

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Кафедра обчислювальної техніки

(повна назва кафедри, циклової комісії)

**КУРСОВА РОБОТА**

з дисципліни «Паралельне програмування»

(назва дисципліни)

на тему: «Розробка програмного забезпечення для паралельних комп'ютерних систем»

Студента (ки) 3 курсу групи ІП-42  
напряму підготовки 050103 «Програмна інженерія»

Дзюби В.В. \_\_\_\_\_  
(прізвище та ініціали)

Керівник    доцент Корочкін О.В.

Національна оцінка \_\_\_\_\_

Кількість балів: \_\_\_\_\_

Оцінка: ECTS \_\_\_\_\_

Члени комісії

_____	_____
(підпис)	(вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
_____	_____
(підпис)	(вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
_____	_____
(підпис)	(вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Київ- 2017 р.

Національний технічний університет України  
“Київський політехнічний інститут”

Факультет (інститут) інформатики та обчислювальної техніки  
( повна назва )

Кафедра обчислювальної техніки  
( повна назва )

Освітньо-кваліфікаційний рівень бакалавр

Напрямок підготовки 6.050103 «Програмна інженерія»

(шифр і назва)

## **З А В Д А Н Н Я**

НА КУРСОВУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Дзюби Влада Володимировича  
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи «Розробка програмного забезпечення для паралельних  
комп'ютерних систем»  
керівник роботи Корочкін Олександр Володимирович к.т.н., доцент

( прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

2. Строк подання студентом роботи 11 травня 2017 р.

3. Вхідні дані до роботи

- засоби роботи з потоками в бібліотеці OpenMP
- математична задача  $A = \max(Z) \cdot E \cdot (MO \cdot MT) + \text{sort}(S)$
- структури ПКС ОП та ПКС ЛП
- мови і бібліотеки програмування: C++, OpenMP.
- засоби організації взаємодії процесів: цикли for.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

- огляд засобів роботи з процесами в мові Ада
- розробка і тестування програми ПРГ1 для ПКС ОП
- розробка і тестування програми ПРГ2 для ПКС ЛП

5. Перелік графічного матеріалу

- структурна схема ПКС ОП
- структурна схема ПКС ЛП
- схеми алгоритмів процесів і головної програми для ПРГ1
- схеми алгоритмів процесів і головної програми для ПРГ2.

7. Дата видачі завдання \_\_\_\_\_9.03.2017\_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів виконання КР	Строк виконання етапів КР
1	Виконання розділу 1	13.03.2017
2	Виконання розділу 2	3.04.2017
3	Виконання розділу 3	23.04.2016
4	Оформлення КР	8.05.2016
5	Перевірка КР викладачем	11.05.2016
6	Захист КР	18.05.2016

**Студент**

\_\_\_\_\_

( підпис )

\_\_\_\_\_

(прізвище та ініціали)

**Керівник роботи**

\_\_\_\_\_

( підпис )

\_\_\_\_\_

(прізвище та ініціали)

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД БІБЛІОТЕКИ OPENMP.....	5
1.1 Загальний опис.....	
1.2 Синтаксис.....	
1.3 Специфікація OpenMP для мов C/C++.....	
1.4 Порівняння спільної та розподіленої пам'яті.....	
1.5 Нагляд, налагодження та інструменти аналізу ефективності для <i>OpenMP</i>	
РОЗДІЛ 2. РОЗРОБКА ПРОГРАМИ ПРГ1 ДЛЯ ПКС ОП.....	
2.1 Розробка паралельного математичного алгоритму.....	
2.2 Розробка алгоритмів процесів.....	
2.3 Розробка схеми взаємодії процесів.....	
2.4 Розробка програми ПРГ1.....	
2.5 Тестування програми ПРГ1 .....	
2.6 Висновки до розділу 2 .....	
РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА ПРОГРАМИ ПРГ2 ДЛЯ ПКС ЛП .....	
3.1 Розробка паралельного математичного алгоритму.....	
3.2 Розробка алгоритмів процесів.....	
3.3 Розробка схеми взаємодії процесів.....	
3.4 Розробка програми ПРГ2.....	
3.5 Тестування програми ПРГ2.....	
3.6 Висновки до розділу 3.....	
ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ ДО РОБОТИ.....	37
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	39
ДОДАТКИ.....	41

## Вступ

Метою курсовою роботи є аналіз та використання засобів розробки паралельних програм з використання OpenMP. Прикладом використання є паралельне обчислення математичної задачі.

З ростом виробництва комп'ютерних процесорів вдосконалення засобів комунікації між багатьма процесорами стає важливішою за вдосконалення окремих процесорів. OpenMP є тим стандартом, який дозволяє писати паралельні програми максимально коротко та зрозуміло.

Не менш важливим є питання вибору системи пам'яті для обчислювальної техніки: спільна пам'ять або локальна пам'ять. Система зі спільною пам'яттю є більш швидкими. Системи ж з локальною пам'яттю є більш структурованими та простішими для сприйняття та написання програм.

У першому розділі розглянуто засоби роботи з потоками бібліотеки OpenMP. У другому розділі описан процес розробки програм для систем зі спільною пам'яттю. У третьому розділі описан процес розробки програм для систем з локальною пам'яттю.

## РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД БІБЛІОТЕКИ OPENMP

### 1.1. Загальний опис.

*OpenMP* — API, призначений для розробки багатопоточних додатків для багатопроцесорних систем з спільною пам'яттю. Розробку специфікації ведуть декілька великих виробників обчислювальної техніки та програмного забезпечення. *OpenMP* підтримується основними компіляторами *C/C++/Fortran*.

В *OpenMP* немає явного задання потоків у коді. Натомість є можливість вказати компілятору з допомогою директив *#pragma*, що блок кода може бути розпаралелен. Знаючи цю інформацію, компілятор в стані згенерувати додаток, яке складається з одного головного потоку, який створює багато інших потоків для паралельного блоку коду. Ці потоки синхронізуються у кінці паралельного блоку кода, вертаючись к головному потоку.

Так як *OpenMP* контролюється прагами, то код на *C++* коректно скомпілюється будь-яким компілятором *C++*, тому що прагми, які не підтримуються, повинні ігноруватись. Проте *OpenMP API* містить також декілька функцій, та, щоб їх використати, необхідно підключити заголовочний файл. Найпростіший спосіб визначити, чи підтримує компілятор *OpenMP* — спробувати підключити *omp.h*.

Якщо *OpenMP* підтримується, потрібно його ввімкнути за допомогою спеціального флагу компілятора: *g++ -fopenmp*.

### 1.2. Синтаксис

Директиви *OpenMP* починаються з *#pragma omp*.

#### **Parallel**

Директива *#pragma omp parallel* створює групу з *N* потоків. *N* визначається під час виконання, загалом це кількість ядер процесора, але також можна задати *N* вручну.

Кожен з потоків у групі виконує наступну за директивною команду (або блок команд, визначений в фігурних дужках). Після виконання, потоки “зливаються” в один.

Такий прозорий спосіб розмітки паралельної програми дозволяє мінімізувати написання коду для породження  $N$  потоків, задання їм функції виконання та синхронізації закінчення їх виконання. В наслідок того, що така задача є поширеною, *OpenMP* пропонує простий синтаксис для її вирішення.

### **Директива *for***

Директива *for* розділяє цикл між поточною групою потоків, так що кожен потік у групі оброблює свою частину цикла. Таким чином, кожен потік оброблює свою частину цикла паралельно з усіма потоками. При цьому послідовність виконання ітерацій цикла довільна.

Важливо, що директива *#pragma omp* лише делегує порції цикла різним потокам у поточній групі потоків. В момент запуску програми група з одиничного (головного) потоку. Щоб створити нову групу потоків, необхідно використати ключове слово *parallel*.

Для того, щоб задати кількість потоків у групі, можна скористатись параметром *num\_threads*.

В *OpenMP* 2.5, ітераційна змінна цикла повинна бути типа *signed*. В *OpenMP* 3.0 вона також може мати тип *unsigned integer*, може бути вказівником або *constant-time random access* ітератором. В останньому випадку, для визначення кількості ітерацій цикла буде використовуватись *std::distance()*.

Перевагою синтаксису *OpenMP* для паралельного проходу цикла є автоматичне розбиття ітерацій між наявною групою потоків. При цьому в коді модифікується тільки директиви, що призводить до того, що без *OpenMP*, отримуємо простий цикл, який працює таким самим чином проте без паралельності.

### **1.2.3. Планування**

Програміст може контролювати то, яким чином потоки будуть завантажуватись роботою при обробці цикла. Існують декілька варіантів.

*Static* є варіантом за замовчуванням. Ще до входу в цикл кожний потік “знає”, які частини цикла від буде обробляти. Такий варіант підходить, коли варіація часу виконання частини ітерації одним потоком мінімальна. При цьому балансування, яке проводить *OpenMP*, повністю задовольняє необхідність в ній. Цей варіант поширен настільки, що розробники *OpenMP* зробили цю стратегію балансування за замовчуванням.

Використовуючи *dynamic*, неможливо передбачити порядок, в якому ітерації цикла будуть призначені потокам. Кожен потік виконує вказану кількість ітерацій. Якщо це число не задане, за замовчуванням воно дорівнює 1. Після того, як потік завершить виконання заданих ітерацій, він переходить до наступного набору ітерацій. Так продовжується, поки не будуть пройдені всі ітерації. Останній набір ітерацій може бути меншим, ніж заданий на початку. Такий варіант дуже корисний, коли різні ітерації цикла обраховуються різний час. Можна також вказати кількість ітерацій, після виконання яких потік “попросить” у *OpenMP* наступні.

Існує також варіант *guided*. Він схожий на *dynamic*, проте розмір порції зменшується експоненційно. Така стратегія упорядкування дозволяє боротись з проблемою, яка виникає, коли відношення потоків до ітерацій циклу велике. Тоді видатки на створення різних потоків перевищують дохід від розпаралелення. Така стратегія схожа на тип алгоритмів “жадібні алгоритми”. Вона не гарантує найкращий результат, проте є оптимальною в багатьох випадках.

Динамічне та кероване планування добре підходять, коли при кожній ітерації виконується різні об’єми роботи або якщо процесори більш виробничими, ніж інші. При статичному плануванні немає способу, який дозволяє сбалансувати навантаження на різні потоки. При динамічному та керованому плануванні навантаження розподіляється автоматично — такава сама суть цих підходів. Як правило, при керованому плануванні



код виконується швидше, ніж при динамічному, в наслідок менших витрат на планування.

### **Ordering (впорядкування)**

Порядок, в якому будуть обрабляти ітерації цикла непердбачуваним. Проте можливо “змусити” *OpenMP* виконувати вирази в циклі в порядку. Для цього існує ключеве слово *ordered[1]*.

Хоча більшість ітеративних задач є аккумулятивними, тобто такими, для яких немає різниці у порядку виконання ітерацій, існують і ті, що потребують порядку. Для задач таких, як сумування, множення, перетворення кожного елементу масиву таким чином, який не залежить від значень інших елементів масиву, вибір елементів масиву, що відповідають певному критерію, немає різниці в порядку. Проте для копіювання масиву, створення нового масиву з зворотнім порядком, виводу в один і той же *stream* грає роль порядок. Саме для таких задач є можливість вказання порядку для паралелювання цикла в *OpenMP*.

