Relativité restreinte

Emmanuel Lafont

8 février 2026

Table des matières

I. Introduction

Une transformation de Galilée est la loi de transformation pour deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

Au XIX^e siècle, l'électromagnétisme des équations de Maxwell et la mécanique classique de Newton semblent avoir couvert l'ensemble des phénomènes physiques. Cependant, contrairement aux équations de la mécanique classique, les équations de l'électromagnétisme ne sont pas invariantes par transformation de Galilée.
En effet, là où en mécanique classique, la vitesse d'un objet dépend du référentiel par lequel on l'observe, en électromagnétisme la vitesse de la lumière est fixée, peut importe le référentiel.
Il y a une tentative de trouver un référentiel privilégié pour l'électromagnétisme : l'Éther. Mais l'experience de Michelson-Morley en 1887 montre que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels inertiels.

C'est Einstein qui, en 1905, propose une nouvelle théorie de la relativité pour résoudre ce paradoxe.

II. Postulats de la relativité restreinte

La relativité restreinte repose sur deux postulats.

Postulat premier

Toutes les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel inertiel.

Postulat second

La vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels inertiels.

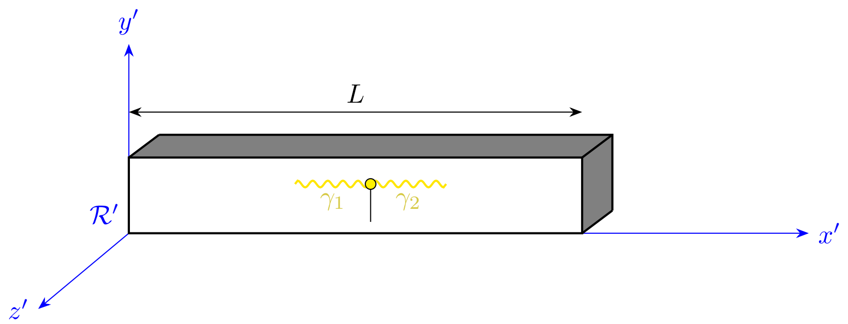
On fait aussi l'hypothèse que l'espace est homogène et isotrope, et que le temps est homogène.

III. Conséquences des postulats

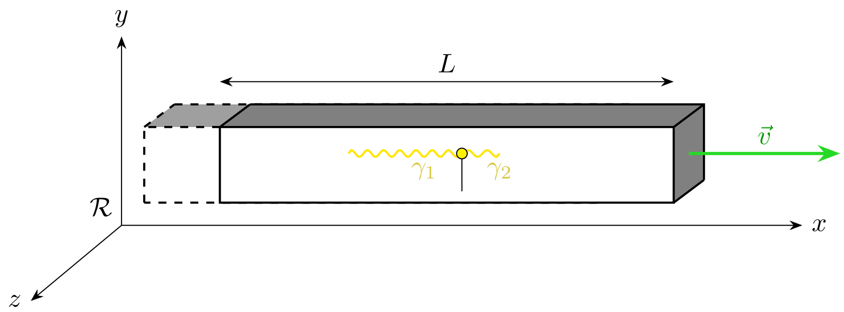
1. Perte de la simultanéité

La première conséquence des postulats est que le temps est relatif. Deux événements simultanés dans un référentiel ne le sont pas forcément dans un autre référentiel en mouvement par rapport au premier.

On considère un wagon (référentiel $\mathcal{R}'$) de longueur L en mouvement à la vitesse v par rapport au sol (référentiel $\mathcal{R}$). Au milieu du wagon, une source lumineuse émet deux photons en direction des deux extrémités du wagon.



Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, les photons ont une distance $d' = \frac{1}{2}L$ à parcourir à la vitesse c. Ils la parcourent donc tout deux en un temps $t' = \frac{L}{2c}$. Les événements sont donc simultanés.



