Corrigé exercice :

On souhaite passer d'une orbite circulaire altitude 600 km en une orbite géostationnaire

Calculer de demi grand axe d'une orbite géostationnaire

µterre	= 3,9860064E+14 m^3s-2
R terre = rt	= 6378140 m
1 année	= 365.25 j
1 jour	= 86400s

Réponse le demi grand axe est calculé à partir de la relation qui relie période et demi grand axe (3 ème loi de kepler)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

T se calcul par définition de l'orbite géostationnaire période = à la période de rotation de la terre : T=86400s*(360/(360+360/365.25))

$$a = \sqrt[3]{\mu\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

Application numérique question 1

T geo = 86164,09556 s
a geo = 42164178,26 m
h geo = 35786038,26 m

On suppose l'orbite circulaire altitude 600 km équatorial

Proposer le transfert de Hohmann

Le transfert de Hohmann consiste en une manœuvre au périgée de l'orbite initial pour obtenir une orbite intermédiaire dont l'apogée a un rayon égal au rayon de l'orbite final. Puis à une manœuvre à l'apogée de l'orbite intermédiaire pour remonter le périgée au rayon de l'orbite finale :

Orbite initiale :
ra = rp = a initial = rt + 600000

Orbite intermédiaire :
ra = a final =a geo
rp = a initial = rt + 600000

Orbite final :
ra = rp = a final =a geo

Calculer l'amplitude des impulsions de vitesse

$$V_a = \sqrt{\frac{2\mu}{R_a + R_p} \frac{R_p}{R_a}} \qquad V_p = \sqrt{\frac{2\mu}{R_a + R_p} \frac{R_a}{R_p}}$$

Application numérique question 2 :

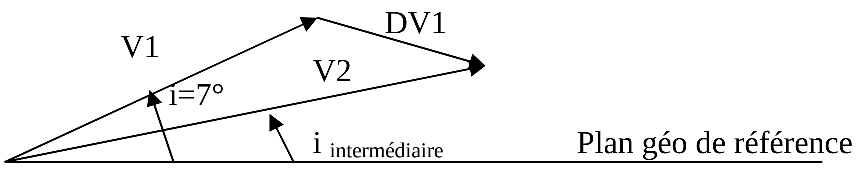
a initial	= 6978140 m
a final	= 42164178,26 m
a intermédiaire	= 24571159,13 m
V ini = V1	= 7557,865461 m/s
V final= V4	= 3074,660549 m/s
Vp int = V2	= 9900,523405 m/s
Va int = V3	= 1638,529226 m/s
DV1	= 2342,657944 m/s
DV2	= 1436,131322 m/s
Total DV	= 3778,789267 m/s

On suppose l'orbite circulaire altitude 600 km incliné de 7 deg

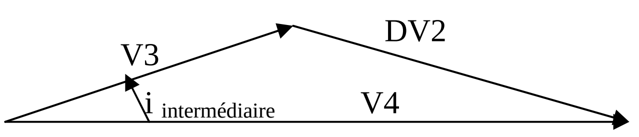
Proposer le transfert de Hohmann avec manœuvre hors plan

Le transfert est similaire au cas précédent avec en plus des vitesses lors de l'apogée et du périgée non colinéaire à cause des différentes inclinaisons des plans des orbites.
Les manœuvres peuvent être représenté par les triangles des vitesses suivant :

Manœuvre de périgée :



Manœuvre d’apogée :



Calculer l'amplitude des impulsions de vitesse et optimiser les manœuvres
Pour que la somme totale de l'amplitude des manœuvres soit minimale

DV1 = (V2^2+V1^2-2*V1*V2*cos(i-$i_{\text{intermédiaire}}$))^0,5

DV2 = (V4^2+V3^2-2*V3*V4*cos($i_{\text{intermédiaire}}$))^0,5

Il faut ensuite choisir $i_{\text{intermédiaire}}$ dans DV1 et DV2 tel que DV1 + DV2 soit minimum

Application numérique question 3

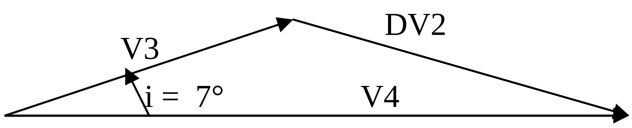
a initial	= 6978140 m
a final	= 42164178,26 m
a intermédiaire	= 24571159,13 m
i initial	= 7 deg
i final	= 0 deg
i intermédiaire	= 6,316996956 deg
V ini = V1	= 7557,865461 m/s
V final= V4	= 3074,660549 m/s
Vp int = V2	= 9900,523405 m/s
Va int = V3	= 1638,529226 m/s
DV1	= 2344,926258 m/s
DV2	= 1457,27488 m/s
Total DV	= 3802,201138 m/s

On souhaite mettre à poste un satellite géostationnaire

Le satellite est lâché sur une orbite GTO 600km*36000km d'altitude et incliné de 7°

