

Nous avons dû établir des conditions d'arrêt pour notre algorithme. L'algorithme s'arrête lorsque  $\mu < \epsilon$ , avec un  $\epsilon$  fixé à l'avance (par exemple  $10^{-5}$ ). Une autre condition d'arrêt est que la différence entre  $\chi^{(k)}$  et  $\chi^{(k+1)}$  soit suffisamment petite.

**Répartition Initiale du Matériau  $\chi^{(0)}$**  Pour initialiser notre algorithme, nous devons choisir une configuration de départ pour  $\chi^{(0)}$ . Deux méthodes sont proposées :

- **Méthode aléatoire** : Le programme place un volume  $\beta$  de matériau de manière aléatoire sur le bord  $\Gamma_{abs}$ .

- **Méthode déterministe** :  $\chi^{(0)}$  est soit défini manuellement, soit donné par le code fourni.

**Stabilité de la Descente de Gradient** Le point de départ de l'algorithme influence la simulation, car la descente de gradient nous fait converger vers un minimum local (qui n'est pas forcément global). Si notre fonction objectif  $J$  est irrégulière, elle peut posséder de nombreux minima locaux. Cela peut entraîner des résultats sous-optimaux. Pour évaluer la stabilité de notre algorithme, nous avons exécuté 100 simulations avec des configurations initiales aléatoires, en fixant  $f = 440$  Hz et  $\beta = 0.5$ . Nous avons calculé la moyenne et l'écart type des énergies obtenues après optimisation. L'écart type très faible (voir Figure 3) indique que l'algorithme converge presque toujours vers le même minimum. Même si le minimum atteint diffère légèrement, les solutions trouvées produisent des énergies proches du minimum.

```
max énergies départ: 3.2616927059609213
min énergies départ: 0.9204707433729631
max énergies finale: 0.7607486435557832
min énergies finale: 0.5590539734768082
moyenne énergies départ: 1.503011773336126
moyenne énergies finales: 0.583598512586355
écart-type énergies départ: 0.4425917709556112
écart-type énergies finales: 0.04092397568974471
```

Figure 6: Etude de la variance de l'énergie minimisée avec une initialisation aléatoire

**Projecteur Intermédiaire** Comme mentionné précédemment, l'optimisation est réalisée sur  $U_{\text{ad}}^*(\beta)$ . Nous devons donc garantir qu'à chaque itération,  $\chi^{(k)}$  reste dans  $[0, 1]$ .

Pour ce faire, nous utilisons un projecteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : (\Gamma_{\text{abs}} \rightarrow \mathbb{R}) &\longrightarrow U_{\text{ad}}^* \\ \chi &\longmapsto \phi \circ (\chi + l_{\chi}) \end{aligned}$$

où  $\phi$  est une fonction à valeurs dans  $[0, 1]$  choisie de manière à ne pas trop déformer  $\chi$ . Notre implémentation propose deux fonctions possibles pour  $\phi$  :

- Fonction linéaire rectifiée :

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Sigmoides :

$$\phi(x) = \frac{1}{1 + \exp\left(-a\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)}$$

où  $a \in \mathbb{R}$  est un paramètre fixe.

**Projection finale** Afin de pouvoir résoudre le problème, nous avons dû chercher des solutions à valeurs dans  $[0; 1]$ . Après notre descente de gradient, il nous faut des valeurs dans  $\{0; 1\}$ , qui ont un sens physique (du matériau ou non). Pour cela, on applique un algorithme dont voici le principe : on trie les valeurs de  $\chi$  dans le sens décroissant afin de fixer les plus grandes à 1 jusqu'à atteindre la quantité de matériau  $\beta$  souhaitée. On change les autres valeurs à 0.

**Choix des Paramètres et Ajustements** Nous avons joué avec le taux d'apprentissage  $\mu$  et les conditions d'arrêt pour déterminer des paramètres qui permettent une convergence de l'algorithme tout en conservant un temps d'exécution raisonnable.

## 6.4 Etude énergétique

L'étude de l'énergie est essentielle pour la détermination de la distribution finale qui donne une absorption optimale du son. L'objectif de cette partie est de minimiser les maxima d'énergies pour les cas totalement absorbant, et réfléchissant avec du matériel poreux. Il s'agit de trouver à l'aide l'algorithme de descente du gradient  $\chi_{opt}$  qui modélisera notre produit à développer.

