22/7/2014

COHERENCE et ESTIMATION DU DELAI

On calcule le délai a à partir d'un ajustement linéaire de la phase. Soient :

- φ_i = phase
- $\omega_i = 2\pi f_i$ = pulsation
- $p_i = c_i^2$ = poids (pondération)
  ↳ cohérence

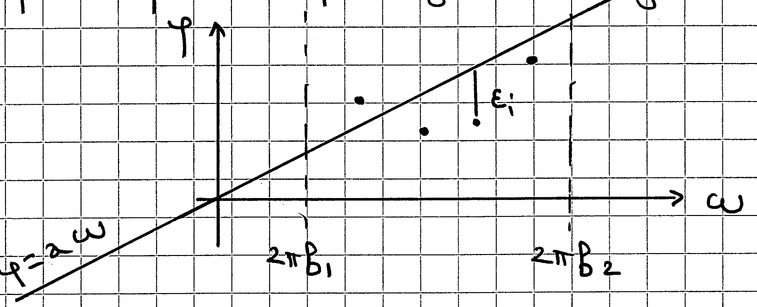
connus pour l'intervalle d'ajustement $f_1 \leq f \leq f_2$.

Avec la pondération, l'espérance mathématique $E\{x\} = \overline{x}$ d'une variable aléatoire x_i est :

$$E\{x\} = \frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i p_i}$$

↳ on cherche le délai a tel que $\varphi_i = a\,\omega_i$ (modèle)

ce qui impose un passage à l'origine



ε_i = résidu

<u>Estimateur :</u> on estime a en minimisant la variance des résidus.

Le résidu ε_i est : $\varepsilon_i = \varphi_i - a\,\omega_i$

- $\overline{\varepsilon} = \overline{\varphi} - a\,\overline{\omega}$
- $\overline{\varepsilon^2} = E\left\{(\varphi - a\omega)^2\right\} = \overline{\varphi^2} + a^2\,\overline{\omega^2} - 2a\,\overline{\omega.\varphi}$
- $\mathrm{var}\,\varepsilon = \overline{\varepsilon^2} - \overline{\varepsilon}^2 = \overline{\varphi^2} + a^2\overline{\omega^2} - 2a\,\overline{\omega.\varphi} - \overline{\varphi}^2 - a^2\,\overline{\omega}^2 + 2a\,\overline{\omega}.\overline{\varphi}$

$$= \mathrm{var}\,\varphi + a^2\,\mathrm{var}\,\omega - 2a\,\mathrm{cov}(\omega,\varphi)$$

- minimum obtenu pour $\left.\dfrac{d\,\mathrm{var}\,\varepsilon}{da}\right|_{a^*} = 0$

$\iff 2a^*\,\mathrm{var}\,\omega - 2\,\mathrm{cov}(\omega,\varphi) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{a^* = \frac{\mathrm{cov}(\omega,\varphi)}{\mathrm{var}\,\omega}}$$

calcul numérique

$$S_1 = \sum_i \omega_i^2 p_i$$

$$S_2 = \sum_i \omega_i p_i$$

$$S_3 = \sum_i \omega_i \varphi_i p_i$$

$$S_4 = \sum_i p_i$$

$$S_5 = \sum_i \varphi_i p_i$$

donnent $$a^* = \frac{S_3 \times S_4 - S_2 \times S_5}{S_1 \times S_4 - S_2^2}$$

Incertitude sur a :

on suppose que les résidus sont désormais aléatoirement distribués selon une loi normale (Gaussienne), donc :

$$\varphi_i \longrightarrow \varphi'_i = a^* \omega_i + \varepsilon_i$$

avec ε_i = tirage aléatoire $\mathcal{N}(\overline{\varepsilon}, \sigma_\varepsilon)$ d'une loi normale de moyenne $\overline{\varepsilon}$ et d'écart type σ_ε.