1/ calculer le DV total à faire

Nous sommes dans le cas de la manœuvre d'apogée du calcul précédent :
Orbite intermédiaire :
ra = a final =a geo
rp = a initial = rt + 600000
i = 7°
Orbite final :
ra = rp = a final =a geo

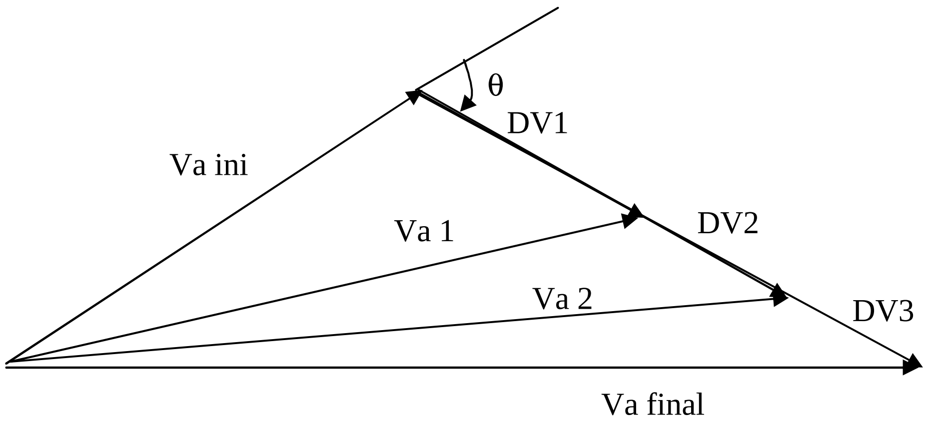


DV_{total} = DV2 = (V4^2+V3^2-2*V3*V4*cos(7°))^0,5 = 1462,046122 m/s

2/ on souhaite mettre à poste le satellite en 3 manœuvres successives :

en supposant que les manœuvres sont d'amplitude décroissante proposé l'amplitudes des 3 manœuvres tel que la longitude de passage à l'apogée de la 1ere manœuvre à lieu à 0 ° et que la dernière manœuvre soit effectué à la longitude de stationnement final de 50° Est soit 310° ouest.

Triangle des vitesses à réaliser à l'apogée des orbites



On construit le tableau ci dessous (sous Excel par exemple) avec pour chaque orbite avec en jaune les variables libres et en vert les données en bleu la valeur cible de longitude.

Triangle des vitesses								
	i en deg	a en m	ra en m	Va en m/s	DV en m/s	T en s	l apogé en deg	nombre de tour
orbite initial	7 deg	24571159	42164178,26	1638,529226				
orbite 1	1,414373 deg	32934108	42164178,26	2608,467243	990,64	59481,20	0,00	2
orbite 2	0,595344 deg	37143643	42164178,26	2859,3262	253,88	71242,25	137,03	3
orbite final	0	42164178	42164178,26	3074,660549	217,53	86164,10	310,00	
				Total	1462,05			

On se fixe les différents DV des manœuvres qui permettent de respecter la décroissance des DV
Les différences d'inclinaison d'une orbite à l'autre ce calcul à partir des relations dans les triangles
$\sin(i_{\text{initial}} - i_{1)/}$ DV1= $\sin((\pi-\theta)$/Va1
$\sin(i_{\text{initial}} - i_{2)/}$ (DV1+DV2)= $\sin((\pi-\theta)$/Va2

Les vitesses se calculent par la géométrie de la figure
Va_{final} = V geo =(Va_{ini}^2+DVtotal^2+2* Va_{ini} * DVtotal*cos(θ))^0,5
cette équation permet de calculer cos(θ) = (V geo^2- Va_{ini}^2-DVtotal^2)/(2* Va_{ini} * DVtotal)

Va_1 = (Va_{ini}^2+DV1^2+2* Va_{ini} * DV1*cos(θ))^0,5
Va_2 = (Va_{ini}^2+(DV1+DV2)^2+2* Va_{ini} * (DV1+DV2)*cos(θ))^0,5

Et

Le demi grand axe se calcul avec:

$$\frac{\mu R_a}{2\mu - R_a V_a^2}$$

Et la période avec T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

La longitude géographique se calcule à partir de la rotation de la terre résultant du temps passé entre les 2 apogées ou sont effectué les manœuvre :

$l_1 = l_0 + 2*\pi/T_{final}*(t_1-t_0)$ avec l0 = 0, $t_0 = 0$ et $t_1 = n_1*T_{1+}\ t_0$

$l_2 = l_1 + 2*\pi/T_{final}*(t_2-t_1)$ avec $t_2 = n_2*T_{2+}\ t_1$

Par optimisation, on choisit i_1, i_2, n_1 et n_2 tel que les manœuvres DV1 et DV2 sont décroissantes et que la longitude final l_2 soit égal à 50° Est soit 310°Ouest