### 6.4.1 Dérivée de l'énergie

Nous utilisons des résultats déjà montrés dans la littérature scientifique, notamment ceux de [notebook]. On montre alors que la fonctionnelle  $J$  est dérivable au sens de Fréchet, et que sa dérivée est  $-Re(\alpha u(\chi)p(\chi))$  où  $u$  est la solution du problème classique, et  $p$  est la solution du problème dual :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)p = -2\bar{u} \text{ sur } \Omega; \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma; \\ p = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{in}}; \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \chi \alpha p = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{abs}}. \end{cases}$$

Numériquement, nous avons un algorithme permettant de résoudre l'équation d'Helmholtz avec n'importe quel terme source et conditions au bord. Il nous suffit donc de calculer  $u$  et  $p$  en utilisant cet algorithme, et nous avec la dérivée  $J'(\chi)$

### 6.4.2 Étude de l'énergie : Modèle du mur entièrement absorbant de forme plane

Le premier modèle du mur totalement absorbant est modélisé par  $\chi = 1$  partout. On envoie sur le mur des ondes acoustiques à des fréquences différentes, comprises entre 50 Hz et 4000 Hz. En traçant la variation de l'énergie en fonction de la fréquence, on obtient la courbe suivante :

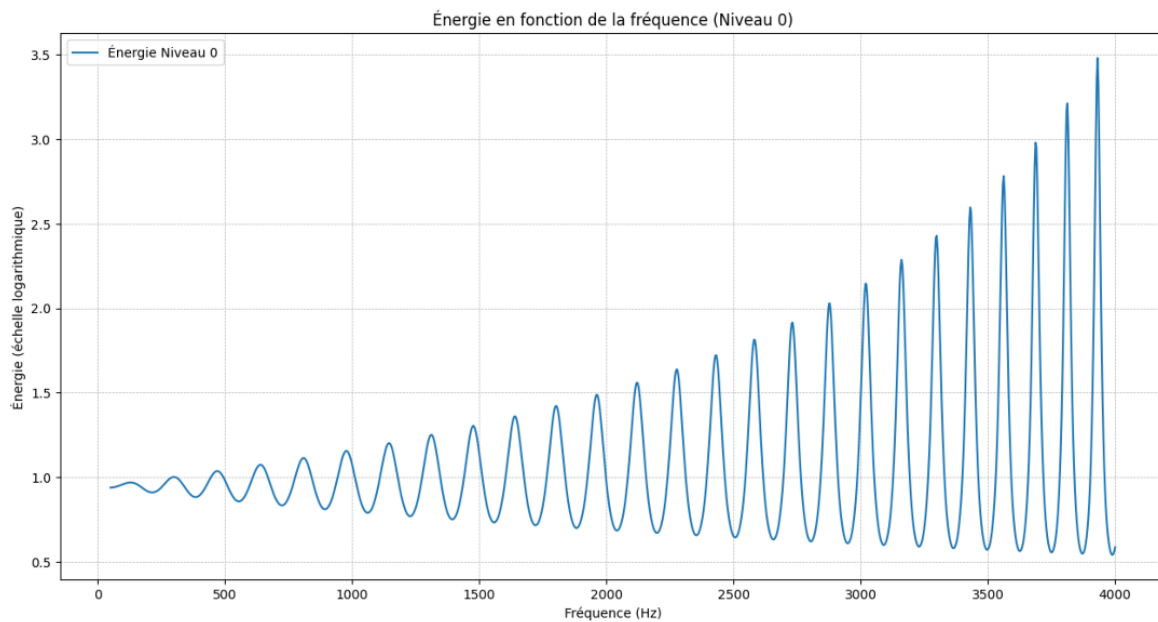


Figure 7: Variation de l'énergie pour un mur normal

### 6.4.3 Étude de l'énergie : Autres formes du modèle du mur entièrement absorbant

Dans le même cadre du mur totalement absorbant, on peut s'intéresser à un mur qui a ces caractéristiques mais qui présente une géométrie différente. Par exemple des murs à structure fractale. .

En étudiant la variation de l'énergie pour différents niveaux de fractales, on obtient la courbe suivante (en échelle logarithmique) :

- Niveau 0 : Bleu
- Niveau 1 : Orange
- Niveau 2 : Vert

Ce qui correspond à la courbe attendue car plus le niveau de fractale augmente, plus on s'attend à avoir une meilleure absorption du son.