### **Директива *sections***

Неітеративна паралельна конструкція. Визначає набір незалежних секцій кода (“кінечний паралелізм”). Секції відділяються друг від друга директивою. На відміну від директиви *parallel* секції кода виконується не всіма потоками, а кожна секція виконується окремим потоком. Це гарна заміна використанню функції *OPM\_GET\_THREADS\_NUM* з конструкцією *switch*, яка теж дозволяє задати, що робить потік, основувшись на його номеру по порядку. Директива *sections* менш об’ємна, проте не залежить від кількості наявних потоків. Якщо *switch* приймає у клаузи *case* лише константні вирази, що говорить про те, що кількість потоків не можливо змінити динамічно, то *OpenMP* сам проводить розрахунок логіки, за якою розподіляються паралельні секція по потах. Це показує, що якщо потоків більше ніж секція або навпаки, *OpenMP* має готовий алгоритм для таких ситуацій.

### **Директива *single***

Визначає блок кода, який виконається тільки одним потоком (першим, який дійде до цього блока). Така можливість дає змогу легко проводити ініціалізації різних структур або ресурсів. В деяких випадках повторна ініціалізація змінних може затерти результати, які вже були отримані іншим потоком. Ще більш неприйнятна ситуація трапляється, коли ініціалізованою структурою не проста змінна типу число, буква, рядок чи флаг, а структурою є багаторозмірний масив, дерево чи масив, який потребує початкового сортування. Тоді обчислювальною задачею будуть повторно витратити час процесора, що є дуже неефективно. Ця неефективність походить від багатьох непотрібних обчислень, та існує неефективність, пов'язана з витратою великої кількості пам'яті. Якщо робота з одним і тим же зовнішнім ресурсом, такими як файл, база даних, віддалений сервер, спричинятиме відкриття цього ресурса в кожному потоці, це призведе до великої кількості відкритих дескрипторів в операційній системі, кожен з яких через паралельність може не закриватись або закриватись двічі. Саме ці проблеми вирішує директива *single*.

### **Явне керування розподіленням роботи**

За допомогою функції *OMP\_GET\_THREAD\_NUM* та *OMP\_GET\_NUM\_THREADS* потік може визначити свій номер та загальну кількість потоків, а далі виконати свою частину роботи в залежності від свого номеру (цей підхід широко використовується у програмах на базі інтерфейса).

### **Директиви синхронізації**

*Master* — визначає блок коду, який виконається тільки *master*-ом (нульовим потоком). Ця директива схоже на директиву *single*, проте несе інший логічний зміст. Ця директива виконується нульовим потоком, тож дії в середині блока коду повинні бути направлені на керування потоками, ніж на обчислення. До того ж на відміну від директиви *single* код блока виконається раніше, бо нульовий потік в загальному випадку має менш задач ніж будь-який інший.

*Critical* — визначає критичну секцію, блок кода, який не повинен виконуватись одночасно двома або більшою кількістю потоків. Критична секція — розповсюджений паттерн паралельного програмування. Її реалізують різноманітними засобами: мьютексами, семафорами, моніторами. Розробники *OpenMP* винесли цей паттерн в окрему абстракцію, що призвело до зручності написання коду: не потрібно створювати додаткові об'єкти, *OpenMP* автоматизує цей процес.

*Barrier* — визначає точку бар'єрної синхронізації, в якій кожний потік чекає всіх інших. Ця директива відіграє роль функції *join* в моделі *fork/join*. При цьому *fork*-ом є початок паралельної секції. Такий елемент синхронізації є зручним для неідеально паралельних задач або поєднання двох паралельних задач так, щоб початок першого потоку другої задачі знаходився після кінця останнього потоку першої задачі. Ця директива аналогічна послідовної об'яві двох паралельних секцій.

*TaskWait* — визначає очікування для закінчення задач потомків потоків, які були сгенеровані після початку поточної задачі.

Зважаючи на те, що конструкція *taskwait* немає виразу мови C, як частини свого синтаксису, присутні деякі заборони для вибору місця використання у програмі. Директива *taskwait* може бути розміщена тільки в точці, де вирази базової мови дозволені. Директива *taskwait* не може бути використана в місці, яке слідує за виразами *if*, *while*, *do*, *switch* або *label*.

*Atomic* — визначає змінну в лівій частині оператора “атомарного” присвоювання, який повинен коректно оновлюватись декількома потоками. Ця директива дозволяє замінити мьютекс, який потрібен був би для зміни змінної декількома потоками. Потрібно зважати на те, що *atomic* змінні працюють повільніше за звичайні змінні. Це означає, що, якщо змінна у програмі не змінюється, то краще використовувати звичайні змінні.

*Flush* — явно визначає точку, в якій реалізації повинна забезпечувати однаковий вид пам'яті для всіх потоків. Неявно *FLUSH* присутній в наступних директивах:

*BARRIER, CRITICAL, END CRITICAL, END DO, END PARALLEL, END SECTIONS, END SINGLE, ORDERED, END ORDERED.*

В цілях синхронизації можна також використовувати механізмом замків (*locks*).

#### **1.2.9. Класи змінних**

В *OpenMP* змінних у паралельних областях програми розділяються на два основних класа:

- *SHARED* (загальні; з ім'ям А всі потоки бачать одну змінну) та
- *PRIVATE* (приватні; з ім'ям А кожен потік бачить свою змінну).

Окремі правила визначають поведінку змінних при вході та виходів з паралельної області або паралельного цикла: *REDUCTION, FIRSTPRIVATE, LASTPRIVATE, COPYIN*.

За замовчанням, всі *COMMON*-блоки, а також змінні, які породжені поза паралельної області, при вході в цю область залишаються спільними (*SHARED*). Виключенням є змінні — лічильники ітерацій в циклі. Змінні, які породжені у паралельній області є приватними (*PRIVATE*). Явно назначити клас змінних за замовченням можна за допомогою клаузи *DEFAULT*.

*SHARED* — використовується до змінних, які необхідно зробити спільними.

*PRIVATE* — використовується до змінних, які необхідно зробити приватними. При вході в паралельну область для кожного потоку створюється окремий екземпляр змінної, який не має ніякого зв'язку з оригінальною змінною поза паралельною областю.

*THREADPRIVATE* — використовується к *COMMON*-блокам, які необхідно зробити приватними. Директива повинна бути після кожної декларації *COMMON*-блока.

*FIRSTPRIVATE* — приватні копії змінної при вході в паралельну область ініціалізуються значенням оригінальної змінної.

*LASTPRIVATE* — після кінця паралельного цикла або блока паралельних секцій, потік, яка виконала останню ітерацію цикла або останню секцію блока, оновлює значення оригінальної змінної.

*REDUCTION(+ :A)* — означає змінну, з якою в циклі проводиться *reduction*-операція (наприклад, сумування). При виході з цикла, данна операція проводиться над копіями змінної в усіх потоках, та результат присвоюється оригінальній змінній.

*COPYIN* — застосовується к *COMMON*-блокам, які помічені як *THREADPRIVATE*. При вході в паралельну область приватні копії цих даних ініціалізуються оригінальними значеннями.

### ***Runtime*-процедури та змінні середовища**

В цілях створення середовища запуску паралельних програм, які можна перенести, в *OpenMP* визначен ряд змінних середовища, які контролюють поведінку додатка.

В *OpenMP* передбачен також набір бібліотечних процедур, які дозволяють:

- під час виконання контролювати та запитувати різні параметри, які визначають поведінку додатку (такі як кількість потоків та процесорів, можливість вложеного паралелізму); процедури назначення параметрів мають пріоритет над відповідними змінними середи.

- використовувати синхронізацію на базі замків (*locks*).

### **Змінні середовища**

*OMP\_SCHEDULE* — визначає розподілення ітерацій в циклі, якщо в директиві *DO* використана клауза *SCHEDULE(RUNTIME)*.

*OMP\_NUM\_THREADS* — визначає кількість потоків для виконання паралельних областей додатка.

*OMP\_DYNAMIC* — дозволяє або забороняє динамічне зміну кількості потоків.

*OMP\_NESTED* — дозволяє або забороняє вкладений паралелізм.

### **Процедури для контролю/запроса параметрів середовища виконання**

*OMP\_SET\_NUM\_THREADS* — дозволяє назначити максимальну кількість потоків для використання в наступній паралельній області (якщо цю кількість дозволено динамічно змінювати). Визивається з послідовної області програми.

*OMP\_GET\_MAX\_THREADS* — повертає максимальну кількість потоків.

*OMP\_GET\_NUM\_THREAD* — повертає фактичне число потоків в паралельній області програми.

*OMP\_GET\_NUM\_PROCS* — повертає кількість процесорів, які доступні додатку.

*OMP\_IN\_PARALLEL* — повертає *TRUE*, якщо викликана з паралельної області програми.

*OMP\_SET\_DYNAMIC* / *OMP\_GET\_DYNAMIC* — встановлює / запитує стан флага, який дозволяє динамічно змінювати кількість потоків.

*OMP\_GET\_NESTED* / *OMP\_SET\_NESTED* — встановлює / запитує стан флага, який дозволяє вкладений паралелізм.

### **Процедури синхронізації на базі замків**

В якості замків використовується загальні змінні типа *INTEGER* (розмір повинен бути достатнім для зберегання адреси). Данні змінні повині використовуватись тільки параметри примітивів синхронізації.

*OMP\_INIT\_LOCK*(var) / *OMP\_DESTROY\_LOCK*(var) — ініціалізує замок, який пов'язан зі змінною var.

*OMP\_SET\_LOCK* — змушує потік, який викликав цю процедуру, дочекатись замка, а далі захоплює його.

*OMP\_UNSET\_LOCK* — звільняє замок, якщо він був захоплений потіком, який визвав цю процедуру.

*OMP\_TEST\_LOCK* — пробує захопити вказаний замок. Якщо це неможливо, повертає *FALSE*.

### **1.3. Специфікація OpenMPI для мов C/C++**

Специфікація *OpenMP* для мов C/C++, яка випущена на рік пізніше фортраної, містить в основному аналогічну функціональність.

Необхідно лише відмітити наступні моменти:

1) Замість спецкоментарів використовуються директиви компілятора “`#pragma omp`”.

2) Компілятор з підтримкою *OpenMP* визначає макрос “`_OPENMP`”, який може використовуватись для умовної компіляції окремих блоків, які характерні для паралельної версії програми.

3) Розпаралелення застосовується к *for*-циклам, для цього використовується директива “`#pragma omp for`”. В паралельних циклах забороняється використовувати оператор *break*.

4) Статичні (*static*) змінні, які визначені в паралельній області програми є спільними (*shared*).

5) Пам'ять, яка виділена за допомогою *malloc()*, є спільною (проте вказівник на неї може бути, як спільним, так і приватним).

6) Типи та функції *OpenMP* визначені в файлі `<omp.h>`.

7) Крім звичайних, можливі також “вкладені” (*nested*) замки — замість логічних змінних використовуються цілі числа, та потік, яка вже захопила замок, при повторному захопленні може збільшити це число[2].

#### **1.4. Порівняння спільної та розподіленої пам'яті**

Машини, що можуть проводити паралельні обчислення, можуть мати різні типи пам'яті: розподілену та спільну.

##### **Розподілена пам'ять**

Цей тип характеризується такими ознаками:

- кожен процесор має свій адресний простір пам'яті.
- значення змінних незалжені. На одному процесорі  $x$  може дорівнювати 2, і водночас в іншому — 3.
- приклади: кластера лінукс, *Blue Gene/L*.

