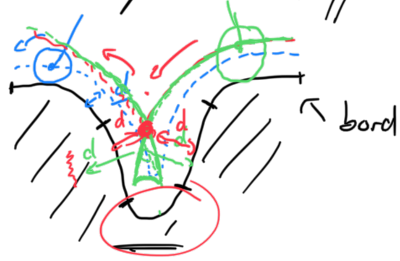
Problèmes d'intersection (calculs dans le plan)

0) Motivation

• Courbe parallèle (offset)



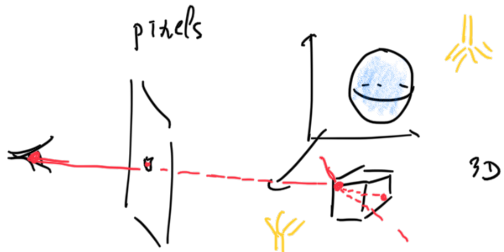
d : rayon de l'outil.

Opération première : calcul de la courbe parallèle

Pb : détecter les pts d'auto-intersection de la courbe verte

"calibration de l'outil".

• Lancer de rayon (ray tracing)



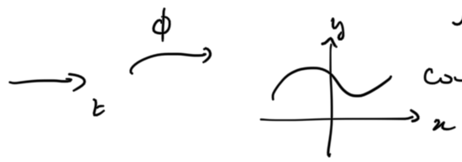
écran où l'on produit l'image

nombreux pts d'intersect.

⇝ On va s'intéresser à des algorithmes d'intersection entre deux courbes planes.

Les courbes planes possèdent deux représentations :

1) paramétrisation : $t \in [0,1] \to \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(t)$



courbe param.

2) équation implicite : la courbe est donnée par la condition $f(x,y)=0$.

Ex: cercle : $\left| \begin{array}{l} t \mapsto \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right) \quad \text{param.} \\ x^2+y^2-1=0 \end{array}\right.$

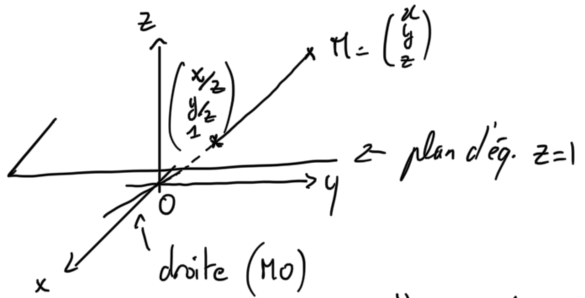
I] Coordonnées homogènes.

→ 1) Théorème de l'algèbre : $P(t) \in \mathbb{C}[t]$, de degré n, alors $P(t)$ a toujours n racines, en comptant les multiplicités :

$$P(t) = c.\prod (t-t_i)^{q_i} \qquad \sum q_i = n$$

Théorème de Bezout : Étant donnés deux courbes $\mathcal{C} : f(x,y)=0$ de degré m et $\mathcal{D} : g(x,y)=0$ de degré n, on a toujours $m.n$ points d'intersection, en comptant les multiplicités, mais aussi en se plaçant dans le plan projectif.

. Le plan projectif (pour bien compter les intersections).



$\Pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \longmapsto \left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right)$

Déf : $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \big/ (x,y,z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $\lambda \neq 0$

"un point de $\mathbb{P}^2$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$".

- Les droites qui coupent $z=1$ sont en bijection avec $\mathbb{R}^2$
  les points "affines" (ou de $\mathbb{R}^2$) $(x,y,1)$
- On a ajouté toutes les droites qui sont dans le plan $z=0$.
  les points à l'infini " $(x,y,\underline{0})$

✱ Un point de l'espace projectif est noté $(x:y:z)$

- on a $(x:y:z) = (\lambda x : \lambda y : \lambda z) \quad \forall \lambda \neq 0$

et ce pour que $(0:0:0)$ n'existe pas.

- Soit $z \neq 0$, et donc $(x:y:z) = \left(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right)$ est un point de $\mathbb{R}^2$
- Soit $z = 0$ et on a un point à l'infini : $(x:y:0)$

* Fonctions qui s'annulent sur $\mathbb{P}^2$.

- Si $f(x,y,z) = 0$ pour $(x:y:z) \in \mathbb{P}^2$, on doit avoir que $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0 \quad \forall \lambda \neq 0$.
- Pour un polynôme, cela correspond à la notion de polynômes homogènes : $f(x,y,z) = \sum_{i,j,k} a_{ijk}\, x^i y^j z^k$ est homogène si $a_{ijk} \neq 0$ uniquement pour $i+j+k = d$ (degré de f).