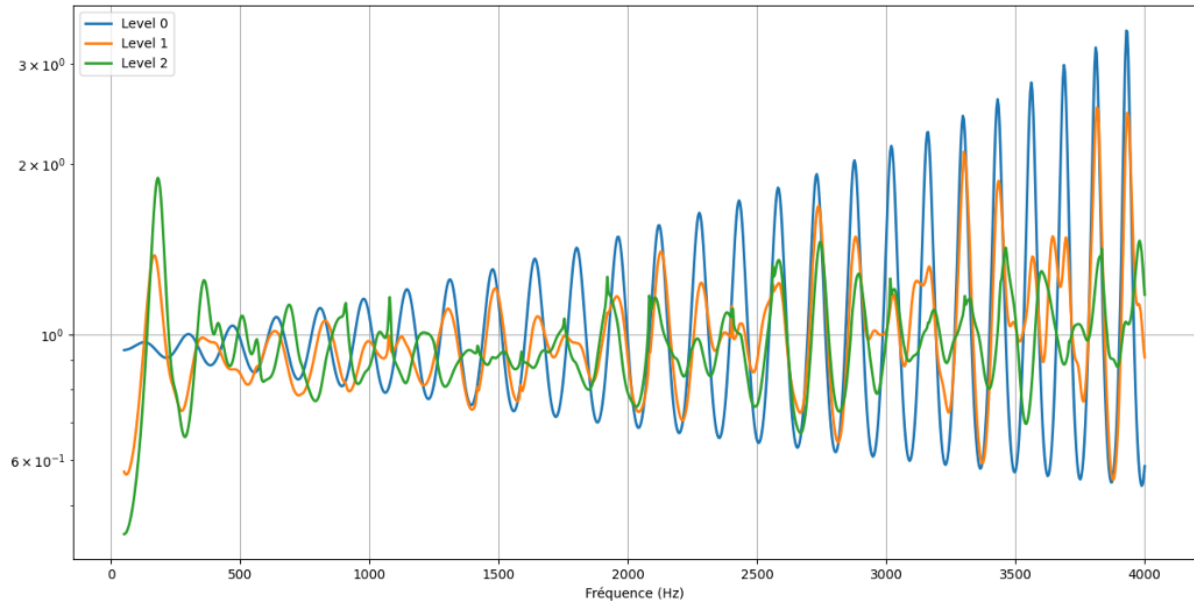


Figure 8: Variation de l'énergie pour différents niveaux d'énergie

#### 6.4.4 Optimisation fréquentielle (Fréquences représentant des maximums d'énergie)

Maintenant que les courbes ont été générées, on peut détecter les fréquences pour lesquelles on a des maximums d'énergie. L'objectif sera de minimiser ces maxima d'énergie, afin d'avoir une meilleur absorption des ondes acoustiques. Cela est fait à l'aide de l'algorithme de descente du gradient, qui va nous donner en sortie la distribution  $\chi$  optimale (avec des valeurs comprises entre 0 et 1).

Grâce à des calculs, on trouve que ces fréquences sont les :

$$f = 143 \cdot k$$

#### 6.4.5 Optimisation de l'énergie multifréquentielle

Après analyse des sons classiques que l'on retrouve dans un bureau (voix humaines, imprimante, ventilateur...) on trouve que les fréquences d'intérêt sont entre 50 et 4000 Hz. On souhaite donc optimiser  $\chi$  sur cette plage de fréquence. On fixe maintenant notre volume utilisé  $\beta = 0.5$ . Le graphique ci-dessous donne l'énergie minimisée en fonction de la fréquence.

On remarque que la courbe a une forme similaire à celle vue pour  $\chi = 0$  (matériau réfléchissant). C'est normal, on a toujours le problème des fréquences de résonance. En revanche on remarque qu'en moyenne, on réussi à atténuer fortement l'énergie. L'étape suivante serait d'optimiser un UNIQUE  $\chi$  pour une plage de fréquence. Cela implique de modifier l'algorithme de minimisation et nous avons manqué de temps. On peut proposer soit un algorithme génétique, soit un algorithme qui minimise d'abord



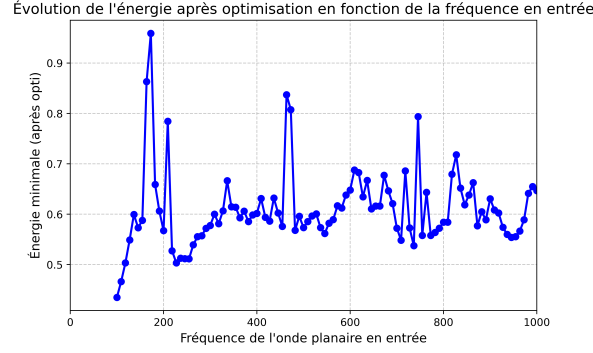


Figure 9: Energie minimale en fonction de la fréquence, fractale = 2,  $\beta = 0.5$

une fréquence, et qui repart encore de la distribution  $\chi_1$  pour minimiser les fréquences voisines et ainsi de suite.