Dans le référentiel $\mathcal{R}$, le système est en mouvement. Le photon 1 doit parcourir

$$d_1 = \frac{1}{2}L - v\Delta t = \frac{1}{2}L - v\frac{d_1}{c} = \frac{Lc}{2(c+v)}$$

là ou le deuxième doit parcourir quant à lui

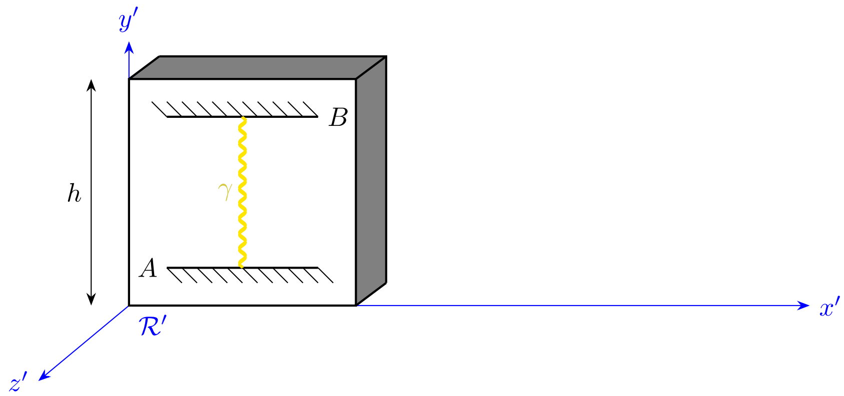
$$d_2 = \frac{1}{2}L + v\Delta t = \frac{1}{2}L + v\frac{d_2}{c} = \frac{Lc}{2(c-v)}$$

Le premier photon parcoure le wagon en un temps $t_1 = \frac{L}{2(c+v)}$ là où le deuxième le fait en un temps $t_2 = \frac{Lc}{2(c-v)} > t_1$.
Ils n'arrivent donc pas en même temps, on perd la simultanéité des événements !

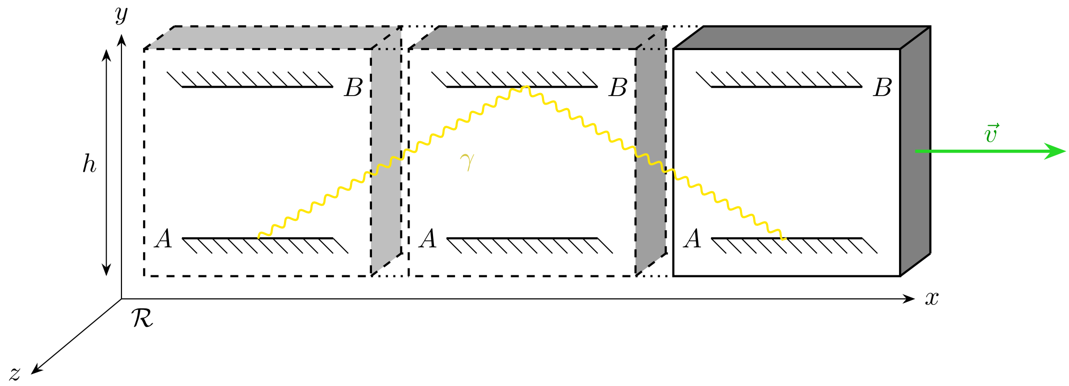
2. Dilatation du temps

La seconde conséquence directe des postulats de la relativité restreinte est la dilatation du temps. En fonction du référentiel, le temps s'écoule à des vitesses différentes.

On reconsidère notre wagon et les référentiels de la partie précédente. On place désormais deux miroirs qui se font face, avec un photon qui se déplace entre les deux.



Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le photon fait un aller-retour en un temps $\Delta t' = 2\frac{h}{c}$.



D'après le premier postulat, le photon est obligé de revenir au centre du miroir A après un rebond, car c'est son comportement en $\mathcal{R}'$.
En notant d la distance parcourue par le photon du point de vue de $\mathcal{R}$ entre une periode Δt, on a :

$$d = 2\sqrt{v^2\frac{\Delta t^2}{4} + h^2} = c\Delta t$$

Donc :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{4h^2}{c^2 - v^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On appelle le facteur $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ le *facteur de* LORENTZ. On a $\gamma \geq 1$ et comme $\Delta t = \gamma \Delta t'$, la période observée dans $\mathcal{R}$ est plus longue que celle de $\mathcal{R}'$.
On appelle $\Delta t'$ le *temps propre* de $\mathcal{R}'$. Les temps propres sont toujours les plus cours.

IV. Cadre général

Définition IV.0.1. Référentiel

Un *référentiel* est un solide (un ensemble de points fixes entre eux) par rapport auquel on repère une position ou un mouvement.

