

Rapport de projet d'Analyse Numérique

Modélisation de la propagation d'une épidémie

Par Enzo Isnard, Sacha Psalmon et Baptiste Schall

Compte tenu de la situation actuelle du monde, il semble intéressant de pouvoir modéliser la propagation des épidémies afin d'y être mieux préparé. Notre objectif au travers de ce projet est donc de proposer une modélisation basée sur le modèle SIR, un modèle compartimental assez simple. Ce modèle se base sur trois compartiments : S (individus sains), I (individus infectés), R (individus rétablis maintenant immunisés). Pour suivre l'évolution de ces compartiments on considère le modèle suivant :

$$\begin{cases} S' = -\frac{\beta}{N}(I + \delta T)S \\ I' = \frac{\beta}{N}S(I + \delta T) - (\alpha + \gamma)I \\ T' = \alpha I - \eta T \\ R' = \gamma I + \eta T \end{cases}$$

- α représente le taux d'individus infectés sélectionnés pour être traités par unité de temps.
- β représente le nombre moyen de personnes rencontrés par un individu par unité de temps.
- γ représente le taux de guérison, donc le nombre d'individus quittant le compartiment I par unité de temps.
- δ représente la réduction d'infectivité de la maladie.
- η le taux de rétablissement ou de décès, donc le nombre d'individus quittant le compartiment T par unité de temps

Pour résoudre ce système nous allons tester plusieurs méthodes numériques de résolution d'équations différentielles. Nous allons les comparer afin de trouver la méthode optimale pour modéliser ce problème.

Nous avons développé 4 méthodes:

- la méthode d'Euler explicite
- la méthode d'Euler implicite avec l'algorithme du point fixe

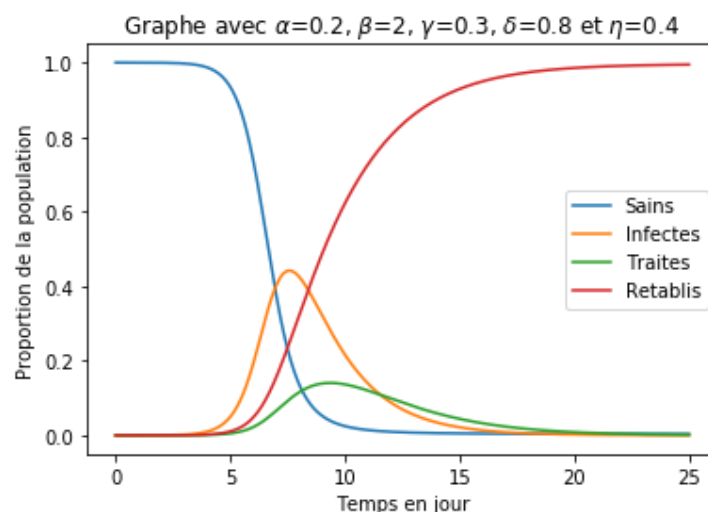
- la méthode d'Euler implicite avec l'algorithme de Newton
- la méthode de Runge-Kutta 4

Nous ne détaillons pas les méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta puisque nous avons vu leurs fonctionnements lors du 1er semestre.

Dans la méthode d'Euler implicite nous avons à un moment besoin de résoudre un problème non-linéaire de la forme $X_{n+1} = X_n + h \times F(X_{n+1})$. En mettant cette équation sous la forme $X_{n+1} - X_n - h \times F(X_{n+1}) = 0$ et en posant une fonction $G(u) = u - X_n - h \times F(u)$, on obtient l'équation suivante : $G(u) = 0$, ce problème est solvable avec la méthode de Newton. De manière équivoque en posant la fonction $G(u) = X_n + h \times F(u)$, on obtient l'équation suivante, $G(u) = u$, ce problème est solvable avec la méthode du point fixe. Nous avons implémenté ces deux méthodes.