##### **Спільна пам'ять**

Цей тип характеризується такими ознаками:

- також називається *Symmetric Multiprocessing (SMP)*.
- один адресний простір для всіх процесорів. Якщо один процесор присвоює  $x$  значення 2, то  $x$  дорівнює 2 на інших процесорах.
- приклади: *IBM p-series*, багатоядерні персональні комп'ютери.

### **Використання різних типів пам'яті**

Декілька процесів:

- кожен процесор виконує незалежну задачу з його власним адресним пространством пам'яті.

Декілька потоків:

- процес створює додаткові задачі (потоки) з тим самим адресним простором пам'яті[3].

### **1.5. Розмір стеку та прив'язка потоків**

#### **Розмір стеку**

Стандарт *OpenMP* не вказує об'єм пам'яті стеку, який має мати кожен потік. Саме тому різні реалізації можуть мати різний розмір стеку.

За замовчуванням розмір стеку є досить малим. Для прикладу приведено розміри стеку та розміри доступних масивів типу *double* в табл. 1.5.1.1.

Компілятор	Приблизний розмір стеку	Приблизний розмір масиву
<i>Linux icc, ifort</i>	4 MB	700 x 700
<i>Linux pgcc, pgf90</i>	8 MB	1000 x 1000
<i>Linux gcc, gfortran</i>	2 MB	500 x 500

Табл. 1.5.1.1

Потоки, які використовують повністю їх стек, мають непередбачену поведінку. Вони можуть завершитись з помилкою *seg fault*, а можуть і ні. Додаток загалом може продовжувати роботу навіть попри те, що данні спотворено.

Статично злінкований код може бути опорною причиною для подальших меж об'єму стека.



Також обмеження поточного користувача можуть зменшити розмір стека.

Якщо реалізація *OpenMP* підтримує стандарт *OpenMP* 3.0, можливо використати *OMP\_STACKSIZE* змінну середовища для того, щоб задати розмір стеку для кожного потоку перед виконанням програми. Наприклад:

- *setenv OMP\_STACKSIZE 2000500B*
- *setenv OMP\_STACKSIZE "300 k "*
- *setenv OMP\_STACKSIZE 10M*
- *setenv OMP\_STACKSIZE " 10 M "*
- *setenv OMP\_STACKSIZE "20 m "*
- *setenv OMP\_STACKSIZE " 1G "*
- *setenv OMP\_STACKSIZE 20000*

### **Прив'язка потоків**

В деяких випадках програма працює краще, якщо потоки прив'язані до процесорів/ядер.

“Прив'язка” потоку до процесора означає, що потік буде запланован операційною системою завжди запускатись на тому ж самому процесорі. Інакше, потоки можуть бути заплановані виконуватись на будь-якому процесорі та “скакати” між процесорами з кожним інтервалом часу.

Також це називається “потокова близькість” або “процесорна близькість”.

Прив'язка потоків до процесорів може привести до кращою утилізації кешей, що призведе до зменшення дорогого доступу до пам'яті. Це головна мотивація для прив'язки потоків до процесорів.

Зважаючи на платформу, операційну систему, компілятор та *OpenMP* реалізацію, прив'язка потоків до процесорів може бути зроблена декількома різними шляхами.

*OpenMP* 3.1 API впроваджує змінні середовища для ввімкнення або вимкнення процесорної прив'язки. Наприклад:

***setenv OMP\_PROC\_BIND TRUE***

***setenv OMP\_PROC\_BIND FALSE***

На більшому високому рівні абстракції до процесорів можуть прив'язуватись процеси замість потоків.

## **1.6. Нагляд, налагодження та інструменти аналізу ефективності для OpenMP**

### **Нагляд та налагодження потоків**

Налагоджувачі різняться в їхній здібності оброблювати потоки. *TotalView debugger* є рекомендованим налагоджувачем для паралельних програм. Він добре підходить водночас і для наглядом та налагодженням поточних програм.

*TotalView* має такі елементи:

1. Панель *stack trace* головного потоку.
2. Панель для розрізнення процесів/потоків.
3. Панель *stack frame* головного потоку для показу спільних змінних.
4. Панель для показу *stack trace* для неголовних потоків.
5. Панель *stack frame* для неголовних потоків.
6. Головне вікно, яке показує всі потоки.
7. Панель потоків, яка показує всі потоки та обраний потік.

Команда *ps* в лінукс забезпечує деякі прапори для просмотру інформації потоку. Деякі приклади наведено нижче:

*% ps -Lf*

UID

PID

PPID

LWP

C

NLWP STIME TTY TIME

CMD

blaise

22529 28240 22529 0 5 11:31 pts/53 00:00:00 a.out

```
blaise 22529 28240 22530 99 5      11:31 pts/53 00:01:24 a.out
blaise 22529 28240 22531 99 5      11:31 pts/53 00:01:24 a.out
blaise 22529 28240 22532 99 5      11:31 pts/53 00:01:24 a.out
blaise 22529 28240 22533 99 5      11:31 pts/53 00:01:24 a.out
```

% *ps -T*

**PID SPID TTY TIME CMD**

```
22529 22529 pts/53 00:00:00 a.out
22529 22530 pts/53 00:01:49 a.out
22529 22531 pts/53 00:01:49 a.out
22529 22532 pts/53 00:01:49 a.out
22529 22533 pts/53 00:01:49 a.out
```

% *ps -Lm*

**PID LWP TTY TIME CMD**

```
22529 - pts/53 00:18:56 a.out
- 22529 - 00:00:00 -
- 22530 - 00:04:44 -
- 22531 - 00:04:44 -
- 22532 - 00:04:44 -
- 22533 - 00:04:44 -
```

Кластера лінукс також забезпечують команду *top* для нагляду за процесами на елементі кластера. Якщо використовувати флаг *-H*, потоки, які містяться у данному процесі.

### **Інструмент для аналізу ефективності**

Є велика кількість інструментів для аналізу ефективності, які можна використати з *OpenMP*. Приклади наведено нижче:

- *Open | SpeedShop*
- *TAU*

- *PAPI*
- *Intel Vtune Amplifier*
- *ThreadSpotter*[5]

### **Висновки:**

1. Виконан аналіз засобів написання програм, які використовують паралельну систему обчислення, за допомогою бібліотеки *OpenMP*. Показано, що паралельність програм досягається за рахунок використання директив *#pragma omp*, що дозволяє компілювати код програми, який написан для паралельного виконання, з компілятором, який не підтримує *OpenMP*, проте з утратою паралельності.
2. Розглянуто директиви для розпаралелення циклів та директиви для балансування навантаження при цьому. Показано, що різні задачі потребують різних стратегій навантаження: статичної, динамичної або керованої.
3. Розглянуто типи змінних в залежності від їх поведінки у різних потоках. Показано, що зміна типу змінної за допомогою спеціальних директив може змістовно змінити роботу програми.
4. Проведено аналіз систем з спільною пам'яттю та розподіленою. Показано, що використання кожного типу на відповідному йому рівні краще за використання тільки одного типу пам'яті.
5. Наведені приклади інструментів для роботи за паралельними програми. Показано, які засоби є можливі для аналізу роботи потоків. Наведено приклади використання цих інструментів.

## РОЗДІЛ 2. РОЗРОБКА ПРОГРАМИ ПРГ1 ДЛЯ ПКС СП

### 2.1. Розробка паралельного математичного алгоритму.

Структурна схема для ПКС СП знаходиться у Додатку А.

1.  $z_i = \max(Z_h), i \in [0..P-1]$
2.  $z = \max(z, z_i), i \in [0..P-1]$
3.  $C_h = \text{sort } 1(S_h)$
4.  $C = \text{sort } 2(C_h)$
5.  $A_h = z \cdot E \cdot (MO \cdot MT_h) + C_h$

## 2.2. Розробка алгоритмів процесів.

$T_1$ :		$T_i, i \leftarrow [2..P-1]$ :	
1. Ввести Z, MO.		1. Чекати сигнала про завершення введення від $T_1$ та $T_p$ .	$W_1$
2. Сигнал про завершення введення до всіх потоків.	$S_1$	2. Обрахувати $z_h = \max(Z_h)$ .	
3. Чекати сигнала про завершення введення від потоку $T_p$ .	$W_1$	3. Обрахувати $z = \max(z, z_h)$ .	KY <sub>1</sub>
4. Обрахувати $z_h = \max(Z_h)$ .		4. Сигнал про завершення обрахунку $z$ до всіх потоків.	$S_2$
5. Обрахувати $z = \max(z, z_h)$ .	KY <sub>1</sub>	5. Чекати сигнал про завершення обрахунку $z$ від всіх потоків.	$W_2$
6. Сигнал про завершення обрахунку $z$ до всіх потоків.	$S_2$	6. Копіювати $z_i = z, E_i = E, MO_i = MO$ .	KY <sub>2</sub>
7. Чекати сигнал про завершення обрахунку $z$ від всіх потоків.	$W_2$	7. Обрахувати $B_h = z_i \cdot E_i \cdot (MO_i \cdot MT_h)$ .	
8. Копіювати $z_1 = z, E_1 = E, MO_1 = MO$ .	KY <sub>2</sub>	8. Сигнал про завершення обрахунку $B_h$ до всіх потоків.	$S_3$
9. Обрахувати $B_h = z_1 \cdot E_1 \cdot (MO_1 \cdot MT_h)$ .		9. Чекати сигнал про завершення обрахунку $B_h$ від всіх потоків.	$W_3$
10. Сигнал про завершення обрахунку $B_h$ до всіх потоків.	$S_3$	10. Обрахувати $C_h = sort\ 1(S_h)$ .	
11. Чекати сигнал про завершення обрахунку $B_h$ від всіх потоків.	$W_3$	11. Сигнал про завершення обрахунку $C_h$ до всіх потоків.	$S_4$
12. Обрахувати $C_h = sort\ 1(S_h)$ .		12. Чекати сигнал про завершення обрахунку $C_h$ від всіх потоків.	$W_4$
13. Сигнал про завершення обрахунку $C_h$ до всіх потоків.	$S_4$	13. Обрахувати $C = sort\ 2(C_h)$ .	
14. Чекати сигнал про завершення обрахунку $C_h$ від всіх потоків.	$W_4$	14. Сигнал про завершення обрахунку $C$ до всіх потоків.	$S_5$
15. Обрахувати $C = sort\ 2(C_h)$ .	$S_5$	15. Чекати сигнал про завершення обрахунку $C$ від всіх потоків.	$W_5$
16. Сигнал про завершення обрахунку $C$ до всіх потоків.		16. Обрахувати $A_h = B_h + C_h$ .	
17. Чекати сигнал про завершення обрахунку $C$ від всіх потоків.	$W_5$	17. Сигнал про завершення обрахунку $A_h$ до $T_1$ .	$S_6$
18. Обрахувати $A_h = B_h + C_h$ .			
19. Чекати сигнал про завершення обрахунку $A_h$ від всіх потоків.	$W_6$		
20. Вивести A.			