Un référentiel est donc une collection de montres et de règles à travers l'espace et le temps pour pouvoir mesurer chaque point.

Définition IV.0.2. Événement

Un *événement* est un point de l'espace-temps, qui peut donc être labellisé par des coordonées (x, y, z, t).

Définition IV.0.3. Intervalle

On appelle *intervalle entre deux événements* E_1, E_2 le vecteur distance $\Delta_{12} = E_1 - E_2$.
L'*intervalle invariant* est la norme (au carré) de ce vecteur :

$$\Delta s^2 = \|\Delta_{12}\|^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

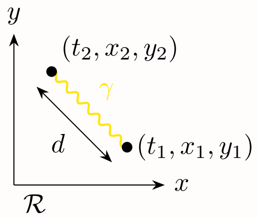
Remarque : Comme on s'interesse pricipalement à la norme de l'intervalle, $\Delta_{12} = E_1 - E_2$ et $\Delta_{21} = E_2 - E_1$ correspondent au même intervalle.

Propriété IV.0.1.

L'intervalle invariant Δs^2 est invariant par changement de référentiel, et donc indépendant ce ceux ci.

D//

Pour simplifier les calculs, on se place dans un espace à deux dimentions.
On considère d'abord le cas d'un photon, qui part d'un événement (t_1, x_1, y_1) vers un événement (t_2, x_2, y_2).



On a $d = c\Delta t$ car le photon parcourt la distance d en un temps Δt à la vitesse c. De plus, géométriquement, $d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$.
On a donc $d^2 = c^2\Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Ainsi :

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 = 0$$

Dans un autre référentiel $\mathcal{R}'$, on a $d' = c'\Delta t'$ car le photon parcourt la distance d' en un temps $\Delta t'$ à la vitesse c' (on considère qu'à priori $c' \neq c$ pour mettre en évidence le postulat 2). De plus, géométriquement, $d'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$.
On a donc $d'^2 = c'^2\Delta t'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$. Ainsi :

$$\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 = (c^2 - c'^2)\Delta t'^2 = 0$$

d'après le postulat 2.
Ainsi pour tout référentiel, on a $\Delta s^2 = \Delta s'^2 = 0$. Il existe donc un constante k telle que $\Delta s^2 = k\Delta s'^2$.

On généralise ce résultat. On considère désormais 3 référentiels $\mathcal{R}_a, \mathcal{R}_b, \mathcal{R}_c$. On note la vitesse $\vec{v}_{ij} = \vec{v}(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_j)$. On a :

$$\begin{cases} \mathrm{d}s_a^2 = k(v_{ab})\mathrm{d}s_b^2 \\ \mathrm{d}s_a^2 = k(v_{ac})\mathrm{d}s_c^2 \\ \mathrm{d}s_b^2 = k(v_{bc})\mathrm{d}s_c^2 \end{cases} \implies \mathrm{d}s_a^2 = k(v_{ab})k(v_{bc})\mathrm{d}s_c^2 = k(v_{ac})\mathrm{d}s_c^2$$

On a donc

$$k(v_{bc}) = \frac{k(v_{ac})}{k(v_{ab})}$$

Or $k(v)$ ne dépend que $\|\vec{v}\|$.
Mais $\|\vec{v}_{bc}\|$ dépend de l'angle α entre $\vec{v}_{ab}$ et $\vec{v}_{ac}$. On dérive donc par α :

$$\frac{\partial v_{bc}}{\partial \alpha}\frac{\partial k}{\partial v}(v_{bc}) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{k(v_{ac})}{k(v_{ab})}\right) = 0$$

Comme $\frac{\partial v_{bc}}{\partial \alpha} \neq 0$, alors $\frac{\partial k}{\partial v}(v_{bc}) = 0$.

On a ensuite $\mathrm{d}s_a^2 = k\mathrm{d}s_b^2 = k^2\mathrm{d}s_c^2 = k^3\mathrm{d}s_a^2$. Or la seule racine cubique réelle de l'unité est 1.
D'où $k = 1$ et $\mathrm{d}s_a^2 = \mathrm{d}s_b^2 = \mathrm{d}s_c^2$ i.e. l'intervalle $\mathrm{d}s$ est bien invariant par changement de référentiel.