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \sum a_{ijk} (\lambda x)^i (\lambda x)^j (\lambda x)^k = \sum a_{ijk} \lambda^{i+j+k} x^i y^j z^k$$
$$= \lambda^d \left(\sum a_{ijk} x^i y^j z^k\right) = \lambda^d f(x,y,z).$$

- Partant d'une équation définie sur $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 0$, on construit son polynôme homogène associé comme suit :

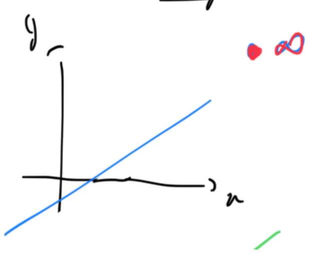
$$f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x^i y^j \qquad d = \deg(f(x,y)) = \max\{i+j : a_{ij} \neq 0\}$$

On pose $F(x,y,z) := z^d \cdot f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$

car $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \sum a_{ij} \left(\frac{x}{z}\right)^i \left(\frac{y}{z}\right)^j = \sum a_{ij} \frac{1}{z^{i+j}} x^i y^j$

et donc $z^d f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \sum a_{ij}\, x^i y^j z^{d-i-j} \qquad (d-i-j \geq 0)$

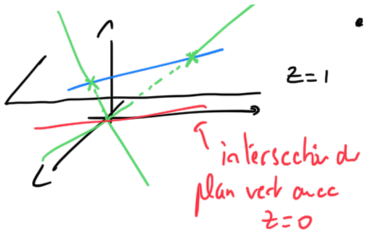
Exemples • une droite $ax + by + c = 0$ ds $\mathbb{R}^2$



$ax + by + cz = 0$ ds $\mathbb{P}^2$

Quels sont les points de la droite dans $\mathbb{P}^2$?

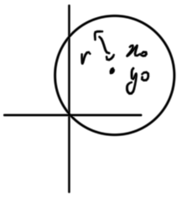
• si $z \neq 0$, c'est les points de la droite ds $\mathbb{R}^2$



• si $z=0$, $ax+by=0$ et donc $(x,y)=\lambda(-b,a)$, $\lambda\neq 0$

on a un seul point dans $\mathbb{P}^2$ qui est le point

$$(-b:a:0)=(-\lambda b:\lambda a:0)\quad \forall \lambda\neq 0.$$



• le cercle : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2=0$

pour homogénéiser, on fait :

$$z^2\times\left[\left(\frac{x}{z}-x_0\right)^2+\left(\frac{y}{z}-y_0\right)^2-r^2\right]$$

$$=(x-x_0z)^2+(y-y_0z)^2-r^2z^2$$ eq. du cercle dans $\mathbb{P}^2$.

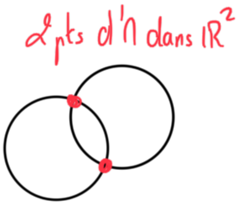
Quels sont les points sur ce cercle ?

- si $z\neq 0$ on a le cercle "classique" dans $\mathbb{R}^2$

- si $z=0$, $x^2+y^2=0=(x-iy)(x+iy)$

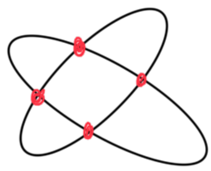
On obtient deux points à l'infini :

$(i:1:0)$ et $(-i:1:0)$ points cycliques.



• pts cycliques à l'∞ ds $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Si on avait pris deux ellipses, on a bien 4 points d'intersection (Bezout).



← cas général de deux courbes de degré 2.

. avec 2 cercles il est nécessaire d'introduire $\mathbb{P}^2$ pour avoir 4 pts d'∩.

2) Intersection de deux droites dans le plan

. On se donne un point $P=(x:y:z)$ | "cas classique" et une droite $\mathcal{L} : ax + by + cz = 0$ | $z=1$ "

- On représente P et L tous les deux par des vecteurs 3D :

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- $P \in \mathcal{L} \iff P \cdot \mathcal{L} = 0 \qquad (\mathcal{L} \in P \iff \mathcal{L} \cdot P = 0)$

dualité géométrique

- Calculer $\mathcal{L}$ passant par $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $P_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L} = P_1 \wedge P_2$$

- Quel est le point d'intersection entre $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$

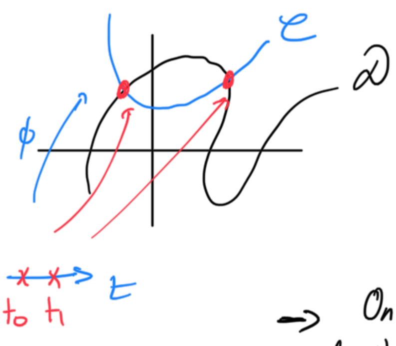
$$P = \mathcal{L}_1 \wedge \mathcal{L}_2$$

Remarque : si on a 2 droites // : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$ pts à l'∞

II] Intersection d'une courbe paramétrée avec une courbe implicite

$$\mathcal{C} : \quad t \overset{\phi}{\longmapsto} \left(\frac{x(t)}{w(t)}, \frac{y(t)}{w(t)} \right) = \frac{\sum_i w_i P_i B_i^n(t)}{\sum w_i B_i^n(t)} \qquad (x(t) : y(t) : w(t))$$

$$\mathcal{D} : \quad \{ (x, y) \,/\, f(x,y) = 0 \} \quad \text{ou} \quad \{ (x : y : z) \,/\, F(x,y,z) = 0 \}$$



On veut calculer les points d'∩.