$T_p$ : 1. Ввести $E, S, MT$ . 2. Сигнал про завершення введення до всіх потоків. 3. Чекати сигнала про завершення введення від потоку $T_p$ . 4. Обрахувати $z_h = \max(Z_h)$ . 5. Обрахувати $z = \max(z, z_h)$ . 6. Сигнал про завершення обрахунку $z$ до всіх потоків. 7. Чекати сигнал про завершення обрахунку $z$ від всіх потоків. 8. Копіювати $z_p = z, E_p = E, MO_p = MO$ . 9. Обрахувати $B_h = z_p \cdot E_p \cdot (MO_p \cdot MT_h)$ . 10. Сигнал про завершення обрахунку $B_h$ до всіх потоків. 11. Чекати сигнал про завершення обрахунку $B_h$ від всіх потоків. 12. Обрахувати $C_h = \text{sort } 1(S_h)$ . 13. Сигнал про завершення обрахунку $C_h$ до всіх потоків. 14. Чекати сигнал про завершення обрахунку $C_h$ від всіх потоків. 15. Обрахувати $C = \text{sort } 2(C_h)$ . 16. Сигнал про завершення обрахунку $C$ до всіх потоків. 17. Чекати сигнал про завершення обрахунку $C$ від всіх потоків. 18. Обрахувати $A_h = B_h + C_h$ . 19. Чекати сигнал про завершення обрахунку $A_h$ від всіх потоків. 20. Вивести $A$ .	$S_1$ $W_1$  $KY_1$ $S_2$ $W_2$ $KY_2$  $S_3$ $W_3$ $S_4$  $W_4$  $S_5$ $W_5$  $W_6$
--	---

### 2.3. Розробка схеми взаємодії процесів

Схема взаємодії процесів для ПКС СП знаходиться у Додатку В.

Критичні секції *zUpdate* та *dataCopy* використовуються для доступу к спільним ресурсам. При цьому *zUpdate* використовується, як для читання, так і для запису в змінну *z*. Критична секція *dataCopy* використовується лише для читання зі змінних *z*, *E*, *MO*.

Наступний бар'єр потрібен для синхронізації потоків після вводу даних.

Наступний *for* використовується для обрахунку максимального *z*.

Наступний бар'єр потрібен для синхронізації потоків після обрахунку максимального *z*.

Наступний *for* обчислення результату множення матриць.

Наступний бар'єр потрібен для синхронізації потоків після обчислення результата множення матриць.

Секція *single* використовується для сортування вектору *S*.

Наступний бар'єр, потрібен для синхронізації потоків після сортування вектору *S*.

Кінець паралельної секції (*parallel end*) потрібен для синхронізації потоків для виводу результату загальної задачі.



## 2.4. Розробка програми ПРГ1

Вхідні данні: Z, MO, E, S, MT.

Вихідні данні: A.

Тимчасові данні: z, B, C.

mval — максимальне значення серед  $Z_h$ .

z — максимальне значення серед Z.

MO1, E1, z1 — копії MO, E та z для обробки потоком відповідно.

X — елемент матриці, яка є результатом множення MO та MT.

C — відсортований S.

ind — масив індексів для сортування цільного масиву S.

mini — індекс частини S, яка має максимальний елемент у місці, вказаному індексом масиву ind.

ReadArr — функція для створення масиву заданої довжини, заповненого одиницями.

ReadVec — створення масиву довжиною N, заповненого одиницями.

ReadMat — створення масиву довжиною N\*N, заповненого одиницями.

Arrcpy — функція для копіювання значень з іншого масиву заданої довжини.

Veccpy — функція для копіювання масиву довжиною N.

Matcpy — функція для копіювання масиву довжиною N\*N.

get\_timestamp — функція для отримання поточного часу.

## 2.5. Тестування програми ПРГ1

Таблиця 2.1 Час виконання програми для ПРГ1

N	T1	T10	T20	T30	T40
960	4.61	0.6987	0.479	0.4559	0.4723
1920	49.44	7.1341	4.1266	4.104	4.0984
2880	212.46	25.5548	14.4855	15.5079	14.5219

Таблиця 2.2 Значення Кп для ПРГ1

N	Кількість процесорів (P)				
	1	10	20	30	40
960	1	6.6	9.63	10.12	9.77
1920	1	6.93	11.98	12.05	12.09
2880	1	8.31	14.67	13.7	14.63

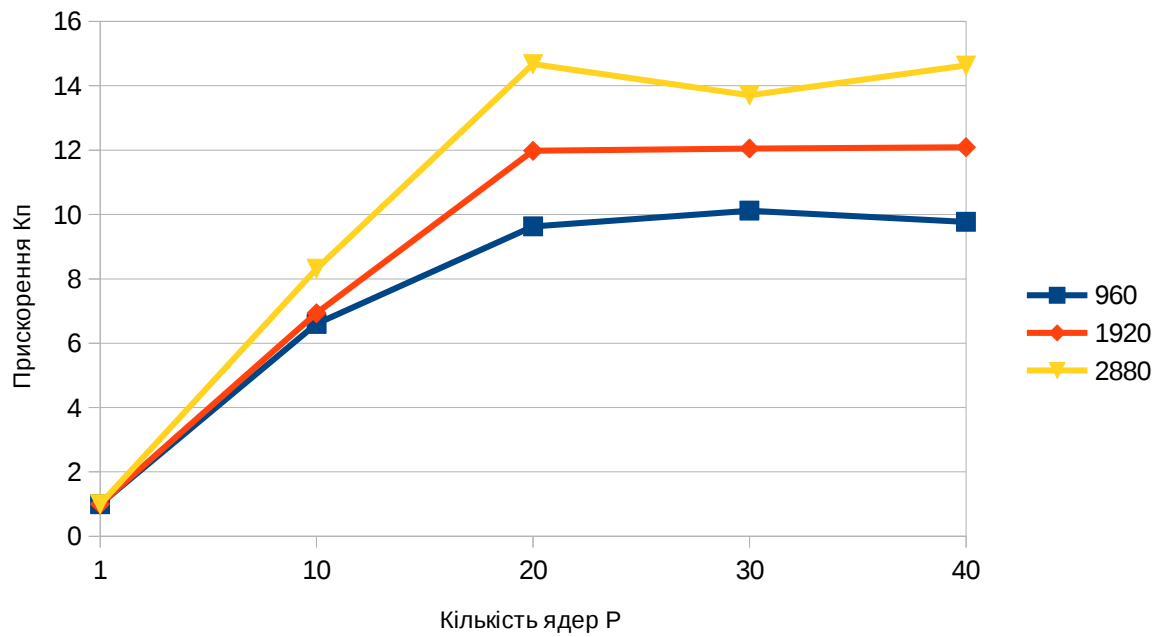
Таблиця 2.3 Значення Ке для ПРГ1

N	Кількість процесорів (P)				
	1	10	20	30	40
960	100	66	48.15	33.73	24.43
1920	100	69.3	59.9	40.17	30.23
2880	100	83.1	73.35	45.67	35.16

В таблиці 2.1 наведені часи виконання програми ПРГ1 за різних N та P.

В таблиці 2.2 наведені коефіцієнти прискорення програми ПРГ1 за різних N та P.

В таблиці 2.3 наведені коефіцієнти ефективності програми ПРГ1 за різних N та P.



*Рис 2.4 Програма ПРГ1. Графік зміни коефіцієнту прискорення  $K_p$  в залежності від кількості ядер*

На Рис. 2.4 наведено графік залежності коефіцієнта прискорення від кількості ядер при різному N.

## 2.6. Висновки до розділу 2

Виконано розробку програми ПРГ1 для ПКС ОП з використанням мови C++ та засобів синхронізації бібліотеки openMP. Тестування програми показало наступне:

- використання багатоядерної ПКС та програми ПРГ1 забезпечує скорочення часу обчислення заданої математичної задачі. Значення  $K_p$  лежить в межах 6,6 та 14,67;
- максимальне значення  $K_p$  забезпечує ПКС з  $P=20$  та  $N=2880$ ;
- мінімальне значення  $K_p$  забезпечує ПКС з  $P=10$  та  $N=960$ ;
- з ростом  $N$  зміна  $K_u$  є додатковою;
- з ростом  $P$  зміна  $K_u$  є від'ємною;
- використання від 15 до 25 процесорів є оптимальним.

## РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА ПРОГРАМИ ПРГ2 ДЛЯ ПКС ЛП

### 3.1. Розробка паралельного математичного алгоритму.

Структурна схема ПКС ЛП наведена у Додатку Б.

1.  $z_i = \max(Z_h), i \in [0..P-1]$
2.  $z = \max(z, z_i), i \in [0..P-1]$
3.  $C_h = \text{sort } 1(S_h)$
4.  $C = \text{sort } 2(C_h)$
5.  $A_h = z \cdot E \cdot (MO \cdot MT_h) + C_h$

### 3.2. Розробка алгоритмів процесів.

Сортвання та пошук максимуму на останньому етапі проходять у одному або в двох (в залежності від парності половини кількості процесорів) центральних процесах. Хай  $mid = \lfloor P/2 \rfloor$ ,  $quarter = \lfloor mid/2 \rfloor$ , тоді якщо  $quarter$  — непарна кількість, то центральний процес -  $T_{(quarter+1)}$ , інакше центральні процеси -  $T_{quarter}$  та  $T_{(quarter+1)}$ .

Результати сортвання та пошуку максимуму,  $C_h$  та  $z$ , приходять з центрального процесу. Коли центральних процесів два, результат приходить з ближчого. Алгоритм визначення процесу, з якого приходить результати, чітко визначений і для того, щоб описувати його в кожному потоці, введемо потік  $T_c$ , який буде найближчим центральним процесом, та  $T_f$ , які є центральними процесами у випадку, коли їх два.

В залежності від розташування процесу визначається напрям передачі результатів. Для  $i < mid$ :  $i \leq quarter$ ,  $dir = 1$ , для  $i > quarter$ ,  $dir = -1$ . З допомогою напрямом можливо визначити індекс попереднього та наступного процесів у ланцюгу передачі результатів.

Це відповідно  $T_{(i-dir)}$  та  $T_{(i+dir)}$ . Для  $i \geq mid$  процеси мають один напрям передачі.

Розмірність масиву  $C$  сожним кроком збільшується. У потік  $T_i$  передається масив з розмірністю залежною від  $i$ . Якщо  $i \leq quarter$ , то передається  $C_{((i-1)*2h)}$ . Якщо  $i > quarter$  та  $i < mid$ , то передається  $C_{((mid-i)*2h)}$ . Для спрощення хай до  $T_i$  передається  $C_{(k(i))}$ .