Définition IV.0.4. Genre des intervalles

On s'interesse au signe de $\mathrm{d}s^2$ entre deux événements.

- Si $\mathrm{d}s^2 > 0$, l'intervalle est de *type temps* ;
- Si $\mathrm{d}s^2 = 0$, l'intervalle est de *type lumière* ;
- Si $\mathrm{d}s^2 < 0$, l'intervalle est de *type espace*.

Propriété IV.0.2.

- Dans un intervalle de type temps, les deux événements peuvent être reliés par un objet matériel (de vitesse $v < c$) ;
- Dans un intervalle de type lumière, les deux événements peuvent être reliés par un photon ;
- Dans un intervalle de type espace, les deux événements ne peuvent pas être reliés par un signal causal.

Propriété IV.0.3.

- Pour un intervalle temporel, il existe un référentiel tel que $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$;
- Pour un intervalle spatial, il existe un référentiel tel que $\mathrm{d}t = 0$.

Définition IV.0.5. Référentiel propre, temps propre

Pour un objet matériel, on appelle *référentiel propre* le référentiel où il se trouve au repos.
On a donc $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$.

On appelle alors le temps τ qui s'écoule dans ce référentiel le *temps propre*. Le temps propre est toujours le temps le plus court mesuré pour cet objet. On a alors $\mathrm{d}\varsigma^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2$.

Pour un photon, comme dans tout référentiel il se meut à une vitesse $c \neq 0$ alors il n'exite pas de référentiel propre. On peut cependant lui attribuer un temps propre qui ne s'écoule pas : $\tau = 0$.

D Dilatation du temps dans le cas général

On considère un espace à une dimentions pour alléger le calcul.

On considère une montre dans son référentiel propre $\mathbb{R}$, de temps propre $\mathrm{d}\tau$.
Dans un autre référentiel $\mathcal{R}$, les variations infinitésimales sont à priori non nulles. On a par invariance :

$$c^2\mathrm{d}t - \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\varsigma^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2$$

On peut alors calculer le temps propre :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c} &= \frac{1}{c}\sqrt{c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2} \\
&= \frac{\mathrm{d}t}{c}\sqrt{c^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\
&= \mathrm{d}t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \\
&= \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}\tau$$

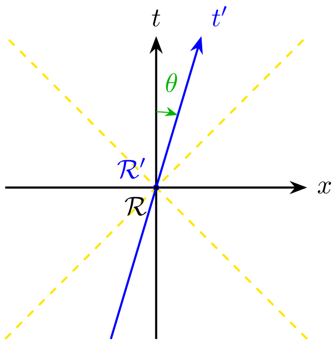
Notation IV.0.1. Unités naturelles

Afin de simplifier les équations, on prend la convention $c = 1$.
On a par exemple $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$ ou encore $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.
L'emplacement de c peut être retrouvé par analyse dimensionnelle si besoin.

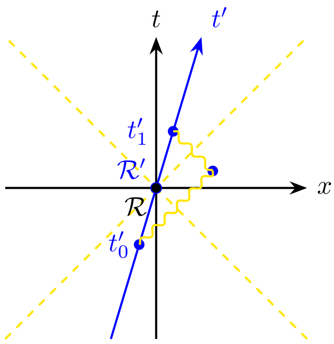
1. Diagrammes d'espace-temps

a) Représentation de différents référentiels

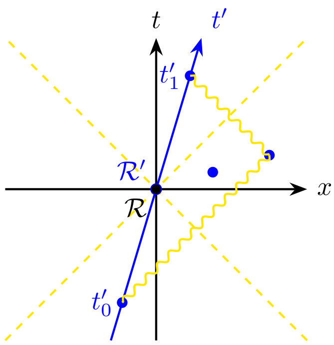
On considère un reférentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement à la vitesse v par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$. Dans le diagramme d'espace-temps, l'axe des temps t' de $\mathcal{R}'$ est incliné d'un angle θ par rapport à l'axe des temps t de $\mathcal{R}$, avec $\tan\theta = v/c$.
Pour observer cela, il suffit de tracer la trajectoire d'un point fixe dans $\mathcal{R}'$, qui se déplace donc à la vitesse v dans $\mathcal{R}$, car l'axe du temps correspond aux points $(t', x' = 0)$.
On trace aussi la trajectoir d'un photon, qui est indépendante du référentiel, et qui correspond à une droite d'inclinaison de 45° (car $c = 1$) dans le diagramme d'espace-temps.