De manière plus simple, nous avons proposé de faire la moyenne des  $\chi$  qui minimisent chaque fréquence mais le résultat n'était pas très satisfaisant.

#### 6.4.6 Optimisation de la quantité de matériaux poreux

Après avoir sélectionné un matériau approprié, dans notre cas c'est la mélamine, on cherche maintenant à déterminer la quantité optimale de matériau (ou le rapport entre la quantité et le volume total de la paroi)  $\beta$  à utiliser.

Comme le travail des parties précédentes nous a permis de trouver le  $\chi_{opt}$  permettant d'optimiser la valeur de  $\chi$  pour obtenir une énergie minimale à  $\beta$  fixé.

On trace alors l'énergie minimale obtenue pour différents  $\beta \in [0, 1]$ . On observe alors le graphe ci-dessous :

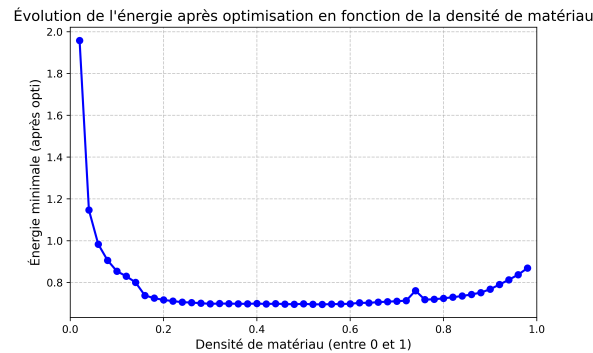


Figure 10: Energie minimale en fonction de la densité de matériau utilisée, fractale = 1

On remarque que pour  $0 < \beta < 0.2$ , l'énergie est assez élevée, c'est normal puisque notre paroi se rapproche d'un mur parfaitement réfléchissant. Pour  $0.2 < \beta < 0.8$ , on constate que l'énergie est assez constante, ce qui peut être surprenant à première vue.

Enfin, pour  $\beta > 0.8$ , l'énergie minimisée réaugmente, ce qui est logique, puisque l'on va avoir des phénomènes de localisation qui apparaissent et donc une énergie élevée.

On souhaite donc choisir  $\beta \in [0.2, 0.8]$ . Si  $\beta$  est trop faible, on risque d'avoir des difficultés physique à usiner le matériau et à avoir une paroi solide. Réciproquement, si  $\beta$  est trop élevé, cela est coûteux en matériau et donc non souhaitable.

Ceci étant dit, on choisira donc pour la suite  $\beta = 0.3$

## 6.5 Conclusion de la partie numérique : Produit à développer

### Matériau à utiliser

Nous choisissons la mélamine comme matériau d'isolation comme il présente la valeur de  $Im(\alpha)$  la plus faible.

### Densité de matériau

Comme déjà présenté plus haut  $\beta$  optimal que l'on choisirait est de 0.3

### Niveau de fractale

Nous remarquons au court de notre étude que pour un niveau de fractale bas, l'énergie n'est pas assez minimisée, contrairement à un niveau de fractale haut pour lequel l'énergie est bien optimisée cependant cette configuration reste impossible à réaliser physiquement, c'est pourquoi nous choisissons pour notre compromis un niveau de fractale intermédiaire égale à 3.

### Résultat de la simulation : Forme géométrique

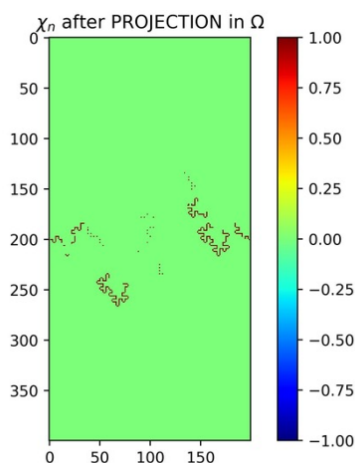


Figure 11: Forme géométrique

Nous observons une forme très irrégulière et qui est physiquement difficile à reproduire, cependant nous remarquons par la simulation qu'elle représente une bonne atténuation de l'énergie acoustique.