[illegible]

$T_c$ :		$T_f$	
1. Чекати сигнал з передачею $Z_h$ та $S_h$ з $T_1$ .	$W_1$	1. Чекати сигнал з передачею $Z_h$ та $S_h$ з $T_1$ .	$W_1$
2. Обрахувати $z_c = \max(Z_h)$ .		2. Обрахувати $z_f = \max(Z_h)$ .	
3. Обрахувати $C_h = \text{sort } 1(S_h)$		3. Обрахувати $C_h = \text{sort } 1(S_h)$	
4. Чекати сигналу з $z_{(c+mid)}$ та $C_h$ з $T_{(c+mid)}$	$W_2$	4. Чекати сигналу з $z_{(f+mid)}$ та $C_h$ з $T_{(f+mid)}$	$W_2$
5. Чекати сигналу з $z_{(c-dir)}$ та $C_{((mid-1) \cdot h)}$ з $T_P$	$W_3$	5. Чекати сигналу з $z_{(f-dir)}$ та $C_{((mid-1) \cdot h)}$ з $T_P$	$W_3$
6. Чекати сигналу з $z_{(c+dir)}$ та $C_{((mid-1) \cdot h)}$ з $T_P$	$W_4$	6. Обрахувати $z_f = \max(z_f, z_{(f+mid)}, z_{(f-dir)})$	
7. Обрахувати $z_c = \max(z_c, z_{(c+mid)}, z_{(c-dir)}, z_{(c+dir)})$		7. Обрахувати $C_{(mid \cdot h)} = \text{sort } 2(C_h, C_h, C_{((mid-2) \cdot h)})$	
8. Обрахувати $C_N = \text{sort } 2(C_h, C_h, C_{((mid-1) \cdot h)}, C_{((mid-1) \cdot h)})$	$S_1$	8. Сигнал з передачею $z_f$ та $C_{(mid \cdot h)}$ до $T_{(f+dir)}$	$S_1$
9. Сигнал з передачею $z_{mid}$ та $C_H$ до всіх потоків.		9. Чекати сигнал з передачею $z_{(f+dir)}$ та $C_{(mid \cdot h)}$ з $T_{(f+dir)}$	$W_4$
10. Чекати сигналу з $E_c, MO_c, MT_h$ з $T_1$ .	$W_5$	10. Обрахувати $z_f = \max(z_f, z_{(f+dir)})$	
11. Обрахувати $A_h = z_c \cdot E_c \cdot (MO_c \cdot MT_h) + C_h$		11. Обрахувати $C_N = \text{sort } 2(C_{(mid \cdot h)}, C_{(mid \cdot h)})$	
12. Сигнал з $A_h$ до $T_{mid}$	$S_2$	12. Сигнал з передачею $z_{mid}$ та $C_H$ до всіх потоків	$S_2$
		13. Чекати сигналу з $E_i, MO_i, MT_h$ з $T_1$ .	$W_5$
		14. Обрахувати $A_h = z_f \cdot E_f \cdot (MO_f \cdot MT_h) + C_h$ .	
		15. Сигнал з $A_h$ до $T_{mid}$	$S_3$





### 3.3. Розробка схеми взаємодії процесів

Схема взаємодії процесів для ПКС ЛП знаходиться у Додатку Г.

Процес  $T_i$ , де  $i \geq \text{mid}$  взаємодіє лише з потоками:  $T(i-\text{mid})$ ,  $T_1$ ,  $T_c$  та  $T_{\text{mid}}$ . З  $T_1$  він отримує вхідні данні, до  $T(i-\text{mid})$  та з  $T_c$  він відповідно посиляє та отримує відсортований  $Sh$  та  $z_{\text{Max}}$ . До  $T_{\text{mid}}$  він посиляє  $Ah$ .

Процес  $T_i$ , де  $i > 1$ ,  $i < \text{mid} - 1$ ,  $i \neq c$ , отримує відсортовані  $Sh$  та  $z_{\text{Max}}$  з  $T(i-\text{dir})$  та  $T(i+\text{mid})$  та посиляє ці та свій  $Sh$  та  $z_{\text{Max}}$  до  $T(i+\text{dir})$ . З  $T_1$ ,  $T_c$  та  $T_{\text{mid}}$  працює таким самим чином, як і  $T_i$ , де  $i \geq \text{mid}$ .

## 2.4. Розробка програми ПРГ2

Вхідні данні: Z, MO, E, S, MT.

Вихідні данні: A.

Тимчасові данні: z, B, C.

$mid = \lfloor P/2 \rfloor$ ,  $quarter = \lfloor mid/2 \rfloor$

graph\_comm, topo\_comm — комутатори для основного графу та взяття інформації про граф.

mpiRun — процедура запуску обчислень.

maxSort — процедура непаралельного знаходження максимуму та сортування.

mergeSend — збору відсортованих частин масиву та локальних максимумів.

mergeN — функція для спільного сортування N відсортованих масивів.

index, edges — масиви для задання кількості суміжних ребер, початків та кінців ребер графа.

initVektor, initMatrix — читання векторів та матриць.

Ei, Moi, Mth, Sh, Ah — данні для обчислень у конкретному потоці.

ZH\_SENDING — мітка передачі Zh при знаходженні максимуму.

SH\_SENDING — мітка передачі Sh при сортуванні.

MAX\_Z - мітка при передачі локального максимуму.

SORTED\_S — мітка при передачі відсортованої частини.

PART\_C — мітка при передачі частини C.

TOTAL\_MAX\_Z — мітка при передачі загального максимуму.

E\_SENDING — мітка при передачі E.

MO\_SENDING — мітка при передачі MO.

MTH\_SENDING — мітка при передачі частини MT.

AH\_SENDING — мітка при передачі частини A.

## 2.5. Тестування програми ПРГ2

Таблиця 3.1 Час виконання програми для ПРГ2

N	T1	T10	T20	T30	T40
960	4.37	0.5345	0.6229	0.4964	0.4427
1920	46.81	5.9212	5.3042	4.3175	4.3098
2880	201.13	25.5474	16.9096	16.5257	16.4143

Таблиця 3.2 Значення Кп для ПРГ1

N	Кількість процесорів (P)				
	1	10	20	30	40
960	1	8.63	7.41	9.29	10.42
1920	1	8.35	9.32	11.45	11.47
2880	1	8.32	12.56	12.86	12.94

Таблиця 3.3 Значення Ке для ПРГ1

N	Кількість процесорів (P)				
	1	10	20	30	40
960	100	86.3	37.05	37.67	26.05
1920	100	83.5	46.6	38.17	28.88
2880	100	83.2	62.8	42.67	32.35

В таблиці 3.1 наведені часи виконання програми ПРГ1 за різних N та P.

В таблиці 3.2 наведені коефіцієнти прискорення програми ПРГ1 за різних N та P.

В таблиці 3.3 наведені коефіцієнти ефективності програми ПРГ1 за різних N та P.

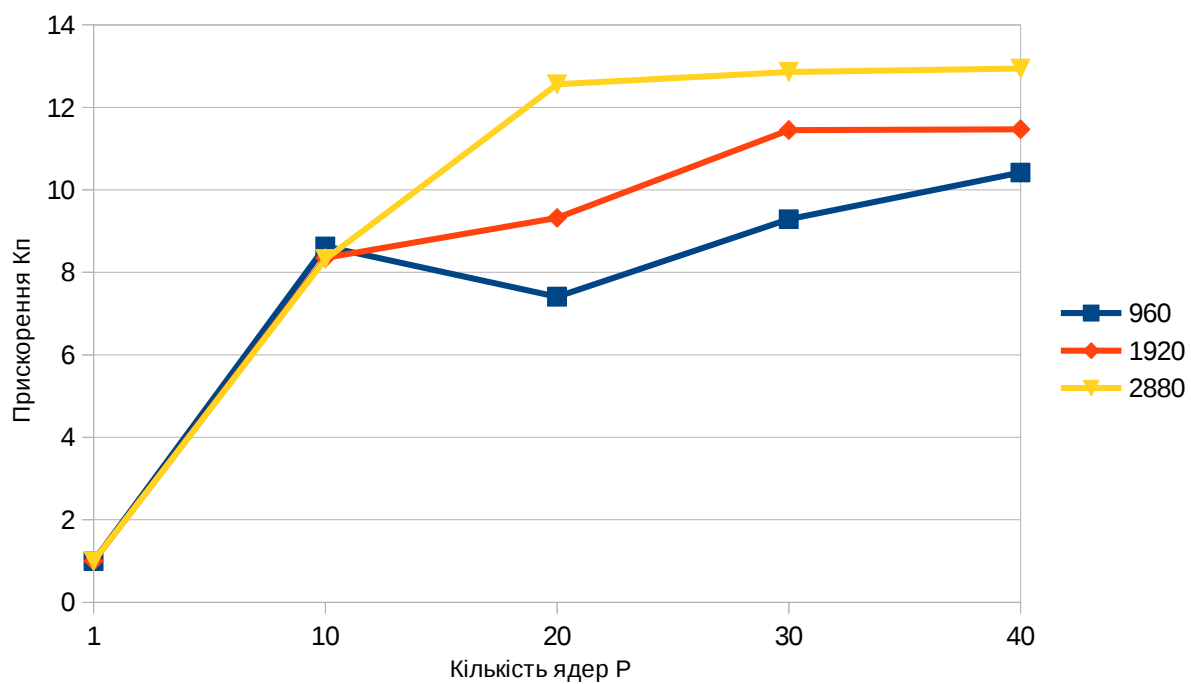


Рис 3.4 Програма ПРГ2. Графік зміни коефіцієнту прискорення  $K_p$  в залежності від кількості ядер

На Рис. 3.4 наведено графік залежності коефіцієнта прискорення від кількості ядер при різному  $N$ .

## 2.6. Висновки до розділу 3

Виконано розробку програми ПРГ2 для ПКС ЛП з використанням мови C++ та засобів синхронізації бібліотеки MPI. Тестування програми показало наступне:

- використання багатоядерної ПКС та програми ПРГ2 забезпечує скорочення часу обчислення заданої математичної задачі. Значення  $K_p$  лежить в межах 8,32 та 12,94;
- максимальне значення  $K_p$  забезпечує ПКС з  $P=40$  та  $N=2880$ ;
- мінімальне значення  $K_p$  забезпечує ПКС з  $P=10$  та  $N=2880$ ;
- з ростом  $N$  зміна  $K_u$  є додатковою для всіх  $P$  крім 10;
- з ростом  $P$  зміна  $K_u$  є від'ємною;
- використання від 15 до 25 процесорів є оптимальним для  $N=2880$ , від 25 до 35 для  $N=1920$  та від 35 до 45 для  $N=960$ .

#### 4. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ ДО РОБОТИ

Виконано розробку програми ПРГ1 для ПКС ОП з використанням мови C++ та засобів синхронізації бібліотеки *openMP* та програми ПРГ2 для ПКС ЛП з використанням мови C++ та засобів синхронізації бібліотеки *MP*. Тестування програм показало наступне:

- використання багатоядерної ПКС з програми ПРГ1 або ПРГ2 забезпечує скорочення часу обчислення заданої математичної задачі. Діапазон значень  $K_p$  для ПРГ1 є більшим за діапазон для ПРГ2, а середні значення приблизно однакові. Це показує, що *openMP* ефективніший при великих  $P$  та  $N$ , а *MP* при малих;
- максимальне значення  $K_p$  забезпечує ПКС з більшим  $N$  та великим  $P$ ;
- мінімальне значення  $K_p$  забезпечує ПКС з  $P=10$ , для ПРГ2 при великому  $N$ , для ПРГ1 — при малому;
- з ростом  $N$  зміна  $K_u$  є додатковою;
- з ростом  $P$  зміна  $K_u$  є від'ємною;
- використання від 15 до 25 процесорів є оптимальним для ПРГ1, діапазон змінюється в залежності від  $N$  для ПРГ2;
- в середньому абсолютний час виконання програми більший для ПРГ2. Також на ПРГ2 більше впливає збільшення  $N$  та  $P$ , проте на малих  $N$  та  $P$  дає кращі результати.