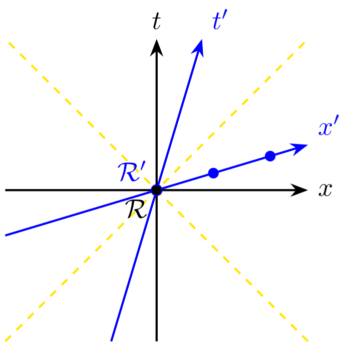
On peut remarquer que les axes t' et x' sont symétriques par rapport à la droite du photon, qui correspond à l'axe de la lumière, mais on va plutot tracer l'axe x' via une expérience de pensée.
On se place dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et on règle notre horloge à $t'_0 = -10$ s. On place un miroir à $x' = 10$ m et on envoie un photon vers ce miroir. Le photon rebondit sur le miroir et revient à l'origine, qui affiche alors $t'_1 = 10$ s.
Ainsi il est réfléchi à $t' = 0$ s.



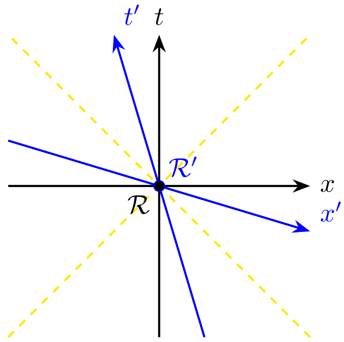
On réitère et on règle notre horloge cette fois à $t'_0 = -20$ s. On place un miroir à $x' = 20$ m et on envoie un photon vers ce miroir. Le photon rebondit sur le miroir et revient à l'origine, qui affiche alors $t'_1 = 20$ s.
Ainsi il est de même réfléchi à $t' = 0$ s.



Les points tracés sont les positions des miroirs, tous positionnés sur l'axe x'. On peut ainsi tracer l'axe x' en reliant ces points. On remarque que la symétrie par rapport à la droite du photon est vérifiée.

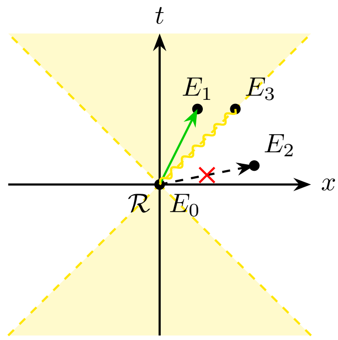


Si on avait eu une vitesse $v < 0$ (ou s'il l'on considère $\mathcal{R}$ depuis $\mathcal{R}'$) on aurait eu une pente négative pour l'axe t' et x'.

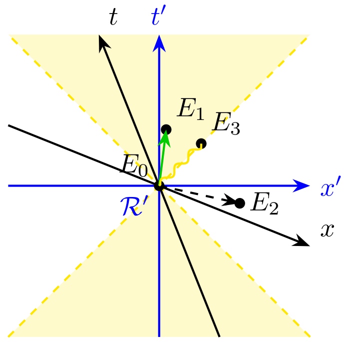


b) Cônes de lumières

On considère désormais quatres événements E_0, E_1, E_2, E_3 tels que E_0 et E_1 sont séparés par un intervalle de type temps, E_0 et E_2 sont séparés par un intervalle de type espace, et E_0 et E_3 sont séparés par un intervalle de type lumière.
On peut ainsi tracer les cônes de lumière à partir de E_0, qui correspondent à l'ensemble des événements séparés de E_0 par un intervalle de type lumière.
Les événements à l'intérieur du cône de lumière sont accessibles à partir de E_0 par un signal causal, c'est à dire que E_0 peut influencer ces événements. Par exemple un vaisseau spatial délivrant un message.
Les événements à l'extérieur du cône de lumière sont, au contraire, inaccessibles à partir de E_0. Il ne peuvent en aucun cas s'influencer ou interagir ensemble.
Les événements sur le cône de lumière sont seulemennt accessibles à partir de E_0 par un photon. Si l'on veut communiquer entre ces événements, il faut utiliser un signal lumineux.



