电子里程计定义：利用车轮转速及方向盘转角实时计算车身位置和姿态信息，同时计算车辆累计移动的路程，对车身进行定位。

Part A:无人车运动学建模

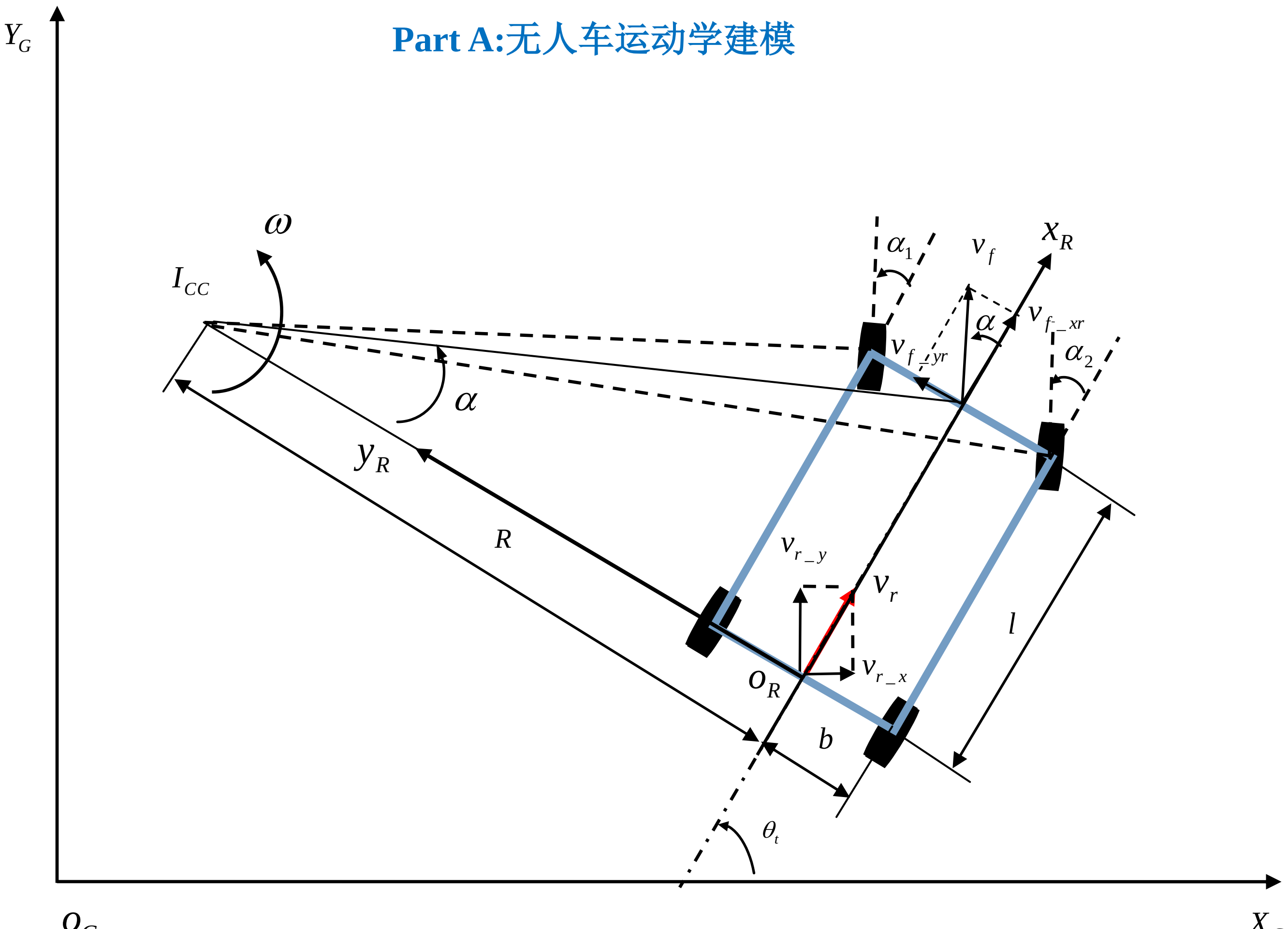

图 1 无人车运动学模型

坐标系体系：

✓ (X_G, O_G, Y_G) 为全局坐标系（里程计坐标系），可以定义为初始状态时车身的局部坐标；

✓ (x_R, o_R, y_R) 为固联于车身的局部坐标系（基坐标系），原点位于后轮轴中心；t 时刻，

无人车在全局坐标系下的位姿为 $({}^G x_t, {}^G y_t, \theta_t)$。

全局坐标系与局部坐标系的齐次变换矩阵：

$$\begin{bmatrix} {}^G x_t \\ {}^G y_t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_t & -\sin\theta_t & 0 & {}^G x_{t-1} \\ \sin\theta_t & \cos\theta_t & 0 & {}^G y_{t-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta {}^R x_t \\ \Delta {}^R y_t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