## 5. СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Kos66, Введение в OpenMP: параллельное программирование на C++ // Intel Developer Zone, 2011. [Електронний ресурс] — Режим доступу: <https://software.intel.com/ru-ru/blogs/2011/11/21/openmp-c>
2. Что такое OpenMP? // Лаборатория Паралельних Інформаційних Технологій, НИВЦ МГУ. [Електронний ресурс] — Режим доступу: [https://parallel.ru/tech/tech\\_dev/openmp.html](https://parallel.ru/tech/tech_dev/openmp.html)
3. Sondak D. Parallel Processing with OpenMP // Boston University, Scientific Computing and Visualization Office of Information Technology. [Електронний ресурс] — Режим доступу: [http://www.compunity.org/training/tutorials/openmp\\_Boston.pdf](http://www.compunity.org/training/tutorials/openmp_Boston.pdf)
4. Blaise B. OpenMP // Lawrence Livermore National Laboratory. [Електронний ресурс] — Режим доступу: <https://computing.llnl.gov/tutorials/openMP/>



Структурна схема ПКС СП

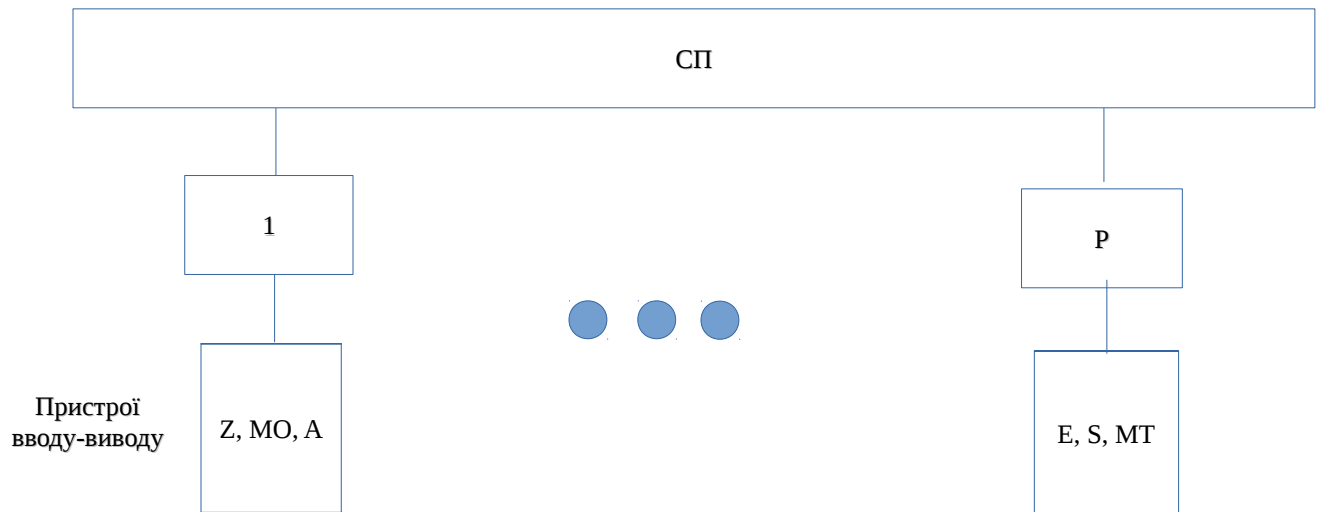


Рис. 2.1. Структура ПКС ОП

### Структурна схема ПКС ЛП

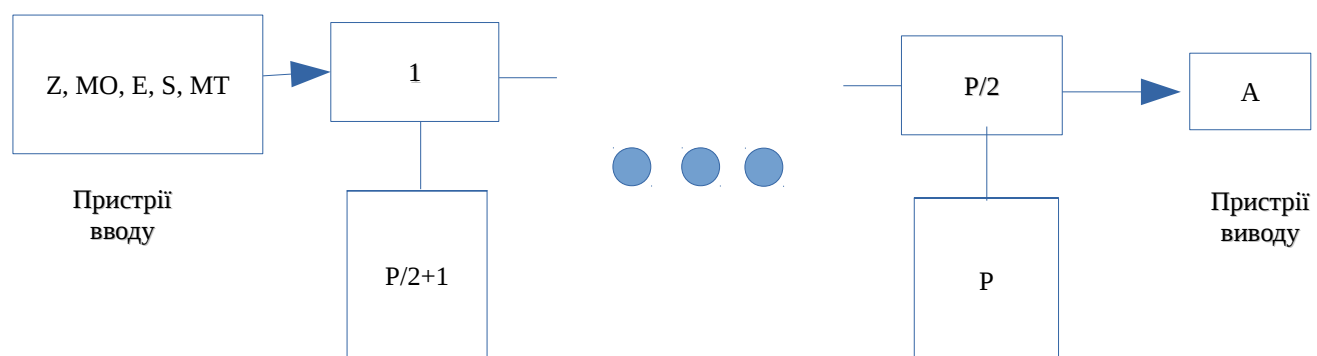
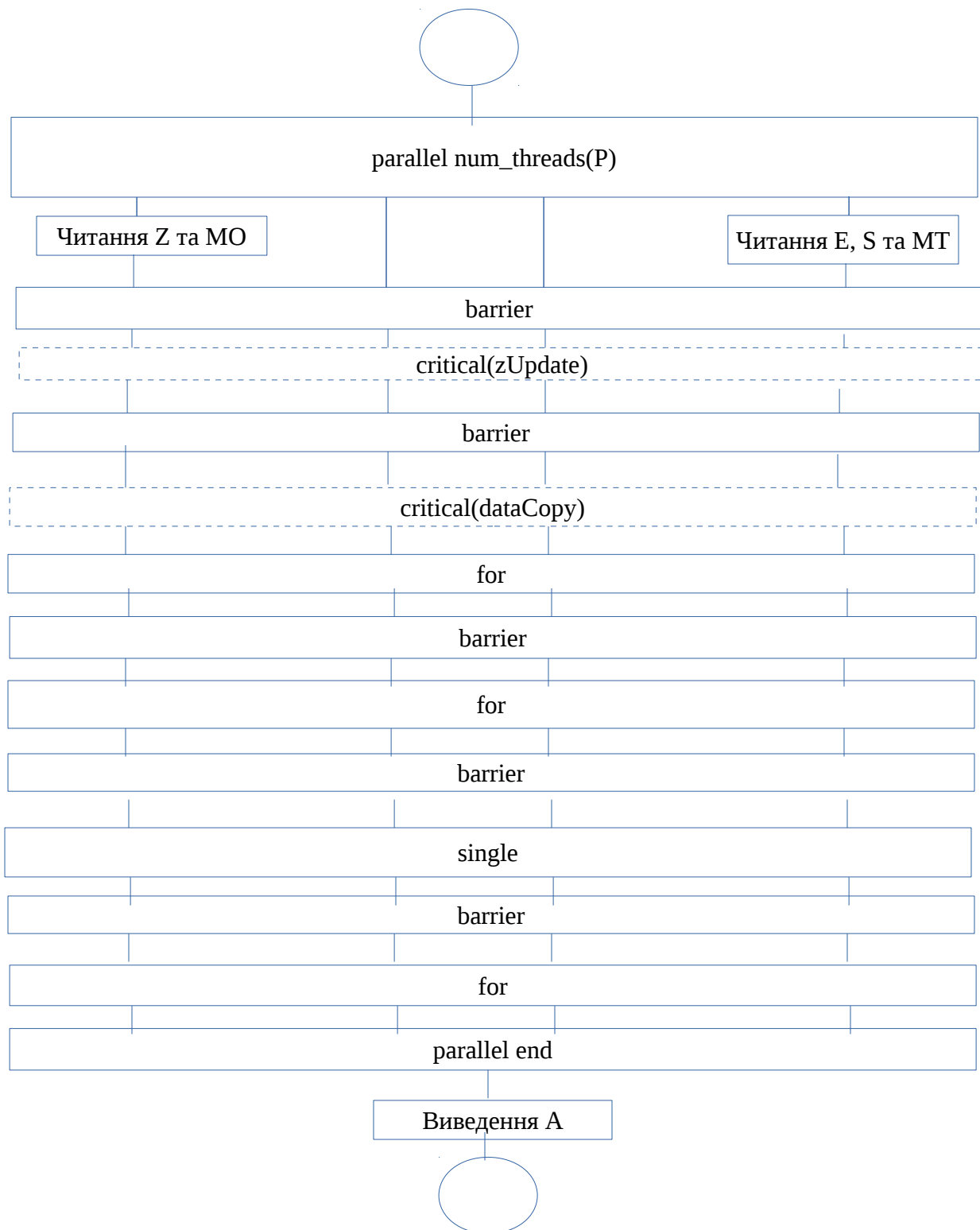