Ce que celà implique, si l'on considère un autre référentiel en mouvement à une vitesse v' négative et suffisament élevée (en module), on peut «placer» E_2 dans le passé de E_0. Et comme ils ne peuvent aucunement s'influencer, celà ne casse pas le principe de causalité.
Si on avait pris v' positif, E_1 se serait rapproché du bord du cône, mais n'aurait jamais pu l'atteindre. Pour celà il faudrait déplacer le référentiel à la vitesse c.



Ainsi c est non seulement la vitesse de la lumière, mais surtout la vitesse de la causalité.

2. Transformation de Lorentz

a) Définition

Définition IV.2.1. Transformation de Lorentz

La *transformation de Lorentz* est la transformation qui permet de passer d'un système de coordonées d'un référentiel $\mathcal{R}$ à un autre système de coordonées d'un autre référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$.

Elle doit conserver l'intervalle invariant et être linéaire du fait des symétries de l'univers (symétrie de translation et isotropie).

On note l'ensemble des tranformations de Lorentz $O(1,3)$.

Propriété IV.2.1. Expression de la transformation de Lorentz

Soient $\mathcal{R}$ un référentiel et $\mathcal{R}'$ un autre référentiel se déplaçant d'une translation rectiligne uniforme dev vitesse $\vec{v} = v\hat{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$.
On a :

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Où :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\phi & -\operatorname{sh}\phi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\phi & \operatorname{ch}\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec $\phi = \operatorname{Argch}\gamma$. Plus généralement, pour $\vec{v}$ quelconque, on a :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y & -\gamma v_z \\ -\gamma v_x & 1 + (\gamma - 1)\frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v_x v_y}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v_x v_z}{v^2} \\ -\gamma v_y & (\gamma - 1)\frac{v_x v_y}{v^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{v_y^2}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v_y v_z}{v^2} \\ -\gamma v_z & (\gamma - 1)\frac{v_x v_z}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v_y v_z}{v^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{v_z^2}{v^2} \end{pmatrix}$$

Remarque : Pour $v \ll 1$, on retrouve la transformation de Galilée :

$$\begin{cases} t' = t - vx + o(v^2) \\ x' = x - vt + o(v^2) \end{cases}$$

D// Expression hyperbolique

Comme $\gamma > 1$, on peut poser $\phi = \operatorname{Argch}\gamma$. On a $\operatorname{ch}(\phi)^2 - \operatorname{sh}(\phi)^2 = 1$ donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}\phi &= \pm\sqrt{\operatorname{ch}(\phi)^2 - 1} \\
&= \pm\sqrt{\gamma^2 - 1} \\
&= \pm\sqrt{\frac{1}{1-v^2} - 1} \\
&= \pm\sqrt{\frac{v^2}{1-v^2}} \\
&= \pm v\sqrt{\frac{1}{1-v^2}} \\
&= \pm v\gamma
\end{aligned}$$

Or $\phi > 0$ et $v\gamma > 0$, donc par parité de sh on a :

$$v\gamma = \operatorname{sh}\phi$$

D'où :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\phi & -\operatorname{sh}\phi \\ -\operatorname{sh}\phi & \operatorname{ch}\phi \end{pmatrix}$$

D//

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tel que on ait la transformation s'exprime sous la combinaison linéaire suivante :

$$\begin{cases} t' = \alpha t + \beta x \\ x' = \gamma x + \delta t \end{cases}$$

Sur l'axe t', on a $x' = 0$ et $t = \frac{x}{v}$. De même sur l'axe x' on a $t' = 0$ et $t = xv$.
D'où :

$$\begin{cases} 0 = \alpha vt + \beta t \\ 0 = \gamma vx + \delta x \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\alpha v \\ \delta = -\gamma v \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} t' = \alpha(t - vx) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$$

Or par invariance de l'intervalle on a $t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2$. Et :

$$\begin{aligned} t'^2 - x'^2 &= \alpha^2(t - vx)^2 - \gamma^2(x - vt)^2 \\ &= \alpha^2(t^2 + v^2x^2 - 2vtx) - \gamma^2(x^2 + v^2t^2 - 2vtx) \end{aligned}$$

Or il n'y a pas de termes croisés dans $t^2 - x^2$ donc $\alpha^2 = \gamma^2$ i.e. $\alpha = \pm\gamma$.
Ainsi on a :

$$t^2 - x^2 = \gamma^2(t^2 - x^2 + v^2(x^2 - t^2)) = \gamma^2(t^2 - x^2)(1 - v^2)$$