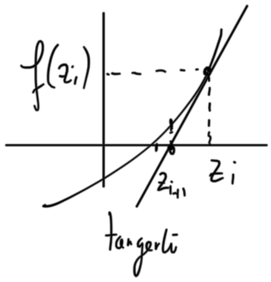
Objectif : minimiser le nombre de variables.

⟶ On substitue la paramétrisation de $\mathcal{C}$ dans l'éq. implicite de $\mathcal{D}$: cela fournit une condition en t pour les points d'intersection.

$\Rightarrow$ $F(x(t), y(t), w(t)) = 0$ polynôme en t à résoudre.

- Comment résoudre un polynôme $P(t) \in \mathbb{C}[t]$?

1) <u>Newton</u> $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$



$z_0 \in \mathbb{C}$ $\qquad z_{i+1} = z_i - \dfrac{P(z_i)}{P'(z_i)}$

- Nécessite de donner z_0 (instabilité)
- Convergence non garantie, mais quadratique
- Ne trouve qu'une seule solution à la fois

2) <u>Matrice compagnon</u>

$P(t) = p_0 + p_1 x + \dots + p_d t^d \in \mathbb{C}[t]$

On construit la matrice

$$M := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 & -p_0/p_d \\ 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & -p_1/p_d \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & -p_{d-1}/p_d \end{pmatrix}}_{d} \left.\vphantom{\begin{pmatrix}a\\a\\a\\a\\a\end{pmatrix}}\right\} d$$

$$\det(M - t\,\mathrm{Id}) = \frac{(-1)^d}{p_d}\, p(t)$$

transfert vers des méthodes d'alg. linéaire.

$\rightsquigarrow$ les valeurs propres de la matrice M sont exactement les racines de $p(t) \in \mathbb{C}[t]$.

3) <u>Résolution dans la base de Bernstein</u>.

- On suppose que $P(t)$ est donné dans la base de Bernstein : $\quad P(t) = \sum p_i B_i^n(t)$, $p_i \in \mathbb{R}$.

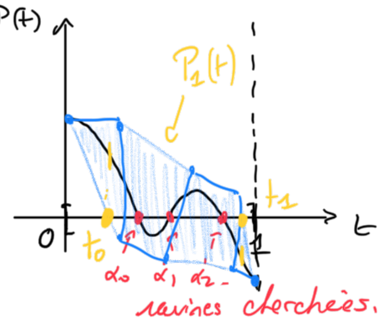
On cherche les racines pour $t \in [0;1]$

- Idée : utiliser les propriétés d'env. convexe.

On considère le graphe de la courbe de $P(t)$.

$t \longmapsto (t, P(t))$
$\in [0,1]$

$t = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} B_i^n(t)$



donc le graphe est donné par

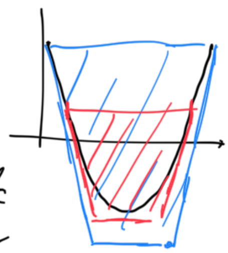
la courbe de Bézier : $C(t) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\begin{pmatrix} i/n \\ p_i \end{pmatrix}}_{C_i \,!!} \cdot B_i^n(t)$

Par propriété des courbes de Bézier, $C(t)$ est incluse dans l'enveloppe convexe des points de contrôle C_i.

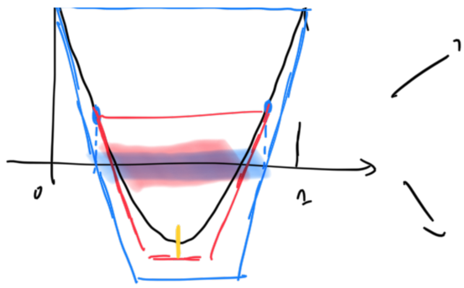
On calcule donc t_0 et t_1, les intersections de l'enveloppe convexe avec l'axe horizontal ($P(t)=0$) et on déduit que les racines de $P(t)$ (de $[0,1]$) sont nécessairement dans $[t_0;t_1]$. Par suite, on subdivise 2 fois $P(t)$ et on obtient une nouvelle équation $P_1(t)$, et donc une nouvelle courbe pour le graphe. Et on itère.

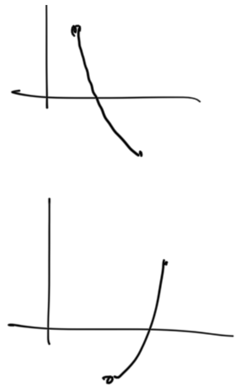
. deux options : - soit on converge rapidement

- soit on stagne



heuristique : si la réduction d'intervalle $[0;1] \to [t_0;t_1]$ est $< 20\%$, alors on subdivise en 2 morceaux.





III Intersection de deux courbes paramétrées