Рис. 3.1. Структура ПКС ЛП

## Схема алгоритму програми ПРГ1



# Схема алгоритму програми ПРГ2

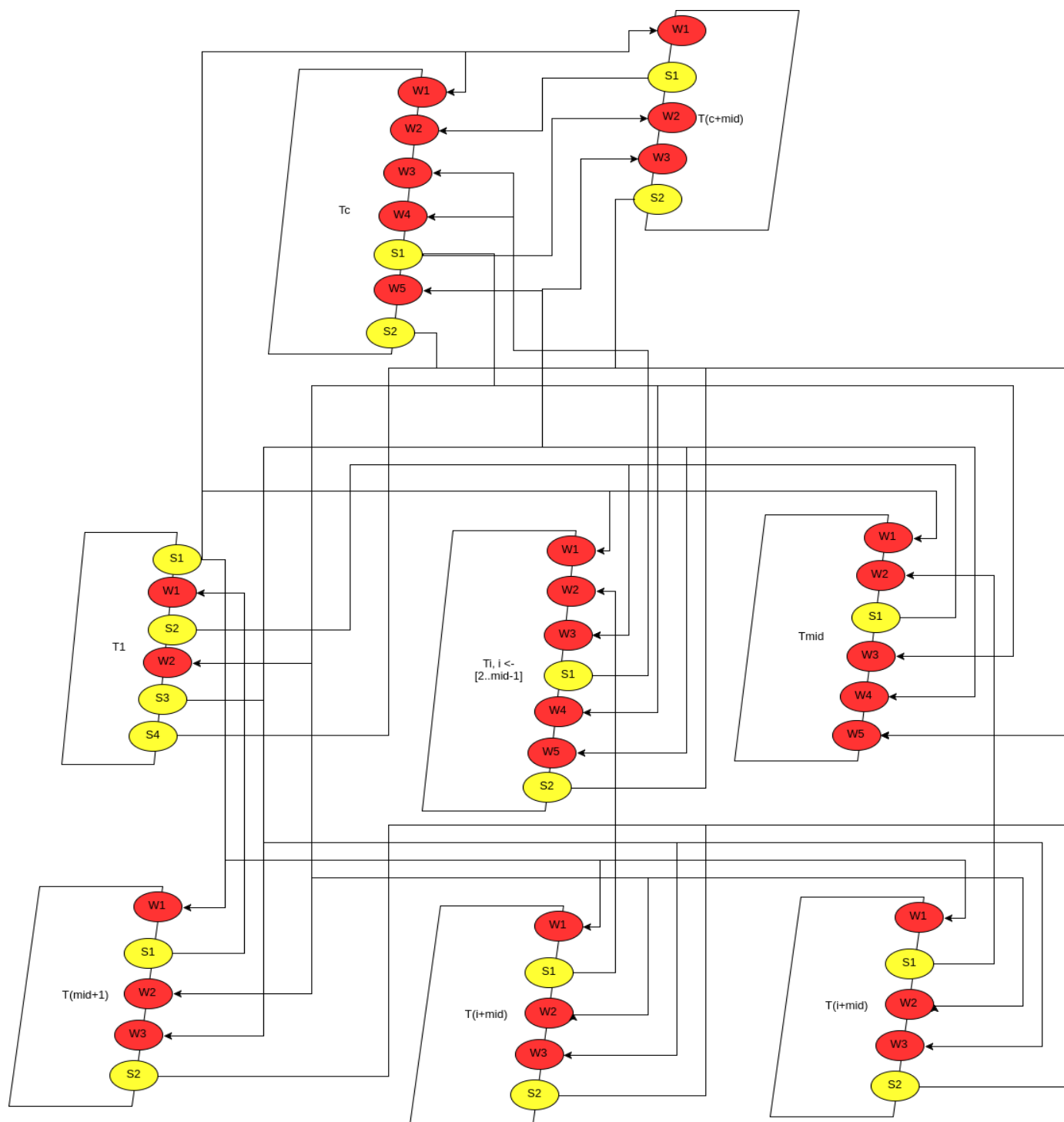


Рисунок 3.2. Схема взаємодії потоків

## Лістинг ПРГ1

```
1 /*
2 // main
3 // Author:
4 //     Dzyuba Vlad, IP-42
5 */
6 #include <iostream>
7 #include <omp.h>
8 #include <string.h>
9 #include <stdlib.h>
10 #include <sys/time.h>
11
12 typedef unsigned long long timestamp_t;
13
14 timestamp_t get_timestamp () {
15     struct timeval now;
16     gettimeofday (&now, NULL);
17     return  now.tv_usec + (timestamp_t)now.tv_sec * 1000000;
18 }
19
20 using namespace std;
21
22 int N, P, H;
23
24 // functions for generating structures
25 int* readVec();
26 int* readMat();
27 // functions for copying structures
28 int* veccpy(int *src);
29 int* matcpy(int *src);
30
31 int main(int argc, char* argv[]) {
32     N = atoi(argv[1]);
```

```

33 P = atoi(argv[2]);
34 H = N / P;
35 // input data
36 int *Z, *M0, *E, *S, *MT;
37 // output data
38 int *A = new int[N];
39
40 // intermediate data
41 int z = -65536, *B = new int[N], *C = new int[N];
42 timestamp_t startTime = get_timestamp();
43 #pragma omp parallel num_threads(P)
44 {
45     int tid = omp_get_thread_num();
46     // generate data if first or last thread
47     if (tid == 0) {
48         Z = readVec();
49         M0 = readMat();
50     }
51     if (tid == P - 1) {
52         E = readVec();
53         S = readVec();
54         MT = readMat();
55     }
56     // finding maximum of Z
57     #pragma omp barrier
58     for (int i = 0; i < P; i++) {
59         int mval = Z[i*H];
60         for (int j = i*H+1; j < (i+1)*H; j++) {
61             mval = Z[j] > mval ? Z[j] : mval;
62         }
63         #pragma omp critical(zUpdate)
64         if (mval > z) {
65             z = mval;
66         }
67     }
68     #pragma omp barrier
69     // calculating B

```

```

70  int *M01, *E1, z1;
71  #pragma omp critical(dataCopy)
72  {
73      M01 = matcpy(M0);
74      E1 = veccpy(E);
75      z1 = z;
76  }
77  #pragma omp for
78  for (int i = 0; i < P; i++) {
79      for (int j = i * H; j < (i + 1) * H; j++) {
80          B[j] = 0;
81          for (int k = 0; k < N; k++) {
82              int x = 0;
83              for (int l = 0; l < N; l++) {
84                  x += M01[k*N+l] * MT[l*N+j];
85              }
86              B[j] += x * E1[k];
87          }
88          B[j] *= z1;
89      }
90  }
91  #pragma omp barrier
92  // sorting parts of S
93  #pragma omp for
94  for (int i = 0; i < P; i++) {
95      for (int j = 1; j < H; j++) {
96          for (int k = i * H; k < (i + 1) * H - j; k++) {
97              if (S[k] > S[k + 1]) {
98                  int x = S[k];
99                  S[k] = S[k + 1];
100                 S[k + 1] = x;
101             }
102         }
103     }
104 }
105 #pragma omp barrier
106 // sorting whole S and stores itto C

```

```
107  #pragma omp single
108  {
109      int* ind = new int[N];
110      for (int i = 0; i < N; i++) {
111          ind[i] = 0;
112      }
113      for (int i = 0; i < N; i++) {
114          int mini = -1;
115          for (int j = 0; j < N; j++) {
116              if (ind[j] < N) {
117                  if (mini == -1 || S[ind[j]] < S[ind[mini]]) {
118                      mini = j;
119                  }
120              }
121          }
122          C[i] = S[ind[mini]];
123          ind[mini]++;
124      }
125  }
126  #pragma omp barrier
127  // calculating A
128  #pragma omp for
129  for (int i = 0; i < N; i++) {
130      A[i] = B[i] + C[i];
131  }
132 }
133 // print A
134 if (N <= 20) {
135     for (int i = 0; i < N; i++) {
136         cout << A[i] << " ";
137     }
138     cout << endl;
139 } else {
140     timestamp_t endTime = get_timestamp();
141     cout << (endTime - startTime) / 1000000.0 << endl;
142 }
143 delete[] A;
```



```
144 }
145
146 int* readArr(int n) {
147     int* res = new int[n];
148     for (int i = 0; i < n; i++) {
149         res[i] = 1;
150     }
151     return res;
152 }
153
154 int* readVec() { return readArr(N); }
155 int* readMat() { return readArr(N*N); }
156
157 int* arrcpy(int *src, int n) {
158     int *res = new int[n];
159     for (int i = 0; i < n; i++) {
160         res[i] = src[i];
161     }
162     return res;
163 }
164
165 int* veccpy(int *src) { return arrcpy(src, N); }
166 int* matcpy(int *src) { return arrcpy(src, N * N); }
```

Лістинг ПРГ2

```
1 #include <iostream>
2 #include <mpi.h>
3 #include <string.h>
4 #include <stdlib.h>
5 #include <sys/time.h>
6
7 using namespace std;
8
9 typedef unsigned long long timestamp_t;
10
11 timestamp_t get_timestamp () {
12     struct timeval now;
13     gettimeofday (&now, NULL);
14     return  now.tv_usec + (timestamp_t)now.tv_sec * 1000000;
15 }
16
17 #define EDGE_COUNT (2 * (P - 1))
18 #define ZH_SENDING 0
19 #define SH_SENDING 1
20 #define MAX_Z 2
21 #define SORTED_S 3
22 #define PART_C 4
23 #define TOTAL_MAX_Z 5
24 #define E_SENDING 6
25 #define MO_SENDING 7
26 #define MTH_SENDING 8
27 #define AH_SENDING 9
28
29 void mpiRun(MPI_Comm &graph_comm, MPI_Comm &topo_comm, int* index, int* edges);
30 void mergeSend(int rank, MPI_Comm graph_comm, int *Z, int *S, int *maxZ);
31 void maxSort(int &maxZ, int* Z, int* S);
```

```

32 int* mergeN(int n, int lengths[], int* arrays[]);
33
34 int N;
35 int P;
36 int H;
37 int mid;
38 int quarter;
39
40 int main(int argc, char* argv[]) {
41     MPI_Init(&argc, &argv);
42     MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &P);
43     N = atoi(argv[1]);
44     H = N / P;
45     mid = P / 2;
46     quarter = mid / 2;
47
48     MPI_Comm graph_comm, topo_comm;
49     int* index = new int[P];
50     int* edges = new int[EDGE_COUNT];
51
52     mpiRun(graph_comm, topo_comm, index, edges);
53
54     MPI_Finalize();
55     delete[] index;
56     delete[] edges;
57 }
58
59 int* initVector(int n) {
60     int *res = new int[n];
61     for (int i = 0; i < n; i++) {
62         res[i] = 1;
63     }
64     return res;
65 }
66
67 int* initMatrix(int n) {
68     return initVector(n * n);

```

```

69 }
70
71 void mpiRun(MPI_Comm &graph_comm, MPI_Comm &topo_comm, int* index, int* edges) {
72     timestamp_t startTime = get_timestamp();
73     index[0] = 2;
74     for (int i = 1; i < mid - 1; i++) {
75         index[i] = index[i - 1] + 3;
76     }
77     index[mid - 1] = index[mid - 2] + 2;
78
79     for (int i = mid; i < P; i++) {
80         index[i] = index[i - 1] + 1;
81     }
82
83     for (int i = 0; i < mid - 1; i++) {
84         edges[i * 2] = i;
85         edges[i * 2 + 1] = i + 1;
86         edges[i * 2 + 2] = i;
87         edges[i * 2 + 3] = mid + i;
88     }
89     edges[EDGE_COUNT - 2] = mid - 1;
90     edges[EDGE_COUNT - 1] = P - 1;
91
92     MPI_Graph_create(MPI_COMM_WORLD, P, index, edges, 0, &graph_comm);
93
94     MPI_Comm_dup(graph_comm, &topo_comm);
95
96     int topo_type;
97     MPI_Topo_test(topo_comm, &topo_type);
98
99     if (topo_type != MPI_GRAPH) {
100         cout << "Topo type error" << endl;
101         return;
102     }
103
104     int rank;
105     MPI_Comm_rank(graph_comm, &rank);

```

```

106
107  int H = N / P;
108  MPI_Status status;
109  int maxZ, *Ei, *MOi, *MTh, *Sh, *Ah;
110  Ei = new int[N];
111  MOi = new int[N*N];
112  MTh = new int[N*H];
113  Sh = new int[H];
114  Ah = new int[H];
115  if (rank == 0) {
116      int *Z, *E, *MO, *MT, *S;
117      Z = initVector(N);
118      E = initVector(N);
119      MO = initMatrix(N);
120      MT = initMatrix(N);
121      S = initVector(N);
122
123      for (int i = 1; i < P; i++) {
124          MPI_Send(Z + i * H, H, MPI_INT, i, ZH_SENDING, graph_comm);
125          MPI_Send(S + i * H, H, MPI_INT, i, SH_SENDING, graph_comm);
126      }
127
128      maxSort(maxZ, Z, S);
129      mergeSend(rank, graph_comm, Z, S, &maxZ);
130
131      for (int i = 1; i < P; i++) {
132          MPI_Send(E, N, MPI_INT, i, E_SENDING, graph_comm);
133          MPI_Send(MO, N * N, MPI_INT, i, MO_SENDING, graph_comm);
134          MPI_Send(MT + i * H * N, H * N, MPI_INT, i, MTH_SENDING, graph_comm);
135      }
136
137      for (int i = 0; i < H; i++) {
138          Sh[i] = S[i];
139      }
140      for (int i = 0; i < N; i++) {
141          Ei[i] = E[i];
142      }