Ainsi on a :

$$\gamma^2(1 - v^2) = 1 \iff \gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2}$$

D'où l'expression du facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

On a donc :

$$\begin{cases} t' = \pm\gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$$

Or si $v = 0$, il faut que $t' = \pm t = t$, d'où :

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$$

□

b) Propriété de la transformation de Lorentz

Définition IV.2.2. Quadrivecteur

On appelle *quadrivecteur* les vecteurs de l'espace-temps (de dimension 4). On les note :

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Définition IV.2.3. Métrique de Minkowski

On définit la *métrique de Minkowski* par :

$$\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Ainsi la norme de Minskowki se ramène à notre intervalle invariant :

$$\underline{x}^2 = \underline{x}^\top \eta \underline{x} = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Remarque : On appelle aussi l'espace de Minkowski l'*l'espace hyperbolique*.

Propriété IV.2.2. Pseudo-orthogonalité des transformation de Lorentz

Soit $\Lambda \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\Lambda \in O(1,3) \iff \Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$$

On dit alors que Λ est *pseudo-orthogonale* ou *Minkowski-orthogonale*.

D/

Soient $\underline{x}$ et $\underline{x}' = \Lambda \underline{x}$.

$\Longrightarrow$: On suppose $\Lambda \in O(1,3)$
On a :

$$\begin{aligned} \underline{x}'^2 &= \underline{x}'^\top \eta \underline{x}' \\ &= (\Lambda \underline{x})^\top \eta \Lambda \underline{x} \\ &= \underline{x}^\top \Lambda^\top \eta \Lambda \underline{x} \end{aligned}$$

Or Λ préserve la norme, donc $\underline{x}'^2 = \underline{x}^2$ i.e.

$$\underline{x}^\top \Lambda^\top \eta \Lambda \underline{x} = \underline{x}^\top \eta \underline{x}$$

Ce qui est vrai pour tout $\underline{x}$.
D'où :

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$$

$\Longleftarrow$: On suppose $\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$
On a de même :

$$\underline{x}'^2 = \underline{x}^\top \Lambda^\top \eta \Lambda \underline{x}$$

Donc

$$\underline{x}'^2 = \underline{x}^\top \eta \underline{x} = \underline{x}^2$$

Donc Λ conserve la norme de Minskowski. D'où :

$$\Lambda \in O(1,3)$$

Rappel IV.2.1. Groupe

Un ensemble $(G, \times)$ est un groupe si :

- $\forall x, y \in G, x \times y \in G$;
- $\forall x, y, z \in G, x(yz) = (xy)z$;
- $\exists \mathbb{1} \in G \mid \forall x \in G, \mathbb{1}x = x\mathbb{1} = x$;
- $\forall x \in G, \exists x^{-1} \mid xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbb{1}$;

Propriété IV.2.3. Structure de groupe

$(O_{1,3}, \times)$ est un groupe.

D/

Soient $\Lambda, \Lambda' \in O(1,3)$.

Montrons que $\Lambda\Lambda' \in O(1,3)$:

$$\begin{aligned}(\Lambda\Lambda')^\top \eta \Lambda\Lambda' &= \Lambda'^\top \Lambda^\top \eta \Lambda\Lambda' \\ &= \Lambda'^\top (\Lambda^\top \eta \Lambda)\Lambda' \\ &= \Lambda'^\top \eta \Lambda' \\ &= \eta\end{aligned}$$

D'où $\Lambda\Lambda' \in O(1,3)$.

Montrons que Λ^{-1} existe :

$$\begin{aligned}\det \eta &= \det(\Lambda^\top \eta \Lambda) \\ &= \det \Lambda^\top \det \eta \det \Lambda \\ &= \det \eta (\det \Lambda)^2\end{aligned}$$

Donc $(\det \Lambda)^2 = 1$.
D'où :

$$\det \Lambda = \pm 1 \neq 0$$

Définition IV.2.4. Groupe propre de Lorentz

On appelle *groupe propre de* Lorentz le groupe des transformations de Lorentz propres i.e. de déterminant 1.
On le note $SO(1,3)$.
Elles sont topologiquement connectées à l'identité.