Nous avons d'abord essayé la méthode de Newton parce que nous étions à peu près sûrs qu'elle allait converger. Elle était cependant assez lourde à implémenter puisqu'il fallait calculer la jacobienne de f et résoudre un système linéaire à chaque itération. La méthode s'est retrouvée être assez lente à exécuter et peu stable quand on mettait un temps finale assez grand. Nous avons donc décidé d'implémenter la méthode du point fixe. Au début nous avons peur que la fonction que nous utilisions ($G(u) = x[i, :] + h \times f(u)$) ne soit pas contractante. En l'implémentant nous avons remarqué que la méthode convergeait bien. Cela peut s'expliquer par le fait que $G'(u) = h \times f'(u)$ et donc que si h est assez petit et que $\|f'(u)\|$ n'est pas trop grand alors $\|G'(u)\| < 1$ et donc en utilisant le théorème des accroissements finis on peut en déduire que G est contractante. Cette méthode s'est révélée être bien plus efficace et simple à implémenter que la méthode de Newton.

On obtient comme résultat avec la méthode de Runge-Kutta.



Nous avons ensuite expérimenté en changeant les paramètres du modèles afin de mieux pouvoir déterminer leurs effets sur la propagation de cette épidémie hypothétique. Nous pouvons remarquer que les scénarios qui ne résultent pas en l'infection de la totalité de la population sont assez rares. On remarque que α n'a un effet significatif que si η est assez élevé et δ assez faible. Entre autre, pour qu'il ait un réel impact sur l'épidémie, il faut que le traitement réduise fortement l'infectiosité du patient et qu'il le soigne rapidement. On

peut cependant remarquer que ces paramètres n'ont pas énormément d'effet à eux seuls sur la proportion de la population touchée par l'épidémie, mais plutôt sur la durée de l'épidémie en elle même.

Nous remarquons cependant quelque chose d'intéressant, le paramètre ayant le plus d'impact quant à la proportion de la population qui sera touchée par l'épidémie est β (nombre de personnes rencontrées en moyenne par unité de temps par chacun des membres de la population). Il semble impossible de contenir une épidémie si ce paramètre n'est pas pris en compte. A partir du moment où β est faible, les résultats semblent spectaculaires. De telles observations peuvent donc nous conforter dans l'idée que les mesures de confinement et de distanciation sociale sont les plus efficaces pour faire face aux épidémies.

Nous avons implémenté un total de 4 méthodes différentes, ces méthodes se différencient par leurs précisions et leurs temps d'exécution.

Pour les comparer nous prenons des cas particuliers :

Temps d'exécution en seconde en fonction du nombre d'itérations avec $t_0 = 0$ et $t_f = 15$:

Nombre d'itérations	Runge- Kutta 4	Euler Implicite- Point fixe	Euler Implicite- Newton	Euler Explicite
100	0.02	0.07	0.26	0.002
300	0.037	0.16	0.99	0.005
1000	0.11	0.63	1.56	0.018

Grâce à ces exemples on peut classer ces méthodes en fonction de leurs temps d'exécutions :

- Euler Explicite
- Runge-Kutta 4
- Euler Implicite-Point fixe
- Euler Implicite-Newton

Hormis le temps d'exécution ces méthodes se différencient par leurs stabilités. En effet certaines de ces méthodes ont besoin de paramètres spécifiques pour être fonctionnelles. Les méthodes d'Euler et en particulier les méthodes implicites ont besoin d'un nombre d'itérations minimal pour renvoyer des résultats convenables. Celui-ci dépend de la durée de la simulation, plus la simulation est longue plus un nombre d'itérations grand est recommandé.

On observe en manipulant les différents paramètres (α, β, \dots) que la méthode la plus stable est la méthode de Runge-Kutta 4, vient ensuite la méthode Euler explicite puis les méthodes implicites.

Conclusion & Ouverture

Ce projet nous a permis de mettre en place les méthodes numériques vues en cours. Dans notre cas les méthodes implicites se sont trouvées être moins efficaces et plus lentes que les méthodes explicites. La stabilité qu'elles pourraient apporter ne nous était pas très utile puisque le système n'était pas très "raide".

Pour améliorer le projet nous pensons qu'il serait intéressant de rajouter un compartiment pour les personnes décédées de la maladie.

On a donc essayé de simuler ce modèle :

$$\begin{cases} S' = -\frac{\beta}{N}(I + \delta T)S \\ I' = \frac{\beta}{N}(I + \delta T)S - (\alpha + \gamma + \mu_1)I \\ T' = \alpha I - (\eta + \mu_2)T \\ R' = \alpha I + \eta T \\ M' = \mu_1 I + \mu_2 T \end{cases}$$

et on obtient avec la méthode d'euler explicite le graphe suivant :