```

```

143     for (int i = 0; i < N * N; i++) {
144         MOi[i] = MO[i];
145     }
146     for (int i = 0; i < N * H; i++) {
147         MTh[i] = MT[i];
148     }
149
150     delete[] Z;
151     delete[] E;
152     delete[] M0;
153     delete[] MT;
154     delete[] S;
155 } else {
156     int *Z, *S;
157     Z = new int[H];
158     S = new int[H];
159     MPI_Recv(Z, H, MPI_INT, 0, ZH_SENDING, graph_comm, &status);
160     MPI_Recv(S, H, MPI_INT, 0, SH_SENDING, graph_comm, &status);
161
162     maxSort(maxZ, Z, S);
163
164     int rank1 = rank < mid ? rank : rank - mid;
165     int sourceRank = (mid & 1) ? quarter : rank1 < quarter ? quarter - 1 : quarter;
166
167     if (rank < mid) {
168         mergeSend(rank, graph_comm, Z, S, &maxZ);
169         for (int i = 0; i < H; i++) {
170             Sh[i] = S[i];
171         }
172     } else {
173         MPI_Send(&maxZ, 1, MPI_INT, rank - mid, MAX_Z, graph_comm);
174         MPI_Send(S, H, MPI_INT, rank - mid, SORTED_S, graph_comm);
175
176         MPI_Recv(&maxZ, 1, MPI_INT, sourceRank, TOTAL_MAX_Z, graph_comm, &status);
177         MPI_Recv(Sh, H, MPI_INT, sourceRank, PART_C, graph_comm, &status);
178     }
179     delete[] Z;

```

```

180     delete[] S;
181
182     MPI_Recv(Ei, N, MPI_INT, 0, E_SENDING, graph_comm, &status);
183     MPI_Recv(MO_i, N * N, MPI_INT, 0, MO_SENDING, graph_comm, &status);
184     MPI_Recv(MTh, H * N, MPI_INT, 0, MTH_SENDING, graph_comm, &status);
185 }
186
187 for (int i = 0; i < H; i++) {
188     Ah[i] = Sh[i];
189     for (int j = 0; j < N; j++) {
190         int mot = 0;
191         for (int k = 0; k < N; k++) {
192             mot += MO_i[k * N + j] * MTh[i * N + k];
193         }
194         Ah[i] += maxZ * mot * Ei[j];
195     }
196 }
197
198
199 if (rank == mid - 1) {
200     int *A = new int[N];
201     for (int i = 0; i < H; i++) {
202         A[(mid - 1) * H + i] = Ah[i];
203     }
204     for (int i = 0; i < P; i++) {
205         if (i != mid - 1) {
206             MPI_Recv(A + i * H, H, MPI_INT, i, AH_SENDING, graph_comm, &status);
207         }
208     }
209     if (N <= 20) {
210         for (int i = 0; i < N; i++) {
211             cout << A[i] << " ";
212         }
213         cout << endl;
214     } else {
215         timestamp_t endTime = get_timestamp();
216         cout << (endTime - startTime) / 1000000.0 << endl;

```

```

217
218     }
219     delete[] A;
220 } else {
221     MPI_Send(Ah, H, MPI_INT, mid - 1, AH_SENDING, graph_comm);
222 }
223
224 delete[] Ei;
225 delete[] M0i;
226 delete[] MTh;
227 delete[] Sh;
228 }
229
230 void maxSort(int &maxZ, int* Z, int* S) {
231     maxZ = -2000000000;
232     for (int i = 0; i < H; i++) {
233         if (Z[i] > maxZ) {
234             maxZ = Z[i];
235         }
236     }
237
238     for (int i = H; i > 1; i--) {
239         for (int j = 1; j < i; j++) {
240             if (S[j - 1] > S[j]) {
241                 int c = S[j - 1];
242                 S[j - 1] = S[j];
243                 S[j] = c;
244             }
245         }
246     }
247 }
248
249 void mergeSend(int rank, MPI_Comm graph_comm, int *Z, int *S, int *maxZP) {
250     int maxZ = *maxZP;
251     MPI_Status status;
252     int maxAnotherZ;
253     MPI_Recv(&maxAnotherZ, 1, MPI_INT, rank + mid, MAX_Z, graph_comm, &status);

```



```

254  if (maxAnotherZ > maxZ) {
255      maxZ = maxAnotherZ;
256  }
257
258  int* sortedS2 = new int[H];
259  MPI_Recv(sortedS2, H, MPI_INT, rank + mid, SORTED_S, graph_comm, &status);
260
261  int targetRank = rank < quarter ? rank + 1 : rank - 1;
262  int sourceRank = 2 * rank - targetRank;
263
264  if (rank < mid - 1 && rank > 0) {
265      MPI_Recv(&maxAnotherZ, 1, MPI_INT, sourceRank, MAX_Z, graph_comm, &status);
266      if (maxAnotherZ > maxZ) {
267          maxZ = maxAnotherZ;
268      }
269      int sortedSSize = (rank < quarter ? 2 * rank : 2 * (mid - 1 - rank)) * H;
270      int* sortedS3 = new int[sortedSSize];
271      MPI_Recv(sortedS3, sortedSSize, MPI_INT, sourceRank,
272              SORTED_S, graph_comm, &status);
273
274      if ((mid & 1) == 1 && rank == quarter) {
275          int maxAnotherZ;
276          MPI_Recv(&maxAnotherZ, 1, MPI_INT, targetRank, MAX_Z, graph_comm, &status);
277          if (maxAnotherZ > maxZ) {
278              maxZ = maxAnotherZ;
279          }
280          int *sortedS4 = new int[sortedSSize];
281          MPI_Recv(sortedS4, sortedSSize, MPI_INT, targetRank, SORTED_S, graph_comm,
282                  &status);
283
284          int lengths[] = { H, H, sortedSSize, sortedSSize };
285          int* arrays[] = { S, sortedS2, sortedS3, sortedS4 };
286          int *merged = mergeN(4, lengths, arrays);
287
288          for (int i = 0; i < P; i++) {
289              if (i != rank) {
290                  *maxZP = maxZ;

```

```

290         MPI_Send(maxZP, 1, MPI_INT, i, TOTAL_MAX_Z, graph_comm);
291         MPI_Send(merged + i * H, H, MPI_INT, i, PART_C, graph_comm);
292     }
293 }
294
295     for (int i = 0; i < H; i++) {
296         S[i] = merged[i + rank * H];
297     }
298
299     delete[] merged;
300     delete[] sortedS4;
301     return;
302 }
303 int mergedSize = sortedSSize + 2 * H;
304 int* merged;
305 int lengths[] = { H, H, sortedSSize };
306 int* arrays[] = { S, sortedS2, sortedS3 };
307 merged = mergeN(3, lengths, arrays);
308 int anotherMaxZ;
309
310 if ((mid & 1) == 0 && (rank == quarter - 1 || rank == quarter)) {
311     int maxAnotherZ;
312     int *sortedS2 = new int[mid * H];
313
314     if (rank == quarter) {
315         MPI_Send(&anotherMaxZ, 1, MPI_INT, targetRank, MAX_Z, graph_comm);
316         MPI_Send(merged, mergedSize, MPI_INT, targetRank, SORTED_S, graph_comm);
317
318         MPI_Recv(&maxAnotherZ, 1, MPI_INT, targetRank, MAX_Z, graph_comm, &status);
319         if (maxAnotherZ > maxZ) {
320             maxZ = maxAnotherZ;
321         }
322         MPI_Recv(sortedS2, mid * H, MPI_INT, targetRank, SORTED_S, graph_comm,
&status);
323
324     } else {
325         MPI_Recv(&maxAnotherZ, 1, MPI_INT, targetRank, MAX_Z, graph_comm, &status);

```

```

326     if (maxAnotherZ > maxZ) {
327         maxZ = maxAnotherZ;
328     }
329     MPI_Recv(sortedS2, mid * H, MPI_INT, targetRank, SORTED_S, graph_comm,
&status);
330
331     MPI_Send(&anotherMaxZ, 1, MPI_INT, targetRank, MAX_Z, graph_comm);
332     MPI_Send(merged, mergedSize, MPI_INT, targetRank, SORTED_S, graph_comm);
333 }
334
335 int* totalS;
336 int lengths[] = { mid * H, mid * H };
337 int* arrays[] = { merged, sortedS2 };
338 totalS = mergeN(2, lengths, arrays);
339 *maxZP = maxZ;
340 if (rank == quarter - 1) {
341     for (int i = 0; i < quarter - 1; i++) {
342         MPI_Send(maxZP, 1, MPI_INT, i, TOTAL_MAX_Z, graph_comm);
343         MPI_Send(totalS + i * H, H, MPI_INT, i, PART_C, graph_comm);
344     }
345     for (int i = mid; i < mid + quarter; i++) {
346         MPI_Send(maxZP, 1, MPI_INT, i, TOTAL_MAX_Z, graph_comm);
347         MPI_Send(totalS + i * H, H, MPI_INT, i, PART_C, graph_comm);
348     }
349 } else {
350     for (int i = quarter + 1; i < mid; i++) {
351         MPI_Send(maxZP, 1, MPI_INT, i, TOTAL_MAX_Z, graph_comm);
352         MPI_Send(totalS + i * H, H, MPI_INT, i, PART_C, graph_comm);
353     }
354     for (int i = mid + quarter; i < P; i++) {
355         MPI_Send(maxZP, 1, MPI_INT, i, TOTAL_MAX_Z, graph_comm);
356         MPI_Send(totalS + i * H, H, MPI_INT, i, PART_C, graph_comm);
357     }
358 }
359 for (int i = 0; i < H; i++) {
360     S[i] = totalS[i + rank * H];
361 }

```

```

362
363     delete[] merged;
364     delete[] totalS;
365     delete[] sortedS2;
366     return;
367 }
368 MPI_Send(&anotherMaxZ, 1, MPI_INT, targetRank, MAX_Z, graph_comm);
369 MPI_Send(merged, mergedSize, MPI_INT, targetRank, SORTED_S, graph_comm);
370
371     delete[] sortedS3;
372 } else {
373     int lengths[] = { H, H };
374     int* arrays[] = { S, sortedS2 };
375     int* merged = mergeN(2, lengths, arrays);
376     *maxZP = maxZ;
377     MPI_Send(maxZP, 1, MPI_INT, targetRank, MAX_Z, graph_comm);
378     MPI_Send(merged, 2 * H, MPI_INT, targetRank, SORTED_S, graph_comm);
379
380     delete[] merged;
381 }
382 delete[] sortedS2;
383
384 int sortedSourceRank = (mid & 1) == 0
385     ? rank < quarter ? quarter - 1 : quarter
386     : quarter;
387 MPI_Recv(maxZP, 1, MPI_INT, sortedSourceRank, TOTAL_MAX_Z, graph_comm, &status);
388 MPI_Recv(S, H, MPI_INT, sortedSourceRank, PART_C, graph_comm, &status);
389 }
390
391 int* mergeN(int n, int lengths[], int* arrays[]) {
392     int* coeffs = new int[n];
393     int totalLength = 0;
394     for (int i = 0; i < n; i++) {
395         coeffs[i] = 0;
396         totalLength += lengths[i];
397     }
398     int* merged = new int[totalLength];

```

```
399
400 for (int i = 0; i < totalLength; i++) {
401     int max_i = -1;
402     int max;
403     for (int j = 0; j < n; j++) {
404         if (coeffs[j] < lengths[j] && (max_i == -1 || arrays[j][coeffs[j]] > max)) {
405             max_i = j;
406             max = arrays[j][coeffs[j]];
407             coeffs[j]++;
408         }
409     }
410     merged[i] = max;
411 }
412
413 delete[] coeffs;
414 return merged;
415 }
```