or

- $\overline{\varepsilon} = \overline{\varphi} - a^* \overline{\omega}$ (pas besoin par la suite)
- $\mathrm{var}\,\varepsilon = \mathrm{var}\,\varphi + a^{*2}\,\mathrm{var}\,\omega - 2a^*\,\mathrm{cov}(\omega, \varphi)$

cf. page précédente

en injectant $a^* = \dfrac{\mathrm{cov}(\omega,\varphi)}{\mathrm{var}\,\omega}$ il vient :

$$\mathrm{var}\,\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 = \mathrm{var}\,\varphi - a^{*2}\,\mathrm{var}\,\omega$$

NB calcul numérique $S_6 = \sum_i \varphi_i^2 p_i$

$$\mathrm{var}\,\varepsilon = \frac{S_6 S_4 - S_5^2}{S_4^2} - \frac{(S_3 S_4 - S_2 S_5)^2}{S_4^2 (S_1 S_4 - S_2^2)}$$

φ : que devient l'estimateur a^* quand on prend ces nouveaux résidus ? Il devient aléatoire, reste à calculer sa moyenne et son écart-type !

$$\mathrm{cov}(\omega,\varphi') = \frac{\sum_i \omega_i \varphi_i' p_i}{\sum_i p_i} - \frac{\sum_i \omega_i p_i}{\sum_i p_i} \times \frac{\sum_i \varphi_i' p_i}{\sum_i p_i}$$

$$\Rightarrow \mathrm{cov}(\omega,\varphi') = \frac{a^* \sum_i \omega_i^2 p_i}{\sum_i p_i} + \frac{\sum_i \omega_i \varepsilon_i p_i}{\sum_i p_i} - \frac{\sum_i \omega_i p_i}{\sum_i p_i} \times$$

$$\times \left\{ a^* \frac{\sum_i \omega_i p_i}{\sum_i p_i} + \frac{\sum_i \varepsilon_i p_i}{\sum_i p_i} \right\}$$

$$= a^* \,\mathrm{var}\,\omega + \frac{\sum_i \varepsilon_i \omega_i p_i}{\sum_i p_i} - \frac{\sum_i \varepsilon_i \overline{\omega} p_i}{\sum_i p_i}$$

or pour $\varepsilon_i \overset{d}{=} \mathcal{N}(\overline{\varepsilon}, \sigma_\varepsilon)$, $\sum_i x_i \varepsilon_i = \mathcal{N}\left(\overline{\varepsilon} \sum_i x_i, \sigma_\varepsilon \sqrt{\sum_i x_i^2}\right)$

donc :

$$\mathrm{cov}(\omega,\varphi') = a^* \,\mathrm{var}\,\omega + \mathcal{N}\left(\overline{\varepsilon} \underbrace{\frac{\sum_i (\omega_i - \overline{\omega}) p_i}{\sum_i p_i}}_{\emptyset}, \sigma_\varepsilon \frac{\sqrt{\sum_i p_i^2 (\omega_i - \overline{\omega})^2}}{\sum_i p_i}\right)$$

donc l'estimation de a devient :

$$a^{*\prime} = a^* + \mathcal{N}\left(0, \sigma_\varepsilon \frac{\sqrt{\sum_i p_i^2 (\omega_i - \overline{\omega})^2}}{\sum_i p_i \times \mathrm{var}\,\omega}\right)$$

ce qui signifie que l'incertitude Δa sur a^* est :

$$\Delta a = \sigma_\varepsilon \times \frac{\sqrt{\sum_i p_i^2 (\omega_i - \overline{\omega})^2}}{\sum_i p_i \times \mathrm{var}\,\omega}$$

~~numériquement~~

$$S_7 = \sum_i p_i^2 \omega_i^2 \qquad S_8 = \sum_i p_i^2 \omega_i \qquad S_9 = \sum_i p_i^2$$

$$\Rightarrow \Delta a = \sigma_\varepsilon \times \frac{S_7 + S_9 \times \left(\frac{S_2}{S_4}\right)^2 - 2 S_8 \times \frac{S_2}{S_4}}{S_4}$$