为了简化方向控制器的设计，不考虑车辆质量转移,对模型采用以下几点假设：

① 将整个车辆视为刚体，车轮视为刚性轮，不考虑车轮与地面接触时的弹性变化对整

个模型带来的影响；

② 假设车辆处于二维平面上运动，不考虑俯仰和侧倾带来的影响；

③ 假设在车辆运行的过程中，车轮在道路上作纯滚动运动，忽略滑动带来的影响；

④ 假设在车辆运行的过程中，路面始终能够给车轮提供足够的静摩擦力，车辆不产生相对滑移或者滑动。

基于上述假设条件，由图 1 中的几何关系可以得到如下计算公式

$$R = {l}/{\tan\alpha} \tag{1}$$

$$\begin{cases} v_{r\_x} = v_r \cos\theta_t \\ v_{r\_y} = v_r \sin\theta_t \\ \omega = {v_r}/{R} = {v_r}/{l} \bullet \tan\alpha \end{cases} \tag{2}$$

其中α_1, α_2分别为两个前轮的转向角，α为前轮轴中心点的转向角，由阿克曼转向原理可知内轮转角比外轮转角大 4 度左右（图中为$\alpha_1 > \alpha_2$），我们需要根据α_1, α_2计算α（这部分在 Part B 中介绍）。θ_t为 t 时刻无人车的航向角，即局部坐标系 x 轴与全局坐标系 x 轴的夹角。定义逆时针方向时转向角和航向角为正。v_r为后轮轴中心点的速度，**由于该项目使用的车为前驱，所以需要对前、后轮轴中心点的速度关系进行求解：**

$$v_r = v_f \cos\alpha \tag{3}$$

将式 3)带入式 2)得：

$$\begin{cases} v_{r\_x} = v_f \cos\alpha \cos\theta_t \\ v_{r\_y} = v_f \cos\alpha \sin\theta_t \\ \omega_t = {v_f \sin\alpha}/{l} \end{cases} \tag{4}$$

在毫米级的更新周期ΔT内，可以假设车速大小v_r保持不变，车沿直线行驶，则可由速度分量分别计算出一个周期内在局部坐标系下的位移增量Δx和Δy：

$$\begin{cases} \Delta\theta_t = \omega_t \Delta T = {v_r \Delta T}/{l} \bullet \tan\alpha \\ \Delta^R x_t = v_r \Delta T \\ \Delta^R y_t = 0 \end{cases} \tag{5}$$

或一个周期内在全局部坐标系下的位移增量Δx和Δy：

$$\begin{cases}\Delta\theta_t = \omega_t \Delta T = {v_r \Delta T}/{l} \bullet \tan\alpha \\ \Delta^G x_t = v_{r\_x}\Delta T \\ \Delta^G y_t = v_{r\_y}\Delta T\end{cases} \quad 6）$$

所以，根据局部坐标系下或全局坐标系下计算一个周期内位移增量的两种方法，可计算出在任意 t 时刻，无人车在全局坐标系下的位姿：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}{}^G x_t \\ {}^G y_t \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}{}^G x_{t-1} \\ {}^G y_{t-1} \\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\theta_t & -\sin\theta_t & 0 \\ \sin\theta_t & \cos\theta_t & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta^R x_t \\ \Delta^R y_t \\ 0\end{bmatrix} \\ \theta_t = \theta_{t-1} + \Delta\theta_t\end{cases} \quad 7）$$

或

$$\begin{cases}{}^G x_t = {}^G x_{t-1} + \Delta^G x_t \\ {}^G y_t = {}^G y_{t-1} + \Delta^G y_t \\ \theta_t = \theta_{t-1} + \Delta\theta_t\end{cases} \quad 8）$$

将式 4）、6）带入式 8）得：

$$\begin{cases}{}^G x_t = {}^G x_{t-1} + v_f \Delta T \cos\alpha \cos\theta_t \\ {}^G y_t = {}^G y_{t-1} + v_f \Delta T \cos\alpha \sin\theta_t \\ \theta_t = \theta_{t-1} + {v_f \Delta T \sin\alpha}/{l}\end{cases} \quad 9）$$