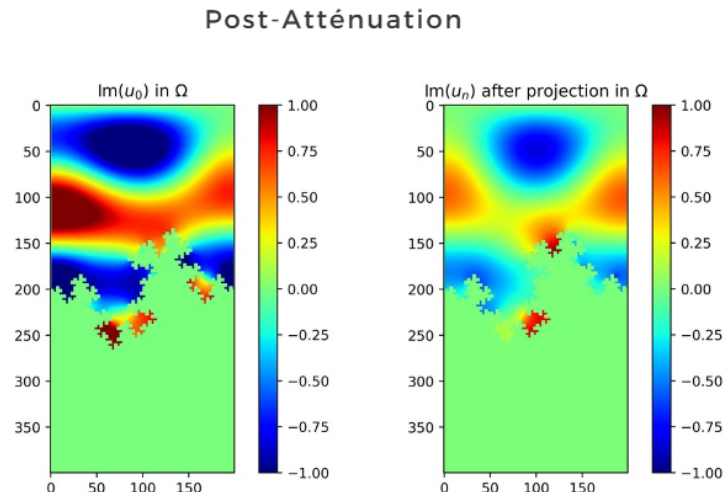


Figure 12: Forme géométrique

## 7 Annexe

L'existence d'une pour l'EDP :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \Gamma_{\text{in}}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{\text{abs}}, \end{cases}$$

Puisque nous avons une condition de Dirichlet non homogène sur  $\Gamma_{\text{in}}$  (i.e.,  $u = g$ ), nous introduisons une fonction auxiliaire  $u_g \in H^1(\Omega)$  telle que :

$$u_g = g \quad \text{sur } \Gamma_{\text{in}}.$$

Nous cherchons alors  $u = v + u_g$ , où  $v \in H^1(\Omega)$  satisfait  $v = 0$  sur  $\Gamma_{\text{in}}$ .

En substituant  $u = v + u_g$  dans l'équation  $-\Delta u = f$ , on obtient :

$$-\Delta v = f + \Delta u_g \quad \text{dans } \Omega,$$

avec

$$v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{in}},$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial u_g}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{\text{abs}}$$

Nous multiplions l'équation par une fonction de test  $w \in H^1(\Omega)$  telle que  $w = 0$  sur  $\Gamma_{\text{in}}$  et intégrons sur  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} -\Delta v w \, dx = \int_{\Omega} (f + \Delta u_g) w \, dx.$$

En utilisant l'intégration par parties et en tenant compte de la condition de Neumann sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{\text{abs}}$ , on a :

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} (f + \Delta u_g) w \, dx + \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{\text{abs}}} \frac{\partial v}{\partial n} w \, d\sigma.$$

Comme  $\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial u_g}{\partial n}$  sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{\text{abs}}$ , cela devient :

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} (f + \Delta u_g) w \, dx - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{\text{abs}}} \frac{\partial u_g}{\partial n} w \, d\sigma.$$

Nous cherchons donc  $v \in H^1(\Omega)$  tel que  $v = 0$  sur  $\Gamma_{\text{in}}$  et satisfaisant l'équation variationnelle :

$$a(v, w) = L(w) \quad \forall w \in H^1(\Omega) \text{ tel que } w = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{in}},$$

où

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx,$$

et

$$L(w) = \int_{\Omega} (f + \Delta u_g) w \, dx - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{\text{abs}}} \frac{\partial u_g}{\partial n} w \, d\sigma.$$

Pour garantir l'existence et l'unicité de la solution  $v$ , nous vérifions que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites :

1. Continuité de  $a(\cdot, \cdot)$  : La forme bilinéaire  $a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx$  est continue dans  $H^1(\Omega)$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|a(v, w)| \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v, w \in H^1(\Omega).$$

2. Coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$  : La forme  $a(v, v)$  est coercive sur  $H^1(\Omega)$  grâce à l'inégalité de Poincaré, donc il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

3. Continuité de  $L(\cdot)$  : La forme linéaire  $L(w) = \int_{\Omega} (f + \Delta u_g) w \, dx - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{\text{abs}}} \frac{\partial u_g}{\partial n} w \, d\sigma$  est continue sur  $H^1(\Omega)$ .

Le théorème de Lax-Milgram assure donc l'existence et l'unicité de la solution  $v \in H^1(\Omega)$  du problème variationnel.

La solution  $u$  du problème original est donnée par :

$$u = v + u_g,$$

où  $v$  est la solution de la formulation variationnelle, et  $u_g$  est une fonction qui satisfait

$u_g = g$  sur  $\Gamma_{\text{in}}$  et est choisie de manière adéquate.

## References

- [4a] <https://www.lasonotheque.org>. Son de voix et imprimantes, Accédé: 2024-11-4.
- [4b] <https://www.pixabay.com>. Son de climatisation, Accédé: 2024-11-4.
- [4c] <https://www.sound-fishing.net>. Son de bureau, Accédé: 2024-11-4.