Définition IV.2.5. Inversions spatiale et temporelle

On défini l'*inversion spatiale* par la transformation :

$$P = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

On défini l'*inversion temporelle* par la transformation :

$$T = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

Ce sont toutes deux des transformations de Lorentz impropres.

Propriété IV.2.4. Expression de l'inverse d'une transformation de Lorentz

$$\forall \Lambda \in O(1,3), \Lambda^{-1} = \eta \Lambda^\top \eta$$

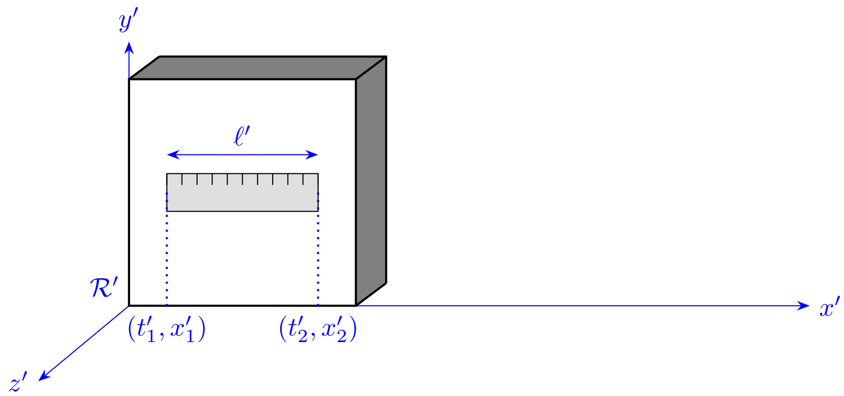
D⫽

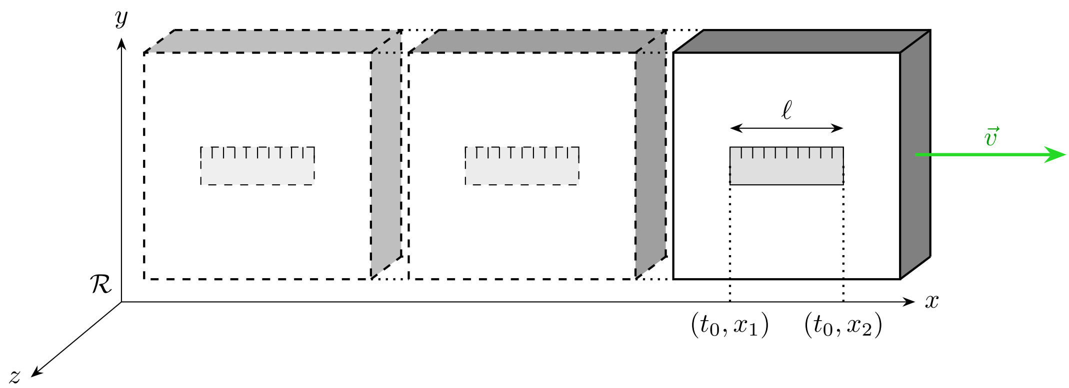
$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$$
$$\iff \Lambda^\top \eta = \eta \Lambda^{-1}$$
$$\iff \eta \Lambda^\top \eta = \eta^2 \Lambda$$
$$\iff \eta \Lambda^\top \eta = \Lambda^{-1}$$

3. Contraction des longueurs

Avec les transformations de Lorentz, on peut montrer que contrairement au temps qui se dilate, les longueurs se contractes d'un réferentiel à un autre.

On reconsidère notre wagon, et on y place cette fois une règle dedans.
On va mesure de façon **immédiate** la position des deux extrémitées de la règle, dans chaque réferentiel.





Par invarience de l'intervalle, on a :

$$\Delta s^2 = \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

Or on a mesuré, du moins dans le référentiel $\mathcal{R}$, les deux extrémités de la règle en même temps, i.e. $\Delta t^2 = 0$. Donc :

$$\ell^2 = \Delta t'^2 - \ell'^2$$

Or $t' = vx'$, donc $\Delta t' = v\ell'$. On obtient donc :

$$\ell^2 = v^2 \ell'^2 - \ell'^2 = (v^2 - 1)\ell'^2$$

D'où :

$$\boxed{\ell = \frac{1}{\gamma}\ell' \leq \ell'}$$