或将式 5）带入式 7）得：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}{}^G x_t \\ {}^G y_t \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}{}^G x_{t-1} \\ {}^G y_{t-1} \\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\theta_t & -\sin\theta_t & 0 \\ \sin\theta_t & \cos\theta_t & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_f \Delta T \cos\alpha \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} \\ \theta_t = \theta_{t-1} + {v_f \Delta T \sin\alpha}/{l}\end{cases} \quad 10）$$

由式 9）或式 10）可知，无人车的位姿由 4 个参数 $(v_f, \alpha, \Delta T, l)$ 确定，其中车身轴距 l 和采样周期 ΔT 对于特定的车型及其控制系统是定值；v_f 和方向盘转角 α 由路径规划模块提供。

对于前轮轴中心速度 v_f 的计算，由于两前轮的线速度相差不大，采用取二者平均值的方法近似得到。当通过轮速传感器直接获取两前轮的转速（n_1, n_2）时，可以计算前轮轴中心点速度为 $v_f = \pi(n_1 + n_2)\mathrm{R}$,其中 R 表示前轮半径；当提供发动机的转速时，需要除以减速比得到前轮转速。

Part B 前轮轴中心点的转向角

前轮轴中心点的转向角α是根据两前轮的转向角α_1,α_2得到的，由文献[1]可知，它们的几何关系表达式为：

$$\begin{cases}\cot\alpha_1=\cot\alpha+d/2l\\ \cot\alpha_2=\cot\alpha-d/2l\end{cases} \tag{11}$$

其中，d 表示前轮轮距，在图中有关系式：$d=2b$。由式（11）可以计算前轮轴中心转向角$\alpha=arc\cot(\frac{\cot\alpha_1+\cot\alpha_2}{2})$ 为方便 C 程序编程转为正切形式：

$$\alpha=\arctan(\frac{2\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1+\tan\alpha_2}) \tag{12}$$

下面需要根据方向盘的转角ϕ 分别计算两前轮的转向角α_1,α_2 。

（1） 方向盘通过长轴与齿轮固连，依靠齿轮啮合控制齿条的左右移动，齿条的平移范围为$-78mm$～$78mm$，对于 GA5 车，齿条行程 156mm 对应方向盘 2.69 圈，其传动比为$i=\frac{156}{2.69}=58mm/r=\frac{58}{360}mm/°=0.1611mm/°$

（2） 汽车转向机构的求解是复杂的空间几何问题，很难求出显示解，这里采用实验测量（仿真）得到齿条位移与左右前轮转向角的两组数据，根据得到的数据进行曲线拟合得到相应的 N 次多项式。

以GA5数据为例，通过matlab多项式拟合工具箱，使用plot绘制散点图，在生成的figure窗口中依次点Tool → Basic Fitting，左侧选择拟合曲线的最高次幂可以在图中动态生成曲线，通过比较选择和散点图最接近的曲线，右侧则是多项式系数及对应的误差，通常曲线的最高次幂小于5次为好。左右前轮转向角关于齿条位移的多项式分别为：

$$\alpha_1(\alpha_2)=p1*x^5+p2*x^4+p3*x^3+p4*x^2+p5*x+p6 \tag{13}$$

其中，x 表示齿条位移$-78mm$～$78mm$分辨率为 0.1mm，负值代表左转，正值代表右转。

（3） 举例计算

设当前的方向盘转角为ϕ，那么根据传动比可以计算此时齿条的位移$t=0.1611\phi$（注意带上符号），将齿条的位移 t 代入式（13）得到左右轮转角α_1,α_2，代入式（12）可以得到前轮轴中心的转向角α。

参考文献

[1] 任孝平, 基于阿克曼原理的车式移动机器人运动学建模, 智能系统学报

关于航向角符号

	左转	右转
前进	$\Delta\theta > 0$	$\Delta\theta < 0$
倒车	$\Delta\theta > 0$	$\Delta\theta < 0$

航向角变化计算公式$\Delta\theta = v_f \sin\alpha \dfrac{\Delta T}{l}$

我们约定前进$v_f > 0$，倒车$v_f < 0$，左转$\alpha < 0$，右转$\alpha > 0$，而航向角的符号规定为：以车身初始前进方向为零位参考，逆时针方向为正，同时规定航向角为[0,360]，如果超出该范围需要进行纠正，由此根据上表，得到考虑符号的航向角的计算公式为：

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta = \theta_i - v_f \sin\alpha \frac{\Delta T}{l}$$